

290  
1983/3



**თბილისის უნივერსიტეტის უკრძევი**  
**ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
**PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY**

239

ISSN 0376—2637

**მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია**  
**МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ**  
**MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY**

I5

53

**თბილისი Тбилиси Tbilisi**  
**1983**



საქართველოს ენციკლოპედია  
საქართველოს ენციკლოპედია

ASTRONOMY • MATHEMATICS • MECHANICS

53



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
TBILISI UNIVERSITY PRESS



თბილისის უნივერსიტეტის შრომები  
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY  
ტ. 239 v.

---

მათემატიკა • მექანიკა  
ასტრონომია  
MATHEMATICS • MECHANICS  
ASTRONOMY

თბილისი 1983 Tbilisi



თბილისის უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკა

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 239

290 /  
1983 / 3

**МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА  
АСТРОНОМИЯ**

53

Тбилиси 1983

Редакционная коллегия

Н.Н.Вахания, Л.В.Жижиашвили, Г.А.Ломадзе, Л.Г.Магнарадзе,  
Н.Г.Магнарадзе, Л.В.Шарикадзе (редактор).

სარედაქციო კოლეგია

ნ.ვახანია, გ.ლომაძე, ლ.მადნარაძე, ნ.მადნარაძე,  
ლ.ჯიჯიაშვილი, ჯ.შარიკაძე (რედაქტორი)

Editorial Board

G.Lomadze, L.Magnaradze, N.Magnaradze, J.Sharikadze  
(Eeditor ), N.Vakhania, L.Zhizhiashvili,



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის ბიუროს რედაქციის თეორიულ-საბუნებისმეტყველო

უნივერსიტეტის შრომები  
239, 1983

УДК 513.73

СФЕРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Э.Д. Алшибая

В работе изучается специальный класс распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве – распределение, оснащенное центральным полем нормалей. Такое распределение называется сферическим.

В § I выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы распределение гиперплоскостей было сферическим; устанавливаются некоторые характеристические признаки для такого распределения; определяется характер связности для различных классов сферических распределений.

Проведенные построения записываются применительно к случаю голономного распределения в § 2.

В § 3 рассматривается аффинная гиперсфера.

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г.Ф. Лаптева.

§ I. Рассмотрим  $(n+1)$ -мерное аффинное пространство  $A_{n+1}$  со структурными уравнениями

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n+1, \quad (I)$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n.$$

კ. მარქსის სსბ. სსრ  
სახელმწიფო რესპუბლიკა  
ბიბლიოთეკა

17-632

отнесенное к подвижному реперу  $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1})$ , дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$\begin{aligned} dM &= \omega^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_\alpha &= \omega_\alpha^\rho \vec{e}_\rho. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть в  $\mathcal{H}_{n+1}$  задано распределение гиперплоскостных элементов. Поместим вершину подвижного репера в центр гиперплоскостного элемента, а векторы  $\vec{e}_i$  расположим в плоскости этого элемента. Относительно такого репера дифференциальные уравнения распределения гиперплоскостных элементов будут иметь вид:

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha} \omega^\alpha, \quad (3)$$

где  $L_{i\alpha} \neq L_{j\alpha}$ .

Продолжая систему (3), получаем дифференциальные уравнения фундаментальных объектов распределения  $\{L_{i\alpha}\}, \{L_{i\alpha}, L_{i\alpha\beta}\}, \dots$

Как известно [1], аффинной нормалью распределений называется прямая

$$x^i = \nu^i x^{n+1}, \quad (4)$$

определенная вектором

$$\vec{\nu} = \nu^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1}, \quad (5)$$

где  $\nu^i$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\nu^i + \nu^k \omega_k^i - \nu^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = \nu_\alpha^i \omega^\alpha. \quad (6)$$

Будем предполагать, что распределение оснащено полем нормалей  $\nu$ , проходящих через фиксированную точку  $P$  пространства.

Распределение, поле нормалей которого проходит через фиксированную точку пространства, будем называть сферическим.

Если  $M$ —центр текущего гиперплоскостного элемента, а  $\vec{M}$  и  $\vec{P}$  — радиус-векторы соответственно точек  $M$  и  $P$ , то

$$\vec{P} = \vec{M} + \rho \vec{\nu}. \quad (7)$$

Дифференцируя обе части этого тождества и учитывая, что нормали проходят через одну точку, будем иметь

$$d\vec{P} = d\vec{M} + \rho d\vec{\nu} + d\rho \vec{\nu} = 0. \quad (8)$$

Подставляя в равенство (8) значения

$$d\vec{M}, d\vec{\ell}_\alpha, d\vec{\nu},$$

получим

$$\begin{aligned} & [\omega^i + \rho(d\nu^i + \nu^\kappa \omega_\kappa^i + \omega_{n+1}^i) + \nu^i d\rho] \vec{\ell}_i + \\ & + [\omega^{n+1} + \rho(\nu^\kappa \omega_\kappa^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) + d\rho] \vec{\ell}_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

В силу линейной независимости векторов  $\vec{\ell}_\alpha$  будем иметь:

$$\omega^i + \rho(d\nu^i + \nu^\kappa \omega_\kappa^i + \omega_{n+1}^i) + \nu^i d\rho = 0,$$

$$\omega^{n+1} + \rho(\nu^\kappa \omega_\kappa^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) + d\rho = 0,$$

или

$$\left( \mathcal{A}_\kappa^i + \frac{\delta^i_\kappa}{\rho} \right) \omega^\kappa + \left( \mathcal{A}_{n+1}^i - \frac{\nu^i}{\rho} \right) \omega^{n+1} = 0, \quad (9)$$

$$d \ln \frac{1}{\rho} - (\nu^\kappa \omega_\kappa^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) - \frac{\omega^{n+1}}{\rho} = 0, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha^i = \nu_\alpha^i - \nu^i \nu^s L_{s\alpha}. \quad (11)$$

Учитывая, что полученная система (9) должна удовлетво-



ряться при смещении точки в любом направлении, будем иметь:

$$A_{\kappa}^i = -\frac{\delta_{\kappa}^i}{\rho}, \quad A_{n+1}^i = \frac{\nu^i}{\rho}. \quad (12)$$

Свертывая уравнения (12) по  $i$  и  $\kappa$ , определим

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{A_i^i}{n} = H. \quad (13)$$

Сравнивая уравнение (10) с уравнением для инварианта  $H$  /1/

$$d \ln H - \omega_{n+1}^{n+1} = H_{\alpha} \omega^{\alpha},$$

получим

$$H_i = \nu^{\kappa} L_{\kappa i}, \quad H_{n+1} = \nu^{\kappa} L_{\kappa n+1} + H. \quad (14)$$

Итак, если нормали  $\nu$  распределения гиперплоскостных элементов проходят через одну точку  $P$ , имеем

$$\nu^i A_{\kappa}^i = -H \delta_{\kappa}^i, \quad \nu^i A_{n+1}^i = H \nu^i, \quad H_i = \nu^{\kappa} L_{\kappa i}, \quad H_{n+1} = \nu^{\kappa} L_{\kappa n+1} + H \quad (15)$$

Докажем, что эти условия и достаточны для того, чтобы распределение было сферическим.

Возьмем точку на нормали  $\nu$

$$\vec{P} = \vec{M} + \rho \vec{\nu} \quad (*)$$

и покажем, что при наличии условий (15) все нормали пересекутся в этой точке.

Действительно, дифференцируя равенство (\*) и учитывая (15), будем иметь:

$$\begin{aligned} d\vec{P} &= \omega^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} - \frac{d \ln H}{H} \vec{\nu} + \frac{1}{H} \left[ (\nu^i \omega_{n+1}^{n+1} + \nu_{\alpha}^i \omega^{\alpha}) \vec{e}_i + (\nu^{\kappa} \omega_{\kappa}^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) \vec{e}_{n+1} \right] = \\ &= \omega^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} - \frac{1}{H} \left[ d \ln H - \omega_{n+1}^{n+1} - H_i \omega^i - (H_{n+1} - H) \omega^{n+1} \right] \vec{e}_{n+1} - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{H} \left[ \nu^i d \ln H - \nu^i \omega_{n+1}^{n+1} - \mathcal{H}_\alpha^i \omega^\alpha - \nu^i \nu^s L_{s\alpha} \omega^\alpha \right] \vec{\ell}_i = \\
 & = \omega^\alpha \vec{\ell}_\alpha - \omega^{n+1} \vec{\ell}_{n+1} - \frac{1}{H} \left[ \nu^i (d \ln H - \omega_{n+1}^{n+1} - H_i \omega^i - H_{n+1} \omega^{n+1}) + \right. \\
 & \left. + \nu^i H \omega^{n+1} + H \omega^i - \nu^i H \omega^{n+1} \right] \vec{\ell}_i = \omega^\alpha \vec{\ell}_\alpha - \omega^{n+1} \vec{\ell}_{n+1} - \omega^i \vec{\ell}_i = 0,
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\vec{dP} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Значит, для того чтобы распределение гиперплоскостных элементов

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha} \omega^\alpha,$$

оснащенное нормальями  $\nu$ ,

$$\vec{\nu} = \nu^i \vec{\ell}_i + \vec{\ell}_{n+1},$$

было сферическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{H}_\kappa^i = -H \delta_\kappa^i, \quad \mathcal{H}_{n+1}^i = H \nu^i, \quad H_i = \nu^\kappa L_{\kappa i}, \quad H_{n+1} = \nu^\kappa L_{\kappa i} + H. \quad (I6)$$

Для сферического распределения

а) Нормаль  $\nu$  совпадает с нормалью  $Q$  /I/.

В самом деле,

$$Q_\nu^i = -\frac{\tilde{H}^i}{\tilde{H}_s} \mathcal{H}_{n+1}^s = \frac{1}{H} H \nu^i = \nu^i, \quad (I7)$$

так как в этом случае

$$\tilde{H}_s^i = -\frac{1}{H} \delta_s^i, \quad \tilde{H} = \frac{1}{H}.$$

б) Инварианты  $H$  и  $K$  /I/ связаны соотношением

$$K - (-1)^n H^n = 0 \quad (K = |\mathcal{H}_j^i| = (-1)^n H^n). \quad (I8)$$

в) Абсолютные инварианты  $S$  и  $S_0$  /I/ имеют следующие значения:

$$S = \frac{K}{H^n} = (-1)^n, \quad S_0 = H \tilde{H} = 1. \quad (I9)$$

г) Направления кривизны, соответствующие данной нормали,



неопределены. Уравнения /I/

$$\left\{ \frac{\delta_{\kappa}^i}{\rho} + A_{\kappa}^i \right\} \omega^{\kappa} = 0, \quad \det \left\| \frac{\delta_{\kappa}^i}{\rho} + A_{\kappa}^i \right\| = 0$$

удовлетворяются тождественно.

д) Имеет место соотношение

$$\vec{d}\vec{\nu} + H d\vec{M} - d \ln H \vec{\nu} = 0. \quad (21)$$

Если поле нормалей  $\vec{\nu}$  проходит через бесконечно удаленную точку нормали  $\vec{\nu}$ , то тогда, как это следует из (12)

$$A_{\kappa}^i = 0, \quad A_{n+1}^i = 0. \quad (22)$$

Инварианты  $H$  и  $K$  равны нулю.

Выясним, какое строение имеют тензор кривизны и кручения в случае сферического распределения.

Пусть ось репера  $\vec{e}_{n+1}$  совмещается с нормалью  $\vec{\nu}$ , тогда уравнения движения репера  $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{\nu})$  имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= \omega^i \vec{e}_i + \omega^{n+1} \vec{\nu}, \\ d\vec{e}_i &= \omega_{\kappa}^i \vec{e}_{\kappa} + \omega_i^{n+1} \vec{\nu}, \\ d\vec{\nu} &= \nu_{\alpha}^i \omega^{\alpha} \vec{e}_i + \omega_{n+1}^{n+1} \vec{\nu}. \end{aligned}$$

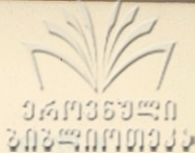
Компоненты движения репера  $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \nu)$  удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^{\kappa} \Lambda \omega_{\kappa}^i + R_{n+1 \kappa}^i \omega^{n+1} \Lambda \omega^{\alpha}, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^{\kappa} \Lambda \omega_{\kappa}^i + R_{j \alpha \beta}^i \omega^{\alpha} \Lambda \omega^{\beta}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{n+1 \kappa}^i &= \nu_{\kappa}^i && - \text{тензор кручения, а} \\ R_{j \alpha \beta}^i &= L_{j[\alpha} \nu_{\beta]}^i && - \text{тензор кривизны.} \end{aligned}$$

Тензор, полученный свертыванием по индексам  $K$  и  $m$  компонент тензора  $R_{j \alpha \beta}^k$  имеет следующее строение:



$$R_{jk} = R_{jke}^e = L_{j[k} y_{e]}^e.$$

Условия (16) в случае, когда  $\vec{e}_{n+1}$  совмещена с нормалью  $\vec{v}$ , примут вид:

$$y_{\kappa}^i = -\delta_{\kappa}^i H, \quad y_{n+1}^i = 0, \quad H_i = 0, \quad H_{n+1} = H, \quad (16')$$

а объекты  $R_{n+1\kappa}$ ,  $R_{j\alpha\beta}^i$ ,  $R_{ij}$  имеют следующие строения:

$$R_{n+1\kappa}^i = y_{\kappa}^i = -\delta_{\kappa}^i H, \quad (23)$$

$$R_{jke}^i = L_{j[k} y_{e]}^i = -L_{j[k} \delta_{e]}^i H, \quad (24)$$

$$R_{j\kappa n+1}^i = L_{j[k} y_{n+1]}^i = \frac{1}{2} [L_{jk} y_{n+1}^i - L_{j n+1} y_{\kappa}^i] = \frac{1}{2} \delta_{\kappa}^i L_{j n+1} H, \quad (25)$$

$$R_{jk} = R_{jki}^i = L_{j[k} y_{i]}^i = \frac{1}{2} [L_{jk} y_{i}^i - L_{ji} y_{\kappa}^i] = \\ = -\frac{1}{2} [n L_{jk} H - L_{jk} H] = -\frac{1}{2} (n-1) L_{jk} H, \quad (26)$$

$$R_{ike}^i = -\frac{1}{2} [L_{ek} - L_{ke}] H = \eta_{ke} H. \quad (27)$$

Тензор кривизны  $R_{jke}^i$  выражается через тензор  $R_{jk}$  следующим образом

$$R_{jke}^i = \frac{2}{n-1} R_{j[k} \delta_{e]}^i. \quad (28)$$

В случае, когда оснащающие прямые проходят через несобственную точку, т.е. когда нормали принадлежат одной связке параллельных прямых, тензоры кручения и кривизны примут вид:

$$R_{n+1\kappa}^i = 0, \quad R_{jke}^i = 0, \quad R_{j\kappa n+1}^i = 0. \quad (29)$$

Связность, индуцируемая данным оснащением, эвклидова.

Пусть сферическое распределение оснащается полем нормалей  $L$

$$\vec{L} = L^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1}, \quad L^i = -L^{i\kappa} L_{\kappa n+1} \quad (30)$$

и пусть  $\vec{L}$  совмещается с осью  $\vec{e}_{n+1}$ .

Тогда

$$\vec{L} = \vec{e}_{n+1} \Rightarrow L^i = 0 \Rightarrow L_{\kappa n+1} = 0. \quad (31)$$

Как и следовало ожидать, нормаль  $Q$  совпадает с  $L$

$$Q_L^i = -\tilde{A}_L^i A_{n+1}^j = 0 \quad (32)$$

Далее

$$R_{e s n+1}^\kappa = \frac{1}{2} \delta_s^\kappa L_{e n+1} H = 0, \quad (33)$$

поэтому

$$\hat{R}^i = R^{i\kappa} R_{\kappa s n+1}^s = 0. \quad (34)$$

Нормаль  $x^i = \hat{R}^i x^{n+1}$  также совпадает с  $L$ .

Посмотрим, что дадут условия (16).

Величины

$$\tilde{A}_L^i = L_{\kappa}^i = -L^{is} L_{s n+1 \kappa} = -\delta_{\kappa}^i H.$$

Поэтому

$$L_{\kappa n+1 j} = L_{\kappa j} H. \quad (35)$$

Далее, по условию

$$\tilde{A}_{n+1}^i = L_{\kappa}^i H = 0,$$

но

$$\tilde{A}_{n+1}^i = L_{n+1}^i = -L^{ij} L_{j n+1 n+1}.$$

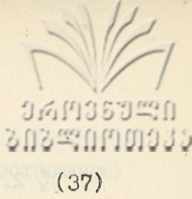
Отсюда получаем

$$L_{j n+1 n+1} = 0. \quad (36)$$

Условия

$$H_i = L_{\kappa}^{\kappa} L_{\kappa i} = 0$$

дают



$$A_{ik}^i = L_{ik}^i = -L^{is} L_{sei} L_{\kappa}^e - L^{is} L_{sek} L_i^e - L^{it} L_{tn+ik} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{tn+ik}^{it} = 2B_{\kappa} H.$$

Из того, что

$$H_{n+1} = H, \text{ т.е. } H = -\frac{A_{in+1}^i}{nH},$$

$$-nH^2 = -L^{jk} L_{n+1}^e L_{kej} - L^{ik} L_{ktn+1} L_i^m - L^{it} L_{tn+1in+1}^{it}$$

получаем

$$L_{tn+1in+1}^{it} = 2nH^2. \quad (38)$$

Для нормали Бляшке  $B \perp I$

$$\vec{B} = B^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1}, \quad B^i = -\frac{L^{ik} B_{\kappa}}{n+2} = -\frac{L^{ik} L^{ms} L_{smk}}{n+2} \quad (39)$$

строится нормаль  $Q$ , вдоль которой нормаль  $B$  переносится параллельно. В этой случае

$$A_{n+1}^e = B_{n+1}^e - B^e B^s L_{sn+1} = 0, \text{ т.е. } Q_{\nu}^i = -\frac{\tilde{A}_{\kappa}^i}{B_{\kappa}} A_{n+1}^{\kappa} = 0 \quad (40)$$

Значит нормаль  $Q$  совпадает с нормалью  $L$ . Выходит, что нормаль  $B$  вдоль нормалей  $L$  переносится параллельно.

В случае, когда нормали  $L$  проходят через бесконечно удаленную точку, получаем, что

$$R_{jke}^i = 0, \quad R_{jkn+1}^i = 0.$$

Все нормали  $L$  принадлежат одной связке параллельных прямых, а все элементы распределения, центры которых лежат на одной и той же из этих прямых, параллельны между собой.



§ 2. Пусть задано распределение гиперплоскостных элементов

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha} \omega^\alpha,$$

причем будем предполагать, что распределение голономное, т.е.

$$H_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji}) = 0.$$

При наличии такого распределения уравнение

$$\omega^{n+1} = 0$$

вполне интегрируемое и определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей. Гиперповерхности этого семейства огибают элементы распределения, а последние являются касательными плоскостями к этим поверхностям.

Будем рассматривать голономное распределение гиперплоскостных элементов, которое оснащено полем нормалей  $\nu$ , проходящих через фиксированную точку пространства. Такое распределение будем называть сферическим голономным распределением.

Проведенные построения мы запишем применительно к случаю голономного распределения, т.е. когда  $H_{ij} = 0$ .

Итак, распределение голономное. Все компоненты фундаментального объекта симметричны. Так же, как и в неголономном случае, система

$$\mathcal{F}_k^i = -H \delta_k^i, \quad \mathcal{F}_{n+1}^i = H \nu^i, \quad H_i = \nu^k L_{ki}, \quad H_{n+1} = \nu^k L_{kn+1} + H$$

дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы голономное распределение гиперплоскостных элементов было сферическим.

Аналогично, сферическое голономное распределение, так же, как и неголономное, характеризуется тем, что

а) Нормаль  $\nu$  совпадает с нормалью  $Q$ .

б) Между инвариантами  $K$  и  $H$  имеется соотношение

$$K - (-1)^n H^n = 0.$$

в) Абсолютные инварианты  $S$  и  $S_0$  принимают значения

$$S = (-1)^n, \quad S_0 = 1.$$

г) Направления кривизны, соответствующие данной нормали, неопределенны.

д) Соотношение

$$d\vec{v} + Hd\vec{M} + d \ln H \vec{v} = 0$$

имеет место и для голономного сферического распределения.

Тензоры кручения и кривизны, так же, как и в неголономном случае, имеют вид

$$R_{n+1k}^i = -\delta_k^i H, \quad R_{jke}^i = -L_{j[k} \delta_{e]}^i H, \quad R_{jsn+1}^i = \frac{1}{2} \delta_s^i L_{jn+1} H.$$

Тензор Риччи

$$R_{jk} = -\frac{1}{2} (n-1) L_{jk} H.$$

Тензор кривизны выражается через тензор  $R_{jk}$  следующим образом:

$$R_{jke}^i = \frac{2}{n-1} R_{j[k} \delta_{e]}^i.$$

Но в голономном случае

$$R_{ike}^i = -\frac{1}{2} [L_{ke} - L_{ek}] H = 0 \quad \text{и} \quad R_{[jk]} = 0. \quad (42)$$

### § 3. Рассмотрим гиперповерхность

$$\omega^{n+1} = 0,$$

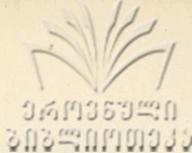
на которой определено поле нормалей

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1},$$

проходящих через фиксированную точку  $P$  пространства.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы оснащающие прямые гиперповерхности проходили через одну точку,





принимают вид:

$$A_{\kappa}^i = -\delta_{\kappa}^i H, \quad H_i = \nu^{\kappa} L_{\kappa i} \quad (43)$$

Гиперповерхность, у которой аффинные нормали пересекаются в одной точке, называется аффинной гиперсферой. Если эта точка бесконечно удалена, то такую гиперповерхность будем называть несобственной аффинной гиперсферой.

Пусть гиперповерхность оснащается полем нормалей Бляшке  $B$

$$\vec{B} = B^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1},$$

где

$$dB^i + B^e \omega_e^i - B^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = B_{\kappa}^i \omega^{\kappa} \quad (44)$$

Для того чтобы гиперповерхность была бы аффинной гиперсферой, необходимо и достаточно, чтобы величины  $A_{\kappa}^i$  и  $H_i$  удовлетворяли следующим условиям:

$$A_{\kappa}^i = -\delta_{\kappa}^i H, \quad H_i = -\frac{B_i}{n+2} \quad (45)$$

Из этих условий следует, что тензор  $A_{ij} / 2/$  в данном случае

$$A_{ij} = L_{i\kappa} A_{\kappa}^j = -L_{ij} H \quad (46)$$

Тензор  $S_{i\kappa} / I/$  обращается в нуль. По определению в голономном случае

$$S_{i\kappa} = (n+2) \left[ L_{ij} A_{\kappa}^j + L_{i\kappa} H \right], \quad (47)$$

но

$$A_{\kappa}^i = -\delta_{\kappa}^i H,$$

следовательно,

$$S_{i\kappa} = (n+2) \left[ -L_{i\kappa} H + L_{i\kappa} H \right] = 0 \quad (48)$$

Нулю будут равняться и величины  $R^i / I/$

$$R^i = N^{ji} N_j^{st} S_{ts} = 0 \quad (49)$$



Директриса Вильчинского  $W / I /$  определяется объектами

$$W^i = B^i + h^i.$$

Так как  $h^i = 0$ , то

$$W^i = B^i.$$

Значит, для аффинных гиперсфер директриса Вильчинского совпадает с аффинной нормалью Бляшке.

Уравнение канонического пучка  $/I/$  принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^i(\alpha) &= y^i + \alpha \tilde{y}^i = y^i + \alpha (W^i - y^i) = \\ &= B^i + h^i + \alpha (B^i - B^i - h^i) = B^i + (1 - \alpha) h^i. \end{aligned} \tag{51}$$

Канонически пучок проективных нормалей проходит через аффинную нормаль Бляшке.

Легко показать, что центр соприкасающейся квадрики  $/I/$

$$L_{ij} x^i x^j + \frac{2B_i}{n+2} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + (\tilde{B} + H) x^{n+1} x^{n+1} = 0 \tag{52}$$

совпадает с центром аффинной гиперсферы, т.е. с точкой

$$x^i = \frac{B^i}{H}, \quad x^{n+1} = \frac{1}{H}. \tag{53}$$

Покажем, что всякая гиперквадрика является аффинной гиперсферой.

Как известно, гиперповерхность вырождается в гиперквадрику, когда тензор Дарбу

$$N_{ijk} = (n+2)L_{ijk} - L_{ij}B_k - L_{ki}B_j - L_{jk}B_i = 0.$$

Тогда, как это показано в работе /3/,

$$L_{ijk} = \frac{1}{n+2} (L_{ij}B_k + L_{ki}B_j + L_{jk}B_i),$$

Հ. Մանթրեան ՆԱԿ. ՆՏԻ  
ՆԱԿԱԿՄԱՐՈՒՄԵՆ ԵՎ ՆԱԿԱԿՄԱՐՈՒՄԵՆ  
ՃԻՆՏԻՄԱՐՈՒՄԵՆ



$$L_{ijk e} = \frac{1}{n+2} (L_{ij} B_{ke} + L_{ki} B_{je} + L_{jk} B_{ie}) + \frac{1}{n+2} (B_k L_{ije} + B_j L_{kie} + B_i L_{jke}), \quad (54)$$

$$B_{ij} = \frac{L_{ij}}{n} (a - (n+2)\tilde{B}) + \frac{B_i B_j}{n+2},$$

$$\hat{a}_e = \hat{a} \frac{B_e}{n+2},$$

где

$$B_{ke} = L^{ij} L_{ijk e} - L^{ij} L^{kt} L_{ick} L_{jte}, \quad \tilde{B} = L_{ik} B^i B^k, \quad (55)$$

$$a = L^{ik} B_{ki}, \quad \hat{a} = a - (n+2)\tilde{B}.$$

Для аффинной нормали в объекты  $\nu^i, \nu_j^i, \mathcal{A}_j^i, H, H_i$  принимают вид

$$\nu^i = B^i = -\frac{1}{n+2} L^{is} B_s,$$

$$\nu_j^i = B_j^i = \frac{1}{n+2} [L^{is} L^{km} L_{smj} B_k - L^{ik} B_{kj}],$$

$$\mathcal{A}_{Bj}^i = B_j^i - B^i B^s L_{sj} = \frac{1}{n+2} [L^{is} L^{km} L_{smj} B_k - L^{ik} B_{kj} - \frac{L^{is} B_s B_j}{n+2}], \quad (56)$$

$$H = -\frac{\mathcal{A}_i}{n} = -\frac{1}{n(n+2)} \left[ \frac{n+1}{n+2} L^{is} B_s B_i - a \right] = \frac{\hat{a}}{n(n+2)} - \tilde{B},$$

$$H_i = -\frac{\mathcal{A}_{ki}^k}{nH},$$

$$-\mathcal{A}_{ki}^k = \frac{\hat{a}_i}{n+2} - \frac{n}{(n+2)^2} \left[ -L^{sk} L^{jm} L_{kmi} B_s B_j + 2L^{sj} B_{si} B_j \right].$$

Эти соотношения, вследствие условий (54), принимают вид

$$\mathcal{A}_{Bj}^i = \frac{1}{n+2} L^{is} L^{km} B_k \frac{1}{n+2} (L_{sm} B_j + L_{js} B_m + L_{mj} B_s) -$$



$$\begin{aligned}
 & -L^{ik} L_{kj} \frac{(\alpha - (n+2)\tilde{B})}{n} - \frac{L^{ik} B_k B_j}{n+2} - \frac{L^{is} B_s B_j}{n+2} = \\
 & = \frac{1}{n(n+2)} (\alpha - (n+2)\tilde{B}) \delta_j^i + \tilde{B} \delta_j^i, \\
 \text{т.е.} \quad & A_j^i = -\delta_j^i \left( \frac{\hat{a}}{n(n+2)} - \tilde{B} \right) = -\delta_j^i \frac{H}{B}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
 H_i = \frac{1}{nH} & \left\{ \hat{a} \frac{B_i}{(n+2)^2} - \frac{n}{n(n+2)^2} \left[ -L^{sk} L^{jm} B_s B_j \frac{1}{n+2} (L_{km} B_i + \right. \right. \\
 & \left. \left. L_{ik} B_m + L_{mi} B_k) + 2L^{sj} B_j \frac{L_{si}}{n+2} \hat{a} + 2L^{sj} B_j \frac{B_i B_s}{n+2} \right] \right\} = \\
 = \frac{1}{nH} & \left[ -\frac{\hat{a} B_i}{(n+2)^2} + \frac{n\tilde{B} B_i}{n+2} \right] = -\frac{B_i}{n+2} \left[ \frac{\hat{a}}{n(n+2)} - \tilde{B} \right] \frac{1}{H}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$H_i = -\frac{B_i}{n+2}. \quad (58)$$

Итак, для гиперквэдрики выполняются условия (43). Следовательно, всякая гиперквэдрика является гиперсферой.

Поступила 15.IX.1982

Кафедра  
алгебры и геометрии

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Д. Алшибая. Труды геометрического семинара, т.5, М., 1974.
2. Э.Д. Алшибая, Труды ТГУ, т.129, 1968.
3. Г.Ф. Лаптев. Труды Моск.матем. о-ва, № 2, 1952.



ე. ალშიბაია

სფერული განაწილება

რეზიუმე

( $n+1$ ) - განზომილებიანი აფინური სივრცეში შეესწავლება ჰიპერსიბრტყიანი ელემენტების ისეთი განაწილება, რომლის ნორმალთა ვედი გადის სივრცის ფიქსირებულ წერტილში. ასეთ განაწილებას ეწოდება სფერული განაწილება. მიღებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ჰიპერსიბრტყიანი ელემენტების განაწილება იყოს სფერული, დადგენილია ასეთი განაწილების ბოლოვნი რამდენიმე სახის მახასიათებელი ნიშანი, განხილულია სფერული ჰოლონომიური განაწილება და აფინური ჰიპერსფერო.

შრომა შესრულებულია ვ. ჭ. ლაპტევის მიხედვით.

E. Alshibaia

SPHERIC DISTRIBUTION

Summary

The distribution of hyperplane elements with normal fields crossing the fixed point of the space is studied in  $(n+1)$ -dimensional affine space. Such distribution is named sphere distribution.

A necessary and sufficient condition is obtained for distribution of hyperplane elements to be spheric; some characteristic properties of such distribution is defined; spheric holonomic distribution and affine hypersphere are considered. The work has been done the method of G.F. Laptev.

УДК 511.4

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧИСЕЛ ПРИВЛЕЧЕННЫМИ  
НЕДИАГОНАЛЬНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАТЕРНАРНЫМИ КВАДРА-  
ТИЧНЫМИ ФОРМАМИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИМИ ОДНОКЛАССНЫМ РОДАМ

Р. И. Беридзе

Пусть  $n, \mu, \omega$  - натуральные числа;  $u, v$  - нечетные;  
 $\alpha, \beta, \gamma$  - неотрицательные целые;  $p$  - простое;  $\left(\frac{u}{v}\right)$  -  
символ Якоби;  $\sigma(u)$  - сумма положительных делителей числа  
 $u$ ;

$$f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} b_{ij} x_i x_j$$

- положительно определенная кватернарная квадратичная форма с целыми коэффициентами  $b_{ij}$ ;  $\Delta$  - дискриминант этой формы (т.е. определитель формы  $2f$ );  $r(n; f)$  - число представлений числа  $n$  формой  $f$ .

В настоящей работе выводятся формулы для числа представлений натуральных чисел следующими квадратичными формами:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 \quad (\Delta = 4),$$

$$f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 \quad (\Delta = 8),$$

$$f_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 \quad (\Delta = 12).$$



- $f_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_4$  ( $\Delta = 12$ ),  
 $f_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3$  ( $\Delta = 16$ ),  
 $f_6 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_4$  ( $\Delta = 20$ ),  
 $f_7 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4$  ( $\Delta = 20$ ),  
 $f_8 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 20$ ),  
 $f_9 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 21$ ),  
 $f_{10} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_4$  ( $\Delta = 21$ ),  
 $f_{11} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_4$  ( $\Delta = 24$ ),  
 $f_{12} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 28$ ),  
 $f_{13} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4$  ( $\Delta = 32$ ),  
 $f_{14} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_4$  ( $\Delta = 32$ ),  
 $f_{15} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_4$  ( $\Delta = 32$ ),  
 $f_{16} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3$  ( $\Delta = 32$ ),  
 $f_{17} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4 + 2x_3 x_4$  ( $\Delta = 33$ ),  
 $f_{18} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + x_1 x_2$  ( $\Delta = 36$ ),  
 $f_{19} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4$  ( $\Delta = 36$ ),  
 $f_{20} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 36$ ),  
 $f_{21} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 36$ ),  
 $f_{22} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + 2x_3 x_4$  ( $\Delta = 36$ ),  
 $f_{23} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 45$ ),  
 $f_{24} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 45$ ),  
 $f_{25} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$  ( $\Delta = 45$ ),

( $\Delta = 48$ ),

( $\Delta = 48$ ),

( $\Delta = 48$ ),

( $\Delta = 48$ ),

( $\Delta = 48$ ),

( $\Delta = 48$ ),

( $\Delta = 60$ ),

( $\Delta = 64$ ),

( $\Delta = 64$ ),

( $\Delta = 64$ ),

$$f_{26} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2$$

$$f_{27} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$f_{28} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4$$

$$f_{29} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$f_{30} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3$$

$$f_{31} = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$$

$$f_{32} = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$f_{33} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_4$$

$$f_{34} = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$$

$$f_{35} = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + 3x_3x_4$$

В /I/ (стр. I46-I48) показано, что это единственные приведенные положительные недиагональные кватернарные квадратичные формы соответствующих дискриминантов. В /I/ (стр. I59-I64) же показано, что эти квадратичные формы принадлежат одноклассным родам.

Следовательно, согласно хорошо известной теореме Зигеля о представлении чисел родом квадратичных форм, имеет место равенство:

$$\chi(n; f_i) = \chi(2n; 2f_i) = \rho(2n; 2f_i) \quad (i=1, 2, \dots, 35), \quad (I)$$

где  $\rho(2n; 2f_i)$  — сумма сингулярного ряда формы  $2f_i$ .

$$\text{Пусть } n = 2^\alpha uv, \quad u = \prod p^{\beta}, \quad v = \prod p^{\beta},$$

$$\begin{matrix} p|n & p|n, p|\Delta \\ p \nmid 2\Delta & p > 2 \end{matrix}$$

$\Delta = 4^2 \omega$  ( $\omega$  — бесквадратное число). Тогда /2/



$$\rho(a_n; a f_i) \equiv \frac{\rho^2 a^{\alpha+1} u^\beta}{\Delta^{1/2}} \chi(a) \prod_{\substack{\rho|\Delta \\ \rho>2}} \chi(\rho) \times \quad (2)$$

$$\times \prod_{\substack{\rho|\Delta \\ \rho>2}} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\rho}\right) \rho^{-2}\right)^{-1} L^{-1}(a, \omega) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{\omega}{d_1}\right) d_2,$$

где

$$L(a, \omega) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{\omega}{u}\right) u^{-2} = \prod_{\rho>2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\rho}\right) \rho^{-2}\right)^{-1},$$

а значения величин  $\chi(a)$  и  $\chi(\rho)$  вычислены в /3/(стр. 59, 65-66). Вычисление этих величин требует нахождения для формы  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, 35$ ) эквивалентной ей формы вида:

$$y_i = \sum_{\alpha=1}^s a^{\ell_\alpha} y_\alpha \pmod{a^{\ell_s+3}} \quad (3)$$

в случае  $\rho=2$ ;

$$y_i = \sum_{\alpha=1}^s \rho^{\ell_\alpha} y_\alpha \pmod{\rho^{\ell_s+1}} \quad (4)$$

в случае  $\rho \neq 2$ ;

где  $e_1, e_2, \dots, e_s$  - целые числа и  $-1 \leq e_1 < e_2 < e_3 < \dots < e_s$  (при этом случай  $e_i = -1$  возможен лишь для  $\rho=2$ );

$y_1, y_2, \dots, y_s$  - квадратичные формы с попарно непересекающимися переменными;  $n_1, n_2, \dots, n_s$  - числа переменных этих форм соответственно; их определители  $d_1, d_2, \dots, d_s$  - целые числа, взаимно простые с  $\rho$ . При этом:

а) если  $\rho \neq 2$ , то

$$y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} a_{\alpha\beta} x_\beta^2, \quad (5)$$

где  $a_{\alpha\beta}$  ( $\alpha=1,2,\dots,s$ ;  $\beta=1,2,\dots,n_\alpha$ ) - целые числа, взаимно простые с  $p$ .

в) если  $p=2$ , то для каждого  $\alpha$  форма  $Y_\alpha$  имеет вид (5) с нечетными  $a_{\alpha\beta}$  или вид

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} (2a'_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}^2 + 2a''_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} + 2a'''_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}^2),$$

где  $a'_{\alpha\beta}, a''_{\alpha\beta}, a'''_{\alpha\beta}$  - целые числа, причем  $a''_{\alpha\beta}$  - нечетны ( $\beta=1,2,\dots, n_\alpha/2$ ) (см. /3/, стр.15-16).

Имеют место следующие формулы:

Если  $n=2^\alpha u$ , то

$$\chi(n; f_1) = 246(u);$$

$$\chi(n; f_2) = 2 \left( 2^{\alpha+3} - (-1)^{\frac{u-1}{8}} \right) \sum_{d_1, d_2=u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2.$$

Если  $n=2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_3) = \left( 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1, d_2=u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2;$$

$$\chi(n; f_4) = \left( 2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u-1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1, d_2=u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2.$$

Если  $n=2^\alpha u$ , то

$$\chi(n; f_5) = 126(u) \quad \text{при } \alpha=0,$$

$$= 86(u) \quad \text{при } \alpha=1,$$

$$= 246(u) \quad \text{при } \alpha \geq 2.$$



Если  $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot u$ , то

$$\begin{aligned} \chi(n; f_6) &= 2 \left( 5^\beta - (-1)^\alpha \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2 \\ &= \frac{1}{3} \left( 7 \cdot 2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha \cdot 5 \right) \left( 5^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2 \end{aligned}$$

при  $\alpha = 0$ ,  
при  $\alpha \geq 1$ ;

$$\chi(n; f_7) = \frac{1}{3} \left( 2^{\alpha+2} + (-1)^\alpha \cdot 5 \right) \left( 5^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2;$$

$$\chi(n; f_8) = \frac{1}{3} \left( 2^{\alpha+3} - (-1)^\alpha \cdot 5 \right) \left( 5^{\beta+1} + (-1)^\alpha \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2.$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma \cdot u$ , то

$$\begin{aligned} \chi(n; f_9) &= \frac{1}{6} \left( 2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha \right) \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \left( 7^{\gamma+1} + (-1)^\beta \left( \frac{u}{7} \right) \right) \times \\ &\quad \times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{21}{d_1} \right) d_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(n; f_{10}) &= \frac{1}{6} \left( 2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \left( 7^{\gamma+1} - (-1)^\beta \left( \frac{u}{7} \right) \right) \times \\ &\quad \times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{21}{d_1} \right) d_2. \end{aligned}$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_{11}) = \frac{1}{3} \left( 2^{\alpha+3} - (-1)^\alpha \left( \frac{2}{u} \right) \right) \left( 3^{\beta+1} - (-1)^\alpha \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$x \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{6}{d_1} \right) d_2.$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot 7^\beta \cdot u$ , то

$$u(n; f_{12}) = \frac{1}{4} \left( 2^{\alpha+2} - (-1)^{\beta + \frac{u-1}{2}} \right) \left( 7^{\beta+1} + \left( \frac{u}{7} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{7}{d_1} \right) d_2.$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot u$ , то

$$u(n; f_{13}) = 6 \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0, u \equiv 1 \pmod{4},$$

$$\equiv 2 \left( 3 - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0, u \equiv 3 \pmod{4},$$

$$= 12 \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 1,$$

$$= 2 \left( 5 \cdot 2^\alpha - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha \geq 2;$$

$$u(n; f_{14}) = 6 \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0, u \equiv 1 \pmod{4},$$

$$= 2 \left( 3 - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0, u \equiv 3 \pmod{4},$$

$$= 6 \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 1,$$

$$= \left( 5 \cdot 2^\alpha - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha \geq 2;$$

$$u(n; f_{15}) = 2 \left( 3 - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0, u \equiv 1 \pmod{4},$$

$$= 12 \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0, u \equiv 3 \pmod{4},$$

$$= 6 \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{2}{d_1}\right) d_2$$

$$= 2 \left(5 \cdot 2^\alpha - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}}\right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{2}{d_1}\right) d_2$$

при  $\alpha \geq 2$ ;

$$\chi(n; f_{16}) = 12 \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{2}{d_1}\right) d_2$$

при  $\alpha = 0$ ,

$$= 2 \left(2^\alpha - (-1)^{\frac{u^2-1}{8}}\right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{2}{d_1}\right) d_2$$

при  $\alpha \geq 1$ .

Если  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 11^\gamma \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_{17}) = \frac{1}{6} \left(2^{\alpha+1} - 1\right) \left(3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\gamma} \left(\frac{u}{3}\right)\right) \times$$

$$\times \left(11^{\gamma+1} + (-1)^\alpha \left(\frac{u}{11}\right)\right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{33}{d_1}\right) d_2$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_{18}) = 8\epsilon(u)$$

при  $\alpha = 0$ ,

$$= 6\epsilon(u)$$

при  $\alpha = 1$ ,

$$= 6(2^\alpha - 1)\epsilon(u)$$

при  $\alpha \geq 2$ ;

$$\chi(n; f_{19}) = 3 \left(3 + (-1)^\alpha \left(\frac{u}{3}\right)\right) \epsilon(u)$$

при  $\beta = 0$ ,

$$= 6(3^\beta - 1)\epsilon(u)$$

при  $\beta \geq 1$ ;

$$\chi(n; f_{20}) = 3 \left(3 - (-1)^\alpha \left(\frac{u}{3}\right)\right) \epsilon(u)$$

при  $\beta = 0$ ,

$$= 42\epsilon(u)$$

при  $\beta = 1$ ,

$$= 2(5 \cdot 3^\beta - 6)\epsilon(u)$$

при  $\beta \geq 2$ ;

$$\kappa(n; f_{21}) = 4(2^{\alpha+2} - 3)G(u);$$

$$\kappa(n; f_{22}) = 6(3^{\beta+1} - 2)G(u).$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot u$ , то

$$\kappa(n; f_{23}) = \frac{1}{12} (2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha) (3^{\beta+2} - (-1)^\beta \cdot 5) \times$$

$$\times \left( 5^{\gamma+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2;$$

$$\kappa(n; f_{24}) = \frac{1}{6} (2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha) (3 - (-1)^{\alpha+\gamma} \left( \frac{u}{3} \right)) \times$$

$$\times \left( 5^{\delta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \beta = 0,$$

$$= \frac{1}{6} (2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha) (7 \cdot 3^{-\beta} + (-1)^\beta \cdot 5) \times$$

$$\times \left( 5^{\delta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \beta \geq 1;$$

$$\kappa(n; f_{25}) = \frac{2}{3} (2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha) \left( 5^{\delta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \beta = 0,$$

$$= \frac{1}{6} (2^{\alpha+1} + (-1)^\alpha) (3^\beta - (-1)^\beta) \times$$

$$\times \left( 5^{\delta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{5}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \beta \geq 1.$$

Если  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_{26}) = 3 \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0,$$

$$= 2 \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 1,$$

$$= \left( 2^{\alpha} (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha \geq 2;$$

$$\chi(n; f_{27}) = \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2 \quad \text{при } \alpha = 0,$$

$$= \left( 3 \cdot 2^{\alpha} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha \geq 1;$

$$\chi(n; f_{28}) = \left( 2^{\alpha} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2;$$

$$\chi(n; f_{29}) = \frac{1}{2} \left( 4 + (-1)^{\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha = 0,$

$$= 3 \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha = 1,$

$$= \left( 5 \cdot 2^{\alpha-1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha \geq 2$ ;

$$\chi(n; f_{30}) = 3 \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha = 0$ ,

$$= \left( 2^{\alpha} + (-1)^{\alpha+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha \geq 1$ ;

$$\chi(n; f_{31}) = \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha = 0$ ,

$$= \left( 3 \cdot 2^{-\alpha} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2$$

при  $\alpha \geq 1$ .

Если  $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_{32}) = \frac{1}{12} \left( 2^{\alpha+2} + (-1)^{\beta+\frac{u+1}{2}} \right) \left( 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\gamma} \left( \frac{u}{3} \right) \right) \times$$

$$\times \left( 5^{\gamma+1} - (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \left( \frac{u}{5} \right) \right) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{15}{d_1} \right) d_2.$$

Если  $n = 2^{\alpha} \cdot u$ , то

$$\chi(n; f_{33}) = 66(u)$$

при  $\alpha = 0$ ,



$$= 2 \left( 2 + (-1)^{\frac{u+1}{2}} \right) \theta(u)$$

при  $\alpha = 1$ ,

$$= 12 \theta(u)$$

при  $\alpha = 2$ ,

$$= 8 \theta(u)$$

при  $\alpha = 3$ ,

$$= 24 \theta(u)$$

при  $\alpha \geq 4$ ,

$$\eta(n; f_{34}) = 2 \left( 2 + (-1)^{\frac{u+1}{2}} \right) \theta(u)$$

при  $\alpha = 0$ ,

$$= 12 \theta(u)$$

при  $\alpha = 1$ ,

$$= 8 \theta(u)$$

при  $\alpha \geq 2$ ;

$$\eta(n; f_{35}) = 6 \theta(u)$$

при  $\alpha = 0$ ,

$$= 0$$

при  $\alpha = 1$ ,

$$= 24 \theta(u)$$

при  $\alpha \geq 2$ .

Выведем, например, формулу для  $\eta(n; f_3)$  (остальные выводятся аналогично).

Положив в формуле (2)

$$\Delta = 12, \quad n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot u, \quad u = \prod_{\substack{\rho | n \\ \rho > 3}} \rho^\rho, \quad \kappa = 2, \quad \omega = 3,$$

получим

$$\rho(2n; 2f_3) = 2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta+1} \chi(2) \chi(3) \sum_{d_1 d_2 = u} \left( \frac{3}{d_1} \right) d_2, \quad (6)$$

т.к.

$$L(2; 3) = \frac{\rho^2}{6\sqrt{3}}.$$

Выпишем определитель формы  $2f_3$  и преобразуем его следующим образом (см. /4/, доказательство теоремы 33):



$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{40}{3} \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$2f_3 \sim 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + d(39x_3^2 + 55x_4^2) \pmod{16},$$

ибо, согласно формуле (3),  $e_3 = 1$  и

$$3x \equiv 1 \pmod{16} \iff x = 11; \quad 5x \equiv 1 \pmod{16} \iff x = 13.$$

Далее, в формуле (III.33) работы /3/ положим:

$$n_1 = 2, \quad d_1 = 3, \quad e_1 = 0; \quad n_2 = 2, \quad d_2 = 2145, \quad e_2 = 1; \quad \ell(1) = 1,$$

$$\ell(t) = 2 \text{ при } t \geq 2; \quad \mathcal{G}(y_1) = 2, \quad \mathcal{G}(y_2) = 1; \quad \theta(2) = 0,$$

$$\theta(t) = 1 \text{ при } t \neq 2; \quad B(t) \equiv 0 \pmod{2}; \quad C(1) \equiv 0 \pmod{4},$$

$$C(t) \equiv 2 \pmod{4} \text{ при } t \geq 2; \quad T(1) = \frac{1}{4}, \quad T(t) = (-1)^t i \cdot 2^{-t}, \quad t \geq 2.$$

Тогда получим, что

$$\mathcal{X}(2) = 0 \qquad \alpha = 0, \qquad (7)$$

$$\mathcal{X}(2) = 2 - (-1)^{\alpha + \beta + \frac{\alpha + 1}{2}} \cdot 2^{-\alpha} \qquad \alpha \geq 1.$$

Теперь преобразуем определитель формы  $2f_3$  таким образом (см. /4/, доказательство теоремы 33):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$2f_3 \sim 2x_1^2 + 40x_2^2 + 35x_3^2 + 12x_4^2 \pmod{9},$$



ибо, согласно формуле (4),  $e_5=1$  и

$$\begin{aligned} 7x \equiv 1 \pmod{9} &\iff x=4, & 5x \equiv 1 \pmod{9} &\iff x=2, \\ 2x \equiv 1 \pmod{9} &\iff x=5. \end{aligned}$$

Положив в формуле (III.2Г) работы /3/:  $n_1=2$ ,

$$d_1=2800, \quad e_1=0; \quad n_2=1, \quad d_2=4, \quad e_2=1; \quad \ell(t)=1, \\ \ell(t)=2 \quad \text{при } t \geq 2,$$

получим

$$X(z) = 1 - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{u}{3}\right) z^{-\beta-1}, \quad \beta \geq 0. \quad (8)$$

Из формул (1), (6), (7) и (8) вытекает формула для  $\chi(n; f_3)$ .

Поступила 18.IX.1982

Кафедра высшей математики  
факультета кибернетики и  
прикладной математики

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Studien zur Theorie der quadratischen Formen. Herausgegeben von B.L.van der Waerden und H. Gross. Basel und Stuttgart, 1968.
2. Р.И.Беридзе, Сообщения АН ГССР, 1965, 529-534.
3. А.В. Малышев. Труды Математического института В.А.Стеклова, IIО, 163-180, 1965.
4. B.W.Jones. The arithmetic theory of quadratic forms. 1967.



რ.ბერიძე

ინტეგრირებული წარმოდგენის რიცხვის რაოდენობისა და  
დაცემის რაოდენობის კლასიფიკაციის პრობლემა  
დაპირდაპირი ინტეგრირების, რიცხვის ურთიერთობის  
კლასიფიკაცია

რეზიუმე

ინტეგრირებული ინტეგრირების რიცხვის რაოდენობის  
დაცემის რაოდენობის კლასიფიკაციის პრობლემა  
დაპირდაპირი ინტეგრირების, რიცხვის ურთიერთობის  
კლასიფიკაცია და რიცხვის რიცხვის ურთიერთობის  
კლასიფიკაცია: 4, 8, 12,  
16, 20, 21, 24, 28, 32, 33, 36, 45, 48, 60 და 64.

R, Beridze

FORMULAE FOR THE NUMBER OF REPRESENTATIONS  
OF INTEGERS BY REDUCED POSITIVE NONDIAGONAL QUATER-  
NARY QUADRATIC FORMS BELONGING TO ONE-CLASS

GENERA

Summary

Formulae are obtained for the number of representation of  
integers by all reduced positive nondiagonal quaternary quadratic  
forms belonging to one-class genera and of discriminants 4, 8,  
12, 16, 20, 21, 24, 28, 32, 33, 36, 45, 48, 60 and 64.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის მშრომლის ნიშნის ორდენის მტკიცების სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის მშრომები

239, 1983

УДК 511

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ  
РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ  
И НЕРАВЕНСТВА

Э.Т.Самсонадзе

Методы нахождения числа целых неотрицательных решений линейного диофантова уравнения известны (/1/, /2/, /3/, /4/ и др.). В данной же работе новым способом, путем использования свойств символа Кронекера, получена еще одна формула для числа целых неотрицательных решений линейного диофантова уравнения с произвольным числом неизвестных.

Пусть дано следующее уравнение

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b, \quad (I)$$

где  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) - натуральные числа;  $b$  - целое неотрицательное число;  $n \geq 2$ .

Докажем, что для числа  $P(b)$  целых неотрицательных решений уравнения (I) справедлива следующая формула:

$$P(b) = \sum_{t_1=0}^{d_1-1} \sum_{t_2=0}^{d_2-1} \dots \sum_{t_n=0}^{d_n-1} C(f(t_1, t_2, \dots, t_n)+1; n-1), \quad (2)$$



где  $f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{M} (b - a_1 t_1 - a_2 t_2 - \dots - a_n t_n)$ ,

$$d_i = \frac{M}{a_i} \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

$M$  - наименьшее общее кратное чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ;

$C(k, l) = \frac{1}{l!} k(k+1) \dots (k+l-1)$ , если  $k$  - натуральное число,

и  $C(k, l) = 0$  в противном случае.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$P(b) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} \delta \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i; b \right), \quad (3)$$

где  $\delta(x; y)$  - символ Кронекера, а символом  $\sum_{\mathbb{Z}}$  обозначено суммирование по всем неотрицательным целым  $x$ .

Если принять во внимание, что

$$\sum_x \delta(x; a) = \sum_x \sum_{t=0}^{d-1} \delta(dx+t; a)$$

для любого  $a$  и натурального  $d$ , то из формулы (3)

получим

$$P(b) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} \sum_{t_1=0}^{d_1-1} \sum_{t_2=0}^{d_2-1} \dots \sum_{t_n=0}^{d_n-1} \delta \left( \sum_{i=1}^n a_i (d_i x_i + t_i); b \right).$$

Т.к.  $a_i d_i = M$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), то отсюда получим:

$$P(b) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} \sum_{t_1=0}^{d_1-1} \sum_{t_2=0}^{d_2-1} \dots \sum_{t_n=0}^{d_n-1} \delta \left( \sum_{i=1}^n x_i; \frac{b - \sum_{i=1}^n a_i t_i}{M} \right).$$

Отсюда и из формулы (3) следует, что

$$P(b) = \sum_{t_1=0}^{d_1-1} \sum_{t_2=0}^{d_2-1} \dots \sum_{t_n=0}^{d_n-1} P_* \left( f(t_1, t_2, \dots, t_n) \right), \quad (4)$$

где через  $P_*(m)$  обозначено число целых неотрицательных решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ .



Если использовать известную /5/ формулу:

$$\sum_{x=1}^{\kappa} x(x+1)\dots(x+l) = \frac{1}{l+2} \kappa(\kappa+1)\dots(\kappa+l+1),$$

то нетрудно доказать методом математической индукции по  $n$ , что

$$P_*(m) = \frac{1}{(n-1)!} (m+1)(m+2)\dots(m+n-1) \quad (5)$$

при  $n \geq 2$  и целом  $m \geq 0$ . Из (4) и (5) следует формула (2).

Заметим, что количество слагаемых в правой части формулы (2) не зависит от  $\beta$ , причем при  $\beta \geq nM -$

$-(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  все  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  неотрицательны. Заметим также, что формула (2) справедлива и в предположении, что  $M$  - произвольное общее кратное чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Т.к. число  $Q(\beta)$  целых неотрицательных решений неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \beta$$

равно числу целых неотрицательных решений уравнения

$x_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i x_i = \beta$ , поэтому из формулы (2) при натуральных  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и целом  $\beta \geq 0$  получаем:

$$Q(\beta) = \quad (6)$$

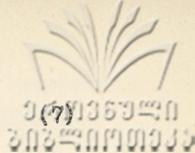
$$= \sum_{t_1=0}^{d_1-1} \sum_{t_2=0}^{d_2-1} \dots \sum_{t_n=0}^{d_n-1} \sum_{t_{n+1}=0}^M C(f(t_1, t_2, \dots, t_{n+1})+1; n),$$

где

$$f(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) = \frac{1}{M} \left( \beta - \sum_{i=1}^n a_i t_i - t_{n+1} \right); \quad d_i = \frac{M}{a_i} \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

$M$  - наименьшее общее кратное чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

В качестве следствия из формулы (2) получаем следующую формулу для вычисления  $P(\beta)$ :



$$P(b) = \sum_{i=1}^n \ell_i C(b' + a - i; n-1),$$

где

$$b' = \left[ \frac{b}{M} \right] - \text{целая часть числа } \frac{b}{M};$$

$$\ell_i = P'(x + (i-1)M) \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

$x$  - наименьший неотрицательный вычет числа  $b$  по модулю  $M$ ;

$P'(c)$  - число целых неотрицательных решений системы

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j t_j = c \\ 0 \leq t_j \leq \frac{M}{a_j} - 1 \quad (j=1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (8)$$

Заметим, что  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  зависят лишь от  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $x$ .

Таким образом, формула (7) дает возможность, зная число  $P'(c)$  целых неотрицательных решений системы (8) при  $c = x, c = x + M, \dots, c = x + (n-1)M$  ( $0 \leq x < M$ ), вычислять число  $P(b)$  целых неотрицательных решений уравнения (I) для любого  $b$ , сравнимого с  $x$  по модулю  $M$ .

Заметим, также, что  $P'(c) \leq P(c)$  при любом  $c$  и  $P'(c) = 0$  при  $c > nM - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ .

Для нахождения всех  $P'(c)$  достаточно знать значения выражения  $\sum_{j=1}^n a_j t_j$  при  $0 \leq t_j \leq \frac{M}{a_j} - 1$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

Пример. Найти число  $P(b)$  целых неотрицательных решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 2x_n = b$



при целом  $\beta \geq 0$ .

Для вычисления  $P(\beta)$  используем формулу (7), где положим  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$ ,  $a_n = 2$ ,  $M = 2$ ,  $t_n = 0$ ,  $0 \leq t_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Нетрудно видеть, что если  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  пробегает значения 0 и 1, то выражение  $t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + 2t_n$  принимает значение, равное 0, точно один раз; значение, равное 1, точно  $C_{n-1}^1$  раз, и т.д. значение, равное  $n-1$ , точно  $C_{n-1}^{n-1}$  раз. Кроме того,  $t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + 2t_n \leq n-1$ . Поэтому  $P'(0) = C_{n-1}^0$ ,  $P'(1) = C_{n-1}^1, \dots, P'(n-1) = C_{n-1}^{n-1}$  и  $P'(c) = 0$  при  $c > n-1$ .

Вследствие этого из формулы (7) получаем:

$$P(\beta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\beta-1}{2} \rfloor} C_{n-1}^{2k} C(\beta' - k + 1; n-1)$$

при четном  $\beta$  и

$$P(\beta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\beta-2}{2} \rfloor} C_{n-1}^{2k+1} C(\beta' - k + 1; n-1)$$

при нечетном  $\beta$ ,

где  $C(m; n-1) = \frac{1}{(n-1)!} m(m+1) \dots (m+n-2)$ , если  $m > 0$  и  $C(m; n-1) = 0$  в противном случае;  $\beta' = \lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor$ .

Поступила 15.V.1982

Кафедра  
общей математики



ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrhart E, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 226(1967), 227 (1967).
2. Э.Т. Аванесов. Ученые записки Ивановского государственного педагогического института, т.34, 1963.
3. М.А. Фрумкин. Математические заметки, т.28, № 3, 1980.
4. Э.Т. Самсонадзе. Труды Тбилисского государственного университета, 204, 1978.
5. А.О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., 1956.

ვ.სამსონაძე

ფორმალური რიგების წარმოშობის  
 და უზღოვრობის მიხედვით არაკლასიკური ამონახსნის  
 ჩივილისადაც

რეზიუმე

მთვარეობის ახალი ფორმალური რიგების  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$   
 განყოფილების მიხედვით არაკლასიკური ამონახსნის  $P(b)$  ჩივილისადაც  
 და რიგების  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$  უზღოვრობის მიხედვით არაკლასიკური  
 ამონახსნის  $Q(b)$  ჩივილისადაც ( $a_i > 0, b > 0$ ).



E. Samsonadze

FORMULAE FOR THE NUMBER OF NON-NEGATIVE  
INTEGER SOLUTIONS OF LINEAR DIOPHANTINE EQUATION  
AND INEQUALITY

Summary

New formulae are presented for the number  $P(b)$  of non-negative integer solutions of the diophantine equation  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$

and for the number  $Q(b)$  of non-negative integer solutions of the

Diophantine inequality  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$  ( $a_i > 0, b \geq 0$ ).

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]*

УДК 519.24

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ  
ОЦЕНОК КРИВОЙ РЕГРЕССИИ

Э.А.Надарая

1. Пусть  $(X, Y)$  - двумерная случайная величина с плотностью  $f(x, y)$  и  $g(x)$  - маргинальная плотность распределения случайной величины  $X$ . Пусть  $E|Y| < \infty$  и обозначим функцию регрессии  $Y$  на  $X$  через  $\eta(x)$ , т.е.  $\eta(x) = E(Y|X=x)$ . Произведем выборку  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , из генеральной совокупности  $(X, Y)$  и в качестве приближения кривой регрессии  $\eta(x)$  рассмотрим класс статистик

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \mathcal{Y}_n(x)/g_n(x), & \text{если } g_n(x) \neq 0 \\ 0, & \text{если } g_n(x) = 0 \end{cases}$$

где

$$g_n(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n K(a_n(x - X_i)),$$

$$\mathcal{Y}_n(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n Y_i K(a_n(x - X_i)),$$

$a_n \rightarrow \infty$  и  $a_n/n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Ядро  $K(x)$  - произвольная функция плотности, удовлетворяющая нижеприводимым условиям.

В данной работе устанавливаются предельные теоремы для

максимального отклонения непараметрической оценки кривой регрессии  $\gamma_n(x)$  от теоретической  $\gamma(x)$ .

Проблема нахождения предельного распределения максимального отклонения оценки  $\gamma_n(x)$  от  $\gamma(x)$  на конечном интервале была решена нами в /1/ по той же общей схеме доказательства приведенной в /2/. В /3/ примерно в той же логической схеме доказательств перенесены ниже приведенная лемма /4/ и теорема /3/ на многомерный случай. Основные результаты настоящей работы были опубликованы без доказательства в /1/.

2. На протяжении всего параграфа будем пользоваться следующими предположениями:

1°.  $f(x, y) = 0$  при  $|y| > A$ , где  $A$  — некоторая постоянная, т.е. случайная величина  $Y$  ограничена почти наверное (п.н.). Функция  $g(x) = \int f(x, y) dy$  ограничена на всей оси,  $\varphi(x) = \int y f(x, y) dy$  и  $v(x) = \int y^2 f(x, y) dy$  непрерывны в интервале  $-\infty < a \leq x \leq b < \infty$ .

2°.  $\min_{a \leq x \leq b} g(x) > 0$ ,  $\min_{a \leq x \leq b} \beta(x) > 0$ , где  $\beta(x) = D(Y/X=x)$

3°. Ядро  $K(x)$  — плотность распределения, удовлетворяющая условиям: имеет конечную вариацию,  $K(-x) = K(x)$ ,  
 $K(|x_2|) \leq K(|x_1|)$  при  $|x_2| > |x_1|$  и  
 $\int |u| K(u) du < \infty$ .

Лемма I. Равномерно по  $x$ ,  $a \leq x \leq b$ ,

$$a_n^{-1} D \gamma_n^{(i)}(x) \rightarrow \beta(x) g(x) \int K^2(u) du \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (I)$$

где

$$\gamma_n^{(i)}(x) = a_n (y_i - \gamma(x)) K(a_n(x - x_i)).$$



Доказательство. Поскольку  $E\eta_n^{(i)}(x) = o(1)$  равномерно по  $x$  в силу леммы I из /4/, то

$$\begin{aligned} & a_n^{-1} D\eta_n^{(i)}(x) = \\ & = a_n \iint (y - r(x))^2 K^2(a_n(x-u)) f(u, y) du dy + o(a_n^{-1}) = \\ & = a_n \int K^2(a_n(x-u)) V(u) du - 2r(x) a_n \int K^2(a_n(x-u)) \varphi(u) du + \\ & + r^2(x) a_n \int K^2(a_n(x-u)) g(u) du + o(a_n^{-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично из той же леммы I /4/ можно получить, что интегралы в правой части (2) сходятся равномерно по  $x$ ,  $a < x < b$ , соответственно к величинам  $V(x) \int K^2(u) du$ ,  $\varphi(x) \int K^2(u) du$  и  $g(x) \int K^2(u) du$ . Значит  $D\eta_n^{(i)}(x) \sim a_n (V(x)/g(x) - r^2(x)g(x) \int K^2(u) du = a_n \beta(x) \int K^2(u) du$ , что и требовалось доказать.

Разделим интервал  $a < x < b$  на  $S_n$  отрезков  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{S_n}$  равной длины  $a_n$ . Число отрезков  $S_n$  будет в дальнейшем расти вместе с ростом  $n$  объема выборки.

Лемма 2. Пусть  $t_i$ ,  $i = \overline{1, S_n}$  — середины интервалов  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, S_n}$ , и

$$\xi_n(t_j) = \frac{\eta_n(t_j) - E\eta_n(t_j)}{\sqrt{D\eta_n(t_j)}} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_n^{(i)}(t_j), \quad 1 \leq j \leq S_n,$$

где

$$\eta_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_n^{(i)}(x),$$

$$\xi_n^{(i)}(t_j) = \alpha^{-1/2} \left[ \eta_n^{(i)}(t_j) - E \eta_n^{(i)}(t_j) \right] d_n^{-1}(t_j),$$

$$d_n(t_j) = \left( \alpha^{-1} \mathcal{D} \eta_n^{(i)}(t_j) \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$E_n = \max_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \left| E(\xi_n(t_j) \xi_n(t_i)) \right| \leq c_1 K^*(\alpha_n \alpha_n) + c_2 \alpha_n^{-1}, \quad (3)$$

где  $K^*(x) = K(x) * K(x)$ .

Доказательство. Имеем

$$E(\xi_n(t_i) \xi_n(t_j)) = \quad (4)$$

$$= \alpha_n^{-1} \left( E \eta_n^{(i)}(t_j) \eta_n^{(i)}(t_i) - E \eta_n^{(i)}(t_i) E \eta_n^{(i)}(t_j) \right) d_n^{-1}(t_j) d_n^{-1}(t_i),$$

причем  $\alpha_n^{-1} \left| E \eta_n^{(i)}(t_j) E \eta_n^{(i)}(t_i) \right| \leq c_3 \alpha_n^{-1}$  равномерно по  $t_j$ . Учитывая условие  $\Gamma^0$ , находим

$$\begin{aligned} \alpha_n^{-1} \left| E(\eta_n^{(i)}(t_j) \eta_n^{(i)}(t_i)) \right| &\leq c_4 \int K(u) K(\alpha_n |t_i - t_j| - u) du = \\ &= c_4 K^*(\alpha_n (|t_i - t_j|)). \end{aligned} \quad (5)$$

Из свойства  $Z^0$  функции  $K(x)$  следует, что  $K^*(|x_1|) \leq K^*(|x_2|)$  при  $|x_1| < |x_2|$ . Поэтому из (5) заключаем, что

$$E \left| \eta_n^{(i)}(t_j) \eta_n^{(i)}(t_i) \right| \leq C_4 K^* (a_n \tau_n), \quad (6)$$

поскольку  $\min_{i \neq j} |t_i - t_j| \geq \tau_n$ .

Далее, из леммы I и условия 2° получим

$$d_n(t_j) \geq c_0 \neq 0 \quad \text{для всех } t_j, j = \overline{1, S_n}. \quad (7)$$

Итак, соотношения (4) - (7) доказывают нашу лемму.

Из условия 2° и 3° непосредственно следует

Лемма 3.  $\max_{1 \leq i \leq n} \sup_{a \leq x \leq b} \left| \eta_n^{(i)}(x) \right| \leq C_5 a_n^{1/2}$  п.н.

Следующая лемма, доказательство которой основано на леммах 2 и 3, устанавливает поведение вероятности больших отклонений суммы  $\eta_n(x)$ .

Лемма 4. Пусть  $\lambda_{S_n}$  - некоторая неотрицательная и возрастающая вместе с  $S_n$  функция  $S_n$ ;  $\nu$  - фиксированное натуральное число  $< S_n$ ;  $K_1, K_2, \dots, K_\nu$  - любая комбинация  $\nu$  чисел из последовательности  $1, 2, \dots, S_n$ ,

$m = \max(3, \nu)$ . Тогда, если  $\epsilon_n \lambda_{S_n}^2 \rightarrow 0$ ,

$\lambda_n^m / \sqrt{n a_n^{-\nu}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$P \left\{ |\xi_n(t_j)| \geq \lambda_{S_n}, j = 1, 2, \dots, \nu \right\} = \\ = \left( \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_{S_n}}^{\infty} e^{-u^2/2} du \right)^\nu \left[ 1 + O(\epsilon_n \lambda_{S_n}^2) + O\left( \frac{\lambda_{S_n}^m}{\sqrt{n a_n^{-\nu}}} \right) \right].$$

Доказательство этой леммы сходно с доказательством леммы 4 из /2/, а поэтому мы его приводить не будем.

Методом доказательства теоремы 2 работы /2/ нетрудно устанавливается следующая



Теорема 1. Если  $\varepsilon_n \log s_n \rightarrow 0$  и  $\frac{(\log s_n)^m}{n a_n^{-1}} \rightarrow 0$

при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$P \left\{ \max_{1 \leq i \leq s_n} \left| \frac{\eta_n(t_i) - E\eta_n(t_i)}{(\mathcal{D}\eta_n(t_i))^{1/2}} \right| < \lambda_{s_n} \right\} \rightarrow e^{-2\bar{a}\bar{\lambda}}$$

где  $\lambda_{s_n} = \ell_{s_n} + \bar{\lambda}/\ell_{s_n}$ , а  $\ell_{s_n}$  - корень уравнения

$$1/\ell_{s_n} = (2\pi)^{-1/2} \int_{\ell_{s_n}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \quad (\ell_{s_n} = O(\sqrt{\log s_n})).$$

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $V(x)$  имеют ограниченные производные первого порядка. Тогда, если  $a_n^{-3} n \log s_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_n \log s_n \rightarrow 0$  и  $n^{-1} a_n^{-1} (\log s_n)^m \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$P \left\{ \sqrt{\frac{n}{a_n}} \max_{1 \leq i \leq s_n} \left| \frac{\eta_n(t_i)}{\sqrt{\beta(t_i)g(t_i)}} \right| \leq \left( \ell_{s_n} + \frac{\bar{\lambda}}{\ell_{s_n}} \right) \int K^2(u) du \right\} \rightarrow e^{-2\bar{a}\bar{\lambda}}$$

Для доказательства теоремы достаточно принять во внимание, что  $E\eta_n(t) = O(a_n^{-1})$  и  $a_n^{-1} \mathcal{D}\eta_n^{(4)}(t) = \beta(t)g(t) \int K^2(u) du +$

$+ O(a_n^{-1})$  равномерно по  $t$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Примечание к теореме 2. Если предполагать, что  $g(x)$  и  $\varphi(x)$  имеют ограниченные производные второго порядка и  $x^2 K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ , то условие  $a_n^{-3} n \log s_n \rightarrow$

→ 0 заменяется менее слабым условием  $a_n^{-5} n \log s_n \rightarrow 0$ ,  
 которое будет фигурировать в теореме 7.

Теорема 3. В условиях теоремы 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{a_n}} \max_i \left| \frac{\eta_n(t_i) - \eta(t_i)}{\varepsilon(t_i)} \right| \leq \left( l_{s_n} + \eta/l_{s_n} \right) K_0 \right\} = e^{-\alpha e^{-\alpha}},$$

где  $\varepsilon(x) = \beta(x)/g(x)$  и  $K_0 = \int K^{\alpha}(u) du$ .

Доказательство. Пусть  $T_n(x) = g_n(t_i)$  при  $x \in \Delta_i$ ,  
 $i = \overline{1, s_n}$ , и положим  $\bar{x}_n = \max_{a \leq x \leq b} |(T_n(x) - g(x)) g^{-1/2}(x)|$ .

Тогда, учитывая условие 2<sup>0</sup>, легко видеть, что

$$l_{s_n}^2 \max_i |g_n(t_i) \bar{g}'(t_i) - 1| \leq \tag{8}$$

$$\leq \mu \max_i |(g_n(t_i) - g(t_i)) g^{-1/2}(t_i)| \leq$$

$$\leq \left[ A_n \left( l_{s_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} \bar{x}_n - l_{s_n}^2 \right) + B_n \right]$$

где  $A_n = l_{s_n} (a_n/n)^{1/2}$ ,  $B_n = l_{s_n}^2 (a_n/n)^{1/2}$ ,  $\mu = \min_{a \leq x \leq b} g(x)$ .

Но по теореме 4 из [2]  $l_{s_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} \bar{x}_n - l_{s_n}^2$  имеет асимптотическое распределение и по условию теоремы  $A_n \rightarrow 0$  и  $B_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, откуда и из (8) вытекает, что

$$l_{s_n}^2 \max_i |g_n(t_i) \bar{g}'(t_i) - 1| \rightarrow 0 \tag{9}$$

по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначим

$$U_n = \sqrt{\frac{n}{a_n}} \max_i \left| \frac{\eta_n(t_i)}{\sqrt{\beta(t_i)g(t_i)}} \right|,$$

$$M_n = \sqrt{\frac{n}{a_n}} \max_i \left| \frac{\eta_n(t_i) - \eta(t_i)}{\varepsilon(t_i)} \right|,$$

$$h_n = \min_i (g_n(t_i)/g(t_i) - 1),$$

$$H_n = \max_i (g_n(t_i)/g(t_i) - 1).$$

Замечая, что  $\eta_n(t) = \mathcal{Y}_n(t) - \eta(t)g_n(t)$  и применяя тождество

$$\frac{\eta_n(x) - \eta(x)}{\varepsilon(x)} = \frac{\eta_n(x)}{\sqrt{\beta(x)g(x)}} \frac{1}{1 + (g_n(x)/g(x) - 1)},$$

нетрудно установить неравенства

$$\begin{aligned} P\{U_n \leq \lambda_{s_n}(1+h_n)\} &\leq P\{M_n \leq \lambda_{s_n}\} \leq \\ &\leq P\{U_n \leq \lambda_{s_n}(1+H_n)\}, \end{aligned}$$

Где  $\lambda_{s_n} = \ell_{s_n} + \lambda/\ell_{s_n}$ .

Кроме того,

$$P\{U_n \leq \lambda_{s_n}(1+h_n)\} = P\{(\ell_{s_n} U_n - \ell_{s_n}^2) \bar{Z}_n + \theta_n < \lambda\},$$

где  $\xi_n = 1/1+h_n$ ,  $\theta_n = -h_n \ell_{S_n}^2 / 1+h_n$ .

В силу (9)  $\xi_n$  сходится по вероятности к единице и  $\theta_n$  — к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Эти факты с применением теоремы 2 дают следующий результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ U_n \leq \lambda_{S_n} (1+h_n) \right\} = e^{-\alpha} e^{\lambda} \quad (II)$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ U_n \leq \lambda_{S_n} (1+h_n) \right\} = e^{-\alpha} e^{\lambda} \quad (I2)$$

Итак, (I0), (II) и (I2) завершают доказательство теоремы.

3. Определим функцию  $m_n(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , следующим образом:  $m_n(x) = \eta_n(t_i)$ ,  $x \in \Delta_i$ ,  $i = 1, 5_n$ .

Теорема 4. Пусть  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $V(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 2. Кроме того, пусть при  $n \rightarrow \infty$  выполнены следующие условия:  $\epsilon_n \log S_n \rightarrow 0$ ,  $\alpha_n^{-3} n \log S_n \rightarrow 0$ ,  $n^{-1} \alpha_n (\log S_n)^m \rightarrow 0$ , при любом фиксированном  $m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $n \log S_n / \alpha_n S_n^2 \rightarrow 0$ .

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{m_n(x) - \eta(x)}{\delta(x)} \right| < \right. \quad (I3)$$

$$\left. < \left( \ell_{S_n} + \frac{\lambda}{\ell_{S_n}} \right) K_0 \sqrt{\frac{\alpha_n}{n}} \right\} = e^{-\alpha} e^{\lambda}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что  $\eta(x) - \eta(t_i) = O(S_n^{-1})$  и  $\delta(x) - \delta(t_i) = O(S_n^{-1})$  при  $x \in \Delta_i$ . (I4)

Положим

$$M_n^* = \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{m_n(x) - \gamma(x)}{\delta(x)} \right|, \quad \delta_n^c = M_n^* - M_n.$$

и покажем, что  $\ell_{S_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} |\delta_n^c| \rightarrow 0$  по вероятности.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left| \frac{m_n(x) - \gamma(x)}{\delta(x)} \right| - \left| \frac{\gamma_n(t_i) - \gamma(t_i)}{\delta(t_i)} \right| \right| \leq \left| \frac{\gamma(x) - \gamma(t_i)}{\delta(t_i)} \right| + \\ & + \left| \frac{m_n(x) - \gamma(x)}{\delta(t_i)} - \frac{m_n(x) - \gamma(x)}{\delta(x)} \right| \leq \left| \frac{\gamma(x) - \gamma(t_i)}{\delta(t_i)} \right| + \\ & + \left| m_n(x) - \gamma(x) \right| \left| \frac{\delta(x) - \delta(t_i)}{\delta(t_i)\delta(x)} \right| \quad \text{при } x \in \Delta_i. \quad (15) \end{aligned}$$

Поскольку по условию  $I^0$  существует постоянная  $C_6$  такая, что  $|Y| \leq C_6$  п.н., то  $|\gamma_n(x)| \leq C_6$  п.н. для всех  $x$  и  $n$ . Следовательно, при  $x \in \Delta_i$   $|m_n(x) - \gamma(x)| \leq |\gamma_n(t_i) - \gamma(t_i)| + |\gamma(t_i) - \gamma(x)| \leq C_7 + C_8 a_n^{-1} \leq C_9$  п.н. Отсюда и из (14) - (15) получим, что  $|\delta_n^c| \leq C_{10} S_n^{-d}$  п.н. С другой стороны, согласно условию  $n \log S_n / a_n S_n^2 \rightarrow 0$ ,  $\ell_{S_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} |\delta_n^c| \leq C_{11} \sqrt{\frac{n \log S_n}{a_n S_n^2}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \ell_{S_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} |\delta_n^c| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$



при  $n \rightarrow \infty$ .

Учитывая неравенства

$$P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n^* \leq \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} \geq \quad (16)$$

$$\geq P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n < \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda - \varepsilon}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} -$$

$$- P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} |\delta_n| > \frac{\varepsilon}{\ell_{S_n}} K_0\right\}$$

и

$$P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n^* \leq \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n \leq \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda + \varepsilon}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} +$$

$$+ P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} |\delta_n| > \frac{\varepsilon}{\ell_{S_n}} K_0\right\},$$

и результат теоремы 3, получим

$$e^{-\lambda} e^{-(\lambda - \varepsilon)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n^* \leq \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} \leq$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n^* \leq \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} \leq e^{-\lambda} e^{-(\lambda + \varepsilon)}$$

Отсюда, в силу произвольности  $\varepsilon > 0$ , следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{\frac{n}{a_n}} M_n^* \leq \left(\ell_{S_n} + \frac{\lambda}{\ell_{S_n}}\right) K_0\right\} = e^{-2\lambda}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. В условиях теоремы 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{a_n}} \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{m_n(x) - \nu(x)}{\bar{\sigma}_n(x)} \right| \leq \right. \quad (17)$$

$$\left. \leq \left( \rho_{S_n} + \frac{\lambda}{t_{S_n}} \right) K_0 \right\} = \bar{e}^{-\lambda \bar{e}^{\lambda}}$$

где  $\bar{\sigma}_n(x) = \sigma(t_i)$  при  $x \in \Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, S_n$ .

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 4, а потому мы его приводить не будем.

Теперь выясним вопрос о том, как подобрать  $a_n$  и  $S_n$ , чтобы выполнялись условия теоремы 4. Для этого рассмотрим два случая.

I случай. Пусть функция  $K(x)$  - финитна, т.е.

$$K(x) = 0 \quad \text{при } |x| > x_0 \text{ и } S_n = (b-a)/c_0 x_0 \cdot a_n, \quad c_0 \geq 2.$$

Тогда  $\tau_n = c_0 x_0 a_n^{-1}$  и  $K^*(\tau_n \cdot a_n) = K^*(c_0 x_0) = 0$ .

Следовательно,  $E_n = O(a_n^{-1})$  и, тем самым, условие

$E_n \log S_n \rightarrow 0$  теоремы 4 отпадает. Остальные условия теоремы 4 удовлетворяются, если положить  $a_n = a_0 n^\alpha$ , где

$$1/3 < \alpha < 1.$$

В качестве примера рассмотрим ядро  $K(x)$  следующего типа:  $K(x) = \frac{1}{2} (0)$  соответственно при  $|x| \leq 1 (|x| > 1)$ .

Тогда

$$m_n(x) = \eta_n(t_j) = \frac{1}{N_j} \sum_{X_i \in \Delta_j} \nu_i \quad \text{при } x \in \Delta_j, \quad (18)$$

где  $N_j$  - число  $X$ -ов, попавших в  $\Delta_j$ . Ясно, что (18)

представляет аналог "гистограммы".

II случай. Пусть  $K(x)$  удовлетворяет только условиям 3<sup>0</sup>

и  $\tau_n \cdot a_n \rightarrow \infty$ , т.е.  $S_n^{-1} a_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из свойства  $K(x)$  следует, что  $xK^*(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq C_1 (\tau_n \cdot a_n) K^*(\tau_n \cdot a_n) \frac{1}{\tau_n a_n} + \\ &+ C_2 \frac{1}{\tau_n a_n} \cdot \tau_n = O\left(\frac{1}{\tau_n a_n}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Поэтому условия теоремы 4 выполняются, если положить  $a_n = a_0 n^\alpha$ ,  $S_n = S_0 n^\beta$ , где  $1/3 < \alpha < 1$ ,  $\frac{1-\alpha}{2} < \beta < \alpha$ .

В теореме 4 мы рассматривали максимум нормированных отклонений кривой регрессии  $\eta(x)$  от  $m_n(x)$ . Но вместо  $m_n(x)$  можно рассматривать более точную аппроксимирующую непрерывную функцию  $\tilde{m}_n(x)$ , определенную следующим образом:

$$\tilde{m}_n(x) = \eta_n(t_k) + \tau_n^{-1}(x - t_k) (\eta_n(t_{k+1}) - \eta_n(t_k)) \quad \text{при } x \in \Delta_k.$$

Если  $a_0 = a$ ,  $a_1, \dots, a_{S_n} = b$  - концы интервалов  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, S_n}$ , то  $\tilde{m}_n(x)$  можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_n(x) &= 1/2 \left( \eta_n(a_k + \tau_n/2) + \eta_n(a_k - \tau_n/2) \right) + \\ &+ \tau_n^{-1} (x - a_k) \left[ \eta_n(a_k + \tau_n/2) - \eta_n(a_k - \tau_n/2) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично введем

$$\begin{aligned} \tilde{m}_n(x) &= \frac{1}{2} \left( \eta(a_k + \tau_n/2) + \eta(a_k - \tau_n/2) \right) + \\ &+ \tau_n^{-1} (x - a_k) \left[ \eta(a_k + \tau_n/2) - \eta(a_k - \tau_n/2) \right], \end{aligned}$$



$$\tilde{\epsilon}(x) = \frac{1}{2} \left( \epsilon(a_k + \tau_{n/2}) + \epsilon(a_k - \tau_{n/2}) \right) + \\ + \tau_n^{-1} (x - a_k) \left[ \epsilon(a_k + \tau_{n/2}) - \epsilon(a_k - \tau_{n/2}) \right].$$

Рассмотрим теперь

$$\tilde{M}_n = \max \left| \frac{\tilde{m}_n(x) - \tilde{m}(x)}{\tilde{\epsilon}(x)} \right|, \quad a + \tau_{n/2} \leq x \leq b - \tau_{n/2}.$$

Нетрудно убедиться, что максимум этот достигается на одном из концов сегмента  $[t_k, t_{k+1}]$ . Следовательно,  $M_n = \tilde{M}_n$ . Учитывая это и результат теоремы 3, получаем возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. В условиях теоремы 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \tilde{M}_n < \left( l_{s_n} + \lambda / l_{s_n} \right) K_0 \right\} = e^{-\lambda} e^{-\lambda}$$

Теорема 7. Пусть  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $V(x)$  имеют ограниченные производные до второго порядка. Кроме того, пусть  $x^2 K(x) \in L_1$  и при  $n \rightarrow \infty$  выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_n^{-5} \cdot n \cdot \log s_n \rightarrow 0, \quad n \log s_n / a_n s_n^4 \rightarrow 0, \\ n^{-4} a_n (\log s_n)^m \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при любом фиксированном  $m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{a_n}} \max_{a + \tau_{n/2} \leq x \leq b - \tau_{n/2}} \left| \frac{\tilde{m}_n(x) - \mu(x)}{\epsilon(x)} \right| \leq \right. \quad (20)$$

$$\leq \left( l_{s_n} + \frac{\lambda}{l_{s_n}} \right) K_0 \} = e^{-\lambda} e^{\bar{\lambda}}$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{M}_n = \max \left| \frac{\tilde{m}_n(x) - \chi(x)}{\Theta(x)} \right|, \quad a + \tau_{n/2} \leq x \leq b - \tau_{n/2},$$

$$\delta_n^2 = \tilde{M}_n - \tilde{M}_n.$$

По условию теоремы можем написать  $\chi(a_k \pm \tau_{n/2}) =$   
 $= \chi(a_k) \pm \tau_{n/2} \chi'(a_k) + O\left(\frac{1}{s_n}\right)$  и на каждом отрезке  $\Delta_i$

$$\tilde{m}(x) = \chi(a_k) + (x - a_k) \chi'(a_k) + O\left(\frac{1}{s_n^2}\right),$$

$$\chi(x) = \chi(a_k) + (x - a_k) \chi'(a_k) + O\left(\frac{1}{s_n^2}\right).$$

Следовательно,

$$\chi(x) - \tilde{m}(x) = O\left(s_n^{-2}\right). \quad (21)$$

Точно так же показывается, что

$$\Theta(x) - \tilde{\Theta}(x) = O\left(s_n^{-2}\right). \quad (22)$$

Вследствие (21), (22) и неравенства, аналогичного (15),  
 вытекает, что  $|\delta_n| \leq c_{12} s_n^{-2}$  п.н. Следовательно,

$$l_{s_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} |\delta_n| \leq c_{13} \left( \frac{n \log s_n}{a_n s_n^4} \right)^{1/2} \text{ п.н. Значит } l_{s_n} \sqrt{\frac{n}{a_n}} \delta_n \rightarrow 0$$

по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ . Для завершения доказательства  
 теоремы остается лишь в неравенствах (18)  $M_n$  заменить  
 на  $\tilde{M}_n$ , а  $M_n^*$  на  $\tilde{M}_n^*$  и далее применить результат  
 теоремы 5. Теорема доказана.

Условия теоремы 7 относительно  $a_n$  и  $S_n$ , учитывая (19), выполняются, например, если положить  $a_n = a_0 n^\alpha$  и  $S_n = S_0 n^\beta$  при  $\frac{1-\alpha}{4} < \beta < \alpha$ .

4. Рассмотрим статистические приложения полученных результатов для решения двух основных задач: I. Построение асимптотической доверительной области для кривой регрессии  $\eta(x)$ ; II. Построение тестов проверки нулевой гипотезы  $H_0$ , согласно которой  $\eta(x) = \eta_0(x)$  ( $\eta_0(x)$  — некоторая заданная функция).

I. Предположим, что нам требуется построить доверительную область для всего графика кривой регрессии на отрезке  $a \leq x \leq b$  ( $a$  и  $b$  — заданные числа), т.е., область  $G$  на плоскости, такую, что с вероятностью  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , истинная кривая регрессии  $\eta(x)$  содержится в  $G$ . Сформулированная задача решается с помощью теорем 4 и 7. Рассмотрим несколько случаев.

$\alpha_1$ . Доверительная область для  $\eta(x)$  при известном  $\epsilon(x)$ .

В таком случае из (13) следует, что с вероятностью, сколь угодно близкой к  $\alpha$ , область  $G_\alpha(K)$ , ограниченная кривыми  $\hat{h}_n^\pm(x) = \hat{m}_n(x) \pm \hat{\lambda}'_\alpha \epsilon(x)$  при всех  $x$  на отрезке  $a \leq x \leq b$ , где  $\hat{\lambda}'_\alpha = (\rho_{S_n} + \lambda_\alpha / \rho_{S_n}) K_0$  и  $\lambda_\alpha$  есть решение уравнения  $\exp(-2 \exp \rho - \lambda) = \alpha$ , служит для  $\eta(x)$  доверительной областью. Точно так же из (20) определяются область  $\tilde{G}_\alpha(K)$  и кривые  $\tilde{h}_n^\pm(x) = \tilde{m}_n(x) \pm \tilde{\lambda}_\alpha \epsilon(x)$ .

$\alpha_2$ . Доверительная область для  $\eta(x)$  при неизвест-

ном  $\epsilon(x)$ .

В этом случае следует оценить  $\epsilon(x)$ . Легко заметить,

что величина  $\epsilon_n^2(x) = (q_n(x) - r_n^2(x)) g_n^{-1}(x)$ , где

$$q_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i^2 K(a_n(x - X_i)) \left( \sum_{i=1}^n K(a_n(x - X_i)) \right)^{-1},$$

является состоятельной оценкой  $\epsilon^2(x)$ .

Теорема 8. Пусть  $g(x)$ ,  $r(x)$  и  $V(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 4. Если вдобавок к условиям теоремы 3 относительно  $a_n$ ,  $S_n$  и  $n$  потребовать выполнения условия  $na_n^{-2} / (\log S_n)^4 \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{a_n}} \sup_{a \leq x \leq b} \left| \frac{r_n(x) - r(x)}{\epsilon_n(x)} \right| \leq \right. \quad (23)$$

$$\left. \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{a_n}} \sup_{a \leq x \leq b} \left| \frac{r_n(x) - r(x)}{\sqrt{q_n^2(x) - r_n^2(x)}} \right| \leq \right. \quad (24)$$

$$\left. \leq \left( \log S_n + \frac{\lambda}{\log S_n} \right) K_0 \right\} = e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$\left. \leq \left( \log S_n + \frac{\lambda}{\log S_n} \right) K_0 \right\} = e^{-\lambda} e^{\lambda}.$$

Доказательство. Доказательство основано на тех же идеях, которые были использованы в теореме 4.

Введем обозначения:  $\beta_n(x) = q_n(x) - r_n^2(x)$ ,  $V_n(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 K(a_n(x - X_i))$ .

Из неравенства (10)

(II) работы /4/ следует соответственно, что

$$\log^2 S_n \max_{a \leq x \leq b} |q_n(x) - g(x)| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \log^2 S_n \max_{a \leq x \leq b} |r_n(x) - r(x)| \rightarrow 0$$

по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ .

Подобное же неравенство справедливо и для  $\max_{a \leq x \leq b} |V_n(x) - V(x)| \rightarrow 0$  по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,  $\log^2 S_n \max_{a \leq x \leq b} |V_n(x) - V(x)| \rightarrow 0$  по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда и из неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{a \leq x \leq b} |\beta_n(x) - \beta(x)| &= \sup_{a \leq x \leq b} |V_n(x)g_n^{-1}(x) - V(x)g^{-1}(x) + \gamma_n^2(x) - \\ &- \gamma^2(x)| \leq \sup_{a \leq x \leq b} |(V_n(x) - V(x))g^{-1}(x)| + c_{14} \sup_{a \leq x \leq b} |(g_n(x) - g(x))g^{-1}(x)| \\ &+ c_{15} \sup_{a \leq x \leq b} |\gamma_n(x) - \gamma(x)| \leq c_{16} \sup_{a \leq x \leq b} |V_n(x) - V(x)| + \\ &+ c_{17} \sup_{a \leq x \leq b} |g_n(x) - g(x)| + c_{18} \sup_{a \leq x \leq b} |\gamma_n(x) - \gamma(x)|, \end{aligned}$$

вытекающего из условия  $I^0$  и  $2^0$ , следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log^2 S_n \sup_{a \leq x \leq b} |\beta_n(x) - \beta(x)| = 0 \quad (25)$$

по вероятности.

Далее, для больших  $n$

$$\sup_{a \leq x \leq b} \left| \frac{\sigma_n^2(x)}{\sigma^2(x)} - 1 \right| \leq \frac{c_{19} \sup_x |\beta_n(x) - \beta(x)| + c_{20} \sup_x |g_n(x) - g(x)|}{\mu - \sup_x |g_n(x) - g(x)|}$$

где  $\mu = \min_{a \leq x \leq b} g(x)$ , откуда с учетом (25) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log^2 S_n \sup_x \left| 1 - \frac{\sigma_n^2(x)}{\sigma^2(x)} \right| = 0 \quad (26)$$

по вероятности.

Для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta > 0$

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|^2 \leq |\alpha - \beta|.$$

Поэтому вследствие (26)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log s_n \sup_{a \leq x \leq b} \left| \sqrt{\frac{\sigma_n^2(x)}{\sigma^2(x)}} - 1 \right| = 0 \quad (27)$$

по вероятности.

Обозначим

$$\bar{M}_n = \sqrt{\frac{n}{a_n}} \sup_{a \leq x \leq b} \left| \frac{m_n(x) - \mu(x)}{\sigma_n(x)} \right|,$$

$$\bar{K}_n = \inf_{a \leq x \leq b} \left( \frac{\sigma_n(x)}{\sigma(x)} - 1 \right),$$

$$\bar{H}_n = \sup_{a \leq x \leq b} \left( \frac{\sigma_n(x)}{\sigma(x)} - 1 \right).$$

Тогда

$$P\{M_n \leq \lambda_{S_n}(1 + \bar{K}_n)\} \leq P\{\bar{M}_n \leq \lambda_{S_n}\} \leq \quad (28)$$

$$\leq P\{M_n \leq \lambda_{S_n}(1 + \bar{H}_n)\},$$

где  $\lambda_{S_n} = \ell_{S_n} + \lambda / \ell_{S_n}$ .

Аналогично соотношениям (II) и (I2), используя (27),

можно показать, что пределы при  $n \rightarrow \infty$  крайних вероятностей неравенства (28) совпадают и равны  $\exp(-\lambda e^{-\lambda})$ .

Итак, (23) доказано. Утверждение (24) проверяется буквально теми же рассуждениями, какие мы провели при доказательстве (23).

Из (23) следует, что с вероятностью сколь угодно близкой к  $\alpha$  при больших  $n$ , область  $\tilde{G}_\alpha(K)$ , ограниченная кривыми  $\tilde{h}_n^\pm(x) = m_n(x) \pm \tilde{\lambda}'_\alpha \tilde{G}_n(x)$ , где  $\tilde{\lambda}'_\alpha = (\ell_{S_n} + \lambda_\alpha / \ell_{S_n}) K_0$ , при всех  $x$ ,  $a < x < b$ , можно приближенно считать доверительной областью для  $\mu(x)$ . Аналогично из (24) определяется область  $\tilde{\tilde{G}}_\alpha(K)$  и кривые  $\tilde{\tilde{h}}_n^+(x)$  и  $\tilde{\tilde{h}}_n^-(x)$ :

$$\tilde{\tilde{h}}_n^\pm(x) = m_n(x) \pm \tilde{\lambda}'_\alpha \sqrt{q_n(x) m_n^2(x) + \tilde{\lambda}'_\alpha q_n(x)} / \sqrt{1 + \tilde{\lambda}'_\alpha^2}$$

причем под знаком радикала стоит неотрицательная величина при больших  $n$ .

Сформулируем теорему, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 9. Пусть  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $V(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 7. Если вдобавок к условиям теоремы 7 относительно  $a_n$  и  $S_n$  потребовать условие  $n \bar{a}_n^2 / (\log S_n)^4 \rightarrow \infty$ , то имеет место (23) и (24), где только  $m_n(x)$  заменена функцией  $\tilde{m}_n(x)$ .

Так же, как и из теоремы 8, мы можем определить отсюда доверительную область для  $\mu(x)$ .

Условия теоремы 8 относительно  $a_n$  и  $S_n$  выполняются, например, если положить  $a_n = a_0 n^\alpha$  и  $S_n = S_0 n^\beta$  при  $1/3 < \alpha < 1/2$ ,  $\frac{1-\alpha}{2} < \beta < \alpha$ .



II. Проверка гипотезы кривой регрессии.  $\mathcal{B}_1$ . Пусть  $\mathcal{B}(x)$

известна и требуется проверить гипотезу  $H_0$ , согласно которой  $\eta(x) = \gamma_0(x)$  ( $\gamma_0(x)$  - некоторая заданная функция). Критическая область для проверки этой гипотезы устанавливается приближенно согласно (13) (или 20) неравенством  $M_n^* \geq d_n(\alpha)$  (или  $\widetilde{M}_n > d_n(\alpha)$ ), где  $d_n(\alpha) = (n\alpha_n^{-1})^{1/2} (\ell_{S_n} + \frac{1}{\ell_{S_n}}) K_0$ ,  $\lambda_\alpha = -\log |\log(1-\alpha)| + \log 2$ .

Если же  $\mathcal{B}(x)$  неизвестна, то критическая область устанавливается, в силу (23) (или 24), неравенством  $\overline{M}_n \geq d_n(\alpha)$  (или  $\overline{\overline{M}}_n \geq d_n(\alpha)$ ), где  $\overline{\overline{M}}_n$  - максимальное уклонение, входящее в (24)).

$\mathcal{B}_2$ . Пусть требуется проверить гипотезу  $H_0$  в предположении постоянства кривой регрессии:  $\eta(x) = E(Y)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Если  $\mathcal{B}(x)$  известна, то статистика

$$\ell_{S_n} \left( \frac{n}{a_n} \right)^{1/2} \max_{a \leq x \leq b} |m_n(x) - \overline{Y}_n| \mathcal{B}^{-1}(x) - \ell_{S_n}^2, \quad \text{где } \overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

в силу теоремы 4 асимптотически распределена так же, как  $M_n^*$ . Таким образом, гипотеза  $H_0$  отвергается, если

$$\max_{a \leq x \leq b} |m_n(x) - \overline{Y}_n| \mathcal{B}^{-1}(x) > d_n(\alpha).$$

Предположим теперь, что  $\mathcal{B}(x)$  неизвестна. В этом случае, в силу (23) критическая область для проверки гипотезы  $H_0$  устанавливается подобным образом, только  $\mathcal{B}(x)$  заменена ее оценкой.

Поступила 27.XI.1961

Кафедра теории вероятностей  
и математической статистики





Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის მქონის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის შრომები

239. 1983

УДК 519.2

О СХОДИМОСТИ ЦЕН ПРИ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ  
СХЕМЫ КАЛМАНА-БЬЮСИ ДИСКРЕТНЫМИ СХЕМАМИ

В.М. Дочвири

Пусть на некотором полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с выделенным на нем неубывающим семейством  $\mathcal{B}$  - подалгебр  $(\mathcal{F}_n)$   $\mathcal{B}$ -алгебры  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ , задана двумерная случайная последовательность  $(\theta, \xi^\varepsilon) = (\theta_n, \xi_n^\varepsilon)$ , определенная следующей системой рекуррентных уравнений

$$\theta_{(n+1)\Delta} = [a_0(n\Delta) + a_1(n\Delta)\theta_{n\Delta}] \cdot \Delta + \theta_{n\Delta} + b(n\Delta)\zeta_{n+1}, \quad (I)$$

$$n=0, 1, \dots, \Delta > 0,$$

$$\xi_{n\Delta}^\varepsilon = \sum_{m=1}^n [A_0(m\Delta) + A_1(m\Delta)\theta_{m\Delta}] \cdot \Delta + \varepsilon \sum_{m=1}^n \tilde{\zeta}_m,$$

$$n=1, 2, \dots$$

где  $\theta_0 = 0$ ,  $\varepsilon > 0$  - малый параметр,  $\zeta_n$  и  $\tilde{\zeta}_n$  - независимые  $N(0, \Delta)$  распределенные случайные величины,  $n=0, 1, 2, \dots$ , а коэффициенты  $a_i(n\Delta)$ ,  $A_i(n\Delta)$ ,  $i=0, 1$ , и  $b(n\Delta)$  являются неупреждающими, т.е.  $\mathcal{F}_{n\Delta}^{\xi^\varepsilon} = \mathcal{B}\{\xi_{s\Delta}^\varepsilon; s \leq n\}$ -измеримыми. Предполагается, что мы можем наблюдать только



за последовательностью  $\theta_{n\Delta}$ . Это т.н. дискретная схема Калмана-Бьюси частично-наблюдаемых случайных последовательностей /1/.

Пусть далее задана некоторая функция выигрыша

$$g(n, x) = \sum_{i=0}^K f_i(n) \cdot x^i, \quad (2)$$

где  $0 \leq f_i(n)$ ,  $i=0, 1, \dots, K$ ,  $n=0, \Delta, 2\Delta, \dots$ .

Определим цены  $S^0$  и  $S^\varepsilon$  следующими соотношениями

$$S^0 = \sup_{\tau \in M^0} M g(\tau, \theta_\tau), \quad (3)$$

$$S^\varepsilon = \sup_{\tau \in M^{\xi^\varepsilon}} M g(\tau, \theta_\tau), \quad (4)$$

где  $M^0$  и  $M^{\xi^\varepsilon}$  обозначают классы моментов остановки  $\tau = \tau(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , со значениями в множестве  $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots\}$  относительно семейств  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_{n\Delta}^0)$  и  $(\mathcal{F}_{n\Delta}^{\xi^\varepsilon})$ , связанных с последовательностями  $\theta_{n\Delta}$  и  $\xi_{n\Delta}^\varepsilon$  соответственно,  $\mathcal{F}_{n\Delta}^0 = \sigma\{\theta_{s\Delta}; s \leq n\}$ ,  $\mathcal{F}_{n\Delta}^{\xi^\varepsilon} = \sigma\{\xi_{s\Delta}^\varepsilon; s \leq n\}$  /2/.

В настоящей работе задача оптимальной остановки последовательности  $\theta_{n\Delta}$  по неполным данным относительно функции выигрыша (2) сводится к некоторой задаче по полным данным и показывается, что при каждом фиксированном малом шаге  $\Delta > 0$  ( $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ ) цена  $S^\varepsilon$  сходится к цене  $S^0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Аналогичные вопросы для более простой схемы частично-наблюдаемых случайных последовательностей с линейной от  $x$  функцией выигрыша изучены в /2/. Вопрос о сходимости

мости цен для дискретных схем рассмотрен также в /3/, /4/.

Определим теперь случайные последовательности  $S = (S_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $\xi^{*\epsilon} = (\xi_n^{*\epsilon})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$S_{n+1} = [a_0(n\Delta) + a_1(n\Delta) \cdot S_n] \cdot \Delta + S_n + b(n\Delta) \zeta_{n+1}, \quad (5)$$

$$S_0 = 0,$$

$$\xi_n^{*\epsilon} = [f_0(n\Delta) + f_2(n\Delta) S_n] \cdot \Delta + \epsilon \tilde{\zeta}_n. \quad (6)$$

Очевидно, что  $S_n = \theta_{n\Delta}$  и  $\xi_n^{*\epsilon} = \xi_{n\Delta}^\epsilon - \xi_{(n-1)\Delta}^\epsilon$ .

Поэтому  $\mathcal{F}_n^S = \mathcal{F}_{n\Delta}^\theta$ ,  $\mathcal{F}_n^{\xi^{*\epsilon}} = \mathcal{F}_{n\Delta}^{\xi^\epsilon}$  и отображение  $\theta = \tau/\Delta$  переводит  $\mathcal{M}^\theta$  в класс  $\mathcal{M}^S$  моментов остановки со значениями в  $\{0, 1, 2, \dots\}$  относительно  $(\mathcal{F}_n^S)$ , а  $\mathcal{M}^{\xi^\epsilon}$  - в  $\mathcal{M}^{\xi^{*\epsilon}}$ . Обозначим кроме этого для

$n = 0, 1, 2, \dots$   $f_i^*(n) = f_i(n\Delta)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ,  $g^*(n, x) = g(n\Delta, x)$ ,  
 $a_0^*(n) = a_0(n\Delta)$ ,  $a_1^*(n) = a_1(n\Delta)$ ,  $f_0^*(n) = f_0(n\Delta)$ ,  $f_1^*(n) =$   
 $= f_1(n\Delta)$ ,  $b^*(n) = b(n\Delta)$  и пусть  $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n / \sqrt{\Delta}$ ,  $\tilde{\theta} = \tilde{\zeta}_n / \sqrt{\Delta}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Тогда легко видеть, что

$$S^0 = \sup_{\theta \in \mathcal{M}^S} M g^*(\theta, S_\theta),$$

$$S^\epsilon = \sup_{\theta \in \mathcal{M}^{\xi^{*\epsilon}}} M g^*(\theta, S_\theta),$$

а (5) и (6) принимают вид

$$S_{n+1} = a_0^{*\varepsilon}(n)\Delta + [a_1^{*\varepsilon}(n)\Delta + 1]S_n + b^{*\varepsilon}(n)\sqrt{\Delta} \mathcal{V}_{n+1}, \quad n=0,1,\dots, \quad (7)$$

$$\xi_n^{*\varepsilon} = \beta_0^{*\varepsilon}(n)\Delta + \beta_1^{*\varepsilon}(n)\Delta S_n + \varepsilon\sqrt{\Delta} \tilde{\mathcal{V}}_n, \quad n=1,2,\dots, \quad (8)$$

где  $\mathcal{V}_n$  и  $\tilde{\mathcal{V}}_n$  распределены по закону  $\mathcal{N}(0,1)$ .

Обозначим

$$\mu_i^{*\varepsilon}(n) = M\left(\frac{S_n^i}{\mathcal{G}_n^{\xi^{*\varepsilon}}}\right),$$

$$m_n^{*\varepsilon} = \mu_1^{*\varepsilon}(n) = M\left(\frac{S_n}{\mathcal{G}_n^{\xi^{*\varepsilon}}}\right),$$

$$\gamma_n^{*\varepsilon} = M\left(S_n - m_n^{*\varepsilon}\right)^2,$$

$$\mathcal{Y}_j(i) = \frac{i!}{(i-j)! 2^{j/2} \cdot \left(\frac{j}{2}\right)!}, \quad j - \text{четно},$$

и определим случайную последовательность  $S_n^\varepsilon$  соотношением

$$S_{n+1}^\varepsilon = a_0^{*\varepsilon}(n)\Delta + a_1^{*\varepsilon}(n)\Delta S_n^\varepsilon + \beta_n^{*\varepsilon} \mathcal{V}_{n+1}, \quad (9)$$

где

$$\beta_n^{*\varepsilon} = \frac{b^{*\varepsilon 2}(n)\Delta \cdot \beta_1^{*\varepsilon 2}(n+1)\Delta + a_1^{*\varepsilon 2}(n)\Delta^2 \cdot \beta_1^{*\varepsilon 2}(n+1)\Delta \cdot \gamma_n^{*\varepsilon}}{\sqrt{b^{*\varepsilon 2}(n)\Delta \cdot \beta_1^{*\varepsilon 2}(n+1)\Delta^2 + a_1^{*\varepsilon 2}(n)\Delta^2 \cdot \beta_1^{*\varepsilon 2}(n+1)\Delta^2 \cdot \gamma_n^{*\varepsilon} + \varepsilon^2 \Delta^2}}$$



Предположим теперь, что для каждого  $n=0, 1, 2, \dots$  коэффициенты системы (7), (8) удовлетворяют следующим условиям

$$(I) \quad |a_0^*(n)| \leq a < \infty,$$

$$(II) \quad |a_1^*(n)| \leq q, \quad 0 < q < 1,$$

$$(III) \quad 0 < \underline{b} \leq |b^*(n)| < \bar{b} < \infty,$$

$$(IV) \quad 0 < \underline{A} \leq |A_1^*(n)| \leq \bar{A} < \infty,$$

$$(V) \quad b^*(n) \cdot A_1^*(n+1) \geq 0,$$

$$(VI) \quad \sup_n |f_i^*(n)| \leq C < \infty, \quad i=0, 1, \dots, K.$$

Теорема I. Пусть частично-наблюдаемая последовательность  $(S_n, \xi_n^{\# \varepsilon})$  задана системой (7), (8) и выполнены условия (I) - (VI).

Тогда

$$S^\varepsilon = \sup_{\theta \in \mathcal{M}^{S^\varepsilon}} M \left[ \sum_{i=0}^K f_i(\theta) \nu_i^\varepsilon(\theta) \right], \quad (10)$$

где

$$\nu_i^\varepsilon(n) = \sum_{j=0}^i \mathcal{Y}_j(i) \left( \gamma_n^{\# \varepsilon} \right)^{j/2} \left( S_n^\varepsilon \right)^{i-j}, \quad i=0, 1, \dots, K. \quad (11)$$

Доказательство. Используя лемму I.9 /1/, легко видеть,

что



$$S^\varepsilon = \sup_{\xi \in \mathcal{M}^{\xi \varepsilon}} M \left[ \sum_{i=0}^K f_i(\xi) \mu_i^{\xi \varepsilon}(\xi) \right],$$

где

$$\mu_i^{\xi \varepsilon}(n) = \sum_{j=0}^i f_j(i) (\gamma_n^{\xi \varepsilon})^{j/2} (\tau_n^{\xi \varepsilon})^{i-j}.$$

В силу теорем I3.4 и I3.5 /I/ находим, что

$$m_{n+1}^{\xi \varepsilon} = a_0^*(n) \Delta + a_1^*(n) \Delta \cdot m_n^{\xi \varepsilon} + \beta_n^{\xi \varepsilon} \bar{\mathcal{G}}_{n+1}^{\xi \varepsilon},$$

где  $\bar{\mathcal{G}}_n^{\xi \varepsilon}$  распределены  $\mathcal{N}(0,1)$  и что  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n^{\xi \varepsilon}$  и  $\mathcal{G}_n^{\xi \varepsilon}$  совпадают при всех  $n$ . Учитывая тот факт, что случайные последовательности  $(S_n^{\xi \varepsilon}, \mathcal{F}_n^{\xi \varepsilon})$  и  $(m_n^{\xi \varepsilon}, \mathcal{G}_n^{\xi \varepsilon})$  имеют одинаковые распределения, получим

$$\sup_{\xi \in \mathcal{M}^{\xi \varepsilon}} M \left[ \sum_{i=0}^K f_i(\xi) \nu_i^{\xi \varepsilon}(\xi) \right] = \sup_{\xi \in \mathcal{M}^{\xi \varepsilon}} M \left[ \sum_{i=0}^K f_i(\xi) \mu_i^{\xi \varepsilon}(\xi) \right],$$

откуда и следует утверждение теоремы I.

Введем теперь следующие обозначения:

$$C_0 = \underline{A}^{-1} \underline{b}^{-1} \max \{ \underline{A}^{-1}; 2q^2 \bar{A} \underline{A}^{-2} \},$$

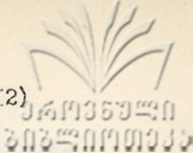
$$\beta = \underline{A}^{-1} \underline{b}^{-1} \bar{A} (\bar{b}^2 + q^2 \underline{A}^{-2}).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы I и §4.

Тогда, если  $s^0 < \infty$ , то

$$0 \leq s^0 - s^\varepsilon \leq C \cdot H_K \cdot \varepsilon^2,$$

(I2)



где

$$H_K = \frac{C_0}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$+ \sum_{i=2}^K \left[ i C_0 \alpha^{\frac{4i-3}{2}} \sqrt{\left( \left( \frac{\alpha}{1-q} \right)^{2(i-1)} + e^{1/2} [2(i-1)!] \left( \frac{1}{1-q^2} \right)^{i-1} \left[ \beta^{-2(i-1)} + \beta^{2(i-1)} \right] \right)} \right] \frac{1}{1-q^2} +$$

$$+ \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=2}^i \varphi_j(i) \alpha^{i-j-1} \left\{ \left( \frac{\alpha}{1-q} \right)^{i-j} +$$

(I3)

$$+ 2e^{1/2} (i-j)! \beta^{i-j} \left( \frac{1}{1-q^2} \right)^{\frac{i-j}{2}} \right\}.$$

Доказательство. Согласно теореме I мы можем написать

$$s^0 - s^\varepsilon \leq \sup_{\theta \in M^{s^\varepsilon}} \sum_{i=0}^K M \left\{ f_i(\theta) \left[ (S_\theta)^i - \nu_i^{s^\varepsilon}(\theta) \right] \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^K \sup_n M \left[ |f_i(n)| \cdot \left| (S_n)^i - \nu_i^{s^\varepsilon}(n) \right| \right] \leq C \sup_n M (S_n - S_n^\varepsilon) +$$

$$+ C \left\{ \sum_{i=2}^K \left[ \sup_n M \left| (S_n)^i - (S_n^\varepsilon)^i \right| + \right. \right.$$



$$+ \left. \sum_{j=2}^i \varphi_j(i) (\gamma_n^{4\epsilon})^{j/2} \sup_n M |S_n^\epsilon|^{i-j} \right\}$$

Обозначим

$$I_1(i) = \sup_n M (|S_n| + |S_n^\epsilon|)^{2(i-1)},$$

$$I_2 = \sup_n M (S_n - S_n^\epsilon)^2,$$

$$I_3(i, j) = \sup_n M |S_n^\epsilon|^{i-j}.$$

Тогда, используя неравенства Коши-Буняковского, легко видеть, что

$$s^0 - s^\epsilon \leq C \sqrt{I_2} +$$

$$+ C \left\{ \sum_{i=2}^K \left[ i \sqrt{I_1(i)} \cdot I_2 + \sum_{j=2}^i \varphi_j(i) (\gamma_n^{4\epsilon})^{j/2} I_3(i, j) \right] \right\}. \quad (14)$$

Оценим теперь  $I_1(i)$ ,  $I_2$  и  $I_3(i, j)$ . Заметим с этой целью, что случайные последовательности  $S_n$  и  $S_n^\epsilon$  можно представить в следующем виде /1/:

$$S_n = \sum_{\ell=1}^n a_0^{*\ell} \Delta \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta + \sum_{\ell=1}^n b^{*\ell} \sqrt{\Delta} \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta,$$

$$S_n^\varepsilon = \sum_{\ell=1}^n a_0^{*\ell} \Delta \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta + \sum_{\ell=1}^n \beta^{*\varepsilon \ell} \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta.$$

Используя неравенство

$$M \left| \sum_{i=1}^k a_i \eta_i \right|^p \leq 2 \cdot e^{1/2} p! \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{p/2}, \quad (15)$$

справедливое для каждого  $k=1, 2, \dots$ ,  $p \geq 0$ ,  $a_i$  — произвольные постоянные, а  $\eta_i$  независимы и распределены нормально  $\mathcal{N}(0, 1)$ , легко видеть, что

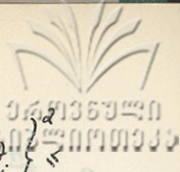
$$\begin{aligned} I_j(i) &\leq \sup_n 2^{4(i-1)-2} \cdot \left\{ 2 \left[ \sum_{\ell=1}^n a_0^{*\ell} \Delta \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta \right] + \right. \\ &+ M \left[ \sum_{\ell=1}^n b^{*\ell} \sqrt{\Delta} \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta \right] + \\ &\left. + M \left[ \sum_{\ell=1}^n \beta^{*\varepsilon \ell} \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{*j} \Delta \right] \right\} \leq \end{aligned} \quad (16)$$

$$\leq 2^{4(i-1)-1} \left\{ \left( \frac{1}{1-q} \right)^{2(i-1)} + e^{1/2} [2(i-1)]! \left( \frac{1}{1-q^2} \right)^{i-1} \left[ \bar{\beta}^{2(i-1)} + \beta^{2(i-1)} \right] \right\},$$

где мы воспользовались следующей оценкой для  $\gamma^{*\varepsilon}$  /3/:

$$\gamma_n^{*\varepsilon} \leq \bar{\beta}^2 \cdot \varepsilon^2.$$

Имеем далее



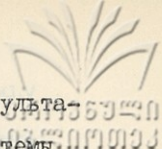
$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sup_n M \left\{ \sum_{\ell=1}^n [b^{**}(\ell-1)\sqrt{\Delta} - \beta^{**\varepsilon}(\ell-1)] \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{**}(j)\Delta \cdot \varrho_j \right\} \leq \\
 &\leq \sup_n 2 \cdot e^{1/2} \cdot 2 \left\{ \sum_{\ell=1}^n [b^{**}(\ell-1)\sqrt{\Delta} - \beta^{**\varepsilon}(\ell-1)]^2 \left( \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{**}(j)\Delta \right)^2 \right\} \leq \\
 &\leq C_0^2 \cdot \varepsilon^4 \frac{1}{1-q^2}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Наконец для  $I_3(i, j)$  имеем

$$\begin{aligned}
 I_3(i, j) &\leq \\
 &\leq \sup_n M \cdot 2^{i-j-1} \left\{ \left[ \sum_{\ell=1}^n a_0^{**}(\ell-1)\Delta \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{**}(j)\Delta \right]^{i-j} + \left[ \sum_{\ell=1}^n \beta^{**\varepsilon}(\ell-1)\Delta \prod_{j=\ell}^{n-1} a_1^{**}(j)\Delta \right]^{i-j} \right\} \leq \\
 &\leq 2^{i-j-1} \left[ \left( \frac{a}{1-q} \right)^{i-j} + 2e^{1/2} (i-j)! \beta^{i-j} \left( \frac{1}{1-q^2} \right)^{\frac{i-j}{2}} \right]. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Подставляя теперь (16), (17), (18) в (14), получим утверждение теоремы 2. Что касается справедливости неравенства  $S^0 - S^\varepsilon \geq 0$ , то оно доказывается аналогично тому, как это делается в /2/ и здесь приводить не будем.

Замечание I. Нетрудно проверить, что если  $\Delta \rightarrow 0$  и взять  $\varepsilon = \Delta$ , то сходимость цен будет иметь порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ .



Замечание 2. Можно показать, что аналогичные результаты справедливы и в том случае, когда в уравнениях системы (I) линейно входит наблюдаемая последовательность  $\xi_{n\Delta}^{\epsilon}$ .

Поступила 27.XI.1981 - Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Ш. Липцер, А.Н.Ширяев. Статистика случайных процессов, М., 1974.
2. Х. Х.Ферманн. Об оптимальной остановке случайных процессов по неполным данным, кандидатская диссертация, М., 1977.
3. Х.Х. Ферманн. Сходимость цен при оптимальной остановке частично-наблюдаемых случайных последовательностей относительно квадратичного критерия (препринт).
4. В.М. Дочвири, М.А.Шашиашвили. О сходимости цен в одной дискретной задаче оптимальной остановки по неполным данным (в печати).

ბ. რეზიუმე

დასაბუთის პრობლემის შესახებ კარდინ-ბიუსის უწყვეტი სტრატეგია რისკ-ფუნქციის სტრატეგიით აპროქსიმაციის რჩის რეზიუმე

რამდენიმე დარღობა დასაბუთის პრობლემის კარდინ-ბიუსის უწყვეტი სტრატეგია რისკ-ფუნქციის სტრატეგიით აპროქსიმაციის რჩის. მიზეზის განხილვა და დასაბუთების აპროქსიმაცია.



ON THE CONVERGENCE OF COSTS IN THE CASE  
OF APPROXIMATION OF A CONTINUOUS SCHEME OF  
KALMAN-BUCY BY DISCRETE SCHEMES

Summary

The convergence of costs is proved in the case of approximation of a continuous scheme of Kalman-Bucy by discrete schemes. The reward function is considered as a polynomial.



საქართველოს  
ხელისუფლების

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მფლობელის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

239, 1983

УДК 519.21

БЛОКИРОВАННАЯ ДВУХФАЗОВАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО  
ПОТОКА

Г.Л. Арсенишвили

Рассмотрим двухфазовую систему обслуживания, где воз-  
можна очередь перед первым прибором, а мест ожидания между  
приборами нет. Пусть входящий поток простейший, а времена  
обслуживания на базах распределены по экспоненциальному за-  
кону. Предполагается, что если длина очереди у первого при-  
бора меньше  $n$ , то требования поступают с интенсивностью  
 $\lambda_1$ , а в остальных случаях с интенсивностью  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 < \lambda_1$ )  
Интенсивность обслуживания первым прибором -  $\mu_1$ , а вто-  
рым прибором -  $\mu_2$ . Если на первой фазе обслуживание  
закончено, а вторая фаза занята - происходит "блокировка"  
/1/.

Обозначим:

$P_{n,0}(t)$  - вероятность того, что в момент времени  $t$   
на первой фазе  $n$  требований, а второй прибор свободен;  
 $P_{n,1}(t)$  - вероятность того, что на первой фазе  $n$   
требований и оба прибора заняты обслуживанием;

$P_{n,2}(t)$  - вероятность того, что на первой базе  $n$  требований, причем одно из них уже обслужено и ожидает освобождения второго прибора.

Рассматриваемая система может быть описана следующими вероятностными соотношениями:

$$P_{0,0}(t+\Delta t) = (1-\lambda_1\Delta t)P_{0,0}(t) + \mu_2\Delta t P_{0,1}(t) + o(\Delta t),$$

$$P_{0,1}(t+\Delta t) = (1-\lambda_1\Delta t - \mu_2\Delta t)P_{0,1}(t) + \mu_1\Delta t P_{0,0}(t) + \mu_2\Delta t P_{0,2}(t) + o(\Delta t),$$

$$P_{0,2}(t+\Delta t) = (1-\lambda_1\Delta t - \mu_2\Delta t)P_{0,2}(t) + \mu_1\Delta t P_{0,1}(t) + o(\Delta t),$$

$$P_{n,0}(t+\Delta t) = (1-\lambda_1\Delta t - \mu_1\Delta t)P_{n,0}(t) + \mu_2\Delta t P_{n,1}(t) + \lambda_1\Delta t P_{n-1,0}(t) + o(\Delta t) \quad (n=1,2,\dots,r-1);$$

$$P_{r,0}(t+\Delta t) = (1-\lambda_2\Delta t - \mu_1\Delta t)P_{r,0}(t) + \mu_2\Delta t P_{r,1}(t) + \lambda_1\Delta t P_{r-1,0}(t), \quad (I)$$

$$P_{n,0}(t+\Delta t) = (1-\lambda_2\Delta t - \mu_1\Delta t)P_{n,0}(t) + \mu_2\Delta t P_{n,1}(t) + \lambda_2\Delta t P_{n-1,0}(t) \quad (n=r+1, r+2, \dots);$$

$$P_{n,1}(t+\Delta t) = (1-\lambda_1\Delta t - \mu_1\Delta t - \mu_2\Delta t)P_{n,1}(t) + \mu_2\Delta t P_{n,2}(t) +$$

$$+ \lambda_1 \Delta t P_{n-1,1}(t) + \mu_1 \Delta t P_{n+1,0}(t) + o(\Delta t)$$

$$(n=1, 2, \dots, r-1);$$

$$P_{r,1}(t+\Delta t) = (1 - \lambda_2 \Delta t - \mu_1 \Delta t - \mu_2 \Delta t) P_{r,1}(t) + \mu_2 \Delta t P_{r,2}(t) +$$

$$+ \mu_1 \Delta t P_{r+1,0}(t) + o(\Delta t),$$

$$P_{n,1}(t+\Delta t) = (1 - \lambda_2 \Delta t - \mu_1 \Delta t - \mu_2 \Delta t) P_{n,1}(t) + \mu_2 \Delta t P_{n,2}(t) +$$

$$+ \lambda_2 \Delta t P_{n-1,1}(t) + \mu_1 \Delta t P_{n+1,0}(t) + o(\Delta t) \quad (n=r+1, r+2, \dots);$$

$$P_{r-1,2}(t+\Delta t) = (1 - \lambda_2 \Delta t - \mu_2 \Delta t) P_{r-1,2}(t) + \lambda_1 \Delta t P_{r-2,2}(t) +$$

$$+ \mu_1 \Delta t P_{r,1}(t) + o(\Delta t),$$

$$P_{n,2}(t+\Delta t) = (1 - \lambda_2 \Delta t - \mu_2 \Delta t) P_{n,2}(t) + \lambda_2 \Delta t P_{n-1,2}(t) +$$

$$+ \mu_1 \Delta t P_{n+1,1}(t) + o(\Delta t)$$

$$(n=r, r+1, \dots).$$

После некоторых известных /2/ преобразований, переходя к пределу, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем следующую бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений:



$$P'_{0,0}(t) = -\lambda_1 P_{0,0}(t) + \mu_2 P_{0,1}(t),$$

$$P'_{0,1}(t) = -(\lambda_1 + \mu_2) P_{0,1}(t) + \mu_1 P_{1,0}(t) + \mu_2 P_{0,2}(t),$$

$$P'_{0,2}(t) = -(\lambda_1 + \mu_2) P_{0,2}(t) + \mu_1 P_{1,1}(t),$$

$$P'_{n,0}(t) = -(\lambda_1 + \mu_1) P_{n,0}(t) + \mu_2 P_{n,1}(t) + \lambda_1 P_{n-1,0}(t)$$

$$(n=1, 2, \dots, n-1);$$

$$P'_{n,0}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1) P_{n,0}(t) + \mu_2 P_{n,1}(t) + \lambda_1 P_{n-1,0}(t),$$

$$P'_{n,0}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1) P_{n,0}(t) + \mu_2 P_{n,1}(t) + \lambda_2 P_{n-1,0}(t)$$

$$(n=n+1, n+2, \dots);$$

$$P'_{n,1}(t) = -(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}(t) + \mu_2 P_{n,2}(t) + \lambda_1 P_{n-1,1}(t) +$$

$$+ \mu_1 P_{n+1,0}(t) \quad (n=1, 2, \dots, n-1);$$

$$P'_{n,1}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}(t) + \mu_2 P_{n,2}(t) + \mu_1 P_{n+1,0}(t),$$

$$P'_{n,1}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}(t) + \mu_2 P_{n,2}(t) + \lambda_2 P_{n-1,1}(t) +$$

$$+ \mu_1 P_{n+1,0}(t) \quad (n = \gamma+1, \gamma+2, \dots);$$

$$P'_{\gamma+1,2}(t) = -(\lambda_2 + \mu_2) P_{\gamma+1,2}(t) + \lambda_1 P_{\gamma-1,2}(t) + \mu_1 P_{\gamma,1}(t),$$

$$P'_{n,2}(t) = -(\lambda_2 + \mu_2) P_{n,2}(t) + \lambda_2 P_{n-1,2}(t) + \mu_1 P_{n+1,1}(t)$$

$$(n = \gamma, \gamma+1, \dots).$$

Переходя в (2) к пределу, когда  $t \rightarrow \infty$  получаем уравнение вероятностей состояний в стационарном режиме:

$$\lambda_1 P_{1,0,0} = \mu_2 P_{0,1},$$

$$(\lambda_1 + \mu_2) P_{0,1} = \mu_2 P_{0,2} + \mu_1 P_{1,0},$$

$$(\lambda_1 + \mu_2) P_{0,2} = \mu_1 P_{1,1},$$

$$(\lambda_1 + \mu_1) P_{n,0} = \mu_2 P_{n,1} + \lambda_1 P_{n-1,0} \quad (n = 1, 2, \dots, \gamma-1);$$

$$(\lambda_2 + \mu_1) P_{\gamma,0} = \mu_2 P_{\gamma,1} + \lambda_1 P_{\gamma-1,0},$$

$$(\lambda_2 + \mu_1) P_{n,0} = \mu_2 P_{n,1} + \lambda_2 P_{n-1,0} \quad (n = \gamma+1, \gamma+2, \dots);$$



$$(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1} = \mu_2 P_{n,2} + \lambda_1 P_{n-1,1} + \mu_1 P_{n+1,0}$$

$$(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1} = \mu_2 P_{n,2} + \lambda_1 P_{n-1,1} + \mu_1 P_{n+1,0}$$

$$(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1} = \mu_2 P_{n,2} + \lambda_1 P_{n-1,1} + \mu_1 P_{n+1,0} \quad (n = \gamma + 1, \dots);$$

$$(\lambda_1 + \mu_2) P_{n,2} = \lambda_1 P_{n-1,2} + \mu_1 P_{n+1,1} \quad (n = 1, 2, \dots, \gamma - 2);$$

$$(\lambda_2 + \mu_2) P_{\gamma-1,2} = \lambda_1 P_{\gamma-2,2} + \mu_1 P_{\gamma,1}$$

$$(\lambda_2 + \mu_2) P_{n,2} = \lambda_2 P_{n-1,2} + \mu_1 P_{n+1,1}$$

Введем производящие функции:

$$F_0(\tilde{x}) = \sum_{n=0}^{\gamma-1} P_{n,0} \tilde{x}^n, \quad \Phi_0(\tilde{x}) = \sum_{n=\gamma}^{\infty} P_{n,0} \tilde{x}^n,$$

$$F_1(\tilde{x}) = \sum_{n=0}^{\gamma-1} P_{n,1} \tilde{x}^n, \quad \Phi_1(\tilde{x}) = \sum_{n=\gamma}^{\infty} P_{n,1} \tilde{x}^n,$$

$$F_2(\tilde{x}) = \sum_{n=0}^{\gamma-2} P_{n,2} \tilde{x}^n, \quad \Phi_2(\tilde{x}) = \sum_{n=\gamma-1}^{\infty} P_{n,2} \tilde{x}^n.$$

Перемножим уравнения (3) на  $\tilde{x}^n$  и просуммировав, после некоторых преобразований получим следующие соотношения для производящих функций:

$$[\lambda_1(1-x) + \mu_1] F_0(x) - \mu_2 F_1(x) = \mu_1 P_{0,0} - \lambda_1 P_{\tau-1,0} x^\tau,$$

$$[\lambda_2(1-x) + \mu_1] \Phi_0(x) - \mu_2 \Phi_1(x) = \lambda_1 P_{\tau-1,0} x^\tau,$$

$$x [\lambda_1(1-x) + \mu_1 + \mu_2] F_1(x) - \mu_2 x F_2(x) - \mu_1 F_0(x) =$$

$$= \mu_1 P_{0,1} x - \mu_1 P_{0,0} + \mu_2 P_{\tau-1,2} x^\tau - \lambda_1 P_{\tau-1,1} x^{\tau+1} + \mu_1 P_{\tau,0} x^\tau,$$

(4)

$$x [\lambda_2(1-x) + \mu_1 + \mu_2] \Phi_1(x) - \mu_2 x \Phi_2(x) - \mu_1 \Phi_0(x) =$$

$$= \lambda_1 x^{\tau+1} P_{\tau-1,1} - \mu_1 P_{\tau,0} x^\tau - \mu_2 P_{\tau-1,2} x^\tau,$$

$$\mu_1 F_1(x) - x [\lambda_1(1-x) + \mu_2] F_2(x) = \lambda_1 P_{\tau-2,2} x^\tau + \mu_1 P_{0,1},$$

$$x [\lambda_2(1-x) + \mu_2] \Phi_2(x) - \mu_1 \Phi_1(x) = \lambda_1 P_{\tau-2,2} x^\tau.$$

Найти производящие функции из полученных соотношений представляется невозможным. Подставив в (4)  $x=1$ , получим:

$$\mu_1 F_0(1) - \mu_2 F_1(1) = \mu_1 P_{0,0} - \lambda_1 P_{\tau-1,0},$$

(5)

$$\mu_1 \Phi_0(1) - \mu_2 \Phi_1(1) = \lambda_1 P_{\tau-1,0},$$

$$(\mu_1 + \mu_2) F_1(1) - \mu_2 F_2(1) - \mu_1 F_0(1) = \mu_1 P_{0,1} - \mu_1 P_{0,0} + \mu_2 P_{\tau-1,2} - \lambda_1 P_{\tau-1,1} + \mu_1 P_{\tau,0},$$

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2) \Phi_1(t) - \mu_2 \Phi_2(t) - \mu_1 \Phi_0(t) = \\ = \lambda_1 P_{\pi-1,1} - \mu_1 P_{\pi,0} - \mu_2 P_{\pi-1,2}, \end{aligned}$$

$$\mu_1 F_1(t) - \mu_2 F_2(t) = \lambda_1 P_{\pi-2,2} + \mu_1 P_{0,1},$$

$$\mu_2 \Phi_2(t) - \mu_1 \Phi_1(t) = \lambda_1 P_{\pi-2,2}.$$

Следуя [1], обозначим

$$x_0 = P\{n_2 = 0\},$$

$$x_1 = P\{n_2 = 1 \text{ и первый прибор не блокирован}\},$$

$$x_2 = P\{n_2 = 1 \text{ и первый прибор блокирован}\}.$$

Учитывая эти обозначения, из (5) легко получим

$$\mu_1 x_0 - \mu_2 x_1 = \mu_1 P_{0,0}, \quad (6)$$

$$(\mu_1 + \mu_2) x_1 - \mu_2 x_2 - \mu_1 x_0 = \mu_1 P_{0,1} - \mu_1 P_{0,0},$$

$$\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 = \mu_1 P_{0,1}.$$

К соотношениям (6) следует добавить еще

$$x_0 + x_1 + x_2 = 1. \quad (7)$$



Второй прибор рассматриваемой нами системы никогда не блокируется, поэтому  $x_0$  есть вероятность того, что второй прибор свободен, если на него поступает поток требований меняющейся интенсивности в зависимости от величины очереди. В [3] такая вероятность определена в явном виде, поэтому

$$x_0 = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)\rho_1^2}, \quad (8)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

Для решения уравнений (6) - (7) надо еще учесть следующее соотношение из (3):

$$\lambda_1 P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1}.$$

Теперь нетрудно найти решение

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)\rho_1^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} P_{0,0},$$

$$x_2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \cdot \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)\rho_1^2} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} P_{0,0} - \frac{\mu_1 \lambda_1}{\mu_2^2} P_{0,0}$$

Значение  $P_{0,0}$  находим из условия (7):

$$P_{0,0} = \frac{x_0(1+\alpha+\alpha^2)-1}{\alpha\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_2}\right)+\alpha^2}$$



где

$$\alpha = \frac{M_1}{M_2}$$

Поступила 10.11.1982

Кафедра теории вероятностей  
и математической статистики

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. "Мир", М., 1965.
2. А.Я. Хинчин. Математические методы теории массового обслуживания, М., 1963.
3. Г.Л. Арсенишвили. Сообщения АН ГССР, 76, № 2, 1974.

განმარტებელი

მათემატიკის განმარტებელი ინსტიტუტი  
საბჭოთა მეცნიერების აკადემია

რეზიუმე

განვიხილოთ მარტივი უწყვეტი განლაგებული ორი ხელსაწყო. რიგი დასაშვებია მხოლოდ პირველ ხელსაწყოსთან. შემაჯავარი ნაკადის ინტენსივობა რიგის სიგრძეზეა დამოკიდებული. შემაჯავარი ნაკადი უმარტივესია, ხოლო მარტივების რიცხვი უსაზღვროდ შეიძლება განვიხილოთ.



A TWO-PHASE BLOCK QUEUING SYSTEM WITH CHANGING  
INTENSITY OF THE INPUT FLOW

Summary

A sequence of two server stations is considered. The intensity of the input flow depends on the length of the queue. The input flow is the simplest, and the time is exponentially distributed.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მტკიცებლადი სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის შრომები

239, 1983

УДК 519.31

ДВУХФАЗОВАЯ БЛОКИРОВАННАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПО ПРАВИЛУ « $s, S$ »  
ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Г.Л.Арсенишвили, Н.Ш.Заалишвили

В /1/ описана однолинейная система массового обслужи-  
вания, где интенсивность обслуживания меняется по правилу  
"  $s, S$  ". Мы применим это правило к заблокированной двух-  
фазовой системе обслуживания с меняющейся интенсивностью  
входящего потока.

Рассмотрим два последовательно расположенных прибора.  
Очередь перед первым из них не ограничена, а между прибора-  
ми не допустима. Входящий поток простейший, а времена об-  
служивания на фазах распределены по экспоненциальному зако-  
ну. Первоначально интенсивность поступления требований рав-  
на  $\lambda_1$ , до тех пор пока длина очереди перед первым  
прибором не станет равной  $S$ , после чего интенсивность  
поступления становится равной  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 < \lambda_1$ ). Интенсив-  
ность меняется с  $\lambda_2$  на  $\lambda_1$  при длине очереди меньше  
или равной  $S$ .

Введем следующие обозначения:

$P_{n,0}^{(1)}(t)$  - вероятность того, что в момент  $t$  на первой фазе  $n$  требований  $n=1,2,\dots,S-1$ , а второй прибор свободен; поступление требований происходит с первоначальной интенсивностью.

$P_{n,1}^{(1)}(t)$  - вероятность того, что в момент  $t$  на первой фазе  $n$  требований ( $n=1,2,\dots,S-1$ ) и вторая фаза занята; поступление требований происходит с первоначальной интенсивностью.

$P_{n,2}^{(1)}(t)$  - вероятность того, что в момент  $t$  на первой фазе  $n+1$  требований и она блокирована, а вторая фаза занята обслуживанием ( $n=1,2,\dots,S-1$ ); поступление требований происходит с первоначальной интенсивностью.

$P_{n,0}^{(2)}(t)$ ,  $P_{n,1}^{(2)}(t)$ ,  $P_{n,2}^{(2)}(t)$  - соответственно обозначают вероятности тех же событий, но при условии, что поступление требований в систему происходит с интенсивностью

$\lambda_2$ , а  $n=s+1,\dots,S,\dots$

Рассматриваемая система обслуживания описывается следующей бесконечной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_{0,0}^{(1)}(t)}{dt} = \mu_2 P_{0,1}^{(1)}(t) - \lambda_1 P_{0,0}^{(1)}(t), \quad (1)$$

$$\frac{dP_{0,1}^{(1)}(t)}{dt} = \mu_1 P_{1,0}^{(1)}(t) + \mu_2 P_{0,2}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_2) P_{0,1}^{(1)}(t), \quad (2)$$

$$\frac{dP_{0,2}^{(1)}(t)}{dt} = \mu_1 P_{1,1}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_2) P_{0,2}^{(1)}(t), \quad (3)$$

$$\frac{dP_{n,0}^{(1)}(t)}{dt} = \int_{\alpha} P_{n,1}^{(1)}(t) + \lambda_1 P_{n-1,0}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_1) P_{n,0}^{(1)}(t), \quad (4)$$

$$(n=1, 2, \dots, S, \dots, S-1);$$

$$\frac{dP_{S,0}^{(2)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{S-1,0}^{(2)}(t) + \lambda_2 P_{S-1,0}^{(2)}(t) + \int_{\alpha} P_{S,1}^{(2)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1) P_{S,0}^{(2)}(t), \quad (5)$$

$$\frac{dP_{n,0}^{(2)}(t)}{dt} = \lambda_2 P_{n-1,0}^{(2)}(t) + \int_{\alpha} P_{n,1}^{(2)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1) P_{n,0}^{(2)}(t), \quad (6)$$

$$(n=S+2, \dots, S-1, S+1, S+2, \dots);$$

$$\frac{dP_{S+1,0}^{(2)}(t)}{dt} = \int_{\alpha} P_{S+1,1}^{(2)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1) P_{S+1,0}^{(2)}(t), \quad (7)$$

$$\frac{dP_{n,1}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{n-1,1}^{(1)}(t) + \int_{\alpha} P_{n,2}^{(1)}(t) + \int_1 P_{n+1,0}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}^{(1)}(t), \quad (n=1, 2, \dots, S-1); \quad (8)$$

$$\frac{dP_{s,1}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{s-1,1}^{(1)}(t) + \mu_1 P_{s+1,0}^{(1)}(t) + \mu_1 P_{s+1,0}^{(2)}(t) + \mu_2 P_{s,2}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{s,1}^{(1)}(t), \quad (9)$$

$$\frac{dP_{n,1}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{n-1,1}^{(1)}(t) + \mu_1 P_{n+1,0}^{(1)}(t) + \mu_2 P_{n,2}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}^{(1)}(t), \quad (n=s+1, \dots, S-a); \quad (10)$$

$$\frac{dP_{s-1,1}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{s-2,1}^{(1)}(t) + \mu_2 P_{s-1,2}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{s-1,1}^{(1)}(t), \quad (11)$$

$$\frac{dP_{s+1,1}^{(2)}(t)}{dt} = \mu_1 P_{s+2,0}^{(2)}(t) + \mu_2 P_{s+1,2}^{(2)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{s+1,1}^{(2)}(t), \quad (12)$$

$$\frac{dP_{n,1}^{(2)}(t)}{dt} = \lambda_2 P_{n-1,1}^{(2)}(t) + \mu_1 P_{n+1,0}^{(2)}(t) + \mu_2 P_{n,2}^{(2)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}^{(2)}(t), \quad (n=s+a, \dots, S-1, S+1, \dots); \quad (13)$$

$$\frac{dP_{S,1}^{(2)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{S-1,1}^{(1)}(t) + \lambda_a P_{S-1,1}^{(2)}(t) + \mu_1 P_{S+1,0}^{(2)}(t) +$$

$$+ \mu_a P_{S,a}^{(2)}(t) - (\lambda_a + \mu_1 + \mu_a) P_{S,1}^{(2)}(t), \quad (14)$$

$$\frac{dP_{n,a}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{n-1,a}^{(1)}(t) + \mu_1 P_{n+1,1}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_a) P_{n,a}^{(1)}(t),$$

$$(n=1, a, \dots, S-1, S+1, \dots, S-a); \quad (15)$$

$$\frac{dP_{S,a}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{S-1,a}^{(1)}(t) + \mu_1 P_{S+1,1}^{(1)}(t) + \mu_a P_{S+1,1}^{(2)}(t) -$$

$$- (\lambda_1 + \mu_a) P_{S,a}^{(1)}(t), \quad (16)$$

$$\frac{dP_{S-1,a}^{(1)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{S-2,a}^{(1)}(t) - (\lambda_1 + \mu_a) P_{S-1,a}^{(1)}(t), \quad (17)$$

$$\frac{dP_{S,a}^{(2)}(t)}{dt} = \lambda_1 P_{S-1,a}^{(1)}(t) + \lambda_a P_{S-1,a}^{(2)}(t) + \mu_1 P_{S+1,1}^{(2)}(t) -$$

$$- (\lambda_a + \mu_a) P_{S,a}^{(2)}(t), \quad (18)$$

$$\frac{dP_{n,a}^{(2)}(t)}{dt} = \lambda_a P_{n-1,a}^{(1)}(t) + \mu_1 P_{n+1,1}^{(2)}(t) - (\lambda_a + \mu_a) P_{n,a}^{(2)}(t),$$

$$(n=S+1, S+a, \dots, S-1, S+1, \dots). \quad (19)$$



Переходя в (I - 19) к пределу, когда  $t \rightarrow \infty$ , получим

$$\mu_a P_{0,i}^{(1)} - \lambda_1 P_{0,0}^{(1)} = 0, \quad (20)$$

$$\mu_1 P_{1,0}^{(1)} + \mu_a P_{0,a}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_a) P_{0,1}^{(1)} = 0, \quad (21)$$

$$\mu_1 P_{1,1}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_a) P_{0,2}^{(1)} = 0, \quad (22)$$

$$\mu_a P_{n,1}^{(1)} + \lambda_1 P_{n-1,0}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_1) P_{n,0}^{(1)} = 0, \quad (23)$$

$(n=1, a, \dots, S, \dots, S-1);$

$$\lambda_1 P_{S-1,0}^{(1)} + \lambda_a P_{S-1,0}^{(a)} + \mu_a P_{S,1}^{(a)} - (\lambda_a + \mu_1) P_{S,0}^{(a)} = 0, \quad (24)$$

$$\lambda_a P_{n-1,0}^{(a)} + \mu_a P_{n,1}^{(a)} - (\lambda_a + \mu_1) P_{n,0}^{(a)} = 0, \quad (25)$$

$(n=S+a, \dots, S-1, S+1, \dots);$

$$\mu_a P_{S+1,1}^{(a)} - (\lambda_a + \mu_1) P_{S+1,0}^{(a)} = 0, \quad (26)$$

$$\lambda_1 P_{n-1,1}^{(1)} + \mu_a P_{n,a}^{(1)} + \mu_1 P_{n+1,0}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_a) P_{n,1}^{(1)} = 0, \quad (27)$$

$(n=1, a, \dots, S-1);$

$$\lambda_1 P_{s-1,1}^{(1)} + \mu_2 P_{s+1,0}^{(1)} + \mu_1 P_{s+1,0}^{(2)} + \mu_2 P_{s,2}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{s,1}^{(1)} = 0, \quad (28)$$

$$\lambda_1 P_{n-1,1}^{(1)} + \mu_1 P_{n+1,0}^{(1)} + \mu_2 P_{n,2}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}^{(1)} = 0, \quad (29)$$

( $n = s+1, \dots, s-2$ );

$$\lambda_1 P_{s-2,1}^{(1)} + \mu_2 P_{s-1,2}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{s-1,1}^{(1)} = 0, \quad (30)$$

$$\mu_1 P_{s+2,0}^{(2)} + \mu_2 P_{s+1,2}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{s+1,1}^{(2)} = 0, \quad (31)$$

$$\lambda_2 P_{n-1,1}^{(2)} + \mu_1 P_{n+1,0}^{(2)} + \mu_2 P_{n,2}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1}^{(2)} = 0, \quad (32)$$

( $n = s+2, \dots, s-1, s+1, \dots$ );

$$\lambda_1 P_{s-1,1}^{(1)} + \lambda_2 P_{s-1,1}^{(2)} + \mu_1 P_{s+1,0}^{(2)} + \mu_2 P_{s,0}^{(2)} - (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) P_{s,1}^{(1)} = 0, \quad (33)$$

$$\lambda_1 P_{n-1,2}^{(1)} + \mu_1 P_{n+1,1}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_2) P_{n,2}^{(1)} = 0, \quad (34)$$

( $n = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, s-2$ );

$$\lambda_1 P_{s-1,2}^{(1)} + \mu_1 P_{s+1,1}^{(1)} + \mu_2 P_{s+1,1}^{(2)} - (\lambda_1 + \mu_2) P_{s,2}^{(1)} = 0, \quad (35)$$

$$\lambda_1 P_{S-2,2}^{(1)} - (\lambda_1 + \mu_2) P_{S-1,2}^{(1)} = 0, \quad (36)$$

$$\lambda_1 P_{S-1,2}^{(1)} + \lambda_2 P_{S-1,2}^{(2)} + \mu_1 P_{S+1,1}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu_2) P_{S,2}^{(2)} = 0, \quad (37)$$

$$\lambda_2 P_{n-1,2}^{(2)} + \mu_1 P_{n+1,1}^{(2)} - (\lambda_2 + \mu_2) P_{n,2}^{(2)} = 0, \quad (38)$$

( $n = S+1, \dots, S-1, S+1, \dots$ )

Введем производящие функции

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{S-1} P_{n,0}^{(1)} z^n, \quad \Phi_0(z) = \sum_{n=S+1}^{\infty} P_{n,0}^{(2)} z^n,$$

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{S-1} P_{n,1}^{(1)} z^n, \quad \Phi_1(z) = \sum_{n=S+1}^{\infty} P_{n,1}^{(2)} z^n,$$

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{S-1} P_{n,2}^{(1)} z^n, \quad \Phi_2(z) = \sum_{n=S+1}^{\infty} P_{n,2}^{(2)} z^n.$$

Перемножив уравнение (23) на  $z^n$  и просуммировав от 0 до  $S-1$  (с учетом уравнения (20)), получим

$$[\lambda_1(1-z) + \mu_1] F_0(z) - \mu_2 F_1(z) = \mu_1 P_{0,0}^{(1)} - \lambda_1 P_{S-1,0}^{(1)} z^S.$$





Перемножив на  $x^N$  (24), (25), (26) и просуммировав по  $s+1$  до  $\infty$ , получим:

$$[\lambda_2(1-x) + \mu_1] \phi_0(x) - \mu_2 \phi_1(x) = \lambda_1 P_{s-1,0}^{(1)} x^s$$

Аналогично имеем:

из (21), (27), (28), (29), (30)

$$\begin{aligned} & [\lambda_1(1-x) + \mu_1 + \mu_2] F_1(x) - \mu_2 F_2(x) - \frac{\mu_1}{x} F_0(x) = \\ & = \mu_1 P_{s+1,0}^{(2)} x^s - \lambda_1 P_{s-1,1}^{(1)} x^s - \frac{\mu_1}{x} P_{0,0}^{(1)} + \mu_1 P_{0,1}^{(1)} \end{aligned}$$

из (31), (32), (33)

$$\begin{aligned} & [\lambda_2(1-x) + \mu_1 + \mu_2] \phi_1(x) - \mu_2 \phi_2(x) - \frac{\mu_1}{x} \phi_0(x) = \\ & = \lambda_1 P_{s-1,1}^{(1)} x^s - \mu_1 P_{s+1,0}^{(2)} x^s \end{aligned}$$

из (22), (34), (35), (36)

$$\begin{aligned} & [\lambda_1(1-x) + \mu_2] F_2(x) - \frac{\mu_1}{x} F_1(x) = \\ & = \mu_1 P_{s+1,1}^{(2)} x^s - \frac{\mu_1}{x} P_{0,1}^{(1)} - \lambda_1 P_{s-1,2}^{(1)} x^s \end{aligned}$$

Из (37), (38) получим:

$$\begin{aligned} & [\lambda_2(1-x) + \mu_2] \phi_2(x) - \frac{\mu_1}{x} \phi_1(x) = \\ & = -\mu_1 P_{s+1,1}^{(2)} x^s + \lambda_1 P_{s-1,2}^{(1)} x^s \end{aligned}$$



Таким образом, после многочисленных преобразований получены следующие соотношения для производящих функций:

$$[\lambda_1(1-x) + \mu_1] F_0(x) - \mu_2 F_1(x) = \mu_1 P_{0,0}^{(1)} - \lambda_1 P_{S-1,0}^{(1)} x^S, \quad (39)$$

$$[\lambda_2(1-x) + \mu_2] \Phi_0(x) - \mu_2 \Phi_1(x) = \lambda_1 P_{S-1,0}^{(1)} x^S, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_1(1-x) + \mu_1 + \mu_2] F_1(x) - \mu_2 F_2(x) - \frac{\mu_1}{x} F_0(x) = \\ & = \mu_1 P_{S+1,0}^{(2)} x^S - \lambda_1 P_{S-1,0}^{(1)} x^S - \frac{\mu_1}{x} P_{0,0}^{(1)} + \mu_2 P_{0,1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_2(1-x) + \mu_1 + \mu_2] \Phi_1(x) - \mu_2 \Phi_2(x) - \frac{\mu_1}{x} \Phi_0(x) = \\ & = \lambda_1 P_{S-1,1}^{(1)} x^S - \mu_2 P_{S+1,0}^{(2)} x^S, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & [\lambda_1(1-x) + \mu_2] F_2(x) - \frac{\mu_1}{x} F_1(x) = \\ & = \mu_1 P_{S+1,1}^{(2)} x^S - \frac{\mu_1}{x} P_{0,1}^{(1)} - \lambda_1 P_{S-1,2}^{(2)} x^S, \end{aligned} \quad (43)$$

$$[\lambda_2(1-x) + \mu_2] \Phi_2(x) - \frac{\mu_1}{x} \Phi_1(x) = -\mu_1 P_{S+1,1}^{(2)} x^S + \lambda_1 P_{S-1,2}^{(2)} x^S \quad (44)$$

Подставив в (39 - 44)  $\bar{x} = 1$ , получим

$$M_1 F_0(1) - M_2 F_1(1) = M_1 P_{0,0}^{(1)} - M_1 P_{S-1,0}^{(1)}, \quad (45)$$

$$M_1 \Phi_0(1) - M_2 \Phi_1(1) = M_1 P_{S-1,0}^{(1)}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2) F_1(1) - M_2 F_2(1) - M_1 F_0(1) = \\ = M_1 P_{S+1,0}^{(2)} - M_1 P_{S-1,1}^{(1)} - M_1 P_{0,0}^{(1)} + M_1 P_{0,1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2) \Phi_1(1) - M_2 \Phi_2(1) - M_1 \Phi_0(1) = \\ = M_1 P_{S-1,1}^{(1)} - M_1 P_{S+1,0}^{(2)}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$M_2 F_2(1) - M_1 F_1(1) = M_1 P_{S+1,1}^{(2)} - M_1 P_{0,1}^{(1)} - M_1 P_{S-1,2}^{(1)}, \quad (49)$$

$$M_2 \Phi_2(1) - M_1 \Phi_1(1) = M_1 P_{S-1,2}^{(2)} - M_1 P_{S+1,1}^{(2)}. \quad (50)$$

Обозначим

$$x_0 = F_0(1) + \Phi_0(1),$$

$$x_1 = F_1(1) + \Phi_1(1),$$

$$x_2 = F_2(1) + \Phi_2(1),$$

тогда (45- 50) переишутся следующим образом:

$$\mu_1 x_0 - \mu_2 x_1 = \mu_1 P_{0,0}^{(1)}, \quad (51)$$

$$(\mu_1 + \mu_2) x_1 - \mu_2 x_2 - \mu_1 x_0 = \mu_1 P_{0,1}^{(1)} - \mu_1 P_{0,0}^{(1)}, \quad (52)$$

$$\mu_2 x_2 - \mu_1 x_1 = -\mu_1 P_{0,1}^{(1)}. \quad (53)$$

К (51 - 53) добавим очевидное соотношение

$$x_0 + x_1 + x_2 = 1. \quad (54)$$

Решая систему уравнений (51 - 54) с учетом (I), находим

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} x_0 - \frac{\mu_1}{\mu_2} P_{0,0}^{(1)}, \quad (55)$$

$$x_2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} x_0 - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} P_{0,0}^{(1)} - \frac{\mu_1 \lambda_1}{\mu_2^2} P_{0,0}^{(1)}. \quad (56)$$

Обозначим  $\mu_1 / \mu_2 = \alpha$ , тогда

$$x_1 = \alpha x_0 - \alpha P_{0,0}^{(1)},$$

$$x_2 = \alpha^2 x_0 - \alpha^2 P_{0,0}^{(1)} - \frac{\alpha \lambda_1}{\mu_2} P_{0,0}^{(1)}.$$

Подставляя полученные значения в (54), получим

$$P_{0,0}^{(1)} = \frac{x_0 (1 + \alpha + \alpha^2) - 1}{\alpha + \alpha^2 + \alpha \frac{\lambda_1}{\mu_2}},$$

$x_0$  - вероятность того, что второй прибор свободен.

Эта вероятность вычитана в /2/

$$P_0 = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_2 - (\rho_1-\rho_2) \left[ (S-s) \rho_1^{S-1} \frac{1-\rho_2}{1-\rho_1^{S-s}} \right]}$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

Поступила 10.II.1982

Кафедра теории вероятностей  
и математической статистики

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Н. Ф. Meyer, Wartesysteme mit variabler Bearbeitungsrate. Berlin - Heidelberg - New-York, 1971.
2. Г.Л. Арсенишвили. Сообщения АН ГССР, 79, № 2, 1975.

გ. არსენიშვილი, მ. შაპალიძე

თარგმანი ბიბლიოთეკის გამომცემი საბუნებისმეტყველო  
საბუნებისმეტყველო ცენტრის მიერ  
სსსრ-ის "ს. ს." წიგნის გამომცემი საბუნებისმეტყველო  
საბუნებისმეტყველო ცენტრის მიერ

რეზიუმე

განვიხილოთ ორგანიზაციის ბიბლიოთეკის მასობრივი მომსახურების  
სისტემა, რომლის შემაჯავარი ნაკადის ინტენსივობა იცვლება  $\bar{I}$  ხერ-  
სადგომს წინ არსებული წიგნის სიჭრელის მიხედვით.



ეს რიგში მოხსენიებული რიცხვი გამოიყურება  $S$ -ს, შემაჯარი  
ნაკრის ინტენსივობა -  $\lambda_1$ , იცვლება  $\lambda_2$  -ით, ვიწრო მოხსენი-  
ბული რიცხვი არ გამოიყურება ნაკრები არ ყოფილი  $S$ -ის ( $s < S$ ).

G.Arsenishvili, N.Zaalishvili

A TWO-PHASE BLOCK QUEUEING SYSTEM ACCORDING  
TO THE "s,S" RULE WITH CHANGING INPUT  
FLUX  
Summary

The paper deals with a two-phase block queueing system, the intensity of its input flux changing according to the length of the queue in front of the 1st device.

If the number of demands in a queue equals  $S_0$ , then the input flux intensity  $\lambda_1$  is replaced by  $\lambda_2$ . All the number of demands becomes less or equal to "s" ( $s < S$ ).

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შტაბის მთავარი რედაქციის თარგმანად საბჭოთავო  
სტალინური სამეცნიერო სამსახური

239, 1983

УДК 512.7

МАТРИЧНЫЕ БИАВТОМАТЫ И ТРЕУГОЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

И.Н. Иеранидзе

I. Матричные биавтоматы. Биавтоматом над полем  $\mathcal{K}$  называется тройка  $\sigma = (\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B})$ , в которой  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — линейные пространства над  $\mathcal{K}$  и  $\Gamma$  — полугруппа, для которой задано представление  $\nu = (\alpha, \delta, \beta): \Gamma \rightarrow \nabla(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  (здесь  $\nabla(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \text{End } \mathcal{A} \times \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times \text{End } \mathcal{B}$  — полугруппа с умножением  $(\alpha'_1, \varphi'_1, \beta'_1)(\alpha''_1, \varphi''_1, \beta''_1) = (\alpha'_1 \alpha''_1, \alpha'_1 \varphi''_1 + \varphi'_1 \beta''_1, \beta'_1 \beta''_1)$ ), где  $\alpha'_1, \alpha''_1 \in \text{End } \mathcal{A}$ ;  $\varphi'_1, \varphi''_1 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ;  $\beta'_1, \beta''_1 \in \text{End } \mathcal{B}$ .

$\alpha: \Gamma \rightarrow \text{End } \mathcal{A}$  и  $\beta: \Gamma \rightarrow \text{End } \mathcal{B}$  — гомоморфизмы,  $\delta: \Gamma \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  — дифференцирование — являются соответствующими проекциями  $\nu$ ).

Задание биавтомата  $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B})$  над  $\mathcal{K}$  равносильно заданию трех операций  $\circ: \mathcal{A} \times \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ ;  $+: \mathcal{B} \times \Gamma \rightarrow \mathcal{B}$ ;  $\circ: \mathcal{B} \times \Gamma \rightarrow \mathcal{B}$ , для которых отображения  $a \mapsto a \circ \gamma$ ,  $a \mapsto a + \gamma$ ,  $b \mapsto b \circ \gamma$  ( $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ ) для всякого  $\gamma \in \Gamma$  являются гомоморфизмами. Кроме этого выполняются соотношения:  $a \circ \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$ ;



$$\alpha * \gamma_1 \gamma_2 = (\alpha \circ \gamma_1) * \gamma_2 + (\alpha * \gamma_1) \circ \gamma_2; \quad \beta \circ \gamma_1 \gamma_2 = (\beta \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$$

$$(\alpha \in \mathcal{A}; \quad \beta \in \mathcal{B}; \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma).$$

Нам понадобится еще определение треугольного произведения биавтоматов, которое можно найти в /2/ или в /3/.

Пусть  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$  - линейные пространства над полем  $\mathcal{K}$ . Рассмотрим матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \gamma_{11} & \alpha_{12} & \gamma_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \gamma_{1n} \\ 0 & \beta_{11} & 0 & \beta_{12} & \dots & 0 & \beta_{1n} \\ & & \alpha_{22} & \gamma_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \gamma_{2n} \\ & & 0 & \beta_{22} & \dots & 0 & \beta_{2n} \\ & & & & & & \alpha_{nn} & \gamma_{nn} \\ & & & & & & 0 & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $\alpha_{ij} \in \text{Hom}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ ;  $\gamma_{ij} \in \text{Hom}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j)$ ;  $\beta_{ij} \in \text{Hom}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$

и всюду  $i \leq j$ . Нетрудно проверить, что множество таких матриц образуют алгебру над  $\mathcal{K}$ .

Пусть  $\mathcal{N}_i = (\mathcal{A}_i, \Sigma_i, \mathcal{B}_i)$  ( $i=1, \dots, n$ ) - множество полугрупповых биавтоматов. Рассмотрим соответствующие гомоморфизмы представления биавтоматов  $\mathcal{N}_i = (\alpha_i, \delta_i, \beta_i): \Sigma_i \rightarrow \text{End } \mathcal{A}_i \times \text{Hom}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i) \times \text{End } \mathcal{B}_i$ ;  $i=1, \dots, n$ .

Перейдем к матрицам вида:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & \alpha_{12} & \gamma_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \gamma_{1n} \\ 0 & \beta_{12} & \dots & 0 & \beta_{1n} \\ & & \mathcal{B}_2 & \dots & \alpha_{2n} & \gamma_{2n} \\ & & & & 0 & \beta_{2n} \\ & & & & & & \mathcal{B}_n \end{pmatrix} \quad (I)$$





Введем обозначение

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & \varphi_{ik} \\ 0 & \beta_{ik} \end{pmatrix}$$

( $i < k, i = 1, \dots, n-1; k = 2, 3, \dots, n$ ), тогда матрицу (I) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ & \epsilon_2 & & \gamma_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Множество таких матриц образуют полугруппу с обычным умножением матриц, только надо учесть, что элементы на диагонали перемножаются как элементы полугруппы, а на остальных местах вместо  $\epsilon_i$  участвуют соответствующие образы в  $\text{End } \mathcal{A}_i \times \text{Hom}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i) \times \text{End } \mathcal{B}_i$ . Подробности см. ниже. Обозначим эту полугруппу через  $\Gamma$ .

Определим матричный биавтомат  $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B})$ , где  $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ ;  $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ . Возьмем  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \in \mathcal{A}$ ,  $b = b_1 + \dots + b_n \in \mathcal{B}$  ( $a_i \in \mathcal{A}_i, b_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, 2, \dots, n$ ).

Пусть по определению





Но  $(\sigma'_i \sigma''_i)^n = (\alpha'_{ii} \alpha''_{ii}, \alpha'_{ii} \gamma''_{ii} + \gamma'_{ii} \beta''_{ii}, \beta'_{ii} \beta''_{ii})$

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha \circ \gamma_1 \gamma_2 &= \alpha_1 \circ \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_2 \circ \gamma_1 \gamma_2 + \dots + \alpha_n \circ \gamma_1 \gamma_2 = \\ &= \alpha_1 (\alpha'_{11} \alpha''_{11} + \alpha'_{11} \alpha''_{12} + \alpha'_{12} \alpha''_{22}) + \dots + \alpha_1 (\alpha'_{11} \alpha''_{1n} + \dots + \\ &+ \alpha'_{1n} \alpha''_{nn}) + \alpha_2 (\alpha'_{22} \alpha''_{22} + \dots + \alpha'_{2n} \alpha''_{nn}) + \dots + \\ &+ \alpha_n \alpha'_{nn} \alpha''_{nn}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \circ \gamma_1 &= \alpha_1 \alpha'_{11} + \alpha_1 \alpha'_{12} + \dots + \alpha_1 \alpha'_{1n} + \alpha_2 \alpha'_{22} + \dots + \alpha_2 \alpha'_{2n} + \dots + \alpha_n \alpha'_{nn} = \\ &= \alpha_1 \alpha'_{11} + (\alpha_1 \alpha'_{12} + \alpha_2 \alpha'_{22}) + \dots + (\alpha_1 \alpha'_{1n} + \alpha_2 \alpha'_{2n} + \dots + \alpha_n \alpha'_{nn}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 &= (\alpha_1 \alpha'_{11}) \alpha''_{11} + (\alpha_1 \alpha'_{11}) \alpha''_{12} + \dots + (\alpha_1 \alpha'_{11}) \alpha''_{1n} + (\alpha_1 \alpha'_{12} + \\ &+ \alpha_2 \alpha'_{22}) \alpha''_{22} + \dots + (\alpha_1 \alpha'_{12} + \alpha_2 \alpha'_{22}) \alpha''_{2n} + \dots + \\ &+ (\alpha_1 \alpha'_{1n} + \alpha_2 \alpha'_{2n} + \dots + \alpha_n \alpha'_{nn}) \alpha''_{nn} = \alpha_1 \alpha'_{11} \alpha''_{11} + \\ &+ \alpha_1 (\alpha'_{11} \alpha''_{12} + \alpha'_{12} \alpha''_{22}) + \dots + \alpha_1 (\alpha'_{11} \alpha''_{1n} + \alpha'_{12} \alpha''_{2n} + \dots + \\ &+ \alpha'_{1n} \alpha''_{nn}) + \alpha_2 \alpha'_{22} \alpha''_{22} + \dots + \alpha_2 (\alpha'_{22} \alpha''_{2n} + \dots + \alpha'_{2n} \alpha''_{nn}) + \dots + \\ &+ \alpha_n \alpha'_{nn} \alpha''_{nn}. \end{aligned}$$

Итак, получили, что  $(\alpha \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 = \alpha \circ \gamma_1 \gamma_2$ .

Точно так же можно проверить, что  $\beta \circ \gamma_1 \gamma_2 = (\beta \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$ .

Покажем, что

$$a * \gamma_1 \gamma_2 = a_1 * \gamma_1 \gamma_2 + a_2 * \gamma_1 \gamma_2 + \dots + a_n * \gamma_1 \gamma_2 =$$

$$= a_1 (\alpha'_{11} \varphi''_{11} + \varphi'_{11} \beta''_{11}) + \dots + a_1 (\alpha'_{1n} \varphi''_{1n} + \dots + \varphi'_{1n} \beta''_{nn}) + \dots +$$

$$+ a_n (\alpha'_{nn} \varphi''_{nn} + \varphi'_{nn} \beta''_{nn});$$

$$\begin{aligned} (a \circ \gamma_1) * \gamma_2 &= (a_1 \alpha'_{11}) \varphi''_{11} + (a_1 \alpha'_{11}) \varphi''_{12} + \dots + (a_1 \alpha'_{1n}) \varphi''_{1n} + (a_1 \alpha'_{12}) \varphi''_{22} + \\ &+ a_2 \alpha'_{22} \varphi''_{22} + (a_1 \alpha'_{12} + a_2 \alpha'_{22}) \varphi''_{23} + \dots + (a_1 \alpha'_{12} + a_2 \alpha'_{22}) \varphi''_{2n} + \dots + \\ &+ (a_n \alpha'_{nn}) \varphi''_{nn} = a_1 \alpha'_{11} \varphi''_{11} + a_1 \alpha'_{11} \varphi''_{12} + \dots + a_1 \alpha'_{1n} \varphi''_{1n} + \\ &+ a_2 \alpha'_{22} \varphi''_{22} + a_2 \alpha'_{12} \varphi''_{23} + a_2 \alpha'_{22} \varphi''_{23} + \dots + a_1 \alpha'_{12} \varphi''_{2n} + \\ &+ a_2 \alpha'_{22} \varphi''_{2n} + \dots + a_n \alpha'_{nn} \varphi''_{nn} = a_1 \alpha'_{11} \varphi''_{11} + \\ &+ (a_1 \alpha'_{11} \varphi''_{12} + a_1 \alpha'_{12} \varphi''_{22} + a_2 \alpha'_{22} \varphi''_{22}) + (a_1 \alpha'_{11} \varphi''_{13} + \\ &+ a_1 \alpha'_{12} \varphi''_{23} + a_1 \alpha'_{13} \varphi''_{33} + a_2 \alpha'_{22} \varphi''_{23} + a_2 \alpha'_{23} \varphi''_{33} + \\ &+ a_3 \alpha'_{33} \varphi''_{33}) + \dots + (a_1 \alpha'_{11} \varphi''_{1n} + \dots + a_n \alpha'_{nn} \varphi''_{nn}). \end{aligned}$$

$$(a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 = (a_1 \varphi'_{11} + a_1 \varphi'_{12} + \dots + a_1 \varphi'_{1n} + a_2 \varphi'_{22} + a_2 \varphi'_{23} + \dots +$$

$$+ a_2 \varphi'_{2n} + \dots + a_n \varphi'_{nn}) \circ \gamma_2 = a_1 \varphi'_{11} \beta''_{11} + (a_1 \varphi'_{12} \beta''_{22} +$$

$$+ \alpha_2 \gamma'_{22} \beta''_{22}) + \dots + (\alpha_1 \gamma'_{1n} \beta''_{nn} + \alpha_2 \gamma'_{2n} \beta''_{nn} + \dots + \alpha_n \gamma'_{nn} \beta''_{nn})$$

Очевидно, что

$$(\alpha \circ \gamma_1) * \gamma_2 + (\alpha * \gamma_1) \circ \gamma_2 = \alpha_1 (\alpha'_{11} \gamma''_{11} + \gamma'_{11} \beta''_{11}) + \dots +$$

$$+ \alpha_n (\alpha'_{nn} \gamma''_{nn} + \gamma'_{nn} \beta''_{nn}) = \alpha * \gamma_1 \gamma_2.$$

Предложение. Треугольное произведение бивавтоматов

$\sigma_2 = (A_2, \Sigma_2, B_2)$  и  $\sigma_1 = (A_1, \Sigma_1, B_1)$  изоморфно матричному бивавтомату, определяемому последовательностью  $A_1, B_1, A_2, B_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\sigma = (A_1 * A_2, \Sigma, B_1 * B_2) = \sigma_2 \nabla \sigma_1$ , где  $\Sigma = \Sigma_2 * \text{Hom}(A_1, A_2) * \text{Hom}(A_1, B_2) * \text{Hom}(B_1, B_2) * \Sigma_1$  — полугруппа с известным законом композиции (см. /2/).

Каждому элементу  $\sigma = (\sigma_2, \gamma_1, \psi, \gamma_2, \sigma_1) \in \Sigma$

$$(\sigma_2 \in \Sigma_2; \sigma_1 \in \Sigma_1; \gamma_1 \in \text{Hom}(A_1, B_2); \gamma_2 \in \text{Hom}(B_1, B_2); \psi \in \text{Hom}(A_1, B_2))$$

сопоставим матрицу

$$\begin{pmatrix} \sigma_2 & \gamma_1 & \psi \\ \sigma_1 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & \sigma_1 & \end{pmatrix}. \quad (I^1)$$

Покажем, что полугруппа таких матриц изоморфна полугруппе бивавтомата  $\sigma_2 \nabla \sigma_1$ .



Пусть 
$$\begin{pmatrix} \delta_1' \psi_1' & \psi_1' \\ \delta_1' 0 & \psi_2' \\ 0 & \delta_2' \end{pmatrix} \quad (2) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \delta_1'' \psi_1'' & \psi_1'' \\ \delta_1'' 0 & \psi_2'' \\ 0 & \delta_2'' \end{pmatrix} \quad (3)$$
 соответствующие

матрицы элементов  $\delta' = (\delta_2', \psi_1', \psi_1', \psi_2', \delta_1')$  и  $\delta'' = (\delta_2'', \psi_1'', \psi_1'', \psi_2'', \delta_1'')$ .

Имеем 
$$\delta' \delta'' = (\delta_2', \psi_1', \psi_1', \psi_2', \delta_1') (\delta_2'', \psi_1'', \psi_1'', \psi_2'', \delta_1'') = (\delta_2' \delta_2'' + \delta_1' \psi_1'' + \psi_1' \delta_2'', \psi_1' \delta_2'' + \delta_2' \psi_1'' + \delta_1' \psi_1'' + \psi_1' \delta_2'', \psi_1' \delta_2'' + \delta_2' \psi_1'' + \delta_1' \psi_1'' + \psi_1' \delta_2'', \psi_1' \delta_2'' + \delta_2' \psi_1'' + \delta_1' \psi_1'' + \psi_1' \delta_2'', \delta_1' \delta_1'').$$

Элементу  $\delta' \delta''$  соответствует матрица:

$$\begin{pmatrix} \delta_1' \delta_1'' & \psi_1' (\delta_2'')^{\alpha_2} + (\delta_1')^{\alpha_1} \psi_1'' & \psi_1' (\delta_2'')^{\delta_2} + (\delta_1')^{\delta_1} \psi_2'' + (\delta_1')^{\alpha_1} \psi_1'' \psi_1' (\delta_2'')^{\alpha_2} \\ 0 & \psi_2' (\delta_2'')^{\beta_2} + (\delta_1')^{\beta_1} \psi_2'' & \\ 0 & & \delta_2' \delta_2'' \end{pmatrix} \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что произведение матриц (2) и (3) дает матрицу (4) по закону умножения таких матриц.

Проверим, что изоморфизм  $\mathcal{M}: \Sigma \rightarrow \Gamma$ , где  $\Gamma$  - матричная полугруппа элементов вида  $(\Gamma^I)$ , дает изоморфизм бивтоматов

$$\mathcal{M}: (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \Sigma, \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) \rightarrow (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \Gamma, \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2).$$

В самом деле:



$$\begin{aligned} ((a_1 + a_2) \circ \theta)^N &= (a_1 + a_2) \circ \theta = a_1 (\theta_1)^{\alpha_1} + a_1 \psi + a_2 (\theta_2)^{\alpha_2} = \\ &= (a_1 + a_2) \circ \begin{pmatrix} \theta_1 & \psi & \psi \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2) \circ \theta^N = (a_1 + a_2)^N \circ \theta^N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((a_1 + a_2) * \theta)^N &= (a_1 + a_2) * \theta = a_1 (\theta_1)^{\delta_1} + a_1 \psi + a_2 (\theta_2)^{\delta_2} = \\ &= (a_1 + a_2) * \begin{pmatrix} \theta_1 & \psi & \psi \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2)^N * \theta^N. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что  $((b_1 + b_2) \circ \theta)^N = (b_1 + b_2)^N \circ \theta^N$ .

## 2. Ассоциативность треугольного умножения.

Теорема. Треугольное произведение биавтоматов

$\sigma_n \nabla (\sigma_{n-1} \nabla \dots \nabla (\sigma_2 \nabla \sigma_1)) \dots$  изоморфно матричному биавтомату, определяемому последовательностью

$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод индукции. Для  $n=2$  теорема доказана. Допустим, что теорема справедлива для  $(n-1)$  сомножителей. Пусть  $\sigma = \sigma_n \nabla \{ (\sigma_{n-1} \nabla \dots \nabla (\sigma_2 \nabla \sigma_1)) \dots \}$ .

Это выражение можно рассмотреть как произведение двух биавтоматов, которое, как доказано, изоморфно матричному биавтомату второго порядка.

Покажем, что полугруппа таких матриц изоморфна полугруппе биавтоматов  $\sigma_n \nabla \sigma$ .

Итак имеем:

$$\alpha \approx \left( \sum_{i=1}^n A_i \quad \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1(n-1)} \\ \Sigma_2 & \dots & \dots & \Gamma_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{n-1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ (12 \dots (n-1))n \\ \Sigma_n \end{pmatrix} \right), \sum_{i=1}^n B_i \quad (5)$$

здесь (5)—условное обозначение матриц вида

$$\begin{pmatrix} \dots & \varepsilon_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \dots & \dots & \varepsilon_2 & \dots & \gamma_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_i \in \Sigma_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \gamma_{ij} \\ 0 & \beta_{ij} \end{pmatrix}$  и

$\alpha_{ij} \in \text{Hom}(A_i, A_j)$ ;  $\gamma_{ij} \in \text{Hom}(A_i, B_j)$ ;  $\beta_{ij} \in \text{Hom}(B_i, B_j)$ ;  
 $i < j$ ,  $j=2, \dots, (n-1)$ .

$$\gamma_{(12 \dots (n-1))n} = \begin{pmatrix} \alpha_{(12 \dots (n-1))n} & \gamma_{(12 \dots (n-1))n} \\ 0 & \beta_{(12 \dots (n-1))n} \end{pmatrix}, \text{ и}$$

$\alpha_{(12 \dots (n-1))n} \in \text{Hom}(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}, A_n)$ ;

$\gamma_{(12 \dots (n-1))n} \in \text{Hom}(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}, B_n)$ ;

$\beta_{(12 \dots (n-1))n} \in \text{Hom}(B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1}, B_n)$ .



Но  $\text{Hom}(A_1 + \dots + A_{n-1}, A_n) \approx \text{Hom}(A_1, A_n) \times \dots \times \text{Hom}(A_{n-1}, A_n)$  и каждому  $\alpha_{(12 \dots (n-1))n} \in \text{Hom}(A_1 + \dots + A_{n-1}, A_n)$  однозначно соответствует последовательность  $(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{(n-1)n})$ , где  $\alpha_{in} \in \text{Hom}(A_i, A_n)$ ;  $i = 1, \dots, (n-1)$ . Аналогично элементам  $\gamma_{(12 \dots (n-1))n}$  и  $\beta_{(12 \dots (n-1))n}$  однозначно соответствуют последовательности  $(\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{(n-1)n})$  и  $(\beta_{1n}, \dots, \beta_{(n-1)n})$ .

Таким образом получили, что элементу  $\delta_{(12 \dots (n-1))n}$  однозначно соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_{1n} \\ \delta_{2n} \\ \vdots \\ \delta_{(n-1)n} \end{pmatrix}.$$

Тогда (6) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \circ & \epsilon_2 & \dots & \gamma_{2(n-1)} \\ & & \dots & \\ & & & \epsilon_{n-1} \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1n} \\ \delta_{2n} \\ \dots \\ \delta_{(n-1)n} \\ \epsilon_n \end{pmatrix}.$$

Как и раньше, можно определить матричный биавтомат второго порядка, который соответствует произведению

$$\sigma_n \nabla \{ (\sigma_{n-1} \nabla \dots \nabla (\sigma_2 \nabla \sigma_1)) \dots \}.$$

$$[(a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n] \circ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \circ & \epsilon_2 & \dots & \gamma_{2(n-1)} \\ & & \dots & \\ & & & \epsilon_{n-1} \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1n} \\ \delta_{2n} \\ \dots \\ \delta_{(n-1)n} \\ \epsilon_n \end{pmatrix} =$$



$$= (a_1 + \dots + a_{n-1}) \circ \begin{pmatrix} \sigma_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \sigma_2 & \dots & \dots & \gamma_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + (a_1 + \dots + a_{n-1}) \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \dots \\ \gamma_{(n-1)n} \end{pmatrix} + a_n \circ \sigma_n =$$

$$= (a_1 + \dots + a_{n-1}) \begin{pmatrix} \sigma_1^{\alpha_1} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1(n-1)} \\ \sigma_2^{\alpha_2} & \dots & \dots & \alpha_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + (a_1 + \dots + a_{n-1}) \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{(n-1)n} \end{pmatrix} + a_n (\sigma_n)^{\alpha_n}$$

Очевидны также второе  $\circ$  и  $*$  действия.

Далее сопоставим каждой матрице второго порядка

$$\left( \begin{pmatrix} \sigma_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \sigma_2 & \dots & \dots & \gamma_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \dots \\ \gamma_{(n-1)n} \end{pmatrix} \right)$$

матрицу  $n$ -го порядка

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} & \gamma_{1n} \\ \sigma_2 & \dots & \dots & \gamma_{2(n-1)} & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Обозначим это соответствие через  $\mu$ .

Нетрудно проверить, что  $\mu$  - изоморфизм.

Покажем, что  $\mu$  дает изоморфизм из матричного автомата второго порядка, который соответствует произведению  $\alpha_1 \nabla \{(\alpha_{n-1} \nabla \dots \nabla (\alpha_2 \nabla \alpha_1)) \dots\}$ , в матричный автомат, определяемый последовательностью  $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ .

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{c} [(a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n] \circ \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} \beta_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \gamma_{1n} \\ \vdots \\ \gamma_{(n-1)n} \\ \beta_n \end{array} \right) \end{array} \right) \mu = \\
 & = [(a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n] \circ \left( \begin{array}{ccc} \beta_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \gamma_{1n} \\ \vdots \\ \gamma_{(n-1)n} \\ \beta_n \end{array} \right) = \\
 & = (a_1 + \dots + a_{n-1}) \left( \begin{array}{ccc} \beta_1^{\alpha_1} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \end{array} \right) + (a_1 + \dots + a_{n-1}) \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{(n-1)n} \end{array} \right) + \alpha_n \left( \begin{array}{c} \beta_n \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right) \\
 & = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) \left( \begin{array}{ccc} \beta_1^{\alpha_1} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{n-1}^{\alpha_{n-1}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) =
 \end{aligned}$$



$$= [(a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n] M^0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1(n-1)} & \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \dots \\ \gamma_{(n-1)n} \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \\ 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & \epsilon_{n-1} & \end{pmatrix}$$

Такую же проверку можно провести и для второго  $\odot$  и  $\ast$  действия.

Теорема доказана.

Аналогично можно доказать, что треугольное произведение  $(\dots((\sigma_n \nabla \sigma_{n-1}) \nabla \dots \nabla \sigma_1))$  биавтоматов, изоморфно матричному автомату, определяемому последовательностью  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ .

СЛЕДСТВИЕ.  $\sigma_3 \nabla (\sigma_2 \nabla \sigma_1) \approx (\sigma_3 \nabla \sigma_2) \nabla \sigma_1$ ,

так как оба изоморфны матричному биавтомату третьего порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что все сделанное справедливо для автоматов.

### 3. Однозначность разложения.

Пусть  $(A, \Gamma, B)$  - точный биавтомат, и он подавтомат треугольного произведения  $\bigtriangledown_{i=1}^n (A_i, \Gamma_i, B_i)$ . Здесь  $(A_i, \Gamma_i, B_i)$  - простые биавтоматы вида  $(A_i, \Gamma_i, 0)$  или  $(0, \Gamma_i, B_i)$ , где  $(A_i, \Gamma_i)$  и  $(B_i, \Gamma_i)$  - неприводимые представления.

Тогда имеем:



$$(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B}) = \bigvee_{i=1}^n (\mathcal{A}_i, \Gamma_i, \mathcal{B}_i) = \left( \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n, \left( \begin{array}{ccc} \Gamma_1 & & * \\ \circ & \Gamma_2 & \\ & \vdots & \\ & & \Gamma_n \end{array} \right), \mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_n \right).$$

Если возьмем отображение  $f^i$ , которое каждому сопоставляет  $\gamma_i \in \Gamma_i$ ,

$$\gamma = \left( \begin{array}{ccc} \gamma_1 & * & \\ \circ & \gamma_2 & \\ & \vdots & \\ & & \gamma_n \end{array} \right) \in \Gamma$$

то получаем, что  $f^i$  — гомоморфизм.

Будем говорить, что  $\Gamma$  правильно лежит в полугруппе

$$\left( \begin{array}{ccc} \Gamma_1 & & * \\ \circ & \Gamma_2 & \\ & \vdots & \\ & & \Gamma_n \end{array} \right),$$

если  $f^i$  всегда эпиморфизм.

$(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B})$  правильно лежит в треугольном произведении, если полугруппа  $\Gamma$  правильно лежит в матричной полугруппе

$$\left( \begin{array}{ccc} \Gamma_1 & & * \\ \circ & \Gamma_2 & \\ & \vdots & \\ & & \Gamma_n \end{array} \right).$$

$(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B})$  несократно лежит в треугольном произведении, если он уже не лежит в треугольном произведении этих же биавтоматов в таком же порядке, в котором отсутствует хотя бы один множитель.

$(\mathcal{M}, \Sigma, \mathcal{N})$  делит треугольное произведение  $\bigvee_{i=1}^n (\mathcal{A}_i, \Gamma_i, \mathcal{B}_i)$ , если найдется подавтомат  $(\mathcal{A}, \Gamma, \mathcal{B}) = \bigvee_{i=1}^n (\mathcal{A}_i, \Gamma_i, \mathcal{B}_i)$ , для которого  $(\mathcal{M}, \Sigma, \mathcal{N})$  есть гомоморфный образ.

$(M, \Sigma, N)$  — правильно делит треугольное произведение, если это  $(A, \Gamma, B)$  можно выбрать правильно лежащим в треугольном произведении.

$(M, \Sigma, N)$  — правильно несократимо делит треугольное произведение, если он правильно делит треугольное произведение и не делит правильно треугольное произведение этих же биавтоматов в таком же порядке, в котором отсутствует хотя бы один множитель.

Два треугольных произведения подобны, если сомножители этих произведений различаются только по порядку, т.е. можно установить такое взаимно однозначное соответствие между членами треугольного произведения, чтоб они были изоморфными.

Теорема. Если биавтомат  $(M, \Sigma, N)$  правильно и несократимо делит два треугольных произведения  $\prod_{i=1}^n (A_i, \Gamma_i, B_i)$  и  $\prod_{i=1}^m (A'_i, \Gamma'_i, B'_i)$ , то эти треугольные произведения подобны, и  $(M, \Sigma, N)$  являются подавтоматами этих треугольных произведений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $(A, \Gamma, B)$  — тот биавтомат, который правильно и несократимо лежит в треугольном произведении  $\prod_{i=1}^n (A_i, \Gamma_i, B_i)$  и гомоморфный образ которого является  $(M, \Sigma, N)$ .

Тогда имеем:

$$(A, \Gamma, B) \subset \left( A_1 + \dots + A_n, \left( \begin{array}{ccc} \Gamma_1 & & \\ & \Gamma_2 & * \\ & & \ddots \\ & & & \Gamma_n \end{array} \right), B_1 + \dots + B_n \right).$$



Возьмем  $\bar{A}_1 = A_1, \bar{A}_2 = A_1 \oplus A_2, \dots, \bar{A}_n = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$

$\bar{B}_1 = B_1, \bar{B}_2 = B_1 \oplus B_2, \dots, \bar{B}_n = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ .

Имеем  $\Gamma$  - инвариантные ряды:

$$0 \subset \bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \dots \subset \bar{A}_n, \quad (1)$$

$$0 \subset \bar{B}_1 \subset \bar{B}_2 \subset \dots \subset \bar{B}_n. \quad (2)$$

Ряд (1), (2) приводит к ряду подавтоматов  $(\bar{A}_i, \Gamma, \bar{B}_i)$ .

Рассмотрим биавтомат  $(\bar{A}_{k+1}/\bar{A}_k, \Gamma, \bar{B}_{k+1}/\bar{B}_k)$ . Если учесть, что  $\Gamma$  правильно лежит в матричной полугруппе, после уточнения получим биавтомат  $(\bar{A}_{k+1}/\bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \bar{B}_{k+1}/\bar{B}_k)$ , который изоморфен биавтомату  $(A_{k+1}, \Gamma_{k+1}, B_{k+1})$ .

Пересечем сейчас каждый член рядов (1) и (2) соответственно с  $A$  и  $B$ . Получим ряды в  $A$  и  $B$ :

$$0 \subset A \cap \bar{A}_1 \subset A \cap \bar{A}_2 \subset \dots \subset A \cap \bar{A}_n = A, \quad (3)$$

$$0 \subset B \cap \bar{B}_1 \subset B \cap \bar{B}_2 \subset \dots \subset B \cap \bar{B}_n = B. \quad (4)$$

Ряды (3) и (4) дают ряд подавтоматов  $(A \cap \bar{A}_i, \Gamma, B \cap \bar{B}_i)$  в  $(A, \Gamma, B)$ .

Имеем:  $\bar{A}_{k+1} \supset A \cap \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k \supset \bar{A}_k$  и  $\bar{B}_{k+1} \supset B \cap \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k \supset \bar{B}_k$ .

Так как  $\bar{A}_k$  и  $\bar{A}_{k+1}$  ( $\bar{B}_k$  и  $\bar{B}_{k+1}$  - два последующих члена композиционного ряда (1) и (2)), то

$A \cap \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k$  ( $B \cap \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k$ ) должен совпадать или с  $\bar{A}_k$ , или с  $\bar{A}_{k+1}$  (или с  $\bar{B}_k$  или с  $\bar{B}_{k+1}$ ).

По теореме об изоморфизме  $A \cap \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k / \bar{A}_k \approx A \cap \bar{A}_{k+1} / A \cap \bar{A}_k$   
 $(B \cap \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k / \bar{B}_k \approx B \cap \bar{B}_{k+1} / B \cap \bar{B}_k)$ .

Значит получается, что возможен один из четырех случаев:



$$1) \left( \mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} / \mathcal{A} \Pi \bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} / \mathcal{B} \Pi \bar{B}_k \right) \approx \\ \approx \left( \bar{A}_{k+1} / \bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \bar{B}_{k+1} / \bar{B}_k \right) \approx \left( A_{k+1}, \Gamma_{k+1}, B_{k+1} \right);$$

$$2) \left( \mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} / \mathcal{A} \Pi \bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} / \mathcal{B} \Pi \bar{B}_k \right) \approx \\ \approx \left( 0, \Gamma_{k+1}, \bar{B}_{k+1} / \bar{B}_k \right) \approx \left( 0, \Gamma_{k+1}, B_{k+1} \right);$$

$$3) \left( \mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} / \mathcal{A} \Pi \bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} / \mathcal{B} \Pi \bar{B}_k \right) \approx \left( A_{k+1}, \Gamma_{k+1}, 0 \right);$$

$$4) \left( \mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} / \mathcal{A} \Pi \bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} / \mathcal{B} \Pi \bar{B}_k \right) \approx \left( 0, \Gamma_{k+1}, 0 \right);$$

при 1)  $\mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k = \bar{A}_{k+1}$  и  $\mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k = \bar{B}_{k+1}$ ;

2)  $\mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k = \bar{A}_k$  и  $\mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k = \bar{B}_{k+1}$ ;

3)  $\mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k = \bar{A}_{k+1}$  и  $\mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k = \bar{B}_k$ ;

4)  $\mathcal{A} \Pi \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_k = \bar{A}_k$  и  $\mathcal{B} \Pi \bar{B}_{k+1} + \bar{B}_k = \bar{B}_k$

соответственно.

Случай (4) исключается, так как по известной теореме (см./3/) следует, что  $(A, \Gamma, B)$  вкладывается в качестве подавтомата в треугольное произведение с меньшим числом тех же сомножителей. А это противоречит тому, что  $(A, \Gamma, B)$  несократимо лежит в данном треугольном произведении.

Случаи 1), 2), 3) совпадают, поэтому ряды (3) и (4) - композиционные ряды в  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и совпадают с рядами (1) и (2) соответственно.

Отсюда, в частности, следует, что  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$  и  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}_n$ .

Если возьмем другое треугольное произведение, то таким



же образом получим другие композиционные ряды в  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Но по теореме Жордана-Гельдера эти композиционные ряды изоморфны соответственно и их длины равны. По каждой паре таких композиционных рядов однозначно восстанавливаются сомножители треугольного произведения. Значит сомножители этих двух треугольных произведений изоморфны. А это означает, что эти два треугольные произведения подобны.

Если  $(M, \Sigma, N)$  - делитель треугольного произведения, то  $(M, \Sigma, N) \approx (A/A_0, \Gamma/\tau, B/B_0)$ . Поэтому можно рассмотреть биавтомат  $(A/A_0, \Gamma, B/B_0)$ .

Возьмем ряды в  $A/A_0$  и  $B/B_0$  :

$$A \Pi \bar{A}_1 + A_0/A_0 \subset \dots \subset A \Pi \bar{A}_k + A_0/A_0 \subset \dots \subset A \Pi \bar{A}_n + A_0/A_0, \quad (5)$$

$$B \Pi \bar{B}_1 + B_0/B_0 \subset \dots \subset B \Pi \bar{B}_k + B_0/B_0 \subset \dots \subset B \Pi \bar{B}_n + B_0/B_0. \quad (6)$$

$$\text{Имеем } A \Pi \bar{A}_{k+1} + A_0/A_0 / A \Pi \bar{A}_k + A_0/A_0 \approx$$

$$\approx A \Pi \bar{A}_{k+1} + A_0 / A \Pi \bar{A}_k + A_0 = A \Pi \bar{A}_{k+1} + (A \Pi \bar{A}_k + A_0) / A \Pi \bar{A}_k + A_0 \approx$$

$$\approx A \Pi \bar{A}_{k+1} / (A \Pi \bar{A}_{k+1}) \cap (A \Pi \bar{A}_k + A_0) =$$

$$= A \Pi \bar{A}_{k+1} / A \Pi \bar{A}_k + A_0 \cap A \Pi \bar{A}_{k+1} = A \Pi \bar{A}_{k+1} / A \Pi \bar{A}_k.$$

$$\text{Аналогично } B \Pi \bar{B}_{k+1} + B_0/B_0 / B \Pi \bar{B}_k + B_0/B_0 \approx B \Pi \bar{B}_{k+1} / B \Pi \bar{B}_k.$$

Относительно последних факторов, как и раньше можно рассмотреть четыре случая. Четвертый случай невозможен,



так как по той же теореме (см. /3/) получим противоречие к тому, что  $(M, \Sigma, N)$  правильно и несократимо делит треугольное произведение.

Значит получается, что

$$\begin{aligned} & \left( A \Pi \bar{A}_{k+1} + A_0 / A_0 \mid A \Pi \bar{A}_k + A_0 / A_0, \Gamma, B \Pi \bar{B}_{k+1} + B_0 / B_0 \mid B \Pi \bar{B}_k + B_0 / B_0 \right) \approx \\ & \approx \left( \bar{A}_{k+1} / \bar{A}_k, \Gamma_{k+1}, \bar{B}_{k+1} / \bar{B}_k \right) \approx \left( A_{k+1}, \Gamma_{k+1}, B_{k+1} \right). \end{aligned}$$

Поэтому ряды (5) и (6) — композиционные ряды в  $A_0 / A_0$  и  $B_0 / B_0$ , которые совпадают с композиционными рядами (3) и (4) в  $A$  и  $B$  соответственно. Отсюда  $A_0 = 0$  и  $B_0 = 0$  и сам  $(M, \Sigma, N)$  является подавтоматом треугольного произведения, иначе длины рядов (5) и (6) были бы меньше длин рядов (3) и (4) соответственно.

Замечание. Так как биавтомат  $(A, \Gamma, B)$  вкладывается в качестве подавтоматов в  $(0, \Gamma, B) \nabla (A, \Gamma, 0)$ , а  $(B, \Gamma)$  вкладывается в  $\bigvee_{i=1}^k (0, \Gamma_i, B_i)$  и  $(A, \Gamma)$  — в  $\bigvee_{i=1}^m (A_i, \Gamma'_i, 0)$ , где  $(A_i, \Gamma'_i)$  и  $(B, \Gamma)$  неприводимы, то, используя ассоциативность треугольного умножения, получаем, что  $(A, \Gamma, B)$  вкладывается в

$$(0, \Gamma_1, B_1) \nabla \dots \nabla (0, \Gamma_k, B_k) \nabla (A_1, \Gamma'_1, 0) \nabla \dots \nabla (A_m, \Gamma'_m, 0). \quad (7)$$

Любое другое треугольное произведение с данными свойствами подобно (7).

Поступила 23.IX.1981

Вычислительный Центр  
им. Н.И.Мусхелишвили  
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА



1. А.Г.Курош. Лекции по общей алгебре. М., 138-144.
2. Б.И.Плоткин. Труды ТГУ. Математика. Механика. Астрономия, 12, 1981.
3. Н.И.Перанидзе. Труды ТГУ. Математика. Механика. Астрономия, 12, 1981.

ნ. პერანიძე

მათრიცული ბიატომატისა და ტრიგულარული

რეზიუმე

ნაშრომში განიხილება სპეციალური მათრიცული ენა ბრტყილი ავტომატების დეკომპოზირების ამოცანისთვის. დამტკიცებულია სამკუთხედიანი გაშლის თვისებები.

ძირითადი შედეგია ბრტყილი ბიატომატის დაშლის ერთეულობა.

I. Peranidze

MATRICAL BIAUTOMATA AND TRINGULAR PRODUCT

Summary

The paper considers a special materical language for linear automata in the decomposition problems. The associativity of the tringular product is proved. The main result of the linear biautomata is the unity of decomposition.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

საქართველოს სახელმწიფო უნივერსიტეტის  
უბივერსიტეტის შრომები

239, 1983

УДК 539.03

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ГИБКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ  
С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

И.А. Зоненашвили, А.Р. Цалукашвили

Круглая кольцевая гибкая пластинка, толщиной  $h = \text{const}$ ,  
срединная поверхность которой занимает область, ограниченную  
концентрическими окружностями  $L_1$  (радиуса  $R_1$ ) и  
 $L_2$  (радиуса  $R_2 > R_1$ ) несет осесимметрическую нагрузку.  
Края пластинки подкреплены тонкими упругими изотропными  
ребрами, несимметрично расположенными относительно ее сре-  
динной плоскости. Подкрепляющее кольцо имеет постоянное  
поперечное сечение и обладает жесткостями на растяжение и  
на изгиб в двух плоскостях. Одна из главных осей инерции  
поперечного сечения ребра параллельна срединной плоскости  
пластинки и отстает от нее на расстояние  $h_2$ .

Как известно [1,2,7], напряженное состояние гибкой  
пластинки в безразмерных величинах  $\theta = \frac{R_2}{h} \frac{dW}{dr}$   
 $\varphi = \frac{R_2}{Eh^2} \frac{d\Phi}{dr}$ ,  $x = \frac{r}{R_2}$  описывается нелинейной систе-  
мой дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{x^2} \right) - \frac{\psi\theta}{x} = \psi(x), \quad (1)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} - \frac{\psi}{x^2} + \frac{1}{2x} \theta^2 = 0,$$

$$(\eta \leq x \leq 1, \quad \eta = R_1/R_2),$$

с граничными условиями:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\nu + (-1)^k \delta_{1k}}{\eta^{2-k}} \theta - (-1)^{k-1} x$$

$$x \frac{12 h_2 (1-\nu^2)}{h \eta^{2-k}} \psi = \frac{(-1)^k R_2^2 [h_{ok} P_k - (-1)^{k-1} M_k]}{h \eta^{2-k}}, \quad (2)$$

$$\frac{d\psi}{dx} - \frac{\nu \delta_{3k} + (-1)^{k-1}}{\eta^{2-k} \delta_{3k}} \psi + \frac{h_2}{h \eta^{2-k}} \theta = - \frac{R_2^2 P_k}{E h^3 \delta_{3k}},$$

при  $x = \eta^{2-k} \quad (\kappa = 1, 2)$

Здесь  $W(x)$  — прогиб пластины,  $\Phi(x)$  — функция напряжений,  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга материала,

$\psi(x) = \frac{1}{E x} \left( \frac{R_1}{h} \right)^4 \int_{\eta}^1 q(x) x dx$  — известная функция нагрузки,

$\delta_{1k} = A_k / h_k D$ ,  $\delta_{3k} = B_k / E h R_k$  ( $\kappa = 1, 2$ ),  $A_k$  — изгибная жесткость ребра,  $B_k$  — жесткость ребра на растяжение,  $h_2$  — эксцентриситет оси ребра,  $P_k$  ( $\kappa = 1, 2$ ) — равномерно распределенные сжимающие усилия, точки приложения которых удалены на расстояние  $h_{ok}$  ( $\kappa = 1, 2$ ) от



главной оси инерции сечения ребра,  $M_k$  ( $k=1,2$ ) - внешние моменты, действующие на ребра.

Для определения влияния подкрепляющих колец на напряженно-деформированное состояние пластинки рассмотрим случай, когда  $q = const$  и кольца имеют прямоугольные поперечные сечения шириной  $b_k$  и высотой  $h_k$  ( $k=1,2$ ). В этом случае имеем /2/

$$\sigma_{1k} = \sigma_k \frac{b_k}{R_k} \left( \frac{h_k}{h} \right)^3 (1-\nu^2), \quad (3)$$

$$\sigma_{3k} = \frac{\sigma_k}{12} \frac{h_k}{h} \left( \frac{b_k}{R_k} \right)^3 \left( 1 + 12 \frac{R_k^2}{b_k^2} \right),$$

$$\sigma_k = E_k / \epsilon, \quad E_k - \text{модуль Юнга } k - \text{того ребра } (k=1,2).$$

Применяя итерационный метод нелинейной релаксации /3/, разбиваем отрезок  $\eta \leq x \leq 1$  на  $n$  равных частей и аппроксимируем уравнения (I) и граничные условия (2) их разностными аналогами /5/.

Будем иметь:

$$T_i \equiv \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{x_i} \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta} - \frac{\theta_i}{x_i^2} \right] - \frac{y_i \theta_i}{x_i} - \frac{x_i}{2} q^*, \quad (4)$$

$$L_i \equiv \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{x_i} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta} - \frac{y_i}{x_i^2} + \frac{\theta_i^2}{2x_i}, \quad (i = \overline{1, n})$$

при  $x = \eta$ :

$$\theta_0 = a_{1,1} \theta_1 + b_{1,1} y_1 + c_{1,1}, \quad (5)$$

$$y_0 = a_{1,2} \theta_1 + b_{1,2} y_1 + c_{1,2},$$

при  $x=1$ :

$$\begin{aligned} \theta_n &= a_{2,1} \theta_{n-1} + b_{2,1} \varphi_{n-1} + c_{2,1}, \\ \varphi_n &= a_{2,2} \theta_{n-1} + b_{2,2} \varphi_{n-1} + c_{2,2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $T_i, L_i$  - невязки (погрешности) в точках  $x_i$  ( $i=\overline{1, n-1}$ ),

$$q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{R_2}{h} \right)^4, \quad \Delta = \frac{1}{n}, \quad x_i = i\Delta, \quad \theta_i = \theta(x_i),$$

$$\varphi_i = \varphi(x_i), \quad x_0 = \eta, \quad x_n = 1,$$

$$a_{1,1} = - \frac{\frac{1}{\Delta} + \frac{1+\nu}{\delta_{31}} \frac{\delta_{31}}{2}}{A_1 \Delta}, \quad b_{1,1} = \frac{12(1-\nu^2) h_2}{A_1 \Delta h \eta},$$

$$a_{1,2} = - \frac{h_2}{A_1 \Delta h \eta}, \quad b_{1,2} = - \frac{\frac{1}{\Delta} + \frac{\delta_{11}-\nu}{2}}{A_1 \Delta},$$

$$a_{2,1} = \frac{\frac{1}{\Delta} + \frac{1-\nu}{\delta_{32}} \frac{\delta_{32}}{2}}{A_2 \Delta}, \quad b_{2,1} = \frac{12 h_2 (1-\nu^2)}{A_2 \Delta h}, \quad (7)$$

$$a_{2,2} = - \frac{h_2}{A_2 h \Delta}, \quad b_{2,2} = \frac{\frac{1}{\Delta} + \delta_{12} + \nu}{A \Delta},$$

$$c_{1,1} = - \frac{\frac{R_2^2 h_{01}}{2h} \left( P_1 + \frac{M_1}{h_{01}} \right) \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1+\nu}{\delta_{31}} \frac{\delta_{31}}{2} \right) + \frac{12(1-\nu^2) h_2 R_2^2 P_1}{\delta_{31} 2 E h^4}}{A_1}$$

$$c_{1,2} = - \frac{\frac{R_2^2 P_1}{E \Delta \delta_{31} h^3} + \frac{h_2 h_{01} R_2^2}{h^2 \eta 2} \left( P_1 + \frac{M_1}{h_{01}} \right)}{A_1},$$



$$C_{21} = \frac{R_a^2 h_{0a}}{2h} \left( P_2 - \frac{M_2}{h_{0a}} \right) \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1+\nu \delta_{32}}{\delta_{32}} \right) - \frac{12(1-\nu^2) h_a R_a^2 P_2}{\delta_{32} E h^4}$$

$$C_{22} = \frac{R_a^2 h_{0a} h_a}{2h^2} \left( P_2 - \frac{M_2}{h_{0a}} \right) + \left( \frac{1}{\Delta} + \delta_{1a} + \nu \right) \frac{R_a^2 P_2}{\delta_{32} E h^3}$$

$$A_1 = - \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{\delta_{11} - \nu}{2} \right) \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1+\nu \delta_{31}}{\delta_{31} 2} \right) + \frac{12 h_a^2 (1-\nu^2)}{h^2 \eta^2}$$

$$A_2 = \left( \frac{1}{\Delta} + \delta_{11} + \nu \right) \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1-\nu \delta_{32}}{\delta_{32}} \right) + \frac{12 h_a^2 (1-\nu^2)}{h^2}$$

Для случая  $\delta^c = 0$  и  $\delta^c = \infty$  значения коэффициентов (7) легко получаются предельным переходом.

Задача сводится к последовательному вычислению величин  $\theta_i^{m+1}$  и  $\varphi_i^{m+1}$  в точках коллокации и соответственно, последовательному уменьшению невязок  $T_i$  и  $L_i$  /3,4,7/. Итерационный процесс уменьшения невязок продолжается до тех пор, пока они не становятся меньше достаточно малого числа  $\epsilon$  во всех точках  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Прогибы и полные напряжения вычислялись по известным формулам для следующих параметров задачи:



$$q^* = 20; \quad h_k/h = 2.5; \quad b_k/R_2 = 0.06; \quad h/R_2 = 0.02;$$

$$\delta = 0, 1, 2, 5, \infty; \quad \gamma_k = h_2/(h_k - h) = 0, \pm 0.2, \pm 0.5;$$

$$M_k = 0; \quad P_k = 0 \quad (k=1, 2); \quad \eta = R_1/R_2 = 0.2, 0.3, 0.4.$$

Количество итераций при построении решений составило около 240. При этом величины невязок исходных уравнений не превышали  $\epsilon = 10^{-6}$ . Продолжительность машинного времени при решении задачи на ЭВМ БЭСМ-6 составляет около 25 сек для одного варианта параметров конструкции.

На рисунках 1, 2, 3, 4 приведены графики, характеризующие влияние параметров эксцентриситета ребер  $\gamma_k = \gamma$  соответственно на максимальные прогибы пластинки и максимальные полные напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_\theta$  для некоторых значений  $\eta$ . Ввиду того, что с изменением эксцентриситета ребер, вообще говоря, изменяются положения точек максимальных напряжений, ниже, в таблицах 1, 2, для одного частного случая  $\eta = 0,3$  приводятся значения максимальных полных напряжений  $\sigma_n, \sigma_\theta$  (в зависимости от эксцентриситета  $\gamma_k$ ) с указанием координат  $x$  тех точек, в которых эти максимумы достигаются.

Анализ полученных результатов показывает, что для одного и того же ребра максимальный прогиб можно существенно уменьшить путем соответствующего подбора эксцентриситета ребра.

Поступила 17.IX.1982

Кафедра теоретической  
механики, ИТМ Тбилисского  
университета



$$\eta = 0.3$$

$\delta$	$\gamma_k$	- 0.5		- 0.2		0		0.2		0.5	
		$\sigma_k^{max}$	$x$	$\sigma_k^{max}$	$x$	$\sigma_k^{max}$	$x$	$\sigma_k^{max}$	$x$	$\sigma_k^{max}$	$x$
0		6.6675	0.70	6.6675	0.70	6.6675	0.70	6.6675	0.70	6.6675	0.70
1		6.5375	0.60	6.5582	0.50	7.3131	0.35	7.6646	0.35	7.7130	0.35
2		6.5479	0.50	7.6713	0.35	8.0588	0.35	8.2875	0.35	8.7764	0.35
5		8.2604	0.35	8.3917	0.35	8.3772	0.35	8.4265	0.35	8.7408	0.35
$\infty$		8.1160	0.35	8.1160	0.35	8.1160	0.35	8.1160	0.35	8.1160	0.35

$\eta = 0.3$

Таблица 2

$\delta$	- 0.5		0.2		0		0.2		0.5	
	$\sigma_{\theta}^{max}$	$\tau$	$\sigma_{\theta}^{max}$	$\tau$	$\sigma_{\theta}^{max}$	$\tau$	$\sigma_{\theta}^{max}$	$\tau$	$\sigma_{\theta}^{max}$	$\tau$
0	-8.8967	0.95	-8.8967	0.95	-8.8967	0.95	-8.8967	0.95	-8.8967	0.95
I	-6.9728	0.85	-5.8424	0.30	-5.0198	0.85	-4.2245	0.85	-3.3602	0.75
2	-5.8924	0.8	-4.6308	0.8	-3.8095	0.8	-3.1520	0.75	-2.6156	0.7
5	-4.4280	0.7	-3.3154	0.7	-2.6851	0.7	-2.2907	0.65	-2.1430	0.55
$\infty$	2.9077	I	2.9077	I	2.9077	I	2.9077	I	2.9077	I



1. А.С.Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956.
2. Г.Н.Савин, Н.П.Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости, Киев, 1964.
3. Н.Перроне, Р.Кас. Прикладная механика, № 2, "Мир", 1971.
4. И.О.Огирко. Теоретична та прикладна механіка, вып.10, Киев, 1975.
5. И.С.Березин, Н.П.Жидков. Методы вычислений, т.1, М., 1966.
6. И.А.Зоненашвили, Н.П. Флейшман. Строительная механика и расчет сооружений, вып.6, Киев, 1975.
7. И.А.Зоненашвили, Труды Тбилисского университета "Математика, Механика, Астрономия", № 10, 1980.

მ. ბონენაშვილი, ა. აბაქაძე

საბჭოთა-საყრდნობიანი გეგმიური ნაშრომის

წარმომადგენელი

რეზიუმე

აქვეყნებული რეალური ნაშრომის მიზანმიმართული შეფასების  
სახისგან მიზანს ექსპერტისგან მიმართული გადგენა არცერთ  
ნაშრომში შემოსამართლო რეგონის წარმომადგენელი რეზიუმე.

L.Zonenashvili, A.Papukashvili

AXIAL SYMMETRIC BENDING OF A CIRCULAR RING  
WITH SUPPORTING RIBS

Symmary

The influence of the eccentricity of the rib on the deformation of a flexible circular ring has been studied by the iterational method of nonlinear relaxation.

An analysis of the obtained results shows that for one and the same rib the maximum bending can be considerably reduced by an appropriate choice of eccentricity.

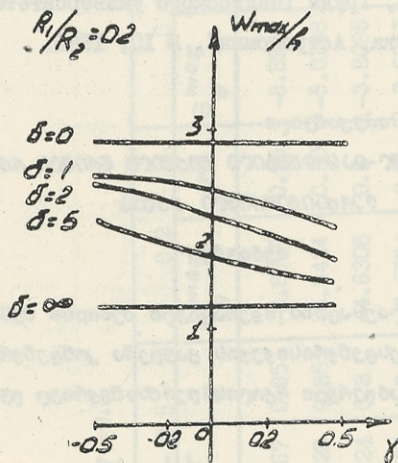


Рис. I

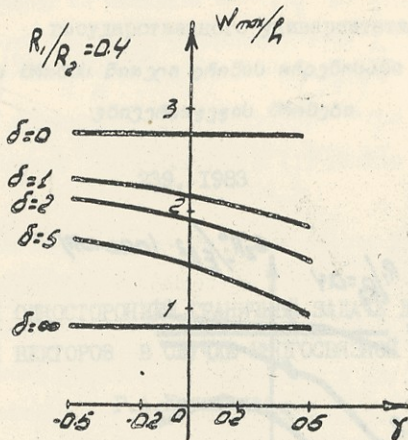


Рис. 2

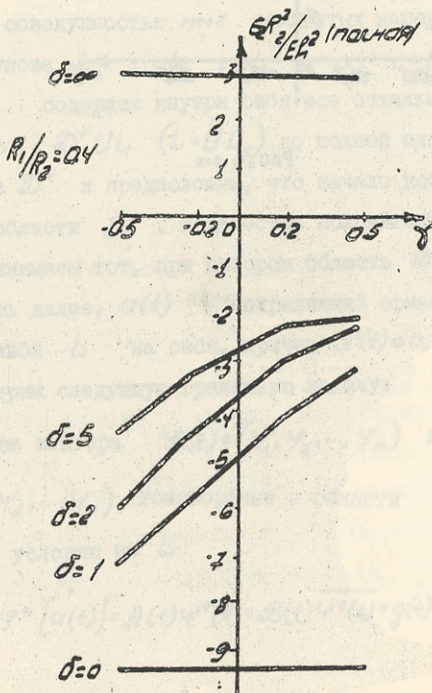


Рис. 3

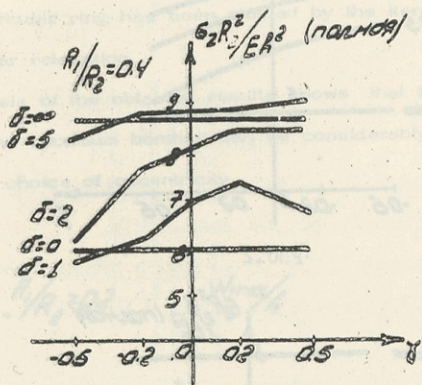


Рис. 4



УДК 517.54.

ОБ ОДНОЙ ОДНОСТОРОННЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ  
ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОРОВ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Г.А.Капанадзе

Пусть  $D^+$  — конечная  $(m+1)$ -связная область, ограниченная совокупностью  $m+1$  замкнутых непересекающихся кривых Ляпунова  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_m$ , причем контур  $L_0$  содержит внутри себя все остальные. Область, дополняющую  $D^+ \cup L$  ( $L = \bigcup_{k=0}^m L_k$ ) до полной плоскости, обозначим через  $D^-$  и предположим, что начало координат находится в области  $D^+$ . В качестве положительного обхода на  $L$  принимаем тот, при котором область  $D^+$  останется слева. Пусть далее,  $\alpha(t)$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм кривой  $L$  на себя, причем  $\alpha'(t) \neq 0, \alpha'(t) \in H(L), t \in L$ .

Рассмотрим следующую граничную задачу:

Найти два вектора  $\Psi(\bar{x}) = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$  и

$\Psi(\bar{z}) = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ , голоморфные в области  $D^+$  по граничному условию на  $L$ :

$$\Psi^+[\alpha(t)] = A(t)\Psi^+(t) + B(t)\overline{\Psi^+(t)} + g(t), \quad (I)$$





где  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $g(t)$  - заданные на  $L$  матрицы и вектор класса  $H(L)$  соответственно. Будем предполагать, что  $\det B(t) \neq 0$ ,  $t \in L$ .

При  $g(t) \equiv 0$  задачу (I) будем называть однородной. Граничная задача (I) в случае  $n=1$  изучалась в работе /1/.

В настоящей работе выведена одна формула интегрального представления для любых двух голоморфных в многосвязной области векторов и для задачи (I) доказаны теоремы типа Нетера.

Справедливы следующие леммы (см. /1/, /2/):

Лемма 1. Общим решением граничной задачи

$$\Phi^\pm[\alpha(t)] = \lambda \overline{\Psi^\pm(t)}, \quad \lambda = \pm 1, \quad (2)$$

в многосвязной области  $D^\pm$  является произвольный постоянный вектор с действительными компонентами при  $\lambda=1$  и чисто мнимыми компонентами при  $\lambda=-1$ .

Лемма 2. Граничная задача

$$\Phi^-\alpha(t) = \lambda \cdot \omega(t, L) \overline{\Psi^-(t)}, \quad \lambda = \pm 1, \quad (3)$$

где  $\omega(t, L) = \sum_{k=1}^m \bar{t}^2 \omega(t, L_k) + \omega(t, L_0)$ ,  $\omega(t, L_k) = \delta_{kj}$ ,  $t \in L_j$   
( $j, k = 0, 1, \dots, m$ ),

$\delta_{kj}$  - символ Кронекера, не имеет нетривиальных решений (исчезающих на бесконечности).

На основе сформулированных лемм, легко доказывается справедливость следующей леммы:

Лемма 3. Всякие два вектора  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ , голоморфные в области  $D^+$  и на границе  $L$  имеющие предельные значения  $\Phi^+(t)$  и  $\Psi^+(t) \in H(L)$ , можно предста-

вить формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_*(t, L) \overline{\alpha(t)}}{t-z} dt; \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\beta(t) \beta'(t)}{t-z} dt, \quad (4)$$

где  $\beta(t)$  — функция, обратная функции  $\alpha(t)$ ;

$$\omega_*(t, L) = \sum_{k=1}^m \omega(t, L_k) + \bar{t}'^2 \omega(t, L_0).$$

Граничную задачу

$$\Phi^+(t) = A'(t) \alpha(t) \Psi^+[\alpha(t)] + \bar{t}'^2 \overline{B'(t) \alpha'(t) \Psi^+[\alpha(t)]} \quad (5)$$

будем называть союзной с однородной задачей (I)<sub>0</sub>.

На основе способа, приведенного в /3/, граничная задача (I) приводится к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & -A(t_0) \rho(t_0) + [E \cdot \omega(t_0, L) - B(t_0)] \overline{\rho(t_0)} + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{A(t) \alpha'(t) \rho(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{B(t) \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} - \frac{E \cdot \omega(t_0, L) \bar{t}'^2}{\bar{t} - \bar{t}_0} \right] \overline{\rho(t)} dt = \\ & = g(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t) \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

после чего для задачи (I) легко доказывается справедливость следующих теорем:

Теорема 1. Для существования решений задачи (I) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\operatorname{Re} \int_L \Psi^+(t) g[\beta(t)] dt = 0 \quad (7)$$

для любого голоморфного решения  $\Psi(z)$  задачи (5).

Теорема 2.  $l - l' = 2\alpha - 2m + 2n$ , где  $l$  и  $l'$  обозна-



часть числа линейно независимых решений однородных задач (I)<sub>0</sub> и (5) соответственно;  $\mathcal{P} = \text{Ind det } B(t)$ .

Поступила 30. III, 1982

Кафедра  
теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Нечаев, ДАН УССР, 10, 891-893, 1969.
2. Г. С. Литвинчук. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., "Наука", 1977.
3. Г. А. Капанадзе. Сообщ. АН ГССР, 79, 2, 277-280, 1975.

გ. კაპანაძე

ჰოლომორფული ვექტორული ერთი მარცხენარი სასაზღვრო  
 პირობის მქონე მრავალმნიშვნელოვანი ანის მარცხენარ  
 რეგიონში

ნაძირითი მთვლელობის ფორმულა მრავალმნიშვნელოვან ანის ჰოლომორფული  
 მნიშვნელობის ვექტორის ინტეგრალური წარმოდგენისა და  
 მათი მთვლელობის ვექტორის ფუნქციის მნიშვნელობის (1) ამოცანისათვის.

G. Kapanadze

ON ONE ONE-SIDED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR  
 ANALYTIC VECTORS IN THE CASE OF MULTIMENSIONAL  
 DOMAIN

Summary

A boundary value problem (1) is considered and theorems  
 analogous to Noether's theorems are proved.

ОБОБЩЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ  
НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ СО СМЕЩЕНИЯМИ

Г.А. Капанадзе

§ I. Постановка задачи и приведение ее к системе сингу-  
лярных интегральных уравнений

Пусть  $D^+$  — односвязная область, ограниченная простым замкнутым контуром  $L$  типа Лягунова. Область, дополняющую  $D^+ \cup L$  до полной плоскости, обозначим через  $D^-$  и будем считать, что начало координат находится в области  $D^+$ . Пусть далее  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  — заданные на контуре  $L$  функции, имеющие отличные от нуля производные класса  $H$  и пусть эти функции взаимно однозначно переводят контур в самого себя, сохраняя направление обхода. Функцию, обратную  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , обозначим соответственно через  $\alpha^*(t)$  и  $\beta^*(t)$ .

Рассмотрим следующую граничную задачу:

Найти кусочно-голоморфный вектор  $\mathcal{F}(z) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ , имеющий конечный порядок на бесконечности по граничному условию на  $L$  :

$$\mathcal{F}^+(t) = \mathcal{A}(t) \mathcal{F}^-[ \alpha(t) ] + \mathcal{B}(t) \mathcal{F}^-[ \beta(t) ] + \mathcal{G}(t), \quad (I.1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $b(t)$  — заданные на контуре  $L$  матрицы и вектор класса  $H$ . Будем предполагать, что  $\det A(t) \neq 0$ ,  $t \in L$ .

Некоторые задачи, типа задачи (I.I) рассмотрены и получены результаты общего характера в работах /1/ — /6/ (задача, рассмотренная в работе Г.Ф.Манджavidзе /6/, более общего вида, чем задача (I.I)).

В настоящей работе на основе результатов, приведенных в /7/, для задачи (I.I) доказываются теоремы типа Нетера.

Однородная задача, соответствующая задаче (I.I), имеет вид

$$\mathcal{Y}^+(t) = A(t)\mathcal{Y}^-[\alpha(t)] + B(t)\overline{\mathcal{Y}^-[\beta(t)]}. \quad (I.2)$$

Следуя Н.П. Векуа (см. /1/), любое решение задачи (I.I) можно представить в виде:

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{A(t)\rho[\alpha(t)] + B(t)\overline{\rho[\beta(t)]} + b(t)}{t-z} dt \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^+, \quad (I.3)$$

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_L \frac{\rho(t)dt}{t-z} + \Gamma(z) \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^-,$$

где  $\Gamma(z) = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$  — полиномиальный вектор (заданная главная часть вектора  $\mathcal{Y}(z)$  на бесконечности);  $\rho(t) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$  искомый вектор класса  $H$ .

В силу формулы (I.3) граничное условие (I.I) дает:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{A(t)}{t-t_0} + \frac{A(t_0)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} \right] \rho[\alpha(t)] dt + \quad (I.4)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{B(t)}{t-t_0} - \frac{B(t_0)\overline{\beta'(t)}t'^2}{\beta(t)-\beta(t_0)} \right] \overline{\rho[\beta(t)]} dt =$$

$$= A(t_0) \Gamma[\alpha(t_0)] + B(t_0) \overline{\Gamma[\beta(t_0)]} + \frac{b(t_0)}{a} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(t) dt}{t-t_0}$$



Введя обозначение  $\rho[\alpha(t)] = \mu(t)$ , систему (I.4) можно переписать так:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{A(t)}{t-t_0} + \frac{A(t_0)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} \right] \mu(t) dt + \quad (I.5)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{B[\beta^*[\alpha(t)]] \{\beta^*[\alpha(t)]\}'}{\beta^*[\alpha(t)]-t_0} - \frac{B(t_0)\overline{\alpha'(t)} \overline{t'}^2}{\overline{\alpha(t)-\beta(t_0)}} \right] \overline{\mu(t)} dt =$$

$$= A(t_0) \Gamma[\alpha(t_0)] + B(t_0) \overline{\Gamma[\beta(t_0)]} + \frac{b(t_0)}{a} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(t) dt}{t-t_0}.$$

Система (I.5) представляет собой систему сингулярных интегральных уравнений, теория которых разработана в монографии /I/.

Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую системе (I.5.):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{A(t)}{t-t_0} + \frac{A(t_0)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} \right] \mu(t) dt + \quad (I.6.)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{B[\beta^*[\alpha(t)]] \{\beta^*[\alpha(t)]\}'}{\beta^*[\alpha(t)]-t_0} - \frac{B(t_0)\overline{\alpha'(t)} \overline{t'}^2}{\overline{\alpha(t)-\beta(t_0)}} \right] \overline{\mu(t)} dt = 0$$

и систему, связанную этой системе (см. /I/):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{A'(t)\alpha'(t_0)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} + \frac{A'(t_0)}{t-t_0} \right] \zeta(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{B'(t)\overline{\alpha'(t)} \overline{t'}^2}{\beta(t)-\alpha(t_0)} \right] \overline{\zeta(t)} dt = 0 \quad (I.7)$$

$$-\frac{\mathcal{B}'[\beta^*[\alpha(t_0)]] \overline{\{\beta^*[\alpha(t_0)]\}' \bar{t}_0'^2 \bar{t}'^2}}{\bar{t} - \beta^*[\alpha(t_0)]} \int \overline{r(t)} dt = 0.$$

Пусть  $\Theta(t)$  — какое-либо решение системы (I.7), и рассмотрим кусочно-голоморфный вектор  $\Psi(z)$ , определенный формулой

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Theta(t) dt}{t-z} \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^+, \quad (\text{I.8})$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mathcal{A}'[\alpha^*(t)] \alpha^{*'}(t) \Theta[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \mathcal{B}'[\beta^*(t)] \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\Theta[\beta^*(t)]}}{t-z} dt$$

при  $z \in \mathcal{D}^-$ .

Легко заметить, что при обозначениях (I.8) система уравнений (I.7) приводится к следующей задаче:

$$\Psi^-(t) = \mathcal{A}'[\alpha^*(t)] \alpha^{*'}(t) \Psi^+[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \overline{\Psi^+[\beta^*(t)]}, \quad (\text{I.9})$$

которую мы будем называть союзной с задачей (I.2).

Так как любое исчезающее на бесконечности решение задачи (I.9) можно представить формулой (I.8), из приведенных рассуждений получаем, что задача (I.9) и система уравнений (I.7) являются в определенном смысле эквивалентными.

В дальнейшем нам придется иметь дело с задачами

$$\omega^-(t) = \mathcal{A}(t) \omega^+[\alpha(t)] + \mathcal{B}(t) \overline{\omega^+[\beta(t)]} \quad (\text{I.10})$$

и

$$\mathcal{S}^+(t) = \mathcal{A}'[\alpha^*(t)] \alpha^{*'}(t) \mathcal{S}^-[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \overline{\mathcal{S}^-[\beta^*(t)]}, \quad (\text{I.11})$$

представляющими собой сопутствующие задачам (I.2) и (I.9)

соответственно.

Исходя из общей теории граничных задач и сингулярных интегральных уравнений (см. /1/, /8/), можно легко доказать, что имеют место равенства

$$\kappa = \ell + \ell^*, \quad (1.12)$$

$$\kappa' = \ell' + \ell'_*, \quad (1.13)$$

где  $\kappa$  и  $\kappa'$  - числа линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений уравнений (1.6) и (1.7), а  $\ell$ ,  $\ell'$ ,  $\ell_*$  и  $\ell'_*$  - числа линейно независимых исчезающих на бесконечности решений задач (1.2), (1.9), (1.10) и (1.11) соответственно.

§ 2. Изучение граничной задачи (1.2) в случае, когда

$$A(t) \equiv E, \text{ где } E - \text{единичная матрица}$$

Рассмотрим граничную задачу:

$$\mathcal{Y}^+(t) = \mathcal{Y}^-[\alpha(t)] + \mathcal{B}(t) \mathcal{Y}^-[\beta(t)] \quad (2.1)$$

и задачу, сопряженную этой задаче,

$$\Psi^-(t) = \alpha^{*'}(t) \Psi^+[\alpha^*(t)] + \overline{t'^2} \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \overline{\Psi^+[\beta^*(t)]}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим также задачи

$$\omega^-(t) = \omega^+[\alpha(t)] + \mathcal{B}(t) \omega^+[\beta(t)] \quad (2.3)$$

и

$$\mathcal{G}^+(t) = \alpha^{*'}(t) \mathcal{G}^-[\alpha^*(t)] + \overline{t'^2} \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \overline{\mathcal{G}^-[\beta^*(t)]}, \quad (2.4)$$

которые представляют собой сопутствующие задачам (2.1) и (2.2) соответственно. Докажем следующую теорему.

Теорема I.  $n_0 - n'_0 = n_* - n'_* = 0$ , где  $n_0, n'_0, n_*$  и  $n'_*$  - числа линейно независимых исчезающих на бесконечности



решений задач (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4) соответственно

Доказательство. Применяя результаты, приведенные в § I, легко доказать, что задачи (2.1) и (2.3) приводятся к следующей системе:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E}{t-t_0} + \frac{E \cdot \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \right] \rho[\alpha(t)] dt + \quad (2.5)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E}{t-t_0} - \frac{B(t_0) \overline{\beta'(t)} t'^2}{\beta(t) - \beta(t_0)} \right] \overline{\rho[\beta(t)]} dt = 0,$$

а задачи (2.2) и (2.4) - к системе:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E}{t-t_0} + \frac{E \cdot \alpha^*(t_0)}{\alpha^*(t) - \alpha^*(t_0)} \right] \alpha^*(t) \nu[\alpha^*(t)] dt + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{B'[\beta^*(t)]}{t-t_0} - \frac{t'^2 \overline{\beta^*(t_0)} B' \beta^*(t_0)}{\beta^*(t) - \beta^*(t_0)} \right] t'^2 \overline{\beta^*(t)} \nu[\beta^*(t)] dt = 0.$$

Учитывая, что

$$\rho = n_0 + n_*, \quad \rho' = n'_0 + n'_*, \quad (2.7)$$

где  $\rho$  и  $\rho'$  - числа линейно независимых решений систем (2.5.) и (2.6) соответственно, и что (см./I/)

$$\rho - \rho' = 0, \quad (2.8)$$

из равенства (2.7) получаем

$$n_0 - n'_0 = n'_* - n_*. \quad (2.9)$$

Применяя результаты, полученные в /7/, легко доказать, что граничная задача (2.1) эквивалентна следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\rho[\alpha(t_0)] + \frac{1}{2} B(t_0) \overline{\rho[\beta(t_0)]} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{E}{t-t_0} -$$

$$\frac{E \cdot \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \rho[\alpha(t)] dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B(t) \overline{\rho[\beta(t)]}}{t-t_0} dt = 0,$$

так что число линейно независимых решений системы (2.10) равно  $n_0$ .

Рассмотрим следующую систему сингулярных интегральных уравнений

$$\alpha^{*'}(t_0) \vee[\alpha^{*}(t_0)] + \frac{1}{2} t_0^{-1/2} \overline{\beta^{*'}(t_0)} \overline{B'[\beta^{*}(t_0)]} \vee[\beta^{*}(t_0)] +$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E \cdot \alpha^{*'}(t_0)}{\alpha^{*}(t) - \alpha^{*}(t_0)} - \frac{E}{t-t_0} \right] \alpha^{*'}(t) \vee[\alpha^{*}(t)] dt -$$
(2.11)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B'[\beta^{*}(t_0)] \overline{\beta^{*'}(t_0)} t_0^{-1/2} \overline{\beta^{*'}(t)} t^{-1/2}}{\beta^{*}(t) - \beta^{*}(t_0)} \vee[\beta^{*}(t)] dt = 0,$$

которую мы будем называть связанной с системой (2.10).

Учитывая, что всякий кусочно-голоморфный вектор  $\Psi(z)$  можно представить формулой

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\vee(t)}{t-z} dt \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^+, \quad (2.12)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\vee[\alpha^{*}(t)] \cdot \alpha^{*'}(t)}{t-z} dt \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^-,$$

где  $\vee(t)$  - вектор-функция класса  $H$ , легко доказать, что система уравнений (2.11) эквивалентна граничной задаче (2.2) так, что число линейно независимых решений системы (2.11) равно  $n'_0$ .

Перепишем систему (2.10) в виде:

$$\rho[\alpha(t_0)] + \frac{1}{a} B(t_0) \overline{\rho[\beta(t_0)]} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E}{t-t_0} - \right. \quad (2.13)$$

$$\left. - \frac{E \cdot \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \right] \rho[\alpha(t)] dt - \frac{B(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\beta'(t) t'^2}}{\beta(t) - \beta(t_0)} \overline{\rho[\beta(t)]} dt + V\bar{\rho} = 0,$$

где  $V\bar{\rho} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{B(t_0) \overline{\beta'(t) t'^2}}{\beta(t) - \beta(t_0)} - \frac{B(t)}{t-t_0} \right] \overline{\rho[\beta(t)]} dt$  - вполне непрерывный оператор.

Учитывая результаты, полученные в /6/, имеем, что

$$n_0 - n'_0 = n_0^* - n_0^{*'}, \quad (2.14)$$

где  $n_0^*$  и  $n_0^{*'}$  - числа линейно независимых решений системы.

$$\rho[\alpha(t_0)] + \frac{1}{a} B(t_0) \overline{\rho[\beta(t_0)]} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E}{t-t_0} - \right. \quad (2.15)$$

$$\left. - \frac{E \cdot \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \right] \rho[\alpha(t)] dt - \frac{B(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\beta'(t) t'^2}}{\beta(t) - \beta(t_0)} \overline{\rho[\beta(t)]} dt = 0$$

и связанной с ней системы:

$$\begin{aligned} & \alpha^{*'}(t_0) \vee[\alpha^*(t_0)] + \frac{1}{a} t_0'^2 \overline{\beta^{*'}(t_0)} \overline{B'[\beta^*(t_0)]} \vee[\beta^*(t_0)] + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{E \cdot \alpha^{*'}(t_0)}{\alpha^*(t) - \alpha^*(t_0)} - \frac{E}{t-t_0} \right] \alpha^{*'}(t) \vee[\alpha^*(t)] dt - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{B'[\beta^*(t)]} \overline{\beta^{*'}(t) t'^2} \vee[\beta^*(t)]}{t-t_0} dt = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

соответственно.



Имея в виду результаты, полученные в /7/, легко доказать, что задачи (2.3) и (2.4) эквивалентны системам (2.15) и (2.16) соответственно, так что будем иметь:

$$n_* = n_o^* ; \quad n'_* = n_o^{*'} . \quad (2.17)$$

из равенств (2.9), (2.14) и (2.17) получаем, что

$$n_o - n'_o = n_* - n'_* = 0$$

и теорема I доказана.

§ 3. Доказательство теоремы типа Нетера для задачи (I.1).

Докажем справедливость следующих теорем:

Теорема 2. Для существования решений задачи (I.1), исчезающих на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

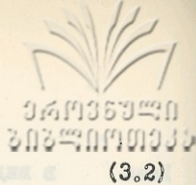
$$Re \int_{\ell} \psi^+(t) \delta(t) dt = 0, \quad (3.1)$$

для любого исчезающего на бесконечности решения задачи (I.9).

Теорема 3.  $\ell - \ell' = 2\alpha$ , где  $\ell$  и  $\ell'$  обозначают числа линейно независимых исчезающих на бесконечности решений задач (I.2) и (I.9) соответственно;  $\alpha$  - индекс функции  $\det A(t)$ .

Докажем теорему 2.

Из приведенных в § I результатов вытекает, что для существования исчезающих на бесконечности решений задачи (I.1) необходимо и достаточно, чтобы система (I.5) имела решение в том случае, когда  $\Gamma(\bar{x}) = 0$ , а для разрешимости (I.5), как известно (см. /1/), необходимо и достаточно выполнение следующего условия:



$$\operatorname{Re} \int_L \left[ \xi(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\xi(t) dt}{t - t_0} \right] \xi(t_0) dt_0 = 0, \quad (3.2)$$

где  $\xi(t)$  - любое решение системы (I.7).

Равенство (3.2) можно переписать так:

$$\operatorname{Re} \int_L \left[ \xi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\xi(t) dt}{t - t_0} \right] \xi(t_0) dt_0 = 0. \quad (3.3)$$

Если для любого решения  $\xi(t)$  системы (I.7) по формулам (I.8) составим вектор  $\Psi(z)$ , при  $z \in \mathcal{D}^+$  получим

$$\xi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\xi(t) dt}{t - t_0} = 2 \Psi^+(t_0). \quad (3.4)$$

В силу формулы (3.4) условие (3.3) можно переписать так:

$$\operatorname{Re} \int_L \Psi^+(t) \xi(t) dt = 0. \quad (3.5)$$

Так как любое решение задачи (I.9)<sup>I)</sup> можно представить формулой (I.8), то равенство (3.5) доказывает справедливость теоремы 2.

Докажем теперь теорему 3<sup>2)</sup>.

Пусть задача (I.2) имеет исчезающее на бесконечности решение  $\varphi(z)$  и введем обозначение:

$$\varphi^-(t) = \rho(t). \quad (3.6.)$$

Тогда (см. /7/) граничная задача (I.2) приводится к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & [-A(t_0) + E] \rho[\alpha(t_0)] - B(t_0) \overline{\rho[\beta(t_0)]} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{A(t)}{t - t_0} \rho[\alpha(t)] dt - \\ & - \frac{E \cdot \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \int_L \rho[\alpha(t)] dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{B(t) \overline{\rho[\beta(t)]}}{t - t_0} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

I) Имеем в виду исчезающие на бесконечности решения.

2) Так как случай  $A(t) \equiv E$  рассмотрен в § 2, будем предполагать, что  $A(t) \neq E$ .



Учитывая, что любое решение  $\rho(t)$  системы (3.7) (если оно существует) представляет собой граничное значение голоморфного в области  $\mathcal{D}^-$  и исчезающего на бесконечности вектора  $\mathcal{Y}(z)$ , систему (3.7) можно переписать так:

$$[-A(t_0) + E] \rho[\alpha(t_0)] + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{A(t)}{t - t_0} + \frac{E \cdot \alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \right] \rho[\alpha(t)] dt + \quad (3.8)$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_L \left[ \frac{B(t)t'^2}{t - t_0} - \frac{B(t_0)\overline{\beta'(t)}}{\beta(t) - \beta(t_0)} \right] t'^2 \overline{\rho[\beta(t)]} dt = 0.$$

Так что любое решение системы (3.7) представляет собой и решение системы (3.8). Допустим теперь, что  $\rho(t)$  - какое-либо решение системы (3.8) и рассмотрим кусочно-голоморфный вектор  $\omega(z)$ , определенный формулой:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\rho(t) dt}{t - z} \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^+, \quad (3.9)$$

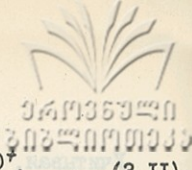
$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{A(t)\rho[\alpha(t)] + B(t)\overline{\rho[\beta(t)]}}{t - z} dt \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^-.$$

В силу этой формулы система уравнений (3.8) приводится к задаче:

$$\omega^-(t) = \omega^+[\alpha(t)] + B(t)\overline{\omega^+[\beta(t)]}, \quad (3.10)$$

которая рассмотрена в § 2.

Нетрудно видеть, что любое (отличное от нуля) исчезающее на бесконечности решение задачи (3.10) представимо в виде:



$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega^+(t) dt}{t-z} \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^+, \quad (3.11)$$

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega^+[\alpha(t)] + \beta(t)\omega^+[\beta(t)]}{t-z} dt \quad \text{при } z \in \mathcal{D}^-,$$

где  $\omega^+(t)$  - граничное значение искомого вектора  $\omega(z)$ .

Допустим теперь, что какое-либо решение  $\rho(t)$  системы (3.8) по формулам (3.9) дает отличное от нуля исчезающее на бесконечности решение задачи (3.10), тогда из формул (3.9) и (3.11) получаем, что  $\rho(t)$  должно удовлетворять условиям:

$$\rho(t) = \omega^+(t) + \mathcal{D}^-(t), \quad (3.12)$$

$$A(t)\rho[\alpha(t)] + \beta(t)\overline{\rho[\beta(t)]} = \omega^+[\alpha(t)] + \beta(t)\overline{\omega^+[\beta(t)]} + \mathcal{D}^+(t),$$

где  $\mathcal{D}^-(t)$  и  $\mathcal{D}^+(t)$  обозначают граничные значения на  $L$  конечно-голоморфного (исчезающего на бесконечности) вектора  $\mathcal{D}(z)$ . Из условий (3.12) вытекает, что  $\mathcal{D}(z)$  должно быть решением следующей неоднородной задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+(t) = & A(t)\mathcal{D}^+[\alpha(t)] + \beta(t)\overline{\mathcal{D}^+[\beta(t)]} + \\ & + [A(t) - E]\omega^+[\alpha(t)]; \quad \mathcal{D}(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Следовательно, для решений задачи (3.10), которые представляются формулой (3.9), где  $\rho(t)$  - вектор класса  $\mathcal{H}$ , должна иметь решение неоднородная граничная задача (3.13), т.е. должно выполняться условие

$$Re \int_L \psi^+(t) [A(t) - E] \omega^+[\alpha(t)] dt = 0, \quad (3.14)$$

где  $\psi^+(z)$  - любое исчезающее на бесконечности решение задачи (I.9). Обозначая по-прежнему число линейно независимых исчезающих на бесконечности решений задачи (3.10) через

$n_*$ , получаем, что  $m-l$  ( $m$  - число линейно независимых

решений системы (3.8) из этих решений должны удовлетворять условию (3.14), а для остальных (их число будет  $n = n_* - m + l$ ) должно выполняться условие

$$\operatorname{Re} \int_{L} \psi^+(t) [A(t) - E] \omega^+[\alpha(t)] dt = 0. \quad (3.15)$$

Обозначим упомянутые  $n$  решения через  $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \dots, \tilde{\omega}^n$ , тогда и их линейная комбинация  $\omega(x) = a_1 \tilde{\omega}^1 + a_2 \tilde{\omega}^2 + \dots + a_n \tilde{\omega}^n$  (с действительными коэффициентами) не представляется в виде (3.9), и, следовательно, для этой комбинации должно выполняться условие (3.15). Если через  $n'$  обозначим число линейно независимых (исчезающих на бесконечности) решений задачи (1.9), которые удовлетворяют условию (3.15), получим, что однородная система уравнений (относительно коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ):

$$\sum_{\kappa=1}^n c_{j\kappa} a_{\kappa} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n'), \quad (3.16)$$

где

$$c_{j\kappa} = \operatorname{Re} \int_{L} \tilde{\psi}^+(t) [A(t) - E] \tilde{\omega}^{\kappa}[\alpha(t)] dt \quad (j=1, 2, \dots, n'; \kappa=1, 2, \dots, n),$$

должна иметь только тривиальное решение, и, следовательно, должно выполняться условие:

$$n' \geq n. \quad (3.17)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений, связанную с системой (3.8) (см./I/):





$$\begin{aligned}
 & [-A'[\alpha^*(t_0)] + E] \alpha^{*'}(t_0) \psi[\alpha^*(t_0)] - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{A'[\alpha^*(t_0)] \alpha^{*'}(t_0)}{\alpha^*(t) - \alpha^*(t_0)} + \right. \\
 & \left. + \frac{E}{t - t_0} \right] \alpha^{*'}(t) \psi[\alpha^*(t)] dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{\bar{t}'^2 \beta^{*'}(t_0) \mathcal{B}'[\beta^*(t_0)]}{\beta^*(t) - \beta^*(t_0)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\mathcal{B}' \beta^*(t)}{t - t_0} \right] \bar{t}'^2 \beta^{*'}(t) \psi[\beta^*(t)] dt = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Пусть  $\psi(t)$  — какое-либо решение системы (3.18), и рассмотрим кусочно-голоморфный вектор  $\Psi(\bar{z})$ , определенный формулой

$$\begin{aligned}
 \Psi(\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(t)}{t - \bar{z}} dt \quad \text{при } \bar{z} \in \mathcal{D}^+, \\
 \Psi(\bar{z}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\alpha^{*'}(t) \psi[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \beta^{*'}(t) \mathcal{B}'[\beta^*(t)] \psi[\beta^*(t)]}{t - \bar{z}} dt \\
 &\text{при } \bar{z} \in \mathcal{D}^-.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Легко доказать, что при этих обозначениях система уравнений (3.18) приводится к граничной задаче (I.9). Непосредственной проверкой легко убедиться, что такие решения уравнений (3.18), которым по формулам (3.19) соответствуют только тривиальные решения задачи (I.9), представляют собой исчезающие на бесконечности решения задачи (2.4), и наоборот, если  $\omega(\bar{z})$  — исчезающее на бесконечности решение задачи (2.4), то вектор будет решением системы (3.18)

Всякое решение задачи (I.9), как уже отметили в § I, представляется формулой (I.8), так что если какое-либо решение  $\psi(t)$  системы (3.18) по формулам (3.19) дает отличное от нуля исчезающее на бесконечности решение задачи

(I.9), то должны иметь:

$$\Psi^+(t) = \nu(t) + \Omega^-(t),$$

(3.20)

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}'[\alpha^*(t)]\alpha^{*'}(t)\Psi^+[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \overline{\Psi^+[\beta^*(t)]} = \\ & = \alpha^{*'}(t)\nu[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \nu[\beta^*(t)] + \Omega^+(t), \end{aligned}$$

где  $\Omega^+(t)$  и  $\Omega^-(t)$  - граничные значения кусочно-голоморфного исчезающего на бесконечности вектора  $\Omega(x)$ . Из этих равенств вытекает, что для решений задачи (I.9), представляющих формулой (3.19) (где  $\nu(t) \in H$ ), должна иметь решение неоднородная граничная задача:

$$\begin{aligned} \Omega^+(t) = & \alpha^{*'}(t)\Omega^-[\alpha^*(t)] + \bar{t}'^2 \overline{\beta^{*'}(t)} \overline{\mathcal{B}'[\beta^*(t)]} \overline{\Omega^-[\beta^*(t)]} + \\ & + [\mathcal{A}'[\alpha^*(t)] - E]\alpha^{*'}(t)\Psi^+[\alpha^*(t)], \end{aligned} \quad (3.21)$$

для существования исчезающих на бесконечности решений которой необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\operatorname{Re} \int_L \omega^+(t) [\mathcal{A}'[\alpha^*(t)] - E] \alpha^{*'}(t) \Psi^+[\alpha^*(t)] dt = 0, \quad (3.22)$$

где вектор  $\omega^+(t)$  представляет собой граничное значение исчезающего на бесконечности решения задачи (2.3). Легко заметить, что условия (3.14) и (3.22) одни и те же. Следовательно, обозначая через  $m'$  число линейно независимых решений системы (3.18), будем иметь, что  $n' = \ell' - (m' - n'_*)$

из решений задачи (I.9) должны удовлетворять условию

$$\operatorname{Re} \int_L \omega^+(t) [\mathcal{A}'[\alpha^*(t)] - E] \alpha^{*'}(t) \psi^+[\alpha^*(t)] dt = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n'). \quad (3.23)$$

Повторяя рассуждение, приведенное выше, легко доказать, что должно иметь место неравенство

$$n' \leq n, \quad (3.24)$$

которое вместе с неравенством (3.17) дает

$$n = n'. \quad (3.25)$$

Следовательно, мы получили, что число таких решений задачи (3.10), которые не представляются формулой (3.9), равно числу решений задачи (I.9), не представляющихся формулой (3.19).

Из равенства (3.25) получаем

$$l - l' = m - m' - (n_* - n'_*). \quad (3.26)$$

Учитывая, что (см. § 2)  $n_* - n'_* = 0$  и что (см./I)  $m - m' = 2x$ , где  $x = \operatorname{Ind} \det \mathcal{A}(t)$ , из равенства (3.26) окончательно получаем

$$l - l' = 2x \quad (3.27)$$

и теорема 3 доказана.

#### Примечания.

I. Из приведенных выше результатов легко получаем, что

$$l_* - l'_* = -2x, \quad (3.28)$$

где  $x = \operatorname{Ind} \det \mathcal{A}(t)$ , а  $l_*$  и  $l'_*$  обозначают числа линейно независимых исчезающих на бесконечности решений задачи (I.10) и союзной с ней задачи (I.11) соответственно. Эти задачи изучаются таким же путем, как это сделано в случае задачи (I.1).

II. Выше мы предполагаем, что функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$



сохраняют направление обхода на  $L$ . Если мы предположим, что  $\alpha(t)$  сохраняет, а  $\beta(t)$  меняет направление обхода на  $L$ , получаем, что теорема 2 формулируется в таком же виде, а теорема 3 будет иметь вид:

$$\ell - \ell' = 2\kappa, \quad (3.29)$$

где  $\kappa = \text{Ind det } B(t)$ .

III. Приведенный выше метод изучения задачи (I.I) можно распространить на более общую задачу:

$$\varphi_j^+[\alpha_j(t)] = \sum_{\kappa=1}^n \left\{ A_{j\kappa}(t) \varphi_{\kappa}^-[\delta_{\kappa}(t)] + B_{j\kappa}(t) \overline{\varphi_{\kappa}^-[\gamma_{\kappa}(t)]} \right\} + b_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (3.30)$$

где  $\alpha_j(t)$ ,  $\delta_j(t)$  и  $\gamma_j(t)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) — заданные на контуре  $L$  функции, имеющие отличные от нуля производные класса  $H$  и переводящие контур  $L$  в самого себя, сохраняя (аналогично можно рассмотреть другие случаи) направление обхода. Для задачи (3.30) остаются в силе все результаты, полученные выше.

Поступила 15.Ш.1982

Кафедра  
теоретической механики

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., "Наука", 1970.
2. М.П.Ганин. ДАН СССР 79, 6, 921-924, 1951.
3. Г.Н.Александрия. Сообщ.АН СССР, 14, 2, 65-70, 1953.



4. М.Г.Бедоева. Сообщ. АН ГССР, 28,3, 257-264, 1962.
5. Р.С.Исаханов. Сообщ. АН ГССР, 60,2, 285-288, 1970.
6. Г.Ф.Манджавидзе. Труды мат.ин-та АН ГССР, 33,76-81, 1967.
7. Г.А.Капанадзе. Сообщ. АН ГССР, 79,2,277-280, 1975.
8. Г.С.Литвинчук. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., "Наука", 1977.

ბ.კაპანაძე

კრიტიკული მნიშვნელობის მქონე სასაზღვრო ამოცანის  
რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის მარჯვნივ

რგებნები

პარტიკულური ნივთის კონსტრუქციის (1.1) ამოცანის  
სახეობა.

G.Kapanadze

A GENERALIZED HILBERT PROBLEM FOR SEVERAL  
UNKNOWN FUNCTIONS WITH SHIFTS

Summary

A boundary value problem (1.1) is considered and theorems  
analogous to Noether's theorems are proved.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი გზის ორდენის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის შრომები

239, 1983

УДК 539.03

ВЛИЯНИЕ НАГРУЖЕННОГО ЭКСЦЕНТРИЧНОГО РЕБРА НА  
ДЕФОРМАЦИЮ КРУГЛОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ

Э.Г. Бурдули

Рассматривается гибкая пластинка толщиной  $h = const$ ,  
срединная плоскость которой ограничена окружностью  $L$  ра-  
диуса  $R$ . Край пластинки подкреплён тонким упругим изотроп-  
ным опорным ребром, несимметрично расположенным относитель-  
но ее срединной плоскости. Подкрепляющее ребро имеет посто-  
янное поперечное сечение и обладает жесткостью на растяже-  
ние и изгиб. Одна из главных осей инерции сечения ребра па-  
раллельна срединной плоскости пластинки и отстает от нее  
на расстояние  $h_2$ . На ребро действуют равномерно распре-  
деленное усилие  $P$ , точки приложения которого удалены  
на расстояние  $h_0$  от главной оси инерции сечения ребра,  
параллельной срединной плоскости пластинки, и внешний мо-  
мент  $M$ . Пластинка несет осесимметричную нагрузку. В ра-  
боте исследуется влияние геометрических (эксцентриситет реб-  
ра) и физических (нагрузки ребра) параметров на упруго-де-  
формированное состояние пластинки.

Как известно, деформация гибких пластин, отнесенных к



полярной системе координат  $(\chi, \theta)$ , описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \frac{d}{d\chi} (\Delta W) &= \Psi(\chi) + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{d\chi} \frac{dW}{d\chi}, \\ \frac{d}{d\chi} (\Delta \Phi) &= -\frac{E}{2\chi} \left( \frac{dW}{d\chi} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $\mathcal{D}$  - цилиндрическая жесткость,  $E$  - модуль Юнга материала,  $\Psi = \frac{1}{r} \int_0^\chi q(\chi) r d\chi$  - известная функция нагрузки. Условие взаимодействия ребра жесткости с пластинкой имеет вид:

$$\begin{aligned} (\delta_1 + \nu) \frac{dW}{d\chi} + R \frac{d^2 W}{d\chi^2} - \frac{h h_2}{\mathcal{D}} \frac{d\Phi}{d\chi} &= \frac{R h_0 P}{\mathcal{D}} - \frac{M R}{\mathcal{D}}, \\ \frac{d^2 \Phi}{d\chi^2} + \frac{1 - \nu \delta_3}{R \delta_3} \frac{d\Phi}{d\chi} + \frac{E h_2}{R} \frac{dW}{d\chi} &= -\frac{P}{h \delta_3}, \end{aligned} \quad (2)$$

при  $\chi = R$ ,

$$\frac{dW}{d\chi} = 0, \quad \frac{d\Phi}{d\chi} = 0 \quad \text{при } \chi = 0, \quad (3)$$

где  $\delta_1 = A/R\mathcal{D}$ ,  $A$  - изгибная жесткость ребра,  $\delta_3 = B/EhR$ ,  $B$  - жесткость кольца на растяжение.

Введем обозначения

$$\theta = \frac{R}{\mathcal{D}} \frac{dW}{d\chi}, \quad \psi = \frac{R}{Eh^2} \frac{d\Phi}{d\chi}, \quad \chi = \frac{\chi}{R} \quad (4)$$

и предположим, что  $q = const$ . Тогда система дифференциальных уравнений (1) и граничные условия (2), (3) примут

вид:

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{x^2} \right) = \frac{\varphi\theta}{x} + \frac{x}{2} q^*, \quad (5)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{1}{2x} \theta^2,$$

при  $x=1$ :

$$\frac{d\theta}{dx} + (\delta_1 + \nu)\theta - \frac{12h_2(1-\nu^2)}{h} \varphi = \frac{R^2 h_0 P}{2h} - \frac{R^2 M}{2h}, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1-\nu\delta_3}{\delta_3} \varphi + \frac{h_2}{h} \theta = -\frac{R^2 P}{\delta_3 E h^3},$$

при  $x=0$ :

$$\theta = 0, \quad \varphi = 0, \quad (7)$$

где

$$q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^4.$$

В случае, когда поперечное сечение ребра есть прямоугольник шириной  $b_1$  и высотой  $h_1$ , относительные жесткости  $\delta_1$  и  $\delta_3$  имеют вид

$$\delta_1 = \delta \frac{b_1}{R} \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 (1-\nu^2),$$

$$\delta_3 = \frac{\delta}{12} \frac{h_1}{h} \left( \frac{b_1}{R} \right)^3 \left( 1 + 12 \frac{R^2}{b_1^2} \right),$$

где  $\delta = E_1/E$ ,  $E_1$  - модуль Юнга материала ребра.





Для решения граничной задачи (5), (6), (7) применяется итерационный метод нелинейной релаксации / 3 /.

С этой целью разбиваем отрезок из равных частей и аппроксимируем уравнения (5) и граничные условия (6), (7) их разностными аналогами. В связи с этим в точках коллокации  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) возникают невязки (погрешности), которые совместно с граничными условиями записываются известным образом / 7 /.

Задача сводится к последовательному вычислению величин  $\theta_i^{m+1}$  и  $\varphi_i^{m+1}$  в точках коллокации  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

$$\begin{aligned}\theta_i^{m+1} &= \theta_i^m + d\theta_i^m, \\ \varphi_i^{m+1} &= \varphi_i^m + d\varphi_i^m\end{aligned}\quad (8)$$

( $m=0, 1, 2, \dots$ )

Процедура вычислений сводится к следующей итеративно-релаксационной схеме: по задаваемым нулевым начальным значениям  $\theta_i^0$  и  $\varphi_i^0$  известным образом / 7 / вычисляются невязки  $T_i^0$  и  $L_i^0$ , а также операторы релаксации  $d\theta_i^0$  и  $d\varphi_i^0$ . Далее по формулам (8) строится первое приближение. Затем цикл повторяется. Процесс вычислений и последовательное уменьшение невязок продолжается до тех пор, пока они не становятся меньше достаточно малого числа  $\varepsilon$  во всех точках коллокации  $x_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ).

Итерационный процесс сходится быстро. Машинное время численной реализации каждого варианта на ЭВМ БСМ-6 при  $\varepsilon = 10^{-6}$  не превышает 35 сек.

Для решения граничной задачи (5), (6), (7) применяется итерационный метод нелинейной релаксации /3/.

Прогибы и напряжения вычисляются по известным формулам для следующих значений параметров:  $q^* = 20$ ;  $P = 0, \pm 1$ ;  $M = 0, \pm 1$ ;  $\delta = 0, 1, 2, \infty$ ;  $\gamma = h_2 / (h_1 - h) = 0, \pm 2, \pm 5$ .

Ниже приведены зависимости максимальных прогибов и напряжений (рис. 1, 2, 3) от эксцентриситета ребра для значений  $M = -1$  и  $P = -1$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующее заключение:

1. Действие изгибающих нагрузок на ребро значительно уменьшает максимальный прогиб пластинки. Так, например, максимальный прогиб пластинки с нагруженным ребром ( $M = -1$ ,  $P = -1$ ) уменьшается на 52% ( $\delta = 1$ ) и на 22% ( $\delta = 2$ ) по сравнению с максимальным прогибом той же пластинки с ненагруженным ребром ( $P = 0$ ,  $M = 0$ ).

2. Максимальный прогиб можно уменьшить также соответствующим подбором эксцентриситета ребра.

3. Эффект влияния изгибающих нагрузок на ребро уменьшается при возрастании его жесткости.

4. Действие изгибающих нагрузок на ребро увеличивает жесткость пластинки, но уменьшает его прочностные свойства.

Поступила 15.6.1982

Кафедра  
вышей математики



1. А.С.Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. М., 1956.
2. Г.Н.Савин, Н.П.Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, 1964.
3. Н.Перроне, Р.Као. Прикладная механика. "Мир", 1971, № 2.
4. И.О.Огирко. Теоретна та прикладна математика, вып. 10, Львов, 1975.
5. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений, т. I, М., 1966.
6. И.А.Зоненшвили, Н.П.Флейшман. Строительная механика и расчет сооружений, вып. 6, Киев, 1975.
7. И.А.Зоненшвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. № 10, 1980.

3. დასკვნები

ქვემოთაღნიშნული ნაშრომის მიზანს დასაბუთებლად  
 აქვეყნებულია შემდეგი მონაცემები და დასკვნები

არაწრფივი რელაქსაციის იტერაციული მეთოდის გამოყენებით  
 შეიძლება სიხისვის ნიშნის ექსპერიმენტული და მასზე  
 მიყვანილი დაფიქსირების გავლენა ნიშნული მიქრონი დონის დონეზე  
 დაფიქსირება.

მიქრონი შედეგების შედეგად შედეგად დასაბუთდა,  
 რომ ნიშნის ექსპერიმენტული და მასზე მიყვანილი მიქრონი დონის  
 შედეგები საგრძობად ადვილად აღიწერება მათემატიკური ჩაღრმავებით.



THE EFFECT OF A LOADED ECCENTRIC RIB ON THE DEFORMATION OF A ROUND FLEXIBLE PLATE

Summary

The effect of geometric (rib eccentricity) and force (loads acting on the rib) parameters on the elastic equilibrium of a round flexible plate has been studied. It has been ascertained that by an appropriate selection of these parameters a substantial reduction of the maximal flexure of the plate can be achieved without increasing its weight.

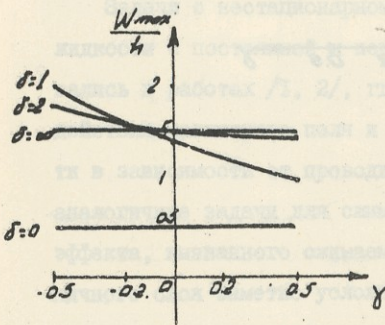


Рис. 1

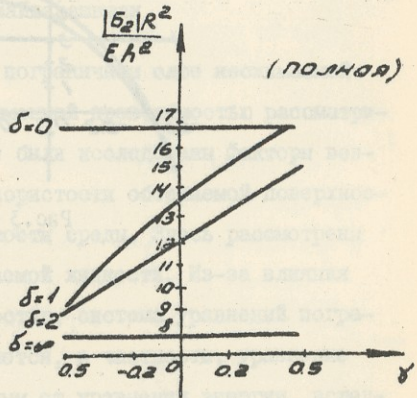


Рис. 2

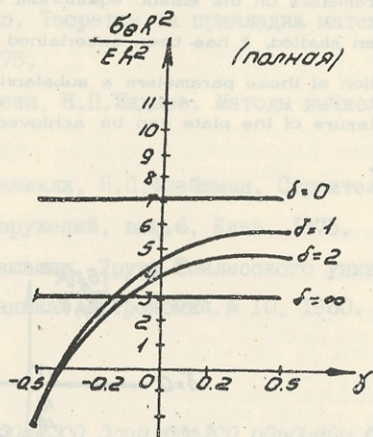


Рис. 3

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშანი ორდენის მტკვრისაღი საბუნებისმეტყველო  
უნივერსიტეტის შრომები

239, 1983

УДК 583.4

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО МГД ПОГРАНИЧНОГО  
СЛОЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ  
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

Л.Г. Азмайпарашвили

Задачи о нестационарном пограничном слое несжимаемой жидкости с постоянной и переменной проводимостью рассматривались в работах /1, 2/, где были исследованы факторы воздействия магнитного поля и пористости обтекаемой поверхности в зависимости от проводимости среды. Здесь рассмотрены аналогичные задачи для сжимаемой жидкости. Из-за влияния эффекта, вызванного сжимаемостью, система уравнений пограничного слоя заметно усложняется, в частности, уравнение импульсов становится зависимым от уравнения энергии, вследствие чего вклады воздействия вышеуказанных факторов на характеристики движения зависят от тепловых параметров. В настоящей работе методом последовательных приближений решается система уравнений сжимаемой жидкости и изучается влияние магнитного поля, проводимости среды, пористости и факторов сжимаемости на трение и теплоотдачу.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



I. Рассмотрим задачу о нестационарном движении слабо-проводящего газа около нагретой пористой теплопроводной бесконечной пластины, совпадающей с осью  $Ox$  в присутствии постоянного магнитного поля  $\vec{B}_0$ , перпендикулярного стенке, в приближении пограничного слоя ( $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ), при выполнении следующих условий:

а) Температура набегающего потока  $T_\infty = const$ .

б) Закон вязкости и уравнение состояния примем в виде:

$$\mu = \nu \frac{\mathcal{N}}{T_0} T, \quad p = \rho R T,$$

из которых непосредственно следует, что

$$\mathcal{N} \rho = \mathcal{N}_w \rho_w = \mathcal{N}_\infty \rho_\infty = const.$$

в) Не будем учитывать теплоту, возникающую вследствие трения и сжатия, т.е. число Эккерта  $Ec \ll 1$ , так что порядок произведения  $Ec \cdot \mathcal{N} \sim 1$ , где  $\mathcal{N}$  - число Стюарта.

г) Задача рассматривается в безиндукционном приближении при отсутствии электрического поля:  $R_m \ll 1$ ,  $\vec{E} = 0$  и проводимость среды принимается постоянной.

Система уравнений и граничные условия для данной задачи в общепринятых обозначениях будут иметь вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\epsilon B_0^2}{\rho} u, \quad (1)$$

$$c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\epsilon B_0^2}{\rho} u^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} = -\rho_{\infty} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial t} - \epsilon B_0^2 u_{\infty},$$

$$u \Big|_{y=0} = 0, \quad v \Big|_{y=0} = v_w(t), \quad u \Big|_{y=\infty} = u_{\infty}(t), \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$T \Big|_{y=0} = T_w(t), \quad T \Big|_{y=\infty} = T_{\infty}, \quad T \Big|_{t=0} = T_{\infty}. \quad (5)$$

С целью упрощения этой системы подставим (3) в (1), (2) и произведем замену переменных  $(y, t)$  на  $(\bar{y}(t), t)$ ,

где

$$\bar{y} = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_{\infty}} dy,$$

в результате чего уравнение неразрывности будет тождественно выполняться, а уравнения импульсов и энергии соответственно примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T_{\infty}}{T_w} v_w \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{T}{T_{\infty}} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial t} + \nu_{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\epsilon B_0^2}{\rho_{\infty}} \cdot \frac{T}{T_{\infty}} (u_{\infty} - u), \quad (6)$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \frac{T_{\infty}}{T_w} v_w \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{c_p \nu_{\infty}}{Pr} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{y}^2} + \nu_{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \quad (7)$$

$$+ \frac{T}{\rho_{\infty} T_{\infty}} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - u \frac{T}{T_{\infty}} \cdot \frac{\partial u_{\infty}}{\partial t} - \frac{\epsilon B_0^2}{\rho_{\infty}} \cdot \frac{T}{T_{\infty}} (u_{\infty} - u) u.$$

Для приведения (4) - (7) к безразмерному виду введем следующие переменные и обозначения:

$$\bar{y} = \frac{L}{\sqrt{Re}} y^*, \quad t = \frac{L}{\nu} t^*, \quad u = \nu u^*, \quad v_w = \frac{\nu}{\sqrt{Re}} v_w^*,$$

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}, \quad a = \frac{T_w}{T_{\infty}}, \quad N = \frac{Ha^2}{Re}, \quad Ha_a^2 = \frac{\epsilon B_0^2 L^2}{\rho \nu_{\infty}},$$



$$E_c = \frac{V^2}{C_p(\tau_w - \tau_\infty)}, \quad u_\infty^* - u^* = f, \quad P_r \cdot E_c \cdot N = M.$$

Если подставить соотношения в (4) - (7) получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{v_w}{a} \frac{\partial f}{\partial y} + (a-1) \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \theta + \quad (8)$$

$$+ N[(a-1)\theta + 1]f \equiv A(f(y,t), \theta(y,t)),$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - P_r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{P_r}{a-1} \frac{da}{dt} \theta + \frac{P_r v_w}{a} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \quad (9)$$

$$+ M[(a-1)\theta + 1](u_\infty - f) \equiv B(f(y,t), \theta(y,t)),$$

$$f|_{y=0} = u_\infty(t), \quad f|_{y=\infty} = 0, \quad f|_{t=0} = 0, \quad (10)$$

$$\theta|_{y=0} = 1, \quad \theta|_{y=\infty} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

(звездочки над величинами опущены).

Данную систему, как известно /3/, можно привести к системе интегральных уравнений (формально внося параметр  $\lambda$ ):

$$f = f_0 + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\infty A(f(\tau, r), \theta(\tau, r)) G^1(y, r, t-\tau) dr, \quad (12)$$

$$\theta = \theta_0 + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\infty B(f(\tau, r), \theta(\tau, r)) G^{Pr}(y, r, t-\tau) dr, \quad (13)$$

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_0}{\partial y} + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\infty A(f(\tau, r), \theta(\tau, r)) G_y^1(y, r, t-\tau) dr, \quad (14)$$



$$\psi = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\infty B(f(\tau, \tau), \theta(\tau, \tau)) G_y^{P_\kappa}(y, \tau, t-\tau) d\tau, \quad (15)$$

где  $G^y$ ,  $G_y^y$  - соответственно функция Грина для оператора  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial t}$  и его производная по  $y$ , причем

$$G^y(y, \tau, t) = \frac{\lambda^{1/2}}{2\sqrt{\lambda t}} \left[ \exp\left(-\frac{\lambda(\tau+y)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda(\tau-y)^2}{4t}\right) \right],$$

а  $f_0$ ,  $\theta_0$  являются решениями (8) - (11) при

$$H(f(y, t), \theta(y, t)) = B(f(y, t), \theta(y, t)) = 0.$$

Решение (12) - (15) будем искать методом последовательных приближений, положив:

$$f = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa f_\kappa, \quad \theta = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa \theta_\kappa, \quad \varphi = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa \varphi_\kappa, \quad \psi = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa \psi_\kappa. \quad (16)$$

Подставляя эти выражения в (12) - (15), получим

$$f_{\kappa+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty H(f_\kappa(\tau, \tau), \theta_\kappa(\tau, \tau)) G^1(y, \tau, t-\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$\theta_{\kappa+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty B(f_\kappa(\tau, \tau), \theta_\kappa(\tau, \tau)) G_y^{P_\kappa}(y, \tau, t-\tau) d\tau, \quad (18)$$

$$\varphi_{\kappa+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty H(f_\kappa(\tau, \tau), \theta_\kappa(\tau, \tau)) G_y^1(y, \tau, t-\tau) d\tau, \quad (19)$$

$$\psi_{\kappa+1} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty B(f_\kappa(\tau, \tau), \theta_\kappa(\tau, \tau)) G_y^{P_\kappa}(y, \tau, t-\tau) d\tau. \quad (20)$$

Исследуем сходимость рядов (16). Пусть  $|f_0|$ ,  $\left| \frac{\partial f_0}{\partial y} \right|$ ,  $|\theta_0|$ ,  $\left| \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right| < L_0$ . Допустим, что все коэффициенты членов, стоящих в правых частях (8), (9), абсолютно ограничены числом  $M_0$ . Далее, можно доказать, что существует

$H > 0$ , для которого

$$\left| \int_0^t d\tau \int_0^\infty G^y(y, \eta, t-\tau) d\eta \right|, \left| \int_0^t d\tau \int_0^\infty G_y^y(y, \eta, t-\tau) d\eta \right| < H\sqrt{t}.$$

На основании этих оценок получим :

$$|f_1|, |\theta_1|, |\varphi_1|, |\psi_1| < 3M_0 L_0 H\sqrt{t} + 2M_0 L_0^2 H\sqrt{t} + M_0 L_0^3 H\sqrt{t}.$$

Допустим, что для некоторого  $k \geq 1$

$$|f_k|, |\theta_k|, |\varphi_k|, |\psi_k| < 3M_0 H\sqrt{t} L_{k-1} + 2M_0 H\sqrt{t} \sum_{m=0}^{k-1} L_m L_{k-1-m} + M_0 H\sqrt{t} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} L_m L_n L_{k-1-m-n} = L_k,$$

подставляя эти неравенства в (17) - (20) получим

$$|f_{k+1}|, |\theta_{k+1}|, |\varphi_{k+1}|, |\psi_{k+1}| < 3M_0 H\sqrt{t} L_k + 2M_0 H\sqrt{t} \sum_{m=0}^k L_m L_{k-m} + M_0 H\sqrt{t} \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^k L_m L_n L_{k-m-n}.$$

Отсюда можно заключить, что для сходимости рядов (16) сумма их мажорантного ряда  $L = \sum_{k=0}^{\infty} L_k$ , при  $\lambda = 1$ , должна удовлетворять уравнению  $L = L_0 + M_0 H\sqrt{t} (3L + 2L^2 + L^3)$ , которое, очевидно, имеет положительное решение при малых  $M_0 H\sqrt{t}$ , т.е. для малых значений времени  $t$ .

Ограничиваясь двумя приближениями скорости и температуры и воспользовавшись соотношениями (14), (15), можно получить распределения безразмерных коэффициентов поверхностного трения и теплоотдачи:

$$\tau = - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial y} + \int_0^t \int_0^\infty H(f_0(\eta, \tau), \theta_0(\eta, \tau)) G_y^f(y, \eta, t-\tau) d\eta \right\} \Big|_{y=0}, \quad (21)$$

$$\alpha = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = - \left\{ \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \int_0^t \int_0^\infty B(f_0(\eta, \tau), \theta_0(\eta, \tau)) G_y^{P_x}(y, \eta, t-\tau) d\eta \right\} \Big|_{y=0} \quad (22)$$

2. Рассмотрим другую задачу, в которой, в отличие от первой, вместо постоянной проводимости среды основным механизмом ионизации потока будем считать разность температур нагретой поверхности пластины и набегающего потока. С этой целью положим

$$\sigma = \sigma_0 \theta,$$

т.е. допустим, что проводимость среды, принимая свое максимальное значение  $\sigma_0$  на поверхности пластины, будет уменьшаться на протяжении толщины пограничного слоя и вне его станет равным нулю.

В рассматриваемом случае уравнения импульсов и энергии, соответствующие уравнениям (8) и (9), примут вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{v_w}{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + (a-1) \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \theta -$$

$$- N \theta [(a-1)\theta + 1] (u_\infty - f) \equiv C(f(y, t), \theta(y, t)),$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - P_x \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{P_x}{a-1} \cdot \frac{da}{dt} \theta + \frac{P_x v_w}{a} \frac{\partial \theta}{\partial y} -$$

$$- M \theta [(a-1)\theta + 1] (u_\infty - f)^2 \equiv D(f(y, t), \theta(y, t)),$$

а для определения  $\tau$  и  $\alpha$  аналогичным образом получим следующие выражения:

$$\tau = - \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = - \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial y} + \int_0^t d\tau \int_0^\infty C(f_0(r, \tau), \theta_0(r, \tau)) G_y^*(y, r, t-\tau) dr \right\} \Big|_{y=0},$$

$$\alpha = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = - \left\{ \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \int_0^t d\tau \int_0^\infty D(f_0(r, \tau), \theta_0(r, \tau)) G_y^{P_\kappa}(y, r, t-\tau) dr \right\} \Big|_{y=0}$$

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

На рис. 1 и 2 изображены распределения сил трений при разгонном движении ( $U_\infty \sim t$ ,  $P_\kappa = 0.72$ ) непроницаемой пластины в зависимости от времени для разных значений МГД параметра  $N$  и теплового параметра  $\alpha = \frac{T_w}{T_\infty}$ . Влияние магнитного поля на трение, как и для несжимаемой жидкости, различно: при  $\epsilon = const$  с увеличением магнитного поля оно увеличивается, а при переменном  $\epsilon = \epsilon_0 \theta$  трение уменьшается. В отличие от несжимаемой жидкости, отмеченное воздействие магнитного поля на трение сильно зависит от теплового параметра  $\alpha$ : его вклад резко возрастает с возрастанием нагрева пластины. Увеличение  $\alpha$  увеличивает трение и в отсутствии магнитного поля и при фиксированном его значении. Это явление справедливо и для стационарного движения сжимаемой жидкости [4]. Для пористой пластины, при отсосе  $v_w < 0$ , картина изменения трения при  $\epsilon = const$  и при  $\epsilon = \epsilon_0 \theta$  аналогична картине для непроницаемой стенки. Разница состоит в том, что кривые распределения трения сдвинуты вверх, что соответствует увеличению трения на пластине. При вдуве  $v_w > 0$  эти кривые сдвинуты вниз, т.е. трение уменьшается. В отличие от несжимаемой жидкости влияние скоростей



вдува и отсоса на трение также зависит от теплового параметра  $\alpha$ . Оно ослабевает при увеличении нагрева пластины.

Влияние магнитного поля на теплоотдачу зависит от закона проводимости среды (см. рис. 3, 4). При  $\sigma = const$  электромагнитные силы со временем увеличивают коэффициент теплоотдачи, а при переменной проводимости уменьшают его. Вклад воздействия магнитного поля на теплоотдачу увеличивается при увеличении нагрева пластины.

Теплоотдача в обоих случаях законов проводимости увеличивается при отсосе и уменьшается при вдуве. Физический смысл этого явления можно объяснить следующим образом: при отсосе пристеночных нагретых частиц жидкости разность температур между пластиной и находящейся вблизи среды увеличивается, вследствие чего возникающие градиенты температур становятся больше, чем при обтекании непроницаемой пластины. Аналогично, при вдуве нагретых частиц жидкости вблизи пластины вышеупомянутая разность температур уменьшается, что влечет за собой уменьшение температурных градиентов. С увеличением нагрева пластины влияние скоростей отсоса и вдува на теплоотдачу становится менее заметным.

Вычисления произведены на ЭВМ БЭСМ-6 Института прикладной математики ТГУ.

Поступила 10.У.1982

Кафедра механики  
сплошных сред

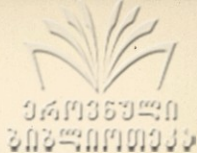


1. Д.В.Шарикадзе. Магнитная гидродинамика, 4, 1968.
2. Д.В.Шарикадзе. Труды Тбилисского университета, А9(157), 1975.
3. F.K.G.Odqvist. Mathem. Zeitschr, 32, 1930.
4. Л.Г.Азмайпарашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

რამდენი ფარადეი

აქვე მოცემულია ერთი უცნაური სიტუაცია  
 არასტაციონარული მატერიალური ნივთიერების  
 ზედა ზედაპირის სივრცული სივრცის  
 ზედა ზედაპირის სივრცის  
 რეგულირება

განვიხილოთ უსასრულო ზედაპირი ფორმის უცნაური სიტუაცია  
 არასტაციონარული გარემოების ერთი სივრცე, როდესაც სიტუაცია  
 უცნაური მატერიალური ნივთიერების სივრცის ერთი სივრცე  
 რამდენიმე უცნაური სივრცის სივრცის. მატერიალური ნივთიერების  
 მატერიალური ნივთიერების სივრცის ერთი სივრცის  
 სივრცის ერთი სივრცის სივრცის ერთი სივრცის  
 სივრცის ერთი სივრცის სივრცის ერთი სივრცის  
 სივრცის ერთი სივრცის სივრცის ერთი სივრცის

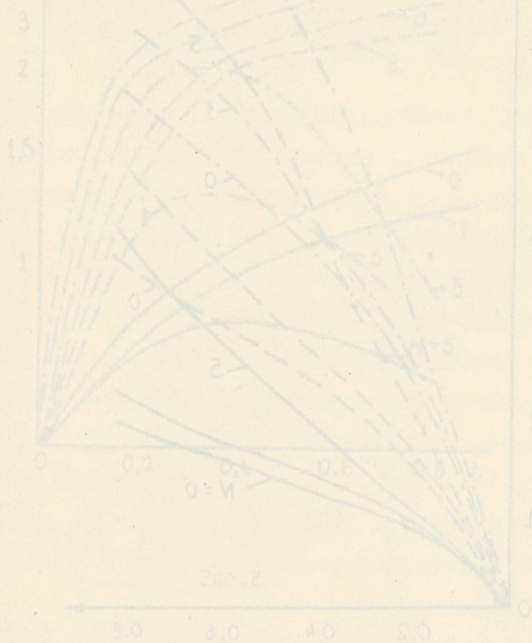


L. Azmaiparashvili

ON CERTAIN NONSTEADY BOUNDARY LAYER PROBLEMS  
OF COMPRESSIBLE FLUIDS OF CONSTANT AND  
VARIABLE-CONDUCTIVITY

Summary

Two problems of nonsteady flow around an infinite porous plate by a compressible fluid of constant and variable-conductivity in the presence of a magnetic field are investigated. Approximate solutions of the problems are obtained.





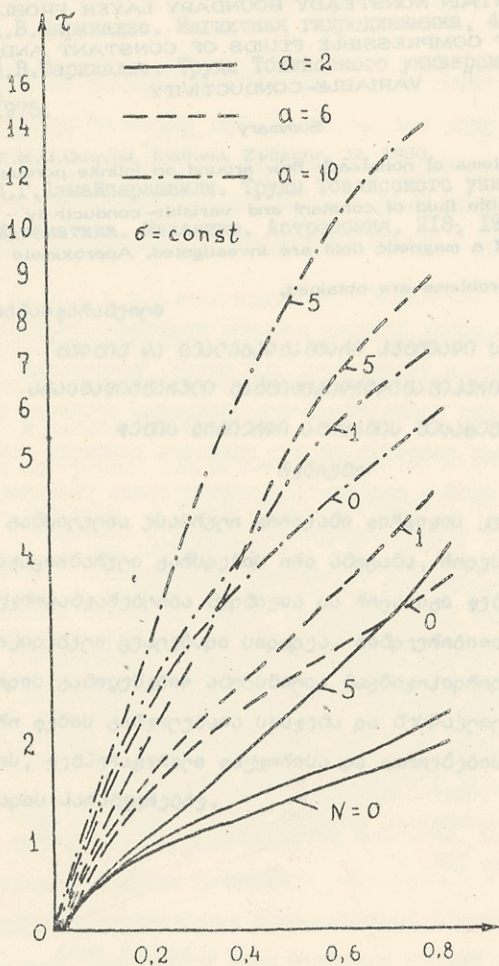


FIG. 1

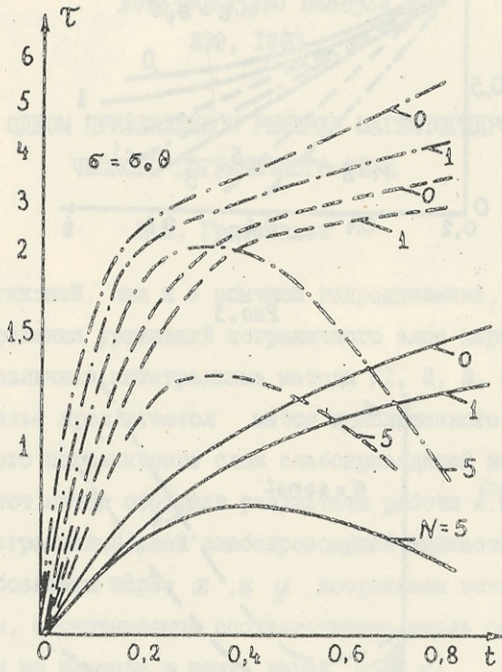


Рис. 2

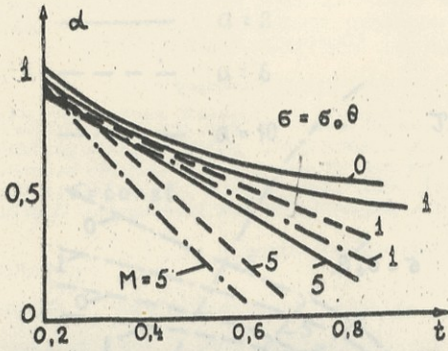


Рис. 3

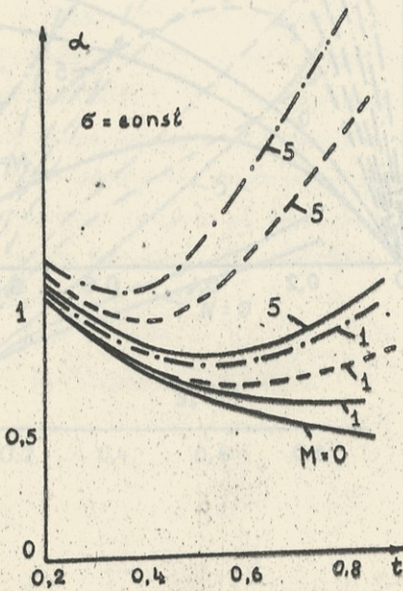


Рис. 4



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

მბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მტკიცებასა და სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის შრომები  
239, 1983

УДК 532

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИ-  
ЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

И.П. Грдзелидзе

В магнитной, как и в обычной гидродинамике, для прибли-  
женного решения уравнений пограничного слоя широко приме-  
няются различные интегральные методы /1, 2, 3, 4/.

В статье предлагается метод приближенного расчета  
ламинарного пограничного слоя слабопроводящей жидкости на  
крыле. Этот метод обобщает результаты работы А.М.Басина  
/5/ на пограничный слой слабопроводящей жидкости.

I. Обозначим через  $x$  и  $y$  координаты точек погранич-  
ного слоя, отсчитываемые соответственно вдоль обтекаемого  
профиля и по нормали к нему, через  $u(x, y)$  - продоль-  
ную скорость,  $U_{\infty}(x, \delta)$  - скорость на внешней границе  
слоя  $y = \delta(x)$ . Внешнее магнитное поле перпендикулярно  
профилю.

Уравнения динамического пограничного слоя на непрово-  
дящем теле при  $\epsilon = const$ ,  $B_y = B_0(x)$  имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(1)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} + m^2 (U_{\infty} - u)$$

где

$$m^2 = \frac{\epsilon B_0^2(x)}{\rho}$$

Функцию  $u(x, y)$  выберем из условия, чтобы она

удовлетворяла граничным условиям:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad v=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty} U'_{\infty}}{\nu} - \frac{m^2 U_{\infty}}{\nu}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{m^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y},$$

при

$$y=\delta \quad u=U_{\infty}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Здесь штрих обозначает производную по  $x$ .

Выберем функцию  $u(x, y)$ , приближенно представляющую семейство профиля скоростей в различных сечениях пограничного слоя, в виде

$$\frac{u(x, y)}{U_{\infty}(x)} = \left[ 1 + \frac{2}{\pi^2} \left( 1 - \sin \frac{\pi y}{2\delta} \right) (\lambda + \rho) \right] \sin \frac{\pi y}{2\delta}, \quad (3)$$

где

$$\lambda = \frac{U'_{\infty}(x) \delta^2(x)}{\nu}, \quad \rho = \frac{m^2(x) \delta^2(x)}{\nu}. \quad (4)$$

Легко показать, что функция (3) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty} U'_{\infty}}{\nu} - \frac{m^2 U_{\infty}}{\nu},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{m^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\rho U_\infty}{4\delta^3} \left[ \frac{\rho^2}{2} + (1+P) \right] - \frac{m^2 U_\infty}{\rho \delta \nu} \left[ \frac{\rho^2}{2} + (1+P) \right] \quad (5)$$

при  $y = \delta$   $u = U_\infty$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\rho^2 U_\infty}{4\delta^2} + \frac{U_\infty}{2\delta^2} (1+P), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

Из (5) следует, что функция (3) удовлетворяет всем граничным условиям (2) за исключением условий

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } y = \delta,$$

которые не удовлетворяются в общем виде.

В нашем случае условием отрыва пограничного слоя является

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{y=0 \\ x=x_s}} = \frac{U_\infty}{\rho \delta} \left[ \frac{\rho^2}{2} + (1+P) \right] = 0. \quad (6)$$

Оно приводит к равенству

$$1+P = - \frac{\rho^2}{2} = \lambda_s, \quad (7)$$

или

$$\frac{1}{\lambda_s} = 1 - \frac{P}{\lambda_s},$$

где  $\lambda_s = - \frac{\rho^2}{2}$ . В дальнейшем будем рассматривать случай, когда  $P = 1,5$ ,

$$\left. \frac{\lambda}{\lambda_s} \right|_{P=1} = 1 - \frac{1}{\lambda_s}, \quad \left. \frac{\lambda}{\lambda_s} \right|_{P=5} = 1 - \frac{5}{\lambda_s} \quad (8)$$

При таком выборе  $\lambda = \lambda_s$  выполняется граничное условие

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_{y=0} = 0,$$

т.е. в точке отрыва удовлетворяются все внутренние граничные условия.

Семейство профилей скорости, даваемое формулой (3), может быть использовано в области пограничного слоя, где параметр  $\lambda$  меняется в пределах.

$$-\lambda_s - P \geq \lambda \geq \lambda_s - P. \quad (9)$$

Характерно, что при  $\lambda = -\lambda_s - P$  выполняется условие  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = 0$ , т.е. выполняются все внешние граничные условия.

2. Будем пользоваться интегральным соотношением пограничного слоя в присутствии внешнего однородного магнитного поля:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{u'_\infty}{u_\infty} (2\delta^{**} + \delta^*) + \frac{m^2 \delta^*}{u_\infty} = \frac{\tau}{\rho u_\infty^2}, \quad (10)$$

где  $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$  - толщина вытеснения

$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$  - толщина потери импульса,

$\tau_0$  - напряжение трения на границе тела.

В нашем случае

$$\tau_0 = \mu \frac{u_\infty}{\delta} v_p, \quad v_p = \frac{\lambda}{2} \left[ \left(1 - \frac{P}{\lambda_s}\right) - \frac{\lambda}{\lambda_s} \right], \quad (12)$$

$$H^* = \frac{\delta^*}{\delta} = 1 - \frac{\alpha}{\pi} - \left( \frac{\lambda}{\lambda_s} + \frac{P}{\lambda_s} \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\pi} \right), \quad (13)$$

$$H^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{\lambda}{\lambda_s} + \frac{P}{\lambda_s} \right) \left( \frac{14}{3\pi} - \frac{3}{\alpha} \right) + \left( \frac{\lambda}{\lambda_s} + \frac{P}{\lambda_s} \right)^2 \left( \frac{8}{3\pi} - \frac{7}{8} \right). \quad (14)$$

Имея в виду, что  $\lambda_s = -\frac{\pi^2}{\alpha}$ , из (12) - (14) будем иметь:

$$b_p = \frac{\pi}{\alpha} \left[ \left( 1 + \frac{2P}{\pi^2} \right) - \frac{\lambda}{\lambda_s} \right], \quad (15)$$

$$H^* = 0,3634 + 0,1366 \left( \frac{\lambda}{\lambda_s} - \frac{2P}{\pi^2} \right), \quad (16)$$

$$H^{**} = -0,0262 \left( \frac{\lambda}{\lambda_s} - \frac{2P}{\pi^2} \right)^2 + 0,0146 \left( \frac{\lambda}{\lambda_s} - \frac{2P}{\pi^2} \right) + 0,1366, \quad (17)$$

$$\tau_0^* = \frac{\tau_0}{\sqrt{\mu \rho u_\infty^2 u'_\infty}} = \frac{b_p}{\sqrt{|\lambda|}}; \quad (18)$$

значения величин  $b_p, H^*, H^{**}, \tau_0^*$  как функций  $\left( \frac{\lambda}{\lambda_s} + \frac{P}{\lambda_s} \right)$  приведены в таблице.

3. Интегральное соотношение пограничного слоя может быть преобразовано к виду

$$\frac{df}{dx} = \frac{u''_\infty}{u_\infty} f + \frac{u'_\infty}{u_\infty} F(x), \quad (19)$$

где

$$f(x) = \lambda H^{**2},$$

$$F(x) = 2\lambda H^{**} [b_p - \lambda(2H^{**} + H^*) - P H^*]. \quad (20)$$





Для практических расчетов воспользуемся простым приемом приближенного интегрирования уравнения (19), разработанным Л.Г.Лойцянским (2,3). Он заключается в следующем: заменим функцию  $F(x)$  линейной функцией

$$F(x) = a - (b+p)f + \varepsilon(f). \quad (21)$$

Затем находим первое приближение решения (19):

$$f = \frac{u'_\infty}{u_\infty^{b+p}} \int_0^x u_\infty^{b+p-1} [a + \varepsilon(f)] d\xi + c \frac{u'_\infty}{u_\infty^{b+p}}. \quad (22)$$

Упомянутые здесь функции

$$\frac{1}{\lambda_s} + \frac{p}{\lambda_s}, \quad f, \quad F, \quad \tau_a^*, \quad H^*, \quad H^{**}, \quad b_p$$

вычислены и приведены в виде таблиц. Вычисления показывают, что с увеличением магнитного поля сила трения на профиле увеличивается.

Здесь  $c$  - произвольная постоянная, которая определяется из условия для  $f$  при  $x=0$ . Уравнение (22) интегрируется методом последовательных приближений.

За первое приближение возьмем

$$f_0 = a \frac{u'_\infty}{u_\infty^{b+p}} \int_0^x u_\infty^{b+p-1} d\xi + c \frac{u'_\infty}{u_\infty^{b+p}}.$$

Следующее приближение будет:

$$f_1 = \frac{u'_\infty}{u_\infty^{b+p}} \int_0^x u_\infty^{b+p-1} [a + \varepsilon(f_0)] d\xi + c \frac{u'_\infty}{u_\infty^{b+p}}.$$



Чтобы первое приближение давало результаты, достаточные для практики, величина  $\varepsilon(f)$  должна быть малой по сравнению с  $a$ .

В работе /5/ за  $a$  и  $b$  выбраны значения  $a = 0,440$   
 $b = 5,85$ . Для этих значений  $a$  и  $b$  наибольшая величина поправки равна:

$$|\varepsilon(f)| \leq 0,04, \quad \rho = 1, \quad \rho = 5.$$

При  $\rho = 1$  для оценки точности решения рассмотрим

$$u_\infty = u_0(1-x), \quad u'_\infty = -u_0, \quad b+\rho = 6,85.$$

Для первого приближения получим

$$f_0 = -0,64a \left[ (1-x)^{-6,85} - 1 \right].$$

А при  $\rho = 5$  имеем

$$f_0 = -0,0406 \left[ (1-x)^{-10,85} - 1 \right].$$

Поступила 15.XII.1981

Кафедра  
дифференциальных и  
интегральных уравнений

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Г.Лойцянский. Механика жидкости и газа, М., 1978.
2. Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя, М., 1974.
3. Л.Г.Лойцянский. Ламинарный пограничный слой, М., 1962.
4. А.Б.Ватякин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах, М., 1970.
5. А.М.Басин. ДАН СССР, т.ХЛ, № I, 1943.

Таблица I (для  $P=1$ )

$\frac{\lambda}{\lambda_s}$	$\lambda$	$H^*$	$H^{**}$	$\nu_p$	$f$	$F$	$\tau_0^*$
1,2026	-7,1372	0,5000	0,1250	0,000	-0,1113	1,2132	0,000
1,0	-5,9348	0,4813	0,1305	0,3182	-0,1009	1,0944	0,1307
0,7	-5,1544	0,4313	0,1374	0,7894	-0,0785	0,9018	0,3875
0,5	-2,9674	0,3940	0,1385	1,1035	-0,0538	0,7483	0,6405
0,2	-1,1870	0,3630	0,1366	1,5748	-0,0222	0,5434	1,4434
0,0	0,000	0,3357	0,1325	1,8889	0,000	0,4116	
-0,2	1,1870	0,3084	0,1265	2,2030	0,0190	0,3133	2,0193
-0,5	2,9674	0,2674	0,1134	2,6743	0,0383	0,2133	1,5521
-0,7	4,1544	0,2401	0,1021	2,9884	0,0432	0,1843	1,4572
-1,0	5,9348	0,1991	0,0811	3,4596	0,0066	0,1711	1,4208

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ  
ԳԱՐՈՅՑՄԱՆԳԱՐՈՅՑՄԱՆ  
ՏԱԳՐԱԿ

Таблица 2 (для Р=5)

$\frac{\lambda}{\lambda_s}$	$\lambda$	$H^*$	$H^{**}$	$\nu\rho$	$f$	$F$	$\tau_0^*$
2,0130	-19,9088	0,5000	0,0781	0,000	-0,1214	1,6501	0,000
1,0	-9,9348	0,3616	0,1305	1,5911	-0,1689	1,5577	0,5049
0,7	-6,9544	0,3206	0,1374	2,0623	-0,1314	1,2638	0,7824
0,5	-4,9674	0,2933	0,1386	2,3764	-0,0904	1,0368	1,0661
0,2	-1,9870	0,2523	0,1366	2,8477	-0,0372	0,7186	2,0182
0,0	0,000	0,2250	0,1325	3,1618	0,0000	0,5398	
-0,2	1,9870	0,1977	0,1265	3,4759	0,0318	0,4028	2,4634
-0,5	4,9674	0,1567	0,1134	3,9472	0,0636	0,2855	1,7708
-0,7	6,9544	0,1294	0,1021	4,2613	0,0723	0,2643	1,6166
-1,0	9,9348	0,0884	0,0811	4,7325	0,0656	0,2911	1,5019



ი. გრძელიძე

მაგნიტოჰიდროდინამიკური სასაბაზრო ფენის ახალი

მახლობელი ამოხსნის შესახებ

რეზიუმე

მახლობელი გამოთვლილია მაგნიტოჰიდროდინამიკური სასაბ-  
ლონი ფენი ფრთაზე, როდესაც სასაბაზრო ფენაში სიჩქარეა პრე-  
ფორმული მონაცემი სახით:

$$\frac{u(x, y)}{u_\infty(x)} = \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \left( 1 - \sin \frac{\pi y}{2\delta} \right) (1 + \rho) \right] \sin \frac{\pi y}{2\delta}$$

I. Grdzeliidze

ON AN APPROXIMATE SOLUTION OF A MAGNETOHYDRODY-  
NAMIC BOUNDARY LAYER

Summary

A magnetohydrodynamic boundary layer on a wing is approx-  
imately calculated when the velocity profiles in the boundary layer  
sections are given in the following form:

$$\frac{u(x, y)}{u_\infty(x)} = \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \left( 1 - \sin \frac{\pi y}{2\delta} \right) (1 + \rho) \right] \sin \frac{\pi y}{2\delta}$$

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მქონე ტრადიციული სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის შრომები

239, 1983

УДК 513

## ОБ ОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ

Е.В.Имерлишвили

Изучение ориентации плоскости в средней школе не предусмотрено программой. Но она настолько переплетается с программным материалом, что сколько-нибудь детальное изучение всего школьного курса геометрии, необходимое для преподавателя, обязательно требует знакомства с ориентацией. Однако на сегодняшний день методическая литература не богата сведениями об ориентации, а имеющийся материал требует больших усилий для последовательного уяснения, что вызвано, главным образом, различной трактовкой у разных авторов. Между тем, вопрос ориентации плоскости можно решить математически до конца четко, вполне просто, если взять "чисто геометрическую" схему, предложенную П.С.Моденовым и А.С. Пархоменко /1/, и изложить ее, не прибегая к определениям "обходов" треугольников, вызывающих путаницу и нарушение четкости.

Начнем с определения ориентированного треугольника.

Определение. Ориентированным треугольником будем называть треугольник с упорядоченными вершинами.



Из определения следует, что каждая вершина в таком треугольнике имеет свой номер—первый, второй, третий; по этой нумерации и записывается треугольник. Например, если имеем ориентированный  $\triangle ABC$ , то  $A$  — первая вершина,  $B$  — вторая,  $C$  — третья; записать этот треугольник в произвольном порядке вершин  $\triangle BAC$ ,  $\triangle CAB$  и т.д.—уже нельзя, т.к. это уже другие ориентированные треугольники, отличные от  $\triangle ABC$ .

Определение. Ориентированные треугольники с одними и теми же вершинами одинаково ориентированы, если вершины одного треугольника получаются от вершин другого круговой перестановкой; если же вершины одного треугольника не могут быть получены круговой перестановкой вершин другого, то тогда треугольники противоположно ориентированы. Так, например, треугольники  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$  одинаково ориентированы, треугольники  $ACB$ ,  $CBA$ ,  $BAC$  также ориентированы одинаково, но каждый треугольник из первого ряда противоположно ориентирован с каждым треугольником второго ряда и обратно.

Определение. Два ориентированных треугольника, отличающиеся только одной вершиной, имеющей в обоих треугольниках один и тот же номер, ориентированы одинаково, если отличающиеся вершины принадлежат одной и той же полуплоскости, которая образована прямой, проходящей через вершину. Если же, отличающиеся вершины принадлежат разным полуплоскостям, то треугольники противоположно ориентированы.

Итак, треугольники  $ABC$  и  $ABD$  ориентированы одинаково (рис. I). Треугольники  $AKB$  и  $AEB$  противо-

положно ориентированы (рис.2).

Приведенные определения дают возможность установить взаимную ориентацию двух треугольников<sup>1)</sup> в тех случаях, когда они отличаются одной вершиной, имеющей один и тот же номер в обоих треугольниках. Если же номера отличающихся вершин разные, то можно заменить один из треугольников одинаково ориентированным треугольником, имеющим с ним одни и те же вершины. Это даст возможность перенумеровать вершины заново, до получения желаемого результата. Например, пусть имеем ориентированные треугольники  $ABC$  и  $BDC$ . Они отличаются друг от друга одной вершиной. Однако отличающиеся вершины имеют разные номера:  $A$  - первый номер,  $D$  - второй. Заменяем  $\triangle BDC$  треугольником  $DCB$ . Эти треугольники имеют одинаковую ориентацию - они имеют одни и те же вершины, получающиеся друг от друга круговой перестановкой. В полученном таким образом ориентированном  $\triangle DCB$  вершина  $D$  имеет уже желаемый первый номер и поэтому  $\triangle ABC$  сравним с  $\triangle DCB$ .

Но треугольники могут отличаться и двумя и тремя вершинами. Для установления их взаимной ориентации надо их соединить цепью ориентировочных треугольников.

Определение. Цепью ориентированных треугольников, соединяющих ориентированные треугольники  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , называется конечная последовательность ориентированных треуголь-

1) "Взаимная ориентация треугольников" употребляется вместо фразы "Треугольники ориентированы одинаково или противоположно".



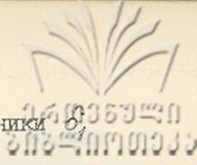


ников, первым элементом которой является  $\delta_1$ , последним  $\delta_2$  и в которой каждые два соседних ориентированных треугольника отличаются друг от друга либо только порядком вершин, либо только одной вершиной, имеющей в обоих треугольниках один и тот же номер.

Два произвольных ориентированных треугольника можно соединить цепью. Покажем это.

Возьмем на плоскости два ориентированных треугольника  $ABC$  и  $PQR$ . Соединим их цепью. Для этого в той же плоскости берем произвольную точку  $M$  и соединим ее с точками  $B$  и  $C$ . Получим ориентированный треугольник  $MBC$ . Он будет вторым элементом цепи. Обратите внимание, что вершина  $M$  написана под первым номером. Это потому, что она заменила вершину  $A$  и заняла ее место. В цепи эти треугольники соседние — они отличаются только одной вершиной, имеющей в обоих треугольниках один и тот же, первый номер. Берем еще произвольную точку  $N \neq M$  и соединим с ней точки  $M$  и  $C$  (рис.3). Получим ориентированный треугольник  $MNC$  — он отличается от  $\triangle MBC$  одной вершиной. Соединим точки  $N$  и  $M$  с точкой  $P$ . Получим ориентированный треугольник  $MNP$ . Теперь достаточно соединить точки  $N$  и  $R$ , чтобы получить  $\triangle RQP$ , с которого переходим к  $\triangle RQP$ , а затем к взятому в начале  $\triangle PQR$ . Итак, ориентированные треугольники  $ABC$  и  $PQR$  соединены цепью (рис.3).

Определение. Если в цепи, соединяющей два ориентированных треугольника  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , число пар соседних треугольников, имеющих противоположную ориентацию, четно, то треугольники  $\delta_1$  и  $\delta_2$  ориентированы одинаково; если же



число таких пар треугольников нечетно, то треугольники  $\delta_1$  и  $\delta_2$  ориентированы противоположно.

Для примера возьмем опять два ориентированных треугольника  $ABC$  и  $PQR$  (рис.4). Эти треугольники отличаются друг от друга всеми тремя вершинами. Для установления их взаимной ориентации соединим их цепью и посчитаем пары тех соседних треугольников, которые имеют противоположную ориентацию. Для облегчения этого процесса на том же рисунке под цепью напомним последовательность полученных ориентированных треугольников цепи, соединив соседние треугольники дугой, под которой напомним знаки "+" и "-", означающие одинаковую или противоположную ориентацию соответственно. Так, например, треугольники  $ABC$  и  $ABM$  (рис.4) отличаются друг от друга вершинами  $A$  и  $M$ , принадлежащими одной и той же полуплоскости, образованной прямой  $AB$ . И поэтому эти треугольники имеют одинаковую ориентацию. Под соединяющей их дугой ставим знак "+"; треугольники  $ABM$  и  $NBM$  отличаются вершинами  $A$  и  $N$ , принадлежащими разным полуплоскостям, образованными прямой  $BM$ , и поэтому они имеют противоположную ориентацию; под дугой, соединяющей эти треугольники, ставим знак "-" и т.д. Сосчитав в полученной цепи число пар соседних треугольников, имеющих противоположную ориентацию (количество минусов!), получаем четное число 4. Значит,  $\triangle ABC$  и  $\triangle PQR$  имеют одинаковую ориентацию.

Но, как видно, способ соединения двух ориентированных треугольников неоднозначен (сравните рисунки 3 и 4). Как же



неоднозначный способ может определить взаимную ориентацию треугольников, которая, очевидно, не должна меняться от вида цепи? Имеет место теорема: Во всех цепях, соединяющих ориентированные треугольники  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , число пар соседних треугольников, имеющих противоположную ориентацию, или всегда четно, или всегда нечетно (доказательство см. в /I/).

Итак, всегда можно установить взаимную ориентацию двух произвольных треугольников. Для этого, в общем случае, соединяем их цепью. Но в ряде случаев можно обойтись и без этого. Возьмем на плоскости  $\triangle ABC$  и его образ  $\triangle A'B'C'$  в некотором перемещении  $f: \triangle A'B'C' = f(\triangle ABC)$ . Допустим, что эти треугольники одинаково ориентированы. Тогда все треугольники плоскости будут иметь одинаковую ориентацию со своими образами при перемещении  $f$ . Имеет место теорема: Если какой-нибудь треугольник  $ABC$  и его образ  $A'B'C'$  при некотором перемещении плоскости имеют одинаковую (противоположную) ориентацию, то одинаковую (противоположную) ориентацию имеют любой другой треугольник плоскости со своим образом при данном перемещении (доказательство см. в /I/).

Из этой теоремы следует, что взаимная ориентация треугольников - свойство, присущее множеству треугольников плоскости, а не одной паре треугольников и зависит от перемещения (преобразования) плоскости. Это положение требует обобщения понятия ориентации на множество всех треугольников плоскости и, тем самым, на плоскость.

Рассмотрим некоторую плоскость  $\mathcal{P}$  и множество  $F$



всех ориентированных треугольников плоскости  $\mathcal{R}$ . Введем соотношения "треугольники одинаково ориентированы" на множестве  $\mathcal{F}$ . Легко показать, что взятое соотношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. В свою очередь, это означает, что соотношение "треугольники одинаково ориентированы" осуществит разбиение множества  $\mathcal{F}$  всех треугольников плоскости  $\mathcal{R}$  на классы эквивалентности. Как видно, будем иметь всего два класса. Обозначим их через  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$ . Каждый из классов будет состоять из одинаково ориентированных треугольников, но каждый треугольник одного класса будет противоположно ориентирован с произвольным треугольником другого класса.

Определение. Плоскость будем называть ориентированной, если на множестве всех ориентированных треугольников этой плоскости установлено соотношение "треугольники одинаково ориентированы".

Определение. Класс эквивалентности по отношению "треугольники одинаково ориентированы" на множестве всех ориентированных треугольников плоскости назовем ориентацией плоскости.

После четкого определения ориентации треугольников и затем ориентации плоскости можно, в порядке упражнения, обобщить вопрос ориентации треугольников на многоугольники. Это, правда, не имеет принципиального значения, однако дает достаточно интересные результаты, конкретно показывающие, как рассматривается ориентация многоугольников на основе ориентации треугольников.



Заранее условимся рассматривать только выпуклые многоугольники.

Определение. Ориентированным многоугольником будем называть многоугольник с упорядоченными вершинами.

Ориентированные треугольники, на минимальное число которых можно разделить ориентированный многоугольник, не нарушая порядка его вершин, будем называть составными треугольниками данного многоугольника.

Поясним это на примере ориентированного четырехугольника  $ABCD$ . Ясно, что всякий четырехугольник можно разбить на два треугольника (самое меньшее!). Таким образом, составными треугольниками могут быть треугольники  $ABC$  и  $ACD$  или треугольники  $ABD$  и  $BCD$ . Причем, когда мы требуем не нарушать порядка вершин, данного в ориентированном четырехугольнике, то имеем в виду следующее: если в данном ориентированном четырехугольнике вершина  $B$  следует за вершиной  $A$ , вершина  $C$  — за  $B$ , а вершина  $D$  — за

$C$ , то в полученных ориентированных треугольниках вершина  $B$  также не должна предшествовать вершине  $A$ ,  $C$  — не должна предшествовать вершине  $B$  и т.д. Это же положение распространяется на все ориентированные многоугольники.

Начнем с рассмотрения ориентированного четырехугольника  $ABCD$ . Составных треугольников будем иметь два:  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$  (рис.5). (Ясно, что не нарушая рассуждений за составные треугольники можно было принять  $\triangle ABD$  и  $\triangle BCD$ , получаемые проведением другой диагонали  $BD$ ). Эти ориентированные треугольники отличаются друг от друга только одной вершиной, имеющей в разных треугольниках разные номера



- вершина  $B$  в  $\triangle ABC$  имеет номер "2", вершина  $D$  в  $\triangle ACD$  - номер "3". Для установления взаимной ориентации этих треугольников соединим их цепью. Получим:  $\triangle ABC, \triangle DC, \triangle ACD$ . Итак,  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$  одинаково ориентированы. Если для наглядности обозначим стрелками направление обхода по контуру четырехугольника и треугольников соответственно порядку их вершин, то мы увидим, что обходы по контурам совершаются везде в одном и том же направлении. Обратите внимание, что при обходе по контурам треугольников их смежную сторону,  $AC$  - диагональ четырехугольника, приходится проходить дважды - один раз в одном, другой раз в противоположном направлении.

Как легко убедиться, положение остается без изменения, если порядок вершин четырехугольника изменить на обратный, т.е. изменить ориентацию четырехугольника на противоположную. Например, взять ориентированный четырехугольник  $DCBA$ . Составными треугольниками могут быть  $\triangle DCB$  и  $\triangle DBA$ . И здесь все три многоугольника будут иметь одинаковое направление обхода по контуру.

Определение. Два четырехугольника одинаково (противоположно) ориентированы, если одна пара составных треугольников, где первый треугольник взят из составных треугольников первого четырехугольника, второй - из составных треугольников второго, ориентированы одинаково (противоположно).

Кстати, из всех 24-х четырехугольников (количество перестановок из четырех элементов  $P_4 = 24$ ), которые имеют одни и те же вершины, только 8 выпуклых.



$ABCD, BCDA, CDA B, DABC;$   
 $BAD C, ADC B, DCBA, CBA D.$

(2)

Из определения вытекает, что в каждом ряду четырехугольники имеют одинаковую ориентацию, тогда как каждый четырехугольник из одного ряда противоположно ориентирован с каждым четырехугольником из другого.

Замечание: Достаточно в четырехугольнике изменить порядок трех вершин на обратный, чтобы изменилась ориентация четырехугольника. Такое изменение переводит четырехугольник из одного ряда в другой. Если, например, в четырехугольнике  $ABCD$  изменить порядок вершин  $B, C, D$  на обратный, получим четырехугольник (2) ряда —  $ADC B$ . Вспомним, что в треугольниках для такого перехода было достаточно изменить порядок двух вершин:  $ABC, BAC$ .

Если также взять ориентированный пятиугольник, например,  $ABCDE$  (рис.6), провести диагонали  $AC$  и  $AD$  и установить взаимную ориентацию полученных ориентированных составных треугольников:  $ABC, ACD, ADE$ , то легко убедиться, что и эти треугольники одинаково ориентированы. Для этого достаточно составить цепь:  $ABC, ADC, ADE$ . Итак, в пятиугольнике все составные треугольники одинаково ориентированы. Если и здесь перейти на обходы по контурам не меняя порядка вершин, то мы увидим, что обход по контуру пятиугольника и всех составных треугольников совершается в одном и том же направлении, причем по диагоналям проходим дважды — один раз в одном, в другой раз в противоположном направлении (рис.6).



Определение. Два пятиугольника одинаково (противоположно) ориентированы, если одна пара составных треугольников, где первый треугольник взят из составных треугольников первого пятиугольника, второй -- из составных треугольников второго, ориентирована одинаково (противоположно).

Из всех 120 пятиугольников, имеющих одни и те же вершины (перестановки из 5 элементов  $P_5 = 120$ ), только десять выпуклых:

$ABCDE, BCDEA, CDEAB, DEABC, EABCD;$   
 $EDCBA, DCBAE, CBAED, BAEDC, AEDCB.$

Для установления ориентации произвольных  $n$ -угольников нет необходимости продолжать рассмотрение многоугольников конкретных видов, достаточно обобщить полученные результаты.

Имеет место утверждение -- во всяком ориентированном многоугольнике все составные треугольники одинаково ориентированы.

Покажем это. Число вершин в многоугольнике обозначим через  $n$  и разделим его диагоналями, выходящими из одной точки, на составные треугольники, получим  $n-2$  ориентированных треугольника:  $\delta_1^s, \delta_2^s, \delta_3^s, \dots, \delta_{n-2}^s$ . Соседние треугольники будут отличаться друг от друга только одной вершиной. Для определения их взаимной ориентации надо соединить эти треугольники попарно цепью. Соединим сначала треугольники  $\delta_1^s$  и  $\delta_2^s$ . В цепи получим три ориентированных треугольника, причем соседние треугольники будут иметь противоположную ориентацию (повторится та же картина, что была





у нас выше, в случае ориентированного четырехугольника). Значит  $\delta_1$  и  $\delta_2$  одинаково ориентированы. Далее рассмотрим треугольники  $\delta_2$  и  $\delta_3$ . И на этот раз все повторится без изменения: опять в цепи будем иметь три треугольника и соседние треугольники будут иметь противоположную ориентацию. Значит  $\delta_2$  и  $\delta_3$  одинаково ориентированы. Отсюда можем заключить, что все три треугольника -  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  - одинаково ориентированы. Затем надо будет сравнить  $\delta_3$  и  $\delta_4$  и т.д. Все дело в том, что этот процесс нигде не может нарушиться, т.е. все пары треугольников будут одинаково ориентированы в силу выпуклости  $n$ -угольника. А из этого следует, что все  $n-2$  треугольника одинаково ориентированы.

Определение. Два ориентированных многоугольника одинаково (противоположно) ориентированы, если одна пара составных треугольников, где первый треугольник взят из составных треугольников первого многоугольника, второй - из составных треугольников второго, одинаково (противоположно) ориентированы.

Интересно также, что обходы по контурам, согласно порядку вершин, совершаются в многоугольнике и в составных треугольниках в одном и том же направлении и при этом по диагоналям многоугольника приходится проходить дважды - один раз в одном, другой раз в противоположном направлении. Эта закономерность очень напоминает известное правило ребер Мебиуса /2/, поэтому назовем ее правилом диагоналей.

Поступила 10. III. 1982

Кафедра обоснования  
и методики математики



1. П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. Геометрические преобразования, М., 1961.
2. Ф.Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II, 1934.
3. А.Ф. Семенович. Виды перемещений пространства, "Математика в школе", 1978, № 6.
4. З.А. Скопец, Л.И. Кузнецова. Введение на плоскости направления и ориентации на основе классификации перемещений, "Математика в школе", 1978, № 5.
5. А.И. Фетисов. Ориентация в пространстве, "Математика в школе", 1971, № 6.

ე. იმერლიშვილი

სიბრტყლის ორიენტაციის შესახებ

რეზიუმე

სტატიაში დარღვნილია სიბრტყლის ორიენტაციის ცნება ორიენტირებულ სამკუთხედად შემოღების იდეის ბუზვად და თანმიმდევრულად გაფარების საფუძველზე.

E. Imershvili

CONCERNING THE ORIENTATION OF A PLANE

Summary

The concept of the orientation of a plane is stated on the basis of an exact and consistent elaboration of the idea of introducing oriented triangles.

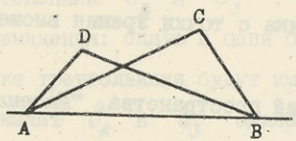


Рис. 1

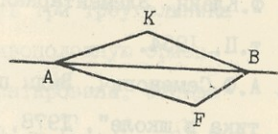
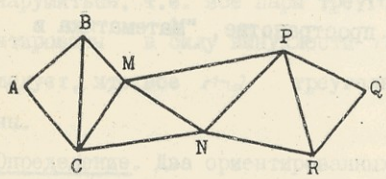
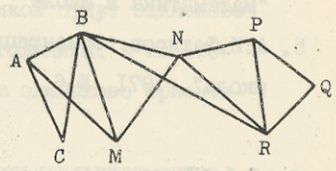


Рис. 2



ABC MBC MNC MNP RNP RQP PQR

Рис. 3



ABC  $\underbrace{+}$  ABM  $\underbrace{-}$  NBM  $\underbrace{+}$  NBR  $\underbrace{-}$  NPR  $\underbrace{+}$  QPR  $\underbrace{-}$  PQR

Рис. 4

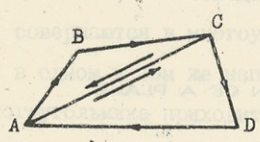


Рис. 5

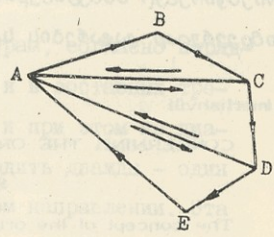


Рис. 6



საქართველოს  
საბიბლიოთეკო-  
არქივთმცოდნეობის  
ინსტიტუტი

УДК 513.73

Сферическое распределение. Э.Д.Алшибая. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

В  $(n+1)$  - мерном аффинном пространстве изучается распределение гиперплоскостных элементов, поле нормалей которого проходит через фиксированную точку пространства. Такое распределение называется сферическим распределением. Выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы распределение было сферическим; устанавливаются некоторые характеристические признаки для такого распределения; определяется характер связности для различных классов сферических распределений; рассматриваются сферическое голономное распределение и аффинная гиперсфера.

Работа выполнена методом Г.Ф.Лаптева. Библиограф. 3 назв.

УДК 511.4

Формулы для числа представлений чисел приведенными недиагональными положительными кватернарными квадратичными формами, принадлежащими одноклассным родам. Р.И.Беридзе. Труды Тбилисского университета, Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Получены формулы для представлений натурального числа всеми приведенными положительными недиагональными квадратичными формами, принадлежащими одноклассным родам дискриминантов: 4, 8, 12, 16, 20, 21, 24, 28, 32, 33, 36, 45, 48, 60 и 64. Библиограф. 4 назв.

УДК 511.

Формулы для числа целых неотрицательных решений линейного диофантова уравнения и неравенства. Э.Т.Самсонадзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Приводятся новые формулы для числа  $P(\ell)$  целых неотрицательных решений диофантова уравнения  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \ell$  и числа  $Q(\ell)$  целых неотрицательных решений диофантова неравенства  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \ell$  ( $a_i > 0, \ell \geq 0$ ).

Библи. 5 назв.

УДК 519.24

Предельное распределение максимального отклонения оценок кривой регрессии. Э.А.Надарая. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Устанавливаются предельные теоремы для максимального отклонения непараметрической оценки кривой регрессии от теоретической. Библи. 4 назв.



УДК 519.2

О сходимости цен при аппроксимации непрерывной схемы Калмана-Бьюси дискретными схемами. В.М.Дочвири. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Изучен вопрос о сведении задачи оптимальной остановки по неполным данным для дискретной схемы Калмана-Бьюси с малым шагом  $\Delta > 0$  к некоторой задаче по полным данным и доказана сходимость соответствующих цен при  $\Delta \rightarrow 0$ . В качестве функции выигрыша рассмотрен полином. Библ. 4 назв.

УДК 519.21

Блокированная двухфазовая система массового обслуживания с меняющейся интенсивностью входящего потока. Г.Л.Арсенишвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Рассматривается двухфазовая система обслуживания, где возможна очередь перед первым прибором, а мест ожидания между приборами нет. Интенсивность входящего потока меняется с  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 < \lambda_1$ ), если длина очереди у первого прибора больше  $\gamma$ .

Если на первой фазе обслуживание закончено, а вторая фаза занята - происходит "блокировка".

Рассмотрен стационарный случай и вычислены вероятности состояний. Библ. 3 назв.



УДК 519.21

Двухфазовая блокированная система массового обслуживания с изменяющейся по правилу "  $s, S$  " интенсивностью входящего потока. Г.Л.Арсенишвили, Н.Ш.Заалишвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Рассматривается блокированная двухфазовая система обслуживания. Входящий поток простейший, а времена обслуживания на фазах распределены по экспоненциальному закону. Первоначально интенсивность поступления требований равна  $\lambda_1$ , до тех пор пока длина очереди перед первым прибором не станет равной  $S$ , после чего интенсивность поступления становится равной  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 < \lambda_1$ ). Интенсивность меняется с  $\lambda_2$  на  $\lambda_1$  при длине очереди меньше или равной  $S$ .

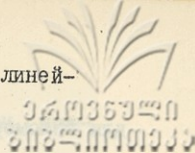
Выписана система дифференциальных уравнений, описывающая систему, вычислены стационарные вероятности. Библиограф. 2 назв.

УДК 512.7

Матричные биавтоматы и треугольное произведение. Н.И. Перанидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Рассматривается специальный матричный язык в задаче декомпозиции линейных автоматов. При этом доказывается ассоциативность треугольного умножения.

Основной результат - единственность разложения линейного биавтомата на неразложимые. Библиограф. 3 назв.



УДК 539.03

Осесимметрический изгиб гибкой кольцевой пластинки с подкрепленными краями. И.А.Зоненашвили, А.Р.Папукашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Итерационным методом нелинейной релаксации изучается влияние эксцентриситета ребер жесткости на упругое равновесие гибкой пластинки, срединная плоскость которой занимает круговое кольцо, ограниченное concentрическими окружностями. Показано, что соответствующим подбором эксцентриситета ребра можно значительно уменьшить максимальные прогибы в пластинке. Библиограф. 7 назв. Табл. 2. Рис. 4.

УДК 517.54

Об одной граничной задаче для голоморфных векторов в случае многосвязной области. Г.А.Капанадзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия.

Рассматривается граничная задача вида

$$\Psi^+[\alpha(t)] = A(t)\Psi^+(t) + B(t)\overline{\Psi^+(t)} + g(t) \quad (I)$$



для голоморфных в многосвязной области векторов

$\varphi(z)$

$\Psi(z)$ .

Выведена одна формула интегрального представления для любых двух голоморфных в многосвязной области векторов и для задачи (I) доказаны теоремы типа Нетера. Библиография 3 назв.

УДК 517.54

Обобщенная граничная задача Гильберта для нескольких неизвестных функций со смещениями. Г.А.Капанадзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Рассматривается граничная задача вида

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-[\alpha(t)] + B(t)\varphi^-[\beta(t)] + l(t) \quad (I)$$

для односвязной области, ограниченной простым замкнутым контуром  $L$  типа Ляпунова.  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  — заданные на контуре  $L$  функции, переводящие  $L$  в самого себя с сохранением направления обхода (рассмотрены и другие случаи).

Для рассмотренной задачи (I) доказаны теоремы типа Нетера. Библиография 8 назв.

УДК 539.03

Влияние нагруженного эксцентричного ребра на деформацию круглой гибкой пластинки. Э.Г.Бурдули. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Рассматривается изгиб круглой гибкой пластинки, укрепленной опорным ребром жесткости. Изучается влияние геометрических (эксцентриситет ребра) и физических (нагрузки ребра) параметров на упруго-деформированное состояние пластинки. Исследование полученных результатов показывает, что соответствующим подбором изгибающих нагрузок на ребро и эксцентриситета ребра можно значительно уменьшить максимальный прогиб пластинки. Библиография. 7 названий. Рис. 3.

УДК 538.4

О некоторых задачах нестационарного МГД пограничного слоя сжимаемой жидкости с постоянной и переменной электропроводностью. Л.Г. Азмайпаралвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Изучены задачи нестационарного МГД пограничного слоя сжимаемой жидкости с постоянной и переменной электропроводностью около бесконечной непроводящей пористой пластины. Показано влияние магнитного поля, проводимости среды, пористости и факторов сжимаемости на трение и теплоотдачу. Библиография. 4 названия.

УДК 532

Об одном приближенном решении магнитогидродинамического пограничного слоя. И.В. Грдзелидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Приближенно рассчитан магнитогидродинамический пограничный слой на крыле, когда профили скоростей в сечениях пограничного слоя даются в виде:

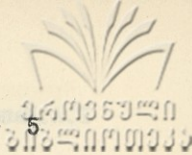
$$\frac{u(x, y)}{u_{\infty}(x)} = \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \left( 1 - \sin \frac{\pi y}{2\delta} \right) (\lambda + \rho) \right] \sin \frac{\pi y}{2\delta}$$

Библ. 5 назв.

УДК 513

Об ориентации плоскости. Е.В.Имерлишвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 239, 1983.

Устанавливается понятие ориентации плоскости на основе четкой и последовательной разработки идеи введения ориентированных треугольников. Библ. 5 назв.



Э.Д. Алшибая. Сферическое распределение.....	5
Р.Н. Беридзе. Формулы для числа представлений чисел приведенными недиагональными положительными кватернарными квадратичными формами, принадлежащими одноклассным родам.....	21
Э.Т. Самсонадзе. Формулы для числа целых неотрицательных решений линейного диофантова уравнения и неравенства.....	36
Э.А. Надарая. Предельное распределение максимального отклонения оценок кривой регрессии..	43
В.М. Дочвири. О сходимости цен при аппроксимации непрерывной схемы Колмана-Бьюси дискретными схемами.....	65
Г.Л. Арсенишвили. Блокированная двухфазовая система массового обслуживания с меняющейся интенсивностью входящего потока.....	77
Г.Л. Арсенишвили, Н.Ш. Заалишвили. Двухфазовая блокированная система массового обслуживания с изменяющейся по правилу " , " интенсивностью входящего потока.....	88
И.Н. Перанидзе. Матричные биавтоматы и треугольное произведение.....	102
И.А. Зоненашвили, А.Р. Папукашвили. Осесимметрический изгиб кольцевой пластинки с подкрепленными краями.....	123



Г.А.Капанадзе. Об одной односторонней граничной задаче для голоморфных векторов в случае многосвязной области.....	135
Г.А.Капанадзе. Обобщенная граничная задача Гильберта для нескольких неизвестных функций со смещениями.....	139
Э.Г.Бурдули. Влияние нагруженного эксцентричного ребра на деформацию круглой гибкой пластинки.....	157
Л.Г.Азмайпарашвили. О некоторых задачах нестационарного МГД пограничного слоя сжимаемой жидкости с постоянной и переменной электропроводностью.....	165
И.П.Грдзелидзе. Об одном приближенном решении магнитогидродинамического пограничного слоя.....	179
Е.В.Имерлишвили. Об ориентации плоскости.....	201



ვ. აღიზიანაძე, სტრუქტურული განაწილება . . . . .	20
რ. ბერიძე. ჭორბუღები რიცხვით წარმოგენათა რაოდენობისათვის დასახელების დაკვირვებით კვალიერნარული არაფრად- გონიერული კვალიერნარული ჭორბუღით, რაოდენობის კვალი- ერნარული კვალიერნარული ჭორბუღით, რაოდენობის კვალი- ერნარული კვალიერნარული ჭორბუღით . . . . .	35
ვ. საბინაძე. ჭორბუღები დიფერენციალური წარმოგენათა და უფროსობის მიხედვით არაფრადგონიერული დიფერენციალური წარმოგენათა . . . . .	41
ვ. ნაძარაძე. რეგრესიის წინააღმდეგობის შეფასების მათემატიკური გა- დასახელების დიფერენციალური კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული . . . . .	64
ბ. დიმიტრიძე. ჭორბუღების კვალიერნარული შეფასების კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული . . . . .	75
ვ. ანდრონიკიძე. მათემატიკური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური . . . . .	86
ვ. ანდრონიკიძე, ნ. ბაბიანიძე. მათემატიკური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური . . . . .	100
ნ. კვიციანიძე. მათემატიკური დიფერენციალური და სამკვლევარ კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული კვალიერნარული . . . . .	122
ნ. ბონინაძე, ა. ანდრონიკიძე. მათემატიკური-დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური . . . . .	131
ვ. კვიციანიძე. მათემატიკური დიფერენციალური კვალიერნარული დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური . . . . .	138
ვ. კვიციანიძე. მათემატიკური დიფერენციალური კვალიერნარული დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური დიფერენციალური . . . . .	

Թոժ . . . . .	156
Չ.ՆՄԻՐԱՅԻՆ, ԲԱՋՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՂՍԵՎԻՉՆԻԿԻ ՍՈՒՅՆՑԻՆ ՔՈՒՆՆԵՐ ԵՎ՝ ԼՂՆԱ ԾՈՂՆԻԿԻ ՔՐԻՍՏԻ ԶՈՐԶՈՒՄԻՆ ԲՈՋՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՂՍԵՎԻՉՆԻԿԻ . . . . .	162
Լ.ՆԱԾԻՆԻՍԻԱՆԻՍԻԱՆ, ԾՄԵՐԻՉ ԲԱ ԸՅՎԱԼԵԾԱՐԺԱԾԻՎԱԿԻ ԿՐԻՍՏՈՍԻ ՍՈՒՅՆԵՐԻՆ ԱՐՎԱՏՅԱԿՈՒՆԱՐՄԻ ԾԱԳՆԻՉՔՅՈՐԻՐՈՒՄԻՆ՝ ԾՈՂՄԻՆ ՍԱՍԱԾԼՂՐԻՔ ԶՂՆԻՆ ԾՈՂՄԻՆԻ ԱԾՈՍՆԻՆ ՄԵՍԱԽԵՐԸ . . . . .	174
Ո.ՔՐԺՅՈՒՄԻ, ԾԱԳՆԻՉՔՅՈՐԻՐՈՒՄԻՆ ԾՈՂՄԻՆ ՍԱՍԱԾԼՂՐԻՔ ԶՂՆԻՆ ՄԻՆ ԾՈՒԽԼՈՂՄԻՆԻ ԱԾՈՍՆԻՆ ՄԵՍԱԽԵՐԸ . . . . .	188
Չ.ՈՒՄԻՐԻՆԻՍԻԱՆ, ՍՈՒՐԻՉՅԱՆ ՌՐԻՉԵՎՅԱԿԻՆ ՄԵՍԱԽԵՐԸ . . . . .	201



CONTENTS

E. Alshibaia, Spheric distribution . . . . . 20

R. Beridze, Formulae for the number of representations of integers by reduced positive nondiagonal quaternary quadratic forms belonging to one-class . . . . . 35

E. D. Samsonadze, Formulae for the number of non-negative integer solutions of linear Diophantine equation and inequality, . . . . . 42

E. Nadaraya, Asymptotic distribution of the maximum deviation of an estimate of a regression curve . . . . . 64

V. Dochviri, On the convergence of costs in the case of approximation of a continuous scheme of Kalman-Bucy by discrete schemes . . . . . 76

G. Arsenishvili, A two-phase block queueing system with changing intensity of the input flow . . . . . 87

G. Arsenishvili, N. Zaalishvili, A two-phase block queueing system according to the "s, S2 rule with changing input . . . . . 101

I. Peranidze, Matrical cbiautomata and tringular product . . . . . 122

I. Zonenashvili, A. Papukashvili, Axial symmetric bedding of a circular ring with supporting ribs . . . . . 132

G. Kapanadze, On one - sided boundary value problem for analytic vectors in the case of multidimensional domain . . . . . 138

G. Kapanadze, A generalized Hilbert problem for several unknown functions with shifts . . . . . 156

E. Burduli, The effect of a loaded eccentric rib on the deformation of a round flexible plate . . . . . 163

L. Azmaiparashvili, On certain nonsteady boundary layer problems of compressible fluids of constant and variable-conductivity . . . . . 175





I.Grdzelidze . On an approximate solution of a magnetohydrodynamic  
mic boundary layer . . . . . 188

E.Imerlishvili. Concerning the orientation of a plane . . . . . 201

Редактор издательства Л.И.Абуашвили

Подписано в печать 27.05.83 УЭ 0383I

Бумага 60 x 84 I/16 Усл.-печ.л.13,5, Уч.-изд.л.7,05

Тираж 300 Заказ 2003

Цена 70 коп.

Издательство Тбилисского университета

Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, 14

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028,  
ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14

Типография АН Груз.ССР, Тбилиси, 380060,

ул.Кутузова, 19

საუ. სსრ ბეგნიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი 380060,  
კუტუზოვის ქ. №19

