თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
251

ISSN 0376—2637

კიბერნეტიკა • გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА • ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS • APPLIED MATHEMATICS

5

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1984

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
ტ. 251 V.

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS
APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1984 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 251

КИБЕРНЕТИКА
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси. 1984

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК

Д.Г.Перадзе

В /1/ на основе теории оболочек И.Н.Векуа получена нелинейная система уравнений равновесия упругой пластинки с учетом конечных прогибов. Если предполагать, что пластинка не претерпевает больших тангенциальных деформаций, то соответствующая система уравнений может быть представлена в виде /2/

$$\frac{\partial \overset{\circ}{P}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{\circ}{P}_{12}}{\partial x_2}=-f_1,$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{P}_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{\circ}{P}_{22}}{\partial x_2}=-f_2,$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{P}_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{\circ}{P}_{32}}{\partial x_2}=-f_3,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \overset{1}{P}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{1}{P}_{12}}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{H}\left(\overset{\circ}{P}_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\overset{\circ}{P}_{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\overset{\circ}{P}_{13}\right)=-f_4,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \overset{1}{P}_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \overset{1}{P}_{22}}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{H}\left(\overset{\circ}{P}_{21}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\overset{\circ}{P}_{22}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\overset{\circ}{P}_{23}\right)=-f_5.$$

где $\overset{\circ}{P}_{ij}$ и $\overset{1}{P}_{ij}$ – моменты компонентов тензора напряжения, которые на основании соотношений, вытекающих из закона Гука, выражаются через искомые функции $u_k(x_1,x_2)$, $k=1,2,\dots,5$,

$$\overset{0}{P}_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{H}\left[(\lambda+2\mu)u_4\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\lambda u_5\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right],$$

$$\overset{0}{P}_{12}=\overset{0}{P}_{21}=\mu\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{1}{H}\left(u_4\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_5\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right],$$

$$\overset{0}{P}_{22}=\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{1}{H}\left[\lambda u_4\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)u_5\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right],$$

$$\overset{0}{P}_{13}=\overset{0}{P}_{31}=\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{1}{H}u_4\right),\quad \overset{0}{P}_{23}=\overset{0}{P}_{32}=\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{1}{H}u_5\right),$$

$$\overset{1}{P}_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_4}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_5}{\partial x_2},\quad \overset{1}{P}_{12}=\overset{1}{P}_{21}=\mu\left(\frac{\partial u_4}{\partial x_2}+\frac{\partial u_5}{\partial x_1}\right),$$

$$\overset{1}{P}_{22}=\lambda\frac{\partial u_4}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_5}{\partial x_2},$$

f_k – заданная функция переменных x_1 и x_2, $k=1,2,\dots,5$, представимая при помощи компонентов внешней поверхностной нагрузки и объемной силы, λ и μ – постоянные Ламе, H – половина толщины пластинки.

Допустим, что $\Omega=\{x\,|\,0\le x_1,\ x_2\le 1\}$ – область, занимаемая пластинкой, Γ – граница Ω.

Рассмотрим случай пластинки, жестко закрепленной по контуру

$$u_k\Big|_\Gamma=0,\quad k=1,2,\dots,5. \tag{2}$$

Построим на области Ω сетку с шагами h_1 и h_2 вдоль осей x_1 и x_2 и обозначим

$$\bar\omega=\{x\,|\,x=(i_1h_1,\ i_2h_2),\ i_s=0,1,\dots,N_s,\ N_sh_s=1\},$$

$$\omega=\{x\,|\,x=(i_1h_1,\ i_2h_2),\ i_s=1,2,\dots,N_s-1\},$$

$$\gamma_i=\{x\,|\,x\in\bar\omega,\ x_i=0 \quad \text{или} \quad x_i=1,\ 0\le x_j\le 1;\ i\ne j\},$$

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2,$$

$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ – вектор, координаты которого могут принимать значения ± 1. Положим

$$\overset{0}{P}_{11\sigma}=(\lambda+2\mu)\partial_{\sigma_1}y_1+\lambda\partial_{\sigma_2}y_2-\frac{1}{H}\left[(\lambda+2\mu)y_4\partial_{\sigma_1}y_3+\lambda y_5\partial_{\sigma_2}y_3\right],$$

$$\overset{0}{P}_{12\sigma}=\overset{0}{P}_{21\sigma}=\mu\left[\partial_{\sigma_2}y_1+\partial_{\sigma_1}y_2-\frac{1}{H}\left(y_4\partial_{\sigma_2}y_3+y_5\partial_{\sigma_1}y_3\right)\right],$$

$$\overset{0}{P}_{22\sigma}=\lambda\partial_{\sigma_1}y_1+(\lambda+2\mu)\partial_{\sigma_2}y_2-\frac{1}{H}\left[\lambda y_4\partial_{\sigma_1}y_3+(\lambda+2\mu)y_5\partial_{\sigma_2}y_3\right],$$

$$\overset{0}{P}_{13\sigma}=\overset{0}{P}_{31\sigma}=\mu\left(\partial_{\sigma_1}y_3+\frac{1}{H}y_4\right),\quad \overset{0}{P}_{23\sigma}=\overset{0}{P}_{32\sigma}=\mu\left(\partial_{\sigma_2}y_3+\frac{1}{H}y_5\right),$$

$$\overset{1}{P}_{11\sigma}=(\lambda+2\mu)\partial_{\sigma_1}y_4+\lambda\partial_{\sigma_2}y_5,\quad \overset{1}{P}_{12\sigma}=\overset{1}{P}_{21\sigma}=\mu\left(\partial_{\sigma_2}y_4+\partial_{\sigma_1}y_5\right),$$

$$\overset{1}{P}_{22\sigma}=\lambda\partial_{\sigma_1}y_4+(\lambda+2\mu)\partial_{\sigma_2}y_5,$$

где

$$\partial_{\sigma_i}y=\begin{cases}y_{x_i}, & \sigma_i=+1\\ y_{\bar{x}_i}, & \sigma_i=-1.\end{cases}$$

Для определенных на $\bar{\omega}$ сеточных функций v и w введем скалярное произведение

$$(v,w)=\frac{1}{4}\sum_{\sigma}(v,w)_{\sigma},$$

где

$$(v,w)_{\sigma}=((v,w)_{\sigma_1},1)_{\sigma_2},$$

$$(v,w)_{\sigma_i}=\begin{cases}h_i\sum\limits_{j_i=0}^{N_i-1}v_{j_1j_2}w_{j_1j_2}, & \sigma_i=+1,\\ h_i\sum\limits_{j_i=1}^{N_i}v_{j_1j_2}w_{j_1j_2}, & \sigma_i=-1.\end{cases}$$

Обозначим через G линейное пространство сеточных вектор-функций $y=(y_1,y_2,\dots,y_5)$, определенных на $\bar{\omega}$ со скалярным произведением $(v,w)=\sum\limits_{k=1}^{5}(v_k,w_k)$ и нормой $\|v\|=(v,v)^{1/2}$ и удовлетворяющих граничному условию

$$y\big|_{\gamma}=0.$$

Для вектор-оператора $D=(D_1, D_2, \dots, D_5)$ и вектор-функции $y=(y_1, y_2, \dots, y_5)$ обозначим $(D_1 y_1, D_2 y_2, \dots, D_5 y_5)$ через Dy и положим $(Dv, w)=\sum_{k=1}^{5}(D_k v_k, w)$, $v, w \in G$. Если D_k – самосопряженный положительный оператор, $k=1,2,\dots,5$, то пусть $\|y\|_D=(Dy,y)^{1/2}$, а G_D означает соответствующее энергетическое пространство.

Для определенных на ω сеточных вектор-функций $v=(v_1, v_2, \dots, v_5)$ и $w=(w_1, w_2, \dots, w_5)$ обозначим сумму $h_1 h_2 \sum_{k=1}^{5}\sum_{i_1=1}^{N-1}\sum_{i_2=1}^{N-1} v_{k i_1 i_2} w_{k i_1 i_2}$ через $(v, w)_0$.

Сеточную вектор-функцию $y=(y_1, y_2, \dots, y_5) \in G$ определим как приближенное решение задачи (I) – (2), если выполняется сумматорное тождество

$$\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\Big(\lambda\big(\partial_{\sigma_1}y_1+\partial_{\sigma_2}y_2-\frac{1}{H}y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\frac{1}{H}y_5\partial_{\sigma_2}y_3\big)\big(\partial_{\sigma_1}\eta+\partial_{\sigma_2}\eta_2-\frac{1}{H}\eta_4\partial_{\sigma_1}y_3-\frac{1}{H}\eta_5\partial_{\sigma_2}y_3\big)+\mathring{P}_{12\sigma}\big(\partial_{\sigma_2}\eta_1+\partial_{\sigma_1}\eta_1-\frac{1}{H}\eta_4\partial_{\sigma_2}y_3-\frac{1}{H}\eta_5\partial_{\sigma_1}y_3\big)+$$
$$+\mathring{P}_{31\sigma}\big(\partial_{\sigma_1}\eta_3+\frac{1}{H}\eta_4\big)+\mathring{P}_{32\sigma}\big(\partial_{\sigma_2}\eta_3+\frac{1}{H}\eta_5\big)+2\mu\big(\partial_{\sigma_1}y_1-\frac{1}{H}y_4\partial_{\sigma_1}y_3\big)\big(\partial_{\sigma_1}\eta-\frac{1}{H}\eta_4\partial_{\sigma_1}y_3\big)+2\mu\big(\partial_{\sigma_2}y_2-\frac{1}{H}y_5\partial_{\sigma_2}y_3\big)\big(\partial_{\sigma_2}\eta_2-\frac{1}{H}\eta_5\partial_{\sigma_2}y_3\big)+\frac{\lambda+\mu}{3}\big(\partial_{\sigma_1}y_4+$$
$$+\partial_{\sigma_2}y_5\big)\big(\partial_{\sigma_1}\eta_4+\partial_{\sigma_2}\eta_5\big)+\frac{\mu}{3}\big(\partial_{\sigma_1}y_4\partial_{\sigma_1}\eta_4+\partial_{\sigma_2}y_4\partial_{\sigma_2}\eta_4+\partial_{\sigma_1}y_5\partial_{\sigma_1}\eta_5+\partial_{\sigma_2}y_5\partial_{\sigma_2}\eta_5\big),1\Big)_\sigma=(\varphi,\eta)_0, \qquad (3)$$

$$\forall \eta=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5) \in G,$$

которое получится, если k-ое уравнение системы (I) умножим на $-\vartheta_k(x_1, x_2)$, $k=1,2,\dots,5$, $\vartheta_k\big|_\Gamma=0$, сложим соответствующие равенства и, учитывая (2), проинтегрируем по области Ω, затем заменим дифференциальные выражения разностными, интегралы суммами, а функции u_k, v_k и f_k сеточными функциями

y_k, η_k и φ_k. $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5)$.

Из сумматорного тождества (3) получим систему разностных уравнений, которую запишем в операторном виде

$$\Lambda y = \varphi. \tag{4}$$

Оператор Λ определен билинейной формой $(\Lambda y, \eta)$, равной левой части (3).

Чтобы получить явный вид, например, первого уравнения системы (4), соответствующего точке $x_0 \in \omega$, положим в (3)

$$\eta_1 = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq x_0, \\ 1/h_1 h_2 , & \quad x = x_0. \end{cases}$$

Остальные компоненты η_k тождественно равны нулю.

В дальнейшем неоднократно пользуемся неравенством

$$\| y \| \leq c \|y\|_R ,$$

где $R = (R_1, R_2, \dots, R_5)$, $R_k y_k = -y_{k\bar{x}_1 x_1} - y_{k\bar{x}_2 x_2}$, $c = const$, выполняемым для любой сеточной вектор-функции y из G, ε – неравенством, формулами суммирования по частям и неравенством Коши-Буняковского для сумм.

Лемма. Справедливы неравенства

$$(\Lambda y - \Lambda \bar{y},\ y - \bar{y}) \geq c_0 \|y - \bar{y}\|_R^2 , \tag{5}$$

$$(R^{-1}(\Lambda y - \Lambda \bar{y}),\ \Lambda y - \Lambda \bar{y}) \leq c_1 \|y - \bar{y}\|_R^2 , \tag{6}$$

$$\forall y,\ \bar{y} \in S_r = \{ y \mid y \in G,\ \|y\|_R \leq r \},$$

причем постоянные c_0 и r связаны соотношениями

$$0 < \xi < 1, \tag{7}$$

$$\xi \left(2 + \frac{c^2}{H^2 (1 - \xi)} \right) \leq \frac{1}{3}, \tag{8}$$

$$\frac{12(\lambda+2\mu)}{\mu}\left(\frac{c\kappa}{H}\right)^4+\frac{4}{5}+\frac{12(\lambda+2\mu)}{\mu}\left(\frac{c\kappa}{H}\right)^2\leq\frac{c_0}{\lambda+2\mu}\,, \qquad (9)$$

где $\xi=\frac{c_0}{\mu}\left(1+8\left(\frac{c\kappa}{H}\right)^2\right)$,

а $c_1^{1/2}=4\mu\max{}^2\left(1,\frac{c}{H}\right)+2(\lambda+3\mu)\left(\frac{1}{3}+\sqrt{2}\left(1+\frac{4c\kappa}{H}\right)\max\left(1,\frac{\sqrt{2}c\kappa}{H}\right)\right)$. (10)

Доказательство. В пространстве G скалярно умножим разность $\Lambda y-\Lambda\bar{y}$ на $y-\bar{y}$, где $y,\bar{y}\in S_\kappa$. После преобразований будем иметь

$$(\Lambda y-\Lambda\bar{y},\,y-\bar{y})=I_{11}+I_{12}+I_{13}, \qquad (11)$$

где

$$I_{11}=\frac{1}{4}\sum_\sigma\Big(\frac{1}{\mu}\big[(\mathring{P}_{31\sigma}-\ddot{P}_{31\sigma})^2+(\mathring{P}_{32\sigma}-\ddot{P}_{32\sigma})^2\big]+\frac{\lambda}{3}\big[(\partial_{\sigma_1}y_4-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_4)+(\partial_{\sigma_2}y_5-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_5)\big]^2+\frac{2\mu}{3}\big[(\partial_{\sigma_1}y_4-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_4)^2+(\partial_{\sigma_2}y_5-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_5)^2\big]+\frac{\mu}{3}\big[(\partial_{\sigma_2}y_4-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_4)+(\partial_{\sigma_1}y_5-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_5)\big]^2,1\Big)_\sigma,$$

$$I_{12}=\frac{1}{4}\sum_\sigma\Big(\frac{1}{2\mu}(\mathring{P}_{21\sigma}-\ddot{P}_{21\sigma})^2+\mu\big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_1)-\frac{1}{H}(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar{y}_4\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)\big]^2+\mu\big[(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_2)-\frac{1}{H}(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar{y}_5\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3)\big]^2,1\Big)_\sigma,$$

$$I_{13}=\frac{1}{4}\sum_\sigma\Big(\frac{1}{2\mu}(\mathring{P}_{21\sigma}-\ddot{P}_{21\sigma})^2+\lambda\big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_1)+(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_2)-\frac{1}{H}(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar{y}_4\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)-\frac{1}{H}(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar{y}_5\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3)\big]^2+\mu\big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_1)-\frac{1}{H}(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar{y}_4\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)\big]^2+\mu\big[(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_2)-\frac{1}{H}(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-y_5\partial_{\sigma_2}y_3)\big]^2+$$
$$+\frac{1}{H}(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)\big[(\mathring{P}_{11\sigma}\bar{y}_4-\ddot{P}_{11\sigma}y_4)+(\mathring{P}_{21\sigma}\bar{y}_5-\ddot{P}_{21\sigma}y_5)\big]+$$
$$+\frac{1}{H}(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3)\big[(\mathring{P}_{21\sigma}y_4-\ddot{P}_{21\sigma}y_4)+(\mathring{P}_{22\sigma}\bar{y}_5-\ddot{P}_{22\sigma}y_5)\big],1\Big)_\sigma,$$

$\overset{\circ}{P}_{ij\sigma}$ определяется аналогично $\overset{\circ}{P}_{ij\sigma}$.

Обозначим $e=\left(\frac{c\mu}{H}\right)^2$ и введем параметр $a=\frac{c^2c_0}{\mu+4c_0(1+2e)}$. Ясно, что $a\,\overline{\in}\,(0,\infty)$, если $c_0\leq 0$, что в силу (7) невозможно, или если $c_0\leq\frac{\mu}{4(1+2e)}$. Но при $c_0=\frac{\mu}{4(1+8e)}$, т.е. когда $\xi=\frac{1}{4}$, неравенство (8) не выполняется и, кроме того, левая часть его, как функция переменной $\xi\in(0,1)$, возрастает. Поэтому $a\in(0,\infty)$. Справедливо равенство $c_0=\frac{\mu a}{c^2+4a(1+2e)}$.

Легко проверить, что

$$\ell\equiv\frac{a(1+8e)}{c^2+2a(1+4e)}+\frac{2a(1+4e)}{H^2}\geqslant\frac{a(1+8e)}{c^2+4a(1+2e)}+\frac{2a(1+2e)}{H^2}=$$

$$=\xi+\frac{1}{2H^2}\left(\frac{\mu a}{c_0}-c\right)\geqslant\xi+\frac{c^2}{2H^2}\left(\frac{1}{1-\xi}-1\right)=\xi\left(1+\frac{c^2}{2H^2(1-\xi)}\right).$$

Пусть $\ell\leq\frac{1}{6}$. Это условие гарантирует выполнение (8).

Оценим первое слагаемое в правой части (II).

$$\begin{aligned}
I_{11}\geqslant\frac{1}{4}\sum_\sigma\Big(&\Big[(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)+\frac{1}{H}(y_4-\bar y_4)\Big]^2+\Big[(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar y_3)+\frac{1}{H}(y_5-\bar y_5)\Big]^2+\\
&+\frac{1}{3}\Big[(\partial_{\sigma_1}y_4-\partial_{\sigma_1}\bar y_4)^2+(\partial_{\sigma_2}y_4-\partial_{\sigma_2}\bar y_4)^2+(\partial_{\sigma_1}y_5-\partial_{\sigma_1}\bar y_5)^2+(\partial_{\sigma_2}y_5-\partial_{\sigma_2}\bar y_5)^2\Big],1\Big)_\sigma\geqslant\\
\geqslant\frac{\mu}{4}\sum_\sigma\Big(&\Big[(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)+\frac{1}{H}(y_4-\bar y_4)\Big]^2+\Big[(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar y_3)+\frac{1}{H}(y_5-\bar y_5)\Big]^2+\\
&+\left(\frac{a(1+8e)}{c^2+2a(1+4e)}+\frac{1}{6}\right)\Big[(\partial_{\sigma_1}y_4-\partial_{\sigma_1}\bar y_4)^2+(\partial_{\sigma_2}y_4-\partial_{\sigma_2}\bar y_4)+\\
&+(\partial_{\sigma_1}y_5-\partial_{\sigma_1}\bar y_5)^2+(\partial_{\sigma_2}y_5-\partial_{\sigma_2}\bar y_5)^2\Big]+\frac{2a(1+4e)}{c^2H^2}\Big[(y_4-\bar y_4)+(y_5-\bar y_5)^2\Big],1\Big)_\sigma\geqslant\\
\geqslant\frac{\mu}{4}\sum_\sigma\Big(&\frac{2a(1+4e)}{c^2+2a(1+4e)}\Big[(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2+(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar y_3)\Big]+\frac{a}{c^2+2a(1+4e)}\Big[(\partial_{\sigma_1}y_4-\\
&-\partial_{\sigma_1}y_4)^2+(\partial_2y_4-\partial_{\sigma_2}\bar y_4)^2+(\partial_{\sigma_1}y_5-\partial_{\sigma_1}\bar y_5)^2+(\partial_{\sigma_2}y_5-\partial_{\sigma_2}\bar y_5)^2\Big]+\\
&+\left(\frac{8ae}{c^2(c^2 2a(1+4e))}+\frac{1}{6c^2}\right)\Big[(y_4-\bar y_4)^2+(y_5-\bar y_5)^2\Big],1\Big)_\sigma.
\end{aligned}\tag{I2}$$

Ниже потребуются соотношения типа

$$\sum_{\sigma}\left((y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2,1\right)_\sigma=\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\Big([(y_4+\bar y_4)(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)+$$

$$+(y_4-\bar y_4)(\partial_{\sigma_1}y_3+\partial_{\sigma_1}\bar y_3)]^2,1\Big)_\sigma\le 2eH^2\sum_{\sigma}\left((\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2+\frac{1}{c^2}(y_4-\bar y_4)^2,1\right)_\sigma .$$

Имеем

$$I_{12}+\frac{2\mu a e}{c^2+2a(1+4e)}\sum_{\sigma}\Big((\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2+(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar y_3)^2+\frac{1}{c^2}[(y_4-\bar y_4)^2+$$

$$+(y_5-\bar y_5)^2],1\Big)_\sigma\ge\frac{\mu}{4}\sum_{\sigma}\Big(\frac{1}{2\mu^2}(\overset{\circ}{P}_{21\sigma}-\overset{\circ\circ}{P}_{21\sigma})^2+[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar y_1)-\frac{1}{H}(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-$$

$$-\bar y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)]^2+[(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar y_2)-\frac{1}{H}(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar y_5\partial_{\sigma_2}\bar y_3)]^2+$$

$$+\frac{2a}{H^2(c^2+2a(1+4e))}\Big\{(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)+(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar y_5\partial_{\sigma_2}\bar y_3)^2+ \qquad (I3)$$

$$+\frac{1}{2}[(y_4\partial_{\sigma_2}y_3-\bar y_4\partial_{\sigma_2}\bar y_3)+(y_5\partial_{\sigma_1}y_3-\bar y_5\partial_{\sigma_1}y_3)]^2\Big\},1\Big)_\sigma\ge$$

$$\ge\frac{\mu a}{2(c^2+4a(1+2e))}\sum_{\sigma}\Big((\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar y_1)^2+(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar y_2)^2+\frac{1}{2}[(\partial_{\sigma_2}y_1-\partial_{\sigma_2}\bar y_1)+$$

$$+(\partial_{\sigma_1}y_2-\partial_{\sigma_1}\bar y_2)]^2,1\Big)_\sigma\ge\frac{\mu a}{4(c^2+4a(1+2e))}\sum_{\sigma}\Big((\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar y_1)^2+$$

$$+(\partial_{\sigma_2}y_1-\partial_{\sigma_2}\bar y_1)^2+(\partial_{\sigma_1}y_2-\partial_{\sigma_1}\bar y_2)^2+(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar y_2)^2,1\Big)_\sigma .$$

Прежде чем оценить I_{13}, приведем некоторые неравенства.

$$(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)(\overset{\circ}{P}_{11\sigma}\bar y_4-\overset{\circ\circ}{P}_{11\sigma}y_4)=\frac{1}{2}(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)[(\overset{\circ}{P}_{11\sigma}-\overset{\circ\circ}{P}_{11\sigma})(y_4+\bar y_4)-$$

$$-(\overset{\circ}{P}_{11\sigma}+\overset{\circ\circ}{P}_{11\sigma})(y_4-\bar y_4)]\le\frac{1}{4}\Big[(a_1+a_2)(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2+\frac{2}{a_1}(\overset{\circ}{P}_{11\sigma}-\overset{\circ\circ}{P}_{11\sigma})^2(y_4^2+$$

$$+\bar y_4^2)+\frac{2}{a_2}(\overset{\circ}{P}{}^2_{11\sigma}+\overset{\circ\circ}{P}{}^2_{11\sigma})(y_4-\bar y_4)^2\Big],$$

где $a_1,\ a_2$ – произвольные положительные числа,

$$\frac14\sum_\sigma\Big(\sum_{k=1}^5 y_k^2,1\Big)_\sigma \le eH^2;$$

$$\frac14\sum_\sigma\Big(\big(\overset{\circ}{P}{}^2_{11\sigma}+\bar{\overset{\circ}{P}}{}^2_{11\sigma}\big),1\Big)_\sigma \le \sum_\sigma\Big((\lambda+2\mu)^2(\partial_{\sigma_1}y_1)^2+\mu^2(\partial_{\sigma_2}y_1)^2+\mu^2(\partial_{\sigma_1}y_2)^2+$$

$$+\lambda^2(\partial_{\sigma_2}y_2)^2+\frac1H\big[(\lambda+2\mu)^2y_4^2(\partial_{\sigma_1}y_3)^2+\mu^2y_4^2(\partial_{\sigma_2}y_3)^2+\mu^2y_5^2(\partial_{\sigma_1}y_3)^2+$$

$$+\lambda^2y_5^2(\partial_{\sigma_2}y_3)^2\big],1\Big)_\sigma \le 4(\lambda+2\mu)^2(1+e)r^2;$$

$$\frac{\lambda}{2}\Big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar y_1)+(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar y_2)-\frac1H(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)-$$

$$-\frac1H(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar y_5\partial_{\sigma_2}\bar y_3)\Big]^2+\mu\Big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar y_1)-\frac1H(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)\Big]^2\ge$$

$$\ge\frac12\min\Big(\frac1\lambda,\frac1{2\mu}\Big)\Big\{\lambda^2\Big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar y_1)+(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar y_2)-$$

$$-\frac1H(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)-\frac1H(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar y_5\partial_{\sigma_2}\bar y_3)\Big]^2+4\mu^2\Big[(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}y_1)-$$

$$-\frac1H(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-y_4\partial_{\sigma_1}\bar y_3)\Big]^2\Big\}\ge\frac14\min\Big(\frac1\lambda,\frac1{2\mu}\Big)\big(\overset{\circ}{P}_{11\sigma}-\bar{\overset{\circ}{P}}_{11\sigma}\big)^2.$$

С помощью этих и подобных неравенств получаем

$$I_{13}+\frac{\mu}{4}\sum_\sigma\Big(\frac{a}{c^2+2a(1+4e)}\big[(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2+(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar y_3)^2\big]+\frac1{6c^2}\big[(y_4-\bar y_4)^2+$$

$$+(y_5-\bar y_5)^2\big],1\Big)_\sigma\ge\frac14\sum_\sigma\Big(\frac{\mu a}{c^2+2a(1+4e)}-\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4H}\Big)\big[(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar y_3)^2+$$

$$+(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar y_3)^2\big]+\Big[\frac14\min\Big(\frac1\lambda,\frac1{2\mu}\Big)-\frac{eH}{a_1}\Big]\Big[\big(\overset{\circ}{P}_{11\sigma}-\bar{\overset{\circ}{P}}_{11\sigma}\big)^2+\big(\overset{\circ}{P}_{22\sigma}-\bar{\overset{\circ}{P}}_{22\sigma}\big)^2\Big]+$$

$$+\Big(\frac1{2\mu}-\frac{eH}{a_3}\Big)\big(\overset{\circ}{P}_{21\sigma}-\bar{\overset{\circ}{P}}_{21\sigma}\big)^2+\frac{\mu}{6c^2}\big[(y_4-\bar y_4)^2+(y_5-\bar y_5)^2\big]-\frac1{2H}\Big[\frac1{a_1}\big(\overset{\circ}{P}{}^2_{11\sigma}+\bar{\overset{\circ}{P}}{}^2_{11\sigma}\big)+$$

$$+\frac1{a_4}\big(\overset{\circ}{P}{}^2_{21\sigma}+\bar{\overset{\circ}{P}}{}^2_{21\sigma}\big)\Big](y_4-\bar y_4)^2-\frac1{2H}\Big[\frac1{a_2}\big(\overset{\circ}{P}{}^2_{22\sigma}+\bar{\overset{\circ}{P}}{}^2_{22\sigma}\big)+\frac1{a_4}\big(\overset{\circ}{P}{}^2_{21\sigma}+$$

$$+\bar{\overset{\circ}{P}}{}^2_{21\sigma}\big)\Big](y_5-\bar y_5)^2,1\Big)_\sigma, \tag{14}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные положительные числа.

Пусть

$$\frac{a_1}{4} = a_3 = (\lambda+2\mu)eH, \quad a_2 = a_4 = \frac{24(\lambda+2\mu)^2}{\mu} eH(1+e), \tag{I5}$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4H} \le \frac{\mu a}{c^2+4a(1+2e)}.$$

Тогда правая часть (I4) будет неотрицательная. Очевидно, что (I5) означает выполнение (9).

Учитывая (I2) – (I4), получим

$$(\Lambda y - \Lambda \bar{y}, y - \bar{y}) \ge \frac{\mu a}{c^2+4a(1+2e)} \|y-\bar{y}\|_R^2.$$

Итак, (5) верно.

Теперь докажем справедливость (6). Достаточно показать, что

$$(\Lambda y - \Lambda \bar{y}, \bar{\bar{y}}) \le c_1^{1/2} \|y-\bar{y}\|_R \|\bar{\bar{y}}\|_R, \tag{I6}$$

$\forall y, \bar{y}, \bar{\bar{y}} \in S_h$.

Представим левую часть (I6) в виде суммы

$$(\Lambda y - \Lambda \bar{y}, \bar{\bar{y}}) = \sum_{m=1}^{7} I_{2m}.$$

Приведем выражения для I_{2m}, $m=1,2,\dots,7$, и соответствующие оценки. Применяемые здесь $\overset{2}{P}_{ij6}$ и $\overset{4}{P}_{ij6}$ определяются подобно $\overset{0}{P}_{ij6}$ и $\overset{1}{P}_{ij6}$.

Имеем

$$I_{21} = \frac{1}{4\mu} \sum_6 \left((\overset{0}{P}_{316} - \overset{2}{P}_{316}) \overset{2}{P}_{316}, 1 \right)_6 = \frac{\mu}{4} \sum_6 \left(\left[(\partial_{6,1} y_3 - \partial_{6,1} \bar{y}_3) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{H}(y_4 - \bar{y}_4) \right] (\partial_{6,1} \bar{\bar{y}}_3 + \frac{1}{H} \bar{\bar{y}}_4), 1 \right)_6 \le \frac{\mu}{4} \left\{ \sum_6 \left(\left[(\partial_{6,1} y_3 - \partial_{6,1} \bar{y}_3) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{H}(y_4 - \bar{y}_4) \right]^2, 1 \right)_6 \right\}^{1/2} \left[\sum_6 \left((\partial_{6,1} \bar{\bar{y}}_3 + \frac{1}{H} \bar{\bar{y}}_4)^2, 1 \right)_6 \right]^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\mu}{2}\Big[\sum_{6}\big((\partial_{6_1}y_3-\partial_{6_1}\bar{y}_3)^2+\frac{1}{H^2}(y_4-\bar{y}_4)^2,1\big)_6\Big]^{1/2}\Big[\sum_{6}\big((\partial_{6_1}\bar{\bar{y}}_3)^2+$$

$$+\frac{1}{H^2}\bar{\bar{y}}_4^2,1\big)_6\Big]^{1/2}\le 2\mu\max{}^2\Big(1,\frac{c}{H}\Big)\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R.$$

Таким же образом проверяется, что

$$I_{22}=\frac{1}{4\mu}\sum_{6}\big((\mathring{P}_{326}-\bar{P}_{326})\bar{\bar{P}}_{326},1\big)_6\le 2\mu\max{}^2\Big(1,\frac{c}{H}\Big)\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R.$$

Далее,

$$I_{23}=\frac{1}{4}\sum_{6}\big((\mathring{P}_{216}-\bar{P}_{216})(\partial_{6_2}\bar{\bar{y}}_1+\partial_{6_1}\bar{\bar{y}}_2),1\big)_6\le\frac{1}{4}\Big[\sum_{6}\big((\mathring{P}_{216}-\bar{P}_{216})^2,1\big)\Big]^{1/2}\Big[\sum_{6}\big((\partial_{6_2}\bar{\bar{y}}_1+$$

$$+\partial_{6_1}\bar{\bar{y}}_2)^2,1\big)_6\Big]^{1/2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\sum_{6}\big((\mathring{P}_{216}-\bar{P}_{216})^2,1\big)_6\Big]^{1/2}\|\bar{\bar{y}}\|_R\le\sqrt{2}\,\mu\Big[\sum_{6}\big((\partial_{6_2}y_1-$$

$$-\partial_{6_2}\bar{y}_1)^2+(\partial_{6_1}y_2-\partial_{6_1}\bar{y}_2)^2+\frac{1}{H^2}(y_4\partial_{6_2}y_3-\bar{y}_4\partial_{6_2}\bar{y}_3)^2+\frac{1}{H^2}(y_5\partial_{6_1}y_3-$$

$$-\bar{y}_5\partial_{6_1}\bar{y}_3)^2,1\big)_6\Big]^{1/2}\|\bar{\bar{y}}\|_R.$$

Используя неравенство

$$\sum_{6}\big((y_4\partial_{6_2}y_3-\bar{y}_4\partial_{6_2}\bar{y}_3)^2,1\big)_6\le 2c^2\kappa^2\sum_{6}\big((\partial_{6_2}y_3-\partial_{6_2}\bar{y}_3)^2+\frac{1}{c^2}(y_4-\bar{y}_4)^2,1\big)_6$$

и подобное для $\sum_{6}\big((y_5\partial_{6_1}y_3-\bar{y}_5\partial_{6_1}\bar{y}_3)^2,1\big)_6$, получим

$$I_{23}\le 2\sqrt{2}\,\mu\max\Big(1,\frac{\sqrt{2}\,c\kappa}{H}\Big)\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R.$$

Аналогично доказывается, что

$$I_{24}=\frac{1}{8H}\sum_{6}\Big((\mathring{P}_{116}-\bar{P}_{116})\bar{\bar{y}}_4(\partial_{6_1}y_3+\partial_{6_1}\bar{y}_3)+(\mathring{P}_{216}-\bar{P}_{216})\big[\bar{\bar{y}}_4(\partial_{6_2}y_3+\partial_{6_2}\bar{y}_3)+$$

$$+\bar{\bar{y}}_5(\partial_{6_1}y_3+\partial_{6_1}\bar{y}_3)\big]+(\mathring{P}_{226}-\bar{P}_{226})\,\bar{\bar{y}}_5(\partial_{6_2}y_3+\partial_{6_2}\bar{y}_3),1\Big)_6\le$$

$$\le\frac{4\sqrt{2}(\lambda+3\mu)c\kappa}{H}\max\Big(1,\frac{\sqrt{2}\,c\kappa}{H}\Big)\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R,$$

$$I_{25}=\frac{1}{8H}\sum_{\sigma}\Big((\overset{\circ}{P}_{11\sigma}-\overset{\circ\circ}{P}_{11\sigma})\bar{\bar{y}}_4(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)+(\overset{\circ}{P}_{21\sigma}+\overset{\circ\circ}{P}_{21\sigma})\big[\bar{\bar{y}}_4(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3)+$$

$$+\bar{\bar{y}}_5(\partial_{\sigma_1}y_3-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)\big]+(\overset{\circ}{P}_{22\sigma}+\overset{\circ\circ}{P}_{22\sigma})\bar{\bar{y}}_5(\partial_{\sigma_2}y_3-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3),1\Big)_\sigma\le$$

$$\le\frac{4\sqrt{2}(\lambda+3\mu)c\eta}{H}\max\left(1,\frac{c\eta}{H}\right)\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R,$$

$$I_{26}=\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\Big(\Big[(\lambda+2\mu)(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_1)+\lambda(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_2)-\frac{\lambda+2\mu}{H}(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-$$

$$-\bar{y}_4\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)-\frac{\lambda}{H}(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-\bar{y}_5\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3)\Big]\partial_{\sigma_1}\bar{\bar{y}}_1+\Big[\lambda(\partial_{\sigma_1}y_1-\partial_{\sigma_1}\bar{y}_1)+$$

$$+(\lambda+2\mu)(\partial_{\sigma_2}y_2-\partial_{\sigma_2}\bar{y}_2)-\frac{\lambda}{H}(y_4\partial_{\sigma_1}y_3-\bar{y}_4\partial_{\sigma_1}\bar{y}_3)-\frac{\lambda+2\mu}{H}(y_5\partial_{\sigma_2}y_3-$$

$$-\bar{y}_5\partial_{\sigma_2}\bar{y}_3)\Big]\partial_{\sigma_2}\bar{\bar{y}}_2,1\Big)_\sigma\le 2\sqrt{2}(\lambda+2\mu)\max\left(1,\frac{\sqrt{2}c\eta}{H}\right)\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R.$$

И наконец,

$$I_{27}=\frac{1}{12}\sum_{\sigma}\Big((\overset{1}{P}_{11\sigma}-\overset{1}{\bar{P}}_{11\sigma})\partial_{\sigma_1}\bar{\bar{y}}_4+(\overset{1}{P}_{12\sigma}-\overset{1}{\bar{P}}_{12\sigma})\partial_{\sigma_2}\bar{\bar{y}}_4+(\overset{1}{P}_{21\sigma}-\overset{1}{\bar{P}}_{21\sigma})\partial_{\sigma_1}\bar{\bar{y}}_5+$$

$$+(\overset{1}{P}_{22\sigma}+\overset{1}{\bar{P}}_{22\sigma})\partial_{\sigma_2}\bar{\bar{y}}_5,1\Big)_\sigma\le\frac{2(\lambda+3\mu)}{3}\|y-\bar{y}\|_R\|\bar{\bar{y}}\|_R.$$

С помощью оценок I_{2m}, $m=1,2,\dots,7$, получаем (16) и (10). Лемма доказана.

Заметим, что, как нетрудно убедиться, всегда существуют такие c_0 и η, которые удовлетворяют условиям (7) - (9).

Для решения разностной схемы (4) воспользуемся двухступенчатым итерационным процессом /3/.

$$By^{n+1}=By^n-\tau(\Lambda y^n-\varphi), \tag{17}$$

где $B=R(E-T_M)^{-1}$, T_M - самосопряженный в G_R оператор и $\|T_M\|_R\le q<1$. В пространстве G оператор B самосопряженный положительно определенный, B^{-1} - самосопряжен-

17.9.12

ный положительный оператор. Выполняются неравенства /4/

$$(\Lambda y-\Lambda\bar{y},\ y-\bar{y}) \geq c_0(1-q)\,\|y-\bar{y}\|_R^2, \tag{18}$$

$$(B^{-1}(\Lambda y-\Lambda\bar{y}),\ \Lambda y-\Lambda\bar{y}) \leq c_1(1+q)^2\,\|y-\bar{y}\|_R^2, \tag{19}$$

$$\forall y,\ \bar{y}\in S_r=\{y \mid y\in G,\ \|y\|_B\leq r\}.$$

На $(n+1)$ -ом шаге процесса (17) некоторым итерационным методом с оператором перехода T_M и начальным приближением $v^0=y^n$ решаем уравнение $Rv=\psi$, где $\psi=Ry^n-\tau(\Lambda y^n-\varphi)$. Проводим M итераций и полагаем $y^{n+1}=v^M$. Справедлива /5/.

<u>Теорема</u>. Пусть

$$\|\varphi\|_{B^{-1}}\leq\frac{r(1-\rho)}{\tau\sqrt{1-q}},\qquad \rho=\left(1-2\tau c_0(1-q)+\tau^2c_1(1+q)^2\right)^{1/2}.$$

Тогда в шаре $S_r=\left\{y \mid y\in G, \|y\|_B\leq\frac{r}{\sqrt{1-q}}\right\}$ существует единственное решение разностной задачи (4) y^*, к которому сходятся приближения итерационного процесса (17) при любом $y^0\in S_r$ и $\tau\in(0,2c_0(1-q)/c_1(1+q)^2)$. Имеет место следующая оценка скорости итерационного процесса

$$\|y^{n+1}-y^*\|_B\leq\left(1-\frac{c_0^2}{c_1}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right)^{1/2}\|y^n-y^*\|_B.$$

<u>Доказательство</u>. Покажем, что оператор C, $Cy=y-\tau B^{-1}(\Lambda y-\varphi)$, в S_r является оператором сжатия и переводит S_r в себя.

Из (18) и (19) следует

$$\|Cy-C\bar{y}\|_B^2=\|y-\bar{y}-\tau B^{-1}(\Lambda y-\Lambda\bar{y})\|_B^2=\|y-\bar{y}\|_B^2-2\tau(\Lambda y-\Lambda\bar{y},\ y-\bar{y})+$$

$$+\tau^2\|\Lambda y-\Lambda\bar{y}\|_{B^{-1}}^2\leq\rho^2\|y-\bar{y}\|_B^2,$$

где $\rho^2 = 1-2\tau c_0(1-q)+\tau^2 c_1(1+q)^2$. Ясно, что при $\tau \in (0, 2c_0(1-q)/c_1(1+q)^2)$ оператор C в S_r представляет собой сжимающий оператор.

Далее,

$$\|Cy\|_B \le \|y-\tau B^{-1}\Lambda y\|_B+\tau\|\varphi\|_{B^{-1}} \le \left(\|y\|_B^2-2\tau(\Lambda y, y)+\tau^2\|\Lambda y\|_{B^{-1}}^2\right)^{1/2}+\tau\|\varphi\|_{B^{-1}} \le \rho\|y\|_B+\tau\|\varphi\|_{B^{-1}} \le \rho\frac{r}{\sqrt{1-q}}+\tau\|\varphi\|_{B^{-1}} \le \frac{r}{\sqrt{1-q}}.$$

Таким образом, при условии $\|\varphi\|_{B^{-1}} < \dfrac{r(1-\rho)}{\tau\sqrt{1-q}}$ оператор C переводит S_r в себя.

Теперь примем во внимание, что (4) эквивалентно уравнению

$$y = Cy,$$

а приближения итерационного процесса (17) удовлетворяют равенству

$$y^{n+1} = Cy^n.$$

Существование и единственность решения задачи (4) y^* вытекает из свойств оператора C . Для погрешности процесса будем иметь

$$\|y^{n+1}-y^*\|_B \le \rho\|y^n-y^*\|_B\left(1-\frac{c_0^2}{c_1}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right)^{1/2}\|y^n-y^*\|_B.$$

Теорема доказана.

Поступила 3.X.1982

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф.Гюнтнер. Об одном свойстве уравнений теории оболочек И.Н.Векуа. Семинар Института прикладной математики Тбилисского государственного университета. Доклады, II-19, 12-13, 1978.
2. Д.Г.Перадзе. О существовании решения для одной задачи нелинейной теории пластинок. Труды Тбилисского университета. Кибернетика. Прикладная математика. 236(4), 1983.
3. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
4. Е.Г.Дьяконов. Разностные методы решения краевых задач. Вып.I, М., Изд.МГУ, 1971.
5. С.Н.Волошановская. Итерационные схемы для некоторых задач нелинейной теории пластин. В кн.:"Применение ЭВМ к решению задач математической физики и АСУ", 93-112, Изд-во КГУ, Казань, 1978.

ჯ. ფერაძე

იტერაციული პროცესი ფირფიტების არაკლასიკური თეორიის ერთი ამოცანისათვის

რ ე ზ ი უ მ ე

განიხილება საზღვარზე ხისტად ჩამაგრებული ფირფიტის ღუნვის არაწრფივი ამოცანა. გარე დატვირთვის გარკვეული შეზღუდვის, შემთხვევაში დადგენილია სხვაობიანი ოპერატორის ძლიერი მონოტონურობა და ლიფშიც-უწყვეტობა. ამის საფუძველზე დამტკიცებულია სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნის არსებობა, ერთადერთობა და ორსაფეხურიანი იტერაციული პროცესის კრებადობა.

D.Peradze

THE ITERATIVE PROCESS FOR ONE PROBLEM OF THE NON-CLASSICAL THEORY OF PLATES

Summary

The paper deals with a non-linear problem of bending of a plate rigidly fixed at the edges. Under some restriction on the external load a strong monotonicity and Lipschitz-continuity of the difference operator is established. In view of this, the existence, uniqueness of solution of the differenece problem and convergence of the two-step iterative process are proved.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

251, 1984

БАНК КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ИНТЕРАКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Л.В.Беруашвили, Н.И.Иремашвили, Э.В.Бауэр

Для обеспечения гибкости использования данных, что необходимо для их эффективного применения, важным являются два аспекта разработки банка данных: во-первых, данные должны быть независимы от программ, использующих их, так, чтобы эти данные могли добавляться или перестраиваться без изменения программ, во-вторых, должна быть обеспечена возможность запрашивать и отыскивать информацию в базе данных без трудоемкого написания программы на обычном языке программирования, для чего используется язык запросов баз данных.

Объем массивов данных, которые можно обрабатывать на ЭВМ, возрастает с большой быстротой, так что возникает проблема поиска экономной и легко интерпретируемой формы представления массивов данных больших размерностей в их существенных признаках (число признаков часто превышает 100-200). Решение проблем такого типа представляется осуществимым при использовании достижений разработок в сфере проблемы "Искусственный интеллект", связанной с вопросами формирования понятий.

Для того чтобы интерактивная система обладала функциональной автономией, она должна иметь модель внешнего мира. В качестве формы выражения внешнего мира, опираясь на принципы теории ИКИ /I,2,3/, нами выбрано концептуальное представление. Оно предполагает концептуальное описание проблемной среды и хранение абстрактных знаний в виде набора концептов /I,2/ - эквивалента признаковой логической структуры понятия.

В данной работе описан блок формирования банка данных в экспериментальной интерактивной системе "EXPERT" с помощью программы "FILTR".

Возможность концептуального представления обеспечивается разработкой процедуры формирования понятий. "Искусственный интеллект" в системе вышеуказанного типа трактуется как алгоритмическое и программное обеспечения для блока представления знаний, обладающего способностью моделировать проблемную среду.

Рассмотрим возможность описания объектов на основе метода аналитических эвристик /I,2/.

При использовании этого метода объекты выборки описываются в системе "признак-значение". Метод базируется на введении алгебраизированных множеств (ал-множество). Ал-множество отличается от обычного множества тем, что элементы могут входить в него не только в состоянии "присутствия" $(e \in M)$, но и в состоянии "отсутствия" $(\bar{e} \in M)$, на ал-множествах строится Булева алгебра.

В связи с тем, что процедура вычисления концепта включает в себя минимизацию ДНФ, что затруднено при больших n, нами под руководством проф. В.В.Чавчанидзе были разработаны алгоритм и программа вычисления концептов, когда обучающий массив данных больших размерностей.

Пусть объекты обучающей выборки (заданные в системе "признак-значение" признаки могут быть как количественные, так и качественные) при помощи базисных функций описываются "траекториями" типа $\check{\psi}_1, \check{\psi}_2, \ldots, \check{\psi}_m$. В $\varphi = (\check{\psi}_{ij})$ дана вся информация о данном объекте /I,2/:

$$\varphi = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i^+ ,$$

φ^+ - положительно оцененные реализации,

φ^- - отрицательно оцененные реализации.

Оценку реализации производит эксперт или группа экспертов.

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \text{I, если } i \text{ - тый представитель данного объекта} \\ \qquad\qquad \text{имеет признак } A_j , \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (I)$$

φ^+ - является аналогом функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры логики /5,6/.

Пусть мы имеем двоичный набор $\langle x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \rangle$. Сопоставим ему число i , определяемое следующим образом:

$$i = x_1^* 2^{n-1} + x_2^* 2^{n-2} + \cdots x_n^* 2^0 \qquad (2)$$

Число i будет называться номером набора $\langle x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \rangle$.

Рассмотрим функцию $F_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$F_i = \begin{cases} \text{I, если номер набора есть } i , \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (3)$$

Любая таблично заданная функция (в нашем случае φ -

аналог $f(x_1,\dots,x_n)$) алгебры логики может быть представлена в следующей аналитической форме:

$$F(x_1,\dots,x_n)=F_{i_1}\cup\dots\cup F_{i_k}=\bigcup_{i_j\in T_1}F_{i_j}, \tag{4}$$

T_1 - есть множество наборов, на которых функция обращается в единицу.

$$x^\alpha=\begin{cases}x, & \alpha=1\\ \bar{x}, & \alpha=0\end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим конъюнкцию

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}. \tag{6}$$

Набор $\langle\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\rangle$ - двоичный и существует ровно 2^n различных наборов.

Сопоставим каждой конъюнкции (6) определенный номер набора $\langle\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\rangle$. Тогда запись

$$\bigcup_{i=6}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n})_i \tag{7}$$

означает дизъюнкцию всех конъюнкций с номером из множества 6 .

$$F_i(x_1x_2\cdots x_n)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}, \tag{8}$$

где

$$i=\alpha_1 2^{n-1}+\dots+\alpha_n 2^0. \tag{9}$$

Любая функция алгебры логики может быть представлена в следующей форме:

$$f(x_1x_2\cdots x_n)=\bigcup_{i=1}^{n}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}. \tag{10}$$

При этом дизъюнкция в правой части (10) берется только по тем номерам наборов аргументов, на которых функция, заданная таблицей, обращается в единицу.

В нашему случае $\varphi=\bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i^+$

$\varphi_i^+ = \check{\psi}_{i_1} \check{\psi}_{i_2} \cdots \check{\psi}_{i_m}$ – положительно оцененные реализации. (положительная оценка аналогична тому, что функция $f(x_1 \cdots x_n) = 1$ на данном наборе).

Суть данного алгоритма заключается в следующем (см. приложение):

I. Нахождение первичных импликант:

I. Вводится индекс $A(a_1, \cdots, a_n)$, элементами которого являются суммы единиц в каждой траектории матрицы φ^+ (индекс в методе Квайна-Мак-Класски):

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \check{\psi}_{ij} \quad (i = \overline{1,n}).$$

2) Упорядочивается матрица φ^+ по индексу $A(a_1, \cdots, a_n)$, т.е. $\sum_{j=1}^{m} \psi_{ij} > \sum \psi_{i+1,j}$.

Тем самым массив полученных минитермов упорядочивается по убыванию, а затем разбивается на непересекающиеся группы. Причем в каждую группу войдут траектории (полученные вышеуказанной процедурой), имеющие в своей записи равное число единиц.

3) Находится $A\psi_j$ для $A\overline{\psi}_j$, что производится только между элементами соседних групп (i – тая группа является соседней для j -ой группы, если $a_i - a_j = 1$), так как только элементы этих групп потенциально могут склеиваться. Тем самым исключается перебор-рассмотрение всех минитермов попарно (что является факториальной функцией от n).

II. Составление импликантной матрицы происходит так же, как в методе Квайна-Мак-Класски:

$$\check{\lambda}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ый минитерм покрывает } j\text{-ую конституенту} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \check{\lambda}_{ij} .$$

III. Нахождение существенных импликант.

Если $\lambda_i = 1$, то соответствующий минитерм является существенной импликантой $\bigcup_{i=1}^{k} T_i$, T_i – это те минитермы, для которых $\lambda_i = 1$, $k \leq n$. $\bigcup_{i=1}^{k} T_i$ – ядро концепта. Все T_i исключаются из матрицы минитермов.

IУ. Вычеркивание лишних столбцов и лишних первичных импликант. Выбор минимального покрытия.

После III этапа на каждом шаге выбора простой импликанты выбирается та простая импликанта, которая покрывает наибольшее число первичных конституент, т.е. на каждом шаге находим

$$\lambda_{max}^{(k)} = \max_i \lambda_i , \quad k \leq n .$$

Алгоритм заканчивает работу, когда $\lambda_{max}^{(k)} = 0$.

По вышеуказанной процедуре составлена программа на языке ASSEMBLER с предусмотрением машинных ресурсов ЭВМ М-40 30 в системе DOS ES с оперативной памятью 256 К. Время вычисления концепта 53 сек. размеры матрицы $m \approx 30$, $n \geqslant 100$.

Метод имитирует процесс образания понятия человеком. Чем полнее система признаков, точнее оценка реализации и больше объем реализации, тем эффективнее сформировано понятие. Будучи сформированным, понятие является экономным и легко доступным описанием объектов или отношений, а при поступлении новых реализаций объектов или отношений позволяет с той или иной точностью определить их принадлежность к классу, определяемому данным понятием. Тем самым оправдано хранить в банке данных концепт-объекты.

В связи с тем, что концепт (эквивалент признаковой логической структуры данного явления) содержит в себе простые импликанты, удаление даже одной из них приводит к потери сути этого явления.

Ввод обучающей выборки происходит следующим образом: матрица $\varphi^+ = (\check{\varphi}_{ij})\ \begin{smallmatrix} i=\overline{1n} \\ j=\overline{1m} \end{smallmatrix}$ вводится с помощью последовательности номеров, отдаленных друг от друга знаком ";"

$$x_K = \begin{cases} j, \text{если } \check{\varphi}_{ij} = 1, \\ \text{опускается, если } \check{\varphi}_{ij} \neq 0, \\ 0, \text{ если все } \check{\varphi}_{ij} = 0,\ j = 1 \ldots m. \end{cases}$$

Например,

$$\varphi^+ = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,0 \end{pmatrix}$$

I 3 4; 2; I 2 3 4; 0; I 3;

(каждое число занимает 3 позиции).

Результат получается в виде логической записи, где каждая простая импликанта показывает существенное сочетание признаков для данного объекта, например: $A1\ A3\ \overline{A4} \vee A5\ A22$.

Для данного объекта существенным сочетанием признаков является: первый, третий и отрицание четвертого признака, или пятый и двадцать второй.

Для успешной и эффективной работы с программой желательно провести психо-эвристический эксперимент для удачного выбора признаковой системы. Чем полнее система признаков, тем точнее оценка реализации и, следовательно, тем удачнее будет сформулирован (вычислен) концепт.

Поступила 8.X.1982

Институт кибернетики
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Чавчанидзе. К вероятностно-концептуальным принципам организации памяти. ДАН СССР, т.219, № 4, 1974.
2. В.В.Чавчанидзе. К теории естественного и искусственного концептуального интеллекта. Сб. "Естественный и искусственный интеллект". Материалы IУ Международной объединенной конференции по искусственному интеллекту. Тбилиси, 3-8 сентября 1975, Тбилиси, 1976.
3. Э.Хант, Дж.Марин, Ф.Стоун. Моделирование процесса формирования понятий на ЭВМ. М., "Мир", 1970.
4. Дж.Мартин. Организация баз данных в вычислительных системах.М.,"Мир", 1980.
5. И.Н.Кузнецов. Кибернетические диалоговые системы. "Наука", 1976.
6. Н.И.Иремашвили, В.А.Трошин. Разработка машинных методов извлечения информации из массивов данных больших размерностей. IX Всесоюзный симпозиум по кибернетике. Сухуми, 1981.
7. В.В.Чавчанидзе, Н.Н.Кипшидзе, Л.В.Беруашвили, Л.Т.Чиргадзе. Методы искусственного концептуального интеллекта

в дифференциальной диагностике хронических диффузных заболеваний печени. Актуальные вопросы гастроэнтерологии. Материалы межинститутской научной сессии. Сигнахи, 1981.

8. Л.В.Беруашвили. Применение концептуального формализма к дифференциальной диагностике хронических диффузных заболеваний печени. IX Всесоюзный симпозиум по кибернетике. Сухуми, 1981, т.3. Целеполагания и модели поведения.

9. В.М.Глушков. Синтез цифровых автоматов. М., 1962.

ლ.ბერუაშვილი, ნ.ირემაშვილი, ე.ბაუერი

კონცეპტუალურ მონაცემთა ბანკი ინტერაქტიულ სისტემებში

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში განხილულია კონცეპტუალურ მონაცემთა ბანკის შექმნის საკითხი ინტერაქტიულ სისტემებში. განხილულია პრობლემური გარემოს აღწერის შესაძლებლობა კონცეპტების (ობიექტის ან დამოკიდებულების ნიშან-თვისებათა ლოგიკურ-სტრუქტურული ექვივალენტი) საშუალებით.

დამუშავებულია ალგორითმი და პროგრამა კონცეპტების გამოსათვლელად, როცა ნიშან-თვისებათა მატრიცა დიდი განზომილებისაა ($n>100$, $m>100$). მოდიფიცირებულია კვაინ-მაკ-კლასკის ალგორითმი, რითაც შესაძლებელი ხდება დიდი განზომილების მასივების დამუშავება.

. მანქანური პროგრამის შესასვლელს მიეწოდება ბინარიზირებული, დადებითად შეფასებული 'ტრაექტორიების' მატრიცა, გამოსასვლელზე კი მიიღება მოცემული ობიექტის ან დამოკიდებულების შესაბამისი ლოგიკური სტრუქტურა-კონცეპტი, რომელიც ეკონომიურია და ადვილად მოსაძებნი მონაცემთა ბანკში. პროგრამა დაწერილია ე.გ.მ. M 4030 DOS ES სისტემაში ASSEMBLER-ზე, 256კ ოპერატიული მეხსიერებისათვის.

L.Beruashvili, N.Iremashvili, E.Bauer

A BANK OF CONCEPTUAL DATA IN INTERACTIVE SYSTEMS

Summary

The paper discusses the problem of creating a bank of conceptual data in interactive systems. The possibility of describing a problematic environment by means of concepts (the logico-structural equivalent of the characteristics of an object or dependence). The algorithm and programme have been developed for calculating concepts when the characteristic matrix is of a large size ($n > 100$, $m > 100$). The Quine-Mac-Classky algorithm has been modified, permitting to process large size data files.

A matrix of binarized, positively valued "trajectories" is fed into the computer programme input, while the logical structure-concept, corresponding to the object or relationship of the given object is received at the output, the obtained structure-concept being more economical and easy to find in the data bank. The programme is written for the computer M 4030 in the DOS-ES system, in ASSEMBLER language, for operative memory 256 K.

БЛОК-СХЕМА ПРОГРАММЫ „FIL TR"

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Ввод начальных данных с помощью последовательности номеров

$$x_k = \begin{cases} j, & \psi_{ij} = 1 \\ 0, & \text{все } \psi_{kj} = 0,\ j = \overline{1,m} \end{cases}$$

$$\check{\psi}_{ij} = \begin{cases} \text{I, если } j \text{ -тый признак присутствует в } i \text{ -той строке} \\ \text{0, в противном случае} \end{cases}$$

Формирование матрицы $\varphi^{+} = (\check{\psi}_{ij})_{j=\overline{1,m}}^{i=\overline{1,n}}$ с помощью номеров x_k

Формирование $A(a_1, \ldots, a_n)$; $a_i = \sum_{j=1}^{m} \check{\psi}_{ij}$

Упорядочение $A(a_1, \ldots, a_n)$ $a_i > a_{i+1}$

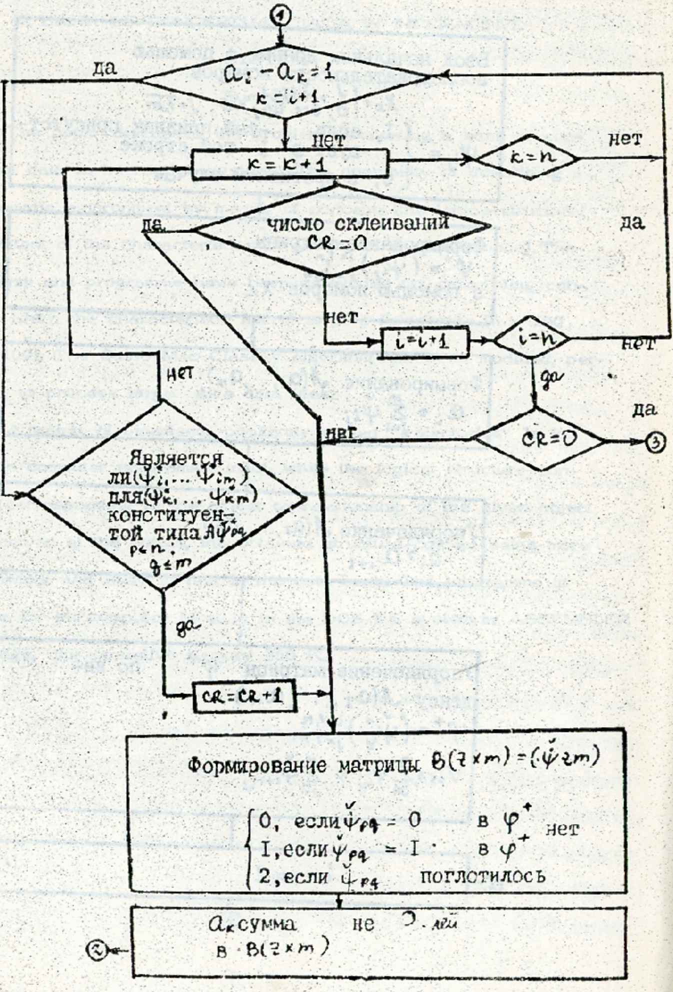
Упорядочение матрицы φ^{+} по индексу $A(a_1, \ldots, a_n)$

$\varphi^{+} = (\check{\psi}^{*}_{ij})_{j=\overline{1,m}}^{i=\overline{1,n}}$

$\forall i \leq n, \sum_{j=1}^{m} \check{\psi}_{ij} \geq \sum_{j=1}^{m} \check{\psi}_{i+1,j}$

2 ← $i = I$

1


1
$a_i - a_k = 1$
$k = i+1$
да
нет
$k = k+1$
$k = n$
нет
да
да
число склеиваний
$CR = 0$
нет
$i = i+1$
$i = n$
нет
да
да
нет
нет
$CR = 0$
3
Является
ли $(\psi_{i_1} \dots \psi_{i_m})$
для $(\psi_{k_1} \dots \psi_{k_m})$
конституен-
той типа $A\psi_{pq}$
$p < n$;
$q \le m$
да
$CR = CR + 1$
Формирование матрицы $B(z \times m) = (\check{\psi}_{zm})$
0, если $\check{\psi}_{pq} = 0$ в φ^+ нет
I, если $\check{\psi}_{pq} = I$ в φ^+
2, если $\check{\psi}_{pq}$ поглотилось
a_k сумма не Э.лей
в $B(z \times m)$
2

3

Формирование $A(\eta \times m) = (\check{\psi}_{ij})_{j=1,m}^{i=1,c}$

$A(c \times m)$ – все возможные минитермы для φ^+, т.е. $(\check{\psi}_{i1} \dots \check{\psi}_{im}) \in A$ если $CR = 0$

Формирование ядра концепта
$\mathcal{D} = \bigvee_{\alpha} \check{\psi}_{\alpha 1}, \check{\psi}_{\alpha 2}, \dots \check{\psi}_{\alpha m}$

α – те строки φ^+, для которых $CR = 1$

Формирование импликантной матрицы
$$I(\eta, n) = (f_{ij})_{j=1,n}^{i=1,\eta}$$

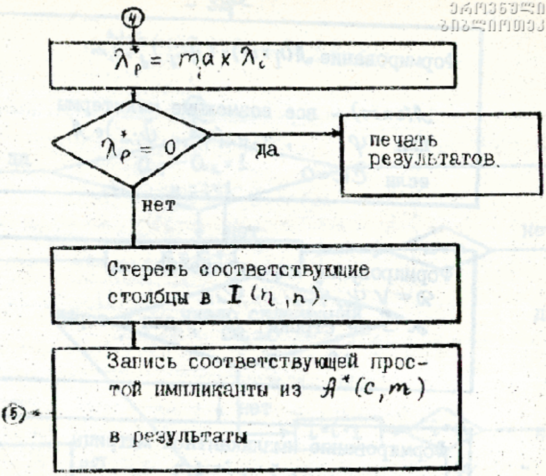
$$f_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{-тая строка } A(c \times m) \text{ покрывает } j \text{-тую строку } \varphi^+(n \times m) \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Обработка $I(\eta, n)$ по $\mathcal{D} = \bigvee_{\alpha} (\check{\psi}_{\alpha 1} \dots \check{\psi}_{\alpha m})$;
стереть соответствующие столбцы в $I(\eta, n)$

Запись в результаты $\mathcal{D}$

5 → Формирование
$$\lambda_i = \sum_{j=1} \check{f}^{*}_{ij}$$

4


4
$\lambda_p^* = \max_i \lambda_i$
$\lambda_p^* = 0$
да
печать результатов.
нет
Стереть соответствующие столбцы в $I(\eta, n)$.
Запись соответствующей простой импликанты из $A^*(c,m)$ в результаты
5

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РЕШАЮЩЕГО ОРГАНА В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

О.М.Намичейшвили, Дж.Гугушвили

В процессе проектирования электронного устройства принятие решения о выборе его принципиальной схемы должно ориентироваться на мнение экспертов, объединенных в так называемый решающий орган.

Настоящая работа посвящается изучению возможных стратегий работы решающего органа и получению количественных оценок вероятности его ошибок при этих стратегиях.

§ 1. Модель решающего органа порогового типа

Математическое описание функционирования решающего органа в системе автоматизированного проектирования электронных схем будет вестись на основе модели порогового (кворумного) типа. Суть этой модели сводится к следующему.

Каждой электронной схеме, предъявляемой на экспертизу, ставится в соответствие двоичная (бинарная) переменная x, принимающая, скажем, значение +1, если схема хорошая, и значение −1, если она плохая. Эта двоичная переменная подается на n вычислительных элементов $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$, отождествляемых с экспертами, которые вычисляют ее значение соответственно как $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В результате получают n версий для значения предъявленной к распознанию переменной x. Разумеется, каждая из величин x_i (i =I,2,...., n) также является двоичной переменной, принимающей значения +I и -I. Эта избыточная информация (в форме n версий для значения переменной x) поступает далее на входы т.н. решающего элемента, входящего в состав решающего органа наряду с вычислительными элементами $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (рис.I). Как известно, решающим элементом называется устройство, которое по известным двичным сигналам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на n входах определяет двоичный выходящий сигнал y, называемый решением. Иначе говоря, решающий элемент представляет собой переключательную схему, реализующую некоторую двоичную функцию y от n двоичных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{I.I}$$

Надежность решающего органа существенно зависит от вида реализуемой решающим элементом функции (I.I). Очевидно, что в идеальном случае решение y, принимаемое решающим элементом, должно совпадать с истинным значением двоичной переменной x.

Решающий элемент, реализующий функцию

$$y = sgn\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right), \tag{I.2}$$

где

$$sgn\, z = \begin{cases} -\mathrm{I}, \text{ если } z < 0, \\ 0, \text{ если } z = 0, \\ +\mathrm{I}, \text{ если } z > 0, \end{cases} \tag{I.3}$$

называется мажоритарным. Здесь нулем обозначено неопределе ное (безразличное) значение y. Неопределенность выходной переменной y для конкретной входной комбинации переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, означает, что либо эта комбинация никогда не реализуется (n является нечетным числом в сумме $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$), либо при $z = 0$ решение y не выносится. График функции $y = \operatorname{sgn} z$ представлен на рисунке 2. Стрелки здесь указывают на то, что острие не принадлежит графику, а точка в начале координат отвечает неопределенности выходной переменной y.

Основными компонентами мажоритарного элемента служат суммирующее устройство, с выхода которого снимается сигнал

$$z = \sum_{i=0}^{n} x_i ,$$

и нелинейный двухполюсник с характеристикой $y = \operatorname{sgn} z$ (рис. 3). Совершенно очевидно, что такой элемент вырабатывает решение в результате "голосования" по принципу простого большинства значений сигналов на входах, поэтому часто его называют голосующим. Впервые мажоритарный закон был описан Дж. Фон Нейманом в известной работе /I/, но подробному исследованию не подвергался.

Функционирование решающего органа с мажоритарным решающим элементом не может быть признано удовлетворительным, есть вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ошибок вычислительных элементов (экспериментов) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ различны, и, следовательно, каждой из информаций x_i, поступающей с выхода вычислительного элемента B_i на i-й вход решающего элемента, приходится приписывать свой вес a_i $i = 1, 2, \ldots, n$), где a_i – произвольное вещественное число $(-\infty < a_i < +\infty)$.

В этом случае решение y на его выходе должно выноситься как результат взвешенного голосования, согласно следующему соотношению:

$$y = sgn\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \theta\right), \tag{I.4}$$

где θ – так называемый порог (кворум) элемента. В силу последнего обстоятельства его часто именуют пороговым (кворумным), хотя такой решающий элемент с равным правом можно было бы назвать взвешенно голосующим. Нетрудно видеть, что мажоритарный решающий элемент есть пороговый элемент с весовыми коэффициентами a_i=I ($i=\overline{1,n}$) и порогом θ =0.

Формально допустим, что $\theta \equiv a_0$, а $x_0 \equiv$-I. Последнее означает, что имеется некоторый вычислительный элемент (эксперт) $\mathcal{B}_0$, всегда выдающий сигнал $x_0 \equiv$ -I, какой бы сигнал x на его вход ни поступал. Тогда соотношению (I.4) можно придать и следующий вид:

$$y = sgn\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x_i\right). \tag{I.5}$$

Данному соотношению отвечает модель решающего органа, представленная на рис. 4. Необходимость в ней возникает в связи с тем, что если в начальный момент времени вероятности ошибок вычислительных элементов и удается подобрать практически одинаковыми, с течением времени в них все же появляются расхождения.

Пороговой логике посвящена довольно обширная литература /2-6/. Основные результаты касаются задачи синтеза порогового элемента, т.е. реализуемости данной переключательной функции n двоичных переменных на одном пороговом элементе и нахождению необходимых весов и порога осуществляющего эту функцию элемента. Решены также, для весьма ограниченного класса схем, задачи синтеза сетей из пороговых элементов. Однако в целом упомянутые исследования не затрагивают проблем пороговой логики в аспекте теории принятия оптимальных в некотором смысле решений. Пороговая же модель функционирования решающего органа в системе автоматизированного проектирования представляет интерес именно с этой точки зрения.

Исходя из сказанного, основную цель исследования в настоящем параграфе будет составлять получение выражения для вероятности θ того, что принятое пороговым элементом решение y ошибочно, т.е. не совпадает с истинным значением двоичной переменной x_i. Такой подход открывает прямой путь к рациональной организации функционирования решающего органа. Реализуя сформулированную задачу, мы будем существенно опираться на результаты работы /7/, стремясь по возможности уточнить изложенные в ней идеи и выявить строгие границы их применимости.

Введем величину

$$z = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \tag{I.6}$$

рассматривая все x_i (за исключением $x_0 = -1$) из-за возможности появления ошибок в вычислительных элементах B_i в качестве случайных двоичных переменных X_i. Тогда, очевидно, и Z будет являться случайной величиной, принимающей значения z на вещественной оси, а $Y = \operatorname{sgn} Z$ - случайной двоичной переменной. Кроме того, составим случайную величину

$$\eta = \mathcal{X}\cdot\zeta = \sum_{i=0}^{n} a_i\,(\mathcal{X}\mathcal{X}_i), \tag{I.7}$$

где $\mathcal{X}$ - подаваемая на входы вычислительных элементов $\mathcal{B}_i$ $(i=\overline{0,n})$ двоичная переменная, принимающая значения +I и -I, также рассматриваемая в качестве случайной величины. Легко заметить, что значения ν случайной величины η могут принадлежать всей вещественной оси $(-\infty < \nu < +\infty)$.

Вводя символы P, N и O соответственно дл.. положительных, отрицательных и нулевых значений реализаций случайных величин ζ и η, можно составить таблицу I. Из данных этой таблицы можно утверждать, что если $\mathcal{X}$ есть случайная двоичная переменная, принимающая значения +I и -I, а функция $sgn\,\zeta$ определена согласно соотношению (I.3), то имеет место следующее тождество:

$$\mathcal{X}\,sgn\,\zeta \equiv sgn\,(\mathcal{X}\zeta).$$

Таблица I

$\mathcal{X}$	ζ	$sgn\,\zeta$	$\mathcal{X}\,sgn\,\zeta$	$\mathcal{X}\zeta$	$sgn\,(\mathcal{X}\zeta)$
I	2	3	4	5	6
+I	P	+I	+I	P	+I
+I	O	0	0	0	0
+I	N	-I	-I	N	-I
-I	P	+I	-I	N	-I
-I	O	0	0	0	0
-I	N	-I	+I	N	+I

На основании последнего же тождества вытекает справедливость цепочки преобразований:

$$Q = Prob\{X \neq Y\} = Prob\{XY = -1\} = Prob\{X \cdot \operatorname{sgn} \eta = -1\} =$$

$$= Prob\{\operatorname{sgn}(X\eta) = -1\} = Prob\{X\eta < 0\}.$$

Таким образом, вероятность Q того, что решение Y ошибочно, равна вероятности того, что случайная величина η отрицательна:

$$Q = Prob\{\eta < 0\}. \tag{I.8}$$

Следовательно, задача свелась к изучению распределения случайной величины (I.7). Для этого обратимся прежде всего к случайным величинам XX_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Легко видеть, что дискретная случайная величина XX_i принимает значение -1 при $X_i = \bar{X}$ (где $\bar{X}$ означает инверсию двоичной переменной X) с вероятностью q_i и значение +1 при $X_i = X$ с вероятностью $1 - q_i$:

$$Prob\{XX_i = -1\} = Prob\{X_i \neq X\} = q_i,$$

$$Prob\{XX_i = +1\} = Prob\{X_i = X\} = 1 - q_i.$$

В частности,

$$q_0 = Prob\{XX_0 = -1\} = Prob\{X = +1\},$$

$$1 - q_0 = Prob\{XX_0 = +1\} = Prob\{X = -1\},$$

так как $X_0 \equiv -1$. Из последних формул следует, что q есть априорная вероятность подачи на вход решающего органа сигнала $X = +1$ т.е. q_0 есть априорная вероятность появления +1 на выходе порогового элемента в качестве правильного сигнала. Аналогично, $1 - q_0$ есть априорная вероятность подачи на вход решающего органа сигнала $X=-1$, или, что то же самое, априорная вероятность появления -1 на выходе порогового элемента в качестве правильного решения.

Для дискретной случайной величины XX_1 совокупность вероятностей q_i и $1-q_i$ полностью определяет ее функцию распределения. Однако в целях единообразия с непрерывными величинами можно записать формально и для нее выражения плотности вероятности через дельта-функцию Дирака $\delta(u)$, обладающую следующими свойствами:

$$\delta(u-u_0)=\begin{cases}0 \text{ при } u\neq u_0\\ \infty \text{ при } u=u_0\end{cases} \tag{I.9}$$

$$\int_a^b \delta(u-u_0)\,du=\begin{cases}0 \text{ при } u_0<a\\ \text{I при } a<u_0<b\\ 0 \text{ при } u_0>b\\ \text{I/2 при } u_0=0 \text{ или } u_0=b\end{cases} \tag{I.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,\delta(u-u_0)\,du=gu(u_0). \tag{I.11}$$

Кроме того, чтобы использовать дельта-функцию для описания распределения вероятностей, дополнительно следует положить:

$$\int_{-\infty}^{u_0-0}\delta(u-u_0)\,du=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_{-\infty}^{u_0-\alpha}\delta(u-u_0)\,du=0.$$

С введением δ-функции плотность вероятности $f_1(v)$ дискретной случайной величины $a_1(XX_1)$ запишется как

$$f_1(v)=(1-q_i)\,\delta(v-a_i)+q_i\,\delta(v+a_i). \tag{I.12}$$

что имеет чисто символический смысл.

Плотность $f(v)$ распределения случайной величины η, являющейся суммой независимых случайных величин $a_i(XX_i)$, найдется как свертка плотностей $f_i(v)$ последних:

$$f(v)=\mathop{K}_{i=0}^{n} f_i(v), \tag{I.13}$$

где K – символ композиции.

Поскольку преобразование Лапласа свертки равно произведению преобразований Лапласа свертываемых функций, получим:

$$\overline{f(S)}=\prod_{i=0}^{n}\overline{f_i(S)}=\prod_{i=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-Sv)\cdot f_i(v)dv=$$

$$=\prod_{i=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-Sv)\left[(1-q_i)\delta(v-a_i)+q_i\delta(v+a_i)\right]dv=$$

$$=\prod_{i=0}^{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-Sv)(1-q_i)\delta(v-a_i)dv+\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-Sv)q_i(v+a_i)dv\right]$$

С учетом свойства (I.II) дельта-функции отсюда окончательно будем иметь:

$$\overline{f(S)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=0}^{n}\left[(1-q_i)exp(-a_iS)+q\,exp(+a_iS)\right]. \tag{I.14}$$

С другой стороны

$$\overline{f(S)}=\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-Sv)f(v)dv=M\left[exp(-S\eta)\right], \tag{I.15}$$

поскольку $f(v)$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины η .

Совершенно очевидно, что искомая вероятность ошибки на выходе решающего элемента

$$Q = \mathcal{P}rob\{\eta < 0\} = \int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \tag{I.16}$$

и имеет место следующая оценка

$$\int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \leq \int_{-\infty}^{0} exp(-Sv)\cdot f(v)\,dv, \tag{I.17}$$

если только S - вещественная положительная величина, т.е.

$$0 \leq S < \infty. \tag{I.18}$$

Кроме того, можно утверждать, что

$$\int_{-\infty}^{0} exp(-Sv)\cdot f(v)\,dv \leq \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-Sv)\cdot f(v)\,dv, \tag{I.19}$$

откуда, на основании формулы (I.15), окончательно вытекает следующая верхняя оценка для вероятности Q :

$$Q \leq \overline{f(S)},$$

либо

$$Q \leq M[exp(-S\eta)]$$

для всех S , удовлетворяющих условию (I.18).

Следовательно, верхняя оценка Q^+ вероятности Q выражается соотношением

$$Q^+ = \prod_{i=0}^{n}\left[(1-q_i)\,exp(-a_i S) + q_i\,exp(+a_i S)\right] = \tag{I.20}$$

$$= \prod_{i=0}^{n}\left[exp(-a_i S) + 2q_i\,sh(a_i S)\right],$$

графически интерпретируемым на рис.5.

Естественно попытаться найти минимум Q^+_{min} этого выражения, для чего воспользуемся условием

$$\frac{dQ^+}{d(a_i S)} = 0,$$

т.е.

$$q_i \exp(a_i S) - (1-q_i)\exp(a_i S) = 0.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \left[\exp(+a_i S)\right]_{min} &= \sqrt{\frac{1-q_i}{q_i}} \\ \left[\exp(-a_i S)\right]_{min} &= \sqrt{\frac{q_i}{1-q_i}} \end{aligned}\right\} \qquad (I.21)$$

Учитывая последние формулы в (I.20), получим:

$$Q^+_{min} = \prod_{i=0}^{n} \left[2\sqrt{q_i(1-q_i)}\right], \qquad (I.22)$$

что можно записать и в эквивалентном виде

$$Q^+_{min} = \exp\left[-\sum_{i=0}^{n} A(q_i)\right], \qquad (I.23)$$

где

$$A(q_i) = \left|\ln 2\sqrt{q_i(1-q_i)}\right|. \qquad (I.24)$$

Следовательно,

$$Q^+_{min} \leq \exp\left[-n \cdot \min_i \{A(q_i)\}\right]$$

и версятность ошибки на выходе порогового элемента с ростом числа n вычислительных элементов (экспертов) падает по экспоненциальному закону.

Следовательно, найдется такое значение $n=n_0$, что для всех $n>n_0$ будет иметь место неравенство

$$\exp\left[-n\cdot\min_i\{A(q_i)\}\right]<\min_i\{q_i\}.$$

Легко видеть, что

$$n_0=\frac{\ln\left(1/\min_i\{q_i\}\right)}{\min_i\{A(q_i)\}}.$$

Значения $a_i S$, доставляющие выражению (I.20) минимум, удовлетворяют условию

$$a_i S=\frac{1}{2}\ln\frac{1-q_i}{q_i}. \qquad (I.25)$$

Таким образом, можно утверждать, что при заданных n и q_i ($i=0,1,2,\ldots,n$) вероятность Q ошибки на выходе порогового элемента не превосходит величины Q^+_{min}, задаваемой формулами (I.22) или (I.23), если только веса a_i выбраны в соответствии с условием (I.25):

$$a_i=\frac{1}{2S}\ln\frac{1-q_i}{q_i}, \qquad (I.25^I)$$

где S – произвольное положительное число.

Характер зависимости весов a_i, а также оценок $Q^+_{min}=2\sqrt{q_i(1-q_i)}$ и $A(q)$ от q_i представлен на рис. 6. Для значений $q_i>4/5$ выражение $2\sqrt{q_i(1-q_i)}<q_i$.

Для мажоритарного решающего элемента с $a_i=1$ ($i=\overline{1,n}$) и $a_0=0$ величину S приходится брать равной $\frac{1}{2}\ln\frac{1-q}{q}$, т.к. $q_i\equiv q$ для всех $i=\overline{1,n}$. При этом порог $a_0=\frac{1}{2S}\ln\frac{1-q_0}{q_0}$ будет нулевым лишь в том случае, если $q_0=1/2$. Подчеркнем, что при $q>\frac{1}{2}$ величина S лежит в области отрицательной вещественной полуоси, для которой оценка $Q^{+}_{min}=[2\sqrt{q(1-q)}]^{n}$ несостоятельна (условие $S\geqslant 0$ было существенно использовано при обосновании такой оценки). Значит, этой оценкой только в области $0<q<\frac{1}{2}$ и можно пользоваться. К последнему выводу мы придем несколько позднее и другим путем. Для порогового элемента таких ограничений не возникает.

§ 2. Оптимальное назначение весов для входов порогового решающего органа

Рассмотрим вопрос оптимального назначения весов для входов порогового решающего органа более подробно на основе двух различных подходов - энтропийного и байесовского.

Энтропийный подход. В решающем органе систему $n+1$ вычислительных элементов (экспертов) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ можно трактовать в качестве некоторого источника двоичной информации с энтропией H, определяемой по формуле

$$H=\sum_{i=0}^{n} H_i, \tag{2.1}$$

где H_i - энтропия дискретной случайной величины $\mathcal{X}x_i$, распределение которой задается в виде совокупности вероятностей q_i и $(1-q_i)$, отвечающих ее реализациям $xx_i=-1$ и $xx_i=+1$ соответственно.

Следовательно,

$$H_i=-(1-q_i)\ln(1-q_i)-q_i\ln q_i. \tag{2.2}$$

Поэтому

$$H=\sum_{i=0}^{n}\left[-(1-q_i)\ln(1-q_i)-q_i\ln q_i\right] \tag{2.3}$$

Если в двух вычислительных элементах $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{B}_j$ одинаковые изменения Δq_i и Δq_j $(\Delta q_i = \Delta q_j)$ вероятностей их ошибок q_i и q_j влекут за собой различные изменения $(\Delta H)_i$ и $(\Delta H)_j$ энтропии H, то естественно приписать тому вычислительному элементу, который вызвал большее изменение энтропии, и больший вес. Иначе говоря, вес a_i должен служить мерой изменения энтропии источника информации - совокупности вычислительных элементов - в зависимости от приращения вероятности q_i:

$$a_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \tag{2.4}$$

С учетом выражения для H из этой формулы получим:

$$a_i = \frac{dH_i}{dq_i} = \ln \frac{1-q_i}{q_i} . \tag{2.5}$$

Принимая (2.4.) за определение, на основании соотношения (I.25) легко заключить, что оптимальное значение постоянной S составляет I/2.

<u>Байесовский подход</u>. Перейдем к изложению байесовского подхода. Пусть появление сигнала +I или -I на выходе решающего элемента в качестве правильного сигнала трактуется как событие B_+ или B_-. Это событие может иметь место при 2^n различных наборах значений $(\tilde{1}, \tilde{1}, \dots, \tilde{1})$ переменных x_1, $x_2, \dots, x_n$ на входах - гипотезах $A_1, A_2, \dots, A_n$. Здесь тильда $\sim$ над единицей означает, что последняя берется либо со знаком плюс, либо со знаком минус. Каждая гипотеза A_k сообщает событию B_+ вероятность $P(B_+/A_k)$, а событию B_- - вероятность $P(B_-/A_k)$. Вероятности гипотез A_k до опыта составляют $P(A_k)$, а априорные вероятности событий B_+ и B_- - $P(B_+)$ и $P(B_-)$. Допустим, что опыт произведен и в нем реализовалось событие B_+ или B_-. Тогда предстоит произвести переоценку вероятностей гипотез A_k, т.е. найти

вероятности $P(A_K/B_+)$ или $P(A_K/B_-)$. Эти вероятности находятся по формулам Байеса:

$$P(A_K/B_\pm)=\frac{P(A_K)P(B_\pm/A_K)}{\sum\limits_{j=1}^{2^n}P(A_j)P(B_\pm/A_j)}$$

Здесь на основании т.н. формулы полных вероятностей:

$$P(B_\pm)=\sum_{j=1}^{2^n}P(A_j)P(B_\pm/A_j).$$

Следовательно,

$$P(A_K/B_\pm)=\frac{P(A_K)P(B_\pm/A_K)}{P(B_\pm)},$$

откуда

$$P(B_+/A_K)=\frac{P(A_K/B_+)\cdot P(B_+)}{P(A_K)}, \qquad (2.6.)$$

$$P(B_-/A_K)=\frac{P(A_K/B_-)\cdot P(B_-)}{P(A_K)}. \qquad (2.7)$$

После почленного деления соотношений (2.6) и (2.7) получим:

$$\frac{P(B_+/A_K)}{P(B_-/A_K)}=\frac{P(B_+)}{P(B_-)}\cdot\frac{P(A_K/B_+)}{P(A_K/B_-)}.$$

Логарифмирование же этого выражения дает:

$$\ln\frac{P(B_+/A_K)}{P(B_-/A_K)}=-\ln\frac{P(B_-)}{P(B_+)}\cdot\ln\frac{P(A_K/B_+)}{P(A_K/B_-)}. \qquad (2.8)$$

Выразим фигурирующие здесь вероятности событий через вероятности q_i ($i=0,1,\ldots,n$). Легко видеть, что

$$P(\mathcal{B}_+) = \mathcal{P}rob\{\mathcal{X} = +1\} = q_0,$$

$$P(\mathcal{B}_-) = \mathcal{P}rob\{\mathcal{X} = -1\} = 1 - q_0.$$

Следовательно,

$$-\ln \frac{P(\mathcal{B}_-)}{P(\mathcal{B}_+)} = -\ln \frac{1-q_0}{q_0}. \tag{2.9}$$

Аналогично:

$$P(A_K/\mathcal{B}_+) = \prod_{j \in x_j = +1} (1-q_j) \cdot \prod_{j \in x_j = -1} q_j,$$

$$P(A_K/\mathcal{B}_-) = \prod_{j \in x_j = +1} q_j \cdot \prod_{j \in x_j = -1} (1-q_j),$$

$$(K = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

где $j \in x_j = \pm 1$ означает, что перемножаются члены с такими индексами j, для которых $x_j = \pm 1$.

Таким образом

$$\frac{P(A_K/\mathcal{B}_+)}{P(A_K/\mathcal{B}_-)} = \prod_{j \in x_j = +1} \frac{1-q_j}{q_j} \prod_{j \in x_j = -1} \frac{q_j}{1-q_j}.$$

Поэтому

$$\ln \frac{P(A_K/\mathcal{B}_-)}{P(A_K/\mathcal{B}_+)} = \sum_{j \in x_j = +1} \ln \frac{1-q_j}{q_j} + \sum_{j \in x_j = -1} \frac{q_j}{1-q_j} = \tag{2.10}$$

$$= \sum_{j \in x_j = +1} \ln \frac{1-q_j}{q_j} - \sum_{j \in x_j = -1} \ln \frac{1-q_j}{q_j} = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{1-q_i}{q_i}.$$

Подставляя выражения (2.10) и (2.9) в соотношение (2.8), получим

$$\ln \frac{P(B_+/A_K)}{P(B_-/A_K)} = x_0 \ln \frac{1-q_0}{q_0} + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{1-q_i}{q_i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x_i \ln \frac{1-q_i}{q_i}, \qquad (2.II)$$

где $x_0 \equiv -1$.

Пусть в соотношении (2.II)

$$\left.\begin{array}{c} \ln \dfrac{1-q_i}{q_i} = a_i \\ i=0,1,2,\ldots,n \end{array}\right\}, \qquad (2.I2)$$

причем $a_0 = \theta$.

Тогда

$$\ln \frac{P(B_+/A_K)}{P(B_-/A_K)} = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i = Z.$$

Если $Z > 0$, то

$$\ln \frac{P(B_+/A_K)}{P(B_-/A_K)} > 0$$

и, следовательно,

$$P(B_+/A_K) > P(B_-/A_K).$$

Одновременно решающий элемент принимает решение

$$y = \operatorname{sgn} Z = +1.$$

Если $Z < 0$, то

$$\ln \frac{P(B_+/A_K)}{P(B_-/A_K)} < 0$$

и, следовательно,

$$P(B_-/A_k) > P(B_+/A_k),$$
$$k=1,2,\ldots,2^n.$$

Одновременно решающий орган принимает решение

$$y = \operatorname{sgn} z = -1$$

Из этого рассмотрения следует, что решающий элемент всегда выдает такое решение y, вероятность безошибочности которого больше вероятности безошибочности противоположного решения, если только порог $\theta = a_0$ и веса a_i $(i=\overline{1,n})$ определены через соотношения (2.12).

Следовательно, назначаемые по соотношениям (2.12) веса согласованы как с байесовским, так и с энтропийным критериями.

§ 3. Законы распределения и статистические характеристики весов

Предыдущее изложение показывает, что оптимальный вес a_i оказался зависящим от значения вероятности ошибки q_i. Но последняя лишь оценивается в результате M_i независимых испытаний частотою n_i/M_i по n_i появлением ошибки, вероятность которой q_i неизвестна. Разумеется, естественно и теоретически оправдано в длинной серии испытаний полагать приближенно, что

$$q_i \approx \frac{n_i}{M_i}.$$

Однако такое равенство даже при больших M_i сопряжено с некоторой погрешностью ввиду того, что n_i/M_i есть одно из возможных значений случайной величины $\hat{q}_i = N_i/M_i$ – статистической оценки вероятности q_i, определяемой через случайную величину N_i – число ошибок i-го вычислительного элемента (эксперта) в серии из M_i независимых испытаний. Возможные значения n_i этой случайной величины составляют 0,1,2,..., M_i.

В силу отмеченного и выбранные веса a_i не окажутся оптимальными. В каждой серии испытаний мы будем получать лишь одну из реализаций α_i случайной величины $\hat{a}_i$, являющейся статистической оценкой оптимального веса a_i. Эта случайная величина связана с $\hat{q}_i$ соотношением

$$a_i = \ln\frac{1-\hat{q}_i}{\hat{q}_i} \tag{3.1}$$

где $0<\hat{q}_i<1, \; -\infty<\hat{a}_i<+\infty$.

Естественно поставить задачу определения плотности вероятности $g_i(\alpha_i)$ для случайной величины (3.1) по заданной плотности $\varphi_i(q_i)$ случайной величины $\hat{q}_i$.

Как известно, для непрерывной случайной величины $\hat{q}_i$, имеющей плотность вероятности $\varphi_i(q_i)$, и строго монотонной функции $\alpha_i = u_i(q_i)$ плотность вероятности $g_i(\alpha_i)$ случайной величины $\hat{a}_i = u_i(\hat{q}_i)$ имеет вид:

$$g_i(\alpha_i) = \varphi_i(u_i^{-1}(\alpha_i))\cdot\left|\frac{d u_i^{-1}(\alpha_i)}{d\alpha_i}\right|, \tag{3.2}$$

где $u_i^{-1}(\alpha_i)$, как обычно, обозначает функцию, обратную функции $\alpha_i = u_i(q_i)$.

Так как в нашем случае

$$\alpha_i = u_i(q_i) = \ln\frac{1-q_i}{q_i},$$

то

$$u_i^{-1}(\alpha_i) = \frac{1}{1+\exp(\alpha_i)},$$

$$\frac{dU_i^{-1}(\alpha_i)}{d\alpha_i} = -\frac{\exp \alpha_i}{[1+\exp(\alpha_i)]^2}.$$

Следовательно,

$$g_i(\alpha_i) = \frac{\exp(\alpha_i)}{[1+\exp(\alpha_i)]^2} \cdot \varphi_i\left(\frac{1}{1+\exp(\alpha_i)}\right). \qquad (3.3)$$

Для задания плотностей $\varphi_i(q_i)$ случайных величин $\hat{q}_i$ можно использовать байесовский подход. В его основе лежит предположение, что случайная величина N_i имеет плотность распределения $f_i(n_i)$, которая зависит от вероятности q_i ошибки эксперта. В традиционном методе статистических выводов q_i является постоянной величиной, а при байесовском подходе q_i трактуется в качестве случайной величины $\hat{q}_i$, и наше априорное знание значений $\hat{q}_i$ описывается плотностью $h_i(q_i)$. Эта плотность носит субъективный характер, и ее нельзя смешивать с объективными оценками вероятности, полученными при частотном подходе к расчету вероятностей.

Проведем M_i независимых опытов, состоящих в том, что i-му эксперту (вычислительному элементу) M_i раз предъявляют для распознавания двоичную переменную X. В этих испытаниях может быть определена конкретная реализация n_i случайной величины N_i числа ошибок эксперта. Логично допустить, что существует условная плотность распределения $G(n_i/q_i)$ этой случайной величины при данном значении q_i. Тогда плотность совместного распределения случайных величин $\hat{q}_i$ и N_i будет иметь вид:

$$f_i(q_i, n_i) = h_i(q_i) \cdot G(n_i/q_i). \qquad (3.4)$$

Плотность безусловного распределения случайной величины определится по формуле

$$F_i(n_i)=\int_0^1 h_i(q_i)\,G(n_i/q_i)\,dq_i\,. \tag{3.5}$$

Следовательно, плотность условного распределения случайной величины $\hat{q}_i$ при наличии информации о случайной величине N_i примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i(q_i/n_i)=\frac{h_i(q_i)\cdot G(n_i/q_i)}{F_i(n_i)}\\ &F_i(n_i)>0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Исходя из байесовского подхода, в рассмотрение можно ввести плотность $g_i(\alpha_i/n_i)$ апостериорного распределения случайной величины $\hat{a}_i$ при наличии достоверных данных n_i о значении N_i. Тогда формула (3.3) примет следующий вид:

$$g_i(\alpha_i/n_i)=\frac{exp(\alpha_i)}{[1+exp(\alpha_i)]^2}\cdot\varphi_i\left(\frac{1}{1+exp(\alpha_i)}\Big/n_i\right). \tag{3.7}$$

Поскольку испытания каждого i-го эксперта проводятся по схеме Бернулли, то случайная величина N_i имеет биномиальное распределение

$$\left.\begin{aligned} &G_i(n_i/q_i)=C_{M_i}^{n_i}\cdot q_i^{n_i}(1-q_i)^{M_i-n_i}\\ &n_i=0,1,2,\dots,M_i\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

В качестве априорного распределения случайной величины $\hat{q}_i$ примем бета-распределение с плотностью

$$h_i(q_i)=\begin{cases}\dfrac{q_i^{a_i-1}\cdot(1-q_i)^{b_i-1}}{\mathcal{B}(a_i,b_i)} & 0<q_i<1\\ 0 \text{ при остальных } q_i\end{cases} \qquad (3.9)$$

Здесь a_i и b_i - положительные постоянные, определяющие форму распределения, а $\mathcal{B}(a_i,b_i)$ - т.н. полная бета-функция:

$$\mathcal{B}(a,b)=\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

причем

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt,$$

- гамма-функция, определенная при $x>0$ (для комплексных x - при $Re\,x>0$). В случае положительного целого аргумента

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(n)&=(n-1)!\\ \Gamma(2)&=\Gamma(1)=1\end{aligned}\right\}.$$

Неполная бета-функция определяется соотношением

$$\mathcal{B}_x(a,b)=\int_0^x z^{a-1}(1-z)^{b-1}dz$$

$$(0\le x\le 1).$$

Следовательно, $\mathcal{B}(a,b)\equiv\mathcal{B}_1(a,b)$.

В этих условиях, согласно (3.4),

$$f_i(q_i,n_i)=C_{M_i}^{n_i}\frac{\Gamma(a_i+b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i)}\cdot q_i^{a_i+n_i-1}:(1-q_i)^{b_i+M_i-n_i-1},$$

где $0<q_i<1$ и $n_i=0,1,2,\dots,M_i$.

Плотность безусловного распределения случайной величины $\mathcal{N}_i$ находится по формуле (3.5):

$$F_i(n_i)=C_{M_i}^{n_i}\frac{\Gamma(a_i+b_i)}{\Gamma(a_i)\cdot\Gamma(b_i)}\cdot\int_0^1 q_i^{a_i+n_i-1}\cdot(1-q_i)^{b_i+M_i-n-1}\,dq_i.$$

Входящий в это выражение сомножителем интеграл представляет собой бета-функцию с параметрами a_i+n_i и $b_i+M_i-n_i$. Поэтому

$$F_i(n_i)=C_{M_i}^{n_i}\frac{\Gamma(a_i+b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i)}\cdot\frac{\Gamma(a_i+n_i)\cdot\Gamma(b_i+M_i-n_i)}{\Gamma(a_i+b_i+M_i)}. \tag{3.10}$$

Данное распределение носит в литературе название гипербиномиального.

Плотность апостериорного распределения случайной величины N_i определяется по формуле (3.6) с учетом выражений (3.8), (3.9) и (3.10):

$$\varphi_i(q_i/n_i)=\frac{\Gamma(a_i+b_i+M_i)}{\Gamma(a_i+n_i)\Gamma(b_i+M_i-n_i)}\cdot q^{a_i+n_i-1}\cdot(1-q_i)^{b_i+M_i-n_i-1} \tag{3.11}$$

Полученное выражение представляет собой бета-распределение с параметрами a_i+n_i и $b_i+M_i-n_i$. Следовательно, если случайная величина $\hat{q}_i$ имеет априорное бета-распределение, то и апостериорное распределение остается бета-распределением, однако параметры a_i и b_i меняются на a_i+n_i и $b_i+M_i+n_i$ соответственно.

За байесовскую точечную оценку для $\hat{q}$ можно взять математическое ожидание случайной величины q, определив его по соотношению

$$M[\hat{q}_i]\equiv\mu_i\equiv\int_0^1 q_i\varphi_i(q_i/n_i)\,dq_i=\frac{a_i+n_i}{a_i+b_i+M_i}. \tag{3.12}$$

Дисперсия же этой случайной величины вычисляется по формуле

$$D[\hat{q}_i] \equiv \delta \equiv \int_0^1 (q_i - M_i)^2 \varphi_i(q_i/n_i)\,dq_i = \tag{3.13}$$

$$= \frac{(a_i+n_i)(b_i+M_i-n_i)}{(a_i+b_i+M_i)^2(a_i+b_i+M_i+1)}.$$

Точечная байесовская оценка случайной величины $\hat{a}_i$ может быть определена как ее математическое ожидание:

$$M[\hat{a}_i] \equiv \bar{a}_i = \int_0^1 u_i(q_i)\cdot\varphi_i(q_i/n_i)\,dq_i\,, \tag{3.14}$$

где

$$a_i = u_i(q_i) = \ln\frac{1-q_i}{q_i}.$$

Точное вычисление $\bar{a}_i$ по формуле (3.14) практически невыполнимо, так как закон распределения $\varphi_i(q_i/n_i)$ случайной величины $\hat{q}_i$ весьма сложен.

В этом случае удобно прибегнуть к аппроксимации математического ожидания $M[\hat{a}_i]$ функции $\hat{a}_i = u_i(\hat{q}_i)$ случайной величины $\hat{q}_i$.

Для приближенного вычисления математического ожидания $\bar{a}_i$ величины $\hat{a}_i$ последнюю трактуют как функцию случайной величины $\hat{q}_i$:

$$\hat{a}_i = \ln\frac{1-\hat{q}_i}{\hat{q}_i} = u_i(\hat{q}_i).$$

Разложение функции $\hat{a}_i = u_i(\hat{q}_i)$ вокруг точки $\hat{q}_i = \mu_i$ в ряд Тейлора до первых трех членов имеет вид

$$\hat{a}_i = u_i(\hat{q}_i) = u_i(\mu_i) + (\hat{q}_i - \mu)u_i'(\mu_i) + \frac{(\hat{q}_i - \mu_i)^2}{2!}u_i''(\mu_i) + R_i, \tag{3.15}$$

где R_i – остаточный член. Математическое ожидание этого выражения имеет вид:

$$M[a_i] = M[u_i(\mu_i)] + M[\hat{q}_i u_i'(\mu_i) - \mu_i u_i'(\mu_i)] + M[1/2\, u_i''(\mu_i)\cdot(\hat{q}_i - \mu_i)^2] + M[R_i] = \tag{3.16}$$

$$= u_i(\mu_i) + [\mu_i u_i'(\mu_i) - \mu_i u_i'(\mu_i)] + 1/2\, u_i''(\mu_i)\cdot D[\hat{q}_i] + M[R_i] \approx$$

$$\approx u_i(\mu_i) + 1/2\, u_i''(\mu)\cdot D[\hat{q}_i].$$

Эта формула является приближенной, т.к. остаточный член разложения в ряд Тейлора отброшен. Если дисперсия случайной величины мала, то можно пренебречь и вторым членом в формуле (3.16). Тогда получим:

$$M[\hat{a}_i] \approx u_i(\mu_i). \tag{3.17}$$

Следовательно, с учетом формулы (3.1), задающей вид зависимости $\hat{a}_i = u_i(\hat{q}_i)$, будем иметь:

$$\bar{a}_i = \ln\frac{1-\mu_i}{\mu_i} + 1/2\,\frac{1-2\mu_i}{[\mu_i(1+\mu_i)]^2}\,\delta_i \qquad (3.16^{I})$$

или в более грубом приближении

$$\bar{a}_i = \ln\frac{1-\mu_i}{\mu_i}\,. \qquad (3.17^{I})$$

Учитывая в этих формулах выражения (3.I2) и (3.I3) для μ_i и δ_i, придем к следующим соотношениям:

$$\bar{a}_i = \ln\frac{b_i+M_i-n_i}{a_i+n_i} + 1/2\,\frac{(a_i+b_i+M_i)(b_i+M_i-a_i-2n_i)}{(a_i+n_i)(b_i+M_i-n_i)(a_i+b_i+M_i+1)} \qquad (3.I8)$$

или в более грубом приближении

$$\bar{a}_i = \ln\frac{b_i+M_i-n_i}{a_i+n_i}\,. \qquad (3.I9)$$

Помимо этого, байесовский подход позволяет рассчитать по формуле (3.7) с учетом в ней соотношения (3.II) плотность апостериорного распределения $g_i(\alpha_i/n_i)$, которая выражает степень нашей уверенности относительно значений веса $\hat{a}_i$ с учетом достоверной информации n_i, полученной в серии из M_i независимых опытов по предъявлению i-му вычислительному элементу (эксперту) на распознавание двоичной переменной x:

$$g_i(\alpha_i/n_i) = \frac{\Gamma(a_i+b_i+M_i)}{\Gamma(a_i+n_i)\,\Gamma(b_i+M_i-n_i)}\,\times$$

$$\times\,\frac{\exp\left[(b_i+M_i-n_i)\alpha_i\right]}{(1+\exp\alpha_i)^{a_i+b_i+M_i}}\,. \qquad (3.20)$$

Поскольку до опыта известны, строго говоря, лишь границы 0 и I области возможных реализаций случайной величины $\hat{q}_i$, то априорным распределением, доставляющим максимум энтропии этой случайной величины, как известно из результатов § 4, будет равномерное распределение $h_i(q_i)$ с параметрами $a_i = b_i = 1$.

Для этого частного случая получим:

$$\bar{\alpha}_i = \ln \frac{M_i - n_i + 1}{n_i + 1} + 1/2 \, \frac{(M_i+2)(M_i-2n_i)}{(n_i+1)(M_i-n_i+1)(M_i+3)} \qquad (3.21)$$

или в более грубом приближении

$$\bar{\alpha}_i = \ln \frac{M_i - n_i + 1}{n_i + 1} . \qquad (3.22)$$

Когда при тестировании i-го эксперта $n_i = 0$, использование формулы (3.22) страхует нас от опрометчивого шага назначения бесконечно большого веса $\bar{\alpha}_i$, что было бы неизбежно при небайесовском подходе.

Что касается байесовской плотности распределения случайной величины $\hat{\alpha}_i$ для этого же случая, она принимает следующий вид:

$$g_i(\alpha_i / n_i) = \frac{\Gamma(M_i+2)}{\Gamma(n_i+1)\Gamma(M_i-n_i+1)} \cdot \frac{\exp[(M_i-n_i+1)\alpha_i]}{(1+\exp \alpha_i)^{M_i+2}} . \qquad (3.23)$$

Легко показать, что формула (3.19) задает моду распределения (3.20), т.е. значение α_i, при котором $g(\alpha_i / n)$ достигает максимума. Аналогично, выражение (3.22) служит модой распределения (3.23).

§ 4. Модель решающего органа мажоритарного типа

Рассмотрим решающий орган мажоритарного типа, в котором вероятности ошибок вычислительных элементов (экспертов) одинаковы и равны $q_i \equiv q = 1-p$, веса $a_i = 1$ $(i=\overline{1,n})$, а порог $a_0 \equiv \mathcal{B} = 0$. Обозначим через ξ число ошибок на n входах решающего элемента. Если эти ошибки независимы, распределение случайной величины ξ будет подчиняться биномиальному закону, т.е.

$$\mathcal{P}rob\{\xi = k\} = C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \qquad (4.1)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

В этих предположениях вероятность Q ошибки на выходе мажоритарного элемента равна вероятности того, что случайная величина ξ окажется не меньше половины общего числа его входов, иначе говоря, не меньше, чем $]n/2+1[$, где $]n/2+1[$ - наибольшая целая часть величины $n/2+1$:

$$Q = \mathcal{P}rob\left\{\xi \geqslant \,]n/2+1[\right\}. \qquad (4.2)$$

Следовательно,

$$Q = \sum_{k=]n/2+1[}^{n} C_n^k q^k (1-q)^{n-k} \qquad (4.3)$$

Выражение (4.3.) является точным, однако оно не дает достаточно наглядного представления о характере зависимости

$$Q = f(q,n).$$

Поэтому попытаемся получить для верхней границы вероятности (4.3) асимптотическую оценку, отвечающую условию $n \longrightarrow \infty$

Легко видеть, что в правой части соотношения (4.3) отношение γ последующего члена суммы к предыдущему не остается величиной постоянной, поскольку

$$\gamma = \frac{n-j}{j+1} \cdot \frac{q}{1-q} \equiv \gamma_j ,$$

где

$$j =]1/2+1[,\ ]n/2+1[+1, \ldots, n-1.$$

Следовательно,

$$\max_j \{\gamma_j\} = \gamma_{]1/2+1[} ,$$

причем

$$\gamma_{]1/2+1[} = \frac{n-]n/2+1[}{]n/2+1[+1} \cdot \frac{1}{1-q} . \qquad (4.4)$$

Легко доказать, что

$$\gamma_{]n/2+1[} < 1 , \qquad (4.5)$$

если

$$q < \frac{]n/2+1[+1}{n+1} \equiv q_0(n) , \qquad (4.6)$$

где, как нетрудно видеть, для конечных значений n

$$1/2 < q_0(n) \leq 1 . \qquad (4.7)$$

Однако при

$$\lim_{n \to \infty} q_0(n) = 1/2 .$$

Впредь будем предполагать, что условие (4.6) выполнено, и рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\gamma_{]n/2+1[}$ и первым членом, равным

$$C_n^{]n/2+1[} \cdot q^{]n/2+1[} \cdot (1-q)^{n-]n/2+1[}.$$

Ясно, что величина Q не может превосходить суммы членов этой прогрессии, т.е.

$$Q \le \frac{1}{1-\frac{n-]n/2+1[}{]n/2+1[+1}\cdot\frac{q}{1-q}} C_n^{]n/2+1[} \cdot q^{]n/2+1[} \cdot (1-q)^{n-]n/2+1[}. \qquad (4.8)$$

Логарифмируя обе части последнего неравенства, получим:

$$\ln Q \le \ln \frac{1}{1-\frac{n-]n/2+1[}{]n/2+1[+1}\cdot\frac{q}{1-q}} + \ln C^{]n/2+1[} + \qquad (4.9)$$

$$+]n/2+1[\ln q + (n-]n/2+1[) \ln (1-q).$$

Дальнейший анализ этого соотношения проведем для случаев четного и нечетного n отдельно.

Пусть n – четно. Следовательно, $]n/2+1[= n/2+1$, и, таким образом,

$$\ln Q \le \ln \frac{1}{1-\frac{n/2-1}{n/2+2}\cdot\frac{q}{1-q}} + \ln C^{n/2+1} +$$

$$+ (n/2+1) \ln q \, (n/2-1) \ln (1-q).$$

Разделив обе части данного неравенства на n и переходя к пределу при $n \to \infty$, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln Q}{n} \le \ln\sqrt{q(1-q)} + \lim_{n\to\infty} 1/n \ln C_n^{n/2+1}, \qquad (4.10)$$

где

$$C^{n/2+1} = \frac{n!}{(n/2+1)!\,(n/2-1)!}.$$

Следовательно,

$$\ln C_n^{2/n+1} = \ln n! - \ln(n/2+1)! - \ln(n/2-1)!$$

По формуле Стирлинга

$$\ln n! = (n+1/2)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi},$$

$$\ln(n/2+1)! = (n/2+3/2)\ln(n/2+1) - (n/2+1) + \ln\sqrt{2\pi},$$

$$\ln(n/2-1)! = (n/2-1/2)\ln(n/2-1) - (n/2-1) + \ln\sqrt{2\pi}.$$

Поэтому

$$\ln C_n^{n/2+1} = (n+1/2)\ln n - (n/2+3/2)\ln(n/2+1) -$$

$$- (n/2-1/2)\ln(n/2-1) - \ln\sqrt{2\pi}.$$

Разделив обе части последнего равенства на n и устремив его к пределу, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} \ln C^{n/2+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\ln n - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{n}{2}+1\right) - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\right],$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} \ln C^{n/2+1} = \ln 2. \qquad (4.11)$$

С учетом этого соотношения неравенство (4.10) окончательно примет следующий вид:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln Q}{n} \leq \ln 2\sqrt{q(1-q)}. \qquad (4.12)$$

Пусть сейчас n нечетно. Следовательно, $]n/2+1[= n/2+1/2$, и, таким образом,

$$\ln Q \leq \frac{1}{1-\frac{n/2-1/2}{n/2+3/2}\cdot\frac{q}{1-q}} + \ln C_n^{n/2+1/2} +$$

$$+ \left(n/2+1/2\right)\ln q \left(n/2-1/2\right)\ln(1-q).$$

Поступая далее совершенно аналогично предыдущему случаю, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln Q}{n} \leq \ln\sqrt{q(1-q)} + \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln C_n^{n/2+1},$$

где, как нетрудно показать, по-прежнему

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} C_n^{n/2+1/2} = \ln 2.$$

Следовательно, для нечетных n, равно как и для четных,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln Q}{n} \leq \ln 2\sqrt{q(1-q)}.$$

На основании вышеизложенного заключаем, что для верхней асимтотической границы Q_a^+ вероятности Q имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\ln Q_a^+}{n} = \ln 2\sqrt{q(1-q)} \tag{4.13}$$

Для выполнения условия

$$\ln 2\sqrt{q(1-q)} < 0$$

необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось неравенство

$$2\sqrt{q(1-q)} < 1.$$

Легко показать, что последнему неравенству удовлетворяют все значения q из области $0 \leq q \leq 1$, за исключением точки $q = 1/2$, в которой $\ln 2\sqrt{q(1-q)} = 0$.

Таким образом,

$$\ln 2\sqrt{q(1-q)} \leq 0, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Вводя обозначение

$$A(q) = \left|\ln 2\sqrt{q(1-q)}\right|, \tag{4.14}$$

соотношение (4.13) окончательно можно придать следующий вид:

$$\frac{\ln Q_a^+}{n} = -A(q),$$

откуда

$$Q_a^+ = \exp[-A(q)\cdot n], \tag{4.15}$$

либо

$$\ln Q_a^+ = -A(q)\cdot n. \tag{4.16}$$

Таким образом, для всех значений q, удовлетворяющих условию $0 \leq q \leq 1/2$, при котором величина $A(q)$ строго положительна, асимптотическая оценка (4.15) для верхней границы вероятности ошибки на выходе мажоритарного элемента с ростом n убывает по экспоненциальному закону (рис.7). При $q = 1/2$, когда $A(q) = 0$, величина Q_a^+ при любых сколь угодно больших значениях n близка к единице.

Зависимость (4.10) графически представлена на рис. 8. В области малых значений n графики функций (4.15) и (4.16) на рисунках 7 и 8 проведены пунктирными линиями, поскольку при малых n они несостоятельны.

§ 5. Выбор порога для реализации функции решения с минимальным риском

Работу решающего органа, приведенного на рисунке 4, представляется возможным описать и в терминах теории распознавания образов.

В самом деле, значения двоичной переменной x, равные +1 и - 1, допустимо рассматривать в качестве классов ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда $P(\omega_1)$ и $P(\omega_2)$ будут априорными вероятностями появления классов ω_1 и ω_2. Выборочный образ, возникающий на входах решающего элемента и соответствующий истинному значению переменной x, имеет вид последовательности из n положительных и отрицательных единиц:

$$A_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\tilde{1}, \tilde{1}, \ldots, \tilde{1}),$$

где тильда над единицей, как и прежде, означает, что последняя берется либо со знаком плюс, либо со знаком минус. Число различных образов, естественно, составляет 2^n, т.е. $K = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$.

Вероятность принадлежности образа A_K к классу ω_i будем обозначать как $P(\omega_i / A_K)$.

Для описания работы решающего органа в рассмотрение можно ввести матрицу $\|L\|$ размера 2x2 с элементами L_{ij}. Номера строк этой матрицы могут соответствовать классам ω_1 и ω_2, номера столбцов - принимаемым решениям $y = y_1 = +1$ и $y = y_2 = -1$:

$$\|L\| = \begin{array}{c|cc|} & y_1 & y_2 \\ \hline \omega_1 & L_{11} & L_{12} \\ \omega_2 & L_{21} & L_{22} \end{array}$$

Элемент L_{ij} этой матрицы представляет те убытки (потери), которые терпят тогда, когда решающий элемент принимает решение о том, что образ A_K принадлежит классу ω_j, когда на самом деле он принадлежит классу ω_i.

Иногда при принятии правильного решения потери равны нулю и одинаковы при принятии любого неправильного решения. Поэтому элемент L_{ij} матрицы потерь $\|L\|$ можно представить в виде

$$L_{ij} = 1 - \delta_{ij},$$

где $\delta_{ij} = 0$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i \neq j$.

Поскольку образ A_K может принадлежать любому из классов ω_1 и ω_2, в рассмотрение следует ввести математическое ожидание потерь, связанных с отнесением образа A_K к классу ω_j :

$$\left. \begin{aligned} R_j(A_K) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_{ij} P(\omega_i / A_K) \\ j=1,2 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Эта величина в теории распознавания образов часто называется условным средним риском, или условной средней потерей.

Работа решающего органа может быть организована следующим образом. Для каждого образа A_K переменной $\mathfrak{X}$, сформированного вычислительными элементами (экспертами), вычисляются условные средние потери $R_1(A_K)$ и $R_2(A_K)$. Затем решающий элемент причисляет A_K к классу, которому соответствует наименьший условный средний риск. Легко видеть, что такая стратегия функционирования решающего органа обеспечивает и минимум математического ожидания полных потерь на множестве всех решений. Решающий орган, минимизирующий математическое ожидание общих потерь, называется байесовским, а принимаемое на его выходе решение - байесовским решением.

Докажем, что пороговый решающий орган на рисунке 4 может реализовать функцию решения с минимальным риском (т.е. дать байесово решение) и найдем необходимый порог.

По формуле Байеса

$$P(\omega_i / A_K) = \frac{P(\omega_i) P(A_K / \omega_i)}{P(A_K)}, \quad (5.2)$$

где вероятность $P(A_K/\omega_i)$ называется функцией правдоподобия для класса ω_i. Подставляя (5.2.) в (5.1), получим:

$$\left.\begin{aligned} R_j(A_K) = \frac{1}{P(A_K)} \cdot \sum_{i=1}^{2} l_{ij} \cdot P(\omega_i) P(A_K/\omega_i) \\ j = 1,2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

При байесовской стратегии принятия решения образ A_K зачисляется в класс ω_1, если $R_1(A_K) < R_2(A_K)$ и в класс ω_2 в случае противоположного неравенства. При $R_1(A_K) = R_2(A_K)$ решение y не принимается.

Нетрудно показать, что условие $R_1(A_K) < R_2(A_K)$ равносильно неравенству

$$l_{11} P(A_K/\omega_1) P(\omega_1) + l_{21} P(A_K/\omega_2) P(\omega_2) <$$

$$< l_{12} P(A_K/\omega_1) P(\omega_1) + l_{22} P(A_K/\omega_2) P(\omega_2),$$

откуда

$$(l_{12} - l_{11}) P(A_K/\omega_1) P(\omega_1) > (l_{21} - l_{22}) P(A_K/\omega_2) P(\omega_2).$$

Поскольку $l_{ii} < l_{ij}$, когда $i \neq j$, то последнее соотношение равносильно следующему:

$$\frac{P(A_K/\omega_1)}{P(A_K/\omega_2)} > \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \frac{l_{21} - l_{22}}{l_{12} - l_{11}}.$$

В привычных обозначениях параграфа 2 последнее неравенство приобретает следующий вид:

$$\frac{P(A_K/B_+)}{P(A_K/B_-)} > \frac{P(B_-)}{P(B_+)} \cdot \frac{l_{21} - l_{22}}{l_{12} - l_{11}}.$$

На основании свойства логарифмической функции отсюда следует, что

$$\ln \frac{P(A_к/B_+)}{P(A_к/B_-)} > \ln \left[\frac{L_{21}-L_{22}}{L_{12}-L_{11}} \cdot \frac{P(B_-)}{P(B_+)} \right].$$

Учитывая здесь результаты (2.10) и (2.9), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{1-q_i}{q_i} - \ln \left(\frac{L_{21}-L_{22}}{L_{12}-L_{11}} \cdot \frac{1-q_0}{q_0} \right) > 0. \qquad (5.4)$$

Полагая, что

$$a_i = \ln \frac{1-q_i}{q_i}, \quad i=1,2,\dots,n, \qquad (5.5)$$

$$a_0 \equiv \theta = \ln \left(\frac{L_{21}-L_{22}}{L_{12}-L_{11}} \cdot \frac{1-q_0}{q_0} \right), \qquad (5.6)$$

$$x_0 \equiv 1,$$

$$z = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i,$$

результат, выражаемый неравенством (5.4), можно записать в такой форме:

y = +I, если $z > 0$,

y = -I, если $z < 0$,

y = 0 (решение не принимается), если $z = 0$

что описывает алгоритм функционирования порогового элемента. Следовательно, байесово решение совпадает с пороговым.

Этим полностью доказывается, что пороговый решающий орган может реализовать функцию решения с минимальным риском, если веса a_i (i = I,2,...., n) выбраны в соответствии с формулой (5.5), а порог $a_0 \equiv \theta$ – по соотношению (5.6)

Поступила 7.5.1982 Кафедра радиотехники

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж.Нейман. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. Сб. "Автоматы" под ред. К.Э.Шеннона и Дж. Маккарти, пер. с англ. под ред. А.А.Ляпунова. Изд. иностранной литературы, М., 1956.
2. R.McNayghton. Unate truth Functions, IRE Trans. on Electr.Computers, 1961, v.1.
3. M.C.Paull, E.J.McClusky, Boolean Functions Realizable with Single Threshold Devices, Proc. IRE, 1960, v.48, p.p. 1335-1337.
4. O.B.Stram. Arbitrary Boolean Functions of Variable in Terms of Threshold Devices, Proc. IRE, 1961, v. 49, p.p. 210-220.
5. М.Дертоузос. Пороговая логика. М., "Мир", 1966.
6. И.Н.Боголюбов, Б.Л.Овсиевич, Л.Я.Розенблюм. Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов. Сб. "Сети передачи информации и их автоматизация". М., "Наука", 1965.
7. У.Пирс. Построение надежных вычислительных машин. Перев. с англ. Б.Л.Овсиевича и Л.Я.Розенблюма. М., "Мир", 1968.

ო. ნამიჩეიშვილი, ჯ. გუგუშვილი

ელექტრონული სქემების ავტომატიზებული დაპროექტების სისტემაში გადამწყვეტი ორგანოს ფუნქციონირების მათემატიკური მოდელები

რ ე ზ ი უ მ ე

განიხილება გადაწყვეტილებათა მიღების მაჟორიტარული და კვორუმული მოდელები. ფასდება გადამწყვეტი ორგანოს შეცდომის ალბათობა როგორც ცალკეული ექსპერტების შეცდომათა ალბათობების, ექსპერტთა რაოდენობისა და მათთვის მინიჭებული წონების ფუნქცია. ექსპერტთა ოპტიმალური წონების დასადგენად წამოყენებულია ენტროპიული პრინციპი, რომლის საფუძველზე მიღებული შედეგები ბაიესის მიდგომით გამოთვლილ შედეგებს ემთხვევა.

O. Namicheishvili, J. Gugushvili

MATHEMATICAL MODELS OF THE FUNCTIONING OF THE DECISIVE ELEMENT IN AN AUTOMATED DESIGN SYSTEM OF ELECTRONIC CIRCUITS

Summary

Models of decision making on the basis of threshold principles are considered. The error probability of the decisive elements as a function of the error probability of separate experts, their number and weight coefficient assigned to them, are estimated. An entropy approach to problem of assignment of optimal weights of experts is proposed, the results obtained corresponding to the computation results according to the Bayes approach.

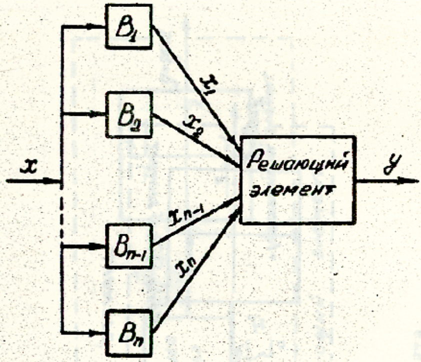


Рис.I Модель решающего органа.

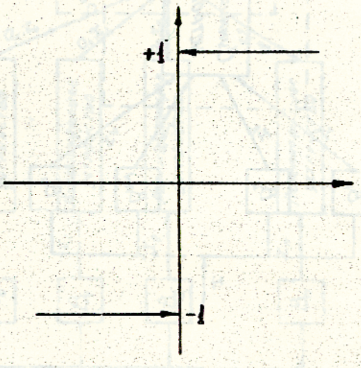


Рис.2 График функции $y = sgn\, z$

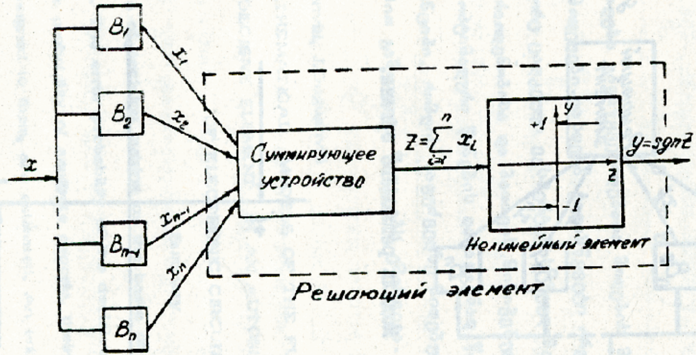


Рис.3 Модель мажоритарного элемента.

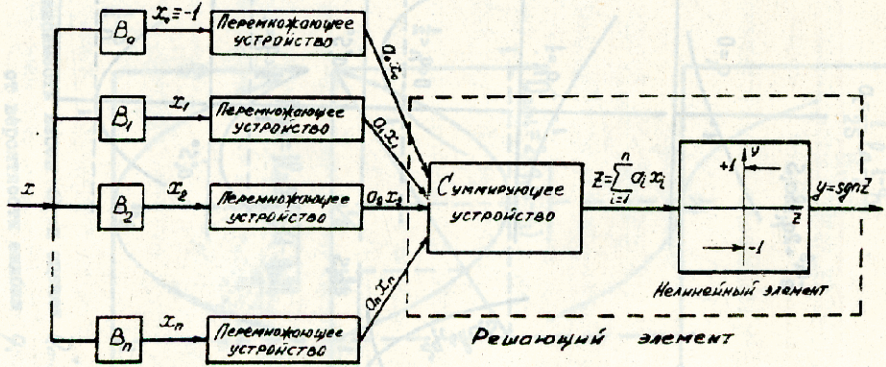


Рис.4 Модель порогового элемента.

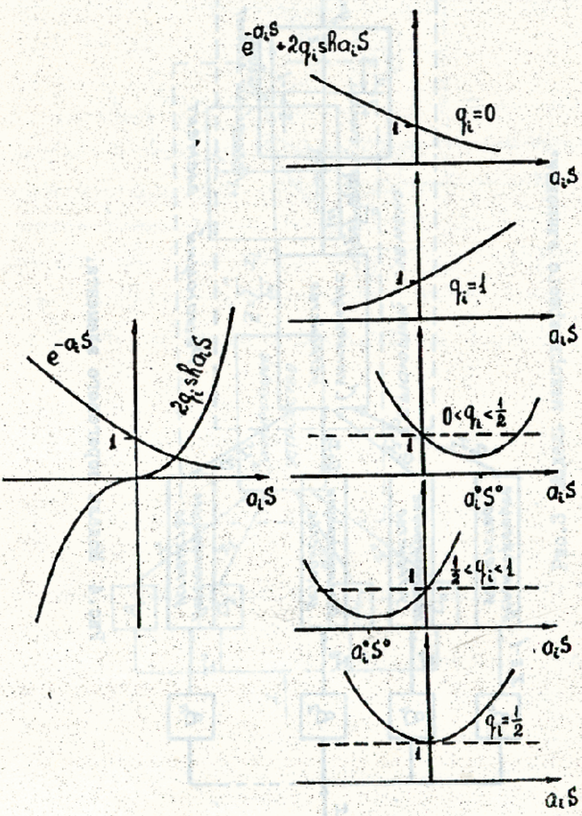


Рис.5 Графическая интерпретация соотношения (I.20).

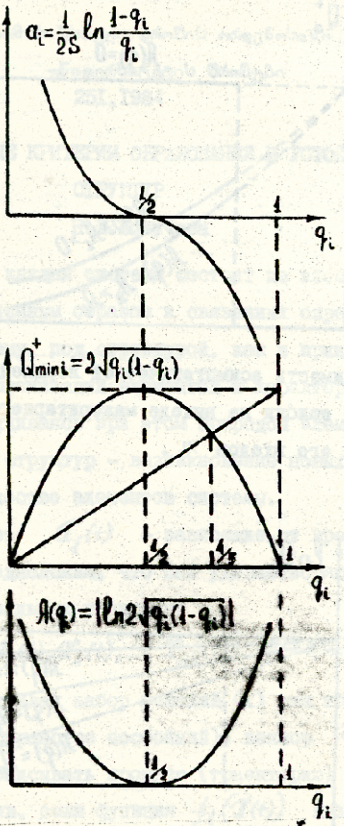


Рис.6 Зависимость весов a_i и оценок Q^+_{mini} и $A(q_i)$ от вероятности ошибки q_i.

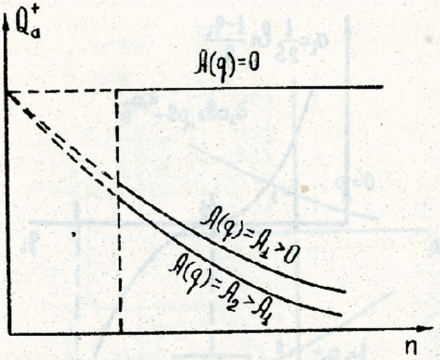


Рис.7 Зависимость асимптотической верхней границы вероятности ошибки на выходе мажоритарного элемента от числа его входов n.

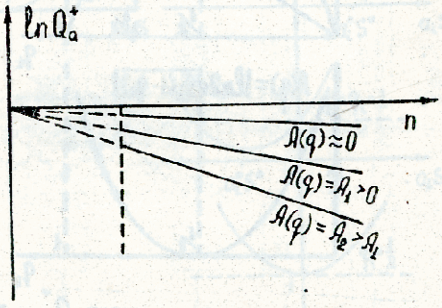


Рис.8 Зависимость натурального логарифма вероятности от n при разных значениях $A(q)$.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ ОБРАЗОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ СТРУКТУР

Н.В.Бокучава

Известно, что каждая система состоит из элементов, упорядоченных определенным образом и связанных определенными отношениями. Поэтому, под структурой, как и принято, будем понимать способ организации элементов и характер связи между ними, не ограничиваясь при этом природой элементов, а под формированием структур – возникновение новых свойств и соотношений в множестве элементов системы.

Обозначим через $X_i(t)$ – зависящие от времени параметры структуры и предположим, что они удовлетворяют следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_i(t)}{dt}=f_i\left(X_1(t), X_2(t),\ldots, X_m(t)\right) \quad (i=\overline{1,m}). \qquad (I)$$

Тогда, рассматривая набор решений (I) как точку в фазовом пространстве (пространстве состояний), вектор $X(t)=\{X_1(t),\ldots,X_m(t)\}$ будет описывать процесс (траекторию) образования структур во времени, если функция $f_i(X(t))$ является нелинейной функцией своих переменных /I/.

Поскольку в реальных системах, при образовании структур, флуктуации всегда играют определенную роль, из-за наличия которых нарушается однозначность предсказания будущего состояния системы, то вектор состояния $X(t)$ целесообразно заменить вектором $x(t)=\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$, компонентами которого являются случайные отклонения компонент вектора $X(t)$ от компонент вектора стационарного состояния $X^s(t)$, т.е.

$$x_i(t)=X_i(t)-X_i^s(t) \qquad (i=\overline{1,m}) \tag{2}$$

Подставляя (2) в (I) и разлагая функцию $f_i(X(t))$ в ряд Тейлора в окрестности $X_i^s(t)$

$$f_i(X(t))=f_i(X^s(t))+\sum_{j=1}^{m}\left.\frac{\partial f_i(X(t))}{\partial X_j(t)}\right|_{X(t)=X^s(t)}\left(X_j(t)-X_j^s(t)\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\left.\frac{\partial^2 f_i(X(t))}{\partial X_j(t)\partial X_\ell(t)}\right|_{X(t)=X^s(t)}\left(X_j(t)-X_j^s(t)\right)\times\left(X_\ell(t)-X_\ell^s(t)\right)$$

с учетом $\dfrac{dX^s(t)}{dt}=0$ и $f_i(X^s(t))=0$, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=F_i(x(t)), \tag{3}$$

где

$$F_i(x(t))=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,x_j(t)+\varphi_i(x(t)),$$

$$a_{ij}=\left.\frac{\partial f_i(X(t))}{\partial X_j(t)}\right|_{X(t)=X^s(t)},$$

$$\varphi_i(x(t))=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\left.\frac{\partial^2 f_i(X(t))}{\partial X_j(t)\partial X_\ell(t)}\right|_{X(t)=X^s(t)}x_j(t)\,x_\ell(t).$$

Структура устойчива относительно флуктуаций, т.е.

$x(t)=0$, или неустойчива, т.е. $x(t)\neq 0$, в зависимости от того, отрицательны или нет все действительные части корней характеристического уравнения

$$Det(a_{ij}-\alpha\mathcal{E}_{ij})=0$$

(независимо от вида функции $\varphi_i(x(t))$).

Обозначим через $P(t)=(P_1(t),\dots,P_m(t))$, где $P_i(t)=P(x_i(t))$ - вероятность перехода системы из состояния $X^s(t)$ в состояние $X(t)$, и предположим, исходя из (2), что скорость изменения вероятности перехода есть функция самой вероятности, т.е.

$$\frac{dP(t)}{dt}=g(P(t)). \tag{4}$$

Поскольку структура представляет наибольший интерес в том случае, когда она устойчива относительно флуктуаций и может некоторое время существовать в неизмененном, т.е. стационарном состоянии, то и информационную меру предпочтительности образования структур определим в виде следующего функционала /2/:

$$\mathcal{I}(t)=\int P^s(t)\ln\frac{P^s(t)}{P(t)}\,dx(t). \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по времени и учитывая, что $\frac{dP^s(t)}{dt}=0$, после несложных вычислений получим

$$\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt}=-\int\frac{P^s(t)}{P(t)}\,\frac{dP(t)}{dt}\,dx(t). \tag{6}$$

Из соотношения (6) видно, что для вычисления скорости изменения информационной меры необходимо знать скорость изменения вероятности перехода $P(t)$ при приближении образованной структуры к стационарному состоянию. Предполагая, что функция $g(P(t))$ аналитична в окрестности стационарного состояния $P^s(t)$ и разлагая ее в ряд Тейлора, из (4) получим

$$\frac{dP(t)}{dt} = g\left(P^s(t)\right) + \beta_1\left(P(t) - P^s(t)\right) + \beta_2\left(P(t) - P^s(t)\right), \qquad (7)$$

где $\beta_1 = g'\left(P^s(t)\right)$ и $\beta_2 = \frac{1}{2} g''\left(P^s(t)\right)$.

Подставляя теперь (7) в (6) и учитывая из (4), что $g\left(P^s(t)\right) = 0$, для скорости изменения информационного функционала предпочтительности образования структур окончательно получим

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -\int \frac{P^s(t)}{P(t)} \left[\beta_1\left(P(t) - P^s(t)\right) + \beta_2\left(P(t) - P^s(t)\right)^2\right] dx(t). \qquad (8)$$

Учитывая тот факт, что скорость изменения вероятности $P(t)$ при формировании стационарных структур должна убывать, то $\beta_1 < 0$ и $\beta_2 < 0$ и, следовательно,

$$\frac{dJ(t)}{dt} \begin{cases} \gtrless 0 & \text{при } \frac{P^s(t)}{P(t)} < 1, \quad |\beta_1| \gtrless \left|\beta_2\left(P^s(t) - P(t)\right)\right|, \\ \lessgtr 0 & \text{при } \frac{P^s(t)}{P(t)} \geq 1 \quad |\beta_1| \gtrless \left|\beta_2\left(P^s(t) - P(t)\right)\right|. \end{cases}$$

Таким образом, для неустойчивых структур скорость изменения информационной меры и предпочтительности может как возрастать, так и убывать; образование же устойчивых структур протекает по закону невозрастания скорости изменения информационной меры.

Образовавшуюся структуру будем считать ассимптотически устойчивой, если кроме условия $\frac{dJ(t)}{dt} \leq 0$ будет выполняться и условие $J(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Поступила 7.XI.1982

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Эбелинг. Образование структур при необратимых процессах, М., "Мир", 1979.
2. С.Кульбак. Теория информации и математическая статистика, М.,"Мир", 1978.

ნ.ბოკუჩავა

სტრუქტურათა წარმოქმნისა და მდგრადობის ინფორმაციული კრიტერიუმები

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში განხილულია სტრუქტურათა წარმოქმნის საკითხი. მიღებულია ინფორმაციული უტოლობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ მიმდინარე პროცესები.

N.Bokuchava

INFORMATION CRITERIA OF THE CREATION OF STRUCTURES AND THEIR STABILITY

Summary

The problem of creating structures is considered. Inequalities, which should be met by ongoing processes, have been obtained.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

О РЕДУКЦИИ В НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА

Т.С.Цулая

Описание стационарного распределения температурного поля в круговом однородном цилиндре с односторонним осесимметричным вырезом в отсутствии источников (стоков) тепла может быть представлено следующей краевой задачей:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta T=0, \quad \Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,; \\
&T(r,0)=T_0, \qquad a\le r\le b, \\
&T(r,d)=T_1, \qquad 0\le r\le b, \\
&T(r,c)=T_2, \qquad 0\le r< a, \\
&T(a,z)=f_1(z), \quad 0\le z\le c, \\
&T(b,z)=f_2(z), \quad 0\le z\le d,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где независимость лапласиана Δ (и в целом задачи (1)) от координаты φ обусловлена предполагаемой аксиальной симметрией относительно оси Oz, выражающейся условием равенства нулю поперечного потока тепла на этой оси:

$$\frac{\partial T(0,z)}{\partial r}=0, \qquad c\le z\le d. \qquad (2)$$

Ввиду отмеченной симметрии вполне достаточно рассмотрение только одной неканонической (составной) области $abhdcea$, являющейся правой половиной осевого сечения цилиндра плоскостью $\eta O z$.

Решение задачи (I) будем искать с помощью решений $\theta_1(\eta, z)$ и $\theta_2(\eta, z)$ соответственно в канонических областях $cegdc$ (подобласть I) и $abhga$ (подобласть II). Для чего на отрезке eg зададим температуру как функцию от z, –

$$T(a, z) = f(z), \quad c < z < d, - \tag{3}$$

которую в дальнейшем придется определить.

Краевые условия по z из системы (I) приведем к виду с нулевыми правыми частями преобразованием

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(\eta, z) &= \theta_1(\eta, z) + \varphi_1(z), \\ \tilde{\theta}_2(\eta, z) &= \theta_2(\eta, z) + \varphi_2(z), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{d-c}\left[(T_2 - T_1)z - (T_2 d - T_1 c)\right], \\ \varphi_2(z) &= (T_0 - T_1)\frac{z}{d} - T_0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

в результате которого краевая задача (I) сводится к двум краевым задачам:

в канонической области I –

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{\theta}_1(\eta, z) = 0 \\ &\tilde{\theta}_1(\eta, c) = \theta_1(\eta, d) = 0, \quad 0 \le \eta \le a, \\ &\tilde{\theta}_1(a, z) = f(z) + \varphi_1(z), \quad c \le z \le d \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и в канонической области II –

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{\theta}_2(r,z)=0,\\
&\tilde{\theta}_2(r,0)=\tilde{\theta}_2(r,d)=0, \quad a<r<b,\\
&\left.\begin{aligned}
&\tilde{\theta}_2(a,z)=\varepsilon(c-z)f_1(z)+\varepsilon(z-c)f(z)+\varphi_2(z),\\
&\tilde{\theta}_2(b,z)=f_2(z)+\varphi_2(z).
\end{aligned}\right\} 0<z<d
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь фигурирует единичная функция

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{8}$$

Решение краевых задач (6) и (7) будем искать методом разделения переменных:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\theta}_1(r,z)=R_1(r)Z_1(z),\\
&\tilde{\theta}_2(r,z)=R_2(r)Z_2(z).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Тогда (7) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2Z_2}{dz^2}+\lambda_2^2 Z_2=0, \quad 0<z<d,\\
&Z_2(0)=Z_2(d)=0
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_2}{dr}\right)-\lambda_2^2 R_2=0, \quad 0<r<b\\
&\left.\begin{aligned}
&\tilde{\theta}_2(a,z)=R_2(a)Z_2(z)=\tilde{f}_1(z),\\
&\tilde{\theta}_2(b,z)=R_2(b)Z_2(z)=\tilde{f}_2(z),
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_1(z) &= \varepsilon(c-z) f_1(z) + \varepsilon(z-c) f(z) + \varphi_2(z), \\ \tilde{f}_2(z) &= f_2(z) + \varphi_2(z), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

а λ_2 – определяемая ниже константа разделения.

Из (10) находим выражения для собственных функций и собственных значений:

$$\left.\begin{aligned} Z_{2n}(z) &= C_n \sin \lambda_{2n} z, \\ \lambda_{2n} &= \frac{n\pi}{d}, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Решение задачи (11), как известно, представляется в виде линейной комбинации функций Бесселя от чисто мнимого аргумента нулевого порядка

$$R_2(r) = A I_0(\lambda_{2n} r) + B K_0(\lambda_{2n} r). \qquad (14)$$

Учитывая (9) – (14), общее решение задачи (7)

$$\tilde{\theta}_2(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_{2n} z \left[A_n I_0(\lambda_{2n} r) + B K_0(\lambda_{2n} r)\right], \qquad (15)$$

в котором коэффициенты A_n и B_n должны быть определены согласно граничным условиям по r из системы (7); подставив туда (15), с учетом (12) получим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_{2n} z \left[A_n I_0(\lambda_{2n} a) + B_n K_0(\lambda_{2n} a)\right], \\ \tilde{f}_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_{2n} z \left[A_n I_0(\lambda_{2n} b) + B_n K_0(\lambda_{2n} b)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Умножая обе стороны (16) на $\sin \lambda_{2n} z$ и интегрируя по z в пределах $(0, d)$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} A_n I_0(\lambda_{2n} a) + B_n K_0(\lambda_{2n} a) &= \mathcal{X}_{1n}, \\ A_n I_0(\lambda_{2n} b) + B_n K_0(\lambda_{2n} b) &= \mathcal{X}_{2n}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

где

$$\left.\begin{aligned} X_{1n} &= \frac{2}{d}\int_0^d \tilde{f}_1(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx,\\ X_{2n} &= \frac{2}{d}\int_0^d \tilde{f}_2(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Решив систему (17), для коэффициентов A_n и B_n находим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{K_0(\lambda_{2n}b)X_{1n} - K_0(\lambda_{2n}a)X_{2n}}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)},\\ B_n &= \frac{I_0(\lambda_{2n}a)X_{2n} - I_0(\lambda_{2n}b)X_{1n}}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

в которые введено обозначение

$$F_0(x;y) = I_0(x)K_0(y) - K_0(x)I_0(y). \tag{20}$$

Для получения решения в канонической области I воспользуемся подстановкой выражения $\tilde{\theta}_1(r,z)$ по (9) в соотношения (6); будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2Z_1}{dz^2} + \lambda_1^2 Z_1 = 0, \quad c < z < d,\\ &Z_1(c) = Z_1(d) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_1}{dr}\right) - \lambda_1^2 R_1 = 0, \quad 0 < r < a,\\ &\tilde{\theta}_1(a,z) = \tilde{f}(z); \quad c \le z \le d, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где

$$\tilde{f}(z) = f(z) + \varphi_1(z), \qquad (23)$$

а λ_1 - константа разделения.

Решив (21), получаем:

$$\left.\begin{aligned} Z_{1n} &= E_n \sin \lambda_{1n}(z-c), \\ \lambda_{1n} &= \frac{n\pi}{d-c}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Аналогично выводу (14), из (22) для $R_1(r)$ имеем

$$R_1(r) \sim C I_0(\lambda_{1n} r) + \mathcal{D} K_0(\lambda_{1n} r), \qquad (25)$$

но так как при $r = 0$ функция Макдональда $K_0 = \infty$, то следует положить $\mathcal{D} = 0$, и согласно (9), (24) и (25) общее решение задачи (6) предстает в виде

$$\tilde{\theta}_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0(\lambda_{1n} r) \sin \lambda_{1n}(z-c). \qquad (26)$$

Учитывая (23), для определения коэффициента C_n воспользуемся граничным условием по r из системы (6):

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0(\lambda_{1n} a) \sin \lambda_{1n}(z-c). \qquad (27)$$

После умножения (27) на $\sin \lambda_{1n}(z-c)$ и интегрирования по z в пределах (c, d) приходим к соотношению

$$C_n = \frac{\mathcal{I}_n}{I_0(\lambda_{1n} a)}, \qquad (28)$$

в котором

$$\mathcal{I}_n = \frac{2}{d-c} \int_c^d \tilde{f}(x) \sin \lambda_{1n}(x-c)\, dx. \qquad (29)$$

Таким образом, решение поставленной задачи, согласно (4), выражается формулами (26) и (15) соответственно в канических областях I и II. Но они содержат неизвестную функцию $f(z)$. Для ее определения напишем условия сливания решений θ_1 и θ_2 на границе ed раздела этих областей:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1(a,z)=\theta_2(a,z),\\ &\left.\frac{\partial\tilde\theta_1}{\partial\eta}\right|_{\eta=a}=\left.\frac{\partial\tilde\theta_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=a}. \end{aligned}\right\} c\le z\le d. \tag{30}$$

Имея в виду (4), подстановка (26) и (15) в (30) дает:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0(\lambda_{1n}a)\sin\lambda_{1n}(z-c)-\varphi_1(z)=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\lambda_{2n}z\left[A_n I_0(\lambda_{2n}a)+B_n K_0(\lambda_{2n}a)\right]-\varphi_2(z);\\ &\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{1n}C_n I_0'(\lambda_{1n}a)\sin\lambda_{1n}(z-c)=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}\sin\lambda_{2n}z\left[A_n I_0'(\lambda_{2n}a)+B_n K_0'(\lambda_{2n}a)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Используя известное соотношение между функциями Бесселя и их производными

$$I_0'(x)=I_1(x),\quad K_0'(x)=-K_1(x),$$

систему (31) перепишем в форме:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\lambda_{2n}\left[A_n I_1(\lambda_{2n}a)-B_n K_1(\lambda_{2n}a)\right]\sin\lambda_{2n}z-\\ &-\lambda_{1n}C_n I_1(\lambda_{1n}a)\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big\}=0;\\ &\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[A_n I_0(\lambda_{2n}a)+B_n K_0(\lambda_{2n}a)\right]\sin\lambda_{2n}z-\\ &-C_n I_0(\lambda_{1n}a)\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big\}=\varphi_2(z)-\varphi_1(z) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

В результате подстановки (I9), (20) и (28) в формулы (32) и после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\sin\lambda_{2n}z\,\frac{\lambda_{2n}}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}\big[F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)X_{1n}-\\&-F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}a)X_{2n}\big]-\lambda_{1n}\frac{I_1(\lambda_{1n}a)}{I_0(\lambda_{1n}a)}X_n\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big\}=0;\\&\sum_{n=0}^{\infty}\big\{\sin\lambda_{2n}z\,X_{1n}-\sin\lambda_{1n}(z-c)X_n\big\}=\varphi_2(z)-\varphi_1(z),\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

где

$$F_1(x;y)=I_1(x)K_0(y)-K_1(x)I_0(y).\qquad(34)$$

Из теории бесселевых функций известно, что

$$I_1(x)K_0(x)-K_1(x)I_0(x)=\frac{1}{x}.$$

Применяя это соотношение, (33) перепишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\frac{\sin\lambda_{2n}z}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}\Big[\frac{X_{2n}}{a}-\lambda_{2n}X_{1n}F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)\Big]+\\&+\lambda_{1n}\frac{I_1(\lambda_{1n}a)}{I_0(\lambda_{1n}a)}X_n\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big\}=0;\\&\sum_{n=0}^{\infty}\big\{\sin\lambda_{2n}z\,X_{1n}-\sin\lambda_{1n}(z-c)X_n\big\}=\varphi_2(z)-\varphi_1(z).\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

Система (35) содержит величины X_n и X_{1n}, которые выражаются (см. (I8), (29), (23) и (5)) через неизвестную функцию $f(x)$. С целью придания этой системе удобного вида предварительно преобразуем выражения X_n, X_{1n} и X_{2n}.

Подставив (23) в (29) и учитывая (5), придем к соотношению

$$X_n = \frac{2}{d-c}\int_c^d f(x)\sin \lambda_{1n}(x-c)\,dx + 2Y_{1n}, \tag{36}$$

где

$$Y_{1n} = \frac{1}{n\pi}\left[\left(\cos n\pi - \frac{\sin n\pi}{n\pi}\right)T_1 + \left(\frac{\sin n\pi}{n\pi} - 1\right)T_2\right]. \tag{37}$$

На основании (I8), (I2) и (5) аналогично получаем выражения для X_{1n} и X_{2n}:

$$X_{1n} = \frac{2}{d}\int_c^d f(x)\sin \lambda_{2n} x\,dx + 2Y_{2n}; \tag{38}$$

здесь

$$Y_{2n} = \frac{1}{d}\int_0^c f_1(x)\sin \lambda_{2n} x\,dx + \frac{1}{n\pi}\left[\left(\cos n\pi - \frac{\sin n\pi}{n\pi}\right)T_1 + \left(\frac{\sin n\pi}{n\pi} - 1\right)T_0\right] \tag{39}$$

и

$$X_{2n} = \frac{1}{d}\int_0^d f_2(x)\sin \lambda_{2n} x\,dx + \frac{1}{n\pi}\left[\left(\cos n\pi - \frac{\sin n\pi}{n\pi}\right)T_1 + \left(\frac{\sin n\pi}{n\pi} - 1\right)T_0\right]. \tag{40}$$

В обозначениях (36)–(40) система (35) выглядит так:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}\frac{\lambda_{2n}\sin\lambda_{2n}z}{d}\int_c^d f(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx-\right.$$

$$\left.-\frac{I_1(\lambda_{1n}a)}{I_0(\lambda_{1n}a)}\frac{\lambda_{1n}\sin\lambda_{1n}(z-c)}{d-c}\int_c^d f(x)\sin\lambda_{1n}(x-c)\,dx\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{x_{2n}}{a}-\lambda_{2n}y_{2n}F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)\right]\frac{\sin\lambda_{2n}z}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}+\right. \tag{41}$$

$$\left.+\lambda_{1n}\sin\lambda_{1n}(z-c)\,y_{1n}\frac{I_1(\lambda_{1n}a)}{I_0(\lambda_{1n}a)}\right\};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin\lambda_{2n}z}{d}\int_c^d f(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\lambda_{1n}(z-c)}{d-c}\int_c^d f(x)\sin\lambda_{1n}(x-c)\,dx\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[y_{1n}\sin\lambda_{1n}(z-c)-y_{2n}\sin\lambda_{2n}z\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varphi_2(z)-\varphi_1(z)\right].$$

Меняя порядок интегрирования по x и суммирования по n, в обозначениях

$$\left.\begin{aligned}K(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[&\frac{F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}\frac{\lambda_{2n}}{d}\sin\lambda_{2n}x\cdot\sin\lambda_{2n}z-\\&-\frac{I_1(\lambda_{1n}a)}{I_0(\lambda_{1n}a)}\frac{\lambda_{1n}}{d-c}\sin\lambda_{1n}(x-c)\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big],\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&\Big[\frac{X_{2n}}{a}-\lambda_{2n}Y_{2n}F_1(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)\Big]\times\\ &\times\frac{\sin\lambda_{2n}z}{F_0(\lambda_{2n}a;\lambda_{2n}b)}+\lambda_{1n}Y_{1n}\frac{I_1(\lambda_{1n}a)}{I_0(\lambda_{1n}a)}\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big\}\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

и

$$\left.\begin{aligned}&K_0(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{d}\sin\lambda_{2n}x\sin\lambda_{2n}z-\frac{1}{d-c}\sin\lambda_{1n}(x-c)\sin\lambda_{1n}(z-c)\Big],\\ &\Phi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[Y_{1n}\sin\lambda_{1n}(z-c)-Y_{2n}\sin\lambda_{2n}z\Big]+\frac{1}{2}\Big[\varphi_2(z)-\varphi_1(z)\Big]\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

уравнения (4I) и (42) перепишутся в виде:

$$\int_c^d f(x)K(x,z)\,dx=\Phi(z)\qquad(45)$$

и

$$\int_c^d f(x)K_0(x,z)\,dx=\Phi_0(z)\qquad(46)$$

Доказывается (см. приложение), что интегральное уравнение (46) удовлетворяется тождественно, т.е. оно имеет место для любой ограниченной функции $f(x)$.

Окончательно, искомое решение в неканонической области $abhdcea$ дается формулой

$$T(r,z)=\varepsilon(a-r)\theta_1(r,z)+\varepsilon(r-a)\theta_2(r,z) \tag{47}$$

с единичной функцией $\varepsilon(x)$ (см.(8)) и с решениями $\theta_1(r,z)$ и $\theta_2(r,z)$ соответственно в канонических областях $cegdc$ и $abhga$

$$\theta_1(r,z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\lambda_{1n}(z-c)\,I_0(\lambda_{1n}r)-\varphi_1(z) \tag{48}$$

и

$$\theta_2(r,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\lambda_{2n}z\left[A_n I_0(\lambda_{2n}r)+\right. \\ \left.+B_n K_0(\lambda_{2n}r)\right]-\varphi_2(z), \tag{49}$$

где A_n, B_n и C_n выражаются через X_n, X_{1n} и X_{2n} (см. (I9), (28)). Эти величины с помощью (П.I) и (П.2)(см. приложение) преобразуются к виду:

$$X_n=\frac{2}{d-c}\left\{\int_c^d f(x)\sin\lambda_{1n}(x-c)\,dx+\frac{1}{\lambda_{1n}}\left[(-1)^n T_1-T_2\right]\right\}, \tag{50}$$

$$X_{1n}=\frac{2}{d}\left\{\int_c^d f(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx+\int_0^c f_1(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx+\right. \\ \left.+\frac{1}{\lambda_{2n}}\left[(-1)^n T_1-T_0\right]\right\}, \tag{5I}$$

$$X_{2n}=\frac{1}{d}\left\{\int_0^d f_2(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx+\frac{1}{\lambda_{2n}}\left[(-1)^n T_1-T_0\right]\right\} \tag{52}$$

Функция $f(x)$, содержащаяся в решении (47) через (I9), (28) и (48)-(52), определяется из интегрального уравнения Фредгольма первого рода (45), (43) с симметричным ядром $K(x,z)$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что интегральное уравнение (46) является тождеством. Применяя представление дельта-функции Дирака в виде бесконечного ряда /I-2/

$$\delta(x-y)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}y, \tag{П.1}$$

для первого соотношения из (44) получим:

$$\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\lambda_{2n}x\sin\lambda_{2n}z=\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_{2n}x\sin\lambda_{2n}z=\frac{1}{2}\delta(x-z) \tag{П.2}$$

и

$$\frac{1}{d-c}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\lambda_{1n}(x-c)\sin\lambda_{1n}(z-c)= \tag{П.3}$$

$$=\frac{1}{d-c}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_{1n}(x-c)\sin\lambda_{1n}(z-c)=\frac{1}{2}\delta(x-z).$$

Следовательно, ядро $K_0(x,z)$ интегрального уравнения (46) тождественно равно нулю

$$K_0(x,z)=0. \tag{П.4}$$

С целью преобразования $\Phi_0(z)$ (см. (44)) заметим, что

$$\left(\cos n\pi-\frac{\sin n\pi}{n\pi}\right)T_1+\left(\frac{\sin n\pi}{n\pi}-1\right)T_2=\begin{cases}(-1)^nT_1-T_2\ ; & n=1,2,\ldots\\ 0\ ; & n=0\end{cases} \tag{П.5}$$

и

$$\left(\cos n\pi-\frac{\sin n\pi}{n\pi}\right)T_1+\left(\frac{\sin n\pi}{n\pi}-1\right)T_0=\begin{cases}0\ ; & n=0\\ (-1)^nT_1-T_2\ ; & n=1,2,\ldots\end{cases} \tag{П.6}$$

а в выражении для $\Phi_0(z)$ первое слагаемое в бесконечной сумме по n равно нулю. С учетом этих замечаний и (37), (39) получаем

$$\Phi_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin\lambda_{1n}(z-c)}{n\pi}\left[(-1)^nT_1-T_2\right]-\right.$$
$$\left.-\sin\lambda_{2n}z\left[\frac{1}{d}\int_0^c f_1(x)\sin\lambda_{2n}x\,dx+\frac{1}{n\pi}\left((-1)^nT_1-T_2\right)\right]\right\}+ \tag{II.7}$$
$$+\frac{1}{2}\left[\varphi_2(z)-\varphi_1(z)\right].$$

Фигурирующие в (II.7) суммы можно вычислить с помощью следующих формул /3/:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\frac{\pi-t}{2};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nt}{n}=\frac{t}{2}. \tag{II.8}$$

Именно, помня (13) и (24),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_{1n}(z-c)}{n\pi}\left[(-1)^nT_1-T_2\right]= \tag{II.9}$$
$$=-\frac{1}{2(d-c)}\left[(z-c)T_1+(d-z)T_0\right]$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_{2n}z}{n\pi}\left[(-1)^nT_1-T_0\right]= \tag{II.10}$$
$$=\frac{1}{2d}\left[zT_1+(d-z)T_0\right].$$

Меняя порядок интегрирования по x и суммирования по n, из (II.7) согласно (II.I) имеем $(c<z<d)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\lambda_{2n} z \int_0^c f_1(x)\sin\lambda_{2n} x\,dx = \int_0^c \Big[f_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_{2n} z \sin\lambda_{2n} x\Big]dx = \tag{П.11}$$
$$= \frac{d}{2}\int_0^c f_1(x)\delta(x-z)\,dx = 0.$$

По формулам (7)

$$\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = \frac{d-z}{2d(d-c)}\left[c(T_1-T_0) - d(T_2-T_0)\right]. \tag{П.12}$$

Подставляя (П.9)-(П.12) в (П.7), получаем тождественное равенство нулю $\Phi_0(z)$:

$$\Phi_0(z) \equiv 0. \tag{П.13}$$

Таким образом, из (П.4) и (П.13) вытекает справедливость доказуемого предложения.

Поступила 5.XII.1982

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Иваненко, А.Соколов. Классическая теория поля. М., ГИТТЛ, 1951.
2. А.И.Мачалин. Применение δ-функции Дирака к решению дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Тепло- и массообмен в процессах испарения. М.,Изд. АН СССР, 1958.
3. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.

თ.წულაია

არაკანონიკურ არეში ლაპლასის განტოლების დირიხლეს ამოცანის ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებამდე რედუქციის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია ერთგვაროვან, ნაწილობრივად ღრუ წრიულ ცილინდრში ტემპერატურული ველის ანალიზური განსაზღვრის დირიხლეს ამოცანის დასმა ლაპლასის განტოლებისათვის. მისი ამოხსნის განსაზღვრის არაკანონიკური (შედგენილი) არე წარმოდგენება როგორც კანონიკური (მარტივი) არეების ერთობლიობა ახალი საძიებელი ფუნქციებით მათს შიგა საზღვრებზე (შიგა სასაზღვრო ფუნქციები). საძიებელი ამოხსნა არაკანონიკურ არეში აიგება კანონიკურ არეებში ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით მიღებული ამოხსნების შეკვრით, ხოლო შიგა სასაზღვრო ფუნქციების საპოვნელად შეიდგინება ფრედჰოლმის ტიპის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებები.

T.Tsulaia

ON THE REDUCTION OF A LAPLACE EQUATION IN A NONCANONICAL AREA TO A FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE DIRICHLET PROBLEM

Summary

The paper states the Dirichlet problem of analytic determination of the temperature field of a uniform, partially hollow, circular cylinder for a Laplace equation. The noncanonical (compound) domain of the definition of its solution is assumed to be a set of canonical (simple) domains with

new unknown functions on their inner boundaries (inner boundary functions). The desired solution in the noncanonical domain is built by joining the solutions obtained by the method of separation of variables in canonical domains, and to find the inner boundary functions Fredholm-type integral equations of the first kind are drawn up.

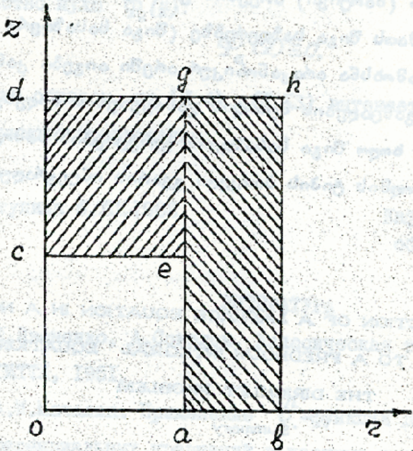


Рис. I

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

251, 1984

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ХАРАКТЕРА СЛОГОВОЙ СТРУКТУРЫ СЛОВА И ФОНЕМНОЙ СТРУКТУРЫ СЛОГА

(По данным ингушского языка)

Э.А.Микеладзе

В представленной работе путем применения математических методов рассматриваются вопросы, с одной стороны, слоговой структуры слова и, с другой, фонемной структуры слога на основе данных ингушского литературного языка. При исследовании данной проблемы мы использовали известную схему В.Фукса.

Для анализа были выбраны тексты из художественной литературы, поскольку "наверное, художественный текст - наилучший "портрет" языка, на котором он написан" /4, 95/.

Анализу подвергалась лишь авторская речь, т.к. в речи персонажей, как известно, нарушается однородный характер текста. Иначе говоря, речь того или иного автора по своему однообразию является более устойчивой и, следовательно, более надежной для статистического анализа, как об этом пишет Б.Н.Головин: "Авторские речевые стили, несомненно, во многом (если и не во всем) определяются устойчивыми для каждого автора соотношениями частот разных элементов языка. Теперь это не гипотеза, а утверждение, опирающееся на известные факты" /2, 14/.

СЛОГОВАЯ СТРУКТУРА СЛОВА. При рассмотрении вопроса, касающегося характера слоговой структуры слова в ингушском языке, возникает проблема понятия самого слога, что в данном случае подразумевает и вопросы, связанные с характером его структуры. Сложность решения этой проблемы дает о себе знать при исследовании языков, характеризующихся сложным вокализмом. Нахские языки (в том числе и ингушский) относятся именно к таким языкам.

При определении характера строения слога, наблюдаемого в ингушском языке, мы ссылаемся на следующие труды: "XIанзара гIалгIай мотт" /I/, "Грамматика ингушского языка" /3/.

Для лексического анализа использованы прозаические произведения следующих писателей: И.Бозоркина /8/ - 5000 слов, А.Х.Бокова /9/ - 5000 слов, А.А.Ведзижева /I0/ - 6000 слов, И.А.Дахкильгова /II/ - 5000 слов, Б.Х.Зязикова /I2/ - 5000 слов, Х.С.Осмиева /I3/ - 5000 слов; всего 3I000 слов.

Для удобства статистических расчетов тексты каждого автора были разделены на 500 единичных отрывков.

Количество слогов в слове нами обозначается через i, где $1 \leq i \leq I$, в данном языке $I = 6$.

Слов, состоящих из семи слогов, всего шесть, поэтому слоговая структура таких слов нами не рассматривается.

Анализируемые слова пронумерованы - I,2,... к; слова, состоящие из i слогов, обозначены через $z(i)$.

Относительная частота распределения слогов в слове рассчитана с учетом надлежащих данных того или иного автора в отдельности (экспериментально):

$$P(i)=\frac{z(i)}{K}.$$

Среднее значение распределения

$$\bar{i}=\sum_{i=1}^{I} i\,P(i)$$

и энтропия

$$S=-\sum_{i=1}^{I} P(i)\log P(i).$$

Относительная частота для всего данного языка (экспериментально)

$$\bar{P}(i)=\frac{1}{A}\sum_{\alpha=1}^{A} P(i)^{(\alpha)},$$

где $P(i)^{(\alpha)}$ является распределением частот у автора, отмеченным индексом α (здесь α = I,2,...,6), а A – число самих авторов.

Относительная частота распределения слогов в слове для каждого автора (теоретически):

$$\mathcal{P}(i)=e^{-(\bar{i}-1)}\frac{(\bar{i}-1)^{i-1}}{(i-1)!};$$

для данного языка:

среднее значение распределения

$$\bar{I}=\sum_{i=1}^{I} i\,\bar{P}(i);$$

относительная частота (теоретически)

$$\overline{\mathcal{P}}(i)=e^{-(\overline{I}-1)}\,\frac{(\overline{I}-1)^{i-1}}{(i-1)!}$$

и энтропия

$$\overline{S}=\frac{\sum_{n=1}^{6}S_n}{6}.$$

В таблице I даются экспериментальные и теоретические данные по распределению вероятностей слоговых длин слов сначала по данным каждого автора в отдельности, а затем с учетом всего материала. (см. также рис. I).

Из таблицы I видно, что среднее количество слогов в слове ингушского языка равняется 2,0464.

ФОНЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СЛОГА. Для определения характера слогообразования на карточки были выписаны отдельные слоги, входящие в анализируемые слова из произведений И.Базоркина, А.Х.Бокова, А.А.Ведзижева, И.А.Дахкильгова, Б.Х.Зязикова, Х.С.Осмиева - по 5000 слогов, всего 30000 слогов. И в данном случае анализируемые тексты были разделены на 500 единичных отрывков.

Количество фонем в слоге обозначено через i, где $1\le i\le I$ (в данном языке $I = 5$), а слоги, состоящие из i фонем, через $c(i)$

Относительная частота распределения фонем в слоге для каждого автора равняется (экспериментально)

$$F(i)=\frac{c(i)}{m}, \quad \text{где} \quad m=\sum_{i=1}^{I}c(i),$$

а для данного языка

$$\overline{F}(i)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}F(i)^{(a)};$$

среднее значение распределения для данного языка

$$\bar{i}=\sum_{i=1}^{5}i\,\overline{F}(i).$$

Для расчета теоретически относительных частот распределения фонем в слоге решена следующая система уравнений:

$$\begin{cases}\overline{i(i-1)}=(\bar{i}-\beta_1-\beta_2-\beta_3)^2+2(\bar{i}-\beta_1-\beta_2-\beta_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+2\beta_2+4\beta_3\\ \overline{i(i-1)(i-2)}=(\bar{i}-\beta_1-\beta_2-\beta_3)^3+3(\bar{i}-\beta_1-\beta_2-\beta_3)^2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+\\ \qquad +3(\bar{i}-\beta_1-\beta_2-\beta_3)(2\beta_2+4\beta_3)+6\beta,\end{cases}$$

откуда, полагая $\beta_1=1$, получается

$$\beta_2=0{,}920,\quad \rho_1=0{,}080,$$
$$\beta_3=0{,}249,\quad \rho_2=0{,}671,$$
$$\rho_3=0{,}249.$$

По формуле

$$F(i)=e^{-\left(\bar{i}-\sum_{\nu=1}^{3}\beta_\nu\right)}\sum_{\nu=0}^{3}(\beta_\nu-\beta_{\nu+1})\frac{\left(\bar{i}-\sum_{\nu=1}^{3}\beta_\nu\right)^{i-\nu}}{(i-\nu)!}$$

сделано вычисление: $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$ (теоретически).

Результаты вычислений представлены в таблице 2 (см.также рис.2).

Из таблицы 2 видно, что среднее количество фонем в слоге ингушского языка равняется 2,2805.

Мы пытались установить критерии для установления статуса согласных в структуре слога с точки зрения их способности к слогообразованию. С этой целью нами была использована классификация консонантных систем, применяемая в специальной литературе /7/, по которой эта система ингушского языка делится на три класса:

1. Сонанты: й, л, м, н, р, в – обозначенные символом S ;
2. Фрикативы: гI, ж, з, с, ф, х, хЬ; хI, ш, Ъ – обозначенные символом F ;
3. Смычные: б, г, д, к, кI, п, пI, т, тI, ц, цI, ч, чI, щ, дз, дж, къ, /, ъ, кх – обозначенные символом C,

а класс вокалов обозначен символом V.

Фонематическая структура слога представлена нами соответствующими символами данных классов. В результате классификации слогов по консонантным классам, мы установили количественно отличающиеся друг от друга 58 структурных слоговых типов (табл.3).

Слоги группированы следующим образом: в группу $[V]$ входят все однофонемные слоги, в группу $[S,V]$ – слоги, которые содержат рядом стоящие фонемы S и V в произвольной последовательности, в группу $[S,V,C]$ – слоги, которые содержат рядом стоящие фонемы S, V и C в произвольной последовательности и т.д.

В результате этого процесса получается всего 21 группа (см. табл. 4). В таблице дана также относительная частота отдельно взятой группы по каждому из произведений одного и того же автора, затем других авторов, а в последнем столбце для данного языка показана относительная частота по каждой отдельно взятой группе.

Как явствует из таблицы 4, относительная частота слогов, в которых участвуют рядом стоящие фонемы S и V, равняется 0,4322, при участии F – 0,3444, а при C – 0,4606.

Класс сонантов объединяет 6 консонантов, поэтому относительная частота одного консонанта данного класса, обозначенного символом S_1, равняется

$$S_1 = \frac{0,4322}{6} = 0,0720.$$

Класс фрикативов объединяет 10 консонантов, поэтому относительная частота одного консонанта данного класса, обозначенного символом F_1, равняется

$$F_1 = \frac{0,3444}{10} = 0,0344.$$

Класс смычных объединяет 20 консонантов, поэтому относительная частота одного консонанта данного класса, обозначенного символом C_1, равняется

$$C_1 = \frac{0,4606}{20} = 0,0230.$$

Итак, в результате математических вычислений относительных частот отдельных фонем, входящих в состав анализируемых слогов, образуется следующая модель:

$$V > S_1 > F_1 > C_1.$$

Опираясь на изложенное, можно задаться вопросом относительно обобщения означенного выше явления и учета фонемной частоты при определении иерархического соотношения консонантных единиц, входящих в состав слога, с точки зрения слогообразовательной значимости их, и если при таком иерархическом соотношении отображено объективное положение, то в начальной позиции всегда окажется гласный V , т.к. ядром слога, как известно, считается вокал, а затем, в соответствии с последующими частотами, на других иерархических ступенях будут располагаться остальные фонемы, причем, в силу своей значимости, эти элементы должны быть распределены в следующем порядке V, S, F, C.

Таким образом, основой классификации составных элементов, входящих в структуру слога и расположенных по значимости слогообразования, воспринимается критерий частотности, установленный нами в результате статистического анализа, проделанного выше.

Поступила 20.XII.1982

Институт прикладной
математики ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.И.Ахриева, Ф.Г.Оздоева, Л.Д.Мальсагова, П.Х.Бекова. XIанзара гIалгIай мотт (Современный ингушский язык). Грозный, 1972.
2. Б.Н.Головин. Язык и статистика, М., "Просвещение", 1971.
3. З.К.Мальсагов . Грамматика ингушского языка. Грозный, 1963.
4. Д.М.Сегал. Основы фонологической статистики.М.,"Наука", 1972.
5. Р.Г.Пиотровский, К.Б.Бектаев, А.А.Пиотровская. Математическая лингвистика, М., 1977.

6. В.Фукс. Математическая теория словообразования. Сб."Теория передачи сообщения", М., 1957.

7. К.Т.Чрелашвили. Система согласных в нахских языках, Тбилиси, 1975.

8. И.Бозоркин. Рассказы из литературного сборника ингушских писателей "Дега гIоз" (Радость сердца), Грозный, 1957.

9. А.Х.Боков. Шийенна сайре (Багровый закат), Грозный, 1974, Херка произведенеш (Избранные произведения), Грозный, 1975.

10. А.А.Ведзижев. Сенах велар Iаббас (Над чем смеялся Аббас), Грозный, 1973; "Щи тохар"(Поджог), Грозный, 1974.

11. И.А.Дахкильгов. Кукий денал (Мужество Куки), Грозный, 1976.

12. Б.Х.Зязиков. Советски сага ло/ам (Воля советского человека), Грозный, 1958.

Рассказы из литературного сборника ингушских писателей "Дега гIоз" (Радость сердца), Грозный, 1957.

13. Х.С.Осмиев. Дувпараш (Рассказы), Грозный, 1960. Рассказы из литературного сборника ингушских писателей "Дега гIоз" (Радость сердца), Грозный, 1957.

Таблица I

Распределение вероятностей слоговых длин слов ингушского языка

Авторы / p(i)	Бозоркин		Боков		Ведзижев		Дахкильгов	
	Экспер.	Теория	Экспер	Теория	Экспер.	Теория	Экспер	Теория
p(1)	0,3072	0,3490	0,3217	0,3568	0,3043	0,3491	0,3116	0,3629
p(2)	0,4256	0,3674	0,4153	0,3677	0,4248	0,3674	0,4402	0,3678
p(3)	0,1920	0,1933	0,1898	0,1894	0,1993	0,1993	0,1856	0,1864
p(4)	0,0602	0,0678	0,0590	0,0661	0,0587	0,0678	0,0500	0,0630
p(5)	0,0126	0,0178	0,0124	0,0168	0,0112	0,0178	0,0108	0,0160
p(6)	0,0024	0,0037	0,0018	0,0034	0,0017	0,0038	0,0018	0,0032
$\bar{i}$	2,0526		2,0304		2,0525		2,0136	
S	0,5577		0,5413		0,5497		0,5419	

Продолжение табл. I

Авторы / p(i)	Зязиков		Осмиев		Для данного языка	
	Экспер	Теория	Экспер	Теория	Экспер.	Теория
p(1)	0,3022	0,3456	0,3018	0,3442	0,3081	0,3499
p(2)	0,4248	0,3672	0,4196	0,3671	0,4251	0,3674
p(3)	0,1974	0,1951	0,2066	0,1957	0,1951	0,1915
p(4)	0,0612	0,0691	0,0570	0,0605	0,0577	0,0668
p(5)	0,0126	0,0184	0,0124	0,0185	0,0120	0,0175
p(6)	0,0018	0,0039	0,0026	0,0039	0,0020	0,0037
$\bar{i}$	2,0626		2,0664		2,0464	
S	0,5619		0,5537		0,5510	

Таблица 2

Распределение вероятностей фонемных длин слогов ингушского языка

Авторы	Бозоркин	Боков	Ведзижев	Дахкильгов	Зязиков
F(i)	Экспер.	Экспер.	Экспер.	Экспер.	Экспер.
F(1)	0,0630	0,0794	0,0708	0,0738	0,0714
F(2)	0,6146	0,6110	0,6122	0,5614	0,6232
F(3)	0,2938	0,2754	0,2920	0,3332	0,2756
F(4)	0,0262	0,0330	0,0244	0,0298	0,0278
F(5)	0,0024	0,0012	0,0020	0,0018	0,0020
$\bar{i}$	2,2904	2,2656	2,2788	2,3244	2,2658

Авторы	Осмиев	Для данного языка	
F(i)	Экспер.	Экспер.	Теория
F(1)	0,0750	0,0722	0,0717
F(2)	0,6174	0,6066	0,6081
F(3)	0,2836	0,2923	0,2904
F(4)	0,0224	0,0273	0,0259
F(5)	0,0016	0,0018	0,0015
$\bar{i}$	2,2582	2,2805	

Таблица 3

Структурные типы слогообразования

Слоги	CV	SV	FV	CVS	V	FVS	CVF	SVF	SVS
Колич.	8049	4952	4I34	2I44	I980	II87	II44	I028	966

Слоги	CVC	FVF	VS	VF	SVC	CFV	FVC	VC	CFVS
Колич.	586	527	480	478	449	42I	243	2I5	I44

Слоги	CVSC	FVSC	CVSF	FVSF	CVFC	CFVC	SFV	CCV
Колич.	II5	86	82	63	49	44	38	35

Слоги	FFV	VFC	SVSF	SVSC	CFVSC	VSC	SFVS	SVFC
Колич.	31	30	30	30	29	20	20	I6

Слоги	CVSS	CSV	CFVF	FCV	SFVF	SVCC	VSF	FVFC
Колич.	I6	I4	I4	I2	I2	II	9	9

Слоги	CSVS	CCVS	CSVF	CCVF	VCC	FVSS	CVSSC	SVSS
Колич.	7	7	6	5	5	4	3	3

Слоги	CVCC	CSVC	FVCC	FFVS	VSS	FCVS	FCVC	CVSFC
Колич.	3	3	3	2	2	2	I	I

Таблица 4

Авторы / Группы	Бозор-кин	Боков	Вед-зижев	Дахкиль-гов	Зя-зиков	Осмиев	для данного языка
[V]	0,06I4	0,07I2	0,0676	0,0680	0,0634	0,0634	0,0660
[S,V]	0,4278	0,4354	0,4376	0,4640	0,4266	0,4020	0,4322
[C,V]	0,4622	0,43I0	0,4600	0,4460	0,4784	0,4858	0,4606
[F,V]	0,3376	0,3606	0,3328	0,3666	0,32I4	0,3476	0,3444
[F,S,V]	0,0870	0,0962	0,0876	0,I054	0,0808	0,0944	0,09I9
[C,S,V]	0,0928	0,I028	0,I072	0,III2	0,I032	0,0878	0,I008
[F,C,V]	0,07I0	0,07I0	0,0578	0,08I4	0,0736	0,0774	0,0720
[S,S,V]	0,0334	0,03I0	0,0388	0,04I8	0,0352	0,0320	0,0354
[C,C,V]	0,0240	0,0244	0,0208	0,0228	0,0I94	0,0I98	0,02I9
[F,F,V]	0,0I86	0,0I68	0,0I84	0,0252	0,0I88	0,0206	0,0I97
[C,F,S,V]	0,0I38	0,0I66	0,0I00	0,0098	0,0II0	0,0I20	0,0I22
[C,C,S,V]	0,0060	0,0042	0,0038	0,0066	0,0040	0,0026	0,0045
[C,C,F,V]	0,0034	0,0024	0,0032	0,0046	0,0030	0,0038	0,0034
[S,S,C,V]	0,0006	0,0020	0,00I6	0,0022	0,0020	0,0028	0,00I9
[F,F,S,V]	0,00I6	0,0038	0,0030	0,0026	0,0026	0,00I8	0,0026
[S,S,F,V]	0,00I0	0,0030	0,0002	0,00I2	0,00I4	0,0022	0,00I5
[F,F,C,V]	0,0004	0,0006	0,00I4	0,00I0	0,0004	0,0004	0,0007
[C,C,C,V]	0	0,0002	0,0002	0	0,0002	0	0,000I
[S,S,S,V]	0,0002	0,0004	0	0	0	0	0,000I
[C,F,S,C,V]	0,0008	0,00I2	0	0,00I2	0,00I8	0,00I0	0,00I0
[C,S,S,C,V]	0	0,0004	0	0	0	0,0002	0,000I

ე.მიქელაძე

სიტყვის მარცვლოვანი სტრუქტურისა და მარცვლის ფონემატური სტრუქტურის ბუნების განსაზღვრა მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით

/ინგუშური ენის მაგალითზე/

რ ე ზ ი უ მ ე

I. ნაშრომში შესწავლილია მარცვლებისაგან სიტყვათა წარმოქმნისა და ფონემებისაგან მარცვალთწარმოქმნის პროცესი ინგუშური სალიტერატურო ენის მასალაზე ფუქსის ცნობილი სქემის მიხედვით.

2. კვლევის შედეგად დადგინდა: ა/სიტყვის საშუალო სიგრძე გამოსახული მარცვლებით. ბ/მარცვლის სიგრძე გამოსახული ფონემებით.

3. დადგინდა მარცვალთა სტრუქტურული ტიპები და მათი სიხშირეები: CV, SV, FV, V, CVS, FVC, FVS ..., სადაც C აღნიშნავს ხშულ თანხმოვნებს, S – სონანტებს, F კი – სპირანტებს.

4. მათემატიკური გამოთვლებით დადგენილ იქნა C,S,F ჯგუფების ფონემათა ფარდობითი სიხშირეები მარცვლის ფარგლებში, რის შედეგად მივიღეთ მოდელი: $V > S_1 > F_1 > C_1$.

E. Mikeladze

APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS TO THE DETERMINATION OF THE NATURE OF SYLLABIC STRUCTURE OF WORD AND PHONEMIC STRUCTURE OF SYLLABLE (BASED ON THE DATA OF THE INGUSH LANGUAGE)

Summary

Using W.Fuchs' well-known scheme, the following processes have been investigated in the Ingush literary language: a) word formation from syllables, and b) syllable formation from phonemes.

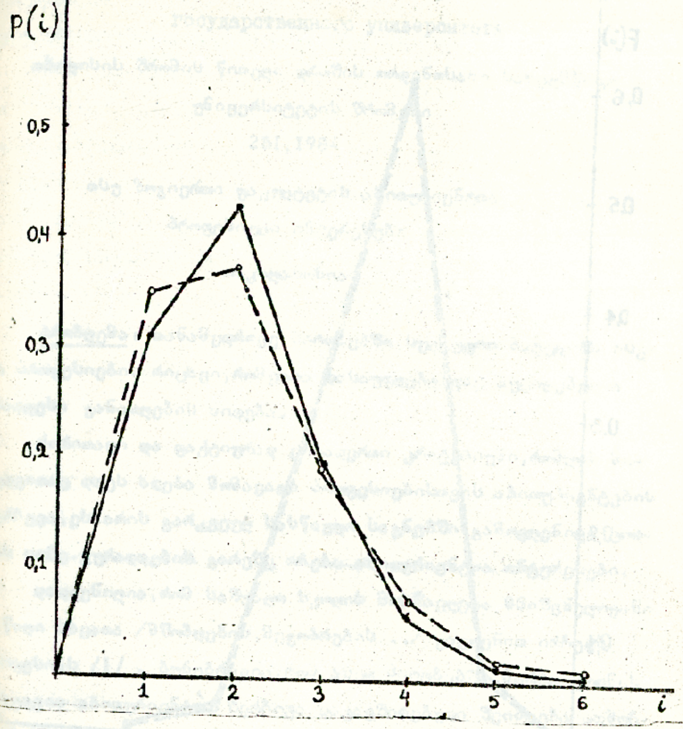


Рис. I Распределение вероятностей слоговых длин слов ингушского языка

экспериментальная кривая

теоретическая кривая

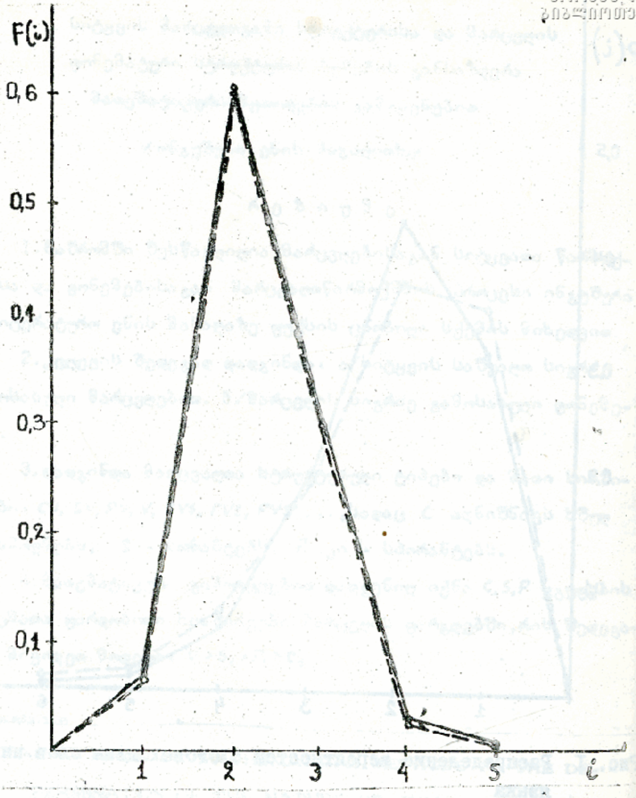


Рис. 2. Распределение вероятностей фонемных длин слогов ингушского языка

——— экспериментальная кривая

– – – – теоретическая кривая

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

251, 1984

თსუ ზოგიერთი ფაკულტეტის აბიტურიენტთა პროფესიული ინტერესები

თ. კილასონია

<u>პრობლემა</u>: თანამედროვე პირობებში სულ უფრო მატულობს ისეთი პროფესიების რიცხვი, რომელთა დასაუფლებლადაც აუცილებელია უმაღლესი განათლების მიღება.

ძირითადი და ფაქტიურად ერთადერთი კრიტერიუმი, რომლის მიხედვითაც დღეს ხდება მომავალი პროფესიებისათვის აბიტურიენტების შერჩევა, ეს არის გარკვეულ სასწავლო საგნებში გამოვლენილი ცოდნის დონე. ყურადღების გარეშე რჩება აბიტურიენტთა ინტერესები.

დადგენილია, რომ საშუალო სკოლის მოსწავლეთა მნიშვნელოვანი ნაწილი სხვათა /მშობლების, მეგობრების.../ გავლენით ირჩევს პროფესიას /1/. ბუნებრივია, რომ ასეთ პირობებში მარტო ცოდნის მიხედვით აბიტურიენტთა შერჩევა დაკავშირებული შეიძლება აღმოჩნდეს მათი პროფესიული მომზადების დაბალ დონესთან და მომავალში საკუთარი პროფესიით უკმაყოფილებასთან, კადრების დენადობასთან, აქედან გამომდინარე სხვადასხვა სახის ეკონომიურ და მორალურ დანაკარგებთან. ცოდნის გარკვეული მინიმუმი აუცილებელია ნებისმიერი სპეციალობის დასაუფლებლად, მაგრამ სრულიადაც არ არის საკმარისი.

დღეისათვის დადგენილად ითვლება, რომ ინტერესები გავლენას ახდენენ აღქმაზე /6; 7; 8/, დახსომებასა და დასწავლაზე /5/;

დაკავშირებულნი არიან მეხსიერებისა და აზროვნების თავისებურებებთან /4/, ნებისმიერ ქცევასთან /3/, და თუ მაინც მისაღები გამოცდების დროს ინტერესების გათვალისწინება ზედმეტად არის მიჩნეული, ამის ერთ-ერთი მიზეზი შეიძლება იყოს შეხედულება იმის შესახებ, რომ ცოდნის მიხედვით აბიტურიენტთა შემოწმება ნიშნავს მათი ინტერესების გათვალისწინებასაც.

ამ შეხედულების სისწორე შესამოწმებელი უნდა იყოს. ეს გვიჩვენა ჩვენს მიერ ჩატარებულმა გამოკვლევამ, რომლის მიზანსაც აბიტურიენტების ინტერესების დადგენა წარმოადგენდა.

კვლევის მეთოდიკა, ცდისპირები და ცდის მასალა: ექსპერიმენტებს ვატარებდით აბიტურიენტებზე, მისაღები გამოცდების დაწყებამდე, საბუთების მიღების პერიოდში. მიღებული მონაცემები დარდებოდა მისაღები გამოცდების შედეგებთან, რაც გვაძლევდა საშუალებას: I. დაგვედგინა ცალკეული ფაკულტეტების აბიტურიენტთა ინტერესების მიმართულება და სიძლიერე; 2. შეგვედარებინა ერთმანეთთან ინტერესების მიმართულება, სიძლიერე და გამოცდებზე გამოვლენილი ცოდნის დონე; დაგვედგინა მისაღები გამოცდების შედეგებთან ინტერესების კავშირის ხასიათი.

გამოკვლევა ჩატარდა I981 წელს თ ს უ ფილოლოგიის, ფილოსოფია-ფსიქოლოგიის, ბიოლოგიის, ფიზიკისა და მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების 552 აბიტურიენტებზე, I982 წელს კი ბიოლოგიისა და ფილოსოფია-ფსიქოლოგიის ფაკ-ბის 77 აბიტურიენტზე. ინტერესების დასადგენად გამოვიყენეთ სლოვაკი ფსიქოლოგის, მარტინ იურჩოს მიერ თეორიული ინტერესების საკვლევად შემუშავებული კითხვარი /2/.

მ. იურჩოს კითხვარი წარმოადგენს დასახელებათა თავისებურ სიას. მასში ჩამოთვლილია 500 წიგნის სათაური, რომელთაგან თითოეულის შინაარსი ოციდან ერთ-ერთ რომელიმე საგანს ეკუთვნის. ეს საგნებია: ფსიქოლოგია, სამართალი, გეოლოგია, პოლიტიკა, ლიტერატურის თეორია, ფიზიკა, სოციოლოგია, ბიოლოგია, მათემატიკა, გეოგრაფია, პედა-

გოგიკა, ენათმეცნიერება, ფილოსოფია, მუსიკა და გამოყენებითი ხელოვნება, ეკონომიკა, ტექნიკა, ესთეტიკა, მედიცინა, ისტორია და ქიმია.

აბიტურიენტებს ევალებოდათ სათაურის მიხედვით ამოერჩიათ ისეთი წიგნები, რომელთაც სიამოვნებით წაიკითხავდნენ და შეიძენდნენ საკუთარი ბიბლიოთეკისათვის, საამისო საშუალება რომ ჰქონოდათ. არჩევანის რაოდენობა არ იყო შეზღუდული. ასეთ ინსტრუქციას საფუძვლად ედო მოსაზრება, რომ ამა თუ იმ ინტერესის ინტენსიობის შესაბამისად უნდა იცვლებოდეს არჩეული წიგნების რაოდენობაც. ასე მაგალითად, ფსიქოლოგიისადმი ძლიერი და ეკონომიკისადმი სუსტი ინტერესის არსებობის შემთხვევაში მოცემული ცდისპირისათვის საინტერესო უნდა აღმოჩნდეს კითხვარში ჩამოთვლილი ფსიქოლოგიური შინაარსის წიგნების უფრო მეტი რაოდენობა, ვიდრე ეკონომიკური შინაარსის წიგნებისა.

აბიტურიენტთა პასუხები აღინიშნებოდა სპეციალურ ბლანკებზე, სადაც მარტო პასუხთა ნომრები იყო ჩამოთვლილი: ცდისპირებს ევალებოდათ მათთვის საინტერესო წიგნების ნომრების შემოხაზვა. არჩეული სათაურების რაოდენობის დაჯამების შემდეგ გამოგვყავდა ინტერესთა სიძლიერის საშუალო მაჩვენებლები ცალკეული ფაკულტეტების, სპეციალობების და საგნების მიხედვით. ქვემოთ მოტანილ ცხრილებში ჩაწერილი ციფრები სწორედ ასეთი გზით არის მიღებული და მიუთითებს მოცემული ინტერესის სიძლიერეზე.

<u>კვლევის შედეგები</u>: უპირველეს ყოვლისა განვიხილოთ, რამდენად შეესაბამება სხვადასხვა ფაკულტეტზე ჩამბარებელ აბიტურიენტთა ინტერესები მათ მიერვე არჩეულ პროფილს.

სხვადასხვა ფაკულტეტზე შემსვლელ აბიტურიენტთა ინტერესების შესაბამისობა არჩეულ პროფილთან

ამ საკითხის გასარკვევად მივმართოთ №1 ცხრილს, რომელიც გვიჩვენებს ხუთივე ფაკულტეტის აბიტურიენტთა თეორიული ინტერესების მიმართულებას და სიძლიერეს /1981 წლის მონაცემების მიხედვით/.

როგორც №1 ცხრილიდან ჩანს, სხვადასხვა ფაკულტეტის აბიტურიენტთა ინტერესების განაწილება ძირითადად შეესაბამება მათ მიერ არჩეულ პროფილს. კერძოდ, ინტერესების სიძლიერის მიხედვით პირველ ადგილზე მდგომი საგნები ემთხვევა ან ახლოსაა იმ საგნებთან, რომელთა შესწავლასაც გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს აღნიშნული სპეციალობის დასაუფლებლად. გარდა ამისა, ინტერესის სიძლიერის კლებისდა მიხედვით ცხრილში სულ უფრო ხშირად გვხვდება საგნები, რომლებიც ან არ ისწავლება აღნიშნულ ფაკულტეტზე, ან რომელთა შესწავლასაც მეორეხარისხოვანი მნიშვნელობა აქვს ძირითადი სპეციალობის დაუფლებისათვის. საინტერესოა ამ მხრივ ინტერესთა სიძლიერის კონკრეტულ მაჩვენებელთა სიდიდეც. ძირითადი აქცენტი მოდის პირველ რამდენიმე ადგილზე მდგარ საგნებზე; ხოლო ბოლო ადგილებზე მდგომი საგნების მიმართ ინტერესი მეტად სუსტია. ეს გარემოება კიდევ უფრო ნათლად გვეცემა თვალში, თუ შევადარებთ ნებისმიერი ფაკულტეტის აბიტურიენტთათვის ყველაზე საინტერესო და ყველაზე უინტერესო საგნების ინტერესის სიძლიერის მაჩვენებლებს.

აღნიშნული მონაცემების სტატისტიკურმა ანალიზმა გვიჩვენა, რომ სხვადასხვა ფაკულტეტის აბიტურიენტთა მონაცემებს შორის განსხვავება სანდოა /$P < 0,001$/. ეს იმასაც ნიშნავს, რომ „თეორიული ინტერესების საკვლევი კითხვარის" გამოყენებით შესაძლებელია სანდო ინფორმაციის მიღება ცდისპირთა აღნიშნული სახის ინტერე-

სების შესახებ.

ანალოგიური შედეგები მივიღეთ ბიოლოგიისა და ფილოსოფია-ფსიქოლოგიის ფაკულტეტის ინტერესების გამოკვლევით მიმდევნო, 1982 წელსაც. გარდა ამისა, დადგინდა ისიც, რომ სხვადასხვა წელს ერთი და იგივე ფაკულტეტზე ჩამბარებელ აბიტურიენტთა საერთო მასა ინტერესების როგორც მიმართულების, ისე სიძლიერის მიხედვით დიდად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. მაგალითისთვის მოგვყავს ბიოლოგიის ფაკულტეტის აბიტურიენტთა თეორიული ინტერესების შესახებ მიღებული, 1981 და 1982 წლების მონაცემები. ისინი თითქმის არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან - კორელაციის კოეფიციენტი = 0,97 /იხილეთ ცხრ.№2/.

ამრიგად, ვიღებთ, რომ:

1. სხვადასხვა ფაკულტეტზე ჩამბარებელ აბიტურიენტთა შესარჩევი კონტინგენტი ინტერესების მიხედვით ძირითადად შეესაბამება არჩეულ პროფილს;

2. განსხვავება სხვადასხვა ფაკ-ზე ჩამბარებელ აბიტურიენტთა ინტერესებს შორის სანდოა;

3. სხვადასხვა წლებში ერთი და იგივე ფაკულტეტზე მოსული აბიტურიენტების ინტერესები როგორც მიმართულების, ისე სიძლიერის მიხედვით თითქმის უცვლელი რჩება, რაც ნიშნავს, რომ მისაღები გამოცდების დროს აბიტურიენტთა შერჩევა ხდება ხოლმე ინტერესების მიხედვით დაახლოებით ერთგვაროვანი ჯგუფებიდან.

უნივერსიტეტში ჩარიცხულ და ჩაურიცხავ

აბიტურიენტთა ინტერესები

მისაღები გამოცდების შედეგების საფუძველზე აბიტურიენტთა მთელი ერთობლიობა დაიყო ორ ჯგუფად: ჩარიცხულები და ჩაურიცხავები. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს ჯგუფები შეიქმნა მარტო ცოდნის დონის მიხედვით აბიტურიენტთა შერჩევის შედეგად. როცა ერთმანეთს

შეადარეთ მათი ინტერესების მიმართულება და სიძლიერე, აღმოჩნდა, რომ ჩვეულებრივ, ჩარიცხულების და ჩაურიცხავების ინტერესები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, მაგრამ ამ განსხვავებას ყოველთვის არა აქვს კავშირი ცოდნის დონესთან, კერძოდ

I. 1981 წელს ბიოლოგიის ფაკულტეტზე, ხოლო 1982 წელს ფსიქოლოგიის სპეციალობაზე ჩარიცხულ აბიტურიენტთა ინტერესების სიძლიერე არჩეული პროფესიისათვის ძირითადი საგნების მიმართ უფრო ნაკლები იყო, ვიდრე ჩაურიცხავებისა;

2. აღმოჩნდა, რომ ერთი და იგივე ფაკულტეტზე, სხვადასხვა წელს სხვადასხვა შეიძლება იყოს მიმართება ჩარიცხულებისა და ჩაურიცხავების ინტერესებს შორის სიძლიერის. ასე მაგ., 1981 წ. ბიოლოგიის ფაკულტეტზე ჩარიცხულების ინტერესების სიძლიერე პროფილთან ახლოს მდგომი საგნების მიმართ ნაკლები იყო ჩაურიცხავებთან შედარებით, 1982 წელს მდგომარეობა ორივე ფაკულტეტზე დიამეტრალურად შეიცვალა და ახლა უკვე ფილოსოფია-ფსიქოლოგიის ფაკულტეტზე ჩარიცხულებს აღმოაჩნდათ ჩაურიცხავებთან შედარებით უფრო სუსტი ინტერესები სპეციალობასთან ახლოს მდგომი საგნების მიმართ, რასაც ადგილი აღარ ჰქონდა ბიოლოგიის ფაკულტეტზე.

3. ჩარიცხულთა შორის ხუთივე ფაკულტეტზე, როგორც 1981, ისე 1982 წელს აღმოჩნდნენ აბიტურიენტები, რომელთა ინტერესები ან საერთოდ არ შეესაბამებოდა არჩეულ ფაკულტეტს, ანდა მათი ინტენსიობა იყო მეტად დაბალი იმისათვის, რომ სასურველად მივიჩნიოთ ასეთ აბიტურიენტთა მოხვედრა შესაბამის ფაკულტეტზე.

დასკვნა: მიღებული შედეგები, ჩვენი აზრით, შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

I/ უნივერსიტეტის ხუთივე გამოკვლეულ ფაკულტეტზე აბიტურიენტთა მნიშვნელოვანი ნაწილი ინტერესების მიხედვით ძირითადად

შეესაბამება მათ მიერ არჩეულ პროფესიას;

2/მათგან მარტო ცოდნის დონის საფუძველზე შერჩევის შედეგად უნივერსიტეტში ხვდებიან ისეთი აბიტურიენტები, რომელთა ინტერესები არ შეესაბამება მოცემულ ფაკულტეტს;

3/ასეთ აბიტურიენტთა პროცენტული რაოდენობა განსხვავებულია როგორც სხვადასხვა ფაკულტეტებზე, ისე ერთი და იგივე ფაკულტეტებზე სხვადასხვა წლებში;

4/ინტერესების მიხედვით შეუფერებელთა შორის შესაძლებელია განვასხვავოთ აბიტურიენტთა ორი ჯგუფი: I.რომელთა ინტერესები შედარებით დაბალია მოცემული პროფესიისათვის მნიშვნელოვანი საგნების მიმართ და 2.რომელთა ინტერესები სუსტია არა მარტო პროფესიისთვის მნიშვნელოვანი საგნების, არამედ საერთოდ, ყველა სხვა გამოკვლეული საგნის მიმართაც;

5/აბიტურიენტთა შერჩევის დროს მათი ინტერესების გაუთვალისწინებლობა შეიძლება წარმოადგენდეს ერთ-ერთ ძირითად ფაქტორს, რომელიც ხელს უშლის უმაღლეს სკოლაში ჩარიცხულთა ერთი ნაწილის სათანადო პროფესიულ მომზადებას და საფუძვლად ედება მათ უკმაყოფილებას როგორც საკუთარი პროფესიით, ისე ამ პროფესიისთვის შესაფერი სამუშაოთი;

6/რამდენადაც პროფესიისთვის პიროვნების შეუფერებლობა კავშირშია კადრების დენადობასთან და სხვადასხვა სახის მატერიალურ და მორალურ დანაკარგებთან, სასურველი უნდა იყოს აბიტურიენტთა შერჩევა ინტერესების მიხედვითაც.

მიღებულია 21.XII.1982

ფიზიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

ცხრ.№1

	ფ ა კ უ ლ ტ ე ტ ე ბ ი				
	ფილოლოგიის	ფილოსოფია-ფსიქოლოგიის	ბიოლოგიის	მექანიკა-მათემატ.	ფიზიკის
1.	ლიტ.თეორია 14,06	ფილოსოფია 11,35	ბიოლოგია 14,09	მათემატიკა 14,42	ფიზიკა 14,41
2.	ესთეტიკა 11,05	ფსიქოლოგია 10,58	მედიცინა 12,33	ფიზიკა 6,60	მათემატიკა 7,54
3.	ენათმეცნ. 9,80	ესთეტიკა 10,57	ქიმია 7,82	პედაგოგიკა 5,98	ფილოსოფია 6,96
4.	ფილოსოფია 8,50	ლიტ.თეორია 9,61	ფსქოლოგია 7,42	ფილოსოფია 5,96	გეოლოგია 6,08
5.	ისტორია 7,93	მუსიკა და გამოყენებ. ხელოვნება 8,09	ესთეტიკა 6,77	ესთეტიკა 5,31	ტექნიკა 6,04
6.	მუსიკა და გამოყენებ. ხელოვნება 7,62	ისტორია 7,87	ფილოსოფია 6,39	მუსიკა და გამოყენებ. ხელოვნება 5,23	ისტორია 5,96
7.	პედაგოგიკა 6,59	პედაგოგიკა 7,22	მუსიკა და გამოყენებ. ხელოვნება 6,24	ლიტ.თეორია 4,80	მუსიკა და გამოყენებ. ხელოვნება 5,75
8.	პოლიტიკა 5,01	ენათმეცნ. 6,97	ლიტ.თეორია 5,81	ისტორია 4,80	ესთეტიკა 5,74
9.	სოციოლოგია 4,95	სოციოლოგია 6,92	ისტორია 5,09	ფსიქოლოგია 3,93	ლიტ.თეორია 4,97
10.	ფსიქოლოგია 4,87	პოლიტიკა 6,09	პედაგოგიკა 4,68	გეოლოგია 3,91	ფსიქოლოგია 4,55
11.	სამართალი 3,15	მედიცინა 5,36	ენათმეცნ. 4,17	ენათმეცნ. 3,79	პედაგოგიკა 4,01
12.	მედიცინა 2,41	სამართალი 5,10	სოციოლოგია 4,15	პოლიტიკა 3,74	პოლიტიკა 3,81
13.	გეოლოგია 2,35	ბიოლოგია 4,24	გეოლოგია 3,92	ტექნიკა 3,61	სოციოლოგია 3,80
14.	გეოგრაფია 2,07	გეოლოგია 3,61	პოლიტიკა 3,02	სოციოლოგია 3,45	მედიცინა 3,66
15.	ბიოლოგია 1,55	გეოგრაფია 2,73	სამართალი 2,71	მედიცინა 3,40	ბიოლოგია 3,58
16.	ეკონომიკა 1,13	ეკონომიკა 2,11	გეოგრაფია 2,45	სამართალი 3,24	ენათმეცნ. 3,49
17.	ტექნიკა 0,66	მათემატიკა 1,41	ფიზიკა 2,19	ბიოლოგია 2,34	ქიმია 3,09
18.	ფიზიკა 0,50	ფიზიკა 1,29	მათემატიკა 1,76	გეოგრაფია 2,02	სამართალი 2,56
19.	ქიმია 0,31	ტექნიკა 1,22	ტექნიკა 0,88	ეკონომიკა 1,25	გეოგრაფია 1,62
20.	მათემატიკა 0,26	ქიმია 1,04	ეკონომიკა 0,83	ქიმია 1,06	ეკონომიკა 1,21

ცხრ. №2

	ბიოლოგიის ფაკულტეტი	
№	1981 წ. მონაცემები	1982 წ. მონაცემები
I.	ბიოლოგია 14,09	ბიოლოგია 15,60
2	მედიცინა 12,33	მედიცინა 13,77
3.	ქიმია 7,82	ფსიქოლოგია 9,58
4.	ფსიქოლოგია 7,42	ესთეტიკა 9,33
5.	ესთეტიკა 6,77	ფილოსოფია 9,33
6.	ფილოსოფია 6,39	მუსიკა და გამოყ. ხელოვნება 8,68
7.	მუსიკა და გამოყენ. ხელოვნება 6,24	ქიმია 8,63
8.	ლიტერატურის თეორია 5,81	ლიტერატურის თეორია 8,60
9.	ისტორია 5,09	ისტორია 7,45
10.	პედაგოგიკა 4,68	გეოლოგია 6,58
11.	ენათმეცნიერება 4,17	ენათმეცნიერება 6,17
12.	სოციოლოგია 4,15	პედაგოგიკა 6,13
13.	გეოლოგია 3,92	სოციოლოგია 5,80
14.	პოლიტიკა 3,02	პოლიტიკა 4,95
15.	სამართალი 2,71	სამართალი 4,70
16.	გეოგრაფია 2,45	გეოგრაფია 4,30
17.	ფიზიკა 2,19	ფიზიკა 3,40
18.		

	I	2
I8.	მათემატიკა I,76	მათემატიკა 2,90
I9.	ტექნიკა 0,88	ტექნიკა 2,05
20.	ეკონომიკა 0,83	ეკონომიკა I,63

ლიტერატურა

I. მ.ზარანდია, მოსწავლეთა პროფესიული მიდრეკილებების, ინტერესებისა და ორიენტაციის ფორმირების საკითხები სკოლაში: თბ., მეცნიერება, 1981.

2. მ.იურჩი. ინტერესისა და მისი გამოვლინების ზოგიერთი პრობლემა. თარგმ. სლოვაკურიდან ი.ფილიპაშვილისა (ხელნაწერი).

3. ქართული საბჭ. ენციკლოპედია, ტ.5, გვ.I75. თბილისი, I980

4. А.В.Джевечка. Соотношение учебных интересов учащихся старших классов с особенностями их памяти и мышления. Автореферат дисс., I98I.

5. П.А.Лебедев. Подготовка учащихся старших классов к выбору профессии. Диссерт., I953.

6. П.Фресс, Ж.Пиаже. Экспериментальная психология, вып.УI, М., Прогресс, I978.

7. G.K.Haigh. Corroboration of personal values as selective factors in perception. J.abnorm.soc. Psychol., 1952, 47, p.394-398.

8. L.Postman, J.S.Bruner, E.Mc Ginnies, Personal values as selective factors in perception. J.abnorm, soc. Psychol., 1948, 43, p. 142-154.

О.Ш.Киласония

ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕРЕСЫ АБИТУРИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ФАКУЛЬТЕТОВ ТГУ

Резюме

С помощью вопросника словацкого психолога М.Юрчо были обследованы 629 абитуриентов филологического, философии и психологии, механико-математического, физического и биологического факультетов ТГУ.

Было установлено, что:

I. Интересы значительной части исследуемых в основном соответствуют выбранным им профессиям.

2. Вследствие отбора кандидатов для вуза лишь на основе уровня знаний в ТГУ попадают и такие абитуриенты, интересы которых не соответствуют специфике данного факультета.

3. Численность таких абитуриентов различна как на отдельных факультетах, так и на одном и том же факультете в разные годы.

4. Можно предполагать, что одним из основных факторов, определяющих в будущем невысокий уровень профессональной подготовки специалистов, их неудовлетворенность своей профессией и текучесть кадров, является настоящая система отбора абитуриентов в вузах, основанная на проверке уровня их знаний и не учитывающая их профессиональных интересов.

O.Kilasonia

VOCATIONAL INTERESTS OF SCHOOL-LEAVERS APPLYING FOR ENROLLMENT AT SOME FACULTIES OF TBILISI STATE UNIVERSITY

Summary

Using the inventory of the slovak psychologist M.Jurčo, 629 school-leavers were tested at the philological, philosophical and psychological, mechanico-mathematical, physical, and biological faculties of TSU. The following results were obtained:

1. The interests of a considerable part of the school-leavers tested largely correspond to the profession chosen.

2. Owing to the relection of future students on the basis of their level of knowledge alone, such school-leavers also find their way to TSU whose interests do not correspond to the specificity of the given faculty.

3. The number of such school-leavers differs from year to year at inter-faculty level.

4. It may be assumed that the present system of selection of school-leavers for higher educational institutions, based only on cheching their level of knowledge, without taking account of their vocational interests, will determine, infuture, the low level of vocational training of specialists, their dissatisfaction with their occupation, and turnover of personnel.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

О РЕЛАКСАЦИИ ЯДЕР НЕКРАМЕРСОВСКИМИ МАГНИТНЫМИ ИОНАМИ

Л.Г.Корсава

В неметаллическом диамагнитном кристалле с магнитной примесью релаксация ядер основной решетки обусловлена взаимодействием ядер со спинами ионов примеси. Для решения задачи следует рассчитать, в первую очередь, вероятность прямой (непосредственной) релаксации ядра магнитным ионом. Решая далее основное уравнение теории спиновой диффузии, можно получить выражение для времени релаксации суммарного ядерного магнитного момента образца /I,2/.

Выражение прямой вероятности релаксации ядра для гамильтониана магнитного иона вида $\beta g \vec{H}\vec{S}$ (β - боровский магнетон, g - скалярный g- фактор, $\vec{S}$ - оператор спина магнитного иона) хорошо известно. В данной работе изучается ядерная релаксация через некрамерсовские примесные ионы (дублеты) с спингамильтонианом

$$\mathcal{H}_o = g_{\parallel}\beta H_z S_z + \Delta S_x + A S_z I_z .$$

В работе /3/ был проведен расчет вероятности релаксации ядра для случая поля H, направленного вдоль оси z . Здесь же рассматривается общий случай произвольной ориентации внешнего магнитного поля. Нашей целью является расчет зависимости времени релаксации ядер от ориентации поля относительно z - оси симметрии магнитного (некрамерсовского) иона и его окружения. Угол между H и осью z обозначим через φ.

Далее вводится система координат с осями x, y, z вдоль главных направлений тензора $\hat{g}$ (главные значения обозначаем через g_x, g_y, g_z). Для некрамерсовских дублетов, как известно, $g_x = g_y = 0$, $g_z = g_{\parallel}$.

Опустим в $\mathcal{H}_0$ член AS_zI_z

$$\mathcal{H}_0 = g_{\parallel}\beta H_z S_z + \Delta S_x .$$

Для его учета достаточно в конечном результате провести замену $g_{\parallel}\cos\varphi \longrightarrow g_{\parallel}\cos\varphi + \frac{AM}{\beta H}$, где M есть собственное значение I_z. Дальше через $\vec{I}$ обозначим спин ядра основной решетки.

Введем эффективный g-фактор магнитного иона, зависящий от H и φ

$$g = \sqrt{g_{\parallel}^2\cos^2\varphi + \left(\frac{\Delta}{\beta H}\right)^2} \qquad (I)$$

Проведем далее поворот операторов спина $\vec{S}$ от осей x, y, z к осям ξ, η, ζ

$$S_\lambda = \alpha_{\lambda i} S_i \qquad (2)$$

($\lambda = \xi, \eta, \zeta$, $i = x, y, z$; по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование), притом матрица поворота имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}, & 0, & -\frac{\Delta}{g\beta H} \\ 0, & 1, & 0 \\ \frac{\Delta}{g\beta H}, & 0, & \frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g} \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

это преобразование представляет собой поворот вокруг оси y на угол $\arcsin \frac{\Delta}{g\beta H}$. Заметим, что компоненты матрицы

$$\alpha_{\zeta x} = \frac{\Delta}{g\beta H}, \quad \alpha_{\zeta y} = 0, \quad \alpha_{\zeta z} = \frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}$$

являются направляющими косинусами оси ζ соответственно относительно осей x, y, z.

Гамильтониан $\mathcal{H}_0$ принимает вид

$$\mathcal{H}_0 = g\beta H S_{\zeta}. \tag{4}$$

Таким образом, S_{ζ} является хорошим квантовым числом, другими словами, ζ есть ось квантования электронного спина S. Разность энергии двух уровней иона равна $g\beta H$. Поэтому g играет роль эффективного g-фактора иона.

Вводим, наконец, систему осей u, v, w с осью w вдоль внешнего поля H и с осями u, v, перпендикулярными друг другу и расположенными в плоскости, перпендикулярной H. Итак, по определению $\varphi = (\hat{z, H}) = (\hat{z, w})$.

Имеем: $g\beta H \gg \hbar\gamma_I H$. При малой концентрации примеси большинство ядер основной решетки расположены достаточно далеко от ионов примеси, поэтому $\hbar\gamma_I H$ значительно превосходит энергию взаимодействия ядра и иона примеси. Вследствие этого, можем считать, что ядерный спин $\vec{I}$ квантуется в направлении внешнего поля w. Отметим, далее, что ось квантования ζ спина S расположена в плоскости zw. Оси ξ и η перпендикулярны друг другу и расположены в плоскости, перпендикулярной оси ζ. Можно принять, что оси x, u, ξ расположены в плоскости $zw\zeta$.

Энергию d-d взаимодействия ядра с магнитным ионом записываем в виде

$$V = \hbar \vec{I} \hat{A} \vec{S} = \hbar A_{ik} I_i S_k \qquad (5)$$

(индексы принимают значения x, y, z ; всюду ниже по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование).

Получим явное выражение тензора $\hat{A}$. Имеем

$$V = \frac{1}{r^3}\left[3(\vec{n}\vec{\mu}_I)(\vec{n}\vec{\mu}_s) - \vec{\mu}_I\vec{\mu}_s\right], \qquad (6)$$

где $\vec{\mu}_I$ и $\vec{\mu}_s$ — операторы ядерного и электронного магнитных моментов, $\vec{r}$ — радиус-вектор ядра относительно магнитного иона, $\vec{n}$ — единичный вектор вдоль $\vec{r}$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. Подставляя $\vec{\mu}_I = \hbar\gamma_I \vec{I}$ и $\vec{\mu}_s = \beta \hat{g} \vec{S}$ в (6) получаем

$$V = \frac{\hbar\beta\gamma_I}{r^3}\left[3(\vec{n}\vec{I})(\vec{n}\hat{g}\vec{S}) - \vec{I}\hat{g}\vec{S}\right] = \frac{\hbar\beta\gamma_I}{r^3}\left(3n_i n_e g_{ek} - g_{ik}\right) I_i S_k . \qquad (7)$$

Из (5) и (7)

$$A_{ik} = \frac{\beta\gamma_I}{r^3}\left(3n_i n_e g_{ek} - g_{ik}\right) = \frac{\beta\gamma_I}{r^3}\left(3n_i n_e - \delta_{ie}\right) g_{ek} , \qquad (8)$$

или

$$\hat{A} = \frac{g_{\parallel}\beta\gamma_I}{r^3}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 3n_x n_z \\ 0, & 0, & 3n_y n_z \\ 0, & 0, & 3n_z^2 - 1 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Принимая во внимание (5) и (9) для энергии d-d взаимодействия спинов $\vec{S}$ и $\vec{I}$ окончательно получим

$$V=\hbar\vec{I}\hat{A}\vec{S}=\hbar A_{ik}I_i S_k= \tag{10}$$

$$=\frac{\hbar g_{\parallel}\beta\gamma_I}{r^3}\left[3n_x n_z I_x S_z+3n_y n_z I_y S_z+(3n_z^2-1)I_z S_z\right]=$$

$$=\frac{\hbar g_{\parallel}\beta\gamma_I}{r^3}\left[3n_z(n_x I_x+n_y I_y)+(3n_z^2-1)I_z\right]S_z .$$

Гамильтониан системы, состоящей из электронного спина и ядра, запишем в виде

$$\mathcal{H}=g\beta H S_\zeta-\hbar\gamma_I H I_w+V. \tag{11}$$

Последний член в (11) может быть рассмотрен как малое возмущение.

Состояния с S_ζ, отличающимися на единицу, сильно различаются по энергии (на величину, приблизительно равную $g\beta H$), поэтому в энергии возмущения V (10) можно ограничиться учетом членов, пропорциональных $S_\zeta(I_u\pm iI_v)$. Для выделения этих членов, учитывая, что согласно (2), (3)

$$S_z=-\frac{\Delta}{g\beta H}S_\xi+\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}S_\zeta ,$$

заменяем

$$S_z\longrightarrow\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}S_\zeta .$$

Далее, выражаем I_x, I_y, I_z через I_u, I_v, I_w

$$I_x = I_u \cos\varphi + I_w \sin\varphi,$$
$$I_y = I_v,$$
$$I_z = -I_u \sin\varphi + I_w \cos\varphi$$

и проведем замену

$$I_x \longrightarrow I_u \cos\varphi,$$
$$I_y \longrightarrow I_v,$$
$$I_z \longrightarrow -I_u \sin\varphi,$$

т.е. отбрасываем члены, пропорциональные I_w. В результате из (10) для эффективной для ядерной релаксации части d-d взаимодействия ядра с магнитным ионом получаем

$$V_{ef} = \frac{\hbar g_{\parallel}\beta\gamma_I}{r^3}\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g} S_z\Big[3n_z(n_x\cos\varphi\cdot I_u + n_y I_v) -$$
$$-(3n_z^2-1)\sin\varphi\cdot I_u\Big] =$$
$$= \frac{\hbar g_{\parallel}\beta\gamma_I}{2r^3}\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g} S_z\Big\{3n_z\big[n_x\cos\varphi(I_+ + I_-) -$$
$$-in_y(I_+ - I_-)\big] - (3n_z^2-1)\sin\varphi(I_+ + I_-)\Big\} =$$
$$= \frac{\hbar g_{\parallel}\beta\gamma_I}{2r^3}\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g} S_z\Big\{I_+\big[3n_z(n_x\cos\varphi - in_y) - (3n_z^2-1)$$
$$+ I_-\big[3n_z(n_x\cos\varphi + in_y) - (3n_z^2-1)\sin\varphi\big]\Big\},$$

или, окончательно

$$V_{ef} = \hbar A_+ S_z (I_u + iI_v) + \hbar A_- S_z (I_u - iI_v), \tag{12}$$

где

$$A_\pm = \frac{g_{\parallel}\beta\gamma_I}{2r^3}\,\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}\left[3n_z(n_x\cos\varphi \mp in_y) - (3n_z^2-1)\sin\varphi\right]. \tag{13}$$

Далее, согласно общей теории магнитной релаксации /4/, для вероятности непосредственной релаксации ядра магнитным ионом, имеем

$$\frac{1}{T_{неп}} = 2J(\omega_I) \qquad (\omega_I = \gamma_I H),$$

где

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{-i\omega t}\,dt, \quad G(t) = |A_+|^2 \langle S_z(0)S_z(t)\rangle .$$

Принимая

$$\langle S_z(0)S_z(t)\rangle = \frac{1}{3}s(s+1)e^{-\frac{|t|}{\tau}},$$

получаем

$$\frac{1}{T_{неп}} = \frac{4}{3}s(s+1)|A_+|^2\frac{\tau}{1+(\omega_I\tau)^2}.$$

Так как $s = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{T_{неп}} = |A_+|^2\frac{\tau}{1+(\omega_I\tau)^2}, \tag{14}$$

где согласно (13)

$$|A_+|^2 = \left(\frac{g_{\parallel}\beta\gamma_I}{2r^3}\right)^2\left(\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}\right)^2\Big\{\big[3n_z n_x\cos\varphi - \tag{15}$$

$$-(3n_z^2-1)\sin\varphi\Big]^2+9n_z^2n_y^2\Big\}.$$

Проведем усреднение вероятности прямой релаксации (I4) по направлениям $\vec{n}$. В связи с этим заметим, что усреднение по направлениям $\vec{n}$ соответствует усреднению по ядрам, расположенным на данном расстоянии r от магнитного иона. Ради упрощения вместо усреднения по дискретной совокупности возможных направлений мы усредняем по всем направлениям $\vec{n}$.

Используем известные соотношения

$$\overline{n_i n_k n_e n_m}=\frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{em}+\delta_{ie}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{ke}\right),$$

$$\overline{n_i n_k}=\frac{1}{3}\delta_{ik}$$

и вытекающие из них следствия

$$\overline{n_z^2n_x^2}=\overline{n_z^2n_y^2}=\frac{1}{15},\quad \overline{n_z^4}=\frac{1}{5},\quad \overline{n_z^2}=\frac{1}{3},$$

$$\overline{n_z^3n_x}=\overline{n_z n_x}=0.$$

Тогда усреднение дает

$$|A_+|^2=\frac{1}{20}\left(\frac{\gamma_I g_{\parallel}\beta}{r^3}\right)^2\left(\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}\right)^2\left(6+\sin^2\varphi\right) \tag{16}$$

и для вероятности непосредственной релаксации ядра, вызываемой находящимся от него на расстоянии r магнитным ионом, окончательно получаем результат

$$\frac{1}{T_{неп}(r,\varphi)} = \frac{1}{20}\left(\frac{\gamma_I g_{\parallel}\beta}{r^3}\right)^2 \frac{\tau}{1+(\omega_I\tau)^2}\left(\frac{g_{\parallel}\cos\varphi}{g}\right)^2\left(6+\sin^2\varphi\right) \qquad (17)$$

Применяя далее результаты теории спиновой диффузии, получаем выражение для времени релаксации $T_I(\varphi)$ суммарного ядерного магнитного момента образца $M(t)$.

В заключение заметим, что часто в образце имеется несколько типов неэквивалентных магнитных ионов (т.е. ионов с разными осями z). Тогда получаем несколько времен релаксации $T_I(\varphi_i)$. В таком случае надо провести усреднение (по ионам) не величины $[T_I(\varphi_i)]^{-1}$, а временного хода релаксации. Таким образом, временная зависимость $M(t)$ будет содержать несколько экспонент, число которых равно, вообще говоря, числу неэквивалентных типов магнитных ионов.

Поступила 24.I.1983

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Р.Хуцишвили, УФН, 87, 211, 1965.
2. Г.Р.Хуцишвили, УФН, 96, 441, 1968.
3. Л.Г.Корсава, Н.С.Бендиашвили, ФТТ, 16, 2611, 1974.
4. А.Абрагам. "Ядерный магнетизм", ИЛ, М.,1963.

ლ. კორსავა

ბირთვების რელაქსაცია არაკრამერსული მაგნიტური იონებით

რ ე ზ ი უ მ ე

გამოთვლილია მესრის ძირითადი ბირთვების პირდაპირი რელაქსაციის ალბათობა არაკრამერსული მაგნიტური მინარევული იონებით.

L. Korsava

ON NUCLEAR RELAXATION BY NON-KRAMERS MAGNETIC IONS

Summary

The direct relaxation probability of a lattice nucleus by non-Kramers magnetic impurity ions is calculated.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

251, 1984

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А.Ш.Шапатава

В данной работе доказывается существование и единственность решения параболического уравнения в случае нелинейного граничного условия определенного вида.

Задача. Ищется функция $u=u(x,t)$, $x\in\Omega$, Ω – ограниченная область в R^n с границей Γ, $t\in\,]0,T[$, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f \qquad \text{в} \qquad Q=\Omega\times\,]0,T[\qquad (1)$$

и удовлетворяющая условиям

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad u_0 \text{ – заданная функция}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+P_k(u)u=g \qquad \text{на} \qquad \Sigma=\Gamma\times\,]0,T[, \qquad (3)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали заданной области, а $P_k(u)=a_0u^k+a_1u^{k-1}+\dots+a_k$ – полином k-го порядка, $k<\infty$.

Введем некоторые пространства и определения (см./1/,/3/).

Пусть H -гильбертово пространство над R , V- рефлексивное пространство Банаха, причем $V\subset H$, V плотно в H и сепарабельно. Отождествляя H с его сопряженным и обозначая через V' сопряженное к V, имеем $V\subset H\subset V'$. Нормы в H и V обозначим через $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$, соответственно.

Определение I. Всякий оператор $A: V\to V'$ называется семинепрерывным, если

$$\forall u, v, w\in V \quad \text{функция} \quad \lambda\to (A(u+\lambda v), w) \tag{4}$$

непрерывна как функция из R в R.

Определение 2. Всякий оператор A из V в V' называется монотонным, если

$$\forall u, v\in V, \quad (A(u)-A(v),\ u-v)\geqslant 0. \tag{5}$$

Пусть $B: V\to V'$ – семинепрерывный, монотонный оператор и

$$\|B(v)\|_* \leqslant C\|v\|^{k+1}, \quad c=const>0, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|_*$ – норма в V', а $[\ ]$ – такая полунорма на V, что существуют такие $\lambda>0$ и $\beta>0$, что

$$[v]+\lambda|v|\geqslant\beta\|v\|, \quad \forall v\in V.$$

Предположим, что

$$(Bv, v)\geqslant\alpha[v]^{k+2}. \tag{7}$$

В качестве V возьмем

$$V\{v/v\in W^{1,p}(\Omega),\ v|_\Gamma\in L^{k+2}(\Gamma)\}, \tag{8}$$

а в качестве $Bu-P_k(u)u$, где

$$W^{1,p}(\Omega)=\{v/v\in L^p(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^p(\Omega),\ i=1,\dots,n\}$$

Для $u,v\in V$ определим форму $a(u,v)$ следующим образом:

$$a(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\Gamma}P_k(u)uv\,d\Gamma, \qquad (9)$$

а полунорму на V так:

$$[v]=\left(\int_{\Gamma}|v|^{k+2}d\Gamma\right)^{\frac{1}{k+2}}.$$

Тогда условие (7) заменяется условием

$$\int_{\Gamma}P_k(v)v^2d\Gamma\geqslant\alpha\int_{\Gamma}|v|^{k+2}d\Gamma. \qquad (10)$$

Для любого банахова пространства X обозначим через $L^p(0,T;X)$ пространство (классов) функций $t\to\varphi(t):\ ]0,T[\,\to X$, измеримых, принимающих значения из X и таких, что

$$\left(\int_0^T\|\varphi(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}=\|\varphi\|_{L^p(0,T;X)}<\infty,$$

если $p=\infty$, то норма заменяется

$$\sup_{t\in]0,T[}\operatorname{ess}\|\varphi(t)\|_X=\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

Пусть, далее

$$f\in L^{p'}(0,T;V'),\quad \text{а}\quad g\in L^{q'}(\Sigma),\ q=k+2. \qquad (11)$$

$\tilde f$ определим с помощью равенства

$$(\tilde f,v)=\int_{\Omega}fv\,dx+\int_{\Gamma}gv\,d\Gamma. \qquad (12)$$

Тогда можно утверждать (см. /3/) следующее:

<u>Теорема I</u>. Предположим, что $B:V\longrightarrow V'$ – семинепрерывный монотонный оператор и что выполнены условия (6) и (7). Пусть заданы f, g и u_0, причем $u_0\in H$, f и g удовлетворяют (11). Тогда существует единственная функция u такая, что

$$u \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{13}$$

$$(u',v) + a(u,v) = (\tilde{f},v), \tag{14}$$

$$u(0) = u_0 . \tag{15}$$

Из этой теоремы при помощи формулы Грина, и если вспомним, что $a(u,v)$ определэна при помощи (9), $\tilde{f}$ – при помощи (12), а $Bv \equiv P_K(v)v$, получим

<u>Теорема 2.</u> При условии теоремы I (если вместо (7) возьмем (10)) существует единственная функция u, удовлетворяющая (1), (2) и (3) и такая, что

$$u \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H),$$

где V имеет вид (3), а $H = L^2(\Omega)$, т.е. при вышеуказанных условиях наша задача имеет, и притом единственное решение.

Заметим, что аналогичные результаты получаются, если вместо $-\Delta u$ взять любой линейный коэрцитивный оператор $A(t) \in \mathcal{L}(V;V')$. Тогда для каждого $t \in]0,T[$ вместо (9) зададим форму

$$a(t;u,v) = a_1(t;u,v) + a_2(u,v),$$

где $a_2(u,v) = \int_\Gamma P_K(u)uv\,d\Gamma$, а $a_1(t;u,v)$ – непрерывная билинейная форма на V, обладающая следующими свойствами: $\forall u,v \in V$ функция $t \to a(t;u,v)$ измерима и

$$|a_1(t;u,v)| \leqslant M\|u\| \cdot \|v\|; \tag{16}$$

где M не зависит от t, u и v.

Более того, вместо $-\Delta u$ можно взять нелинейный оператор A, но тогда он должен быть семинепрерывным, монотонным оператором, удовлетворяющим условиям, аналогичным (6) и (7).

Теперь остается рассмотреть примеры, когда выполняются условия теоремы 2.

Пример I. Пусть $P_k(u)$ – полином второй степени $P_2(u)=au^2+bu+c$, где (для простоты) $a, b, c = const$. Доказывается, что если

$$b^2-3ac\leq 0, \tag{I7}$$

то условия теоремы 2 верны.

Доказательство. Надо показать, что при условии (I7)

$$\int_\Gamma (P_2(u)u-P_2(v)v)(u-v)d\Gamma\geq 0. \tag{I8}$$

Рассмотрим произведение

$$[(au^2+bu+c)u-(av^2+bv+c)v](u-v)=$$

$$=[a(u^3-v^3)+b(u^2-v^2)+c(u-v)](u-v)=$$

$$=[a(u^2+uv+v^2)+b(u+v)+c](u-v)^2.$$

Надо исследовать, когда выражение в квадратных скобках ≥ 0. Обозначив $\frac{u}{v}=z$, получим

$$a(u^2+uv+v^2)+b(u-v)+c=a(z^2+z+1)v^2+b(z+1)v+c \tag{I9}$$

и, если

$$b^2(z+1)^2-4ac(z^2+z+1)\leq 0, \tag{20}$$

то (I9) будет неотрицательным. (20) перепишем в виде

$$(b^2-4ac)z^2+2(b^2+2ac)z+b^2-4ac\leq 0. \tag{2I}$$

(2I) будет выполнено, если

$$z^2+\frac{2(b^2-2ac)}{b^2-4ac}z+1\geq 0, \tag{22}$$

т.к. $b^2-4ac\leq 0$, (22) верно, если

$$\frac{(b^2+2ac)^2}{(b^2-4ac)^2}-1\leq 0,$$

т.е. если $4ac(b^2-3ac)\leq 0$. Так как $ac>0$, отсюда следует, что при (I7) условие (I8) выполняется, т.е. вопрос монотоности исследован.

Проверим условие (I0) при $b^2-3ac<0$, т.е. покажем, что существует такое α, что

$$\int_\Gamma(au^2+bu+c)u^2d\Gamma\geq\alpha\int_\Gamma|u|^4d\Gamma. \tag{23}$$

Проверим, что при (I7) можно подобрать α так, чтобы

$$au^2+bu+c\geq\alpha u^2.$$

Действительно, для выполнения условия

$$(a-\alpha)u^2+bu+c\geq 0$$

надо, чтобы

$$b^2-4(a-\alpha)c\leq 0, \tag{24}$$

т.е. $b^2-3ac-(a-4\alpha)c\leq 0$. Это верно, если $\alpha\leq\frac{a}{4}$ и $b^2-3ac\leq 0$. Отсюда следует, что при условии (I7) и если взять $\alpha\leq\frac{a}{4}$ имеет место (23).

Отметим, что условие (I7) можно ослабить. А именно, (23) верно если $b^2-4ac+\varepsilon\leq 0$, где $\varepsilon>0$ - любое число.

Ясно, что условия семинепрерывности и ограниченности выполняются автоматически.

<u>Пример 2</u>. Пусть $P_k(u)=a_0u^{2m}+a_1u^{2m-2}+\dots+a_{m-1}^2+a_m$, где $a_i=const\geq 0$, $2m=k$. Тогда все требуемые условия выполняются.

Действительно. Сначала проверим, что

$$\int_\Gamma \left(P_\kappa(u)u - P_\kappa(v)v\right)(u-v)\,d\Gamma \geq 0. \tag{25}$$

Имеем,

$$\left(P_\kappa(u)u - P_\kappa(v)v\right)(u-v) \geq$$

$$\geq P_\kappa(u)u^2 + P_\kappa(v)v^2 - |u\,v|\left(P_\kappa(u) - P_\kappa(v)\right) \geq$$

$$\geq P_\kappa(u)u^2 + P_\kappa(v)v^2 - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right)\left(P_\kappa(u) + P_\kappa(v)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[P_\kappa(u)u^2 + P_\kappa(v)v^2 - P_\kappa(v)u^2 - P_\kappa(u)v^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(P_\kappa(u) - P_\kappa(v)\right)\left(u^2 - v^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_0\left(u^{2m} - v^{2m}\right) + a_1\left(u^{2(m-1)} - v^{2(m-1)}\right) +\right.$$

$$\left. + \cdots + a_{m-1}\left(u^2 - v^2\right)\right]\left(u^2 - v^2\right).$$

Отсюда ясно, что (25) выполнено. Остальные условия легко проверяются

Поступила I.II.1983

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

I. Ж.Д. Лионс (Lions J.-L). Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Springer Verlag Berlin, 1961.

2. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической

физики, М., "Наука", 1972.

3. Ж.-Л.Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., "Мир", 1972.

ა.შაფათავა

პარაბოლური ტიპის განტოლებებისათვის ერთი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

დამტკიცებულია პარაბოლური განტოლების ამოხსნის არსებობა და ერთადერთობა გარკვეული სახის არაწრფივი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში.

A. Shapatava

ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS

Summary

The existence and uniqueness of solution of the parabolic equations is proved in the case of a certain non-linear boundary condition.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

გამყიდველის პროფესიის ზოგიერთი ფსიქოგრაფიული თავისებურება და მისი გამოვლენის მეთოდები

ი. ფილიპაშვილი, ნ. ბედოიძე, გ. ბესიაშვილი, ო. კილასონია

ვაჭრობას, როგორც მომსახურების სფეროს დარგს, ყოველთვის ეკავა და ახლაც უკავია მნიშვნელოვანი ადგილი საზოგადოების ცხოვრებაში, სახალხო მეურნეობის განვითარებაში. ასრულებს რა წარმოებასა და მოხმარებას შორის შუამავლის ფუნქციას, ვაჭრობა გავლენას ახდენს როგორც წარმოებაზე, ასევე მომხმარებლის მოთხოვნილებისა და გემოვნების ჩამოყალიბებაზე.

ვაჭრობის პროცესის ცენტრალურ მომენტს ყიდვა-გაყიდვის სურვილი, მოთხოვნილება წარმოადგენს. განწყობის ფსიქოლოგიის თვალსაზრისით გაყიდვა, როგორც გამყიდველის მოქმედება, მომსახურების ქცევათა ფორმას განეკუთვნება, ხოლო ყიდვა – მოხმარებით ქცევათა ფორმას. ორივე ექსტროგენული /დ. უზნაძე/ წარმოშობისაა, ე. ი. ორივე სახის ქმედებას განაპირობებს გარედან მომდინარე იმპულსი, ორივე მათგანს საკუთარი მოტივი და მიზანი გააჩნია. ამ უკანასკნელის მიღწევა გარკვეული გზებითა და საშუალებებით სწარმოებს.

სათანადო ობიექტური და სუბიექტური პირობების არსებობის შემთხვევაში მყიდველსა და გამყიდველში აღმოცენდება სათანადო ქცევის განწყობა, რომლის შემდგომი რეალიზაცია დამოკიდებულია გამყიდველის ტაქტსა და დახელოვნებულობაზე, იმაზე, თუ რამდენად მოერგებიან ერთმანეთს მათი ქცევის სტრუქტურაში შემავალი ელემენტები, მათი ინტერესი. ე. ი. გამყიდველზეა დამოკიდებული როგორც

მყიდველის,ასევე თავისი განწყობის შესატყვისი ქცევის რეალიზაცია.კომერციული აქტის განხორციელება დადებით ემოციას იწვევს როგორც მყიდველში,ასევე გამყიდველში,ხოლო განუხორციელებლობის შემთხვევაში თავს იჩენს ფსიქოლოგიაში კარგად ცნობილი „დაუკმაყოფილებლობის", დაუმთავრებლობის განცდა,რაც უარყოფითად მოქმედებს გარიგებაში მონაწილე ორივე მხარეზე.

აღნიშნულიდან გამომდინარე აშკარად ჩანს,რომ ვაჭრობის პროცესში წამყვან როლს გამყიდველი ასრულებს.ეს როლი შეიძლება შევადაროთ მასწავლებლის როლს სწავლების პროცესში.აქედან გამომდინარე ნათელი ხდება, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს გამყიდველის პიროვნებას, მის პროფესიულ დახელოვნებულობას და იმის საჭიროებას, რომ ამ საქმიანობისათვის სპეციალურად მოხდეს სათანადო თვისებების მქონე ადამიანთა შერჩევა.

ისევე როგორც პროფესიათა უმრავლესობის შემთხვევაში, გამყიდველის პროფესიაც გარკვეულ მოთხოვნებს უყენებს ადამიანს.გამყიდველთა კადრების შერჩევის მეცნიერულად დასაბუთებულმა სისტემამ უნდა გაითვალისწინოს როგორც ამ პროფესიის პროფესიოგრაფიული /განსაკუთრებით ფსიქოგრაფიული/ თავისებურებანი,ასევე ამ საქმიანობისათვის განკუთვნილი ადამიანის თავისებურებანი.საბოლოო ანგარიშით სანამ ესა თუ ის ადამიანი ვაჭრობას მოჰკიდებდეს ხელს,მანამდე საჭიროა მისი პროფესიული ვარგისიანობის დადგენა.

გამყიდველის პროფესიის ფსიქოგრაფიული შინაარსის შესწავლა და ამ სფეროსათვის საჭირო ადამიანთა პროფესიული ვარგისიანობის დადგენისათვის სათანადო მეთოდების შექმნა-გამოყენება ჯერ კიდევ ჩვენი საუკუნის ოციან წლებში დაიწყო.გამოვლენილ იქნა ამ მიმართულებით გარკვეული კანონზომიერებანი,შემუშავებულ იქნა გარკვეული მეთოდიკური ხასიათის რეკომენდაციები /პარსონსი,1922, ე.ბრაილოვსკი,1929, და სხვ./. ზოგიერთ მათგანს დღესაც არ დაუკარგავს მნიშვნელობა.მაგრამ,ისევე როგორც ყველა პროფესია და

ის თვისებები, რომელსაც იგი უყენებს ადამიანის პროფესიულ ვარგისიანობას, გამყიდველის პროფესიაც არსებითად შეიცვალა მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის კვალობაზე და, ბუნებრივია, განსხვავებული მოთხოვნები წაუყენა ადამიანს. გასათვალისწინებელია აგრეთვე ის გარემოებაც, რომ პროფესიულ ვარგისიანობაზე არსებით გავლენას ახდენს ამა თუ იმ საზოგადოებრივ-ეკონომიკურ ფორმაციაში გაბატონებული შეხედულებანი, როგორც პოლიტიკური, ასევე მორალურ-ეკონომიკური. ეს ბოლო გარემოება ყოველთვის არ იძლევა შესაძლებლობას უკრიტიკოდ და წინასწარი შემოწმება-ადაპტაციის გარეშე გამოვიყენოთ თანამედროვე კაპიტალისტურ ქვეყნებში დაგროვილი მდიდარი გამოცდილება. ამიტომ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში საჭირო ხდება პროფესიის შინაარსის დაზუსტება და იმ მოთხოვნების გადასინჯვა, რასაც ეს პროფესია უყენებს ადამიანს.

გამყიდველის პროფესიის ფსიქოგრაფიული შინაარსის გამოსავლენად ჩვენ გამოვიყენეთ ე.წ. „ლიპმანის ანკეტა" /4, გვ.II-I4/ და ექსპერტთა შეფასების მეთოდი. ვაჭრობის სფეროს I0 სპეციალისტს და ასევე I0 ფსიქოლოგს მივეცით აღნიშნული ანკეტა, რათა მათ ამ ანკეტიდან ამოერჩიათ ისეთი თვისებები, რომლებიც მათი აზრით აუცილებელია გამყიდველის შრომისათვის.

როგორც ცნობილია, ლიპმანის ანკეტა I5I თვისებას შეიცავს. შედეგების დამუშავების შემდეგ ექსპერტებმა უპირატესობა მისცეს შემდეგ თვისებებს:

I. კეთილსინდისიერება, მოვალეობის გრძნობა;

2. მოკლე და მკაფიოდ პასუხის გაცემის უნარი;

3. მონდომებულობა., წესრიგისა და სისუფთავის სიყვარული;

4. ყოველთვის მშვიდი, სასიამოვნო ხასიათი;

5. სწრაფი და დამაჯერებელი ანგარიში გონებაში;

6. ტაქტიანობა, სხვადასხვა საზოგადოებრივი მდგომარეობისა და ხასიათის მქონე ადამიანების მოპყრობის უნარი;

7.აბსოლუტური პატიოსნება,უნარი არ დაემორჩილოს სხვისი ნივთების თუ ფულის დაუფლების ცდუნებას;

8.საერთო შენობაში ერთად და მეგობრულად თანამშრომლობა;

9.საწინააღმდეგო სქესის ადამიანის თანდასწრებით ყურადღების კონცენტრაციის უნარი;

10.ჩვეულებრივი ყოველდღიური სამუშაოს გულმოდგინედ შესრულება;

11.სწრაფი და დამაჯერებელი წერილობითი ანგარიში;

12.შეჯიბრებადობა;

13.გამომხატველი მიმიკა;

14.ზეპირად აზრის გამოხატვის უნარი;

15.მდგრადობა,არაკაპრიზულობა,გუნება-განწყობილებისაგან დამოუკიდებლობა;

16.ადამიანებზე ზემოქმედების უნრაი;

17.ფერთა განაწილება გემოვნებით ისე,რომ ისინი თვალში საცემნი იყვნენ.

მიღებული შედეგებიდან ჩანს,რომ გამყიდველის პროფესიის შინაარსში სჭარბობს ქარაქტეროლოგიური ნიშნები.მასში წარმოდგენილია აგრეთვე ფსიქიკური აქტიობის ტემპი და ინტელექტი /სწრაფი და დამაჯერებელი წერილობითი ანგარიში/, მეტყველება /მოკლედ და მკაფიოდ პასუხის გაცემა/, ყურადღება /საწინააღმდეგო სქესის ადამიანის თანდასწრებით ყურადღების კონცენტრაციის უნარი/, ფიზიოგნომიკური ნიშანი /გამომხატველი მიმიკა/. გამოვლინდა აგრეთვე ისეთი ნიშნებიც,რომლებიც გარკვეული თვალსაზრისით ინტერმოდალურ ხასიათს ატარებენ.ასეთებია: შეჯიბრებადობა, ზეპირად აზრის გამოთქმის უნარი,ადამიანებზე ზემოქმედების უნარი.ბოლო თვისება კი,როგორც ჩანს,დაკავშირებულია გამყიდველის დიზაინერულ თავისებურებასთან.

გამოკვლევა ჩატარდა ქ.თბილისში ცენტრალურ უნივერმაღსა და უნივერმაღ „თბილისში“. ამ სავაჭრო ობიექტების უნივერსალურობა გვაძლევს იმის მტკიცების უფლებას, რომ გამოვლენილი მახასიათებლები მეტნაკლებად სპეციფიკურნი არიან გამყიდველის პროფესიის ყველა შესაძლო ნაირსახეობისათვის.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ადამიანის პროფესიული ვარგისიანობის დადგენისათვის სპეციალური მეთოდები გამოიყენება. რიგ საზღვარგარეთულ გამოკვლევაში ნაცადია გამყიდველის პროფესიული ვარგისიანობის დაკავშირება ისეთ თვისებებთან, როგორიცაა ინტროვერსია-ექსტრავერსია /აიზენკი/ და კეტელის ფაქტორები. აღნიშნულის გათვალისწინებით და აგრეთვე ჩვენს მიერ გამოვლენილი მახასიათებლების გათვალისწინებით ჩვენ შევამოწმეთ ზემოაღნიშნულ სავაჭრო ობიექტებში დასაქმებული გამყიდველების პროფესიული ვარგისიანობა და ამავე დროს შევამოწმეთ ამ დროს გამოყენებული რიგი ფსიქოდიაგნოსტიკური საშუალების ღირებულება ამ მხრივ.

ცენტრალური უნივერმაღის 67 გამყიდველი სპეციალისტი ექსპერტების შეფასების შემდეგ /საუკეთესო, კარგი, საშუალო/ შევამოწმეთ კეტელის „თექვსმეტფაქტორიანი კითხვარით“ /8/ და რიჩანის „ინტელექტუალური პოტენციალის გამზომი ტესტით“ /I2/, ხოლო უნივერმაღ „თბილისის“ 55 გამყიდველი - ფიქსირებული განწყობის მეთოდით /I, გვ.98-I02/, აიზენკის კითხვარით /I0/ და ბურდონის ტესტის ერთ-ერთი ვარიანტით /6/.

გამოყენებული საშუალებების დიაგნოსტიკური ღირებულების შემოწმება სწარმოებდა ე.წ. ემპირიული ვალიდურობის მიხედვით: ტესტური შემოწმების შედეგად სწარმოებდა გამყიდველთა რანჟირება რომელიმე მახასიათებლის ინტენსიობის კლების მიხედვით. შემდეგ სწარმოებდა მათი შედარება ექსპერტთა შეფასების საფუძველზე მიღებულ რანჟირებასთან. ორ შეფასებას შორის დამოკიდებულება გამოვხატეთ რანგული კორელაციის კოეფიციენტით /სპირმენის

მიხედვით.იხ.3, გვ.II9/,რაც ერთსადაიმავე დროს წარმოადგენდა როგორც გამოყენებული საშუალების დიაგნოსტიკური ღირებულების მაჩვენებელს,ასევე იმის მაჩვენებელს, თუ რამდენად მონაწილეობს ესა თუ ის ნიშან-თვისება პროფესიული ვარგისიანობის განსაზღვრაში.

როგორც პრაქტიკული ფსიქოდიაგნოსტიკა მოითხოვს,ექსპერტებად შერჩეულ იქნენ ის პირები,რომლებიც კარგად იცნობდნენ შესამოწმებელ გამყიდველებს საწარმოო და საზოგადოებრივი საქმიანობით.

კეტელის „თექვსმეტფაქტორიანი კითხვარის" გამოყენების სახელმძღვანელოში მოტანილი მონაცემების მიხედვით გამყიდველის პროფესიულ ვარგისიანობაზე გავლენას ახდენს I6-დან I2 ფაქტორი. ზოგი მათგანი დადებითად მოქმედებს, ზოგი უარყოფითად; ზოგს მეტი წონა აქვს, ზოგს - ნაკლები.ამ მონაცემებით პროფესიული ვარგისიანობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$2A+B+C+E+2F+G-L-3M+2N-3Q_2+2Q_3-2Q_4 .$$

აქედან ჩანს,რომ გამყიდველისათვის ყველაზე უფრო ხელშემწყობ თვისებას წარმოადგენს ციკლოტიმიურობა, სურგენცია, სოფისტურობა, ჩამოყალიბებულობის სრულყოფილობა,ხოლო ყველაზე უფრო ხელშემშლელს- აუტია, დამოუკიდებლობა და მაღალი „ერგული ტენსი". სხვა ფაქტორები, მათ შორის B /ინტელექტუალური/ შედარებით ნაკლებ როლს თამაშობენ /9/.[1]

გარდა აღნიშნულისა კეტელის კითხვარის სახელმძღვანელოში მოცემულია სპეციალური ცხრილი,რომელიც შესაძლებლობას იძლევა

I. რაიმონდ ბ. კეტელისათვის, ამ კითხვარის ავტორისათვის, დამახასიათებელია მრავალ ფსიქოლოგიურ მიმდინარეობაზე დაფუძნება და ორიგინალური, ხშირად უცნაური, ტერმინოლოგიის გამოყენება.

ცალკეული ფაქტორის მონაცემის მიხედვით დავადგინოთ ამა თუ იმ ადამიანის გამყიდველად ვარგისიანობის სხვადასხვა დონე /9/.

მიღებული შედეგების სტატისტიკური დამუშავებისა და რაოდენობრივი და თვისობრივი ანალიზის შედეგად აღმოჩნდა, რომ მიუხედავად იმისა, რომ არსებობს ტრანსკულტურალური და საზოგადოებრივ-ეკონომიკური წყობის მიხედვით განსხვავება ჩვენს ქვეყანასა და იმ ქვეყნებს შორის, სადაც აღნიშნული კითხვარი დამუშავდა და აპრობირებულ იქნა, მას აქვს დიაგნოსტიკური ღირებულება და საშუალებას იძლევა გამოვავლინოთ ივარგებს თუ არა ესა თუ ის ადამიანი გამყიდველად.

ექსპერტებმა 67 გამყიდველიდან 24-ს მისცეს უმაღლესი შეფასება, 36-ს -კარგი, 7-ს - საშუალო. ექსპერტების მიერ „საშუალოზე" შეფასებული შვიდივე გამყიდველი ჩვენი შედეგების მიხედვით აღმოჩნდნენ ისეთ დონეზე, რომელსაც მხოლოდ უკიდურეს შემთხვევაში შეიძლება მივანდოთ მათ გამყიდველობა.

ჩვენის აზრით ნიშანდობლივი შედეგი იქნა მიღებული ექსპერტთა შეფასებასა და ინტელექტუალური აქტიობის დონის ჩვენს მიერ მიღებულ შედეგებს შორის. აღმოჩნდა, რომ ის ადამიანები, რომლებსაც დაბალი ინტელექტუალური განვითარება აქვთ, როგორც წესი ცუდი გამყიდველები არიან, მაგრამ თუ მათ მაღალი ინტელექტი აქვთ, ეს კიდევ არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ ისინი წარმატებით გაართმევენ თავს თავიანთ სამსახურებრივ მოვალეობას. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, გამყიდველის პროფესიული ვარგისიანობა კორელირებს საშუალო დონის ინტელექტუალურ განვითარებასთან.

ფიქსირებული განწყობის მეთოდით გამყიდველთა შემოწმებისას მიღებულ იქნა ასეთი შედეგი:

I. იმ ადამიანებისაგან, რომელთათვისაც დამახასიათებელია სტატიკური განწყობა, ყველაზე მეტი ალბათობითაა მოსალოდნელი, რომ ისინი წარმატებით გაართმევენ თავს გამყიდველად მუშაობას; მაგ-

რამ თუ ადამიანს ახასიათებს დინამიური განწყობა, ეს ჯერ კიდევ არ იძლევა იმის მტკიცების საშუალებას, რომ იგი გამოუსადეგარი იქნება როგორც გამყიდველი.

2. სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი უარყოფითი დამოკიდებულება არის განწყობის გაურკვეველ ტიპსა და გამყიდველად ვარგისიანობის დონეს შორის.

მაშასადამე, ისევე როგორც კეტელის კითხვარის შემთხვევაში, რიჩანის ტესტსაც და ფიქსირებული განწყობის მეთოდსაც აქვთ გარკვეული დიაგნოსტიკური ღირებულება და შეიძლება გამოყენებულ იქნან იმისათვის, რომ წინასწარ განვსაზღვროთ ამა თუ იმ ადამიანის პროფესიული ვარგისიანობა გამყიდველად მუშაობისათვის.

პიროვნების კვლევის ეიზენკისეული კითხვარის გამოყენებით მიღებული შედეგებიდან გამოირკვა, რომ

I. არსებობს სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება ექსტრავერტობის დონესა და გამყიდველის პროფესიულ ვარგისიანობას შორის. ექსტრავერტი გამყიდველიდან 55% აღმოჩნდა საუკეთესოთა შორის, ხოლო ინტროვერტთაგან – 35%. ეს შედეგი ემთხვევა ინგლისურ პოპულაციაზე ჩატარებული კვლევის შედეგებს /II, გვ. I3-I4/.

2/ უფრო მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება გამოვლინდა პროფესიულ ვარგისიანობასა და ნევროტულობას შორის. ეს დამოკიდებულება უარყოფითი ხასიათისაა. ე.ი. რაც უფრო სტაბილურია ადამიანი, რაც უფრო თანაბრადაა წარმოდგენილი მასში ძირითადი ნერვული პროცესები /აგზნება-შეკავება/, მით უფრო მეტი ალბათობითაა მოსალოდნელი პრეტენდენტის პროფესიული ვარგისიანობა.

3/ გამოვლინდა სტატისტიკურად უმნიშვნელო, მაგრამ გარკვეული ტენდენცია გამყიდველის პროფესიულ ვარგისიანობასა და სანგვინიკობა-ფლეგმატურობას შორის. ასეთი ტემპერამენტის მქონე გამყიდველთა შორის არ აღმოჩნდა „საშუალონი“.

ბურდონის ტესტის მონაცემების მიხედვით ყველა გამყიდველი 4 ჯგუფად დავყავით. პირველ ჯგუფში გავაერთიანეთ ის გამყიდველები, რომლებმაც გამოავლინეს ფსიქიკური აქტივობის მაღალი ტემპი, და, თანაც სამუშაო შეასრულეს მაღალხარისხოვნად; მეორე ჯგუფში მოვათავსეთ ისეთი გამყიდველები, რომლებმაც გამოავლინეს ფსიქიკური აქტიობის მაღალი ტემპი, მაგრამ სამუშაო შეასრულეს უხარისხოდ, დაუშვეს ბევრი შეცდომა; მესამე ჯგუფი შეადგინა იმ გამყიდველებმა, რომლებმაც შედარებით მცირე მოცულობის სამუშაო შეასრულეს, მაგრამ შეასრულეს ხარისხიანად. მეოთხე ჯგუფში შემავალი გამყიდველებისათვის კი დამახასიათებელი იყო როგორც ფსიქიკური აქტიობის დაბალი დონე, ასევე სამუშაოს შესრულების დაბალი ხარისხიც.

ექსპერტთა მხრივ ყველაზე მაღალი შეფასება მიიღო III ჯგუფის გამყიდველებმა. ამ ჯგუფის 7 /50%/ გამყიდველი მოხვდა „საუკეთესოთა" შორის, 4 – „კარგებს" შორის, 3 – „საშუალოებს" შორის. მეორე ადგილზე გამოვიდა პირველი ჯგუფი, რომლის 6-მა /43%/ წარმომადგენელმა „საუკეთესო" შეფასება მიიღო, 5-მა კარგი, 3-მა საშუალო. ასევე 6 გამყიდველი მოხვდა საუკეთესოთა შორის მესამე ადგილზე გამოსული მეორე ჯგუფიდან, ოღონდ მნიშვნელოვნად იმატა „საშუალოთა" რიცხვმა და შეადგინა 5. ყველაზე დაბალი შეფასება ექსპერტთა მხრივ მიიღო მესამე (მეოთხე) ჯგუფმა. აქედან მხოლოდ ორი აღმოჩნდა საუკეთესოთა შორის, 6 – კარგებს შორის, 5 – „საშუალოებს" შორის.

პირველ სამ ადგილზე გამოსულ ჯგუფებს შორის სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი განსხვავება არ გამოვლინდა. ასეთი განსხვავება აღმოჩნდა მესამე და მეოთხე ჯგუფებს შორის. როგორც ჩანს, ამ შემთხვევაში თავი იჩინა შემოწმებული გამყიდველების შედარებით მცირე რაოდენობამ. მიუხედავად ამისა ამ შემთხვევაშიც შეიძლება ზოგიერთი დასკვნის გამოტანა: ფსიქიკური აქტიობის ტემპს შეიძლება არ ჰქონდეს თავისთავად გადამწყვეტი მნიშვნელობა, გამყიდ-

ველის პროფესიისათვის,რადგან ეს უკანასკნელი,როგორც ჩანს,არ
თამაშობს ისეთ არსებით როლს,როგორც მაგ.მძღოლის ან ენერგოსის-
ტემის ოპერატორის საქმიანობაში.რაც შეეხება იმას,რომ დაბალი
პროფესიული ვარგისიანობა გამოავლინეს იმ გამყიდველებმა, რო-
მელთაც აღმოაჩნდათ ნელი ფსიქიკური აქტივობის ტემპი და დაბალი
დონე ყურადღების კონცენტრაციისა,ეს თვისება უარყოფითად მოქმე-
დებს არა მარტო გამყიდველის პროფესიაზე,არამედ ყველა სახის
პროფესიულ საქმიანობაზე და,ამდენად,მარტო გამყიდველისათვის და-
მახასიათებლად ვერ ჩაითვლება.

ამგვარად,ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები გარკვეულ წარმოდგე-
ნას გვაძლევენ გამყიდველის პროფესიის შესახებ და იმ მოთხოვნე-
ბის შესახებ,რასაც ეს პროფესია უყენებს ადამიანს.გამოვლენილი
ფსიქიკური თავისებურებანი შესაძლებელია ასახულ იქნან გამყიდვე-
ლის პროფესიის ფსიქოგრამაში და საჭიროების შემთხვევაში,თუ იქნე-
ბა შექმნილი დიდ სავაჭრო ობიექტებთან მაინც სათანადო ფსიქოლო-
გიური სამსახური,შეიძლება საფუძვლად დაედოს გამყიდველთა კად-
რების შერჩევას.

მიღებული შედეგები მნიშვნელოვანია სხვა თვალსაზრისითაც.
მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესი სულ უფრო მეტად იწვევს ძირითად
ტექნიკურ და ტექნოლოგიურ პროცესთა ავტომატიზაციას, კომპლექსურ
მექანიზაციას,რაც საბოლოო ანგარიშით გამოიწვევს კადრების გა-
მოთავისუფლებას მომსახურებისა და ისეთი სფეროებისათვის,სადაც
ან პრინციპულად შეუძლებელია ავტომატიზაციის დანერგვა,ან გარკ-
ვეული ეკონომიკური თუ მორალური თვალსაზრისით არ არის მიზანშე-
წონილი.ასეთ პირობებში საზოგადოების შემდგომი პროგრესის ერთ-
ერთ ძირითად რეზერვად შეიძლება მომსახურების სფეროს სრულყოფა
მოგვევლინოს.რადგან ამ უკანასკნელში ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი

უკავია ვაჭრობას, გარკვეულ ინტერესს წარმოადგენს ვაჭრობის ფსიქოლოგია. წარმოდგენილი გამოკვლევა ასეთი ფსიქოლოგიის მნიშვნელოვანი ელემენტი შეიძლება იყოს.

მიღებულია 20.II.1983

ფიზიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

I. დ.ნ.უზნაძე, შრომები, ტ.III-IV, თბილისი, I964.

2. დ.ნ.უზნაძე, შრომები, ტ.V, თბილისი, I967.

3. ჯ.შ.ყვავილაშვილი, სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება ფსიქოლოგიაში, თბილისი, I974.

4. Ф.Баумгартен. Психотехника, М., I926.

5. Е.С.Браиловский. Методика определения профессиональной пригодности продавцов (в кн.: Психофизиология труда и психотехника, М.-Л., I929, стр.II9-I2I).

6. Bourdonova skúška (BoPr-test), Modifikacia ČSÚP, Praha (T-78/1972). 1972.

7. Bourdonova skúška, Příručka (T-78/1972), Psychodiagnostica, n.p. Bratislava.

8. R.B.Cattel, H.W.Eber, Dotaznik 16 PF, Format, fozma B, (T-23/68), Psychodiagnostica, n.p. Bratislava, 1968.

9. R.B.Cattell, H.W.Eber, 16 PF, Příručka, Psychodiagnostica, n.p. Bratislava, 1968.

10. H.J.Eysenek, D.G.Sybil, Eysenek, Eysenekov osobnostný dotaznik, forma A, forma B (T-10/1970), Bratislava, 1970.

11. Eysenekov osobnostny dotaznik, Příručka (T-10/1970), Bratislava, 1968.

12. P.Řičan, Test intelektoveho potencialu, forma A, forma B, Psychodiagnostické a didaktické testy, n.p. Bratislava, 1971.

13. P.Řičan, Test intelektoveho potencialu, Příručka, psychodiagnostické a didaktické testy, n.p. Bratislava, 1971.

Ю.В.Филипашвили, Н.З.Бедоидзе, Г.М.Бесиашвили, О.Ш.Киласония

НЕКОТОРЫЕ ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОФЕССИИ ПРОДАВЦА И МЕТОДЫ ИХ ВЫЯВЛЕНИЯ

Резюме

Целью исследования было выявление психологических критериев профессиональной пригодности продавцов и разработка-апробация соответствующих методов.

Был применен метод экспертных оценок и следующие психодиагностические средства:

1) "Шестнадцатифакторный опросник" Кеттеля,,
2) Опросник для исследования личности (Ейзенка),
3) Один из вариантов теста Бурдона,
4) "Тест для установления уровня интеллектуального потенциала" (автор П.Ричан),
5) Метод фиксированной установки (по Д.Узнадзе).

Выявилось, что

1. В профессиографическом содержании профессии продавца преобладают характерологические признаки;

2. Профессиональную пригодность продавца определяют не столько отдельно взятые свойства, сколько их определенная комбинация;

3. Свойства, определяющие профессиональную пригодность,

по своему "весу" распределились следующим образом: невротичность, темперамент, "установочность", экстравертность, темп и качество психической активности, уровень интеллектуального развития.

L.Pilipashvili, N.Bedoidze, G.Besiashvili, O. Kilasonia

SOME PSYCHOLOGICAL PECULIARITIES OF THE OCCUPATION OF SHOP-ASSISTANTS AND METHODS OF THEIR IDENTIFICATION

Summary

The purpose of the study was to determine the psychological criteria of the occupational fitness of shop-assistants and to develop and test relevant methods.

The method of expert appraisal and the following psychodiagnostic techniques were used:

1. Cattel's "Sixteen-factor Inventory".
2. Eisenck's Personality Inventory.
3. A variant of Bourdon's Test.
4. "Test for the establishment of the level of intelligence potential"(author: Reachan).
5. Method of Fixed Set (according to D.Uznadze).

It was found that

1. The professional aspect of the shop-assistant's occupation involves predominantly characterological traits.
2. The occupational fitness of the shop-assistant is determined not by separate characteristics, but by a definite combination of characteristics.
3. The characteristics determining the occupational fitness were distributed according to their "weight" in the following order: neuroticism, temperament, "excitability of set", rate and quality of mental activity, and level of intellectual development.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

251, 1984

МЕТОД КЛАСТЕРНЫХ КОМПОНЕНТОВ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХКОМПОНЕНТНЫХ РАСТВОРОВ

Г.Г.Сирбиладзе

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор и

$$\begin{bmatrix} -2, & -1, & +1, & +2 \\ P_{-2}^{(\alpha)}, & P_{-1}^{(\alpha)}, & P_{+1}^{(\alpha)}, & P_{+2}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{I})$$

распределение его компоненты ξ_α, $\alpha = 1, 2, \dots, n$;

замечая, что

$$\xi_\alpha^{2k} = \frac{2^{2k}-1}{3}\,\xi_\alpha^2 + \frac{4-2^{2k}}{3},$$

$$\xi_\alpha^{2k+1} = \frac{2^{2k}-1}{3}\,\xi_\alpha^3 + \frac{4-2^{2k}}{3}\,\xi_\alpha,$$

получаем

$$e^{it_\alpha \xi_\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t_\alpha^k \xi_\alpha^k}{k!} = a_0^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)} \xi_\alpha + a_2^{(\alpha)} \xi_\alpha^2 + a_3^{(\alpha)} \xi_\alpha^3,$$

где $a_i^{(\alpha)}$, $i = 0, 1, 2, 3$, – известные коэффициенты.

Характеристическая функция f_ξ случайного вектора ξ принимает вид:

$$f_\xi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{\alpha_1=0}^{3} \sum_{\alpha_2=0}^{3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{3} \prod_{k=1}^{n} a_{\alpha_k}^{(k)}\, E\Big[\prod_{k=1}^{n} \xi_k^{\alpha_k}\Big].$$

Функцию распределения вычисляем по формуле:

$$F(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\sum_{\alpha_1=0}^{3}\sum_{\alpha_2=0}^{3}\dots\sum_{\alpha_n=0}^{3}E\left[\prod_{k=1}^{n}\xi_k^{\alpha_k}\right]\cdot\prod_{k=1}^{n}A_{\alpha_k}^{(k)}(\xi_k), \qquad (2)$$

где

$$A_0^{(k)}(\xi_k)=\frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{sign}(1,5-|\xi_k|)}{|\xi_k|^2},$$

$$A_1^{(k)}(\xi_k)=\frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{sign}(|\xi_k|-1,5)\cdot\operatorname{sign}(0,5-|\xi_k|)}{|\xi_k|^3}, \qquad (3)$$

$$A_2^{(k)}(\xi_k)=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{sign}(|\xi_k|-1,5),$$

$$A_3^{(k)}(\xi_k)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\operatorname{sign}(|\xi_k|-1,5)\cdot\operatorname{sign}(|\xi_k|-0,5)}{|\xi_k|}.$$

Рассмотрим четырехкомпонентный твердый раствор с двумя типами узлов. Пусть концентрация узлов типа α равна ν_α, а типа β равна ν_β. Каждому узлу типа α и β сопоставим случайные величины ξ_α и ξ_β соответственно, распределенные по закону (I) при соответствующих α и β.

Очевидно, что символы -2, -I, +I, +2 можно считать "кодовыми обозначениями" соответственно для атомов сорта $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

При этом имеют место следующие условия:

$$\nu_\alpha P(M/\alpha)+\nu_\beta P(M/\beta)=C_M,$$

$$\sum_M P(M/\theta)=1, \qquad (4)$$

$$\sum_m P(\mathcal{N}/\theta_1,\ M/\theta_2)=P(\mathcal{N}/\theta_1),$$

где $M=\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$, $\theta=\alpha,\beta$; $\theta_1,\theta_2=\alpha,\beta$; C_A, C_B, C_C, C_D — концентрации атомов типа $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно, P — знак вероятности.

Учет парных корреляций возможен при помощи матрицы раствора (см. /I/), в которой элементами являются апостериорные вероятности $P(M/\alpha, N/\beta)$.

На основе (2) можно получить явный вид $P(\cdot/\cdot)$, $P(\cdot/\cdot, \cdot/\cdot)$ при n =I и n =2 соответственно

Используя (4) и выразив $E\xi_\beta$, $E\xi_\beta^2$, $E\xi_\beta^3$ посредством C_A, C_B, C_C, $E\xi_\alpha$, $E\xi_\alpha^2$, $E\xi_\alpha^3$ получаем, явный вид элементов матрицы раствора.

Как известно, существует простой метод нахождения координат вершин многогранника. В нашем случае необходимо решить C_{16}^{15} =I6 систем линейных уравнений с I5-ю неизвестными. Результаты приведены в таблице. Строки таблицы представляют собой вершины соответствующего многогранника $\mathcal{D}_{15}^{15}$. Там же приводятся соответствующие кластерные компоненты.

Величины $\overline{\xi_\alpha^i \xi_\beta^k}$ $(i, k$ =0,I,2,3) – являются функциями параметров дальнего и ближнего порядка.

Согласно основному постулату МКК любое свойство g твердого раствора можно представить суммой свойств g_i - кластерных компонентов, т.е.

$$g = \sum_{M,N=A,B,C,D} P(M/\alpha, N/\beta)\cdot g\left(M_{\nu_\alpha}^{(\alpha)} N_{\nu_\beta}^{(\beta)}\right). \tag{6}$$

Поступила 25.III.1983

Кафедра случайных процессов

ЛИТЕРАТУРА

I. Состав – дефективность – свойство твердых фаз. Метод кластерных компонентов. Под ред. Г.И.Чуфарова. М., "Наука", 1977.

გ.სირბილაძე

კლასტერულ კომპონენტთა მეთოდი ოთხკომპონენტიანი ხსნარებისათვის

რ ე ზ ი უ მ ე

შემუშავებულია კლასტერულ კომპონენტთა მეთოდი ოთხკომპონენტიანი ხსნარებისათვის.მიღებულია კლასტერული კომპონენტები და მათი შესაბამისი კოეფიციენტები.

G.Sirbiladze

THE METHOD DUSTER COMPONENTS FOR QUADRUPLE SOLID SOLUTIONS

Summary

A method cluster components for quadruple solid solutions has been developed. Cluster components and their corresponding weight coefficients have been obtained.

--

№	C_A	C_B	C_C	$\overline{\xi_\alpha}$	$\overline{\xi_\alpha^2}$	$\overline{\xi_\alpha^3}$	$\overline{\xi_\alpha\xi_\beta}$	$\overline{\xi_\alpha\xi_\beta^2}$	$\overline{\xi_\alpha\xi_\beta^3}$	$\overline{\xi_\alpha^2\xi_\beta}$	$\overline{\xi_\alpha^2\xi_\beta^2}$	$\overline{\xi_\alpha^2\xi_\beta^3}$	$\overline{\xi_\alpha^3\xi_\beta}$	$\overline{\xi_\alpha^3\xi_\beta^2}$	$\overline{\xi_\alpha^3\xi_\beta^3}$	K K
1	1	0	0	-2	4	-8	4	-8	16	-8	16	-32	16	-32	64	$A^{(\alpha)}_{V\alpha}A^{(\beta)}_{V\beta}$
2	$V\alpha$	$1-V\alpha$	0	-2	4	-8	2	-2	2	-4	4	-4	8	-8	-8	$A^{(\alpha)}_{V\alpha}B^{(\beta)}_{V\beta}$
3	$V\alpha$	0	$1-V\alpha$	-2	4	-8	-2	-2	-2	4	4	4	-8	-8	-8	$A^{(\alpha)}_{V\alpha}C^{(\beta)}_{V\beta}$
4	$V\alpha$	0	0	-2	4	-8	-4	-8	-16	8	16	32	-16	-32	64	$A^{(\alpha)}_{V\alpha}D^{(\beta)}_{V\beta}$
5	$1-V\alpha$	$V\alpha$	0	-1	1	-1	2	-4	8	-2	4	-8	2	-4	8	$A^{(\beta)}_{V\beta}B^{(\alpha)}_{V\alpha}$
6	$1-V\alpha$	0	$V\alpha$	1	1	1	-2	4	-8	-2	4	-8	-2	4	-8	$A^{(\beta)}_{V\beta}C^{(\alpha)}_{V\alpha}$
7	$1-V\alpha$	0	0	2	4	8	-4	8	-16	-8	16	-32	-16	32	-64	$A^{(\beta)}_{V\beta}D^{(\alpha)}_{V\alpha}$
8	0	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	$B^{(\alpha)}_{V\alpha}B^{(\beta)}_{V\beta}$
9	0	$V\alpha$	$1-V\alpha$	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	$B^{(\alpha)}_{V\alpha}C^{(\beta)}_{V\beta}$
10	0	$V\alpha$	0	-1	1	-1	-2	-4	-8	2	4	8	-2	-4	-8	$B^{(\alpha)}_{V\alpha}D^{(\beta)}_{V\beta}$
11	0	$1-V\alpha$	$V\alpha$	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	$B^{(\beta)}_{V\beta}C^{(\alpha)}_{V\alpha}$
12	0	$1-V\alpha$	0	2	4	8	-2	2	-2	-4	4	-4	-8	8	-8	$B^{(\beta)}_{V\beta}D^{(\alpha)}_{V\alpha}$
13	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$C^{(\alpha)}_{V\alpha}C^{(\beta)}_{V\beta}$
14	0	0	$V\alpha$	1	1	1	2	4	8	2	4	8	2	4	8	$C^{(\alpha)}_{V\alpha}D^{(\beta)}_{V\beta}$
15	0	0	$1-V\alpha$	2	4	8	2	2	2	4	4	4	8	8	8	$C^{(\beta)}_{V\beta}D^{(\alpha)}_{V\alpha}$
16	0	0	0	2	4	8	4	8	16	8	16	32	16	32	64	$D^{(\alpha)}_{V\alpha}D^{(\beta)}_{V\beta}$

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

ОБ ОЦЕНКЕ ПОСТОЯННОЙ q В ОБОБЩЕННОЙ ЛЕММЕ ШВАРЦА

И.Д.Блиадзе

1°. Как известно, альтернирующий процесс Шварца представляет собой итерационный процесс, дающий возможность решать краевую задачу для области, когда эта область является объединением нескольких простых областей, для каждой из которых краевая задача предполагается разрешенной при соответствующих граничных условиях. (См.,напр.,/1/,/2/). При доказательстве сходимости процесса важную роль играют лемма Шварца /2/ и некоторые ее обобщения, а скорость сходимости определяется постоянной q, входящей в вышеуказанную лемму.

В данной работе предлагается методика оценки этой постоянной, а в некоторых конкретных случаях при помощи этой методики получены оценки q в явном виде. Отметим также, что эти оценки можно использовать для исследований скорости сходимости некоторых других итерационных процессов, например, в итерационном процессе, предложенном в /3/.

Отметим также, что в работе /4/ приводятся оценки q в некоторых простых случаях, а точнее в круговых областях.

2°. Изложим обобщенную лемму Шварца, которая в несколько ином виде приводится в /3/.

Лемма I. (Обобщенная лемма Шварца). Пусть имеется односвязная плоская область D с кусочно гладкой границей Γ. Пусть далее $U(x,y)$ – любая гармоническая функция в D, граничные значения которой равны нулю по крайней мере на двух дугах $P'P''$ и $Q'Q''$ контура Γ, а в других точках Γ удовлетворяет неравенству $|U(x,y)|\leq 1$ (рис.I). Тогда для значений, принимаемых функцией $U(x,y)$ на кривой γ, верна оценка

$$|U(x,y)|\leq q<1, \quad (x,y)\in\gamma, \tag{I}$$

где q – постоянная, зависящая только от геометрических свойств области D и кривой γ, а сама кривая γ удовлетворяет следующим требованиям:

I. Кривая γ соединяет любые точки $P\in P'P''$ и $Q\in Q'Q''$ в которых существуют касательные к Γ.

II. Кривая γ имеет касательные в точках P и Q, не совпадающие с касательными контура Γ в тех же точках.

Доказательство этой леммы можно провести аналогично /2/.

Теперь перейдем к оценке постоянной q в неравенстве (I). Сперва допустим, что P' и Q' находятся с одной стороны кривой γ, а P'' и Q'' – с другой и обозначим через D_1 область, ограниченную кривой $QQ'P'PQ$, а через D_2 – область с границей $PP''Q''QP$ (см. рис.I).

Через точки P' и Q' проведем окружность ∂A и полученную круговую область обозначим через A, а через α обозначим внутреннюю дугу окружности ∂A. Будем предполагать, что построенная нами область A и дуга α удовлетворяют следующим условиям:

а) $D_2\subset A$,

б) $\alpha \subset D_1 \cup P'Q'$.

Тут же заметим, что окружность с такими свойствами существует в любом случае, и еще заметим, что когда ∂A есть прямая, под областью A подразумевается полуплоскость, в которой находится область D_2.

Совершенно аналогично через P'' и Q'' проведем окружность ∂B, удовлетворяющую, в свою очередь, следующим требованиям:

а) $D_1 \subset B$,

б) $\beta \subset D_2 \cup P''Q''$.

Наконец, предположим, что $A \cap B = S$.

Теперь, пусть $W(x,y)$ есть гармоническая в области S функция со следующими граничными значениями:

$$W(x,y)=1, \quad (x,y) \in \alpha \cup \beta,$$
$$W(x,y)=0, \quad (x,y) \in \partial S \setminus \alpha \setminus \beta.$$

Тогда, согласно обобщенной лемме Шварца, существует постоянная θ со следующим свойством:

$$\max_{(x,y)\in\gamma} W(x,y) = \theta < 1, \tag{2}$$

и справедлива следующая

Лемма 2. Для постоянной q из (I) справедлива следующая оценка

$$q \le \theta, \tag{3}$$

где θ – постоянная, определенная в (2).

Для доказательства леммы рассмотрим в D гармоническую функцию $V(x,y)$ с граничными условиями:

$$V(x,y)=0, \qquad (x,y)\in P'P''\cup Q'Q'',$$
$$V(x,y)=1, \qquad (x,y)\in P'Q'\cup P''Q'',$$

для которой на кривой γ имеем следующую оценку:

$$\max_{(x,y)\in\gamma} V(x,y)=\bar{q}<1.$$

Нетрудно заметить, что согласно принципу максимума для гармонической функции, выполняется следующее неравенство: $q\le\bar{q}$.

Теперь функции $W(x,y)$ и $V(x,y)$ рассмотрим в области $D\cap S$ и заметим, что на границе этой области выполняется неравенство $V(x,y)\le W(x,y)$ и, следовательно, вновь из принципа максимума получим $\bar{q}\le\theta$, что и доказывает лемму.

После этого осталось заметить, что постоянную θ можно вычислить в явном виде, так как область S всегда можно конформно отобразить на единичный круг элементарными функциями, а там интегральная формула Пуассона принимает довольно простой вид, поскольку граничные значения искомой функции являются кусочно постоянными.

3°. Теперь с помощью вышеизложенной методики оценим постоянную q в прямоугольниках с разными граничными условиями. Заметим, что полученные ниже оценки можно использовать при решении альтернирующим методом Шварца задачи Дирихле для уравнения Пуассона в сложных прямоугольных областях.

3^{I}. Пусть $D=\{0<x<a,\ 0<y<a\}$, $\gamma=\{x=c<a,\ 0<y<a\}$ (см.рис.2). Пусть далее, $P'=(0,a)$, $Q'=(0,0)$, а участок $P''Q''$ отсутствует. Наша задача состоит в оценке

$\max\limits_{0<y<a} v(c,y)$, где $v(x,y)$ – гармоническая функция в D, которая равна единице на $P'Q'$, а на остальной части границы принимает значение нуль.

Применяя вышеуказанную методику, получим, что область B отсутствует, а область A является полуплоскостью $x>0$. Функция $w(x,y)$, которая должна удовлетворять на $x=0$ следующим граничным условиям:

$$w(0,y)=1 \qquad y\in[0,a],$$
$$w(0,y)=0 \qquad y\in R\setminus[0,a],$$

будет иметь вид (см.напр., /5/):

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{a-y}{x}\right)$$

После того, как приравняем к нулю производную $w(c,y)$, получим, что она достигает своего максимума при $y=\frac{a}{2}$ и, следовательно,

$$\theta=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a}{2c}.$$

Заметим, что эта задача, кроме вышеупомянутого случая, возникает при оценке скорости сходимости итерационного процесса, предложенной Д.Г.Гордезиани в /3/ для задачи Бицадзе-Самарского /5/.

3^2. Вновь рассмотрим ту же область D и кривую γ (рис.2). Только теперь $P'=(0,0)$, Q' совпадает с Q, а участок $P''Q''$ снова отсутствует. В этом случае A будет полуплоскость $y>0$, а $w(x,y)$ на γ будет иметь вид:

$$w(c,y)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{c}{y}$$

Отсюда видно, что своего наибольшего значения $w(c,y)$

достигает при $y \to 0$ и поэтому $\theta = \frac{1}{2}$.

3^3. Теперь рассмотрим следующий случай (рис.3).

$$D = \{0 < x < 3a,\ 0 < y < a\}, \quad \gamma = \{x = a,\ 0 < y < a\},$$

$$P' = (0,0),\ Q' = Q = (a,0),\ Q'' = (2a,0),\ P'' = (3a,0).$$

В этом случае возникает очень интересная ситуация, т.к. области A и B строятся единственным образом и совпадают с полуплоскостью $y > 0$. Для $W(x,y)$ получаем следующие граничные условия:

$$W(x,0) = 1, \quad x \in [0,a] \cup [2a, 3a],$$
$$W(x,0) = 0 \quad x \in R \setminus [0,a] \setminus [2a, 3a].$$

Решение этой задачи можно найти аналогично в /5/ и на γ оно будет иметь вид:

$$W(a,y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a}{y}.$$

Следовательно, как и в предыдущем случае, получим:

$$\theta = \frac{1}{2}.$$

3^4. Наконец, рассмотрим следующий случай (рис. 4). Пусть $D = \{-a < x < a,\ -b < y < b\}$, $\gamma = \{x = 0,\ -b < y < b\}$,

$$P' = (-a, b),\ P'' = (-a, -b),\ Q' = (a, b),\ Q'' = (a, -b).$$

Окружности ∂A и ∂B вновь строятся единственным образом. ∂A совпадает с прямой $x = b$, а ∂B – с прямой $x = -b$. Тогда $S = \{-\infty < x < \infty,\ -b < y < b\}$ и для $W(x,y)$ будем решать следующую задачу:

$$\Delta W(x,y)=0 \qquad (x,y)\in S,$$
$$W(x,b)=W(x,-b)=1 \quad -a\leq x\leq a,$$
$$W(x,b)=W(x,-b)=0 \quad x\in R\setminus[-a,a],$$

найдем

$$\theta=\max_{x\in[-a,a]} W(x,0).$$

Следуя этой цели, полосу S при помощи конформного отображения можно отобразить на единичный круг.
Для нашего случая эти преобразования будут иметь следующий вид (см. /7/).

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{e^{\frac{\pi x}{b}}-1}{e^{\frac{\pi x}{b}}+2e^{\frac{\pi x}{2b}}\cos\frac{\pi y}{2b}+1} \\ \bar{y}=\dfrac{2e^{\frac{\pi x}{2b}}\sin\frac{\pi y}{2b}}{e^{\frac{\pi x}{b}}+2e^{\frac{\pi x}{2b}}\cos\frac{\pi y}{2b}+1} \end{cases} \tag{4}$$

После применения этого преобразования получим картину, изображенную на рис.5, где $\bar{P}'=(-\alpha,\beta)$, $\bar{P}''=(-\alpha,-\beta)$, $\bar{Q}'=(\alpha,\beta)$, $\bar{Q}''=(\alpha,-\beta)$.

Здесь

$$\alpha=\frac{e^{\frac{\pi a}{b}}-1}{e^{\frac{\pi a}{b}}+1}, \qquad \beta=\frac{2e^{\frac{\pi a}{2b}}}{e^{\frac{\pi a}{b}}+1}, \tag{5}$$

а отрезок PQ переходит в $\bar{P}\bar{Q}$, где

$$\bar{P}=\left(-\frac{\alpha}{e^{\frac{\pi a}{b}}+1},0\right),\quad \bar{Q}=\left(\frac{\alpha}{e^{\frac{\pi a}{b}}+1},0\right).$$

Теперь построим функцию $\overline{W}(\bar{x},\bar{y})$, гармоническую в единичном круге (рис.5), которая удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\overline{W}(\bar{x},\bar{y})\Big|_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{P}'\bar{Q}'}=\overline{W}(\bar{x},\bar{y})\Big|_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{P}''\bar{Q}''}=1,$$

$$\overline{W}(\bar{x},\bar{y})\Big|_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{P}'\bar{P}''}=\overline{W}(\bar{x},\bar{y})\Big|_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{Q}'\bar{Q}''}=0.$$

Ясно, что $w(x,y)=\bar{w}(\bar{x},\bar{y})$, (6)

где (x,y) и $(\bar{x},\bar{y})$ связаны формулами (4)

Проводя рассуждения, аналогичные /5/, получаем следующее выражение для функций $\overline{W}(\bar{x},\bar{y})$:

$$\overline{W}(\bar{x},\bar{y})=2-\frac{1}{\pi}\Big[\operatorname{arctg}\frac{\beta+\bar{y}}{\alpha+\bar{x}}+\operatorname{arctg}\frac{\beta+\bar{y}}{\alpha-\bar{x}}+ \tag{7}$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{\beta-\bar{y}}{\alpha-\bar{x}}+\operatorname{arctg}\frac{\beta-\bar{y}}{\alpha-\bar{x}}+2\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}\Big].$$

Исходя из последней формулы, можно найти, что

$$\overline{W}'(\bar{x},0)=\frac{-4\alpha\beta\bar{x}}{\pi[(\alpha+\bar{x})^2+\beta^2][(\alpha-\bar{x})^2]}$$

Так как $\overline{W}'(\bar{x},0)>0$ при $\bar{x}<0$, $\overline{W}'(0,0)=0$ и $\overline{W}'(\bar{x},0)<0$ при $\bar{x}>0$, точка $(0,0)$ является точкой максимума исходной функции на отрезке $\bar{P}\bar{Q}$.

Отсюда и из (6) следует, что

$$\max_{x \in PQ} W(0,0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Далее, учитывая (5), окончательно получим

$$\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi a}{b}} - 1}{2e^{\frac{\pi a}{b}}}.$$

Поступила 30.III.1983

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Курант, Д.Гильберт. Методы математической физики, т.II, М., 1953.

2. Л.В.Канторович, В.И.Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., 1962.

3. Д.Г.Гордезиани. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. Тбилиси, ТГУ, 1981.

4. K.Miller, Numerical analogs to the Schwarz Alternating Procedure, Numerische Mathematik 7, 91-103 (1965).

5. А.В.Бицадзе, А.А.Самарский. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. ДАН СССР, 1969, 185, 4, 739-740.

6. С.К. Годунов. Уравнения математической физики, М., 1979.

7. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.

ი.ბლიაძე

შვარცის განზოგადოებულ ლემაში q მუდმივას შეფასების შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში მოცემულია შვარცის ლემასა და ზოგიერთ მის განზოგადოებაში შემავალი q მუდმივას შეფასების მეთოდიკა ნებისმიერი ბრტყელი არისათვის.აღწერილი მეთოდიკის გამოყენებით მუდმივას შეფასებები მიღებულია ცხადად ზოგიერთ მართკუთხოვან არეში.მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევენ შევაფასოთ მონათესავე იტერაციული მეთოდების კრებადობის სიჩქარე ელიფსური ტიპის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას.

I. Bliadze

ON THE ESTIMATION OF q CONSTANT IN A GENERALIZED SCHWARZ LEMMA

Summary

The paper presents a method for estimating the q constant involved in the Schwarz lemma and in some of its generalizations, for any plane area. Using the method described, estimations of the constant have been obtained explicity in some rectangular domains The results obtained permit to estimate the rate of convergence of cognate iteration methods in solving elliptic boundary problems.

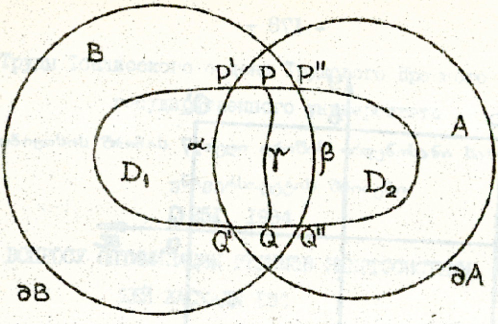


Рис.I.

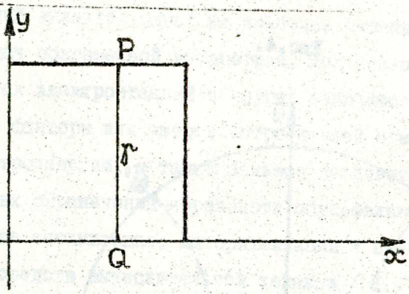


Рис.2.

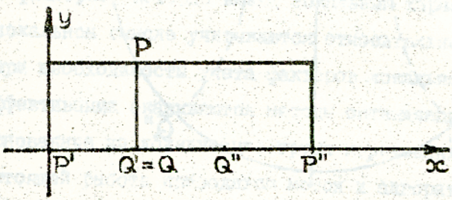


Рис.3.

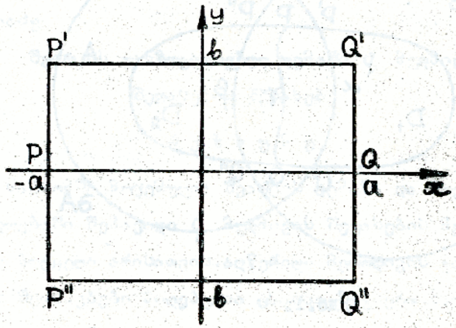


Рис.4.

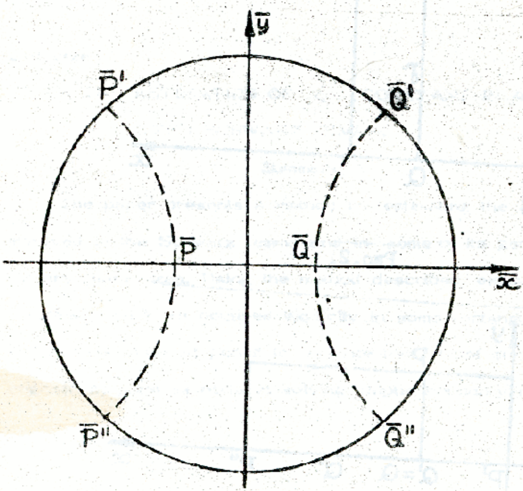


Рис.5.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ КАСКАДЫ ГЭС

М.А.Бенашвили, Л.В.Шенгелия

Оптимизация суточных режимов крупных энергосистем и энергообъединений является одной из наиболее сложных оптимизационных задач современной энергетики. Нелинейность расходных характеристик электростанций и других зависимостей, учитывающих сетевые факторы или ущербы потребителей при наличии дефицита электроэнергии, а также большое количество переменных и разнотипных ограничений-неравенств обусловливает трудности выбора метода оптимизации, алгоритмизации и практического применения средств вычислительной техники /I/.

Однако существенное усложнение задачи обычно вызывается необходимостью учета ряда специфических для конкретной энергосистемы факторов, которые имеют локальный характер и поэтому в локальном смысле учитываются относительно легко. Поэтому при необходимости учета факторов локального типа весьма эффективными оказываются методы оптимизации режима в целом, основанные на локализации групп переменных /2,3/.

В настоящей работе приводятся метод и алгоритм учета одного из наиболее сложных дополнительных факторов - ограничений по каскадным связям между ГЭС, при оптимизации суточного режима энергосистемы в целом.

Пусть m - общее число регулируемых ГЭС и ТЭС составляет каскад ($K = m$). Будут учтены два главных ограничения, обусловленные взаимозависимостью ГЭС каскада:

1) по времени добегания воды;

2) по допустимым пределам изменения уровней воды в промежуточных водохранилищах.

Дополнительная приточность и попуски воды на ирригацию могут быть легко учтены в виде наперед заданных (прогнозируемых) постоянных.

Рассматривается общепринятая дискретная постановка задачи для регулируемых ГЭС, n регулируемых ТЭС и суток, разбитых на 24 почасовых интервала длительностью Δt =I час. Для j-ой ГЭС каскада (j =I,2,... K ; $K \subset m$) и интервала $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ =I,2,... 24) вводятся обозначения:

$W_j^{\mathcal{T}}$ - приток воды в водохранилище j-ой ГЭС, поступающей из водохранилища предыдущей, $j-1$ -ой ГЭС;

$V_{j(min)}, V_{j(max)}$ - верхний и нижний допустимые пределы объема воды в водохранилище j-ой ГЭС соответственно;

t_j - время добегания воды в часах от $j-1$ -ой ГЭС до водохранилища j-ой ГЭС ($t_j \leq 24$);

$P_j^{\mathcal{T}}$ - мощность j-ой ГЭС;

$Q_j^{\mathcal{T}}$ - расход воды j-ой ГЭС в интервале $\mathcal{T}$;

$Q_{j(min)}$ и $Q_{j(max)}$ - минимальное и максимальное допустимые значения соответственно.

Ограничения-неравенства по балансу активных мощностей всей системы можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{K} P_j^{\tau} + \sum_{j=1}^{m-K} P_j^{\tau} + \sum_{i=1}^{n} P_{T_i}^{\tau} = C^{\tau} + \Pi^{\tau}, \tag{I}$$

где P_j^{τ} – мощность j-ой ГЭС каскада в интервале τ; P_j^{τ} – мощность j-ой ГЭС, не входящей в каскад; C^{τ} – постоянная составляющая, учитывающая нагрузку потребителей, перетоки и нагрузку нерегулируемых электростанций; Π^{τ} – потери в сети.

Ограничения-неравенства по заданному объему расходуемой воды на ГЭС, не входящих в каскад, имеют вид

$$\sum_{j=1}^{24} \bar{Q}_j^{\tau} \Delta t = \bar{v}_j^{24} - \bar{v}_j^{1}, \tag{2}$$

а для j-ой каскадной ГЭС:

$$\sum_{j=1}^{24} Q_j^{\tau} \Delta t = \sum_{\tau=1}^{24} w_j^{\tau} \Delta t + v_j^{24} - v_j^{1}. \tag{3}$$

Но приток воды j-ой ГЭС w_j^{τ} из водохранилища j-ой ГЭС равен расходу последней Q_{j-1} с задержкой t_j, поэтому ограничение (3) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{24} Q_j^{\tau} \Delta t = \sum_{j=1}^{24-t_j} Q_{j-1}^{\tau} \Delta t + v_j^{24} - v_j^{1}. \tag{3a}$$

Помимо ограничений-неравенств по допустимым пределам изменения мощностей (2) (3) имеются ограничения по допустимым уровням сработки водохранилищ:

$$v_{j(min)} < v_j < v_{j(max)} \tag{4}$$

для всех ГЭС. Учет этих ограничений для каскадных ГЭС значительно более затруднен, чем для обычных ГЭС; тем не менее для учета (4) в специфических условиях каскада применяем тот же принцип, который был предложен для обычных ГЭС /2,3/.

Для этого предварительно, для исходного допустимого приближения задачи оптимизаций энергосистемы в целом, строится матрица почасовых значений объемов воды в водохранилищах для всех ГЭС каскада, с учетом факторов I и 2:

$$V = \left| \begin{matrix} v_1^1, v_2^1, \ldots v_{j-1}^1, v_j^1, \ldots v_k^1 \\ v_1^2, v_2^2, \ldots v_{j-1}^2, v_j^2, \ldots v_k^2 \\ v_1^{24}, v_2^{24}, \ldots v_{j-1}^{24}, v_j^{24}, \ldots v_k^{24} \end{matrix} \right| \qquad Q = \left| \begin{matrix} Q_1^1, Q_2^1 \cdots Q_{j-1}^1, Q_j^1 \cdots Q_k^1 \\ Q_1^2, Q_2^2 \cdots Q_{j-1}^2, Q_j^2 \cdots Q_k^2 \\ Q_1^{24}, Q_2^{24} \cdots Q_{j-1}^{24}, Q_j^{24} \cdots Q_k^{24} \end{matrix} \right|$$

Будем предполагать, что соответствующий алгоритм оптимизации режима в целом построен таким образом, что в процессе перехода к новому приближению изменяется минимально возможное число переменных. Согласно такому алгоритму рассматривается одновременное изменение только двух элементов матрицы Q – расхода воды одной и той же ГЭС в двух разных интервалах времени, например, Q_j^α и Q_j^β $(\alpha \neq \beta)$. При этом изменяются и соответствующие элементы матрицы V /2/. При наличии каскадных связей изменение двух элементов матрицы Q вызывает несколько более сложные преобразования матрицы V.

Действительно, рассмотрим следующий пример: пусть $\alpha = 1$; $\beta = 0$; $t_j = 3$ часа. В качестве независимой переменной примем Q_{j-1}^1 и зададим ей приращение $+\Delta Q$. Тогда, во избежание нарушения (3), для $j-1$ -ой ГЭС необходимо уменьшить Q_{j-1}^5 на ΔQ. Матрица V соответственно примет вид, приведенный на стр. 183.

Уменьшение объемов воды в водохранилищах $j-1$ -ой ГЭС в интервалах $\alpha+1, \alpha+2, \cdots \beta$ на ΔQ вызвано увеличением расхода Q_{j-1} на ΔQ, а увеличение на ΔV v_j^5, v_j^6, v_j^7 и v_j^8 вызвано увеличением притока в $\alpha + t_j$ -ом интервале $(\alpha + t_j = 4)$

$$
V = \left|\begin{array}{ccccc}
v_1^1, & v_2^1, \ldots & v_{j-1}^1 & v_j^1 & , v_k^1 \\
v_2^1, & v_2^2, \ldots & v_{j-1}^2-\Delta v, & v_j^2 & , v_k^2 \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^3-\Delta v, & v_j^3 & , \cdot \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^4-\Delta v, & v_j^4 & , \cdot \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^5-\Delta v, & v_j^5+\Delta v, & \cdot \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^6 & , v_j^6+\Delta v, & \cdot \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^7 & , v_j^7+\Delta v, & \cdot \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^8 & , v_{j-1}^8+\Delta v, & \cdot \\
\cdot & \cdot & v_{j-1}^9 & , v_{j-1}^9+\Delta v, & \cdot
\end{array}\right|
$$

на ΔQ, которое длится $\beta-\alpha=4$ часа со сдвигом по времени $t_j=3$ часа.

Алгоритм учета каскадной связи включает три процедуры:

I. Вычисление $v_{j-1}^{\sigma}-\Delta v$ для $\sigma=\alpha+1, \alpha+2, \ldots \beta$ путем вычитания ΔQ из v_{j-1}^{σ};

2. Вычисление $v_{j-1}^{\sigma}+\Delta v$ для $\sigma=\alpha+1+t_j, \alpha+2+t_j \ldots$ путем сложения v_j^{σ} и Δv;

3. Проверку ограничений (4) для вычисленных на этапах I и 2 величин

$$v_{j-1}^{\sigma}-\Delta v \geq v_{j-1(min)}, \tag{4а}$$

$$v_{j-1}^{\sigma}+\Delta v \leq v_{j(max)} \tag{4б}$$

и при нарушении (4а) или (4б) - передачу управления на прекращение изменения независимой переменной Q_j^{α} в положительном направлении для данной парной комбинации часов $\alpha=1$ и $\beta=5$.

При выполнении условий (4а) и (4б) вычисления продолжаются по основному алгоритму оптимизации /2,3/, т.е. новое приближение принимается допустимым.

Аналогично производятся вычисления по вспомогательному алгоритму учета каскадных связей для всех пар интервалов и всех ГЭС каскада.

Сравнительная простота вышеприведенной методики и алгоритма учета каскадных связей обусловлена тем, что основной алгоритм оптимизации позволяет производить переход к новому приближению путем изменения только двух величин Q_j^{α} и Q_j^{β} при полном переборе $\langle\alpha,\beta\rangle$ и j.

Покажем, что отказ от дальнейшего спуска по координате $Q_j^{\alpha-1}$ в положительном направлении из-за нарушения (4а) не приводит к игнорированию какого-либо изолированного подмножества множества точек допустимой области для комбинации часов $\alpha=1$, $\beta=5$.

1. Допустим, что условие (4а) нарушено только для $V_{j-1}^{1}-\Delta V$, т.е. $V_{j-1}^{1}-\Delta V<V_{j-1(m)}$, причем, согласно (5), α принимает одно из значений: 2,3, 4 или 5. Тогда, для возврата в допустимую область необходимо уменьшить расход воды в одном из интервалов, предшествующих α, по крайней мере на ΔQ.

Но в процессе полного перебора парных комбинаций интервалов по основному алгоритму оптимизации все интервалы, предшествующие α будут перебраны совместно с Q_j^{β}, поэтому все точки допустимой области, образуемые комбинациями Q_j^{α} с Q_j^{β}, где $\beta=1,2,\dots\alpha-1$, не окажутся игнорированными.

2. Допустим, что условие (4а) нарушено для двух или нескольких элементов $j-1$ -го столбца матрицы V, т.е.

$$V_{j-1}^{\alpha} - \Delta V < V.$$

Тогда для возвращения в допустимую область следует уменьшить расходы воды в двух или нескольких интервалах, предшествующих α, γ и т.д., но такие точки допустимой области будут перебраны в процессе полного попарного перебора интервалов.

3. Пусть условие (4а) нарушено только для $V_j^1 + \Delta V$, т.е. $V_j^{\alpha} + \Delta V > V_{j\,max}$, причем, α принимает одно из значений: 5,6,7 или 8. Если бы холостой слив воды был неизбежен, то такой слив имел бы место и в исходном приближении, поэтому предполагаем, что нарушения (4б) можно избежать. Устранить вышеуказанный слив можно двумя путями: а) увеличением расхода воды j-ой ГЭС, по крайней мере, на ΔQ в одном из интервалов, предшествующих $\alpha - t_j$, б) уменьшением расхода предыдущей $j-1$-ой ГЭС и по крайней мере на ΔQ в одном из предшествующих $\alpha - t_j$ интервалов.

Первый путь ввода в допустимую область связан с перебором допустимых значений Q_j^{α} и, например, Q_j^{γ}, где $\gamma < \alpha$, что предусмотрено в вычислительной схеме основного алгоритма для j-ой ГЭС.

Второй путь ввода в допустимую область связан с перераспределением нагрузки $j-1$-ой ГЭС и аналогичен рассмотренным случаям I и 2.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет учесть рассмотренные выше каскадные ограничения без игнорирования каких-либо точек допустимой области, но следует отметить, что при учете разрывов характеристик ГЭС этот вопрос требует дополнительного исследования.

Рассмотренный метод построения матрицы V может быть использован и для большого числа каскадных ГЭС, при этом изменение элементов матрицы V, вызванные изменением Q_j^{α} и Q_j^{β}, будут иметь цепной характер, как и в матрице (5) - слева направо и сверху вниз. Предполагается что ГЭС нумеруются в той естественной последовательности, в которой они расположены по стоку реки.

Поступила 8.XI.1982

Грузинский политехнический институт им. В.И.Ленина

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Веников, В.Г.Журавлев, Т.А.Филиппова. Оптимизация режимов электростанций и энергосистем, М., 1981.
2. Н.В. Габашвили, М.А.Бенашвили. Новая методика расчета на ЦВМ оптимального суточного распределения активных нагрузок в энергосистеме. Труды проблемной лаборатории АВТ ГПИ им. В.И.Ленина, Тбилиси, 1967.
3. М.А.Бенашвили. Алгоритмическая реализация динамической модели оптимального суточного планирования режимов энергосистем. Труды ГрузНИИЭГС, вып. 3, М., 1976.

მ.ბენაშვილი, ლ.შენგელია

ჰესების კასკადების შემცველი ენერგოსისტემის
რეჟიმების ოპტიმიზაციის საკითხები

რ ე ზ ი უ მ ე

გამოყენებულია მთლიანი ენერგოსისტემის ოპტიმიზაციის დროს სპეციფიკური კასკადური შეზღუდვების – ტალღის და შუალედურ წყალსაცავთა დასაშვები დონეების გათვალისწინების მეთოდი.

M.Benashvili, I.Shengelia

PROBLEMS OF REGIME OPTIMIZATION OF POWER SYSTEMS INVOLVING CHAINS OF HYDRO-ELECTRIC POWER STATIONS

Summary

A method is proposed for taking into consideration specific chain constraints in the optimization of an entire power system, i.e., the arrival of wave and the permissible levels of intermidiate storage reservoirs.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

251, 1984

სტატისტიკური ლექსიკოგრაფიის თეორიისა და პრაქტიკის ზოგიერთი საკითხი

თ. წილოსანი

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

სტატისტიკური ლექსიკოგრაფიის საგანს წარმოადგენს სიხშირითი ლექსიკონების შედგენა და გამოყენება. სიხშირითი ლექსიკონი ყველა სხვა ტიპის ლექსიკონებისაგან განსხვავდება იმით, რომ იგი შეიცავს მხოლოდ იმ „სიტყვებს" („სიტყვის" ქვეშ იგულისხმება ყოველივე ის, რაც მოთავსებულია ტექსტის ორ წინასწარ ფიქსირებულ ელემენტს შორის), რომლებიც დაფიქსირებულია შემდგენლის მიერ. ამასთან ერთად სიხშირით ლექსიკონებში მითითებულია ამ „სიტყვების" აბსოლუტური სიხშირეები ანუ რიცხვები, რომლებიც გვიჩვენებენ თუ რამდენჯერ შეგვხვდნენ ისინი დამუშავებულ ტექსტებში (მასივებში).

ყოველწლიურად სულ უფრო და უფრო იზრდება სიხშირითი ლექსიკონების გამოყენებისადმი მოთხოვნილება მეცნიერებასა და განათლების სფეროში. ფილოლოგი სიხშირით ლექსიკონში პოულობს მისთვის საინტერესო მასალას ტიპოლოგიური გამოკვლევებისათვის, შესაბამისი ლინგვისტური ერთეულების ხმარების ანალიზისათვის სხვადასხვა ენებში, ერთი ან რამოდენიმე ავტორის ნაწარმოებებში. ენის მასწავლებელი სიხშირით ლექსიკონში ეძებს ობიექტურად შერჩეულ სას-

წაეღო მასალას. ზუსტი და საინჟინრო მეცნიერებათა წარმომადგენელი სიხშირით ლექსიკონს იყენებს ლინგვისტური ელემენტების შესახებ სტატისტიკური ცნობების მისაღებად, რათა უზრუნველყოს შეტყობინებათა ეფექტური გადაცემა შესაბამისი არხების საშუალებით. ენობრივი ინფორმაციის ავტომატური გადამუშავების დარგში მომუშავე სპეციალისტები ეყრდნობიან დარგობრივი ენების რაოდენობრივი აღწერის შედეგებს, რაც მათ დიდ სამსახურს უწევს ელექტრონულ-გამოთვლითი ტექნიკის დახმარებით ტექსტების ძებნისა და რეფერირების სისტემების შექმნაში. ბგერებისა და ასოთა სტატისტიკა, მიღებული სიხშირითი ლექსიკონის დახმარებით, გამოიყენება ახალი, ექსპერიმენტული ანბანების შესაქმნელად.

მზარდი ინტერესი სიხშირითი ლექსიკონებისა და საერთოდ, რაოდენობრივი ლინგვისტიკისადმი კანონზომიერია. იგი წარმოადგენს თანამედროვე მეცნიერების „მათემატიზაციის“ საერთო პროცესის ერთ-ერთ ნაწილს.

სტატისტიკური ლექსიკოგრაფიის განვითარება დიდადაა დამოკიდებული განზოგადებული ხასიათის ნაშრომების გამოჩენაზე. თვით სიხშირითი ლექსიკონების გამოცემა ხდება მცირერიცხოვანი ტირაჟებით. ახალი ნაშრომების შესახებ არსებული ინფორმაცია გაბნეულია სპეციალისტთა ფართო წრისათვის ძნელად მისაწვდომ გამოცემებში. ყოველივე ამას მივყევართ საკმაოდ არასასიამოვნო სიტუაციამდე, როდესაც თითქმის ყველამ იცის სიხშირითი ლექსიკონის არსებობის შესახებ, მაგრამ ძალზე ცოტას თუ აქვს სრული წარმოდგენა მასზე, მისი გამოყენების, მისით სარგებლობის პერსპექტივებზე.

სიხშირითი ლექსიკონების შედგენა, კლასიფიკაცია და გამოყენება არ მოითხოვს განსაკუთრებულ მათემატიკურ მომზადებას. ყოველთვის არაა საჭირო აღძრული პრობლემების სპეციალური თეორიული დასაბუთება. უმეტეს შემთხვევაში მათი ხასიათი ლინგვისტური თვალ-

საზრისით საცსებით ბუნებრივია და ამიტომაც მათი გადაწყვეტა ხდება „საღი აზროვნების“ პოზიციიდან.

სიხშირითი ლექსიკონის სტრუქტურის შესახებ ელემენტარული წარმოდგენის შესაქმნელად განვიხილოთ უბრალო მაგალითი.

ჩვენი შესავლის ტექსტი შეიცავს 276 სიტყვაფორმას. მათგან ყველაზე მეტი (43) იწყება ასო ს-თი. შვიდი სხვადასხვა ასოთი (ვ, ჟ, ღ, ჩ, ჭ, ჯ, ჰ) დაწყებული სიტყვაფორმები შესავლის ტექსტში საერთოდ არ გვხვდება. განსხვავებულ სიტყვაფორმათა რაოდენობა ტოლია 228-ის, მეორდება 27 სიტყვაფორმა. ამათგან ზოგიერთი მეორდება რამდენიმეჯერ, ზოგი კი მხოლოდ ერთხელ. 249 სიტყვაფორმა შესავლის ტექსტში მხოლოდ თითოჯერ გვხვდება. სიტყვაფორმათა ხმარების მაქსიმალური აბსოლუტური სიხშირე განხილულ ტექსტში ტოლია 9-ის (კავშირი „და“ შესავლის ტექსტში მეორდება ცხრაჯერ).

შესავლის სიხშირითი ლექსიკონის მისაღებად შეგვიძლია სიტყვაფორმების დალაგება კლებადი აბსოლუტური სიხშირეების მიხედვით (სია №I). ამით ჩვენ მივიღებთ სიხშირითი ლექსიკონის ე.წ. სიხშირულ ვარიანტს.

სია №I

№	სიტყვაფორმა	აბსოლუტური სიხშირე
I	და	9
2	სიხშირითი	8
3	ლექსიკონების	5
4	სიხშირით	4
5-7	ლინგვისტური	
	სტატისტიკური	
	შესახებ	3

და ა.შ. სტატისტიკური ინფორმაცის დანარჩენი სიტყვაფორმების შესახებ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად: 8-27 სიტყვაფორმები აბსოლუტური სიხშირეებით 2 შეგვხვდა 20-ჯერ, 28-228 სიტყვაფორმები აბსოლუტური სიხშირეებით I შეგვხვდა 20I-ჯერ.

იგივე „ლექსიკონი", წარმოდგენილი ალფაბეტური მიმდევრობით მოგვცემს სიხშირითი ლექსიკონის ე.წ. ალფაბეტურ-სიხშირულ ვარიანტს (სია №2).

სია №2

სიტყვაფორმა	აბსოლუტური სიხშირე
აბსოლუტური	I
ავტომატური	I
ავტორის	I
აზროვნების	I
ახალი	2
ბგერებისა	I
ბუნებრივია	I
გაბნეულია	I
გამოყენება	2
და	9
ლექსიკოგრაფიის	2.

სიტყვაფორმა	აბსოლუტური სიხშირე
ლექსიკონების	5
--------	---
--------	---
რამდენჯერ	I
--------	--- და ა.შ.

აბსოლუტური სიხშირეების ტექსტის სიგრძეზე (ჩვენ შემთხვევა-ში 276-ზე) გაყოფით ჩვენ მივიღებთ სიტყვაფორმათა ფარდობით სიხ-შირეებს. ასე მაგალითად, „და"-ს ფარდობითი სიხშირე ტოლია 0,033, „სიხშირითი"-ს 0,029, „ლექსიკონების" ფარდობითი სიხშირე ტოლია 0,018, „სიხშირით"-ის 0,014, სიტყვაფორმების „ლინგვისტური", „სტატისტიკური", „შესახებ" ფარდობითი სიხშირეები ერთნაირია და ტოლია 0,011 და ა.შ. თუ სიის მიხედვით მიმდევრობით შევკრებთ სიტყვაფორმათა ფარდობით სიხიშეებს, მივიღებთ ე.წ. დაგროვილ ფარდობით სიხშირეს თითოეული სიტყვაფორმისათვის: „და"-სთვის 0,033, „სიხშირითი"-სთვის 0,062, „ლექსიკონების" - თვის 0,080, „სიხშირით"-ისთვის 0,094, „შესახებ"-ისთვის 0,094 + 3.0,011 = 0,127 და ა.შ. ამრიგად, ჩვენ საშუალება გვეძლევა განვსაზღვროთ, თუ რა წილი უკავია დამუშავებულ ტექსტში ცალკეულ სიტყვაფორმას ან სიტყვაფორმათა ნებისმიერ, წინასწარ განსაზღვრულ ერთობლიობას. ასე, მაგალითად, ჩვენს მიერ შედგენილი „ლექსიკონის" სიხშირული ვარიანტის პირველი (ყველაზე ხშირი) სიტყვა-ფორმა „და" იკავებს (ან როგორც ხშირად ამბობენ „ფარავს") მთელი ტექსტის 3,3%-ს, პირველი ორი სიტყვაფორმა („და" და „სიხშირითი") ერთად 6,2%-ს, პირველი შვიდი სიტყვაფორმა 12,7%-ს და ა.შ. მიღებული შედეგი მი-გვითითებს იმ შესაძლებლობებზე, რომლებსაც სიხშირითი ლექსიკონები

იძლევიან ენის შესწავლისას ან ინფორმაციის ავტომატურად გადამუშავებისას.იგივე შედეგი დაგვეხმარება ჩვენ იმ ლექსიკური ზონების დადგენაში, რომლებიც პირველხარისხოვან როლს ასრულებენ ტექსტების წარმოქმნისას.

სხვადასხვა ქვეყნებში არსებული სიხშირითი ლექსიკონების საერთო რაოდენობა სამოციანი წლებისათვის აღწევცა 300-ს.1975 წლისათვის მათი რაოდენობა გაიზარდა 500-მდე. ამჟამად მათი საერთო რაოდენობა 800-ს უახლოვდება. ყოველი მათგანი, რა თქმა უნდა, ინარჩუნებს თავისი დანიშნულების მთავარ ნიშანს – მათში მითითებულია შემავალი ელემენტების აბსოლუტური ან ფარდობითი სიხშირეები.

რამდენადაც ცნობილია, სიხშირითი ლექსიკონები შედგენილია 30-მდე სხვადასხვა ენისათვის. ყველაზე მეტი სიხშირითი ლექსიკონი მოდის ინგლისურ ენაზე.და საერთოდ, სტატისტიკური ლექსიკოგრაფია თავის არსებობას უნდა უმადლოდეს სწორედ ინგლისურ ენაში ქვანტიტატურ გამოკვლევებს. სიხშირითი ლექსიკონები მეტ-ნაკლებად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.ამიტომ, ბუნებრივია ხაზგასმით გამოვყოთ ძირითადი ტიპები და აღვწეროთ მათთვის დამახასიათებელი უმთავრესი შინაარსობრივი და ფორმალური ნიშნები.

სიხშირით ლექსიკონებში შემავალი ერთეულების განლაგება, როგორც წესი, ხდება ორი ძირითადი პრინციპით: ალფაბეტის მიხედვით და კლებად სიხშირეთა მიხედვით. წიგნად გამოცემული სიხშირითი ლექსიკონების უმეტესობაში ლექსიკონური ერთეულები განლაგებულნი არიან ალფაბეტის მიხედვით, შესაბამისი სიხშირეების მითითებით. სიხშირითი განლაგება გამოიყენება ძირითადად მაშინ, როდესაც არ ხერხდება ლექსიკონის ცალკე წიგნად გამოცემა და შემდგენელი იძულებულია მოათავსოს სიაში ლექსიკონურ ერთეულთა შეზღუდული რაოდენობა (ასეთ შემთხვევაში სიხშირითი ლექსიკონი შე-

იცავს დამუშავებულ მასივებში მხოლოდ განსაკუთრებით ხშირად შეხვედრილ ლექსიკურ ერთეულებს). ზოგიერთ ლექსიკონში მოყვანილია ორივე სია – როგორც სიხშირითი, ასევე ალფაბეტურიც.

უკანასკნელ პერიოდში გამოცემულ სიხშირით ლექსიკონთა ნაწილი ალფაბეტურ-სიხშირულ და სიხშირულ სიებთან ერთად შეიცავს აგრეთვე სიას, რომელშიც ლექსიკონური ერთეულები განლაგებულნი არიან არა პირველი, მეორე და ა.შ. ასოების მიხედვით მათი დასაწყისიდან, არამედ პირველი, მეორე და ა.შ. ასოების მიხედვით მათი (ლექსიკონური ერთეულების) ბოლოდან. ამგვარად, სიხშირითი ლექსიკონის ერთეულთა განლაგება შეიძლება იყოს როგორც „პირდაპირი“, ასევე „შებრუნებულიც“.

ხანდახან სიხშირითი ლექსიკონი ერთეულთა საერთო სიებთან ერთად შეიცავს მათ დამატებით სიებს, რომლებიც განკუთვნილნი არიან, მაგალითად, მეტყველების ნაწილების, დამუშავებული მასივების თემატური ქვემასივების და ა.შ. კლასიფიკაციისათვის.

სიხშირითი ლექსიკონის სიტყვარი შეიცავს დამუშავებულ მასივებში არსებულ ლექსიკონური ერთეულების სრულ ნუსხას ან მათ გარკვეულ (შედარებით ხშირად ხმარებულ) ნაწილს. ამასთან დაკავშირებით, სიხშირითი ლექსიკონი შეიძლება იყოს სრული ან არასრული. გამოქვეყნებულ სიხშირით ლექსიკონთა უმეტესობა, როგორც წესი, არასრულია. სიხშირითი ლექსიკონის კართოტეკა შეიცავს იშვიათად ხმარებული ერთეულების დიდ რაოდენობას. იმ ერთეულთა რაოდენობა, რომლებიც მასივში თითოჯერ გვხვდებიან, ხშირად აღემატება ან უტოლდება ერთეულთა საერთო რაოდენობის ნახევარს. განსაკუთრებულ ყურადღებას, როგორც წესი, იქცევს, რა თქმა უნდა, სიხშირითი ლექსიკონის ზედა, ხშირად ხმარებულ ლექსიკონურ ერთეულთა ზონა. ამიტომ ავტორი ან ავტორთა ჯგუფი გამოსაქვეყნებელი სიტყვარის მოცულობის საკითხს წყვეტს იმის მიხედვით, თუ რა მიზანს უნდა ემსახუროს მისი სიხშირითი ლექსიკონი ან იმის მიხედვით, თუ რა ნაწი-

ლის გამოქვეყნების საშუალებას აძლევს მას გამომცემლობა (იგულისხმება ნაბეჭდ გვერდთა ის რაოდენობა, რომელზედაც უნდა მოთავსდეს ჩატარებული სამუშაოების უმნიშვნელოვანესი ნაწილი).

ამგვარად, როგორც წესი, გამოქვეყნებული სიხშირითი ლექსიკონებისა და სიხშირითი სიების უმრავლესობა, მცირეოდენი გამონაკლისის გარდა, არასრულია.

სიხშირითი ლექსიკონის უმნიშვნელოვანეს მახასიათებელს წარმოადგენს დამუშავებული ტექსტების საერთო სიგრძე, ანუ თუ მივმართავთ სტატისტიკურ ტერმინოლოგიას, ამორჩეული ტექსტების (ამონარჩევის) მოცულობა, რადგან სიხშირული ლექსიკონის საიმედობა და აქედან გამომდინარე მისი ვარგისიანობაც, როგორც წესი, განისაზღვრება იმ მასალის მოცულობით, რომელიც გაანალიზებულია ლექსიკონის შედგენისას. ამონარჩევის მოცულობა შეიცავს დაფიქსირებული ლექსიკური ერთეულების გამეორების ყველა შემთხვევას და გამომდინარე აქედან, ტოლია ამ ერთეულების აბსოლუტური სიხშირეების ჯამისა. ამიტომ შეცდომა იქნებოდა ჩაგვეთვალა, რომ ამონარჩევის მოცულობა ტოლია, მაგალითად, 500000 სიტყვაფორმისა, თუ სიხშირითი ლექსიკონის შემდგენლის მიერ ამ მოცულობიდან ამორჩეულია მხოლოდ 100000 სიტყვაფორმა, ანუ თუ ჯამური აბსოლუტური სიხშირე ყველა (და არა მარტო გამოქვეყნებული) ლექსიკური ერთეულისათვის ტოლია 100000. ეს უკანასკნელი რიცხვი უნდა განსაზღვრავდეს კიდეც ამონარჩევის მოცულობას. დღემდე გამოქვეყნებული სიხშირითი ლექსიკონები მკვეთრად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან თავიანთი ამონარჩევის მოცულობებით. სიხშირითი ლექსიკონთა უმეტესი რაოდენობის ამონარჩევის მოცულობა არ აღემატება 25-50 ათას სიტყვაფორმას. გვხვდებიან აგრეთვე სიხშირითი ლექსიკონები, რომელთა ამონარჩევის მოცულობა ტოლია ან მეტი 1.000000 სიტყვაფორმისა. ასეთ სიხშირით ლექსიკონთა საერთო რიცხვი არ აღემატება ორ ათეულს. მათ შორის სულ რამოდენიმეა ისეთი, რომელიც დაფუძნებულია ერთ მილიონზე გაცი-

ლებით მეტ სიტყვაფორმაზე.

ამონარჩევის მოცულობის დადგენას განსაზღვრავს უპირველეს ყოვლისა, შემდგენლის (შემდგენელი კოლექტივის) ფიზიკური შესაძლებლობა. ვიცით რა, რომ რაც მეტია ამონარჩევის მოცულობა, მით საიმედოა სიხშირითი ლექსიკონის მონაცემები, ჩვენ მაინც იძულებულნი ვართ განვსაზღვროთ ეს მოცულობა იმგვარად, რომ დაწყებული სამუშაო დროულად დამთავრდეს. მიუხედავად იმისა, რომ მილიონიანი მასივი არც თუ ისე დიდია, როდესაც ჩვენ მიზნად ვისახავთ საერთო სალიტერატურო ენის ძირითად ხმარებული ლექსიკის გამოვლენას, ასეთი მასივების დამუშავება ძალუძთ მხოლოდ საკმაოდ დიდ კოლექტივებს (პლუს გამოთვლითი ტექნიკა), რომელთა ორგანიზება ასეთი სამუშაოსათვის საკმაოდ ძნელია.

პირველ რიგში უნდა გამოვყოთ მეტყველების წერითი და ზეპირი ფორმები, რომლებიც აღიწერებიან სიხშირითი ლექსიკონების საშუალებით. ზეპირი მეტყველების მიხედვით შექმნილი სიხშირითი ლექსიკონების რაოდენობა ძალზედ მცირეა (მათი რიცხვი არ აღემატება ათს). არის შემთხვევები, როდესაც სიხშირით ლექსიკონებს ადგენენ მხატვრული ნაწარმოებების პერსონაჟების დიალოგების მიხედვით. ასეთ ვარიანტს მიმართავენ მაშინ, როდესაც არ არის საშუალება შესწავლილ იქნას „ცოცხალი" ზეპირი მეტყველება. განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება იმ შემთხვევას, როდესაც დიალოგი არ არის გამიზნული დამატებითი მსმენელისათვის (დიალოგის ჩაწერა ხდება ისეთნაირად, რომ მოსაუბრეებმა ამის შესახებ არაფერი იციან). ამ. ტიპის მასალაზე შექმნილი სიხშირითი ლექსიკონების რაოდენობა კიდევ უფრო მცირეა (არ აღემატება ხუთს), დანარჩენი ხუთი ზემოდ აღნიშნული ათი ლექსიკონიდან შედგენილია ჩაწერილი ინტერვიუს მასალებზე, როდესაც ექსპერიმენტატორი აკვირდება ცდის ტიპის რეაქციას მოცემულ წინასწარ გამიზნულ შეკითხვაზე. ცოცხალი, მოუმზადებელი ზეპირი მეტყველება ლინგვისტების მიერ ნაკლებად არის შესწავლილი.

ზეპირი მეტყველების დამკვირვებელი ძირითადად აწყდება ეთიკურ-ფსიქოლოგიური ხასიათის დაბრკოლებებს. ამიტომ გავრცელებული აზრი იმის შესახებ, რომ შესაძლებელი და მიზანშეწონილიც კია წიგნური სასაუბრო მეტყველების ლინგვისტური ანალიზი მეტყველების ხალასი, ზეპირი ფორმების ანალიზის ნაცვლად, აიხსნება არა იმდენად თეორიული მოსაზრებებით, რამდენადაც ზემოდ აღნიშნული ხასიათის სიძნელეებით, რომლებიც დამკვირვებელ-ექსპერიმენტატორისათვის ფაქტიურად ტექნიკური ხასიათის სიძნელეებს წარმოადგენენ.

წერით და ზეპირ მეტყველებას შორის განსაკუთრებული ადგილი უკავია ე.წ. ეპისტოლარულ მეტყველებას, რომელიც თავისი ფორმით რა თქმა უნდა წერითია. წერილს სწერს ენის ყველა მატარებელი. პროფესიონალებიც კი მხატვრულ, საგაზეთო, საქმიან თუ სხვა ტიპის ტექსტებს ჰქმნიან ალბათ შედარებით მცირე რაოდენობით და მოცულობით, ვიდრე წერენ წერილებს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნებისმიერი მოზრდილი ადამიანი მონაწილეობს მიმოწერაში, მაგრამ მათი ძალზედ მცირე ნაწილი ასრულებს აქტიურ როლს სხვა ტიპის ტექსტების შექმნაში. ამრიგად, ორმხრივ ენობრივ კომუნიკაციაში ეპისტოლარულ მეტყველებას მეორე ადგილი უკავია ზეპირი მეტყველების შემდეგ. ენის მატარებელთა უმრავლესობისათვის აქტიური მეტყველებითი მოღვაწეობა ამ ორი ფორმით განისაზღვრება. ორივე ფორმას, როგორც ზეპირს, ისე ეპისტოლარულს, გარკვეული, მცირეოდენი გამონაკლისის გარდა ახასიათებს ერთგვარი „დაუდევრობა". მოსაუბრე ან წერილის ავტორი ყოველთვის ვერ ახერხებს ან არ ცდილობს დაიცვას სტილისტიკისა თუ გრამატიკის ყველა მოთხოვნა, არ ზრუნავს ცალსახად შესაბამისი სიტყვების შერჩევაზე. როგორც წესი, ეს გამოწვეულია დროის უქონლობით. ხშირად ეს აიხსნება მოსაუბრეებს ან ადრესატებს შორის დამყარებული „მდგრადი" კავშირით, როდესაც მათ „კარგად" ესმით ერთმანეთის.

წერილების მიხედვით შედგენილ სიხშირით ლექსიკონთა რაოდენობაც საკმაოდ მცირეა. ზოგიერთი მათგანი შედგენილია არა იმდენად მეთოდური, რამდენადაც მეცნიერული მიზნებით; მათ ავტორებს აინტერესებდათ ენის რიგითი მატარებლების აქტიური ლექსიკის განსაკუთრებით ხშირად ხმარებული ბირთვის გამოვლენა.

მეტყველების ზეპირ და ეპისტოლარულ ფორმებს უპირისპირდება საკუთრივ წერითი ფორმა, წარმოდგენილი ისეთ ტექსტებში, რომლებშიც დაცულია საერთო სალიტერატურო ენობრივი ნორმები. მეტყველების ამ ფორმის მიხედვით შედგენილი სიხშირითი ლექსიკონები შეიძლება დავყოთ ე.წ. ზოგად და სპეციალურ ლექსიკონებად. ზოგადს მიეკუთვნებიან ის სიხშირითი ლექსიკონები, რომლების შემდგენელთა მიზანს წარმოადგენს ენის ფუნქციონირების ყველა სფეროში მეტ-ნაკლებად თანაბრად ხმარებული ლექსიკის გამოვლენა. ასეთი ლექსიკონებისათვის განკუთვნილი დასამუშავებელი ტექსტების მასივები უნდა მოიცავდნენ ნაწყვეტებს მხატვრული, სამეცნიერო-პოპულარული და სასწავლო ლიტერატურიდან, ჟურნალ-გაზეთებიდან და რიგი სხვა წყაროებიდან. ზოგადი ტიპის სიხშირითი ლექსიკონის შედგენა უკიდურესად საპასუხისმგებლო საქმეა. შერჩეული ტექსტების ხასიათი პირდაპირ გავლენას ახდენს მისი სიტყვარის შიგთავსზე. ტექსტების ტენდენციურად შერჩევისას სიხშირითი ლექსიკონი კარგავს ზოგადურობას, იგი აღარ წარმოგვიდგენს საერთო სალიტერატურო ლექსიკას. იგი გადაიქცევა სპეციალურ (ისიც ნაწილობრივ) სიხშირით ლექსიკონად.

სპეციალური ტიპის სიხშირითი ლექსიკონებს შორის დაყოფა ხდება იმ ფუნქციონალური სტილის მიხედვით, რომელსაც მიეკუთვნებიან მათი შედგენისას დამუშავებული ტექსტები. ამჟამად შედგენილი სპეციალური სიხშირითი ლექსიკონების უმეტესობა დაფუძნებულია საგაზეთო და სამეცნიერო-ტექნიკური ტექსტებიდან შერჩეული მასივებზე. ამათგან საგაზეთო ტექსტებზე დაფუძნებული ლექსიკონების საერთო რაოდენობა საგრძნობლად ჩამორჩება სამეცნიერო-ტექნიკური

ტექსტების მიხედვით შედგენილ ლექსიკონების რაოდენობას.

გაზეთს, როგორც მასობრივი ინფორმაციის წყაროს, მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მეტყველების ჩამოყალიბების, განვითარებისა და დაფუძნების საქმეში. საგაზეთო ტექსტი სხვა ტიპის ტექსტებისაგან განსხვავდება რიგი თავისებურებებით. როგორც წესი, გაზეთზე მოდის მთელი ნაბეჭდი პროდუქციის მოცულობის უდიდესი ნაწილი. მას ჰყავს მასიური ავტორიც და მასიური მკითხველიც. ყოველივე ამის გამო გაზეთი ახდენს ძლიერ ზემოქმედებას ენის მატარებელთა კოლექტივის მეტყველებაზე, აფუძნებს მასში გარკვეულ ნორმას (აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ სინამდვილეში ეს პროცესი ორმხრივია. გაზეთის საშუალებით თვით ნორმაც განიცდის გარკვეულ ზეგავლენას ენის მატარებელთა მხრიდან – საგაზეთო სტატიების ავტორები სხვადასხვა მიზეზების გამო ყოველთვის არ იცავენ გრამატიკისა და სტილისტიკის მიერ ნაკარნახევ ნორმატივებს). გაზეთი თითქმის მყისიერად ახდენს დაკანონებული ნორმის იმ ცვლილებების რეგისტრირებას, რომლებიც მხატვრულ ტექსტებამდე და მით უმეტეს ნორმატიულ ცნობიერებამდე წლების დაგვიანებით აღწევენ. ამრიგად, საგაზეთო ტექსტი წარმოადგენს უახლესი ლინგვისტური ინფორმაციის წყაროს. მიუხედავად ამისა ლინგვისტების გარკვეული ნაწილი ერიდება საგაზეთო ტექსტების დამუშავება-შესწავლას. მათი უმრავლესობა არჩევს შეისწავლოს ენა აღიარებული ავტორების მხატვრული ტექსტების საფუძველზე, რის გამოც ძალაუნებურად ხდება საგაზეთო ტექსტების პრაქტიკულად იგნორირება.

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე მაინც შემთხვევითი არ არის, რომ ენის ეფექტურად სწავლების მეთოდების ძიებისას და ამ მეთოდების შესაბამისად აუცილებელი ლინგვისტური მასალით უზრუნველსაყოფად ხშირად მიმართავენ საგაზეთო ტექსტების საფუძველზე შექმნილ სიხშირით ლექსიკონებს, ინგლისური ენის რიგით მე-

ორე სიხშირითი ლექსიკონი, შექმნილი სასწავლო მიზნით რ. ელდრიჯის მიერ, დაფუძნებულია საგაზეთო ტექსტების დამუშავების შედეგად მიღებულ მასალაზე (Eldridge R.C. Six thousand common English words. Niagara Falls, 1911).

ასევე, ფ. მალირჟის მიერ შედგენილი რუსული ენის პირველი სიხშირითი ლექსიკონი მთლიანად ეყრდნობა ჟურნალ-გაზეთებიდან ამოკრეფილ მასალას (Malíř F. Rusko-český slovnik nejdůležitějšich slov pro četbu sovětskego tisku. Praha, 1951)

უკანასკნელი წლების განმავლობაში ჩვენს ქვეყანაში შექმნილია საგაზეთო ტექსტებზე დაფუძნებული რიგი სიხშირითი ლექსიკონებისა რუსულ, ინგლისურ, ფრანგულ, გერმანულ, ლატვიურ, მოლდავურ, ყაზახურ და ავღანურ ენებზე.

სამეცნიერო-ტექნიკური სპეციალური ტიპის ტექსტების სიხშირითი ლექსიკონები ძირითადად საბჭოთა კავშირში იქმნება. მარტო საკავშირო „მეტყველების სტატისტიკის" ჯგუფის მიერ შედგენილია ასზე მეტი ასეთი ლექსიკონი. ყველა ისინი გამოქვეყნებულია განსაკუთრებით ხშირად ხმარებული ერთეულების სიხშირითი სიების სახით (თითოეული სია შეიცავს არა უმეტეს 2000 ერთეულისა). ზოგადსამეცნიერო და ზოგადტექნიკური ლექსიკის სიხშირითი ლექსიკონების შედგენა რიგ სირთულეებთანაა დაკავშირებული. ასეთი ტიპის ლექსიკონები უნდა მოიცავდნენ მეცნიერებისა და ტექნიკის ყველა დარგს და არა მათ გარკვეულ (თუნდაც მნიშვნელოვან) ნაწილს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ასეთი ლექსიკონებიდან ჩვენ ვერ მივიღებთ ობიექტურ ცნობებს.

განსაკუთრებული სიფრთხილის გამოჩენაა საჭირო ისეთი სიხშირითი ლექსიკონების შედგენისას, რომლებიც პრეტენზიას აცხადებენ უნივერსალურობაზე, რომლებიც ავტორის ჩანაფიქრის მიხედვით უნდა მოიცავდნენ ენას მთლიანად, მეცნიერებას მთლიანად, ტექნიკას მთლი-

ანად და ა.შ. მსგავსი სახის მასშტაბური გამოკვლევების ჩასატარებლად აუცილებელია, რა თქმა უნდა, დასამუშავებელი მასივების შესაბამისი შერჩევა და რაც მთავარია, საკმაოდ მოზრდილი კოლექტივის მობილიზება-კოლექტივისა, რომელსაც შეეძლება დაამუშაოს შერჩეული ტექსტების უზარმაზარი ერთობლიობა (ასეთი მიზნებისათვის განკუთვნილი ტექსტები, როგორც წესი, შეიცავენ რამდენიმე მილიონ სიტყვაფორმას).

ამიტომ უფრო მიზანშეწონილია ე.წ. დარგობრივი სიხშირითი ლექსიკონების შედგენა, რომელთათვის დასამუშავებელი მასივების მოცულობა არ აღემატება 200-400 ათას სიტყვაფორმას. შემდგომში შესაძლებელია მსგავსი გამოკვლევების მონაცემების გაერთიანება, რაც საბოლოო ჯამში მიგვიყვანს განზოგადოებული ტიპის სიხშირით ლექსიკონამდე. მსგავსი სამუშაო ძალუძს შედარებით მცირერიცხოვან კოლექტივს. მის ჩასატარებლად აუცილებელია მკაცრად განსაზღვრული სამუშაო გეგმის და, რაც მთავარია, შერჩეული ტექსტების ანალიზის ერთი გარკვეული მეთოდიკის არსებობა.

დასამუშავებელი ტექსტების ფორმისა და შინაარსის მიხედვით სიხშირითი ლექსიკონების დაყოფა შეიძლება დავიყვანოთ ერთ ავტორამდე, ერთ კონკრეტულ ნაწარმოებამდე და ცალკეულ ტექსტამდეც კი. ამ შემთხვევაში ლინგვისტიკის ინტერესები მჭიდროდ უკავშირდებიან უშუალოდ ლიტერატურათმცოდნეობის, ტექსტოლოგიის, საავტორო სტილისტიკის ინტერესებს.

არის შემთხვევები, როდესაც ჩვენ ვხვდებით შერეული ტიპის სიხშირით ლექსიკონებს. ყველაზე გავრცელებული მათ შორის არის ე.წ. სიტყვათმაჩვენებელი ანუ ინდექსი, რომელშიც ყოველ სიტყვას თან ახლავს შესაბამისი „მისამართი" (გვერდის და სტრიქონის დასახელება, სადაც შეგვხვდა ეს სიტყვა) და სიხშირე. სიხშირითი ლექსიკონის კიდევ ერთი ნაირსახეობის მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ განმარტებითი ლექსიკონი, რომელსაც თან აქვს დართული

მასში შესული სიტყვების სიხშირითი სია და ა.შ.

სიხშირით ლექსიკონთა შორის ერთ-ერთი პირველი - ჩინური იეროგლიფების სიხშირითი ლექსიკონი შედგენილ იქნა სტამბური წესით დასაბეჭდი ტექსტების მატრიცების ასაწყობი სამუშაოების ოპტიმიზაციის მიზნით. დამუშავებული ტექსტებისა და გამოქვეყნებული სიტყვარის მოცულობით ერთ-ერთი უდიდესი სიხშირითი ლექსიკონი შეიქმნა გერმანული ტექსტების საფუძველზე. მისი მიზანი იყო სტენოგრაფირების სისტემის სრულყოფა. საზღვარგარეთ გამოცემული სიხშირითი ლექსიკონების უმეტესობა მიზნად ისახავს ენის სწავლების მეთოდიკის დამუშავება-გაუმჯობესებას. სიხშირით ლექსიკონთა გარკვეული ნაწილი განკუთვნილია ლინგვისტური, ლინგვოსტატისტიკური, ლინგვოფსიქოლოგიური, ტექნიკური, სამხედრო-ტექნიკური, იურიდიული და ა.შ. გამოკვლევებისათვის.

განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ბავშვთა მეტყველების - კერძოდ ბავშვთა ლექსიკონის განვითარების დინამიკის სტატისტიკური გამოკვლევა. შრომები, რომლებიც აღნიშნულ საკითხს ეძღვნებიან, საშუალებას გვაძლევენ ჩავატაროთ როგორც ლინგვისტებისათვის, ისევე ფსიქოლოგებისათვის ერთნაირად საინტერესო დაკვირვებები.

ფსიქიური დაავადების მქონე ცდის პირების მეტყველებაში ლინგვისტური ერთეულების გამოჩენის სიხშირეების ანალიზი საშუალებას გვაძლევს ვიმსჯელოთ დაავადების ხარისხზე და ფორმაზე.

ბოლო წლებში საკმაოდ ინტენსიურად მიმდინარეობს სამუშაოები ისეთი სიხშირითი ლექსიკონების შესაქმნელად, რომლებიც ემყარებიან მასივებს მოცულობით 500000-დან 1000000 და კიდევ უფრო მეტ სიტყვაფორმამდე. ასეთი ტიპის სიხშირითი ლექსიკონების მიზანია იმ მასალების მიღება, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ ჩავატაროთ ტექსტების მრავალმხრივი ანალიზი სიტყვაფორმების, სიტყვების, მორფემების, გრაფემების და ა.შ. დონეზე. მათი ავტორებისათვის ლექსიკონი წარმოადგენს გარკვეულ საწყის ეტაპს იმ ტექსტე-

ბის სტრუქტურის საფუძვლიანი შესწავლისათვის,რომლებიც უფლებას გვაძლევენ ვიმსჯელოთ ენაზე,როგორც ერთ მთლიანზე.

საკავშირო „მეტყველების სტატისტიკის" ჯგუფის მიერ შექმნილი სიხშირითი ლექსიკონების მიზანი მრავალმხრივია.მათი მონაცემების საფუძველზე ხდება უცხო ენათა პედაგოგების ლექსიკური და ლექსიკურ-მორფოლოგიური მინიმუმით უზრუნველყოფა.მსგავსი მასალა განსაკუთრებით ძვირფასია იმ პედაგოგებისათვის,რომლებიც არაენობრივ სასწავლო დაწესებულებებში მოღვაწეობენ,რომელთათვის განსაკუთრებული როლი ენიჭება შემჭიდროებულ ვადებში გადაცემის ეფექტიანობის ამაღლებას.ისინი გამოიყენებიან აგრეთვე ენობრივი ინფორმაციის ავტომატურად გადასამუშავებელი სისტემების შექმნის საქმეში.მათგან ვიღებთ საჭირო მასალას ფუნქციონალური სტილებისა და ენების ტიპოლოგიური გამოკვლევებისათვის. ამის საფუძველს გვაძლევს მათი შედგენის მეთოდიკის ერთიანობა და დასამუშავებელი მასივების მოცულობების სტანდარტულობა,რასაც პრინციპული მნიშვნელობა ენიჭება სიხშირითი ლექსიკონების მონაცემების შედარებისას.

სიხშირით ლექსიკონებში შემავალი ერთეულების კლასიფიკაცია განსაკუთრებულ ყურადღებას მოითხოვს. ჩვეულებრივ ლექსიკონებში შემავალ ერთეულებს,როგორც წესი,წარმოადგენენ ცალკეული სიტყვები ან მათი ერთობლიობები (ფრაზეოლოგიური ლექსიკონები). ამისაგან განსხვავებით სიხშირითი ლექსიკონები სიტყვებისა და მათი ერთობლიობის გარდა შეიცავენ სხვა ლინგვისტურ ელემენტებსაც,კერძოდ სიტყვაფორმებს,მორფემებს,ასოებს,ბგერებს,სუფიქსებს, დაბოლოებებს და ა.შ.

არსებული სიხშირითი ლექსიკონების უმეტესობა შემავალი ერთეულების სახით შეიცავენ სიტყვებს ან სიტყვაფორმებს.სიტყვათა სიხშირითი ლექსიკონის გამოყენება განსაკუთრებით მოსახერხებე-

ლია მაშინ, როდესაც იგი მკითხველს (მომხმარებელს) წარუდგება მზა ლექსიკური მინიმუმის სახით. როდესაც მომხმარებელს აინტერესებს არა მარტო სიტყვების, არამედ მათი სხვადასხვა ფორმების ტექსტში გამოჩენის სიხშირეებიც, იგი მიმართავს სიტყვაფორმების სიხშირით ლექსიკონს. ზოგიერთ სიხშირით ლექსიკონში რეგისტრირებულია როგორც სიტყვების, ასევე სიტყვაფორმების სიხშირეებიც. ერთ-ერთი საუკეთესო სიხშირით ლექსიკონთა შორის – ს. ალენის შვედური საგაზეთო ტექსტების სიხშირითი ლექსიკონი (*Allen S. Nusvensk frekvensordbok baserad pa tidningstext. Stockholm. 1970-71*) შეიცავს ცალ-ცალკე, როგორც სიტყვების, ასევე სიტყვაფორმების სრულ სიხშირით სიებს.

ზოგიერთ სიხშირით ლექსიკონში მოცემულია სიტყვების ალფაბეტურ-სიხშირითი სია, ხოლო ყოველი სიტყვის ქვეშ მოყვანილია მისი ყველა ფორმა შესაბამისი სიხშირის მითითებით.

რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებიც თან ერთვიან სიხშირით ლექსიკონში შემავალ ერთეულებს, შეიძლება იყვნენ როგორც სავალდებულო, ასევე ფაკულტატურნიც (დამატებითი). შემდგენელთა უდიდეს უმრავლესობას სრულიად სამართლიანად მიაჩნია, რომ აბსოლუტური სიხშირე წარმოადგენს მთავარ სავალდებულო მახასიათებელს. აბსოლუტური სიხშირე წარმოადგენს უნივერსალურ რიცხვით მაჩვენებელს-მისი სიდიდე ამონარჩევის მოცულობის მითითებასთან ერთად ლინგვოსტატისტიკაში გათვითცნობიერებულ მკითხველს აძლევს სრულ წარმოდგენას სიხშირითი ლექსიკონების მონაცემების საიმედოობის შესახებ, მიუთითებს დამუშავებული მასივის შესაძლებლობაზე ასახოს ენა ან რომელიმე კონკრეტული ქვეენა. აბსოლუტური სიხშირის მეშვეობით ჩვენ მარტივად მივიღებთ წარმოებულ მახასიათებლებს ლინგვისტური ერთეულებისათვის, მაშინ, როდესაც პირუკუ ოპერაციის ჩატარება საკმაოდ რთულია. ზოგიერთ სიხშირით ლექსიკონში მოყ-

ვანილია არა აბსოლუტური,არამედ ფარდობითი სიხშირეები,რაც ქმნის დამატებით სიძნელეებს.ასე მაგალითად,თუ ასეთი ტიპის ლექსიკონის ავტორი მიუთითებს დამუშავებული მასივის მოცულობაზე,მკითხველი ლექსიკონში შემავალი ერთეულის ფარდობითი სიხშირის ამ მოცულობაზე გამრავლებით მიიღებს ამ ერთეულის აბსოლუტურ სიხშირეს, მაგრამ მიღებული რიცხვი არ იქნება ზუსტი.ჯერ ერთი,აბსოლუტური სიხშირის გამომსახველი რიცხვი აუცილებლად უნდა იყოს მთელი,ჩვენ კი,როგორც წესი,მცირეოდენი გამონაკლისის გარდა მივიღებთ წილად რიცხვებს.ამის გარდა,მიღებული შედეგის სიზუსტე დამოკიდებული იქნება იმაზე,თუ რამდენი ნიშნის სიზუსტით იქნა ჩატარებული გაყოფა ავტორის მიერ მოცემული ერთეულის ფარდობითი სიხშირის გამოთვლისას.თუ ავტორი საერთოდ არ მიუთითებს ამონარჩევის მოცულობაზე,მაშინ ფარდობითი სიხშირე საერთოდ კარგავს აზრს,როგორც ლინგვოსტატისტიკური მასალა,მაშინ როცა აბსოლუტური სიხშირეების შეკრების საშუალებით მკითხველი თვითონ გამოთვლიდა დამუშავებული მასივის მოცულობას.

არის შემთხვევები, როცა სიხშირითი ლექსიკონის ავტორი, გრძნობს რა შერჩეული დასამუშავებელი მასალის არასრულყოფილობას, „აზუსტებს" შემავალი ერთეულის სიხშირეს.ფაქტიური მონაცემების მსგავს „კორექტირებას" მივყავართ უხეშ შეცდომებამდე. იყო შემთხვევა,როდესაც ასეთ „დაზუსტებულ" სიხშირეებზე დაყრდნობით მკითხველის მიერ გამოთვლილი მოცულობა დამუშავებული მასივისა გამოვიდა 15.10^6, მაშინ,როდესაც რეალური მოცულობა იყო 5.10^6. ამრიგად,რა გზითაც არ უნდა ჩავატაროთ სიხშირის შეფასება – სტატისტიკურად არაკორექტულად თუ სავსებით დასაბუთებულად, იგი არ ცვლის შემავალი ელემენტის მთავარ მახასიათებელს – მის სიხშირეს.

ტექსტში სიტყვის ამოსვლის ერთ-ერთ მახასიათებელს წარმო-

ადგენს ე.წ. გავრცელებადობის მაჩვენებელი, იგი მიუთითებს შემდგენლის მიერ დამუშავებულ ტექსტებში სიტყვის შეხვედრის თანაბარზომიერების ხარისხზე. სიტყვის გავრცელებადობა უმარტივესი სახით განისაზღვრება ტექსტების იმ რაოდენობით, რომლებშიც ეს სიტყვა გვხვდება თუნდაც ერთხელ. ყველაზე ხშირი სიტყვები, როგორც წესი, გვხვდებიან ყველა დამუშავებულ ტექსტში. ნაკლები სიხშირის მქონენი კი ყველა ტექსტში არ გვხვდებიან. ამ თვისების გათვალისწინებით სიხშირითი ლექსიკონის ზოგიერთ შემდგენელს მოჰყავს არა შემავალი ერთეულის სიხშირე, არამედ მისი გავრცელებადობის მაჩვენებელი. ზოგიერთ მათგანს სიხშირით ლექსიკონში მოჰყავს ორივე, მაგრამ მთავარ რიცხვით მახასიათებლად მიიჩნევს გავრცელებადობის მაჩვენებელს, ხოლო დამატებითად - ერთეულის სიხშირეს.

სიხშირით ლექსიკონში შემავალი ერთეულების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლა ხშირად საკმაოდ შრომატევადია. ასეთ შემთხვევაში ლექსიკონის ავტორი მიმართავს ელექტრონულ გამოთვლით ტექნიკას, რაც თავის მხრივ საშუალებას გვაძლევს ჩავატაროთ კიდევ უფრო რთული ხასიათის გამოკვლევები, კერძოდ გამოვავლინოთ ის განაწილების კანონი, რომელსაც ემორჩილებიან ამორჩეულ ტექსტში შემავალი ერთეულების სიხშირეები. ეს პროცედურა მოითხოვს შედარებით რთულ მათემატიკურ აპარატს, დაკავშირებულია შრომატევად გამოთვლებთან. ამის გამო ჩვენ ვერ ვხვდებით სიხშირით ლექსიკონებს, რომელთა სიტყვარი დაკომპლექტებულია შემავალი ერთეულების სიხშირეთა განაწილების კანონის მიხედვით.

შემავალი ერთეულების დამატებით მახასიათებელს წარმოადგენს ე.წ. „სიტყვის" (ერთეულის) რანგი ანუ ერთეულის რიგითი ნომერი სიხშირით ლექსიკონში (ლაპარაკია რიგით ნომერზე ლექსიკონის სიხშირით სიაში). დ. ციპფის კანონი მიგვითითებს, რომ ერთეულის რანგის ნამრავლი მის ფარდობით სიხშირეზე მუდმივი სიდიდეა: $r \cdot f =$

= const. ცხადია, ციპფის კანონი იქნება ძალაში, თუ სიხშირით სიებში ერთნაირი სიხშირის მქონე შემავალ ერთეულებს ჩვენ მივანიჭებთ არა ცალკეულ რანგებს, არამედ რანგთა ინტერვალს (ეს თვალნათლივ ნაჩვენებია ჩვენს მიერ მოყვანილ შესავალის მიხედვით შედგენილ სიხშირით ლექსიკონის მაგალითზე).

სიხშირითი სიის უკანასკნელი „სიტყვის" რანგი გამოხატავს სიხშირითი ლექსიკონის მოცულობას, სიხშირით ლექსიკონში შემავალ განსხვავებული სიტყვების რაოდენობას. სიტყვის რანგის გარდა განიხილავენ ე.წ. სიხშირის რანგს, რომელიც მიგვითითებს თუ რამდენი განსხვავებული სიხშირე გვხვდება ლექსიკონში. მაგალითად, ჩვენს მიერ მოყვანილ შესავალს სიხშირით ლექსიკონში „სიტყვის" რანგი ტოლია 276-ის, ხოლო სიხშირის რანგი ტოლია 7-ის (ლექსიკონში ვხვდებით 7 ერთმანეთისაგან განსხვავებულ სიხშირეს).

ჩამოთვლილ რიცხვით მახასიათებლებთან ერთად განიხილავენ აგრეთვე ჩვენს მიერ ზემოთ აღნიშნულ დაგროვილ აბსოლუტურ და ფარდობით სიხშირეებს.

ციპფის კანონი წარმოადგენს უმთავრეს მახასიათებელს იმ კოდირების (დეკოდირების) პროცესისა, რომელიც ხორციელდება ინფორმაციის გადაცემისას გადამცემის ან აღმქმელის ტვინში. ამავე დროს ეს კანონი გვიჩვენებს, რომ ის ელემენტები, რომლებისგანაც ჩვენ ვაგებთ სიტყვებს (ასოები, მარცვლები, მორფემები და ა.შ.) არ წარმოადგენენ იდეალურ წარმომქმნელ ელემენტებს, ე.ი. არ უზრუნველყოფენ კოდირების პროცესის ოპტიმალობას. ყოველ ასეთ ელემენტს ეთანადება „სიტყვის" ინფორმაციული ფასის ერთეული. ასე რომ, სიტყვის სრული ინფორმაციული ფასი წარმოადგენს მასში შემავალი იდეალური ელემენტების რაოდენობის ნამრავლს ინფორმაციული ფასის ერთეულზე. ელემენტებად შეიძლება განვიხილოთ (როგორც გვიჩვენა გამოკვლევებმა) მარცვალთა კლასები, რომლებიც განისაზღვრებიან სიტყვის ლინგვისტური სპექტრის საშუალებით:

$$C_k = n_k \sum_y \rho_y \cdot C_y ,$$

სადაც n_k – მარცვალთა რაოდენობაა სიტყვაში, ρ_y –მარცვალთა კლასების ალბათობათა განაწილების ფუნქცია, C_y – ინფორმაციის ფასია, y -კლასის შესაბამისი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$C_y = y \cdot I_s = -y \sum_\lambda \rho_\lambda \cdot \ln \rho_\lambda ,$$

მივიღებთ

$$C_k = I_s \cdot \bar{y} \cdot n_k .$$

ამ ფორმულებში I_s – ე.წ. სტრუქტურული ინფორმაციის რაოდენობაა. ვინაიდან ციპფის განაწილება კანონიკური ხასიათისაა, ამიტომ მისი მიღება შეიძლება საშუალო ინფორმაციული ფასისა და ინფორმაციული ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის გამოყენებით:

$$P(C_k) = e^{-\lambda_0 - \lambda_1 C_k} ,$$

სადაც λ_0 და λ_1 მუდმივები განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებებიდან:

$$\langle C_k \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \sum_{\{C_k\}} e^{-\lambda_1 C_k} , \quad \lambda_0 = \ln \sum_{\{C_k\}} e^{-\lambda_1 C_k} .$$

λ_0-ის და λ_1-ის შეფასებები ასეთია:

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{I_s} \ln \frac{1 + \bar{y} \cdot \bar{n}_k}{\bar{y} \cdot \bar{n}_k} ,$$

$$\lambda_0 \cong \ln (1 + \bar{y} \cdot \bar{n}_k) .$$

როგორც ვხედავთ, ლინგვისტური სპექტრი წარმოადგენს უმნიშვნელოვანეს პარამეტრს რომელიც განსაზღვრავს „სიტყვათა“ სტატისტიკას, ამდენად, აუცილებლად მიგვაჩნია ლინგვისტური სპექტრის შესახებ ინფორმაციის შეტანა სიხშირით ლექსიკონებში

დასკვნა

არსებული სიხშირითი ლექსიკონები მკვეთრად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. სიხშირითი ლექსიკონის უმარტივეს სახეს წარმოადგენს შემავალი ერთეულების სიხშირითი ან ალფაბეტურ-სიხშირითი სია, რომელიც არ ითვალისწინებს (არ აფიქსირებს) ამ ერთეულების არავითარ თვისებებს. ყველაზე სრულყოფილია ე.წ. სემანტიკური სიხშირითი ლექსიკონი, რომელშიც დაფიქსირებულია შემავალი ერთეულების ლექსიკური მნიშვნელობები. ამ უკანასკნელი ტიპის სიხშირითი ლექსიკონების რაოდენობა, მათი სირთულის გამო, საკმაოდ მცირეა.

არსებობს რიგი მეთოდებისა, რომელთა საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია შევაფასოთ სიხშირით ლექსიკონში შემავალი ერთეულების სიხშირეების საიმედობა. ლექსიკონის ავტორი მეტ-ნაკლებად თავისუფალია შეფასების კონკრეტული მეთოდის შერჩევაში. იგი ეყრდნობა მათემატიკურ სტატისტიკაში კარგად ცნობილ და პრაქტიკით შემოწმებულ რომელიმე მათგანს, რომელიც თავის მხრივ გარკვეულ გავლენას ახდენს სიხშირითი ლექსიკონის გამოქვეყნებული სიტყვარის მოცულობაზე.

სიხშირითი ლექსიკონები შედარებით ნაკლებად არიან გამოყენებულნი ტრადიციულ (კლასიკურ) ლექსიკოგრაფიაში. აქ გამონაკლისს წარმოადგენს ის შრომები, რომლებიც ეძღვნებიან ცალკეული ავტორებისა და ცალკეული ტექსტების ენების შესწავლას.

კიდევ უფრო ნაკლები წარმატებით გამოიყენებიან სიხშირითი ლექსიკონები დარგობრივ ლექსიკოგრაფიაში. მაგრამ აქაც, ექსპერიმენტის სახით გამოჩნდნენ რაოდენობრივი სიხშირითი ლექსიკონები სიტყვარის მცირე მოცულობებით.

მიგვაჩნია, რომ ტრადიციული ლექსიკოგრაფიის მხრიდან გარკვეული „უნდობლობა“ სიხშირითი ლექსიკონების მიმართ ატარებს დროებით ხასიათს. პრაქტიკა ადასტურებს სიხშირითი ლექსიკონების

არსებობის აუცილებლობას. ლინგვისტებისა და სტატისტიკოსების ერთობლივი შრომა საწინდარია სტატისტიკური ლექსიკოგრაფიის შემდგომი განვითარების, მის დამოუკიდებელ მეცნიერებად ჩამოყალიბების.

მიღებულია 10.IV.1983

ფიზიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. П.М.Алексеев. Статистическая лексикография. Л., 1975.

2. ფიზიკური კიბერნეტიკის პრობლემური ლაბორატორიის გამოყენებითი სტატისტიკის განყოფილების და მეტყველების სტატისტიკის სექტორის 1981 წლის ანგარიში.

3. Р.Г.Пиотровский. Вопросы статистического обследования лексики. "Вопросы статистики речи". Л., 1958.

4. Р.Г.Пиотровский. Информационные измерения языка. Л., 1968.

Т.П.Цилосани

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛЕКСИКОГРАФИИ

Резюме

В статье рассмотрены основные проблемы, с которыми сталкиваются при составлении частотных словарей.

Предложена новая численная характеристика единиц частотного словаря - информационная цена "слова".

T.Tsilosani

SOME PROBLEMS OF THE THEORY AND PRACTICE OF STATISTICAL LEXICOGRAPHY

Summary

The paper discusses the basic problems encountered in compiling frequency vocabularies. A new numerical characteristic of the entries of a frequency vocabulary, i.e. the informational worth of a "word", is proposed.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

25I, 1984

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д.Г.Перадзе

В /I/ доказывается существование решения, а в /2/ приводится способ получения разностных уравнений для задачи о конечных прогибах жестко закрепленной по краям пластинки. Процесс описывается системой нелинейных уравнений, полученной А.Ф.Гюнтнером /3/ на основе теории оболочек И.Н.Векуа. В настоящей работе имеем целью, пользуясь теорией аппроксимации операторов Г.М.Вайникко /4/, установить при некотором ограничении сходимость разностной схемы.

Рассмотрим задачу (I) – (2) из /2/. Соответствующую систему уравнений представим в операторном виде

$$Au=f, \tag{I}$$

где $u=\{u_i(x_1,x_2)\}$ – вектор искомых, $f=\{f_i(x_1,x_2)\}$ – вектор заданных функций, $i=1,2,\dots,5$. Предположим, что $f_1=f_2=0$.

Нетрудно проверить, что оператор A переводит $E=\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ в $F=L_2(\Omega)$* . Достаточно учесть теоремы вложения и то,

---

* Пространство и произведение одинаковых пространств будем обозначать одним и тем же символом. Квадрат нормы элемента из произведения пространств определим как сумму квадратов норм компонентов в пространствах-сомножителях.

что компоненты $\mathcal{A}u$ представляют собой линейные комбинации чле членов

$$u_i, \ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_\ell}, \ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}, \tag{2}$$
$$u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}, \ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\right).$$

Здесь и далее $i, j = 1, 2, \ldots, 5, \ \ k, \ell = 1, 2$. Принадлежность к F, например, $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}$ есть результат следующих включений:

$$u_i, \ u_j \in E \Longrightarrow u_i \in C(\Omega), \ \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} \in L_p(\Omega), \quad \forall p < 1.$$

Покажем, что удовлетворяются требования I - III теоремы 2 и условие IУ$^{\mathrm{I}}$ из замечания I работы /4/.

I. Если $f \in F$, то уравнение (I) имеет решение $u^* = \{u_i^*\} \in F$ /I/. Оператор $\mathcal{A}$, очевидно, дифференцируем по Фреше в $\forall v = \{v_i\} \in E$, причем $\mathcal{A}'(v) : E \to F$, так как компоненты $\mathcal{A}'(v)u, \ u = \{u_i\}$ являются линейными комбинациями членов

$$u_i, \ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_\ell}, \ \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}, \ v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}, \tag{3}$$
$$u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_\ell}, \ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\right), \ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell}\right).$$

II. Пусть $E_h = \overset{\circ}{W}{}^2_{2,h}(\Omega_h), \ F_h = L_{2,h}(\Omega_h)$, где Ω_h обозначает сеточную область ω из /2/. Связывающее отображение $P_h : E \to E_h$ определим следующим образом /5/: значение i-ой компоненты $P_h u, \ \forall u = \{u_i\} \in E$, равно

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_1 h_2}\displaystyle\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} u_i(x_1+y_1,\, x_2+y_2)\,dy_1 dy_2, & x=(x_1,x_2)\in\Omega_h, \\ 0, & x=(x_1,x_2)\overline{\in}\Omega_h. \end{cases} \qquad (4)$$

Систему разностных уравнений, получаемую из сумматорного тождества статьи /2/, запишем в операторной форме

$$A_h u_h = \varphi_h . \qquad (5)$$

Оператор A_h переводит E_h в F_h. Компоненты $A_h u_h$ суть линейные комбинации членов, которые имеют вид /6/:

$$u_{ih},\ u_{i\mathring{x}_k},\ u_{i\bar{x}_k x_k},\ u_{i\mathring{x}_k\mathring{x}_\ell}\ \ k\neq\ell,\ u_{i\mathring{x}_k}u_{j\mathring{x}_\ell},$$

$$u_{ih}u_{j\mathring{x}_k}u_{j\mathring{x}_\ell},\ \left(u_{ih}u_{j\mathring{x}_\ell}\right)_{\mathring{x}_k}\ k\neq\ell,\ \left(u_{ih}u_{j\bar{x}_k}\right)_{x_k},\ \left(u_{ih}u_{jx_k}\right)_{\bar{x}_k}.$$

Отметим, что компоненты $A_h u_h$ можно получить из соответствующих компонентов Au, пользуясь заменами

$$u_i\sim u_{ih},\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\sim u_{i\mathring{x}_k},\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\sim u_{i\bar{x}_k x_k},$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_\ell}\sim u_{i\mathring{x}_k\mathring{x}_\ell}\ \ k\neq\ell,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\sim u_{i\mathring{x}_k}u_{j\mathring{x}_\ell},\ u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\sim u_{ih}u_{j\mathring{x}_k}u_{j\mathring{x}_\ell}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\sim\frac{u_{ih}^{(+1_k)}+2u_{ih}+u_{ih}^{(-1_k)}}{4}u_{j\bar{x}_k x_k}+u_{i\mathring{x}_k}u_{j\mathring{x}_\ell},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\right)\sim\frac{u_{ih}^{(+1_k)}+u_{ih}^{(-1_k)}}{2}u_{j\mathring{x}_k\mathring{x}_\ell}+$$

$$+u_{i\mathring{x}_k}\frac{u_{j\mathring{x}_\ell}^{(+1_k)}+u_{j\mathring{x}_\ell}^{(-1_k)}}{2}\qquad k\neq\ell$$

Допустим, что

$$\| P_h f - \varphi_h \|_{F_h} = O(h^2), \quad h = \max(h_1, h_2). \tag{7}$$

Оператор A_h дифференцируем по Фреше в любой точке E_h. Компоненты $A'_h(v_h)u_h$, $\forall v_h = \{v_{ih}\}$, $u_h = \{u_{ih}\} \in E_h$ образуются линейными комбинациями членов

$$u_{ih},\ u_{i\mathring{x}_k},\ u_{i\bar{x}_k x_k},\ u_{i\mathring{x}_k \mathring{x}_\ell}\ k \neq \ell,\ v_{i\mathring{x}_k} u_{j\mathring{x}_\ell},$$
$$v_{ih} v_{j\mathring{x}_k} u_{j\mathring{x}_\ell},\ u_{ih} v_{j\mathring{x}_k} v_{j\mathring{x}_\ell},\ (v_{ih} u_{j\mathring{x}_\ell})_{\mathring{x}_k}\ k \neq \ell, \tag{8}$$
$$(u_{ih} v_{j\mathring{x}_\ell})_{\mathring{x}_k}\ k \neq \ell,\ (v_{ih} u_{j\bar{x}_k})_{x_k},\ (u_{ih} v_{j\bar{x}_k})_{x_k}.$$

Отсюда заключаем, что $A'_h(v_h) : E_h \to F_h$, причем для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что

$$\| A'_h(v_h) - A'_h(w_h) \| < \varepsilon, \tag{9}$$
$$\forall v_h,\ w_h \in E_h,\ \forall h > 0, \text{ если } \| v_h - w_h \|_{E_h} < \delta_\varepsilon.$$

Учитывая (8), получаем (9) как следствие неравенств, подобных следующим:

$$\| u_{ih} v_{j\mathring{x}_k} v_{j\mathring{x}_\ell} - u_{ih} w_{j\mathring{x}_k} w_{j\mathring{x}_\ell} \|_{F_h} \leq \frac{1}{2} \Big(\| u_{ih} (v_{j\mathring{x}_k} - w_{j\mathring{x}_k})(v_{j\mathring{x}_\ell} + w_{j\mathring{x}_\ell}) \|_{F_h} +$$
$$+ \| u_{ih} (v_{j\mathring{x}_k} + w_{j\mathring{x}_k})(v_{j\mathring{x}_\ell} - w_{j\mathring{x}_\ell}) \|_{F_h} \Big) \leq c_1 \| v_{jh} - w_{jh} \|_{E_h} \| u_{ih} \|_{E_h},$$

$$\| (u_{ih} v_{j\bar{x}_k})_{x_k} - (u_{ih} w_{j\bar{x}_k})_{x_k} \|_{F_h} \leq \| u_{ix_k} (v_{j\bar{x}_k} - w_{j\bar{x}_k}) \|_{F_h} +$$
$$+ \| u_{ih} (v_{j\bar{x}_k x_k} - w_{j\bar{x}_k x_k}) \|_{F_h} + h \| u_{ix_k} (v_{j\bar{x}_k x_k} - w_{j\bar{x}_k x_k}) \|_{F_h} \leq$$
$$\leq c_2 \| v_{jh} - w_{jh} \|_{E_h} \| u_{ih} \|_{E_h}.$$

$\forall u_{ih} \in E_h$, $c_1, c_2 = const$, при выводе которых используются разностные аналоги теорем вложения, неравенство Гельдера и формула разностного дифференцирования произведения /7/.

III. При $h \to 0$

$$\|A_h P_h u^* - \varphi_h\|_{F_h} \to 0 \tag{10}$$

В самом деле, имеем

$$\|A_h P_h u^* - \varphi_h\|_{F_h} \le \|A_h P_h u^* - A_h P_h u\|_{F_h} + \|A_h P_h u - P_h A u\|_{F_h} + \tag{11}$$
$$+ \|P_h A u - P_h A u^*\|_{F_h} + \|P_h A u^* - \varphi_h\|_{F_h},$$

$\forall u \in D(\Omega)$, $D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций, которое плотно в E /8/. Обозначим m -ое слагаемое в правой части (11) через s_m.

Ясно, что $\|P_h u^* - P_h u\|_{E_h}$ произвольно мало, если u достаточно близко к u^*. Тогда в силу (9) произвольно малым будет и s_1.

Рассмотрим s_2. Одна из компонент $P_h A u$ содержит сеточную функцию

$$P_h\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_4}{\partial x_2}\right), \tag{12}$$

значение которой в точке $x = (x_1, x_2) \in \Omega_h$ равно

$$\frac{1}{h_1 h_2}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{\partial u_3(x_1+y_1, x_2+y_2)}{\partial x_1}\,\frac{\partial u_4(x_1+y_1, x_2+y_2)}{\partial x_2}\,dy_1 dy_2 .$$

В $A_h P_h u$ (12) соответствует сеточная функция со следующим значением в $x = (x_1, x_2)$

$$\frac{1}{(h_1h_2)^2}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\frac{u_3(x_1+y_1+h_1,\ x_2+y_2)-u_3(x_1+y_1-h_1,\ x_2+y_2)}{2h_1}dy_1dy_2\times$$

$$\times\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\frac{u_4(x_1+y_1,\ x_2+y_2+h_2)-u_4(x_1+y_1,\ x_2+y_2-h_2)}{2h_2}dy_1dy_2.$$

Аналогичные выражения, как следует из (2), имеют место и для других функций, входящих в $p_h Au$. Теперь очевидно, что $S_2\to 0$ при $h\to 0$.

Учитывая (2) и (4), получаем сколь угодную малость S_3 при достаточно малом $\|u-u^*\|_E$. И наконец, (7) означает, что $S_4\to 0$ при $h\to 0$. Это завершает доказательство (10).

IУ. При определенном условии нуль-пространство оператора $A'(u^*)$ содержит только нулевой элемент

$$\mathcal{N}(A'(u^*))=\{0\}. \tag{13}$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим скалярное произведение $(A'(u^*)u,u)$, $\forall u=\{u_i\}\in G=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\supset E$.

После некоторых преобразований будем иметь

$$(A'(u^*)u,u)=\iint\limits_{\Omega}\Big[\lambda\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_4\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_5\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}\Big)^2-$$

$$-\frac{\lambda}{H}\Big(u_4^*\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_5^*\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_4\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_5\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}\Big)-$$

$$-\frac{\lambda}{H}\Big(u_4\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_5\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_4^*\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_5^*\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}\Big)+$$

$$+\mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_4\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_5\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}\Big)^2-\frac{\mu}{H}\Big(u_4^*\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_5^*\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_4\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_5\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}\Big)-\frac{\mu}{H}\Big(u_4\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_5\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2^*}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_4^*\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_5^*\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{1}{H}u_4\right)^2+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{1}{H}u_5\right)^2+2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_4\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}\right)^2-\frac{2\mu}{H}u_4^*\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_4\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}\right)-\frac{2\mu}{H}u_4\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}-\frac{1}{H}u_4^*\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}\right)+$$

$$+2\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_5\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}\right)^2-\frac{2\mu}{H}u_5^*\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_5\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{2\mu}{H}u_5\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}-\frac{1}{H}u_5^*\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}\right)+\frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1}\right)^2+\frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial u_4}{\partial x_2}\right)^2+$$

$$+\frac{\lambda+\mu}{3}\left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1}+\frac{\partial u_5}{\partial x_2}\right)^2+\frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial u_5}{\partial x_1}\right)^2+\frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial u_5}{\partial x_2}\right)^2\Big]dx_1dx_2.$$

Используя неравенство Фридрихса, ε - неравенство, неравенство $\|u^*\|_E\leqslant c_3$, где, как следует из /I/, постоянная c_3 зависит от λ,μ,H и $\|f\|_F$, получим

$$(A'(u^*)u,u)\geqslant(c_4-c_5)\left(\|u_3\|_6^2+\|u_4\|_6^2+\|u_5\|_6^2\right), \tag{I4}$$

$c_4=const>0$, а величина $c_5>0$ убывает вместе с c_3.

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$c_4-c_5>0, \tag{I5}$$

которое накладывает ограничение на величины λ,μ,H и $\|f\|_F$. Тогда на основании (I4) и вида Au имеем

$$A'(u^*)u=0\Rightarrow u_m=0,\ m=3,4,5\Rightarrow(u_1,u_2)=\ell_2^{-1}(0,0),$$

$$u_1,u_2\big|_\Gamma=0\Rightarrow u_m=0,\ m=1,2,$$

где ℓ_2 - матрица-оператор плоской теории упругости. Таким образом, (I3) выполняется и поэтому $R(A'(u^*))=F$.

Нетрудно видеть, что потребовав выполнения условия, аналогичного (I5), которое также ограничивает c_3, будем иметь эллиптичность оператора $A'(u^*)$.

Далее, $A'_h(P_h u^*) \to A'(u^*)$ устойчиво при $h \to 0$. Действительно, принимая во внимание (3) и (8), как и для второго слагаемого из (II), получаем

$$\|A'_h(P_h u^*)P_h u - P_h A'(u^*)u\|_{F_h} \to 0, \quad \forall u \in E.$$

Осталось показать, что при достаточно малых h существуют обратные операторы $A'_h(P_h u^*): E_h \to F_h$, причем

$$\|(A'_h(P_h u^*))^{-1}\| \le c_6 = const. \tag{I6}$$

Обозначим $v_h = P_h u, \quad \forall u \in E, \quad v^*_h = P_h u^*$. Учитывая (6) и обобщая результаты /9/, приходим к неравенству

$$\|A'_h(v^*_h)v_h\|^2_{F_h} \ge c_7\|v_h\|^2_{E_h} - c_8\|v_h\|^2_{F_h}, \tag{I7}$$

где c_7 и c_8 положительны и не зависят ни от v_h, ни от h.

Справедливо равенство $A'_h(v^*_h) = A_{1h}(v^*_h) + A_{2h}(v^*_h)$, где $A_{1h}(v^*_h)$ - не зависящий от v^*_h эллиптический положительно определенный и симметричный оператор, в результате чего $\|A_{1h}(v^*_h)v_h\|_{F_h} \ge c_9\|v_h\|_{F_h}$, $c_9 > 0$.

Что касается $A_{2h}(v^*_h)$, то норма этого оператора убывает вместе с $\|v^*_h\|_{E_h}$. Отсюда видно, что при достаточной малости $\|u^*\|_E$ имеет место неравенство

$$\|A'_h(v^*_h)v_h\|_{F_h} \ge c_{10}\|v_h\|_{F_h}, \quad c_{10} > 0. \tag{I8}$$

На основании (I7) и (I8) получим /9/

$$\| A'_h (v_h^*) v_h \|_{F_h} \geq c_{11} \| v_h \|_{E_h}, \quad c_{11} > 0.$$

Итак, (I6) верно.

Из доказанного следует /4/, что при указанных оганичениях и при достаточно малом h уравнении (5) имеет решение u_h^*, причем

$$c_{12} \| \varepsilon_h \|_{F_h} \leq \| u_h^* - P_h u^* \|_{E_h} \leq c_{13} \| \varepsilon_h \|_{F_h},$$

$$\varepsilon_h = A_h P_h u^* - \varphi_h, \quad c_{12}, c_{13} = const > 0.$$

Но, как можно показать, $\| \varepsilon_h \|_{F_h} = O(h^2)$. Следовательно, разностная схема сходится со скоростью $O(h^2)$ и эта оценка не может быть улучшена.

Поступила I5/IУ.1983

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

I. Д.Г.Перадзе. О существовании решения для одной задачи нелинейной теории пластинок. Труды Тбилисского университета. Кибернетика. Прикладная математика, 236(4), 1983.

2. Д.Г.Перадзе. Итерационный процесс для одной задачи неклассической теории пластинок. Настоящий сборник.

3. А.Ф.Гюнтнер. Об одном свойстве уравнений теории оболочек И.Н.Векуа. Семинар Института прикладной математики Тбилисского государственного университета. Доклады, II-I9, I2-I3, I978.

4. G.Vainikko. Approximative methods for nonlinear equations (Two approaches to the convergence problem). Nonlinear Analysis, Theory,

Methods and Applications, Vol. 2, No. 6, 647-687, 1978.

5. G.Vainikko, Foundations of finite difference method for eigenvalue problems. Proceedings of Summer School on The Use of Finite Element Method and Finite Difference NMethod in Geophysics, 173-192, Praha, 1978.

6. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем, "Наука", М., 1971.

7. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений, "Наука", М., 1978.

8. Ж.-Л.Лионс, Э.Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения, "Мир", М., 1971.

9. П.Е.Соболевский, М.Ф.Тиунчик. О разностном методе приближенного решения эллиптических уравнений. Тр. матем. фак. Воронежск.ун-та, вып.4, Воронеж, 117-127, 1971.

ჯ. ფერაძე

არაწრფივი ოპერატორების აპროქსიმაციის თეორიის ერთი გამოყენების შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

ოპერატორების აპროქსიმაციის გ. ვაინიკოს აბსტრაქტული თეორიის მეშვეობით მტკიცდება სხვაობანი სქემის კრებადობა ფირფიტების რაკლასიკური თეორიის ერთი ამოცანისათვის.

D.Peradze

AN APPLICATION OF THE APPROXIMATION THEORY OF NONLINEAR OPERATORS

Summary

The convergence of a difference scheme is proved for one problem of the non-classical theory of plates by means of G.Vainikko's abstract theory of approximation of operators.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
251, 1984

К ЗАДАЧЕ ИСПРАВЛЕНИЯ ОШИБОК В СИСТЕМАХ ОБЩЕНИЯ С ЭВМ НА ЕСТЕСТВЕННОМ ЯЗЫКЕ

Р.П.Мегрелишвили, З.И.Мунджишвили, В.А.Тогонидзе

I. Введение

При разработке систем управления и решении ряда научно-технических задач все большую актуальность приобретают вопросы управления человеком современными вычислительными машинами, а также устройствами специализированного типа. В этой связи наиболее важным становится такое усовершенствование вычислительных и технических средств, которое допускает все большее и естественное привлечение человека к процессу управления.

В работе /I/ рассмотрен алгоритм построения диалоговой системы "человек-машина", в которой управление ЭВМ осуществляется с помощью некоторого множества обычных слов. Эти слова предварительно печатаются на пишущей машинке и затем, согласно алгоритму, вводятся в ЭВМ. Очевидно, что в процессе печатания слов возможны ошибки, в результате которых в ЭВМ наряду со смысловыми вводятся и искаженные слова. Поэтому в данной системе, помимо организации обработки смысловых слов, немаловажное значение приобретает исправление ошибочных. Однако последняя задача усложняется ввиду того, что процессы управления должны осуществляться в реальном масштабе времени.

Следует указать на наличие работ, в которых хоть и затрагиваются, но ёще не находят эффективного решения вопросы исправления ошибок /2/.

Как известно, использование результатов теории кодирования в указанной системе в обычном понимании невозможно, точнее, системы исправления ошибок, исследуемые теорией кодирования, отличаются прежде всего самой постановкой задачи. В этих системах принято вводить избыточность как средство, с помощью которого информационные слова оснащаются корректирующей способностью, в то время как в системах "человек-машина" изменение смысловых слов не допустимо (нежелательна, например, переделка существующих пишущих машинок и т.п.). Поэтому необходимо исследовать методы, с помощью которых исправление ошибок станет возможным после искажения непосредственно смысловых слов, а не слов, предварительно подверженных некоторым изменениям. Другими словами, алгоритм исправления должен учитываться в структуре основного алгоритма организации и функционирования, не касаясь самого синтеза смысловых слов.

В настоящей работе рассматривается алгоритм исправления ошибок в системе "человек-машина", отличный от алгоритма, данного в работе /I/.

I. <u>Построение матрицы H</u>

Пусть $\mathcal{A}$ означает множество всех букв алфавита, а $\mathcal{M}_l$ $(l=1,\dots,k_0)$ – словарь, т.е. заданное множество слов, составленных из букв алфавита A, причем в словаре M_ℓ содержатся слова только из ℓ-буквенных сочетаний. Тогда исследуемый словарь слов содержит в целом

$$M = M_1 \cup \cdots \cup M_{K_0} \qquad (1)$$

множество слов, где K_0 - максимальная длина слова, т.е. максимально возможное число букв в слове.

Запишем каждую букву в виде двоичного восьмиразрядного вектора (байта). Пусть $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{m-1})$ - двоичная запись байта, и пусть $\beta(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i x^i$ - эквивалентная запись его в виде многочлена. Обозначим, далее $\beta^{(i)}(x) = \beta(x) x^{im}$, где $i = 0, 1, \ldots, K_0 - 1$, $\beta(x) = \beta^{(0)}(x)$. Тогда любая буква алфавита на i-той позиции ℓ-буквенного слова запишется в виде $\beta^{(i)} \in V_n$, где $n = m\ell$, $m = 8$ - число двоичных знаков в байте, а V_n - n-мерное векторное пространство над полем Галуа $GF(2)$. Обозначим через $\alpha = (\beta_1^{(0)} \beta_2^{(1)} \ldots \beta_\ell^{(\ell-1)}) \times (\beta_i \in A)$ ℓ- буквенное слово. Тогда, очевидно, что $\alpha \in V_n$. Предположим, что $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \ldots, \alpha_{c,0} \in M_\ell$ - смысловые слова, а $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,t}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{2,t}, \ldots \alpha_{c,t} \in M_{\ell,t}$ - множество всех искаженных слов. Предположим также, что $\alpha_{i,j} \in V_n$ $(i = 1, \ldots, c;\ j = 0, 1, \ldots, t)$ и

$$M(\ell, t) = M_\ell \cup M_{\ell,t} \qquad (2)$$

Ниже рассматривается четыре типа искажений слов: искажения в одной букве, двух соседних букв, искажения типа вставок и выпадений.

Для составления множества $M_{\ell,t}$ необходимо иметь в памяти ЭВМ множество всех букв алфавита A, записанных в двоичном виде. Такая запись в ЭВМ имеется (например, для машин ЕС - 1033 букве "А" соответствует двоичная запись 11000001).

Под искаженным в одной букве словом понимается слово, в котором одна фиксированная буква $x \in A$ заменена некоторой другой буквой алфавита $y \in A$ $(x \neq y)$. Поскольку в русском алфавите A 33 буквы, то искажение одной фиксированной буквы данного слова повлечет за собой искажение 32 слов, а всего искаженных слов

$$N_{\text{буквы}} = 32 \cdot l N(M_l), \tag{3}$$

где $N(M_l)$ - число слов в словаре M_l.

Под искажением двух соседних букв x и $y \in A$, состоящих на соседних позициях слова, понимается изменение сочетания букв xy на сочетание yx. Поскольку в слове из l букв возможно всего $l-1$ изменение сочетания соседних букв, то всего искаженных слов

$$N_{\text{сосед.букв.}} = (l-1) N(M_l). \tag{4}$$

Под искажением типа вставок понимается появление в рассматриваемом слове новой, дополнительной (но принадлежащей алфавиту A) буквы. Эта буква может добавиться в начале или конце слова, а также образовать дополнительную позицию внутри слова. Во всех этих случаях размерность слова увеличивается на единицу. В результате искажений l - буквенного слова (одной дополнительной буквой) получаем $l+1$ искаженное слово.

<u>Пример 1</u>. Пусть четырехбуквенное слов "поле" искажается

вставкой, образовавшейся буквой "а". Тогда получим пять искаженных слов

"поле"
"паоле"
"поале"
"полае"
"полеа" (5)

Под выпадением понимается такое стирание одной буквы слова, когда не ясно, на какой именно позиции оно происходит. В результате такого стирания размерность слова уменьшается на единицу.

Пример 2. Пусть в слове "поле" последовательно стирается по одной букве, тогда получаем четыре искаженных слова:

"оле"
"пле"
"пое"
"пол" (6)

Полное число искаженных слов словаря $\mathcal{M}_\ell$ при искажениях данного типа составит

$$N_{\text{вып.}} = \ell N(\mathcal{M}_\ell). \tag{7}$$

Таким образом, для словаря $\mathcal{M}_\ell$ число искаженных слов составит

$$N_{\text{иск.}} = N_{\text{буквы}} + N_{\text{сосед.букв}} + N_{\text{вставок}} + N_{\text{вып.}}, \tag{8}$$

а общее число слов, используемых для построения матрицы H

$$N = N_{\text{иск.}} + N(\mathcal{M}_\ell). \tag{9}$$

Основной целью синтеза является построение проверочной матрицы H /3/, некоторого линейного (n,k) - кода, устойчивого к ошибкам типа слов $\mathcal{M}_{\ell,t}$. Общая задача такого синтеза впервые была рассмотрена в /4/, а для системы "человек-машина" применена в /I/.

В работе /I/ для построения матрицы H используется полное множество слов $\mathcal{M}(\ell,t)$, т.е. любое $\alpha \in \mathcal{M}(\ell,t)$ является лидером некоторого смежного класса в факторгруппе V_n/V, где V – нулевое пространство пространства строк матрицы H. С ростом ℓ быстро растет число $N(\mathcal{M}(\ell,t))$. Например, при значении $\ell=4$ и $N(\mathcal{M}_\ell)=100$, $N(\mathcal{M}(\ell,t))\approx$ $\approx 30\cdot 10^3$. Поэтому алгоритм синтеза H /I/ получается громоздким и трудно реализуемым на ЭВМ. Кроме того, трудности возникают в связи с тем, что некоторые слова $\alpha \in \mathcal{M}_{\ell,t}$ могут быть получены искажением различных смысловых слов $\mathcal{M}_\ell$.

Ниже рассматривается алгоритм исправления ошибок, для которого матрица H строится с помощью множества

$$\mathcal{M}(\ell)=\mathcal{M}_\ell \cup E_\ell , \qquad (10)$$

где E_ℓ – множество векторов ошибок. Множество E_ℓ есть множество всевозможных искажающих векторов размерности n которые вызывают искажения в одной букве ℓ – разрядного слова. Например, для упомянутой машины ЕС – 1033 искажение буквы "A"$=11000001$ вектором $e=01111011$ вызывает переход "A" в букву "$Б$"$=10111010$, т.е. $A+e=Б$. Множество E_ℓ постоянно (не зависит от слов словаря $\mathcal{M}_\ell$) и зависит только от значения ℓ . Так как один байт может дать максимум 256 различных двоичных комбинаций, то

$$N(E_\ell)\leq 256\cdot \ell . \qquad (11)$$

Для любых i и j $(i\neq j)$ правило образования E_i и E_j одинаково и $E_i \cap E_j = 0$,что облегчает синтез H.

3. Этап организации.

Пусть ранг матрицы H равен $r = n-k$. Тогда каждому слову $\alpha_{i,j} \in M(\ell)$ (10) можно ставить в изоморфное соответствие синдром s размерности r /3/

$$s = \alpha_{i,j} H^T, \tag{12}$$

где H^T – транспонированная матрица H.

Предположим, теперь, что в ЭВМ выделено 2^r блоков памяти для записи парных слов. Эту запись назовем расстановкой слов. Расстановку слов осуществим следующим образом. Для каждого из слов $\alpha_{i,0} \in M_\ell$ $(i=1,\dots,c)$ находим синдром (12), который является адресом данного блока, и в каждый блок памяти записываем соответствующую пару слов – $\alpha_{i,0}, \alpha_{i,0}$. Для расстановки слов $\alpha_{i,j} \in M_{\ell t}$ берем слово $\alpha_{1,0}$ и по условию (12) находим синдромы для каждого искаженного слова $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,t}$. Затем в блок памяти, соответствующий синдрому слова $\alpha_{1,j}$ $(j=1,\dots,t)$ записываем пару, состоящую из искаженного и истинного слов – $\alpha_{1,j}, \alpha_{1,0}$. Аналогично поступаем со вторым словом $\alpha_{2,0} \in M_\ell$, проведя образование искаженных слов и расстановку пар слов $\alpha_{2,1}, \alpha_{2,0}, \dots, \alpha_{2,t}, \alpha_{2,0}$, и так далее со всеми остальными словами словаря. Может оказаться, что для различных слов $\alpha_{i,\eta}, \alpha_{j,\xi} \in M(\ell,t)$

$$\alpha_{i,\eta} H^T = \alpha_{j,\xi} H^T,$$

тогда различные пары слов $\alpha_{i,\eta} \alpha_{i,0}$ и $\alpha_{j,\xi} \alpha_{j,0}$ окажутся последовательно записанными в один и тот же блок памяти. Можно также ожидать, что различные искажения различных слов приведут к одинаковым результатам, т.е. к одним и тем же искаженным словам. В этом случае можно установить приоритет для одних слов или рассмотреть вероятностный подход к подобным случаям, зная, однако статистику искажений. Возможен случай, когда некоторое искажение слова переводит это слово в слово словаря $\mathcal{M}$. В последнем случае проще всего допустить, что такое искажение данного слова не должно рассматриваться.

4. Функционирование алгоритма.

Предположим, что необходимо распознать слово $\alpha \in \mathcal{M}(\ell,t)$. В начале функционирования алгоритма находим синдром S (12) и соответствующий блок памяти. Далее в данном блоке памяти находим пару слов $\alpha_{i,n}, \alpha_{i,0}$, для которой $\alpha = \alpha_{i,n}$. Следовательно, истинным словом является $\alpha_{i,0} \in \mathcal{M}(\ell)$. Если в данном блоке памяти для всех $\alpha_{i,j}, \alpha_{i,0}$ пар слов $\alpha \neq \alpha_{i,j}$, то надо признать, что $\alpha \in \mathcal{M}(\ell,t)$. Следовательно, или слово α получено от слова словаря $\mathcal{M}_\ell$, но не рассмотренным нами искажением, или $\alpha \notin \mathcal{M}_\ell$ есть новое смысловое слово, которое должно быть соответствующим образом учтено в блоках памяти, как это было рассмотрено в разделе 3.

Выше были изложены основные вопросы синтеза и функционирования алгоритма. При его реализации несомненно возникают задачи, которые должны быть решены в зависимости от мощности и характера множества $\mathcal{M}_\ell$. Например, при достаточно большом значении $N(\mathcal{M}_\ell)$ может возникнуть необходимость побуквенного разделения словаря $\mathcal{M}_\ell$, с тем чтобы облегчить процесс синтеза H, а также исключить возможность переполнения блоков памяти в процессе выполнения этапа организации.

Все вышерассмотренные искажения можно называть систематическими искажениями, так как они одинаково описываются для всех слов словаря M. Но могут быть искажения, характерные для отдельных слов или для некоторого множества слов. Такие искажения по той или иной причине часто встречаются на практике и могут быть учтены рассматриваемым алгоритмом так же, как и искажения систематического характера.

Поступила 22.X.1983

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г.Ананиашвили, З.И.Мунджишвили. К вопросу надежности информационно-вычислительных сетей. Сообщения АН ГССР, 102, 1984.

2. R.Burton, J.Brown. Semantik grammar: a technique for constructing natural language interfaces to instructional systems, BBN Report, No. 3587, May, 1977.

3. У.Питерсон, Э.Уэлдон. Коды, исправляющие ошибки, М., 1976.

4. Р.Р.Варшамов. Математические методы повышения надежности реальных систем связи. Изв. АН ГССР. Техническая кибернетика, № 4, 1964.

რ. მეგრელიშვილი, ზ. მუნჯიშვილი, ბ. ტოგონიძე

ეგმ-თან ბუნებრივ ენაზე ურთიერთობის სისტემებში შეცდომების გასწორების ამოცანისათვის

რეზიუმე

განხილულია მართვის პროცესებში უნივერსალურ გამომთვლელ მანქანასთან ბუნებრივ ენაზე ურთიერთობის ამოცანა. მანქანის მართვა წარმოებს სიტყვათა გარკვეული სიმრავლის საშუალებით. მიღებულია მანქანაში შესატან სიტყვებში არსებული შეცდომების გასწორების ალგორითმი.

R.Megrelishvili, Z.Munjishvili, B.Togonidze

CONCERNING THE CORRECTION OF ERRORS IN SYSTEMS OF COMMUNICATION WITH A DIGITAL COMPUTER IN A NATURAL LANGUAGE

Summary

The problem of communication in natural language with universal computers in control processes is considered. The computer is controlled by a definite set of words. An algorithm has been obtained for correcting the errors in the input words.

От редколлегии: в "Трудах" ТГУ, т.207, 1979 г., серия кибернетики и прикладной математики, на стр. 48 в строке 7 сверху следует читать: Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе, В.Д.Меладзе.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

შ ი ნ ა ა რ ს ი

CONTENTS

Редактор издательства Л.И.АБУАШВИЛИ

Подписано в печать 5.II.84

УЭ 04172 Бумага 60 х 84

Усл.печ.л. I5 Уч.-изд.л. 9,29 Тираж 300

Заказ 1443 Цена 90 к.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, I4.
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, I.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.