

290
2001



ივ. ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შრომები

ISSN 1512-1402

PROCEEDINGS

of Javakhishvili
TBILISI STATE UNIVERSITY

გამოყენებითი მათემატიკა • კომპიუტერული მეცნიერებანი
Applied Mathematics • Computer Sciences

ტომი
Volume **343** (21)



თბილისი Tbilisi

2001



ივ. ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
შრომები

PROCEEDINGS
OF JAVAKHISHVILI TBILISI STATE UNIVERSITY

94

ტომი
Volume **343** (21)

გამოყენებითი მათემატიკა
Applied Mathematics

- კომპიუტერული
- მეცნიერებანი
- Computer Sciences**



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Tbilisi University Press
თბილისი Tbilisi
2001



PROCEEDINGS

of Javakhishvili
TBILISI STATE UNIVERSITY

EDITOR-IN-CHIEF

Vashakmadze Tamaz, Prof.
Javakhishvili Tbilisi State University,
Vekua Institute of Applied Mathematics
University St. #2
380043, Tbilisi, Georgia
E-mail: vasha@viam.hepi.edu.ge

EDITORS

Babuska Ivo, Prof.
University of Texas, USA

Jikia Nugzar, Assist. Prof.
Tbilisi State University

Belotserkovski Oleg M., Acad.
ICAD, Russia

Kharatishvili Guram L., Acad.
Tbilisi State University

Chavchanidze Vladimir V., Acad.
Tbilisi State University

Kordzadze Revaz A., Prof.
Tbilisi State University

Ciarlet Philippe, Acad.
Piere et Marie Curie University, France

Megrelishvili Richard, Prof.
Tbilisi State University

Criado Torralba Francisco, Prof.
University of Malaga, Spain

Meladze Hamlet V., Prof.
Tbilisi State University

Gachechiladze Tamaz, Assits.Prof.
Tbilisi State University

Naranjo Michael, prof
Blez Pascal University,
France

Gamkrelidze Tamaz V., Acad.
Tbilisi State University

Tsertsvadze Guram, Prof.
Tbilisi State University

Gilbert Robert P., Prof.
University of Delaware, USA

Vakhania Nikoloz N.
Corr. Mem. Georgia Science Academy,
Tbilisi State University

Jibuti Mouris S. I, Assist. Prof.
Tbilisi State University

SECRETARIES

Gordeziani Ekaterine D.
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University
University St. #2
380045, Tbilisi, Georgia
E-mail: egord@viam.hepi.edu.ge

Sikharulidze Anna D.
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University
University St. #2
380045, Tbilisi, Georgia



ივ. ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შრომები

მთავარი რედაქტორი

პროფ. თამაზ ვაშაყმაძე,
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ი. ვაკუას სახ. გამოყრდობითი მათემატიკის ინსტიტუტი,
უნივერსიტეტის ქ. №2, 380043, თბილისი, საქართველო
ელ. ფოსტა: vasha@viam.hepi.edu.ge

სარედაქციო კოლეგია

პროფ. ივო ბაბუშკა,
ტექსასის უნივერსიტეტი, აშშ

პროფ. რიჩარდ მეგრელიშვილი,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
(მთ. რედ. მოადგ.)

აკად. ოლეგ ბელოცერკოვსკი,
აუტ. პროექტ. ინსტიტუტი, რუსეთი

პროფ. ჰამლეტ მელაძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

აკად. თამაზ გამყრელიძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

პროფ. მიშელ ნარანტო,
ბლუზ პასკალის უნივერსიტეტი, საფრანგეთი

დოც. თამაზ გაჩეჩილაძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

აკად. ფილიპ სიარლე,
პიერ და მარი კურის უნივერსიტეტი,
საფრანგეთი

პროფ. რობერტ გილბერტი,
დელავერის უნივერსიტეტი, აშშ

პროფ. გურამ ცერცვაძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საქ. მეცნ. აკადემიის წ/კორ.
ნიკოლოზ ვახანიძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

აკად. ვლადიმერ ჭავჭავაძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

პროფ. რევაზ კორძაძე,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

აკად. გურამ ხარატიშვილი,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

პროფ. ფრანცისკო
ტორალბა კრიალო,
მალაგის უნივერსიტეტი, ესპანეთი

დოც. მორის ჯიბუტი,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დოც. ნუგზარ ჯიქია,
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მდივნები

ეკატერინე გორდუხიანი
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი, უნივერსიტეტის ქ. №2
380045, თბილისი, საქართველო
ელ. ფოსტა: egord@viam.hepi.edu.ge

ანა სიხარულიძე
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი, უნივერსიტეტის ქ. №2
380045, თბილისი, საქართველო

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2001



ПОКОМПОНЕНТНОЕ СМЕШАННОЕ РАСШИРЕНИЕ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ ИГР

Г. Белтадзе*), Д. Гиоргобиаши**)

*) Кафедра математического обеспечения компьютеров и информационных технологий

**) Институт вычислительной математики АН Грузии

Абстракт. Для лексикографической матричной игры $\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^m)$ глубины m рассматриваются такие смешанные стратегии игроков, в которых каждой компоненте игры Γ^k , ($k = 1, \dots, m$) соответствуют свои вероятностные распределения на множестве чистых стратегий игроков. Кроме того, на множество m -мерных вероятностных распределений задан лексикографический порядок. Получено необходимое и достаточное условие того, чтобы ситуация в таких стратегиях была равновесной.

Рассмотрим лексикографическую $p \times q$ матричную игру $\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^m)$ глубины m с матрицей выигрышей [1,2]

$$H = \{(a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^m)\} \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, q \quad (1)$$

Обычными смешанными стратегиями игроков 1 и 2 в игре Γ являются векторы $X = (x_1, \dots, x_p)$ и $Y = (y_1, \dots, y_q)$ соответственно, компоненты которых удовлетворяют условиям:

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^p x_i = 1; \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^q y_j = 1.$$

Выигрыш игрока 1 в ситуации (X, Y) будет математическое ожидание

$$H(X, Y) = XHY^T = \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij}^1 x_i y_j, \dots, \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij}^m x_i y_j \right).$$

Ситуация (X^*, Y^*) является ситуацией равновесия (или седловой точкой) в игре Γ , когда

$$XHY^{*T} \leq X^*NY^{*T} \leq X^*HY^T, \quad \forall X, Y.$$

Множество всех ситуаций равновесия обозначим через $S(\Gamma)$.

Как отмечается в упомянутых работах, ситуация равновесия в некоторых играх может и не существовать. В этих работах исследуются условия существования ситуаций равновесия.

22313

საბჭოთაო
0 6 0 3 6 3 2 0
საბჭოთაო



В данной работе мы введем понятие новых смешанных стратегий игроков, являющихся m -мерными вероятностными распределениями на компонентах Γ^k . Эти распределения сконструированы так, что покомпонентные суммы образуют убывающую последовательность. Для предложенной конструкции оказалось удобным использование методологии нестандартного анализа.

Для наших целей нам необходимо ввести операцию лексикографического произведения векторов, которую обозначим через \odot .

Пусть заданы m -мерные векторы $a = (a^0, a^1, \dots, a^{m-1})$ и $b = (b^0, b^1, \dots, b^{m-1})$.

Положим

$$\begin{aligned} a \odot b &= (a^0 b^0, a^0 b^1 + a^1 b^0, a^0 b^2 + a^1 b^1 + a^2 b^0, \dots, a^0 b^{m-1} + \dots + a^{m-1} b^0) = \\ &= (a^0 b^0, \sum_{k=0}^1 a^k b^{1-k}, \sum_{k=0}^2 a^k b^{2-k}, \dots, \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}). \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что компонентами m -мерного вектора $a \odot b$ являются коэффициенты произведения многочленов одной переменной степени m

$$a(t) = a^0 + a^1 t + \dots + a^m t^m \text{ и } b(t) = b^0 + b^1 t + \dots + b^m t^m,$$

с той лишь разницей, что при их умножении сохраняется многочлен степени m . т.е. лексикографическое умножение векторов можно моделировать как усеченное умножение таких многочленов.

В следующей лемме устанавливаются некоторые существенные для дальнейшего свойства лексикографического произведения.

ЛЕММА 1. *Операция лексикографического умножения векторов обладает свойствами:*

коммутативности – $a \odot b = b \odot a$,

ассоциативности – $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$,

дистрибутивности по сложению – $(a+b) \odot c = a \odot c + b \odot c$,

“автомонотонности” в двух вариантах:

a. Нестрогая автомонотонность. Если

$$\alpha = (\alpha^0, \dots, \alpha^{m-1}) \in \mathfrak{R}_+^m \text{ и } (a^0, \dots, a^{m-1}) \underset{L}{<} (b^0, \dots, b^{m-1}) \quad (a \underset{L}{<} b),$$

то $a \odot \alpha \underset{L}{<} b \odot \alpha$.

б. *Строгая монотонность.* Пусть $\alpha = (\alpha^0, \dots, \alpha^{m-1}) \in \mathfrak{R}_+^m$ и

$$(\alpha^0, \dots, \alpha^{m-1}) \stackrel{L}{>} (0, \dots, 0).$$

Если $a \stackrel{L}{<} b$ и $a^0 \neq 0$, то $a \odot \alpha \stackrel{L}{<} b \odot \alpha$.

Представим игру Γ с матрицей выигрышей (1) в следующем виде:

$$\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, \dots, \Gamma^{m-1}), \quad H = \{a_{ij}^0, a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^{m-1}\} \quad i = \overline{1, p}; \quad j = \overline{1, q}, \quad (3)$$

и положим $H = (\{H^0(i, j)\}, \dots, \{H^{m-1}(i, j)\})$

В качестве вероятностей выбора чистых стратегий игроков 1 и 2 соответственно введем

$$X(i) = (x^0(i), \dots, x^{m-1}(i)) \in \mathfrak{R}_+^m, \quad i = \overline{1, p}; \quad Y(j) = (y^0(j), \dots, y^{m-1}(j)) \in \mathfrak{R}_+^m, \quad j = \overline{1, q},$$

причем $\sum_{i=1}^p X(i) = (1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{m-1})$, $\sum_{j=1}^q Y(j) = (1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{m-1})$, где ε бесконечно малое

гипердействительное число [3] и стандартная часть суммы $1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{m-1} = \frac{1 - \varepsilon^m}{1 - \varepsilon}$

равна единице.

Смешанные стратегии игроков на множестве их чистых стратегий $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ можем представить в виде:

$$X = \{X^0(i), \dots, X^{m-1}(i)\} \quad \sum_{i=1}^p X^0(i) = 1, \quad \sum_{i=1}^p X^k(i) = \varepsilon^k, \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$Y = \{Y^0(j), \dots, Y^{m-1}(j)\} \quad \sum_{j=1}^q Y^0(j) = 1, \quad \sum_{j=1}^q Y^k(j) = \varepsilon^k, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

X и Y будем называть m -мерными векторно-смешанными стратегиями игроков в лексикографической матричной игре Γ .

В ситуации (X, Y) выигрыш первого игрока с помощью определения (2) с учетом (3) равен:

$$H(X, Y) = X \square H \square Y = (X^0 H^0 Y^0, \quad \sum_{i=1}^p X^{\alpha_1} H^{\alpha_2} Y^{\alpha_3}, \dots, \sum_{i=1}^p X^{\alpha_1} H^{\alpha_2} Y^{\alpha_3}),$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что ситуация (\dot{X}, \dot{Y}) является ситуацией равновесия (седловой точкой) в игре Γ с матрицей H , если при любых X и Y

$$X^T H \dot{Y} \leq \dot{X}^T H \dot{Y} \leq \dot{X}^T H Y \quad (4)$$

В случае выполнения (4) мы будем писать $(\dot{X}, \dot{Y}) \in G(\Gamma)$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы было $(\dot{X}, \dot{Y}) \in G(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $i=1, \dots, p$ и $j=1, \dots, q$ выполнялись неравенства

$$H_i \odot \dot{Y} \leq \dot{X} \odot H \odot \dot{Y} \leq \dot{X} \odot H_j \quad (5)$$

Полезность введенного векторно-смешанного расширения лексикографических игр наглядно видно из анализа игры $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1)$ с матрицей выигрыша

$$H = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) \\ (2,0) & (0,1) \end{pmatrix}$$

в которой $S(\Gamma) = \emptyset$.

Введем следующие векторно-смешанные стратегии

$$X = \begin{pmatrix} (\alpha, \beta) \\ (1-\alpha, \varepsilon-\beta) \end{pmatrix} \quad Y = ((\gamma, \delta), (1-\gamma, \varepsilon-\delta))$$

Так как в игре Γ^0 оптимальными стратегиями являются $\dot{X}^0 = (\alpha^*, 1-\alpha^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и

$\dot{Y}^0 = (\gamma^*, 1-\gamma^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, поэтому здесь условия (5) имеют вид:

$$\left. \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon^* - \delta^*) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta^*) \end{pmatrix} \right\} \leq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^* \right) \leq \left. \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\varepsilon^* - 2\beta^*) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta^*) \end{pmatrix} \right\}$$

Эти неравенства выполняются при $\delta^* = 0, \beta^* = \frac{1}{2}, \varepsilon^* = \frac{1}{2}$. Итак, $G(\Gamma) \neq \emptyset$ и $(\dot{X}, \dot{Y}) \in G(\Gamma)$,

где

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, 0) \end{pmatrix}, \dot{Y} = ((\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})), \text{ а } H(\dot{X}, \dot{Y}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$



Итак, предложенная конструкция, которая учитывает лексикографическую важность критериев, является обобщением известного смешанного расширения игры. Ясно, что если $S(\Gamma) \neq \emptyset$, то и $G(\Gamma) \neq \emptyset$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Н. Белладзе, Д.А. Гиоргобани. *О матричных играх с векторными компонентами. Математическая и техническая кибернетика*. Т. 16:2, Мешниереба, 1976 г. с. 10-14.
2. Г. Н. Белладзе. *О редукции решения лексикографической матричной игры к решению ее квадратной подигры. Сообщения АН ГССР*, 104, №1, с. 29-32.
3. М. Девис. *Прикладной квадратный анализ*. Москва, Мир, 1980.

ლექსიკოგრაფიული მატრიცული თამაშების კომპონენტობრივი შერეული გაშვართობა.

გ. ბელთაძე^{*)}, ჯ. გიორგობიანი^{**)}

^{*)} კომპიუტერების მათ. უზრუნველყოფისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების კათედრა

^{**)} ნ. მუსხელიშვილის სახ. გამოთვლილი მათემატიკის ინსტიტუტი

ლექსიკოგრაფიული მატრიცული თამაშისათვის $\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^m)$ განიხილება მოთამაშეთა ისეთი შერეული სტრატეგიები, რომლებშიც თამაშის ყოველ Γ^k ($k = \overline{1, m}$) კომპონენტს შეესაბამება თავისი ალბათური განაწილება მოთამაშეთა წმინდა სტრატეგიების სიმრავლეზე გარდა ამისა, m - განზომილებიან ალბათურ განაწილებათა სიმრავლეზე განსაზღვრულია ლექსიკოგრაფიული რიგი. მიღებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ სიტუაცია ასეთ სტრატეგიებში წარმოადგენდეს წონასწორულს.

COMPONENT WISE MIXED EXTENSION OF THE LEXICOGRAPHIC MATRIX GAMES

G. Beltadze^{*)}, J. Giorgobiani^{**)}

^{*)} Computer Software and Informational Technologies chair

^{**)} Institute of Computational Mathematics

For a lexicographic matrix game $\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^m)$ of depth m , there are considered mixed strategies of players such that to each component Γ^k , $k = 1, \dots, m$ of the game there correspond their own probability distributions on the set of pure strategies of the payers. Besides, on the set of m - dimensional probability distributions the lexicographical order is given. It is given also a necessary and sufficient condition for the situation in such strategies to be equilibrium.

STATISTICAL – POSSIBILISTIC MODEL OF WORD FORMATION PROCESS IN SPANISH LANGUAGE

D. Giorgadze, N. Jorjiashvili
Chair of the Random Processes Theory

Abstract. Language structures are not given in direct observations. Structural elements and their connections may be established only analyzing the nature of uncertainty that is characteristic for them.

Linguistical– statistical distributions of language structures contain data about important regularities controlling informational and psycho – physiological processes, which accompany the generation of verbal language or printed text. The quantitative models of these processes are based one the assumption about the superposition of two kind of uncertainty: probabilistic and possibilistic.

In the presented paper one of the possible variant of the statistical – possibilistic model of word formation process in Spanish language is considered.

Language structures are not done in direct observations. Structural elements and their connections may be established only analyzing the nature of uncertainty that is characteristic for them.

Linguistica l– statistical distributions of language structures contains data about important regularities controlling informational and psycho – physiological processes, which accompany the generation of verbal language or printed text. The quantitative models of these processes are based one the assumption about the superposition of two kind of uncertainty: probabilistic and possibilistic.

In the presented paper one of the possible variant of the statistical – possibilistic model of word formation process in the Spanish language is considered. Model is based on the so-called Fuck's generalized distribution heaving the following form:

$$F_n(i) = \sum_{\nu=1}^n m(B_\nu) \binom{k-\nu}{i-\nu} p^{i-\nu} (1-p)^{n-i}, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

where $F_n(i)$ is the probability that object (word) contains i elements (syllables), p is the elementary events probability. B_ν is the focal event (arising of ν -element structure), $m(B_\nu)$ is the corresponding focal probability, which is in the direct connection with the possibility distribution (linguistic spectrum):

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n = \varepsilon_{\max} = 1, \\ m(B_\nu) = \varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

In practical calculations instead of (1) one uses the Poisson approximation:

$$F(i) = e^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} m(B_{\nu}) \frac{\alpha^{i-\nu}}{(i-\nu)!}, i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$\alpha \equiv \bar{i} - \bar{\nu}$, \bar{i} is empirical average, $\bar{\nu} \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu m(B_{\nu})$. The word formation process is described by

the linguistic spectrum. For the calculation of this spectrum following data is used:

$$M_s = \overline{i(i-1) \dots (i-1+s)}, \quad (4)$$

there $\overline{(\dots)}$ is the operation of averaging.

For spectral parameters calculation one has the following equations system:

$$M_k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^m \sum_{\nu=k-m}^n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \left(1, 2, \dots, (k-1) \right)_l^{l+1} (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}), \quad (5)$$

where $\left(1, 2, \dots, (k-1) \right)_l$ is the product of all possible l natural number from the set $\{1, \dots, (k-1)\}$,

$k=2, \dots, n$. Resulting equations system is sufficiently complicated. It is solved by the reverse spline interpolation method [2]. Corresponding operation process has the following form:

$$\varepsilon_j^{z+1} = \varepsilon_j^z + \lambda_j \sum_{k=1}^p u_k^l J^{-1} \left(\varepsilon_1^z, \dots, \varepsilon_n^z \right) \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(\varepsilon_1^z, \dots, \varepsilon_{j-1}^z, u_k^z, \varepsilon_{j+1}^z, \dots, \varepsilon_n^z)}, \quad (6)$$

where

$$\Phi_m(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = M_n - \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^m \sum_{\nu=k-m}^n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \left(1, 2, \dots, (k-1) \right)_l^{l+1}, \quad (7)$$

These formulas used for the analyzing the word formation process in Servantes' "Don Kichot". Data are given in tables I and II.

In tables empirical data are presented in the row "experiment.". The table I corresponds to the two - component spectrum, table II corresponds to the three - component spectrum; results are received by formulas (5) and (6):

Table I

Optimal number $\lambda=0.00002$							
i	1	2	3	4	5	6	7
experiment.	0.451179	0.249559	0.19341	0.081441	0.020443	0.003692	0.000276
theoretic.	0.45	0.2497	0.1933	0.0819	0.0207	0.0031	0.0003
Spectrum	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	number of iter.		\bar{i}	\bar{v}
	0.9053	0.054	0	201		0.5292	1.0133

Table II

Optimal number $\lambda=0.00003$							
i	1	2	3	4	5	6	7
experiment.	0.451179	0.249559	0.19341	0.081441	0.020443	0.003692	0.000276
theoretic.	0.45	0.2497	0.1933	0.0819	0.0207	0.0031	0.0003
Spectrum	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	number of iter.		\bar{i}	\bar{v}
	0.9059	0.057	0	945		0.5292	1.0199

On the basis of these data following models are constructed:

Two - component spectrum:

$$F(i) = e^{-1.5159} \left(0.8513 \frac{(1.5159)^{i-1}}{(i-1)!} + 0.0540 \frac{(1.5159)^{i-2}}{(i-2)!} \right) \quad (8)$$

Three - component spectrum:

$$F(i) = e^{-1.5093} \left(0.8489 \frac{(1.5093)^{i-1}}{(i-1)!} + 0.0570 \frac{(1.5093)^{i-2}}{(i-2)!} \right) \quad (9)$$

Results of calculation are given in tables (see row "theoretic").

Notice that because calculations of three component spectrum gives the result $\epsilon_3 = 0$ one can conclude that the process of word formation in "Don Kichot" is characterized by two - component spectrum.

REFERENCES

1. Д. Гачечиладзе, Г. Меладзе. *Решение системы нелинейных уравнений с помощью обратной сплайн интерполяции.*, Тр. Тбилисского Университета (серия прикл. математика) том 315 (1993).
2. Т. Гачечиладзе, Т. Манджaparashvili *Нечёткие случайные события и соответствующие вероятностные меры.* Тр. Тбилисского Университета (серия прикл. математика) том 300 (1990).

ქსპანსორ ქნა ში სიტყვამთა წარმოშობის პროცესის სტატისტიკურად შესაძლო გოდელის შესახებ

დ. გიორგაძე, ნ. ჯორჯიშვილი
აღბათობის თეორიის კათედრა

ენის სტრუქტურა არ არის მოცემული უშუალო დაკვირვებებში. სტრუქტურის ელემენტები და მათ შორის კავშირები ფაქტების მარტივი აღწერით ან შეფასებებით ლინგვისტურ მეთოდებზე დაყრდნობით არ შეიძლება იყოს მიღებული. სტრუქტურული ელემენტები და მათი კავშირები შეიძლება იყოს გაანალიზებული მხოლოდ იმ განუზღერელობის ანალიზის საფუძველზე, რომელიც მას ახასიათებს. ეს ანალიზი პირველ რიგში გულისხმობს რიცხვითი (მათემატიკური) მეთოდების გამოყენებას.

ლინგვისტური განაწილებები ასახავენ მნიშვნელოვან ინფორმაციულ და ფსიქო-ფიზიოლოგიურ კანონზომიერებებს, რომლებიც თან სდევს ნაბეჭდი ტექსტების გენერაციას. ამ პროცესების აღწერის რიცხვითი მეთოდები დაფუძნებულია ორი სახის განუზღერელობის სუპერპოზიციის პიპოთეზაზე აღბათურისა და შესაძლებლობითის.

მოცემულ შრომაში განიხილება ერთ-ერთი სტატისტიკურ-შესაძლებლობითი მოდელი სიტყვათწარმოქმნის პროცესისა ესპანურ ენაში.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМ БУЛЕВОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Б. Габеридзе

Кафедра теории управления

Абстракт. Рассматривается вопрос соотношения между эффективными решениями многокритериальных булевых задач оптимизации и решениями однокритериальной задачи с линейной сверткой критериев. Получена формула для эффективных решений, находимых линейной сверткой.

Пусть B^n -множество всех $(0,1)$ -векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Постановка p -критериальной задачи ($p \geq 2$) (X, F) , предполагает, что задано непустое множество $X \subseteq B^n$ допустимых решений, на котором определена векторная целевая функция

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)), \quad x \in X,$$

с частными критериями

$$f_i(x) \rightarrow \min \quad \forall i \in N_p = \{1, 2, \dots, p\},$$

где $f_i(x) \in R^+ \quad \forall i \in N_p, x \in X$.

Паретовским множеством, или множеством эффективных точек [1] называется множество

$$P(X) = \{x \in X; \exists x' \in X, F(x) \geq F(x'), F(x) \neq F(x')\},$$

состоящее из паретовских оптимумов. Под решением p -критериальной задачи (X, F) понимается нахождение одного, нескольких (определенных) или всех элементов множества $P(X)$.

Один из важнейших подходов к нахождению паретовских оптимумов в многокритериальных задачах основан на линейной свертке критериев (ЛСК). Хорошо известно [1-2], что для любого вектора

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) : \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \forall i \in N_p \right\}$$

элемент x^* , минимизирующий на X линейную свертку

$$\Phi(\lambda, x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x)$$

целых функций $f_i(x), i \in N_p$, является эффективным. В [3-4] показано, что существуют многокритериальные дискретные задачи в которых некоторый паретовский оптимум невозможно найти никакой линейной сверткой критериев.

Множество $Y = F(X) = \{F(x) = R_p^* : x \in X\}$ будем называть множеством допустимых значений критериальной функции. В критериальном пространстве R_p^* рассмотрим следующие задачи

ЗАДАЧА 1:

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_p) \rightarrow \min, (f_1, f_2, \dots, f_p) \in \text{co}Y,$$

где $\text{co}Y$ -выпуклая оболочка множества Y .

ЗАДАЧА 2:

$$\Phi(\lambda, f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \rightarrow \min$$

где $(f_1, f_2, \dots, f_p) \in Y, \lambda \in \Lambda$. Через Y^λ обозначим решение задачи 2 при фиксированном λ .

Определим множество

$$Y^\Lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y^\lambda.$$

Если на множестве R_p^* задать частичный порядок

$$y' < y'' \Leftrightarrow y'_i \leq y''_i \quad \forall i \in N_p,$$

то множество минимальных элементов частично упорядоченного множества $(Y, <)$ будет не чем иным, как множеством парето-оптимальных векторных оценок $F(P(X))$, обозначим ее через $P(Y)$.

Нетрудно увидеть, что решение задачи (X, F) эквивалентно решению следующей задачи

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_p) \rightarrow \min, (f_1, f_2, \dots, f_p) \in Y.$$

Сформулируем и докажем несколько лемм.

ЛЕММА 1. Справедливо соотношение

$$[coY]^{\wedge} = P(coY).$$

Из конечности Y следует, что coY замкнутый многогранник. Доказательство леммы следует из известного факта о разрешимости задач линейного программирования с помощью алгоритмов ЛСК [1].

ЛЕММА 2. *Справедливо следующее :*

$$P(coY) = P(coP(Y)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y' \in P(coY)$ и $y' \notin P(coP(Y))$. Если $y' \in coP(Y) \setminus P(coP(Y))$, тогда найдется $y'' \in P(coP(Y))$ доминирующее y' . Тогда $y' \notin coP(Y)$ и из $y' \in coY$ следует $y' = \sum \alpha_i y^i, y^i \in Y$. При этом найдется хотя бы один вектор $y^i \in \{y^i\}$ такой, что $y^i \notin P(Y)$, иначе бы $y' \in coP(Y)$. Построим набор векторов $\{\hat{y}^i\} : \hat{y}^i = y^i$, если $y^i \in P(Y)$ и $\hat{y}^i = \bar{y}^i$, где $\bar{y}^i < y^i$, если $y^i \notin P(Y)$. Вектор $\hat{y} = \sum \alpha_i \hat{y}^i$ доминирует вектор y' , что противоречит допущению. Пусть теперь $y^0 \in P(coP(Y))$, но $y^0 \notin P(coY)$. Тогда найдется $y' \in P(coY)$, такой, что $y' < y^0$. Но тогда $y' \in P(coY)$ и $y' \in P(coP(Y))$, и возвращаемся к уже рассмотренному случаю.

ЛЕММА 3. *Справедливо соотношение*

$$Y^{\wedge} = [P(Y)]^{\wedge}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$Y^{\wedge} \subseteq [P(Y)]^{\wedge}. \tag{1}$$

Пусть $y' \in [P(Y)]^{\wedge}$, но $y' \notin Y^{\wedge}$, тогда найдется $y^0 \in Y \otimes P(Y)$ такой, что

$$\Phi(\lambda, y^0) < \Phi(\lambda, y') \leq \Phi(\lambda, y)$$

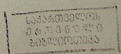
для всех $y \in P(Y)$ и некоторого $\lambda \in \Lambda$, что противоречит (1).

ЛЕММА 4. *Справедливо соотношение*

$$Y^{\wedge} = [coY]^{\wedge} \cap Y.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

223/3



ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие соотношения*

$$\begin{aligned} Y^{\wedge} &= P(\text{co}Y) \cap P(Y), \\ Y^{\wedge} &= P(\text{co}P(Y)) \cap P(Y) \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$Y^{\wedge} = P(\text{co}Y) \cap Y.$$

Доказательство следует из лемм 1-4.

Формула (2) позволяет построить примеры разрешимых с помощью алгоритма ЛСК булевых задач. Очевидно, что задачи для которых $P(Y) \setminus (P(\text{co}P(Y)) \cap Y) \neq \emptyset$, невозможно разрешить с помощью алгоритмов ЛСК. Примером служит p -критериальная задача коммивояжера [5], которая вкладывается в схему булевых задач оптимизации. Пусть n число пунктов в задаче коммивояжера и критерии являются минусумными, тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если $p \geq 2$, p -критериальная задача коммивояжера неразрешима с помощью алгоритма ЛСК при любом $n \geq 4$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Полным множеством альтернатив [3] называют подмножество $X^0 \subseteq P(X)$ минимальной мощности и такое, что $F(X^0) = F(P(X))$. Теорема 2 справедлива, если под решением p -критериальной задачи будем понимать нахождение множества X^0 .



ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва, Наука, 1982.
2. В.С. Михалевич, В.Л. Волкович. *Вычислительные методы исследования проектирования сложных систем*. Москва, Наука, 1982.
3. В.А. Перепелица, И.В. Сергиенко. *Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач*. ЖВМ и МФ, 1988, Т. 28, №3, сс. 400-419.
4. В.А. Емеличев, В.А. Перепелица. *Многокритериальные задачи об остовах графов*. ДАН СССР, 1988, Т. 298, №3, сс. 544-547.
5. Н. Кристофидес. *Теория графов. Алгоритмический подход*, Москва, 1978.

ON THE RESEARCH LINEAR COUPLION OF CRITERIA IN
MULTI-CRITERIAL BOOLEAN PROGRAMMING

A. Gorbachev

Center Control Theory

The domain of coupling between objectives, objectives, optimization problems and associated problem with linear combination of criteria is considered. The formula is obtained for objective functions associated by linear combination.

Приведены цитаты

(1) Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ — функции, заданные на множестве X .

Пусть z_1, z_2, \dots, z_m — заданные значения. Тогда можно рассмотреть задачу минимизации функции $f(x)$ при условии, что $f_i(x) \leq z_i$ для $i=1, 2, \dots, m$.

Введем функцию $F(x) = \max_{i=1, 2, \dots, m} (f_i(x) - z_i)$.

Тогда задача минимизации $f(x)$ эквивалентна задаче минимизации $F(x)$.

Введем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - z_i)$$

**ფრფივი ნახვევის პრიტერიუმის გამოკვლევის უახასებ ბულის
პრავალპრიტერიალურ პრობრაჰირებაში**

ბ. ღვაბერიძე
მართვის თეორიის კათედრა

განიხილება ბულის მრავალკრიტერიალური ოპტიმიზაციის ამოცანების ეფექტური ამონახსნებისა და წრფივი ნახვევის კრიტერიუმების ერთკრიტერიალური ამოცანების ამონახსნების თანაფარდობის საკითხი. მიღებულია ფორმულა წრფივი ნახვევის საშუალებით მოძებნილი ეფექტური ამონახსნებისათვის.

**ON THE RESEARCH LINEAR COVOLUTION OF CRITERIA IN
MULTI-CRITERIAL BOOLEAN PROGRAMMING**

B. Gvaberidze
Chair of Control Theory

The question of correlation between effective solutions of multicriterial Boolean optimization problems and monocriterial problem with linear convolutions of criteria is considered. The formula is obtained for effective solutions accomplished by linear convolution.



О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМ РЕГУЛЯРИЗАТОРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА МЕЛКОЙ ВОДЫ

Г. Меладзе, Н. Схиртладзе, А. Чантурия

Кафедра математического обеспечения компьютеров и информационных технологий

Абстракт. В данной работе исследуется сходимость разностных схем с нелинейным регуляризатором для уравнений Сен-Венана (мелкой воды). Доказательство сходимости разностной схемы проведено энергетическим методом. В классе достаточно гладких решений дифференциальной задачи доказано, что решение разностной задачи сходится в сеточной норме L_2 со скоростью $O(h^2)$.

В области $\Omega = \{(x, t) : x \in (-\infty, +\infty), t \in [0, T]\}$ рассмотрим задачу Коши для неоднородной системы одномерных уравнений мелкой воды, записанной в дивергентной форме для консервативных переменных-компонент импульса потока J и глубины потока H , в векторной форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(Q) = W(Q), \quad (1a)$$

где

$$\begin{aligned} J &= Hu, \quad Q = (J, H)^T, \quad F(Q) = [Ju + 0.5gH^2, J]^T, \\ W(Q) &= [f_1(x, t, H, J), f_2(x, t, H, J)]^T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x) \end{aligned} \quad (1b)$$

где t -время, $u(x, t)$ -скорость, g - ускорение силы тяжести, а $u_0(x)$ и $H_0(x)$ -достаточно гладкие периодические функции с периодом L , выражающие распределение скорости и глубины потока в начальный момент времени соответственно.

Предположим, что

(A1) Функции $H(x, t)$, $J(x, t)$, $u(x, t)$ принадлежат классу $C^{1,1}(\Omega)$, а также существует такая постоянная $\mu > 0$, что $H(x, t) \geq \mu$, при $(x, t) \in \Omega$. Пусть также выполнены условия, которые гарантируют существование и единственность периодического (с периодом L по переменной x) решения задачи (1).

(A2) Функции f_1, f_2 , удовлетворяют условию Липшица относительно своих аргументов H и J с постоянной $k > 0$.

В области Ω рассмотрим разностную сетку

$$D_h = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_h = \{ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \omega_\tau = \{j\tau, j = 0, 1, \dots, N_1\},$$

$Nh = L$, $N_1\tau = T$, N_1 и N - натуральные числа.

Для решения задачи (1), используя газодинамическую аналогию уравнений мелкой воды, воспользуемся двухслойной разностной схемой из [2], с нелинейным регуляризатором $R(Q)$ (обозначения здесь и в дальнейшем взяты из [3]):

$$Q_t + (F(Q, \sigma))_x^* = [R(Q)]_{xx} + W(Q), \quad (2a)$$

$$H_h(ih, 0) = H_0(ih), \quad J_h(ih, 0) = J_0(ih). \quad (2b)$$

Здесь вектор функций, компоненты которых уже являются сеточными функциями, обозначены вновь через Q , $F(Q)$, $W(Q)$ и имеют вид

$$Q = (J_h, H_h)^T, \quad F(Q, \sigma) = (J_h u_h^{(\sigma)} + 0.5g(H_h^2), J_h)^T,$$

$$R(Q) = \varphi(\tau, h) \frac{H_h}{4} \begin{bmatrix} (\lambda_{1h} + \lambda_{2h}) u_h^{(\sigma)} + 0.5c_h(\lambda_{1h} - \lambda_{2h}) \\ (\lambda_{1h} + \lambda_{2h}) \end{bmatrix},$$

где $\lambda_{1h} = |u_h + c_h|$, $\lambda_{2h} = |u_h - c_h|$, τ и h - шаги равномерной временной и пространственной сеток, $c_h = \sqrt{gH_h}$ - разностный аналог скорости распространения возмущений;

$$\sigma = \hat{H}_h^{1/2} / \left(\hat{H}_h^{1/2} + H_h^{1/2} \right); \quad \varphi(\tau, h) \text{ - достаточно гладкая функция своих}$$

аргументов: $\varphi(\tau, h) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ а сеточные функции $H_h \equiv H_h(ih, j\tau)$, $J_h \equiv J_h(ih, j\tau)$, $u_h \equiv u_h(ih, j\tau)$ определены в области D_h и аппроксимируют соответственно функции $H(x, t)$, $J(x, t)$, $u(x, t)$.

Предложенная разностная схема отличается от традиционной разностной схемы для уравнений мелкой воды членом $R(Q)$, который имеет смысл модельной вязкости. Использование разностных схем такого типа является полезной для проведения численных расчетов.

Нетрудно проверить, что если решение задачи (1) принадлежит классу $C^{1,2}(\Omega)$, то погрешность аппроксимации схемы (2) в каждом узле сетки составляет $O(\tau + h^2)$.

Введем в ω_h скалярное произведение (при фиксированном j)



$$R_j = (\sigma(H + \tilde{H}) - 0.5)\tau((J/H) + \tilde{u})_j - (\sigma(H) - 0.5)\tau(J/H)_j.$$

Для задачи (2) справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть для задачи (1) выполнены условия (A1), (A2). Пусть также $\tau = h^{2+2\epsilon}$ ($\epsilon > 0$), $\varphi(\tau, h) = O(h^2)$, и для решения задачи (2) на j -м слое ($0 \leq j \leq N, -1$) имеет место следующая оценка:

$$\max\left\{\|\tilde{H}\|_c, \|\tilde{J}\|_c, \|\tilde{u}\|_c\right\} \leq h, \quad (4)$$

тогда, существует $h_1 > 0$, такое, что при $h \leq h_1$, справедливы следующие утверждения:

На $(j+1)$ -м слое разностная схема (2) имеет единственное решение.

Решение на $(j+1)$ -ом слое удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\mu}{4} < \hat{H}_h \leq S + \frac{3\mu}{4} \quad \left| \hat{J}_h \right| \leq S + \frac{3\mu}{4} \quad \text{где } S = \max\left\{\sup_{\alpha} |H|, \sup_{\alpha} |J|\right\} + \frac{\mu}{2} \quad (5)$$

Решение разностной задачи (2) единственно в том смысле, что любые два решения, удовлетворяющие условиям (5), совпадают; Для погрешности на $(j+1)$ -м слое имеет место оценка

$$\max\left\{\|\hat{H}\|_c, \|\hat{J}\|_c, \|\hat{u}\|_c\right\} \leq Mh, \quad (6)$$

где постоянная M не зависит от h .

Рассмотрим задачу (3). Предварительно заметим, что если уравнение $U_t + AU + BU = \Phi$ скалярно умножить на $\alpha y^{(0.5)}$ и воспользоваться тождеством $y^{(0.5)} = y + 0.5\tau y$, получим

$$0.5(\alpha, [y^2]_t) = (\phi, \alpha y) - (Ay, \alpha y) - (By, \alpha y^{0.5}) + 0.5\tau(\alpha, (\phi - Ay)^2) - 0.5\tau(\alpha By, (\phi - Ay)) \quad (7)$$

Умножим уравнение (3б) скалярно на $\tilde{H}^{(0.5)}$, уравнение (3а)-на $(gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}]^{(0.5)}$.

После сложения полученных уравнений и использования равенств (*) получим:

$$0.5\|\tilde{H}\|_t^2 = \sum_{i=0}^{j-1} G_i + (\tilde{f}_2 - \psi_2, \tilde{H}) + [(J/H)^\sigma(-\tilde{f}_2 + \psi_2) + \tilde{f}_1 - \psi_1, (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}]] \quad (8)$$

где

$$G_0 = -0.5\left((gH)^{-1}, \left\|[(H + \tilde{H})\tilde{u}]^2\right\|_t\right), \quad G_1 = -\left(\tilde{H}(J/H)\right)_t, \quad \tilde{H}) - \left\|[(H + \tilde{H})\tilde{u}]\right\|_t, \quad \tilde{H})$$



$$\begin{aligned}
 G_2 &= 0.5(\varphi(\tau, h)[(H + \tilde{H})\tilde{u}]_{\bar{x}} - \tilde{H}) + 0.5(\varphi(\tau, h)[\tilde{H}(J/H)]_{\bar{x}} - \tilde{H}), \\
 G_3 &= 0.5\tau\|0.5\varphi(\tau, h)[(H + \tilde{H})\tilde{u}]_{\bar{x}} + [\tilde{H}(J/H)]_{\bar{x}} - \psi_2 + \tilde{J}_2 - [(H + \tilde{H})\tilde{u}]_{\bar{x}} - [\tilde{H}(J/H)]_{\bar{x}}\|^2 \\
 G_4 &= 0.5(\varphi(\tau, h)[(J\tilde{u}^{(0.5)})_{\bar{x}} + (\tilde{J}\tilde{u}^{(0.5)})_{\bar{x}} + (\tilde{J}(J/H)^{\sigma})_{\bar{x}}) - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}] \\
 G_5 &= 0.5(\varphi(\tau, h)(JR_1)_{\bar{x}} - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}]) + 0.5(\varphi(\tau, h)(\tilde{J}R_1)_{\bar{x}} - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}]) \\
 G_6 &= 0.5(\varphi(\tau, h)(0.5(g\tilde{H}^2)_{\bar{x}} + (gH\tilde{H})_{\bar{x}} + (J/H)^{\sigma}\tilde{J}_{\bar{x}}) - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}]) \\
 G_7 &= -\left(\tilde{H}^{(1-\sigma)}(J/H)_{\bar{x}} + \tilde{J}(J/H)_{\bar{x}}^{\sigma} + I(\tilde{J}, (J/H)^{\sigma})\right) - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}] \\
 G_8 &= -\left((\tilde{J}\tilde{u}^{(0.5)})_{\bar{x}} + J_{\bar{x}}\tilde{u}^{(0.5)} + I(J, \tilde{u}^{(0.5)})\right) - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}] \\
 G_9 &= -\left(J\tilde{u}_{\bar{x}}^{(0.5)}, (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}]^{(0.5)}\right) = (\alpha y^{(0.5)}, By), \\
 G_{10} &= -((JR_1)_{\bar{x}} + (\tilde{J}R_1)_{\bar{x}} + 0.5g(\tilde{H}^2)_{\bar{x}} + 2(H\tilde{H})_{\bar{x}}) - (gH)^{-1}[(H + \tilde{H})\tilde{u}] \\
 G_{11} &= -0.5\tau((gH)^{-1}, [\phi - Ay]^2) \quad G_{12} = -0.5\tau((gH)^{-1}J\tilde{u}^{(0.5)}, [\phi - Ay]).
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \phi - Ay &= 0.5\varphi(\tau, h)[(J\tilde{u}^{(0.5)})_{\bar{x}} + (\tilde{J}\tilde{u}^{(0.5)})_{\bar{x}} + ((J/H)^{\sigma}\tilde{J})_{\bar{x}} + (JR_1)_{\bar{x}} + (\tilde{J}R_1)_{\bar{x}} + g(\tilde{H}^2)_{\bar{x}} + \\
 &+ g(H\tilde{H})_{\bar{x}} - (J/H)^{\sigma}\tilde{J}_{\bar{x}}] + (J/H)^{\sigma}(\psi_2 - \tilde{f}_2) - \psi_1 + \tilde{f}_1 - \tilde{H}^{(1-\sigma)}(J/H)_{\bar{x}} - (J/H)_{\bar{x}}^{\sigma}\tilde{J} - \\
 &- I((J/H), \tilde{J}) - (\tilde{J}\tilde{u}^{(0.5)})_{\bar{x}} - J_{\bar{x}}\tilde{u}^{(0.5)} - I(J, \tilde{u}^{(0.5)}) - (JR_1)_{\bar{x}} - (\tilde{J}R_1)_{\bar{x}} - 0.5g(\tilde{H}^2)_{\bar{x}} + g(H\tilde{H})_{\bar{x}}.
 \end{aligned}$$

Для оценки членов в равенстве (8) воспользуемся леммами 2-4 из [1] и методикой из [1], [2], [4], а также учтем, что $\varphi(\tau, h) = O(h^2)$, тогда получим основное энергетическое неравенство

$$\frac{\hat{Q} - Q}{\tau} \leq M \left\{ Q + \hat{Q} + h^{-3} \left[Q^2 + (\hat{Q})^2 \right] + h^{-3} Q^4 \right\} + M \|\psi\|^2, \quad Q^{(0)} = 0 \quad (9)$$

где $Q = (gH)^{-1} \cdot [(H + \tilde{H})\tilde{u}]^2 + \|\tilde{H}\|^2$, $\|\psi\|^2 = \max\{\|\psi_1\|^2, \|\psi_2\|^2\} = O(h^4)$.



Решить это нелинейное, неявное энергетическое неравенство позволяет лемма Меладзе-Почкишвили (лемма 5 из [1]). При помощи леммы 1 и леммы Меладзе-Почкишвили доказывается следующая теорема о сходимости.

ТЕОРЕМА. Пусть для решения задачи (1) выполнены условия (A1) (A2) и $\tau = h^{2+2\epsilon}$ ($\epsilon = \text{const} > 0$) $\varphi(\tau, h) = O(h^2)$. Тогда существует $h_0 > 0$ такая, что при $h \leq h_0$ справедливы следующие утверждения:

Решение разностной задачи (2) на интервале $[0, T]$ существует и единственно.

Решение задачи (2) сходится к решению задачи (1) в сеточной норме L_2 со скоростью

$$O(h^2)$$

Тем самым, сходимость разностной схемы доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Давиташвили, Т. Елизарова, Ф. Криадо, Г. Меладзе, Н. Схиртладзе. *О сходимости кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики*. Препринт. Москва, Диалог-МГУ, 1999, ст. 1-35.
2. Н.О. Джгмадзе. *О сходимости разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера*. Диссер. 1990, 150 ст.
3. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. *Разностные методы решения задач газовой динамики*. М.Наука, 1980, 352 ст.
4. Р.-У. Куо, Н.-М. Ву. *Numerical solution of D.V.equation*. J.Math.AnalYs.and Applic., 1981, Vol.82,No2, p.334-345.



პარჩხი ფჳლს სენ-ვენანის განტოლვაჳბის შჳსაბაჳისი არაწრჳი
რეგულარიზატორიანი სხვაობიანი სჳჳის კრებაღობის შჳსახჳ
კ. მელადჳ*), ნ. სხირტლადჳ**), ა. ჳანტურია*)

*კომპიუტერების მათ უზრუნველყოფის კათედრა, **მათემატიკური მოდელირების კათედრა

ნაშრომში განხილულია სენ-ვენანის განტოლებებისათვის ჩაწერილი არაწრჳი
რეგულარიზატორიანი სხვაობიანი სჳჳის კრებაღობა ენერგეტიკული მეთოდით.
დიფერენციალური ამოცანის საკმარისად გლეუ ამოხსნათა კლასში დამტკიცებულია
სხვაობიანი სჳჳის კრებაღობა $O(h^2)$ სიზუსტით L_2 ნორმაში.

ON CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEME WITH NONLINEAR REGULARIZATOR FOR SAINT-VENNANT SHALLOW WATER EQUATION

Meladze H.M.*), Skhirtladze N.M.**), Chanturia A.Z.**)

*)Computer Software and Informational Technologies Chair

**) Chair of Mathematical Modelling

In the presented work the convergence of the difference scheme with nonlinear regularizator for Saint-Venant equation (shallow water case) is researched. The proof of convergence of difference scheme is considered using an energy method. In the class of smooth solutions of the differential problem is proved, that solution of the difference scheme converges in mesh norm L_2 with speed $O(h^2)$.



ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. Ментешашивили

Кафедра математического обеспечения компьютеров и информационных технологий

Рассмотрим некоторые варианты обратных задач Коши для квазилинейных уравнений второго порядка, по которым требуется построение решения заданного уравнения, если заранее известны характеристические линии обоих семейств. Особенно интересными являются случаи, когда семейства характеристик имеют общие огибающие и другие особые точки.

На плоскости переменных x, y рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$a(x, y, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u_x, u_y)u_{yy} + c(x, y, u_x, u_y)u_{xy} = f(x, y, u_x, u_y) \quad (1)$$

В случае гиперболичности уравнение (1) определит системы характеристических инвариантов (см. [1, 2])

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, u_x, u_y, u) = const, \\ \varphi_2(x, y, u_x, u_y, u) = const, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \phi_1(x, y, u_x, u_y, u) = const, \\ \phi_2(x, y, u_x, u_y, u) = const. \end{cases} \quad (3)$$

Из этих соотношений заключаем, что в отличие от линейных уравнений, семейства характеристических кривых уравнения (1) заранее не определены, поскольку они зависят от значения неизвестного решения и от его производных первого порядка по переменным x и y . Следовательно, возможно задавать заранее характеристические семейства кривых. Только нужно потребовать, чтобы вдоль них не были нарушены соотношения (2) и (3). соответственно.

Допустим, два однопараметрических семейства плоских линий определены соотношениями:

$$y = g_1(x, c), \quad (4)$$

$$y = g_2(x, c), \quad (5)$$

где g_1, g_2 - заданные, дважды непрерывно дифференцируемые функции по переменной x для любого значения действительного параметра c . Мы будем считать, что каждая

кривая семейства (4) пересекает прямую $y = 0$ и любую кривую семейства (5) только один раз, за исключением быть может множества тех точек, которые являются узлом или огибающей линией. Аналогичные условия потребуем и для кривых семейства (5). При этом подразумеваем, что как одно, так и второе семейство не имеют других особых точек. Через D_1 обозначим ту часть плоскости переменных x, y , которую полностью покрывают заданные уравнением (4) семейства характеристических кривых, когда параметр c непрерывно пробегает все действительные значения. Аналогично, через D_2 обозначаем ту часть плоскости, которую полностью покрывают характеристические кривые, заданные уравнением (5), а через D - их пересечение: $D = D_1 \cap D_2$.

Рассмотрим следующий вариант обратной задачи:

Найти начальные значения регулярного решения $u(x, y)$ уравнения (1) - $u(x, \pm 0) \equiv \tau(x)$ и его производной по направлению нормали $u_y(x, \pm 0) \equiv \nu(x)$, $x \in I$, $I = D \cap \{y = 0\}$; если семейство плоских кривых, заданное соотношением (4) является характеристическим, соответствующее инвариантам (2), а семейство (5) является характеристиками, соответствующее инвариантам (3).

Характеристические корни уравнения (1) λ_1 и λ_2 в каждой точке определяют два характеристических направления:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \equiv \lambda_1, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \equiv \lambda_2. \quad (7)$$

Заметим, что параметры, входящие в семейства (4) и (5), можно определить с помощью абсциссы точки пересечения x_0 конкретной кривой с осью $y = 0$.

Если семейство (4) соответствует корню (6), тогда выполняется соотношение

$$\frac{d\varphi_1(x, x_0)}{dx} = \frac{b(x, \varphi_1(x, x_0), P_1(x_0), Q_1(x_0))}{2a(x, \varphi_1(x, x_0), P_1(x_0), Q_1(x_0))} + \frac{\sqrt{b^2(x, \varphi_1(x, x_0), P_1(x_0), Q_1(x_0)) - 4a(x, \varphi_1(x, x_0), P_1(x_0), Q_1(x_0))c(x, \varphi_1(x, x_0), P_1(x_0), Q_1(x_0))}}{2a(x, \varphi_1(x, x_0), P_1(x_0), Q_1(x_0))}.$$

где $P_1(x_0) = u_x(x, \varphi_1(x, x_0))$, $Q_1(x_0) = u_y(x, \varphi_1(x, x_0))$.

Аналогично, вдоль второго семейства характеристик выполняется равенство

$$\frac{d\varphi_2(x, x_0)}{dx} = \frac{b(x, \varphi_2(x, x_0), P_2(x_0), Q_2(x_0))}{2a(x, \varphi_2(x, x_0), P_2(x_0), Q_2(x_0))} +$$

$$+ \frac{\sqrt{b^2(x, \varphi_2(x, x_0), P_2(x_0), Q_2(x_0)) - 4a(x, \varphi_2(x, x_0), P_2(x_0), Q_2(x_0))c(x, \varphi_2(x, x_0), P_2(x_0), Q_2(x_0))}}{2a(x, \varphi_2(x, x_0), P_2(x_0), Q_2(x_0))}$$

где $P_2(x_0) = u_x(x, \varphi_2(x, x_0))$, $Q_2(x_0) = u_y(x, \varphi_2(x, x_0))$.

Эти соотношения в точках интервала имеют следующий вид:

$$\left. \frac{d\varphi_1(x, x_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{b(x, \varphi_1(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))}{2a(x, \varphi_1(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))} +$$

$$+ \frac{\sqrt{b^2(x, \varphi_1(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0)) - 4a(x, \varphi_1(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))c(x, \varphi_1(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))}}{2a(x, \varphi_1(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))} \quad (8)$$

$$\left. \frac{d\varphi_2(x, x_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{b(x, \varphi_2(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))}{2a(x, \varphi_2(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))} +$$

$$+ \frac{\sqrt{b^2(x, \varphi_2(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0)) - 4a(x, \varphi_2(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))c(x, \varphi_2(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))}}{2a(x, \varphi_2(x, x_0), \tau'(x_0), \nu(x_0))} \quad (9)$$

$x_0 \in I$.

В силу произвольности точки $(x_0, 0)$ из интервала I можно заменить ее через $(x, 0)$.

(8) и (9) являются уравнениями относительно τ' и ν . Интегрируя функцию $\tau'(x)$, окончательно получаем решение задачи.

Из этих общих рассуждений можно заключить, что когда семейства (4) и (5) не имеют общие направления ни в одной точке, $g'_1(x, c) \neq g'_2(x, c)$, $\forall c_1, c_2 \in R$ т.е. когда уравнение (1) строго гиперболического типа, тогда решение обратной задачи не представляет большой трудности. Если уравнение на некотором множестве точек параболически вырождается, тогда картина меняется. Для иллюстрации рассмотрим следующие гиперболические уравнения с параболическими вырождениями:

$$(u_y^2 - 1)u_{xx} - 2u_x u_{xy} + u_x^2 u_{yy} = 0, \quad (10)$$

$$(u_y^2 - x^2)u_{xx} - 2(u_x u_y - xy)u_{xy} + (u_x^2 - y^2)u_{yy} = 0, \quad (11)$$

$$u_{xx} + (1 + u_x + u_y)u_{xy} + (u_x + u_y)u_{yy} = 0, \quad (12)$$

и семейства характеристических кривых:

$$x = g_1(x, c) \equiv c - \alpha \sqrt{\alpha / (y + \beta) - 1}, \quad -\beta \leq y \leq \alpha - \beta \quad (13)$$

$$x = g_2(x, c) \equiv c + \alpha \sqrt{\alpha / (y + \beta) - 1}, \quad -\beta \leq y \leq \alpha - \beta \quad (14)$$

Оба семейства имеют асимптоту $y = -\beta$, а для значения $x = c$ касаются прямой $y = \alpha - \beta$. В каждой точке прямой $y = \alpha - \beta$, проходит одна кривая семейства (13) и гладко продолжается с той же точки вполне определенной кривой семейства (14). Следовательно, оба характеристических направления в точках этой прямой совпадают. Поэтому прямая $y = \alpha - \beta$ является линией параболического вырождения.

Обратные задачи (10), (13-14) и (11), (13-14) корректны и решениями являются (см. [3]):

$$\begin{aligned} \tau(x) &= -2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sqrt{(\alpha - \beta) / \beta x + c}, \quad c = \text{const}, \\ v(x) &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tau(x) &= -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \sqrt{(\alpha - \beta) / \beta x^2 + c}, \quad c = \text{const}, \\ v(x) &= 0. \end{aligned}$$

С другим обстоятельством сталкиваемся во время изучения обратной задачи аналогичного содержания для уравнения (12). Это уравнение не строго гиперболического типа. (см. [1]). Одно семейство характеристик вполне определяется дифференциальным соотношением $dy = dx$ и задается прямыми линиями $y - x = c$. Второе семейство определяется соотношениями $dy = (u_x + u_y) dx$, $du_x + du_y = 0$ и тоже являются прямыми. По этой причине, при постановке обратной задачи, уже не представляется возможным произвольное задание характеристического семейства. Первое определено соотношением $y = x + c$, $c = \text{const}$, а второе может быть представлено, допустим, с помощью семейства параллельных прямых

$$y = ax + c, \quad a, c = \text{const}, \quad a > 1. \quad (15)$$

Легко можно доказать, что задача (14), (4-5) не корректна.

Корректна следующая задача: Найти начальное $u(x, \pm 0)$, $x \in I$ значение регулярного решения $u(x, y)$ уравнения (12), если прямые, заданные семейством (15) представляют характеристические линии, которые соответствуют дифференциальному соотношению $dy = (u_x + u_y) dx$, и выполняется условие $u_y(x, 0) = v(x)$, где $v \in C^1(R)$ - заданная функция.



ЛИТЕРАТУРА

1. Д.К. Гвазава. *Некоторые классы гиперболических уравнений смешанного типа*. Тб., Мешвиереба, 1992. (На груз. языке).
2. Д.К. Гвазава. *О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа*. Тб., Мешвиереба, 1981.
3. М.З. Ментешавили. *Об одном варианте обратной задачи для квазилинейного уравнения с действительными характеристиками*. Proceeding of Javakishvili Tbilisi State University, Seri. Appl. Math. & Comp.Sci., Vol.330(19), 19-22.

კოშის შებენული ამოცანები მეორე რიგის კვადრატული განტოლებებისათვის

მ. მენტეშაშვილი

კომპიუტერების მათ. უზრუნველყოფის და ინფორმაციული ტექნოლოგიების კათედრა

განხილულია კოშის შექცეული ამოცანის ზოგიერთი ვარიანტი მეორე რიგის კვადრატული დიფერენციალური განტოლებებისათვის. შესწავლილია ამოცანის ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები.

INVERSE PROBLEMS OF CAUCHY FOR SECOND ORDER QUAZILINEAR EQUATIONS

M. Menteshashvili

Computer Software and Informational Technologies Chair

Inverse Problem of Cauchy for second order quazilinear equations is considered. Issues of uniqueness and existence of solutions are investigated.

DISCRETIZATION OF A NONLINEAR WAVE SYSTEM

J. Peradze

Chair of Computer Software and Informational Technologies

Abstract. Timoshenko's model is used to study the position of a dynamic beam. The corresponding nonlinear system of second order partial differential equations is written with respect to normal displacement of points of the beam middle line and the rotation angle of the normal. Using additional functions this system is reduced to a system of first order equations. For the latter system the conditions are given on the boundary and at the initial moment. After that a stepwise discretization is carried out. The finite elements method with linear base functions is used to approximate the solution with respect to a spatial variable.

Thus the obtained Cauchy problem for a system of ordinary differential equations is solved by means of Crank-Nicholson type scheme. To estimate the exactness of the scheme, an operator equation, corresponding errors on two neighboring time layers is written. After that the required estimates are derived for operators and a priori estimates for elements which form non-linearity in the above-mentioned equations. This allows us to obtain the inequalities the first of which imposes a restriction on the grid pitch, while the second gives an estimate of the norm of the differential scheme error. The formulas are given for calculating the parameters participating in these inequalities.

1. FORMULATION OF THE PROBLEM

We consider the problem of geometrically nonlinear vibration of a beam. To this end, we use the well-known model of Timoshenko [1-3], which is the second generation theory. As compared with the classical Kirchhoff-Love model, in the Timoshenko model, deformation due to cross force and rotary inertia is taken into account, which is rather important for many problems.

Let us consider the system of equations

$$\begin{aligned} w_{tt} &= \left(cd - a + b \int_0^1 w_x^2 dx \right) w_{xx} - cd \psi_x, \\ \psi_{tt} &= c \psi_{xx} - c^2 d (\psi - w_x), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (1.1)$$

The functions w and ψ are respectively the transverse deflection of the beam centerline and the rotary displacement of the cross-section.

In (1.1) the constants $a, b, c, d > 0$ and

$$cd - a > 0, \quad (1.2)$$

where

$$a = A\Delta / I_1, \quad b = Al^2 / (2I_1), \quad c = Al^2 / I_2, \quad d = GI_2 / (EI_1), \quad (1.3)$$

E is Young's modulus, G is the shear modulus, A is the cross-section area, l is the length, I_1 is the moment of inertia of the cross-section about the axis perpendicular to the beam centerline, I_2 is the polar moment of inertia of the cross-section, and Δ is the end shortening of the beam.

By virtue of (1.3) we come to a conclusion that (1.2) is a natural request for slender beams moderately compressed, as it is equivalent to the condition $\Delta < lG/E$.

In this paper we present a discrete scheme for (1.1) rewritten as the first-order system

Denote by (\cdot, \cdot) and $\|\cdot\|$ the scalar product and the norm in $L^2(0,1)$.

An approximate solution of problem (1.4)-(1.6) will be sought in the form

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i(t)\omega_{h,i}, \quad v_h(x,t) = \sum_{j=0}^N v_j(t)\omega_{h,j}, \quad (2.1)$$

$$f_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(t)\omega_{h,i}, \quad \varphi_h(x,t) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(t)\omega_{h,j}, \quad \psi_h(x,t) = \sum_{j=0}^N \psi_j(t)\omega_{h,j}.$$

The functions $u_i(t), v_j(t), f_i(t), \varphi_j(t), \psi_j(t)$ are defined by the system of ordinary differential equations

$$(u_{h,i}, \omega_{h,i}) = \left(\left(cd - a + b \int_0^1 v_h^2 dx \right) v_{h,x} - cd\varphi_h, \omega_{h,i} \right), \quad (2.2)$$

$$(v_{h,i}, \omega_{h,i}) = (u_{h,x}, \omega_{h,i}), \quad (f_{h,i}, \omega_{h,i}) = (c\varphi_{h,x} - c^2 d(\psi_h - v_h), \omega_{h,i}),$$

$$(\varphi_{h,i}, \omega_{h,i}) = (f_{h,x}, \omega_{h,i}), \quad (\psi_{h,i}, \omega_{h,i}) = (f_h, \omega_{h,i}),$$

$0 < t \leq T$, provided that the values

$$u_i(0), v_j(0), f_i(0), \varphi_j(0), \psi_j(0) \text{ are given} \quad (2.3)$$

and

$$w^{(1)}(x_i) - u_i(0), w^{(2)}(x_j) - v_j(0), \psi^{(1)}(x_i) - f_i(0), \quad (2.4)$$

$$\psi_x^{(2)}(x_j) - \varphi_j(0), \psi^{(2)}(x_j) - \psi_j(0) \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0.$$

In (2.2)-(2.4) $i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, N$.

3. MATRIX NOTATION OF THE SYSTEM

Let us introduce some notations. To functions λ_h and μ_h of the form

$$\lambda_h = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(t)\omega_{h,i}, \quad \mu_h = \sum_{j=0}^N \mu_j(t)\omega_{h,j} \quad (3.1)$$

we assign the vectors

$$\lambda_h(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{N-1}(t))', \quad \mu_h(t) = (\mu_0(t), \mu_1(t), \dots, \mu_N(t))'. \quad (3.2)$$

Now system (2.2) can be rewritten as

$$M \frac{du_h}{dt} = (cd - a + bhv'_h K v_h) Q v_h - cdL\varphi_h,$$

$$K \frac{dv_h}{dt} = -Q'u_h, \quad M \frac{df_h}{dt} = cQ\varphi_h - c^2 dL(\psi_h - v_h), \quad (3.3a)-(3.3c)$$

$$K \frac{d\varphi_h}{dt} = -Q'f_h, \quad K \frac{d\psi_h}{dt} = L'f_h,$$

$0 < t \leq T$. Conditions (2.3) mean that the vectors

$$u_h(0), v_h(0), f_h(0), \varphi(0), \psi_h(0) \text{ are given.} \quad (3.4)$$

In (3.3)

$$2K(v_h^n - v_h^{n-1}) = -\tau_n Q'(u_h^n + u_h^{n-1}), \quad (4.1a)-(4.1c)$$

$$M(f_h^n - f_h^{n-1}) = \frac{\tau_n c}{2} Q(\varphi_h^n + \varphi_h^{n-1}) - \frac{\tau_n c^2 d}{2} L(\psi_h^n + \psi_h^{n-1} - v_h^n - v_h^{n-1}).$$

$$2K(\varphi_h^n - \varphi_h^{n-1}) = -\tau_n Q'(f_h^n + f_h^{n-1}),$$

$$2K(\psi_h^n - \psi_h^{n-1}) = \tau_n L'(f_h^n + f_h^{n-1}),$$

$n = 1, 2, \dots, P$, with the initial conditions

$$u_h^0 = u_h(0) + \Delta u_h(0), \quad v_h^0 = v_h(0) + \Delta v_h(0),$$

$$f_h^0 = f_h(0) + \Delta f_h(0), \quad \varphi_h^0 = \varphi_h(0) + \Delta \varphi_h(0), \quad (4.2a)-(4.2c)$$

$$\psi_h^0 = \psi(0) + \Delta \psi_h(0).$$

Here

$$\Delta u_h(0), \quad \Delta v_h(0), \quad \Delta f_h(0), \quad \Delta \varphi_h(0), \quad (4.3)$$

are the error vectors of the initial conditions (3.4).

We introduce into consideration the vectors $g_h(t_n) = (u_h(t_n), v_h(t_n), f_h(t_n), \varphi_h(t_n), \psi_h(t_n))'$, $y_h^n = (u_h^n, v_h^n, f_h^n, \varphi_h^n, \psi_h^n)'$ and the error vector of method (4.1), (4.2) $z_h^n = y_h^n - g_h(t_n)$, $n = 0, 1, \dots, P$.

System (4.1) can be rewritten as

$$A \frac{y_h^n - y_h^{n-1}}{\tau_n} = \frac{1}{2} (B + C(v_h^n) + C(v_h^{n-1}))(y_h^n + y_h^{n-1}) \quad (4.4)$$

and (4.2) as

$$y_h^0 = g_h(0) + \Delta g_h(0), \quad (4.5)$$

where $\Delta g_h(0)$ is the vector with components (4.3).

In (4.4), A , B and C are the block square matrices of order five defined by the formulas

$$A = \begin{pmatrix} M & & & & \\ & 2K & 0 & & \\ & & M & & \\ & & & 2K & \\ & & & & 2K \end{pmatrix}, \quad (4.6a)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (cd-a)Q & 0 & -cdL & 0 \\ -2Q' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 dL & 0 & cQ & -c^2 dL \\ 0 & 0 & -2Q' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2L' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6b)$$

$$C(v) = \frac{bh}{2} v' K v \begin{pmatrix} 0 & Q & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad v \in R^{N+1}, \quad (4.6c)$$

where 0 is the rectangular zero matrix whose dimensions are defined as follows: the number of rows (columns) in the matrix is equal to $N-1$ if the matrix is in the first or the third row (column) of the block matrix, and to $N+1$ in all other cases.

5. EQUATION FOR AN ERROR

We are to obtain an equation, which is satisfied by the error of method (4.1), (4.2). Replacing y_h^n in (4.4) and (4.5) by $z_h^n + g_h(t_n)$, we have

$$A \frac{z_h^n - z_h^{n-1}}{\tau_n} = \frac{1}{2} B(z_h^n + z_h^{n-1}) + \alpha_h^{n,n-1} + \frac{1}{2} \beta_h^{n,n-1}, \quad (5.1)$$

$n = 1, 2, \dots, P$, and

$$z_h^0 = \Delta g_h(0).$$

In (5.1), denote by $\alpha_h^{n,n-1}$ the approximation error

$$\alpha_h^{n,n-1} = -A \frac{g_h(t_n) - g_h(t_{n-1})}{\tau_n} + \frac{1}{2} [B + C(v_h(t_n)) + C(v_h(t_{n-1}))](g_h(t_n) + g_h(t_{n-1})), \quad (5.2)$$

and by $\beta_h^{n,n-1}$ the vector

$$\beta_h^{n,n-1} = (C(v_h^n) + C(v_h^{n-1}))(y_h^n + y_h^{n-1}) - (C(v_h(t_n)) + C(v_h(t_{n-1})))(g_h(t_n) + g_h(t_{n-1})), \quad (5.3)$$

$n = 1, 2, \dots, P$.

Let us introduce a scalar product and vector norms in R^{N+k} , $k = -1, 1$. If λ and μ are the same dimension vectors whose l -th components are equal to λ_l and μ_l , then the scalar product

$$(\lambda, \mu)_h = h \sum_l \lambda_l \mu_l,$$

where all components of the vectors λ and μ participate in the summation, and the norm

$$\|\lambda\|_h = (\lambda, \lambda)_h^{\frac{1}{2}}.$$

If W is a symmetrical positive-definite matrix whose order coincides with the dimension of the vector λ , then the energetic norm

$$\|\lambda\|_{W,h} = (W\lambda, \lambda)_h^{\frac{1}{2}}.$$

Now transform (5.1). Let 0_{N+k} denote the zero vector from the space R^{N+k} , $k = -1, 1$. By (5.3) and (4.6c) the vector

$$\beta_h^{n,n-1} = (\beta_{1h}^{n,n-1} 0_{N+1}, 0_{N-1}, 0_{N+1}, 0_{N+1})', \quad (5.4)$$

and its first component is defined by the formula

$$\beta_{1h}^{n,n-1} = \frac{b}{2} \sum_{j=n-1}^n \sum_{i=n-1}^n \left(\|v_h^i\|_{K,h}^2 Qv_h^j - \|v_h(t_i)\|_{K,h}^2 Qv_h(t_j) \right). \quad (5.5)$$

Using the symmetry of the matrix K and the notation

$$z_{2h}^l = v_h^l - v_h(t_l), \quad l = n-1, n, \quad (5.6)$$

we obtain

$$\begin{aligned} & \|v_h^i\|_{K,h}^2 Qv_h^j - \|v_h(t_i)\|_{K,h}^2 Qv_h(t_j) = \|v_h(t_i) + z_{2h}^i\|_{K,h}^2 Q(v_h(t_j) + \\ & + z_{2h}^j) - \|v_h(t_i)\|_{K,h}^2 Qv_h(t_j) = \|v_h(t_i)\|_{K,h}^2 Qz_{2h}^j + [(Kv_h(t_i), z_{2h}^j)_h + \\ & + (Kz_{2h}^i, v_h(t_j))_h + \|z_{2h}^i\|_{K,h}^2] Q(v_h(t_j) + z_{2h}^j) = \|v_h(t_i)\|_{K,h}^2 Qz_{2h}^j + \\ & + [2(Kv_h(t_i), z_{2h}^j)_h + \|z_{2h}^i\|_{K,h}^2] Qv_h^j = \|v_h(t_i)\|_{K,h}^2 Qz_{2h}^j + (K(v_h^i + v_h(t_i)), z_{2h}^j)_h Qv_h^j. \end{aligned} \quad (5.7)$$

The substitution of (5.4), (5.5) and (5.7) into (5.1) gives

$$\sum_{l=0}^i \left[(-1)^l A - \frac{\tau_n}{2} B \right] z_h^{n-1} - \frac{\tau_n}{2} \beta_h^{n-1} = \tau_n \alpha_n^{n,n-1}, \quad (5.8)$$

where the vector

$$\beta_h^i = \left(\frac{b}{2} \sum_{j=n-1}^n \left[\|v_h(t_j)\|_{K,h}^2 Qz_{2h}^j + (K(v_h^i + v_h(t_i), z_{2h}^j)_h Qv_h^j \right], \mathbf{0}_{N+1}, \mathbf{0}_{N-1}, \mathbf{0}_{N+1}, \mathbf{0}_{N+1} \right), \quad (5.9)$$

$$i = n-1, n, \quad n = 1, 2, \dots, P.$$

6. AUXILIARY PROPOSALS

Our aim is to estimate the error z_h^n using equation (5.8). For this we need first to prove some inequalities.

LEMMA 1. *The relations*

$$\begin{aligned} \|Q\|_h &\leq \frac{1}{h}, \\ \|A^{-1}\|_h &\leq 3, \\ \|B\|_h &\leq \gamma \end{aligned} \quad (6.1a)-(6.1c)$$

are fulfilled. In the last of these inequalities

$$\gamma = \max^{\frac{1}{2}}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad (6.2)$$

where

$$\gamma_1 = 2c^4 d^2 + \frac{(cd-a)^2}{h^2} + \frac{5cd}{6h} (c^2 + cd - a), \quad \gamma_2 = 4 \left(1 + \frac{1}{h^2} \right),$$

$$\gamma_3 = c^2 d^2 + \frac{c^2}{h^2} + \frac{5cd}{6h} (2c^2 + cd - a).$$

PROOF. One can easily verify inequality (6.1a). It suffices, using (3.5d), to write the matrix $Q'Q$ and then to apply Gerschgorin's theorem [5] to estimate its highest eigenvalue. By the same theorem and (3.5a), (3.5c) we conclude that

$$\frac{1}{6} \|\lambda\|_h^2 \leq (K\lambda, \lambda)_h \leq \|\lambda\|_h^2, \quad \lambda \in R^{N+1}, \quad (6.3a)$$

$$\frac{1}{3} \|\lambda\|_h^2 \leq (M\lambda, \lambda)_h \leq \|\lambda\|_h^2, \quad \lambda \in R^{N-1}, \quad (6.3b)$$

which imply the existence of the matrices K^{-1} , M^{-1} and the inequalities $\|K^{-1}\|_h \leq 6$, $\|M^{-1}\|_h \leq 3$. Now by virtue of (4.6a) the existence of the matrix A^{-1} and the validity of estimate (6.1b) are obvious.

To obtain (6.1c) we need to write the block matrix $B'B = (B_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}$. Using (4.6b), we give the following non-zero block types

$$\begin{aligned} B_{11} &= 4QQ', & B_{22} &= (cd - a)^2 Q'Q + c^4 d^2 L'L, & B_{33} &= 4(QQ' + LL'), \\ B_{44} &= c^3 d^2 L'L + c^3 Q'Q, & B_{55} &= c^4 d^2 L'L, \\ B_{24} &= B'_{42} = c^3 dL'Q - cd(cd - a)Q'L, & B_{25} &= B'_{52} = -c^4 d^2 L'L, \\ & & B_{45} &= B_{54} = -c^3 dQ'L. \end{aligned} \quad (6.4)$$

As one can see, each of the matrices on the right-hand side of equalities (6.4) is square. Next, we introduce some definitions. Let some square matrix be given. To each element of this matrix we assign the number of the row i and the number of the column j , in which this element is contained. The set of elements, for which $|i-j|=k$, $k>0$, will be called the k -th diagonal. The diagonal is said to be lower if $i>j$, and upper if $i<j$. By the main diagonal is understood the set of elements for which $i=j$. It is assumed that on the diagonal the elements are arranged in the succession corresponding to the monotone growth of the indices i and j . The diagonal will be called the zero diagonal if it consists only of zeros, and the nonzero diagonal otherwise.

Table 1

Matrix	Order	Diagonal		
		Main	1-st	2-nd
$36LL'$	$N-1$	18, 18, ..., 18	8, 8, ..., 8	1, 1, ..., 1
$36L'L$	$N+1$	1, 17, 18, 18, ..., 18, 17, 1	4, 8, 8, ..., 8, 4	1, 1, ..., 1
$4h^2QQ'$	$N-1$	2, 2, ..., 2	zero	-1, -1, ..., -1
$4h^2Q'Q$	$N+1$	1, 1, 2, 2, ..., 2, 1, 1	zero	-1, -1, ..., -1
$12hL'Q = 12h(Q'L)'$	$N+1$	-1, -1, 0, 0, ..., 0, 1, 1	upper 0, 4, 4, ..., 4 lower -4, -4, ..., -4, 0	upper 1, 1, ..., 1 lower -1, -1, ..., -1

Using (3.5b), (3.5d) in Table 1, we write the orders and nonzero diagonals of the desired matrix. For convenience, the matrices are provided with multipliers.

Since

$$\|B\|_h = \gamma, \quad (6.5)$$

where γ is the highest singular number of the matrix B , the problem now consists in estimating γ . By equalities (6.4), Table 1 and Gerschgorin's theorem, each of the block rows of the matrix $B'B$ leads to the definite inequality for γ . (see Table 2).

Table 2

Block row No.	Inequality
1	$\left \gamma^2 - \frac{2}{h^2} \right \leq \frac{2}{h^2}$
2	$\left \gamma^2 - \frac{(cd-a)^2}{2h^2} - \frac{c^4 d^2}{2} \right \leq \frac{(cd-a)^2}{2h^2} + \frac{3c^4 d^2}{2} + \frac{5cd(cd-a)}{6h} + \frac{5c^3 d}{6h}$
3	$\left \gamma^2 - \frac{2}{h^2} - 2 \right \leq \frac{2}{h^2} + 2$
4	$\left \gamma^2 - \frac{c^2 d^2}{2} - \frac{c^2}{2h^2} \right \leq \frac{5c^3 d}{3h} + \frac{5cd(cd-a)}{6h} + \frac{c^2 d^2}{2} + \frac{c^2}{2h^2}$
5	$\left \gamma^2 - \frac{c^4 d^2}{2} \right \leq \frac{3c^4 d^2}{2} + \frac{5c^3 d}{6h}$

Table 2 and equality (6.5) imply (6.1c). The lemma is proved.

We will need the value $s_{(0)}$ defined by of the vectors from the initial conditions (3.4)

$$s_{(0)} = \frac{a}{b} + \left\{ \left[\frac{2}{b} \|u_h(0)\|_{M,h}^2 + cd \|v_h(0) - \psi_h(0)\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b} (a-b \|v_h(0)\|_{K,h}^2)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{c} \|f_h(0)\|_{M,h}^2 + \|\varphi_h(0)\|_{K,h}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{6}{b} cd T} \|L\varphi_h(0) - Q\psi_h(0)\|_h. \quad (6.6)$$

The next lemma gives an estimate for the vector $v_h(t)$ from problem (3.3), (3.4).

LEMMA 2. *The inequality*

$$\|v_h(t)\|_{K,h}^2 \leq s_{(0)}, \quad (6.7)$$

$0 \leq t \leq T$, is fulfilled.

PROOF. We perform a scalar multiplication of equations (3.3) by

$$u_h, cdv_h, \frac{1}{c} f_h, \varphi_h, cd\psi_h$$

respectively and sum the resulting relations. Some transformations lead to

$$\frac{de_h^2(t)}{dt} = -\frac{2}{3cd} (\zeta_h(0), u_h)_h,$$

where

$$e_h(t) = \frac{1}{\sqrt{3cd}} \left[\|u_h\|_{M,h}^2 + cd \|v_h - \psi_h\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b} (a-b) \|v_h\|_{K,h}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{c} \left[\|f_h\|_{M,h}^2 + \|\varphi_h\|_{K,h}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.15)$$

This and the estimate $\|u_h\|_h \leq \sqrt{3} \|u_h\|_{M,h}$ derived by means of Gershgorin's theorem give

$$e_h^2(t) \leq e_h^2(0) + 2 \|\zeta_h(0)\|_h \int_0^t e_h(\tau) d\tau. \quad (6.16)$$

We need to use the Bihari and Langenhopf generalization of Gronwall's inequality [6]. Let $p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ be a continuous function and $\omega: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ a non-decreasing continuous function. Then the inequality

$$p(t) \leq c_0 + \int_0^t \omega(p(\tau)) d\tau,$$

$0 \leq t < \infty$, where c_0 is a positive constant, implies $p(t) \leq \Omega^{-1}(\Omega_0) < \infty$, $0 \leq t \leq \Omega_0$, for a positive number Ω_0 smaller than $\Omega(\infty)$. Here

$$\Omega(t) = \int_{c_0}^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)}, \quad t \geq c_0.$$

Let us apply this result to (6.16). On assuming that $p(t) = e_h^2(t)$, $c_0 = e_h^2(0)$, $\omega(\tau) = 2 \|\zeta_h(0)\|_h \sqrt{\tau}$, $\Omega_0 = T$, we obtain

$$e_h(t) \leq e_h(0) + T \|\zeta_h(0)\|_h, \quad (6.17)$$

$0 < t \leq T$.

By (6.17) and (6.15)

$$\|v_h(t)\|_{K,h}^2 \leq \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{6}{b}} c d e_h(t) \leq \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{6}{b}} c d (e_h(0) + T \|\zeta_h(0)\|_h). \quad (6.18)$$

The substitution of (6.15), (6.12) and (6.6) into (6.18), yields estimate (6.7).

Let us derive an estimate for the vector \hat{v}_h^n from problem (4.1), (4.2).

LEMMA 3. If the vectors y_1 and y_2 , where $y_l = (u_l, v_l, f_l, \varphi_l, \psi_l)'$, $u_l, f_l \in R^{N-1}$, $v_l, \varphi_l, \psi_l \in R^{N+1}$, $l=1,2$, satisfy the equation

$$A(y_2 - y_1) = \frac{\tau}{2} (B + C(v_2) + C(v_1))(y_2 + y_1), \quad (6.19)$$

$\tau > 0$, then

$$\zeta(y_2) = \zeta(y_1), \quad (6.20)$$

$$e^2(y_2) - e^2(y_1) = -\frac{\tau}{3cd}(\zeta(y_1), u_2 + u_1)_h, \quad (6.21)$$

where

$$\zeta(y_i) = L\varphi_i - Q\psi_i \quad (6.22a)$$

$$e(y_i) = \frac{1}{\sqrt{3cd}} \left[\|u_i\|_{M,h}^2 + cd\|v_i - \psi_i\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b}(a-b\|v_i\|_{K,h}^2) + \frac{1}{c}\|f_i\|_{M,h}^2 + \|\varphi_i\|_{K,h}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.22b)$$

PROOF. System (6.19) contains five vector equations. Let us scalarly multiply them by the vectors

$$u_1 + u_2, \quad cd(v_1 + v_2), \quad \frac{1}{c}(f_1 + f_2), \quad \varphi_1 + \varphi_2, \quad cd(\psi_1 + \psi_2),$$

respectively, and sum the obtained equalities. Taking (4.6) into account, we get

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (-1)^i (\|u_i\|_{M,h}^2 + cd\|v_i\|_{K,h}^2 + \frac{1}{c}\|f_i\|_{M,h}^2 + \|\varphi_i\|_{K,h}^2 + cd\|\psi_i\|_{K,h}^2) = \\ = \tau \left\{ \left[-\frac{a}{2} + \frac{b}{4} (\|v_2\|_{K,h}^2 + \|v_1\|_{K,h}^2) \right] (Q(v_2 + v_1), u_2 + u_1)_h + \right. \\ \left. + \frac{cd}{2} [(L(v_2 + v_1), f_2 + f_1)_h - (L(\varphi_2 + \varphi_1), u_2 + u_1)_h] \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Let us consider the scalar products in (6.23). By (6.19) and (4.6)

$$\begin{aligned} (Q(v_2 + v_1), u_2 + u_1)_h &= (v_2 + v_1), Q'(u_2 + u_1)_h = \\ &= -\frac{2}{\tau}(v_2 + v_1, K(v_2 - v_1))_h = -\frac{2}{\tau}(\|v_2\|_{K,h}^2 - \|v_1\|_{K,h}^2), \\ (L(v_2 + v_1), f_2 + f_1)_h &= (v_2 + v_1, L'(f_2 + f_1))_h = \frac{2}{\tau}(v_2 + v_1, K(\psi_2 - \psi_1))_h. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Next, system (6.19) and (4.6) imply the equalities

$$\begin{aligned} L(\varphi_2 - \varphi_1) &= -\frac{\tau}{2}LK^{-1}Q'(f_2 + f_1), \\ Q(\psi_2 - \psi_1) &= \frac{\tau}{2}QK^{-1}L'(f_2 + f_1), \end{aligned}$$

which, along with (6.10), give (6.20).

By virtue of (6.19), (4.6) and (6.20), (6.22a) we obtain

$$\begin{aligned} (L(\varphi_2 + \varphi_1), u_2 + u_1)_h &= (Q(\psi_2 + \psi_1) + 2\zeta(y_1), u_2 + u_1)_h = \\ &= (\psi_2 + \psi_1, Q'(u_2 + u_1))_h + 2(\zeta(y_1), u_2 + u_1)_h = \\ &= -\frac{2}{\tau}(\psi_2 + \psi_1, K(v_2 - v_1))_h + 2(\zeta(y_1), u_2 + u_1)_h. \end{aligned} \quad (6.25)$$

The substitution of (6.24) and (6.25) into (6.23) results in (6.21). The lemma is proved.

We introduce the quantity s_0 which is defined by the vectors of the initial conditions (4.2)

$$s_0 = \frac{a}{b} + \left\{ \frac{2}{b} \left[\|u_h^0\|_{M,h}^2 + cd \|v_h^0 - \psi_h^0\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b} (a-b) \|v_h^0\|_{K,h}^2 \right] + \frac{1}{c} \left[f_h^0\|_{M,h}^2 + \|\varphi_h^0\|_{K,h}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{6}{b}} cdT \|L\varphi_h^0 - Q\psi_h^0\|_h. \quad (6.26)$$

LEMMA 4. *The priori estimate*

$$\|v_h^n\|_{K,h}^2 \leq s_0, \quad (6.27)$$

$n = 1, 2, \dots, P$, holds.

PROOF. For every n system (4.1) or (4.4) is inscribed into scheme (6.19). Using (6.20) several times, we write the result as

$$\zeta(y_h^{n-1}) = \zeta(y_h^0). \quad (6.28)$$

Applying (6.21) and (6.28), for fixed n we have

$$e^2(y_h^n) - e^2(y_h^{n-1}) = -\frac{\tau_n}{3cd} (\zeta(y_h^0), u_h^n + u_h^{n-1})_h. \quad (6.29)$$

Taking into account (6.29), (6.22b) and (6.3b), we conclude that

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l e^2(y_h^{n-l}) - \tau_n \|\zeta(y_h^0)\|_h e(y_h^{n-1}) \leq 0.$$

By solving this inequality with respect to $e(y_h^n)$ we have $e(y_h^n) \leq e(y_h^{n-1}) + \tau_n \|\zeta(y_h^0)\|_h$ which implies

$$e(y_h^n) \leq e(y_h^0) + T \|\zeta(y_h^0)\|_h, \quad (6.30)$$

$n = 1, 2, \dots, P$. Combining (6.30) and (6.22b) gives us

$$\|v_h^n\|_{K,h}^2 \leq \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{6}{b}} cde(y_h^n) \leq \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{6}{b}} cd(e(y_h^0) + T \|\zeta(y_h^0)\|_h). \quad (6.31)$$

Using (6.31) and notations (6.26), (6.22), we obtain inequality (6.27).

7. ERROR OF THE CRANK-NICHOLSON SCHEME

THEOREM. *If*

$$\tau_n \leq \frac{2(1-\varepsilon_n)}{\sigma}, \quad (7.1)$$

then for an error of method (4.1), (4.2) the estimate

$$\|z_h^n\|_h \leq \exp\left(\frac{\rho_n \sigma}{\varepsilon_n} t_n\right) \left(\|z_h^0\|_h + \frac{3}{\varepsilon_n} \sum_{l=1}^n \tau_l \|\alpha_h^{l,l-1}\|_h \right) \quad (7.2)$$

holds, where $n = 1, 2, \dots, P$, $0 < \varepsilon_n < 1$, $\sigma = 3[\gamma + b\sqrt{6}(s_{(0)} / \sqrt{6} + \sqrt{s_{(0)}s_0 + s_0})/h]$,

$\rho_n = \max_i \tau_i / \min_i \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, while the error of the approximation $\alpha_h^{l,l-1}$ and the parameters γ , $s_{(0)}$, s_0 are defined by equalities (5.2) and (6.2), (6.6), (6.26).

PROOF. Let us multiply both sides of (5.8) by A^{-1} and use the resulting relation together with (5.9) and (6.1). Then

$$\sum_{i=0}^1 \left\{ \left[(-1)^i - \frac{3\tau_n}{2} \gamma \right] \|z_h^{n-1}\|_h - \frac{3\tau_n}{2} \|\beta_h^{n-1}\|_h \right\} \leq 3\tau_n \|\alpha_h^{n,n-1}\|_h, \quad (7.3a)$$

and, moreover,

$$\|\beta_h^i\|_h \leq \frac{b}{2h} \sum_{j=n-1}^n \left[\|v_h(t_j)\|_{K,h}^2 + \left(\|Kv_h^i\|_h + \|Kv_h(t_j)\|_h \right) \|v_h^j\|_h \right] \|z_{2h}^i\|_h, \quad (7.3b)$$

$i = n-1, n, \quad n = 1, 2, \dots, P.$

By virtue of (6.3a)

$$\|Kv_h^i\|_h = \left\| K^{\frac{1}{2}} v_h^i \right\|_{K,h} \leq \left\| K^{\frac{1}{2}} v_h^i \right\|_h = \|v_h^i\|_{K,h} \quad (7.4a)$$

and, similarly,

$$\|Kv_h(t_i)\|_h \leq \|v_h(t_i)\|_{K,h}. \quad (7.4b)$$

Next, by (6.3a), (5.6) and the definition of z_h^i it can be asserted that

$$\|v_h^i\|_h \leq \sqrt{6} \|v_h^i\|_{K,h}, \quad \|z_{2h}^i\|_h \leq \|z_h^i\|_h. \quad (7.5)$$

The substitution of (7.4) and (7.5) into (7.3b) gives

$$\|\beta_h^i\|_h \leq \frac{b}{2h} \|z_h^i\|_h \sum_{j=n-1}^n \left[\|v_h(t_j)\|_{K,h}^2 + \sqrt{6} \left(\|v_h^i\|_{K,h} + \|v_h(t_j)\|_{K,h} \right) \|v_h^j\|_{K,h} \right].$$

Using this estimate and (6.7), (6.27) in (7.3a), we obtain

$$\left(1 - \frac{\tau_n \sigma}{2} \right) \|z_h^n\|_h \leq \left(1 + \frac{\tau_n \sigma}{2} \right) \|z_h^{n-1}\|_h + 3\tau_n \|\alpha_h^{n,n-1}\|_h. \quad (7.6)$$

Since (7.1) implies $1 - \frac{\tau_n \sigma}{2} \geq \varepsilon_n > 0$, it follows from (7.6) that

$$\|z_h^n\|_h \leq \left(1 + \frac{\tau_n \sigma}{\varepsilon_n} \right) \|z_h^{n-1}\|_h + \frac{3}{\varepsilon_n} \tau_n \|\alpha_h^{n,n-1}\|_h.$$

Hence

$$\|z_h^n\|_h \leq \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{\tau_m \sigma}{\varepsilon_m} \right) \left(\|z_h^0\|_h + \frac{3}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^n \tau_i \|\alpha_h^{i,i-1}\|_h \right). \quad (7.7)$$

Taking into account (7.7) and the inequalities

$$\tau_m \leq \max_i \tau_i \leq \frac{t}{n} \rho_n,$$

where $m = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n$, we conclude that estimate (7.2) is valid.

The theorem is proved.



REFERENCES

1. M.Hirschhorn, E.Reiss. *Dynamic buckling of a nonlinear Timoshenko beam*. SIAM J. Appl. Math. 34(1979), pp. 290-301.
2. A.Volmir. *Nonlinear dynamics of plates and shells* (Russian). Nauka, Moscow, 1972.
3. M.Tucsnak. *On an initial boundary value problem for the nonlinear Timoshenko beam*. An. Acad.Bras. Cienc. 63, N2, 1991, pp. 115-125.
4. I.Christie, J.M.Sanz-Sern. *A Galerkin method for a nonlinear integro-differential wave system*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engin 44(1984), pp. 229-237.
5. V.Voyevodin, Yu.Kuznetsov. *Matrices and Computations* (Russian). Nauka, Moscow, 1984.
6. E.Beckenbach, R.Bellman. *Inequalities*. Springer, Berlin, 1971.

პრობლემატიკური უზრუნველყოფის კატეგორია

პ. ჟურაძე

კომპიუტერების მენეჯერული უზრუნველყოფის კატეგორია

ტიმოშენკოს მოდელი გამოყენებულია დიანამიური ძელის მდგომარეობის შესწავლისათვის. ამოწერილია შესაბამისი მეთოდი რიგის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემა ძელის შუახაზის წერტილების ნორმალური გადაადგილებისა და ნორმალის მობრუნების კუთხის მიმართ დამატებითი ფუნქციების შემოღების ხარჯზე მოცემული სიტუმა დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებათა სისტემაზე მისთვის ისმება პირობები საზღვარზე და საწყის მომენტში. შემდეგ ხორციელდება ამოცანის ეტაპობრივი დისკრეტიზება. სიერცული ცვლადის მიმართ ამოცანის აპროქსიმაციის მიზნით გამოყენებულია სასრულ ელემენტთა მეთოდი წრფივი ბაზისური ფუნქციებით.

ამგვარად, მიღებული კოშის ამოცანა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის იხსნება კრანკ-ნიკოლსონის ტიპის სქემის საშუალებით სქემის სიზუსტის შესაფასებლად იწერება ოპერატორული განტოლება, რომელიც ერთმანეთს უკავშირებს ცდომილებებს ორ მეზობელ დროის შერეზე შემდეგ გამოიყვანება საჭირო შეფასებები ოპერატორებისათვის და აპრიორული შეფასებები იმ წევრებისათვის, რომლებიც ქნიან აღნიშნულ განტოლებაში არაწრფივობას. ეს საშუალებას იძლევა მივიღოთ უტოლობები, რომელთაგან ერთი ადებს პირობას ბადის ბიჯს, ხოლო მეორე იძლევა სხვაობიანი სქემის ცდომილების ნორმის შეფასებას. მოყვანილია ფორმულები ამ უტოლობებში შემავალი პარამეტრების გამოსათვლელად.



NON-LOCAL PROBLEM IN TIME FOR ONE NON-LINEAR EQUATION

A. Shapatava, N. Kasradze,

Computer Software and Informational Technologies Chair

Abstract. In the present work there is considered one non-local in time initial-boundary value problem for non-linear equation, originated from the mathematical modeling of certain bio-chemical processes. Here are proved theorems of existence and uniqueness of solution; under the certain circumstances, it is shown that solution is non-negative. Theoretical researches are improved by numerical experiments on computer.

INTRODUCTION

Researched problem is of big importance, because until recent time reaction of ferments was considered in homogeneous environment, without taking into account diffusion, but in reality ferments are in dissolvent state in alive cells and it is necessary to bear in mind diffusion process. Investigation of kinetic reaction of ferments is important from mathematical as well as from practical point of view.

These types of problems with classical initial boundary value conditions were studied by many authors, e.g. I.Lions[1], J.Kernevez[2], A.Shapatava[3] etc. The same problems with non-local initial conditions were investigated by D.Gordeziani[4] in case of linear equation, A.Shapatava[5]- nonlinear equation with one point non-locality. We have multi-point non-locality i.e. we have dependence between internal of considered domain and boundary points.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

PROBLEM 1. We have to find function $u(x, t), x \in \Omega, t \in (0, T)$ solution of the following equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{u}{1+u} = 0 \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

satisfying boundary conditions:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2)$$

and non-local initial one:

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u(x, \xi_i) \quad (3)$$

where $0 < \xi_1 < \dots < \xi_m < T, \alpha_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

In case of non-local initial restriction we obtain classical problem, existence and uniqueness of its solution is already investigated.

VARIATIONAL STATEMENT OF THE PROBLEM 1. Let $V = H_0^1(\Omega)$. Let us consider

bilinear form $a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$ For any $u, v \in V$. Then we obtain the following variational

formulation:

We search:

$$u(t) \in V \quad (4)$$



satisfying:

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, v \right) + a(u(t), v) + \int_{\Omega} \sigma \frac{u(t)}{1+u(t)} v dx = 0 \quad (5)$$

and initial conditions:

$$u(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u(\xi_i) \quad (6)$$

We make the following notation: " $x \rightarrow u(x, t)$ " denoted by $u(t)$.

3. ITERATION METHOD AND THEOREM OF EXISTANCE

Let us consider the following iteration procedure:

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{k+1}}{\partial x^2} + \sigma \frac{u^{k+1}}{1+u^k} = 0, \quad (7)$$

$$u^{k+1}(0, t) = u^{k+1}(1, t) = 0, \quad (8)$$

$$u^{k+1}(x, 0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u^k(x, \xi_i). \quad (9)$$

Initial approximation is solution of the classical problem corresponding to (1)-(2) and $u^0(x, 0) = u_0(x)$.

THEOREM 1. If $\sigma \geq 0$ and initial solution $u_0 \geq 0$, then solution of the problem (7)-(9) is nonnegative.

PROOF. Let us make variation statement of the problem (7)-(9).

$$\left(\frac{\partial u^{k+1}(t)}{\partial t}, v \right) + a(u^{k+1}(t), v) + \sigma \int_{\Omega} \frac{u^{k+1}(t)}{1+u^k(t)} v dx = 0, \quad (10)$$

$$u^{k+1}(t) \in V, \quad (11)$$

$$u^{k+1}(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u^k(\xi_i). \quad (12)$$

Let us make the following notations: $u^{+,k+1} = \sup(u^{k+1}, 0)$, $u^{-,k+1} = \sup(-u^{k+1}, 0)$. It is evident that if $u^{k+1} \in V$, then $u^{+,k+1}, u^{-,k+1} \in V$. Let us place $v = u^{-,k+1}(t)$ in (10). Because of $a(v, v) \geq 0$ we obtain:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(u^{-,k+1}(t) \right)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\sigma}{1+u^k(t)} \left(u^{-,k+1}(t) \right)^2 dx \leq 0, \quad (13)$$

when $k = 0$ (13) can be written as follows:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(u^{-1}(t) \right)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\sigma}{1 + u^0(t)} \left(u^{-1}(t) \right)^2 dx \leq 0, \quad (14)$$

because of $\sigma \geq 0, u^0(t) \geq 0$ then we obtain:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(u^{-1}(t) \right)^2 dx \leq 0. \quad (15)$$

Taking into account initial condition we shall obtain:

$$u^{-1}(0) = \sup(-u^1(0), 0) = \sup\left(-\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u^0(\xi_i)\right)\right) = 0. \quad (16)$$

Then from (15) we shall receive: $u^{-1}(t) = 0 \Rightarrow u^1(t) \geq 0$. Now if we assume, that $u^k \geq 0$ for each k we shall in the same way prove that $u^{k+1} \geq 0$ for each k .

Thus, by applying method of mathematical induction, we prove, that the solution of the problem (10)-(12) $u^{k+1} \geq 0$.

THEOREM 2. If $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| < 1$ and there exist the unique solution of the problem (1)-(3), the iteration process (7)-(9) converges to the exact solution of the problem (1)-(3).

PROOF. Let us z^{k+1} be error $z^{k+1} = u^{k+1} - u$. Where u^{k+1} is solution of (7)-(9) problem on $k+1$ -th step of iteration, and u is the solution of (1)-(3) problem. It is evident that z^{k+1} satisfies the next problem:

$$\frac{\partial z^{k+1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 z^{k+1}}{\partial x^2} + \sigma \frac{z^{k+1}}{1 + u^k} = 0, \quad (17)$$

$$z^{k+1}(0, t) = z^{k+1}(1, t) = 0, \quad (18)$$

$$z^{k+1}(x, 0) = \sum_{i=1}^m z^k(x, \xi_i). \quad (19)$$

Now, multiply (17) on z^{k+1} , we shall obtain:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} z^{k+1} dx + a(z^{k+1}, z^{k+1}) + \sigma \int_{\Omega} \frac{1}{1 + z^k(t)} (z^{k+1})^2 dx = 0. \quad (20)$$

Let us consider the following norms: $\|u\| = \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{1/2}$ in V , and $\|u\| = \int_{\Omega} u^2 dx$ in $L_2(\Omega)$;

then we can write (20) as follows:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^{k+1}\|^2 + \|z^{k+1}\|^2 + \int_{\Omega} \sigma \frac{1}{1 + z^k} (z^{k+1})^2 dx = 0 \quad (21)$$



It is clear $\int_{\Omega} \sigma \frac{1}{1+z^k} (z^{k+1})^2 dx \geq 0$, and so we shall have:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^{k+1}\|^2 + \|z^{k+1}\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|z^{k+1}(t)\|^2 + \int_0^t \|z^{k+1}(\tau)\|^2 d\tau \leq \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i z^k(\xi_i, j) \right\|^2$$

than using mathematical induction we can prove, that for any k

$$\|z^k(t)\| \leq c = \text{const}, \quad \int_0^t \|z^k(\tau)\|^2 d\tau \leq c = \text{const}, \quad t \in [0, T] \quad (22)$$

Thus we have :

$$\|z^{k+1}\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i z^k(\xi_i, j) \right\|^2 \Rightarrow \|z^{k+1}\| \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \|z^k(\xi_i, j)\| \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^k \|z^0(\xi_i, j)\|$$

So we have :

$$\|z^{k+1}\| \leq c \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^k, \quad \text{where } c = \max_i \|z^0(\xi_i, j)\| \text{ and if } k \rightarrow \infty, \|z^{k+1}\| \rightarrow 0, \text{ i.e. } u^{k+1} \rightarrow u.$$

The theorem is proved.

REMARK: It is evident that estimations (22) are also true for function $u^k(t)$, we can prove that $u^0 \geq u^1 \geq \dots \geq u^k \geq u^{k+1} \geq \dots \geq 0$, from the latter estimations follow, that there existence solution of the problem stated above and $u(x, t) = \inf(u^k(x, t))$.

3. UNIQUES OF SOLUTION

THEOREM 4. If $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| < 1$, and there exists solution of the problem (1)-(3), it is unique.

PROOF. Let u_1 and u_2 be solution of the problem (1)-(3). It is evident that function $w = u_1 - u_2$ will be solution of the next problem:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{w}{(1+u_1)(1+u_2)} = 0, \quad (23)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad (24)$$

$$w(x, 0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i w(x, \xi_i). \quad (25)$$

After multiplication of (23) on w we obtain:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + a(w, w) + \sigma \int_{\Omega} \frac{w^2}{(1+u_1)(1+u_2)} dx = 0. \quad (26)$$

According to the already proved fact that solution of problem (1)-(3) is non-negative, we have that $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$, i.e. third member of (26) is nonnegative. So we can write:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|w\|^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |w(x, t)|^2 \leq |w(x, 0)|^2 \quad (27)$$

Then we have:

$$\max_t |w(x, t)| \leq |w(x, 0)| = \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j w(x, \xi_j) \right| \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j| |w(x, \xi_j)| \leq \max_t \sum_{j=1}^m |\alpha_j| |w(x, t)|$$

i.e.

$$\left(1 - \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \right) \max_t |w(x, t)| \leq 0 \quad (28)$$

In conclusion, because of $\sum_{j=1}^m |\alpha_j| < 1$, we have:

$$|w(x, t)| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad w(x, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v.$$

The theorem is proved.

REFERENCES

1. J.L. Lions. *Cours d'analyse numerique*. Ecole polytechnique, 1975.
2. J.P. Kernevez. *Enzyme mathematics*. Amsterdam, 1980.
3. A.S. Shapatava, D.G. Gordeziani (1993). *Non-local problems in time for some equations of mathematical physics*. Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics Reports. V.22, 1993.
4. A.S. Shapatava. *Non-local problems in time for one equation of biomathematic*. Report of Enlarged Session of the seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics. V.14, #3, 1998.

დროით არალოკალური ამოცანა პრთი არაწრფივი განტოლებებისათვის

ა. შაფათავა, ნ. კასრადე

კომპიუტერების მათ. უზრუნველყოფისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების კათედრა

წარმოდგენილ ნაშრომში განიხილება დროით არალოკალური საწყის-სასაზღვრო ამოცანა არაწრფივი განტოლებისათვის, რომელიც მიღებულია გარკვეული ბიოქიმიური პროცესების მათემატიკური მოდელირებისას. დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები და გარკვეულ პირობებში ნაჩვენებია ამონახსნის არაუარყოფითობა. თეორიული კვლევები დადასტურებულია ამოცანის რიცხვითი რეალიზაციით კომპიუტერზე

PROBABILISTIC-POSSIBILISTIC ANALYSIS OF INSUFFICIENT EXPERT DATA*)

G. Sirbiladze, N. Jorjashvili

Chair of Random Processes Theory

Abstract. In this paper we build Choquet's second order capacities on the field of expert insufficient data. This construction is based on the principle of maximum informational entropy. With the aid of this principle unknown associated probabilities and moments can be evaluated. In the approach of A. Kaufman's theory of expertons [3] we construct unique fuzzy subset from the associated probabilities.

INTRODUCTION

There are two classical approach to data analysis. If experimental data are "sufficiently" exact then for their processing and estimation of general characteristics probabilistic-statistical methods can be used.

If data are presented with "inaccuracy", by intervals then for their study the methods of theory of errors will be used.

But there are cases when both methods of statistics and the theory of errors do not give satisfactory results. The reason consists in the nature of data and means of measurement, description, scaling etc.

When data are presented by intervals and their description is "vague" and characterized by overlappings and in the receipt of data the expert is intervened, it is clear that the nature of data is combined: parallel to the probabilistic-statistical uncertainty there exists the possibilistic uncertainty which received by activity of subject. This fact gives rise to the necessity of the using of fuzzy methods. Only the probabilistic-possibilistic analysis guarantees more or less adequate results.

1. FUZZY MEASURE CONSTRUCTION ON THE GROUND OF EXPERT INSUFFICIENT DATA

Let the finite set $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ represents results of some quantity ξ measurement in the certain scale. Numerical characteristics of the quantity ξ are identical with data given by experimenters or experts and can be easily evaluated by statistical methods. It is known that fuzzy measure on a finite set X can be represented by the class of associated probabilities P_σ , $\sigma \in S_n$ [2]. If S_n is the permutation group then for $\forall \sigma \in S_n$ the probability distribution

$$P_\sigma = \{P_\sigma(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})\} \quad (1)$$

is connected with the fuzzy measure in the following form:

*) Research funded by INTAS no 2126 (A)

$$\begin{aligned}
 P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) &= g(\{x_{\sigma(i)}\}), \\
 P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) &= g(\{x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(i)}\}) - g(\{x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(i-1)}\}), \\
 P_{\sigma}(x_{\sigma(n)}) &= 1 - g(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}\}).
 \end{aligned} \tag{2}$$

In general [2] for $\forall A \subseteq X$ subset $\exists \tau \in S_n$, such that if $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\}$ then $\tau(i) = i_1, \dots, \tau(r) = i_r$ and

$$g(A) = g(\{x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(r)}\}) = \sum_{j=1}^r P_{\tau}(x_{\tau(j)}) = \sum_{j=1}^r P_{\tau}(x_{i_j}). \tag{3}$$

It is evident that to any P_{σ} on X corresponds the statistical moment of order t of the random quantity $\xi^t (t = 0, 1, \dots, n-1; \bar{\xi}^0 = 1)$:

$$\sum_{i=1}^n P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) x_{\sigma(i)}^t = \bar{\xi}_{\sigma}^t. \tag{4}$$

On the each permutation the probability distribution is defined by corresponding combined moments (based on experimenters and experts evidence), that is, the possibility of $n!$ representations. From (4) one can find probabilities

$$P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l^{\sigma(i)} \bar{\xi}_{\sigma}^l, \tag{5}$$

$i = 1, \dots, n$ and coefficients $a_l^{\sigma(i)}$ are received in appendix 1.

DEFINITION 1: The set of moments $\{\bar{\xi}_{\sigma}^t\}_{\sigma \in S_n}, t = 1, 2, \dots, n-1$, is called the class of associated moments.

In the class of associated moments there are $(n-1)n!$ elements. With the aid of (5) they uniquely define the class of associated probabilities and consequently one receive the possibility of the fuzzy measure construction on the set X :

$$g \leftrightarrow \{P_{\sigma}\}_{\sigma \in S_n} \leftrightarrow \{\bar{\xi}_{\sigma}^t\}_{t=1, \sigma \in S_n}^{n-1}. \tag{6}$$

Parameters $\bar{\xi}_{\sigma}^t$ will be defined from objective statistical measurements or expert evaluations of quantity ξ^t . Denote

$$E_{\sigma} = \{\bar{\xi}_{\sigma}^1, \bar{\xi}_{\sigma}^2, \dots, \bar{\xi}_{\sigma}^{n-1}\}. \tag{7}$$

Often in (7) the experimental data are limited. In this case we denote:

$$E_{\sigma}^{Experiment} \equiv \left\{ \bar{\xi}_{\sigma}^{p_1}, \bar{\xi}_{\sigma}^{p_2}, \dots, \bar{\xi}_{\sigma}^{p_r} \right\}, \tag{8}$$

$p_j \neq p_i, i \neq j; i, j = 1, \dots, r; p_k < p_l, \text{ if } k < l; r < n-1.$

DEFINITION 2: (8) is called insufficient objective (experimental) data (evidences).

Remainder $(n-r-1)$ data represent unknown moments or subjective ones, which are received from expert evaluations:

$$E_{\sigma}^{Expert} \equiv \left\{ \bar{\xi}_{\sigma}^{q_1}, \bar{\xi}_{\sigma}^{q_2}, \dots, \bar{\xi}_{\sigma}^{q_n} \right\}. \tag{9}$$

It is evident that $E_{\sigma}^{Experiment} \cap E_{\sigma}^{Expert} = \emptyset, E_{\sigma}^{Expert} \subseteq E_{\sigma} \setminus E_{\sigma}^{Experiment}.$

DEFINITION 3: Representation (9) is called expert data given by expert $I_{\sigma}.$

With any $\sigma \in S_n,$ data (7) are connected, where experimental data are the same for all σ and only subjective data may be different for different $\sigma.$ If $E_{\sigma}^{Expert} = E_{\sigma} \setminus E_{\sigma}^{Experiment} \neq \emptyset$ then the corresponding fuzzy measure (3) differs from probability measure. The course of this difference lies in different expert decisions.

In E_{σ} there are unknown and known data, corresponding sets denote as follows:

$$\begin{aligned} N_{\sigma} &\equiv \left\{ \bar{\xi}_{\sigma}^{q_{n+1}}, \bar{\xi}_{\sigma}^{q_{n+2}}, \dots, \bar{\xi}_{\sigma}^{q_{n-1}} \right\} = E_{\sigma} \setminus (E_{\sigma}^{Experiment} \cup E_{\sigma}^{Expert}), \\ M_{\sigma} &\equiv \left\{ \bar{\xi}_{\sigma}^{q_1}, \bar{\xi}_{\sigma}^{q_2}, \dots, \bar{\xi}_{\sigma}^{q_n} \right\} = E_{\sigma}^{Experiment} \cup E_{\sigma}^{Expert}. \end{aligned} \tag{10}$$

For the complete description of E_{σ} we can use the principle of maximum entropy [6]. With the aid of the principle known associated probabilities and moments can be evaluated.

Evidently $\exists \tau_{\sigma} \in S_n,$ such that $\tau_{\sigma}(i) = q_i, i = 1, \dots, k$ and $\tau_{\sigma}(k+1) = q_{k+1}, \dots, \tau_{\sigma}(n-1) = q_{n-1}.$ Thus the problem of evaluation reduces to the following problem of finding an extremum:

$$\begin{aligned} &Max \left\{ - \sum_{i=1}^n P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) \log P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) \right\}, \\ &\sum_{i=1}^n P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) = 1, \\ &\sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(q_j)} P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) = \bar{\xi}_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(q_j)}, j = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{11}$$

The corresponding Lagrangian have the following form:

$$-\sum_{i=1}^n P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) \log P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\bar{\xi}_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(t_j)} - \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) \right) + \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) \right) \quad (12)$$

Consider the equations system:

$$\frac{\partial L}{\partial P_{\sigma}(x_{\sigma(t)})} = 0, t = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

or

$$-\log P_{\sigma}(x_{\sigma(t)}) - \lambda_0 - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(t)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} = 0, \quad (14)$$

$t = 1, 2, \dots, n$; $\lambda_0 = 1 + \lambda_0$. Then

$$P_{\sigma}(x_{\sigma(t)}) = \exp \left(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(t)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} \right), \quad (15)$$

$t = 1, 2, \dots, n$. Consider the generalized statistical sum

$$Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \sum_{i=1}^n \exp \left(-\sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} \right). \quad (16)$$

It is known that

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \bar{\xi}_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(t_j)}, \quad \ln Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \lambda_0 \quad (17)$$

are identities. Quantities $\bar{\xi}_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(t_j)}$ ($j = k+1, k+2, \dots, k_l - 1$) are known and with respect to $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (17) gives the following equations system:

$$\sum_{i=1}^n \left(x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} - \bar{\xi}_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(t_j)} \right) \exp \left(-\sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} \right) = 0, \quad (18)$$

$$\lambda_0 = \ln \sum_{i=1}^n \exp \left(-\sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(t_j)} \right),$$

$l = 1, \dots, k$. If $\hat{\lambda} = \lambda_j(\sigma)$ is any numerical solutions of (18), one evaluate probability distributions $\left\{ \hat{P}_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) \right\}_{i=1}^n$ and accounting I_{σ} experts data the class of associated probabilities

$\left\{ \hat{P}_\sigma \right\}_{\sigma \in S_n}$ can be evaluated. Thus now we can construct the lower and upper Choquet's second order capacities [2]: $\forall A \subseteq X$

$$\hat{g}(A) = \min_{\sigma \in S_n} \hat{P}_\sigma(A), \quad \hat{g}^*(A) = \max_{\sigma \in S_n} \hat{P}_\sigma(A). \quad (19)$$

DEFINITION 4: $\left(\hat{g}, \hat{g}^* \right)$ Choquet's second order capacities are called fuzzy measures induced by combined (experimental and expert) data on the set X .

2. CONSTRUCTION OF FUZZY SUBSET (IMAGE)

For $\forall \sigma \in S_n$ the I_σ expert possesses insufficient data and, as it is shown in [7] corresponding $\left\{ \hat{P}_\sigma \right\}_{\sigma \in S_n}$ probability distributions induce fuzzy measures. Fuzzy measure contains information about a body of evidence on X [1]. This body of evidence is consonant:

$$K_1^\sigma = \{x_{\sigma(1)}\} \subseteq K_2^\sigma = \{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\} \subseteq \dots \subseteq K_n^\sigma = \{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\}$$

On this body of evidence one can define possibility distribution $\{\pi_\sigma\}$ which is connected with focal subsets and corresponding probability weights m^σ :

$$m^\sigma(\emptyset) = 0, \quad \sum_{i=1}^n m^\sigma(K_i^\sigma) = 1. \quad (20)$$

If for any focal subset we introduce the uniform probability distribution $P_\sigma(\cdot | K_i^\sigma)$, then the possibility distribution will be approximated by associated probabilities $\hat{P}_\sigma(\cdot)$ [1]. For $\forall x_{\sigma(i)}$

$$\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^i P_\sigma(x_{\sigma(j)} | K_j^\sigma) m^\sigma(K_j^\sigma) = \sum_{j=1}^i \frac{m^\sigma(K_j^\sigma)}{|K_j^\sigma|} I_{K_j^\sigma}(x_{\sigma(i)}), \quad (21)$$

where $|K_i^\sigma| = \text{Card}K_i^\sigma$ is the cardinality of the subset K_i^σ ; $I_{K_i^\sigma}$ is the indicator of K_i^σ . It is

evident that associated probability \hat{P}_σ for $\forall A \subseteq X$ will be within the limits of necessity and possibility:

$$N^\sigma(A) \leq \hat{P}_\sigma(A) \leq \Pi^\sigma(A). \quad (22)$$

It is easy to connect associated probabilities on the σ permutation with the possibility distribution:

$$\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (\pi_\sigma(x_{\sigma(j)}) - \pi_\sigma(x_{\sigma(j+1)})), \quad (23)$$

where

$$1 = \pi_\sigma(x_{\sigma(1)}) \geq \pi_\sigma(x_{\sigma(2)}) \geq \dots \geq \pi_\sigma(x_{\sigma(n+1)}) = 0. \quad (24)$$

From (23) one can obtain:

$$\pi_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^n \min \left\{ \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i)}), \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(j)}) \right\}. \quad (25)$$

Possibility distribution give rise to fuzzy subset $\tilde{\xi}^\sigma$ with following membership function [1]:

$$\chi_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \pi_\sigma(x_{\sigma(i)}), i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

DEFINITION 5: $\tilde{\xi}^\sigma$ is called the fuzzy subset induced by the activity of the I_σ expert.

(21) is the equations system for focal probabilities $m^\sigma(K_i^\sigma)$. We have:

$$\Pi^\sigma(A) = \max_{x_{\sigma(i)} \in A} \pi_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \max_{x_{\sigma(i)} \in A} \sum_{i=1}^n \min \left(\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i)}), \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(j)}) \right)$$

and

$$N^\sigma(A) = 1 - \Pi^\sigma(\bar{A}), \text{ where } \bar{A} = X \setminus A.$$

From (21)

$$\begin{aligned} \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(1)}) &= \frac{m^\sigma(K_1^\sigma)}{1} + \frac{m^\sigma(K_2^\sigma)}{2} + \dots + \frac{m^\sigma(K_n^\sigma)}{n}, \\ \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i)}) &= \frac{m^\sigma(K_i^\sigma)}{i} + \dots + \frac{m^\sigma(K_n^\sigma)}{n}, \\ \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(n)}) &= \frac{m^\sigma(K_n^\sigma)}{n}. \end{aligned} \quad (27)$$

and for focal probabilities

$$\begin{aligned} m^\sigma(K_n^\sigma) &= n \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(n)}) \\ m^\sigma(K_i^\sigma) &= i \left(\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i)}) - \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(i+1)}) \right) \\ m^\sigma(K_1^\sigma) &= i \left(\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(1)}) - \hat{P}_\sigma(x_{\sigma(2)}) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

DEFINITION 6: The set $\{m^\sigma\}_{\sigma \in S}$ of focal probabilities is called the class of associated focal probabilities.

Connection between m^σ and dual fuzzy measures \hat{g} and \hat{g}^* can be easily obtained. It is known that for $\forall A \subseteq X \exists \tau = \tau_A \in S_n$ such that $\hat{g}(A) = \hat{P}_{\tau_A}(A)$. Then, taking into account (28) we can write:

$$\hat{g}(A) = \sum_{i: x_i \in A} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} m^{\tau_A}(K_j^i) \tag{29}$$

and

$$\hat{g}^*(A) = 1 - \hat{g}(\bar{A}) \quad \bar{A} = X \setminus A.$$

DEFINITION 7: The set of fuzzy subsets $\{\xi_\sigma^\sigma\}_{\sigma \in S_n}$ is called the class of fuzzy subsets induced by $\{f^\sigma\}_{\sigma \in S_n}$ experts insufficient data.

Consider $\{f^\sigma\}_{\sigma \in S_n}$ experts in the Kaufman's theory of expertons [3]. In the discrete case experts' table of membership functions values is represented by following quantities $\{\chi'_{\sigma} = \chi_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) / i = 1, \dots, n; \sigma \in S_n\}$ χ'_{σ} is the value of membership function (measure of compatibility) of ξ^σ . If $a_0 = 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_L = 1$ is an increasing sequence of membership levels, the corresponding experton is presented as following:

$$E_{j_i} = \frac{1}{L} \sum_{\sigma \in S_n} I_{[a_{j-1}, a_j]}(\chi'_{\sigma}). \tag{30}$$

where $j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, L$ and

$$\chi_i = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L E_{j_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{31}$$

which is the experton mean of the membership of $x_i \in X$.

DEFINITION 8: Fuzzy subset

$$\xi = \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n & X \\ \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_i & \dots & \chi_n & \chi \end{matrix}$$

is called fuzzy subset (image) induced by expert's insufficient data with respect to fuzzy measure \hat{g} .



Analogously, we'll receive fuzzy subset $\tilde{\xi}^*$ induced by expert's insufficient data with respect to dual fuzzy measure \hat{g}^* .

DEFINITION 2: Fuzzy subsets $\tilde{\xi}$ and $\tilde{\xi}^*$ are called dual fuzzy subsets (images) induced by expert insufficient data.

PROPOSITION 1: $\tilde{\xi}$ and $\tilde{\xi}^*$ dual fuzzy subsets are equal subsets.

PROOF: It is known [2] $\forall \sigma \in S_n$ permutation $\exists \sigma^* \in S_n$ dual permutation ($x_{\sigma(i)} = x_{\sigma^*(n-i+1)}, i = 1, \dots, n$) that

$$\hat{P}_\sigma(\cdot) = \hat{P}_{\sigma^*}(\cdot), \quad (32)$$

where $\hat{P}_\sigma, \hat{P}_{\sigma^*}$ are respectively associated probabilities of \hat{g} and \hat{g}^* . From (26), (28) we have $\forall \sigma \in S_n$:

$$\pi_\sigma(\cdot) = \pi_{\sigma^*}(\cdot), \quad m^\sigma(\cdot) = m^{\sigma^*}(\cdot), \quad \xi^\sigma = \xi^{\sigma^*}. \quad (33)$$

Then

$$\Pi^\sigma(\cdot) = \Pi^{\sigma^*}(\cdot), \quad N^\sigma(\cdot) = N^{\sigma^*}(\cdot),$$

and

$$E_{j_i} = E_{j_i}^*,$$

where $E_{j_i}^*$ are expertons of $\tilde{\xi}^*$. Therefore

$$\chi_i = \chi_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (34)$$

3. FUZZY EXPECTED VALUE (FEV) ON THE EXPERT INSUFFICIENT DATA POPULATION

In [7] it was shown that nature of expert insufficient data is the source of fuzziness which is represented by Choquet's dual pair capacities $\left(\hat{g}, \hat{g}^* \right)$. In section 3 we demonstrated that expert insufficient data on the finite set X in expertons approximation induce the equal fuzzy sets $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^*$.

From the point of view decision making there are all conditions for choosing the most typical value (MTV) [5] corresponding of $\tilde{\xi}$. In our case

$$MTV = \chi^{-1}(FEV(\chi)), \quad (35)$$

where $FEV(\chi)$ is the fuzzy expected value [4]-[5]-[8]. Indeed, consider the ordered sequence of χ 's values:

$$\chi_{\tau(1)} \leq \chi_{\tau(2)} \leq \dots \leq \chi_{\tau(n)}. \tag{36}$$

Introduce notations:

$$K_i = \{\chi_{\tau(i)} \dots \chi_{\tau(n)}\} \quad g_i = \hat{g}(K_i) \quad g_i^* = \hat{g}^*(K_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

It is known that on the finite set X the FEV can be calculated by the formula:

$$FEV(\chi_{\xi}) = \{\chi_{\xi}(x) \circ \hat{g}(\cdot) = \max_i \{\chi_{\tau(i)} \wedge g_i\}. \tag{37}$$

In our case one receive lower and upper FEV 's

$$F \equiv FEV(\chi_{\xi}) \quad F^* \equiv FEV(\chi_{\xi}^*) = \max_i \{\chi_{\tau(i)}^* \wedge g_i^*\}. \tag{38}$$

It is evident that $F \leq F^*$ (if $\hat{g} \leq \hat{g}^*$) and on $[0;1]$ the pair F, F^* determines the interval $[F, F^*]$. Naturally (35) must be changed by

$$MTV = \{x \in X / F \leq \chi_{\xi} \leq F^*\}. \tag{39}$$

4. APPENDIX (CONSTRUCTION OF TRANSFORMATION $P_{\sigma} = A_{\sigma} M_{\sigma}$)

Consider the system of equations:

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) x'_{\sigma(i)} = \bar{\xi}_{\sigma}^t, \tag{40}$$

where $\bar{S}_{\sigma}^0 \equiv 1, t = 0, 1, \dots, n-1$. The mean determinant of system with respect to unknowns $P_{\sigma}(x_{\sigma(i)})$ is:

$$\Delta_{\sigma} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \dots & x_{\sigma(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(1)}^{n-1} & x_{\sigma(2)}^{n-1} & \dots & x_{\sigma(n)}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} [x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)}], \tag{41}$$

and i -th subsidiary determinant:

$$(i)$$

$$\Delta_{\sigma}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \frac{1}{\xi_{\sigma}^1} & \dots & 1 \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \dots & \xi_{\sigma}^1 & \dots & x_{\sigma(n)} \\ x_{\sigma(1)}^2 & x_{\sigma(2)}^2 & \dots & \xi_{\sigma}^2 & \dots & x_{\sigma(n)}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(1)}^{n-1} & x_{\sigma(2)}^{n-1} & \dots & \xi_{\sigma}^{n-1} & \dots & x_{\sigma(n)}^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Decompose $\Delta_{\sigma}^{(i)}$ by i -th column:

$$\Delta_{\sigma}^{(i)} = \sum_{l=1}^n (-1)^{i+l} \xi_{\sigma}^{l-1} \Delta_l^{(i)}(\sigma). \quad (43)$$

$\Delta_l^{(i)}(\sigma)$ minors can be calculated as

$$\Delta_l^{(i)}(\sigma) = \begin{vmatrix} x_{\sigma(1)} & \dots & x_{\sigma(i-1)} & x_{\sigma(i+1)} & \dots & x_{\sigma(n)} \\ x_{\sigma(1)}^2 & \dots & x_{\sigma(i-1)}^2 & x_{\sigma(i+1)}^2 & \dots & x_{\sigma(n)}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(1)}^{n-1} & \dots & x_{\sigma(i-1)}^{n-1} & x_{\sigma(i+1)}^{n-1} & \dots & x_{\sigma(n)}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{l=1}^n x_{\sigma(l)} \prod_{\substack{k < l \\ k \neq i}} [x_{\sigma(l)} - x_{\sigma(k)}]. \quad (44)$$

Quantities $\Delta_n^{(i)}(\sigma)$ again can be calculated easily:

$$\Delta_n^{(i)}(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & \frac{1}{\xi_{\sigma}^1} & \dots & 1 \\ x_{\sigma(1)} & \dots & x_{\sigma(i-1)} & \dots & \xi_{\sigma}^1 & \dots & x_{\sigma(n)} \\ x_{\sigma(1)}^2 & \dots & x_{\sigma(i-1)}^2 & \dots & \xi_{\sigma}^2 & \dots & x_{\sigma(n)}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(1)}^{n-2} & \dots & x_{\sigma(i-1)}^{n-2} & \dots & \xi_{\sigma}^{n-2} & \dots & x_{\sigma(n)}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k < l \\ k \neq i \\ l \neq i}} [x_{\sigma(l)} - x_{\sigma(k)}]. \quad (45)$$

The sets $\Delta_j^{(i)}(\sigma)$ ($j=2,3,\dots,n-1$) are calculated in the following way:

$$\Delta_j^{(i)}(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \dots & x_{\sigma(i-1)} & x_{\sigma(i+1)} & \dots & x_{\sigma(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(1)}^{j-2} & x_{\sigma(2)}^{j-2} & \dots & x_{\sigma(i-1)}^{j-2} & x_{\sigma(i+1)}^{j-2} & \dots & x_{\sigma(n)}^{j-2} \\ x_{\sigma(1)}^j & x_{\sigma(2)}^j & \dots & x_{\sigma(i-1)}^j & x_{\sigma(i+1)}^j & \dots & x_{\sigma(n)}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(1)}^n & x_{\sigma(2)}^n & \dots & x_{\sigma(i-1)}^n & x_{\sigma(i+1)}^n & \dots & x_{\sigma(n)}^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k < l \\ k \neq i \\ l \neq i}} [x_{\sigma(l)} - x_{\sigma(k)}] \times \quad (46)$$

$$\times \left[\sum_{\substack{m_1, \dots, m_{n-j} \\ m_i = j}} \prod_{l=1}^{n-j} x_{\sigma(m_l)} \right]$$

where the symbol of sum

$$\sum_{\substack{m_1, \dots, m_{n-j} \\ m_i = j}}^1 \equiv \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \dots \sum_{l_{n-j}=1}^n \quad (47)$$

denotes $(n - j)$ -times sum. If we sum received expressions, then

$$P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) = \frac{\Delta_{\sigma}^{(i)}}{\Delta_{\sigma}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{\sigma}^{(i,j)}(\sigma)}{\Delta_{\sigma}} \cdot \frac{1}{\xi_{\sigma}^{j-1}}, \quad (48)$$

where quantities are calculated by the formulas (44)-(47). Comparison of (48) with (44), gives for $a_i^{\sigma(i)}$ the following expression:

$$a_i^{\sigma(i)} = (-1)^{i+i+1} \frac{\Delta_{\sigma}^{(i,i)}(\sigma)}{\Delta_{\sigma}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (49)$$

Note that $\forall \sigma \in S_n$ we have:

$$A_{\sigma} = \begin{bmatrix} a_0^{\sigma(0)}, & a_0^{\sigma(2)}, & a_0^{\sigma(n)} \\ a_1^{\sigma(1)}, & a_1^{\sigma(2)}, & a_1^{\sigma(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^{\sigma(1)}, & a_{n-1}^{\sigma(2)}, & a_{n-1}^{\sigma(n)} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Matrix of transformation:

$$P_{\sigma} = A_{\sigma} M_{\sigma},$$

where P_{σ} is the probability distribution on the $\sigma \in S_n$ permutation, M_{σ} is the data vector.

REFERENCES

1. D. Dubois, H. Prade (1988). *Theory of possibility an approach to computerized processing of uncertainty*. Plenn Press, N. Y.
2. I. Campos, C. Balanos (1989). *Representation of fuzzy measures through probabilities*. Fuzzy Sets and Systems 31: 23-36.
3. A. Kaufman. (1987) *Les Experts*. Paris, Hermes .
4. M. Sugeno (1974). *Theory of fuzzy integrals and its application*. Doct. theses, Tokyo.
5. A. Kandel (1980). *On the control and evaluation of uncertain processes*. IEEE Trans. on Automatic control, vol. AC-25, N6:1182-1187.
6. E.T. Jaynes (1957). *Information theory and statistical mechanics* - Phys. Rev. 106: 620-630.
7. G. Sirbiladze (1999). *Choquet's capacities on the field of insufficient expert's data*. Rep. of Session of LVekua Institute of Appl. Mathem., vol. 14, N4: 17-22.

ქსპერტული არასაკმარისი მონაცემების ალგორითმული შესაძლებლობები

გ. სირბილაძე, ნ. ჯორჯიაშვილი
შემთხვევითი პროცესთა თეორიის კათედრა

გაზომებისას ზუსტი ინფორმაციის მიღება პრაქტიკულად შეუძლებელია და თუ შესაძლებელია, ის ხშირად ნაკლებად სასარგებლოა ან რთულად ასახსნელი.

გამარტივებული მოდელი უზრუნველყოფს ხშირად უფრო გასაგები ინფორმაციის მიღებასა და წარმოდგენას, ვიდრე დეტალური და რთული სისტემები. ამიტომაც სხვადასხვა შემთხვევებში საზოგადოებრივი ხელსაწყოების მიერ ცდომილებებით ანდა ადამიანის (ექსპერტის) მიერ წარმოდგენილი ინფორმაცია მონაცემებზე არაზუსტია, წინააღმდეგობრივი და არასრულიც.

სუბიექტურ-ობიექტური მონაცემების აღწერისათვის ალბათური მეთოდებით სარგებლობა მეტისმეტად ნორმატიულად გვეჩვენება. ცხადია, რომ ასეთ შემთხვევებში მხოლოდ ალბათურ-შესაძლებლობითი ანალიზი განაპირობებს მეტნაკლებად ადეკვატურ შედეგებს, რაც არამკაფიო სტატისტიკის მეთოდების გამოყენებას მოითხოვს.

სუბიექტურ-ობიექტურ მონაცემებზე აგებული ალბათურ განაწილებათა კლასი პოპულაციაზე წარმოშობს არამკაფიო ზომას, რომელსაც ალბათურ წარმოდგენათა ერთი აპარატის (იხ. მაგ. [2]) გამოყენებით სტატისტიკის მეორე ნაწილში ვაგებთ.

მესამე ნაწილში ალბათურ განაწილებათა კლასზე დაყრდნობით აკაუფმანის ექსპერტონების თეორიის [3] მიახლოებაში X სიმრავლეზე იგება არამკაფიო ქვესიმრავლე, რომელსაც ექსპერტულ-ობიექტური მონაცემებით ინდუცირებული არამკაფიო ქვესიმრავლე (სახე, იმიჯი) ეწოდება.

სტატისტიკის მესამე ნაწილში საუბარია გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაზე, როდესაც არასაკმარის ექსპერტულ-ობიექტური მონაცემებით ინდუცირებული არამკაფიო ზომითა და იმიჯით გამოთვლილი არამკაფიო სტატისტიკებით X სასრული სიმრავლიდან გამოიყოფა პოპულაციისთვის ყველაზე ტიპური, მახასიათებელი ელემენტები.

ბოლოს შევნიშნათ, რომ სტატიაში წარმოდგენილი აპარატი ჩვენს მიერ გამოყენებული იქნა სხვადასხვა ამოცანებში, როგორცაა მიწისძვრის პროგნოზირების გადაწყვეტილების მიღების თანამედროვე მეთოდები (პროექტი INTAS №2126), ლინგვისტიკაში, როგორცაა ენაში სიტყვის განზოგადოებული ლინგვისტური სივრცის შესწავლასთან დაკავშირებით; ეკონომიკაში ფასიანი ქაღალდების ზოგიერთი პარამეტრების შეფასებასთან დაკავშირებით და სხვ.



TO VON KARMAN-REISSNER TYPE EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELING OF PORO-ELASTO-PLASTIC MEDIA

T. Vashakmadze

Computer Software and Informational Technologies Chair

Abstract. In the Introduction there are described the main purposes of this work and there are formulated some unsolved problems of solid mechanics. The investigation of these problems is connected with technology of chapter 1 of [2] and some results of this work.

In the first point is considered the problem of explaining "Physical Soundness" for the von Karman-Reissner type equations for elastic plates. For these models the new summand characterizing planar wave procedure is also introduced.

In the second point there are constructed the new poro-elastic three-dimensional models. This model in isotropic linear case is same with Biot's well-known and wide-spread theory as well as the modern non-linear theory of elasticity [1].

In the third point there were introduced incremental unknown functions $\delta u^{(*)}$ and $\delta u^{(-)}$. Using these functions and applying methodology of [2], there are constructed two-dimensional systems of Partial Differential Equation (PDE) corresponding to refining model for elasto-plastic shells.

INTRODUCTION

The main purposes of our work are creating and justifying new mathematical models for anisotropic poro-elastic-plastic media, its application to a variety of dynamical and steady-state nonlinear problems for plates, beams and shallow shells with variable thickness. Some practical initial-boundary value problems will be solved by numerical processes.

More well-known and wide-spread model is Biot's theory for poroelastic media. If this theory considers admissible in isotropic case, this theory contains some contradictions even for the weak anisotropy. From Biot's theory also doesn't follow the modern theory for electrostatic media considered by C. Truesdell, W. Noll, J. Ball, P. Ciarlet, S. Antman, etc. We propose to develop a variance for anisotropic poroelastic media [1]. As special cases of this theory we can derive the particular Biot's theory as well as the modern nonlinear theory of elasticity. These theoretical investigations further we use for construction of von Karman-Reissner-Ambartsumian type evolutionary models for anisotropic beams, plates and shallow shells with variable cross section and thickness correspondingly.

We are studying problems of constructing mathematical models for continuum media without simplifying assumptions of geometric or mechanical characters in use peculiar particularly for the theories of elastic beams, plates, and shallow shells basing on asymptotic methods of K.Friedrichs-A.Goldenveiser-P.Ciarlet reduction and to refined plate theories of E.Reissner-T. von Karman-S.Ambartsumian sense. Below, in the part I, we investigate the problem of explaining "Physical Soundness" in the C.Truesdell-P.Ciarlet sense for some dynamic non-linear

models of anisotropic elastic plates. This problem even in the case when elastic plates are isotropic with constant thickness represented an open problem, as there arose different points of view between C. Truesdell-S. Antman on one side and P. Ciarlet on the other. See e.g. details in [1].

Now we formulate some unsolved problems corresponding of solid mechanics. These problems may be investigated using the technology of [2], chapter I, and some results of the present work.

Unsolved problems

A. *Mathematical problems of thin walled structures of poro-elasto-plasticity (MPTS): modelling analysis*

1.1. The creation and justification of spatial non-linear mathematical model for dynamic electro-magneto-thermo-poroelastic media and analysis and comparisons with known theories.

1.2. The creation and justification of mathematical models for poroelastic plates and shallow shells having physical soundness. New physical layered effects explaining paradoxes peculiar to refined theories of plates in isotropic elastic case (for comparison see [2], ch.1, p. 1.3) will be investigated.

1.3. The creation and justification non-linear mathematical models for poroelastic beams with variable cross section. Construct and investigation of refined (in von Karman-Reissner sense) theories for elastic beams.

1.4. The creation and justification non-linear mathematical models for anisotropic composite and mixture elastic plates and shallow shells.

B. *MPTS: Investigations of some systems of non-linear DE-s with averaged initial and boundary conditions corresponding to one and two dimensional (with respect to spatial coordinates) mathematical models for beams and plates*

2.1. The applications of generalized analytical functions non-linear theory to two-dimensional mathematical models for poroelastic plates and shallow shells.

2.2. The development of non-linear Volterra kind second type system and its application to some mathematical models for poroelastic beams.

C. *MPTS: Elaboration of numerical algorithms, creation of software and design of some practical objects.*

In this part we consider only two-dimensional mathematical models of Poroelasticity. Let D (x, y) denote the connected domain. Depending on geometrical structures of D we consider two following different cases:

3.1. If D represents a classical domain as circle, semicircle, ellipse, whole plane, at first we prefer to use results of analytical and generalized analytical functions theory and potential methods, constructing the non-linear systems of integro - differential equations. Then by using technologies of FEM and [2] we develop new numerical schemes.

3.2. If D represents a technical domain as curvilinear triangle, rectangle, trapezium, quarter of plane then we prefer to use the schemes representing some modifications of work [2], ch.3.

1. TO THE PROBLEM OF JUSTIFICATION VON KARMAN EQUATIONS

The problems of constructing two-dimensional models without using hypotheses of geometrical and physical characters and investigating corresponding problems of mathematical physics, arising by transition from spatial problems theory of elasticity to less-dimensional ones, there are actual and increasing to them at latter three decade an interests are connected at first with works of Isif I. Vorovich.

Between publications dedicating to construction and justification of plate and shell theory we separate [1]. In this monograph the problem of physical soundness of the von Karman system is studied. P. Ciarlet in particular wrote here: "The two-dimensional von Karman equations for nonlinearly elastic plates, originally proposed by T. von Karman in 1910 (see p. lxiii), play an almost mythical role in applied mathematics. While they have been abundantly, and satisfactory, studied from the mathematical standpoint, as regards notably various questions of existence, regularity, and bifurcation of their solutions, their physical soundness has often been seriously questioned.

Using the same method as in Chap. 4 we show in this chapter that the von Karman equations may be given a full justification by means of the leading term of a formal asymptotic expansion (in terms of the thickness of the plate as the "small" parameter) of the exact three-dimensional equations of nonlinear elasticity associated with a specific class of boundary conditions that characterizes the von Karman plates" (in full see [1], ch.5, pp. 367-406).

We remind, that for the justification of von Karman theory the basic bounds (which used in Ch. 5 [1] or [3]) are following relations, artificial in the whole and typical for asymptotic methods:

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) &= \varepsilon^2 u_{\alpha}(\varepsilon)(x), & u_3^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) &= \varepsilon u_3(\varepsilon)(x), \\
 \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) &= \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)(x), & \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) &= \varepsilon^3 \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)(x), \\
 \sigma_{33}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) &= \varepsilon^4 \sigma_{33}(\varepsilon)(x), & f_3^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) &= \varepsilon^3 f_3(x)
 \end{aligned}$$



$$g_3^e(x^e) = \varepsilon^4 g_3(x), \quad f_a^e = g_a^e = 0.$$

$$u(\varepsilon) \in V(\Omega) = \{v = (v_i) \in W^{1,4}(\Omega); \quad a \text{ independent of } x_3, v_3 = 0 \text{ on } \gamma \times [-1,1]\}.$$

These relations are also used in [4] expanding the methodology of [2] for orthotropic-elastic plates.

In this part, by the methodology, notations and some expressions of [2], Ch.1, we suggest the direct method constructing the von Karman equations in physical soundness: presented in these equations values have concrete physical sense inasmuch as they are: averaged components of the displacement vector, bending and twisting moments, shearing forces, surface efforts and rotations of normals. Further, the von Karman equations follow as result of an equality to zero of the main vector and moment for the equilibrating elastic body.

Let the initial spatial problem of the theory of elasticity for an anisotropic homogeneous elastic plate has a form (see e.g. [2]):

$$\partial_j (\sigma_{ij} + \sigma_{kj} u_{ik}) = f_i, \quad (1.1)$$

-equilibrium equation,

$$l^{\pm}[u] = \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{j3} u_{i,j} = g_i^{\pm}, \quad x \in S^{\pm} = D \times \{\pm h\}, \quad (1.2)$$

$$l[u] = l(\partial_1, \partial_2, \partial_3)u = g, \quad x \in S = \partial D \times]-h, h[, \quad (1.3)$$

-boundary conditions,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + A_{ij}), \quad A_{ij} = u_{k,j} u_{k,i}, \quad x \in \overline{\Omega}_h, \quad (1.4)$$

$$\sigma = B\varepsilon, \quad \varepsilon = A\sigma, \quad x \in \overline{\Omega}_h \quad (1.5)$$

are the Cauchy equations and generalized Hooke's law. Reminder that matrices of compliability - A and rigidity - B in the formulae (1.5) contain no more than thirteen independent elastic constants, i.e., at any point of body Ω_h even if one plane of elastic symmetry spreads, which is parallel to the coordinative plane oxy .

Using of formulae (2.25) [2], which follow from the relations (1.5), we have:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\beta} + c_{\alpha\alpha} \varepsilon_{12} + b_{13} b_{33}^{-1} \sigma_{33}, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = c_{3+\alpha 3+\alpha} \varepsilon_{\alpha 3} + b_{45} \varepsilon_{\alpha 3-\alpha},$$

$$\sigma_{12} = c_{\alpha 6} \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_{66} \varepsilon_{12} + b_{36} b_{33}^{-1} \sigma_{33},$$

where

$$c_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\alpha} - b_{\alpha 3}^2 b_{33}^{-1}, \quad c_{12} = c_{21} = b_{12} - b_{13} b_{23} b_{33}^{-1}.$$

$$c_{\alpha 6} = b_{\alpha 6} - b_{\alpha 3} b_{36} b_{33}^{-1}, \quad c_{66} = b_{66} - b_{36}^2 b_{33}^{-1}.$$

Then, obviously, from equations (1.1) and (1.6) it follows:

$$\begin{aligned} & 2h \left[c_{\alpha\alpha} (\bar{u}_{\alpha,\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \bar{A}_{\alpha\alpha,\alpha}) + c_{\alpha 3-\alpha} (\bar{u}_{3-\alpha,12} + \frac{1}{2} \bar{A}_{3-\alpha 3-\alpha,\alpha}) + \frac{1}{2} c_{\alpha 6} (\bar{u}_{\alpha,12} + \bar{u}_{3-\alpha,\alpha\alpha} + \bar{A}_{12,\alpha}) \right] \\ & + 2h \left[c_{6\alpha} (\bar{u}_{\alpha,12} + \frac{1}{2} \bar{A}_{\alpha\alpha,3-\alpha}) + \frac{1}{2} c_{66} (\bar{u}_{\alpha,3-\alpha 3-\alpha} + \bar{u}_{3-\alpha,12} + \bar{A}_{12,3-\alpha}) \right] \\ & + b_{33}^{-1} (b_{\alpha 3} \partial_{\alpha} + b_{36} \partial_{3-\alpha}) \int_{-h}^h \sigma_{33} dz = \int_{-h}^h f_{\alpha} dz - \partial_{\beta} (\sigma_{k\beta} u_{\alpha,k}) - (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}). \end{aligned}$$

Thus, from these equations, using the method ch. I [2], we have:

$$\begin{aligned} & 2h \left[(c_{\alpha\alpha} \partial_{\alpha\alpha} + \frac{3}{2} c_{\alpha 6} \partial_{12} + \frac{1}{2} c_{66} \partial_{3-\alpha 3-\alpha}) \bar{u}_{\alpha} + (\frac{1}{2} c_{\alpha 6} \partial_{\alpha\alpha} + (c_{12} + \frac{1}{2} c_{66}) \partial_{12} \right. \\ & \quad \left. + c_{3-\alpha 6} \partial_{3-\alpha 3-\alpha}) \bar{u}_{3-\alpha} \right] \\ & + h \left[(c_{\alpha\alpha} \partial_{\alpha} + c_{\alpha 6} \partial_{3-\alpha}) (\bar{u}_{3,\alpha})^2 + (c_{\alpha 6} \partial_{\alpha} + c_{66} \partial_{3-\alpha}) \bar{u}_{3,1} \bar{u}_{3,2} \right. \\ & \quad \left. + (c_{12} \partial_{\alpha} + c_{3-\alpha 6} \partial_{3-\alpha}) (\bar{u}_{3,3-\alpha})^2 \right] + b_{33}^{-1} (b_{\alpha 3} \partial_{\alpha} + b_{\alpha 6} \partial_{3-\alpha}) \int_{-h}^h \sigma_{33} dz = \bar{f}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Here

$$\bar{u}_{\alpha} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_{\alpha}(x, y, z) dz, \quad \bar{u}_3 = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h (h^2 - z^2) u_3(x, y, z) dz,$$

$$\bar{f}_{\alpha} = \int_{-h}^h (f_{\alpha} - \partial_{\beta} (\sigma_{k\beta} u_{\alpha,k})) dz - (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) - R_{\alpha}^{AN},$$

$$R_{\alpha}^{AN} = R_N^{AN} [u_1, u_2, u_3 - \bar{u}_3] = \int_{-h}^h [(c_{\alpha\alpha} \partial_{\alpha} + c_{\alpha 6} \partial_{3-\alpha}) (u_{k,\alpha}^2 - (\bar{u}_{3,\alpha})^2)$$

$$+ (c_{\alpha\alpha} \partial_{\alpha} + c_{66} \partial_{3-\alpha}) (u_{k,1} u_{k,2} - \bar{u}_{3,1} \bar{u}_{3,2}) + (c_{12} \partial_{\alpha} + c_{3-\alpha 6} \partial_{3-\alpha}) (u_{k,3-\alpha}^2 - (\bar{u}_{3,3-\alpha})^2)] dz.$$

The system of equations (1.7), if we neglect the remainder terms R, for a linear case corresponds to the problem of defining generalized plane stress-strain state. For a nonlinear case



from (1.7) it follows immediately one of the basic equations of the von-Karman system, corresponding to the Airy function if each equation is differentiated and summed (for details see below).

1.1. An isotropic case. Example 1.

For an isotropic case, obviously, for coefficients we have $c_{\alpha\alpha} = \lambda^* + 2\mu$, $c_{66} = 2\mu$, $c_{12} = \lambda^*$, $c_{\alpha 6} = 0$, $\lambda^* = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$, λ and μ -are the Lamé coefficients. Then the system (1.7) is presented in a form:

$$\begin{aligned} (\lambda^* + 2\mu)\partial_1\tau + \mu\partial_2\omega &= \frac{1}{2h}\bar{f}_1 + \mu(\partial_1(\bar{u}_{3,2})^2 - \partial_2(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2})) - \frac{\lambda}{2h(\lambda + 2\mu)}\int_{-h}^h\sigma_{33,1}dz, \\ -\mu\partial_1\omega + (\lambda^* + 2\mu)\partial_2\tau &= \frac{1}{2h}\bar{f}_2 + \mu(\partial_2(\bar{u}_{3,1})^2 - \partial_1(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2})) - \frac{\lambda}{2h(\lambda + 2\mu)}\int_{-h}^h\sigma_{33,2}dz, \end{aligned} \quad (1.8)$$

where the functions

$$\tau = \bar{\epsilon}_{\alpha\alpha}, \quad \omega = \bar{u}_{1,2} - \bar{u}_{2,1}$$

correspond to plane expansion and rotation.

The second equation with respect to the Airy function of the von Karman system, following from (1.8) has a form:

$$\begin{aligned} (\lambda^* + 2\mu)\Delta\bar{\epsilon}_{\alpha\alpha} &= (\lambda^* + 2\mu)\Delta\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\right)(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) = \mu\partial_{11}(\bar{u}_{3,2})^2 \\ &- 2\partial_{12}(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}) + \partial_{22}(\bar{u}_{3,1})^2 + \frac{1}{2h}\bar{f}_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{2h}\left(\frac{\lambda(\lambda^* + 2\mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\right)\int_{-h}^h\Delta\sigma_{33}dz, \end{aligned}$$

or

$$\Delta(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) = -\frac{E}{2}[\bar{u}_3, \bar{u}_3] + \frac{\nu}{2h}\int_{-h}^h\Delta\sigma_{33}dz + \frac{1+\nu}{2h}\bar{f}_{\alpha,\alpha}. \quad (1.9)$$

If we introduce the Airy function by a well-known way:

$$\sigma_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}\partial_{3-\alpha}\partial_{3-\beta}\Phi, \quad \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^h\partial_{3-\alpha}\partial_{3-\alpha}\Phi dz = \Delta\Phi^*,$$

then from (1.9) it follows the second equation of the von Karman system

$$\Delta^2 \Phi^* = -\frac{E}{2} [\bar{u}_3, \bar{u}_3] + \frac{\nu}{2} \Delta (g_3^* + g_3^*) + \frac{1+\nu}{2h} \bar{f}_{\alpha, \alpha}, \quad (1.10)$$

where $[u, v]$ is Monge-Ampere form.

1.2. An orthotropic case. Example 2.

For this case $c_{\alpha 6} = 0$. Then from (1.7), obviously, it follows

$$\begin{aligned} 2h \left[c_{\alpha\alpha} \partial_\alpha \bar{\epsilon}_{\alpha\alpha} + (c_{12} + c_{66}) \partial_\alpha \bar{\epsilon}_{3-\alpha 3-\alpha} + \frac{1}{2} (-1)^{3-\alpha} c_{66} \partial_{3-\alpha} (\bar{u}_{1,2} - \bar{u}_{2,1}) \right] \\ + hc_{66} \left[\partial_{3-\alpha} (\bar{u}_{3,1} \bar{u}_{3,2}) - \partial_\alpha (\bar{u}_{3,2})^2 \right] = \bar{f}_\alpha - b_{\alpha 3} b_{\alpha 3}^{-1} \int_{-h}^h \sigma_{33, \alpha} dz - R_\alpha^{AN}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

where

$$\bar{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (u_{\alpha, \alpha} + u_{k, \alpha}^2) dz.$$

If coefficients b and c satisfy the condition of generalized transversality ([2], p. 27), i.e. there are true the relations:

$$c_{11} = c_{22} = c_{12} + c_{66}, \quad b_{13} = b_{23},$$

then from (1.11) immediately it follows:

$$\begin{aligned} c_{11} \partial_1 \tau + \frac{1}{2} c_{66} \partial_2 \omega = \frac{1}{2h} \bar{f}_1 - b_{13} b_{33}^{-1} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{33, 1} dz - hc_{66} \left[\partial_2 (\bar{u}_{3,1} \bar{u}_{3,2}) - \partial_1 (\bar{u}_{3,2})^2 \right] - R_1^{AN}, \\ c_{11} \partial_2 \tau - \frac{1}{2} c_{66} \partial_1 \omega = \frac{1}{2h} \bar{f}_2 - b_{23} b_{33}^{-1} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{33, 2} dz - hc_{66} \left[\partial_1 (\bar{u}_{3,1} \bar{u}_{3,2}) - \partial_2 (\bar{u}_{3,2})^2 \right] - R_2^{AN}. \end{aligned} \quad (1.11a)$$

The systems of differential equations (1.7), (1.8), (1.11) and (1.12), obviously, are a splitting of one, corresponds to the function Φ^* from the von Karman equations and equivalent to it in case differentialibility of the functions \bar{u}_α , which are averaged on a thickness of the plate of horizontal components of displacement vector.

Thus, obtained by us the system of differential equations (1.7), (1.8), (1.11) and (1.12) is constructed from the initial three-dimensional problem of the theory of elasticity (1.1) - (1.5) with respect to the averaged on a thickness of the components of displacement vector \bar{u} .

The other basic equation of the von Karman system corresponds for a linear case to a bending problem. For clarity and completeness we now give a presentation of the second basic relation in case, when Ω_h is an isotropic elastic plate of constant thickness (more general case, when an



elastic plate of a variable thickness with finite displacement is anisotropic and non-homogeneous see [2], Ch.1).

$$\begin{aligned} \frac{(1-\nu)D}{2} \Delta u_{\alpha}^* + \frac{(1+\nu)D}{2} \partial_{\alpha} u_{\beta\beta}^* - \frac{3(1-\nu)D}{2h^2(1+2\gamma_{\alpha})} (u_{\alpha}^* + \bar{u}_{3,\alpha}) &= f_{\alpha}^* + R_{\alpha+2}[u_{\alpha}^*], \\ \frac{3(1-\nu)D}{2h^2(1+2\gamma_{\alpha})} (\Delta \bar{u}_3 + u_{\alpha\alpha}^*) &= f_3^* + R_3[\bar{u}_3], \end{aligned} \quad (1.12)$$

where E, ν are module of elasticity and the Poisson coefficients,

$$u_{\alpha}^* = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h z u_{\alpha} dz,$$

R_{2+i} are remainder terms, $D = \frac{2}{3} E h^3 (1-\nu^2)^{-1}$ is a cylindrical rigidity of bending, γ_{α} are arbitrary parameters.

Obviously, the equations (1.7) (or (1.8)-(1.11)) and type of (1.12) without remainder terms present full system of von Karman-Reissner-Ambartsumian type differential equations with respect to functions $\bar{u}_i(x, y)$ and $u_{\alpha}^*(x, y)$.

We remark that the non-linear two-dimensional models for Reissner type DEs with layered effects for anisotropic elastic plates first were constructed in [5].

Then, the system (1.12) will have an another equivalent form, if unknown values are chosen with Reissner averaged \bar{u}_3 and shearing forces Q_{α} instead of u_{α}^* (for details see Ch. 1, [2]). Then we will have:

$$\begin{aligned} D \Delta^2 \bar{u}_3 &= \left(1 - \frac{h^2(1+2\gamma)(2-\nu)}{3(1-\nu)} \Delta \right) (g_3^+ - g_3^-) + 2h \left(1 - \frac{2h^2(1+2\gamma)}{3(1-\nu)} \Delta \right) [\bar{u}_3, \Phi^*] \\ &+ h(g_{3,\alpha}^+ - g_{3,\alpha}^-) - \int_{-h}^h \left(z f_{\alpha,\alpha} - (1 - \frac{1}{1-\nu} \Delta (h^2 - z^2)) f_3 \right) dz + R_3[\bar{u}_3; \gamma], \\ Q_{\alpha 3} - \frac{1+2\gamma}{3} h^2 \Delta Q_{\alpha 3} &= -D \Delta \bar{u}_{3,\alpha} + \frac{h^2(1+2\gamma)}{3(1-\nu)} \partial_{\alpha} (g_3^+ - g_3^- + 2h(1+\nu)) [\bar{u}_3, \Phi^*] + \\ &h(g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-) - \int_{-h}^h z f_{\alpha} dz + \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \int_{-h}^h (h^2 - z^2) f_{3,\alpha} dz + R_{3,\alpha}[Q_{\alpha 3}; \gamma]. \end{aligned}$$



From these equations, if we neglect the remainder terms R , for $\gamma = -0.5$ from the first equation the second basic equation of von Karman system follows:

$$D\Delta^2 w = (1 + \Delta)(g_3^+ - g_3^-) + 2h[w, \varphi] + h(g_{\alpha, \alpha}^+ - g_{\alpha, \alpha}^-) - \int_{-h}^h z(f_{\alpha, \alpha} - f_3) dz, \quad (1.13)$$

where w and φ are approximate values, correspond to functions \bar{u}_3 and Φ^* . Remember, that Φ^* is introduced for readability. Indeed, from the relation (1.9) it follows, that the function Φ^* is expressed by $\bar{\epsilon}_{\alpha\alpha}$ immediately.

For dynamical case for clarity we consider a linear case, when the right hand side of the system (1.1) has a form: $\rho \partial_{tt} u_i + f_i(x, y, z, t)$ ($\rho = \text{const}$). Here f_i is known functions, ρ is a material density. Then, using of corresponding formulae of this item, the following equations follow immediately:

$$2h\rho \partial_{tt} v_\alpha = 2h(c_{\alpha\alpha} \partial_{\alpha\alpha} + \frac{3}{2}c_{\alpha 6} \partial_{12} + \frac{1}{2}c_{66} \partial_{3-\alpha 3-\alpha})v_\alpha + 2h(\frac{1}{2}c_{\alpha 6} \partial_{\alpha\alpha} + (c_{12} + \frac{1}{2}c_{66}) \partial_{12} + c_{3-\alpha 6} \partial_{3-\alpha 3-\alpha})v_{3-\alpha} - \int_{-h}^h f_\alpha dz + (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) + 2hb_{33}^{-1}(b_{\alpha 3} \partial_\alpha + b_{36} \partial_{3-\alpha})(g_3^+ - g_3^-), \quad (1.14)$$

$$\frac{2h^3}{3} \rho \partial_{tt} \omega_\alpha = \frac{2h^3}{3} \left[(c_{\alpha\alpha} \partial_{\alpha\alpha} + \frac{3}{2}c_{\alpha 6} \partial_{12} + \frac{1}{2}c_{66} \partial_{3-\alpha 3-\alpha})\omega_\alpha + (c_{\alpha 6} \partial_{\alpha\alpha} + (c_{12} + \frac{1}{2}c_{66}) \partial_{12} + c_{3-\alpha 6} \partial_{3-\alpha 3-\alpha})\omega_{3-\alpha} \right] - \frac{h}{\delta(1+2\gamma)} (a_{6-\alpha 6-\alpha}(\omega_\alpha + \omega_{\alpha'}) - a_{45}(\omega_{3-\alpha} + \omega_{3-\alpha'})) - \int_{-h}^h z f_\alpha dz + h(g_\alpha^+ + g_\alpha^-) + \frac{(1+2\gamma)h^2}{3} b_{33}^{-1}(b_{\alpha 3} \partial_\alpha + b_{36} \partial_{3-\alpha})(g_3^+ - g_3^-),$$

$$\frac{4h^3}{3} \rho \partial_{tt} \omega = \frac{h}{\delta(1+2\gamma)} [a_{55}(\omega_{j1} + \omega_{i1}) - a_{45}(\omega_{12} + \omega_{21} + 2\omega_{j2}) + a_{44}(\omega_{22} + \omega_{2,2})] + g_3^+ - g_3^- - \int_{-h}^h f_3 dz. \quad (\delta = a_{44}a_{55} - a^2_{45})$$

For an isotropic case, obviously, we have:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta v_\alpha + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \partial_\alpha v_{\beta, \beta} = \rho \ddot{u}_\alpha + \bar{f}_\alpha$$

$$\frac{(1-\nu)D}{2} \Delta \omega_{\alpha} + \frac{(1+\nu)D}{2} \partial_{\alpha} \omega_{\beta, \beta} - \frac{3(1-\nu)D}{2h^2(1+2\gamma_{\alpha})} (\omega_{\alpha} + \omega_{,\alpha}) = \frac{2h^3}{3} \rho \ddot{\omega}_{\alpha} + f_{\alpha}^*$$

$$\frac{3(1-\nu)D}{2h^2(1+2\gamma_{\alpha})} [\Delta \omega_{\alpha} + \omega_{\alpha, \alpha}] = \frac{4h^3}{3} \rho \ddot{\omega} + \bar{f}_3,$$

where the functions \bar{f}_{α} and f_{α}^* are defined according to (1.14).

In non-linear case instead (1.10), obviously, we have:

$$\left(\Delta^2 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \Delta \partial_{,\alpha} \right) \Phi^* = -\frac{E}{2} [\bar{u}_3, \bar{u}_3] + \frac{\nu}{2} \left(\Delta - \frac{2\rho}{E} \partial_{,\alpha} \right) (g_3^+ + g_3^-) + \frac{1+\nu}{2h} \bar{f}_{\alpha, \alpha}. \quad (1.15)$$

Obviously the new $\underline{\Delta \partial_{,\alpha} \Phi^*}$ describes the transversal wave processes.

We also remark that equations (1.14) and (1.15) are direct product of equilibrium equations (1.8), while all corresponding expressions (see [6], [7], [1], ...) represent geometrical and only geometrical identity:

$$(-1)^{\alpha+\beta} \partial_{3-\alpha 3-\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = -0.5 [\bar{u}_3, \bar{u}_3]$$

In the linear case the models type (1.8), (1.10), (1.11), (1.12) present convenient unified form for applying directly methods developed in [8-12,...] for all classical (in Muskhelishvili sense) BVP.

Further the models of type (1.8), (1.11a) presenting, Cauchy-Riemann first order system of DE-s, are natural and convenience expressions for developing two-stage least-squares FEM while the (2.21) and (2.22) models of [13] are artificial and they contain eight scalar equations.

2. THE MATHEMATICAL MODELLING OF PORO-ELASTIC MEDIUM

In this part it's suggested three-dimensional nonlinear model for poro-elastic medium slightly differ from the classical M. Biot theory [14].

As it's known, in Biot theory together with usual tensors of elasticity σ and ε introduced also stress and strain tensors $\bar{\sigma}_{ij}$ and $\bar{\varepsilon}_{ij}$ arisen from the permanent pressure in the porous medium, which satisfies the following (for example, an isotropic case) nonlinear law:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \bar{\varepsilon}_{kk} + 2\mu \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}}, \quad (2.1)$$

where H is the nonlinear (of third degree) homogeneous form from $\bar{\varepsilon}_{ij}$:

$$H = H(\bar{\mathfrak{I}}_1, \bar{\mathfrak{I}}_2, \bar{\mathfrak{I}}_3) \quad (2.2)$$

Here $\bar{\mathfrak{I}}_i$ - are the principal invariants of the spatial theory of elasticity [6].

Using some relation and notations of the works [14-16], below propose the new nonlinear model for spatial poro-elastic medium.

For the equilibrium equations:

$$\partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}u_{i,k}) = \partial_{it}(\rho u_i + \rho_t w_i) + f_i, \quad (2.3)$$

$$-\partial_i[p(1 + w_{j,j})] = \partial_{it}(\rho_t u_i + m w_i) + \frac{\eta}{\mu} \partial_i w_i + \varphi_i, \quad (2.4)$$

It's easy to see, that equations (2.3) are refining the equations type (2.2) from [17] as well as (2.4) are the generalization of system type (2.3) from [17] again.

Further, the summand $-\partial_i(p w_{j,j})$ is quite to the term $\partial_j(\sigma_{kj}u_{k,i})$ and its presence is proved by the correspondently reasoning in [18].

Based on the experimental works (see for example [15]) we propose the following relation between strain, stress tensors and pressure named as **generalized Hooke-Biot law**:

$$\begin{aligned} \sigma &= B\varepsilon + b\zeta, \\ p &= b^T \varepsilon + M\zeta. \end{aligned} \quad (2.5a)$$

Here $B = \{b_{ij}\}_{6 \times 6}$ coincide with the matrix from (1.5) $b = (b_1, b_2, \dots, b_6)^T$ is the known 6-component vector, M - is the Biot number. From (2.5a) immediately follows:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (A + \tau A b b^T A) \sigma - \tau A b p, \\ \zeta &= -\tau b^T A \sigma + \tau p, \end{aligned} \quad (2.5b)$$

where the number $\tau^{-1} = M - b^T A b$.

Between the strain tensor and displacement vectors it is possible to make use the following relations. Cauchy formulae:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + \alpha_1 u_{k,j} u_{k,i}); \\ \zeta &= -\beta(w_{i,i} + \alpha_2 w_{i,i}^2), \quad w_{i,i}^2 = w_{1,1}^2 + w_{2,2}^2 + w_{3,3}^2, \end{aligned}$$

or

$$\zeta = -\beta(w_{i,j} + \alpha_3[w_{i,j}]^2), [w_{i,j}]^2 = (w_{1,1} + w_{2,2} + w_{3,3})^2.$$

In these expressions β is the well-known Biot coefficient, $-1 \leq \alpha_i \leq 1$ are arbitrary numbers. Both of Formulae (2.5a) and (2.5b) are important but not only for construction the new models for spatial poro-elastic media. As follows from previous point, for creation and justification for von Karman's models it is necessary the explicit form of matrixes A and B . Thus expressions (2.5) corresponding to (1.5) would be basing for investigation of Problems 1.2, 1.3.

3. SOME REFINING MODELS OF ELASTO-PLASTIC SHELLS

Let us consider the spatial problems of the theory of elasto-plasticity (see e.g. [19], Ch. 11-12). Then the equilibrium differential system of equations respect to incremental terms have the following form:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g} (\delta \sigma^{ij} + \delta \sigma^{kj} \cdot \nabla_k u^i + \sigma^{kj} \cdot \nabla_k \delta u^i) + \sqrt{g} (\delta \sigma^{mj} + \delta \sigma^{kj} \cdot \nabla_k u^m + \sigma^{kj} \cdot \nabla_k \delta u^m)_{,mj} = \sqrt{g} (\rho \cdot \partial_{tt} \delta u^i - \delta f^i).$$

If we applied the methodology of [2], Ch.1, and introduce unknown functions δu^i , δu^i then by these equations we have the following two-dimensional (with respect to spatial coordinates) system of six differential equations corresponding to refining models for elasto-plastic shells:

$$\begin{aligned} & L_{i11}^{(+)} \delta u_1 + L_{i12}^{(-)} \delta u_1 + L_{i13}^{(+)} \delta u_2 + L_{i14}^{(-)} \delta u_2 + L_{i15}^{(+)} \delta u_3 + L_{i16}^{(-)} \delta u_3 + 2g^{33} \left(\frac{(+)}{m_{i\beta}} \left[\frac{(+)}{\nabla_\beta u_3} \cdot \nabla_\beta \delta u_3 \right] \right)^2 \\ & + m_{i6-\beta}^{(+)} \left[\nabla_\beta u_3 \cdot \nabla_3 \delta u_3 + \nabla_\beta \delta u_3 \cdot \nabla_3 u_3 \right] + m_{i6}^{(+)} \left[\nabla_1 u_3 \cdot \nabla_2 \delta u_3 + \nabla_1 \delta u_3 \cdot \nabla_2 u_3 \right] = F^i, \quad (3.1) \\ & L_{3+i1}^{(+)} \delta u_1 + L_{3+i2}^{(-)} \delta u_1 + L_{3+i3}^{(+)} \delta u_2 + L_{3+i4}^{(-)} \delta u_2 + L_{3+i5}^{(+)} \delta u_3 + L_{3+i6}^{(-)} \delta u_3 + 2g^{33} \left(\frac{(-)}{m_{i\beta}} \left[\nabla_\beta u_3 \cdot \nabla_\beta \delta u_3 \right] \right)^2 \\ & + m_{i6-\beta}^{(-)} \left[\nabla_\beta u_3 \cdot \nabla_3 \delta u_3 + \nabla_\beta \delta u_3 \cdot \nabla_3 u_3 \right] + m_{i6}^{(-)} \left[\nabla_1 u_3 \cdot \nabla_2 \delta u_3 + \nabla_1 \delta u_3 \cdot \nabla_2 u_3 \right] = F^{3+i}. \end{aligned}$$

Here some operators are determined so:

$$L_{11} = 2 l_{11}^{(+)} + \frac{1}{h} l'_{11}^{(+)} + p^{51} + \frac{1}{4h} \left[c^{51} + c^{51} \right] - \rho \cdot \sqrt{g^{(+)}} \cdot g^{11} \cdot \partial_t^2.$$

$$m_{11} = \left(\partial_1 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } c^{11} + \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } c^{21} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{23}^{(+)} } c^{41} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{13}^{(+)} } c^{51} \right. \\ \left. + \left(\partial_2 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } \right) c^{61} \right),$$

$$l_{11} = \left(\partial_1 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } P_{11} + \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{22}^{(+)} } P_{12} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{23}^{(+)} } P_{14} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{13}^{(+)} } P_{15} \right. \\ \left. + \left(\partial_2 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } \right) P_{16} \right),$$

$$l'_{11} = \left(\partial_1 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } c^{15} + \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{22}^{(+)} } c^{25} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{23}^{(+)} } c^{45} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{13}^{(+)} } c^{55} \right. \\ \left. + \left(\partial_2 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } \right) c^{65} \right),$$

$$P_{11} = c^{11} \cdot \partial_1 + \frac{1}{2} c^{16} \cdot \partial_2 - \left(c^{1\beta} \cdot \Gamma_{\beta\beta}^{1+} + c^{16-\beta} \cdot \Gamma_{\beta 3}^{1+} + c^{16} \cdot \Gamma_{12}^{1+} \right),$$

$$M_{NL}^1 = \partial_\beta \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } \left(\delta \sigma^{k\beta} \cdot g^{i p} \cdot \nabla_k u_p + \sigma^{k\beta} \cdot g^{i p} \cdot \nabla_k \delta u_p \right) + \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } \left(\delta \sigma^{kj} \cdot g^{m p} \cdot \nabla_k u_p \right. \\ \left. + \sigma^{kj} \cdot g^{m p} \cdot \nabla_k \delta u_p \right) \Gamma_{mj}^3 - 2V_{33} \left(\sigma^{k3} \cdot g^{3 p} \cdot \nabla_k \delta u_p + \delta \sigma^{k3} \cdot g^{3 p} \cdot \nabla_k u_p \right),$$

$$R_{NL}^3 = m_{3\beta} A_{\beta\beta} + m_{36-\beta} A_{3\beta} + m_{36} A_{12} - 2g^{33} \left(m_{3\beta} \left[\nabla_\beta u_3 \cdot \nabla_\beta \delta u_3 \right]^2 \right. \\ \left. + m_{36-\beta} \left[\nabla_\beta u_3 \cdot \nabla_3 \delta u_3 + \nabla_\beta \delta u_3 \cdot \nabla_3 u_3 \right] + m_{36} \left[\nabla_1 u_3 \cdot \nabla_2 \delta u_3 + \nabla_1 \delta u_3 \cdot \nabla_2 u_3 \right] \right),$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\nabla_i u_k \cdot \nabla_j \delta u_m + \nabla_i \delta u_k \cdot \nabla_j u_m \right),$$

$$V_{33} = \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{33}^{(+)} } + \left(b^{33} \right)^{-1} \left[\left(\partial_1 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{11}^{(+)} } \right) b^{13} + \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{22}^{(+)} } b^{23} + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{23}^{(+)} } b^{43} \right. \\ \left. + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{13}^{(+)} } b^{53} + \left(\partial_2 \sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } + 2\sqrt{g^{(+)} g^{(+)} \Gamma_{12}^{(+)} } \right) b^{63} \right],$$

$$F^3 = r^3 \delta g^3 + r^3 \delta g^3 - f^3 - M_{NL}^3 - R_{NL}^3,$$

where, for example:

$$r^{(+)} = \frac{2(1-2h)+2\gamma}{3} V_{33}^{(+)} + \frac{h}{6} V_{33}^{(-)} - \frac{h^2}{3} V_{33,3}^{(+)} - \frac{9-h}{3h}.$$

The other operators L , P , m , l , (with different indexes) from (3.1) have the analogous forms, the values g , Γ are the same that in Ch. 11 [19], ∂_i , ∇_α are usual and covariant derivatives of first order, the expressions

$$c^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta} - b^{\alpha 3} \cdot b^{\beta 3} \cdot (b^{33})^{-1},$$

where $b^{\alpha\beta}$ are known values, characterizing material's elasto-plastic properties.

The complete detail form of (3.1) with corresponding coefficients and expressions for boundary and initial conditions are representing in [20].

Remark: *The author is grateful to Nana Dikhaminjia.*

REFERENCES

1. P. Ciarlet. *Mathematical Elasticity: II, Theory of Plates*, Elsevier, Amsterdam, London, New-York, 1997.
2. T. Vashakmadze. *The Theory of Anisotropic Elastic Plates*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1999.
3. P. Ciarlet *Justification of the von Kármán Equations*. Journal de Mécanique 18 (1979) 315-344;
4. H. Begehr, R. Gilbert, C.O. Lo. *The Two-Dimensional Orthotropic Plate*. J. Elasticity, 26 1991, 147-167;
5. S. Ambartsumian. *The Theory of Anisotropic Plates*, M.: Nauka, 1967;
6. J. von Kármán. *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*, in *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*. Vol. IV/4, Leipzig, 1910, 311-385;
7. A.A. Love. *A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity*. Fourth Edition, Cambridge, Univ. Press, 1959;
8. N. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. M.: Nauka, 1966;
9. N. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations*, M.: Nauka, 1968;
10. I. Vekua. *Generalized Analytical Functions*, M.: Fizmatgiz, 1959;
11. R. Lekhnitskii. *Anisotropic Plates* Gordon&Beach. NY, 1968;



12. R. Gilbert, Wei Lin. *Functional Theoretic Solutions to Problems of Orthotropic Elasticity* J. Elasticity, 15 1985, 143-154;
13. S.-Y. Yang, C.L. Chang. *Analysis of a Two-Stage Least-squares Finite Element Method for the Planar Elasticity Problem*. Math. Meth. in Appl. Sci., 22,1999, 713-732;
14. *Acoustics, Elasticity and and Thermodynamics of Porous Media*, Twenty-one papers by M.A. Biot, *Acoustical Society of America*, Woodbury NY, 1992;
15. A.Cheng, H-D. *Material Coefficients of Anisotropic Poroelasticity*. Inf. J. Rock. Mech. Min. Sci. v.34,N2, 1997, 199-205;
16. D. Donskoy, K. Khashanah, T.G. McKee. *Nonlinear Acoustics Waves in Porous Media in the Context of Biot's Theory*. J. Acoust. Soc. Am. 102(5), Pt.1, 1997, p. p. 2521-2528.
17. M.A. Biot. *Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media*. J. Acoustic Society of America, Vol. 34, NO. 5, Part 1, 1962,1254-1264.
18. P. Ciarlet, P. Rabier. *Les équation de von Karmán*. Springer Verlag, Heidelberg, 1980
19. K. Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, Oxford,N.Y.,Toronto,Sydney,Paris,Frankfurt, 1982.
20. T. Vashakmadze, G. Gubeladze. *Some Refining Models for Elasto-plastic Plates and shells*. Proceedings of Javakhishvili Tbilisi State University; Applied Mathematics and Computer Sciences, vol. 21, 15p. (in appear).

ფონ კარმან-რეზონანსის ტიპის განტოლებათა სისტემებისა და ფორმ-დრეკად-კლასტიური გარემოს მათემატიკური მოდელირების შესახებ

თ. ვაშაკმაძე

კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების კათედრა

ნაშრომის მიზანია ანიზოტროპული ფორო-დრეკადი გარემოსათვის ბიოს (Mauris Biot) ცნობილი თეორიისაგან განსხვავებული მათემატიკური მოდელის შექმნა, მისივე გამოყენება მყარი, თხელკედლიანი ცვლადი სისქის მქონე სტრუქტურებისათვის.

ნაშრომი შედგება ოთხი ნაწილისაგან. შესავალში გადმოცემულია სამუშაოს ძირითადი მიზანი და რიგი ამოუხსნელი პრობლემებისა, რომელთა შესწავლა არსებითად ჯერდნობა [2]-ში გადმოცემულ ტექნოლოგიასა და წარმოდგენილ შრომას.

პირველ პარაგრაფში განიხილება ფონ კარმანის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის დაფუძნების პრობლემასთან დაკავშირებული საკითხები.

როგორც ცნობილია, არაწრფივი მექანიკისა და თანამედროვე მათემატიკის რიგი დარგების განვითარებაში ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ობიექტს წარმოადგენს ფონ კარმანის 1910 წელს აგებული დრეკადი იზოტროპული ფორფიტისათვის არაწრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. აღნიშნული სისტემა შესაბამისი სასახლეო პირობებით წარმოადგენს დრეკადობის თეორიისა და სამშენებლო მექანიკის ძირითად (მათ შორის ღაღის, ფლიუგეს, ღანდაუსა და ლიპშიცის, ტიმოშენკოს, დონელის, ნიუჰილინის) სახელმძღვანელოთა თეაღსაჩინოდ გამოჩენულ ნაწილს. მიუხედავად ამისა 1978 წელს ტრუსდელის მიერ გამოითქვა მოსაზრება ფონ კარმანის სისტემის “ფიზიკური აზრის” (Physical Soundness) ან როგორც ქვემოთ ვიხმართ “ფიზიკური ჟღერადობის” დაუსაბუთებლობის შესახებ. ამ გარემოებამ წარმოშვა ფონ კარმანის სისტემის დაფუძნების პრობლემა. მომდევნო პერიოდში ეს პრობლემა განხილული იყო მრავალი ავტორის მიერ, მაგრამ განსაკუთრებული ყურადღებითა და დაწვრილებით იქნა შესწავლილი სიარდეს მიერ (იხ. [1], თავი V), აქ მიღებული ძირითადი შედეგი რეზიუმირებულია შემდგენაირად: “ფონ კარმანის სისტემა შეიძლება დაფუძნებულ იქნას სრულად საწყისი ამოცანის ძირითადი მახასიათებლების ფორმალურ ასიმპტოტურ გაშლათა მთავარი წევრების ტერმინებში” [1]. ეს შედეგი ფონ კარმანის სისტემის “ფიზიკური ჟღერადობის” დაფუძნებისათვის, ცხადია, არაა საკმარისი, რადგან ასიმპტოტურ მწკრივთა წარმოდგენა არაერთგვაროვანია, ხოლო გაშლის

მთავარი წევრები ხარისხიდან მწკრივთა კოეფიციენტებია და არა "ფიზიკური ქუერადობის" მატარებელი სიდიდეები.

[2] შრომაზე დაყრდნობით მაშრომში გადმოცემულია ფონ კარმან-რეისნერის ტიპის ისეთი ანიზოტროპული არაერთგვაროვანი ორ-განზომილებიანი (სივრცული ცვლადის მიმართ) მოდელების აგების პირდაპირი მეთოდი, რომლის საშუალებით მათ საესეებით განსაზღვრული "ფიზიკური ქუერადობა" ენიჭებათ. სათანადო უცნობები კონკრეტული ფიზიკური აზრის მატარებელი სიდიდეები: გადაადგილების ექვტორის, შესაბამისად, ინტეგრალურ და რეისნერის ტიპის გასაშუალოებული კომპონენტები, ლუნისა და გრეხის მომენტები, გადამჭრელი ძალები, ნორმალის მობრუნების კუთხეები, ზედაპირული (მჭიმავი და მზრუნავი) ძალები. ამასთან შესაბამისი განტოლებები ივება წონასწორობაში მყოფი დრეკადი სხეულისათვის მთავარი ექვტორისა და მთავარი მომენტის ნულთან ტოლობის პირობების გათვალისწინებით ნაჩვენებია, რომ ფონ კარმან-რეისნერის განტოლებათა სისტემებიდან იზოტროპულ ერგავოვან შემთხვევაში პარამეტრის შერჩევით მიიღება ფონ კარმანის სისტემა როგორც ერთ-ერთი შესაძლო მოდელი. გადმოცემული მეთოდი კლასიკური მეთოდისაგან განსხვავდება იმით, რომ კლასიკური მეთოდით ფონ კარმანის სისტემის ერთ-ერთი განტოლება წარმოადგენს თანაფარდობას დეფორმაციის კომპონენტებსა და გადაადგილების ექვტორის შორის ე.ი. მიიღება ფირფიტის გეომეტრიის საფუძველზე და არა წონასწორობის განტოლებების გათვალისწინებით. ეს შენიშვნა არსებითა განსაკუთრებით დინამიური ამოცანების განხილვისას. ამ შემთხვევაში ევრტიკალური მიმართულებითა და ზედაპირული ტალღური პროცესების აღმწერ სიდიდეებთან ერთად აგებულ მოდელთა კლასში აუცილებელია პირიზონტალური მიმართულებით ტალღური პროცესების შესაბამისი $\Delta_2 \Phi$ სიდიდის გათვალისწინებაც. ცალკე აღნიშვნის ღირსია ის გარემოება, რომ იზოტროპულ და განზოგადებულ ტრანსვერსალურ დრეკადი ფირფიტის შემთხვევაში აგებულია ფონ კარმან-რეისნერის განტოლებათა სისტემის ისეთი ფორმა, რომლისაგან წრფივ შემთხვევაში მიიღება [8]-ში განხილული ყველა სასაზღვრო ამოცანისათვის ერთიანი წარმოდგენა ბრტყელი გაფართოებისა და ბრუნვის ტერმინებში.

მომდევნო პარაგრაფში აგებულია ანიზოტროპული დრეკადი გარემოს ახალი. ბიოს თეორიისაგან განსხვავებული, მოდელი, რომელიც, ერთი მხრივ, წარმოადგენს ამ თეორიის განზოგადებას სუსტად ანიზოტროპული გარემოს შემთხვევაშიც, ხოლო

POSSIBILISTIC DISCRIMINATION ANALYSIS: MEDICAL DIAGNOSIS FROM PATIENT RECORDS

A. Sikharulidze

Computer Software and Informational Technologies Chair

Abstract. In the present work a method of decision classification is described which constructs a numerical tabular knowledge base from historical cases and is the variation of discrimination analysis. The method processes the data described by the doctor and enables to effectively employ full information available.

INTRODUCTION

Among many expert medical diagnostic systems which use numerical-tabular base the most popular method is probably the method based on the Bayesian inference technique. But in many cases it turned out that Bayesian analysis demonstrates some difficulties. First of all this is the difficulty to calculate so called "prior" probabilities, and the second: Bayesian analyses can be useful only in such situations when the data is objective by its nature (for example we don't need an expert to determine the sex of patient: male or female), but in medicine very often there arises such situations that we need an expert (doctor) to determine some other characteristics of patient (symptoms) are present or not and how strongly they are exhibited. In such cases Bayesian method is helpless and its certainty is very low. This means that other ways must be searched for.

One of the known alternative methods is called the discrimination analysis [1] and uses the theory of fuzzy sets. The method is briefly described in the following section.

1. DISCRIMINATION ANALYSIS

The knowledge base represents the list of historical patient records, where the symptoms, exhibited by these patients along with their proven diagnosis are recorded. From this information a new frequency distribution table is established, where i denotes the i -th symptom and j denotes the j -th disease, and f_{ij} proportion of those recorded as suffering from disease j who exhibited symptom i . In the following table D_j denotes j -th disease and S_i - i -th symptom.

	D_1	...	D_{C_D}
S_1	f_{11}	...	f_{1C_D}
...
S_c	f_{c1}	...	f_{cC_D}

Based on this table two other tables are constructed: positive discrimination table $\{p_{ij}\}$ and negative $\{n_{ij}\}$ discrimination table, which are calculated as follows:

$$p_{ij} = \frac{\sum_{k \in D} \{\chi_{Large-ratio}(f_{ij} / f_{ik})\}}{C_D - 1}, \quad (1)$$

$$n_{ij} = \frac{\sum_{k \in D} \{\chi_{Large-ratio}(f_{ik} / f_{ij})\}}{C_D - 1}, \quad (2)$$

where $p_{ij}, n_{ij} \in [0,1]$, and C_D denotes the cardinality of the disease set. Large-ratio is defined as a fuzzy set with membership characterizing function:

$$\chi_{Large-ratio} = R^+ \rightarrow [0,1].$$

An explanation of the positive and negative discrimination measures is that p_{ij} represents the accumulated belief that symptom i is more indicative of disease j than any of the remaining diseases, whilst n_{ij} represents the belief that symptom i is more indicative of not disease j than any of the other diseases.

When the records from new patients arrive, set of symptoms S exhibited by him is entered into the system. The simple technique for procuring a diagnosis is to select from the tables $\{p_{ij}\}$ and $\{n_{ij}\}$ only those rows corresponding to S , giving new tables $\{p'_y\}$ and $\{n'_y\}$. A diagnosis can be defined as a distribution over the diseases $\{\delta_j\}$ as follows:

$$\delta_j = \frac{1}{2} \{\chi_{Large}(v_j) + \chi_{Small}(v_j)\}, \quad j \in D, \quad (3)$$

where



$$\pi_j = \left\{ \sum_i p'_{ij} \right\} / C_s, \quad \nu_j = \left\{ \sum_i n'_{ij} \right\} / C_s$$

and C_s denotes the cardinality of S .

π_j and ν_j represent the average of the positive and negative discrimination measures respectively, for disease j . The fuzzy sets Large and Small have characteristic membership functions:

$$\chi : [0,1] \rightarrow [0,1],$$

such that χ_{Large} is monotonic increasing and χ_{Small} is monotonic decreasing in its argument.

The disease j with maximum magnitude in $\{\delta_j\}$ can be interpreted as the most believable diagnosis.

This method was successfully used in Psychiatry [2], however there were several problems that arose. First of all that was the difficulty to calculate f_j . In the patient records there wasn't directly stated whether the patient exhibited the symptom or not. Instead there was indicated the doctor's estimation of how strongly he believed that patient exhibited the symptom. This belief was ranked from 0 to 5, 0 meaning that the patient didn't exhibit the symptom at all, 5 meaning that the exhibition of symptom was very strong, 1 meaning that patient exhibited symptom very weakly, etc. First we assumed that if the exhibition estimation was not zero, it should be believed that the person exhibited the symptom, and the discrimination analysis was processed this way. But on one hand very weak exhibition of some symptom can be viewed as not exhibiting that symptom at all rather than exhibiting it and on the other hand some diseases are characterized by only strong exhibition of some symptoms or vice versa, and for such diseases the accuracy of our expert systems was not satisfactory. Because the calculation of frequencies became impossible in such situations, some other characterizing factors should have been searched for.

2. POSSIBILISTIC DISCRIMINATION ANALYSIS

In the situations when the information is obscure and obtained or described by some expert (the doctor in our case), such notion as Fuzzy Expected Value (FEV)[3] is believed by many authors to be one of the best characterizing value for the population set. According to [3] FEV is defined as follows:



DEFINITION 1[3]: FEV of a compatibility function $\chi_{\tilde{A}}$ of the fuzzy subset \tilde{A} with respect to the fuzzy measure g is Sugeno's integral over X :

$$FEV(\chi_{\tilde{A}}) = \int_X \chi_{\tilde{A}} \circ g(\cdot) \equiv \sup_{T \in (0,1)} \{T \wedge g(H_T)\}, \quad (4)$$

where \wedge indicates a minimum of two arguments.

Consider the situation where $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ is a finite set arranged in the following way: $\chi_{\tilde{A}}(x_1) \leq \chi_{\tilde{A}}(x_2) \leq \dots \leq \chi_{\tilde{A}}(x_n)$. Denote: $X_i = \{x_1, \dots, x_n\}, i = 1, 2, \dots, n$. As known, the FEV can be calculated so [4]:

$$FEV = \max_i \{\chi_{\tilde{A}}(x_i) \wedge g(X_i)\} = \min_i \{\chi_{\tilde{A}}(x_i) \vee g(X_i)\}, \quad (5)$$

where \vee - is a maximum of two arguments.

According to this procedure for the finite set for every disease and symptom FEV can be easily calculated, where X will be the set of patients that suffered from given disease, the uniform distribution can be used in the case of fuzzy measure g , and $\chi_{\tilde{A}}(x_i)$ shall be the compatibility values estimated by the expert.

Following this technique the new table will be obtained, which we call the FEV Distribution Table.

	D_1	...	D_{c_D}
S_1	FEV_{11}	...	FEV_{1c_D}
...
S_{c_s}	FEV_{c_s1}	...	$FEV_{c_sc_D}$

Different from the discrimination analyses the new patient that arrives along with his symptom pattern will also have the compatibility values of the symptoms that means that this values must somehow participate in final diagnosis as well as in calculation of positive and negative probabilistic discrimination values. For a given a patient with a particular compatibility values for each symptom (μ_1, \dots, μ_s) , the positive and negative probabilistic discrimination values will be calculated as follows:

$$PP_y(\mu_i) = \sum_{k \in D} \{ \chi_{L \text{ org-ratio}} \left(\frac{FEV_k - \mu_i}{FEV_y - \mu_i} \right) \} / (C_D - 1), \quad (6)$$

$$pn_{ij}(\mu_i) = \sum_{\substack{k \in D \\ k \neq j}} \{ \chi_{L, \text{arg e-ratio}} \left(\frac{FEV_{ij} - \mu_i}{FEV_{ik} - \mu_i} \right) \} / (C_D - 1), \quad (7)$$

The final diagnosis can be calculated as it is done in discrimination analysis:

$$\delta_j = \frac{1}{2} \{ \chi_{L, \text{arg e}}(\pi_j) + \chi_{S, \text{small}}(\nu_j) \}, \quad j \in D. \quad (8)$$

where

$$\pi_j = \left\{ \sum_i pp_{ij}(\mu_i) \right\} / C_S, \quad \nu_j = \left\{ \sum_i np_{ij}(\mu_i) \right\} / C_S.$$

3. EXAMPLE

Suppose we have only two diseases D_1 and D_2 , both are characterized by only two symptoms S_1 and S_2 . Also the following information is available: five patients who suffered from D_1 exhibited S_1 with compatibility value 0.8, three with 0.6 and two with 0.9. Six of these patients exhibited S_2 with compatibility value 0.1, two with 0.3 and other two 0.4. Six patients who suffered from D_2 exhibited S_1 with compatibility value 0.1, three with 0.2 and one with 0.4. Five of these patients exhibited S_2 with compatibility value 0.2, four with 0.1 and one with 0.3.

Suppose the new patient arrives exhibition of S_1 for him is evaluated as 0.9, and S_2 as 0.1. It is obvious that first disease is characterized by higher exhibition of S_1 then D_2 that means that this patient must have suffered from first disease. But if we try to use here discrimination analysis, we can't get any result. Both symptoms were actually exhibited during both diseases and frequencies for each equal to 1. That means that with discrimination analysis we will obtain results $\delta_1 = 0.5$ and $\delta_2 = 0.5$ meaning none of the diseases can be preferable.

Now lets apply the possibilistic discrimination analysis and calculate $FEVs$.

As described in [5] for calculation of FEV_{11} we can build the following table:

# of group	n_i	χ_i	$n^{(i)}$	$g_i = n^{(i)}/n$	$\chi_i \wedge g_i$
1	3	0.6	10	1	0.6
2	5	0.8	7	0.7	0.7
3	2	0.9	2	0.2	0.2

where n_i is the number of people in i -th group: $n^{(i)} = \sum_{j=1}^n n_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 5$. Thus the

most typical is the second group and $FEV_{11}=0.8$.

For calculation of FEV_{21} we have the following table:

# of group	i	χ_i	$n^{(i)}$	$g_i = n^i / n$	$\chi_i \wedge g_i$
1	6	0.1	10	1	0.1
2	2	0.3	7	0.4	0.3
3	2	0.4	2	0.2	0.2

Thus the most typical is the second group and $FEV_{21}=0.3$.

For calculation of FEV_{12} we have the following table:

# of group	i	χ_i	$n^{(i)}$	$g_i = n^i / n$	$\chi_i \wedge g_i$
1	6	0.1	10	1	0.1
2	3	0.2	4	0.5	0.2
3	1	0.4	1	0.1	0.1

Thus the most typical is the second group and $FEV_{12}=0.2$.

For calculation of FEV_{22} we have the following table:

# of group	i	χ_i	$n^{(i)}$	$g_i = n^i / n$	$\chi_i \wedge g_i$
1	4	0.1	10	1	0.1
2	5	0.2	6	0.6	0.2
3	1	0.3	1	0.1	0.1

Thus the most typical again is the second group and $FEV_{22}=0.2$.

So FEV Distribution Table will look this way:

	D_1	D_2
S_1	0.8	0.2
S_2	0.3	0.2

For our patient with $\mu_1 = 0.9$ and $\mu_2 = 0.1$, we can easily calculate the positive possibilistic and negative possibilistic values (Suppose $\chi_{L, \text{arg-e-ratio}}(x) = x/10$):

$$pp_{11}(\mu_1) = np_{12}(\mu_1) = \chi_{L, \text{arg-e-ratio}} \left(\frac{0.9 - 0.2}{0.9 - 0.8} \right) = \chi_{L, \text{arg-e-ratio}}(7) = 0.7,$$

$$np_{11}(\mu_1) = pp_{12}(\mu_1) = \chi_{L, \text{arg-e-ratio}} \left(\frac{0.9 - 0.8}{0.9 - 0.2} \right) = \chi_{L, \text{arg-e-ratio}}(0.142) = 0.0142,$$

$$pp_{21}(\mu_2) = np_{22}(\mu_2) = \chi_{L, \text{arg-e-ratio}} \left(\frac{0.2 - 0.1}{0.3 - 0.1} \right) = \chi_{L, \text{arg-e-ratio}}(0.5) = 0.05,$$



$$np_{21}(\mu_2) = pp_{22}(\mu_2) = \chi_{L_{arg e-ratio}} \left(\frac{0.3 - 0.1}{0.2 - 0.1} \right) = \chi_{L_{arg e-ratio}}(2) = 0.2.$$

Afterwards,

$$\pi_1 = v_2 = \frac{0.7 - 0.05}{2} = 0.375,$$

and

$$\pi_2 = v_1 = \frac{0.0142 - 0.2}{2} = 0.1071.$$

Now, using (8) we can do the following calculations (let $\chi_{L_{arg e}}(x) = x$ and

$$\chi_{Small}(x) = 1 - x).$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(0.375 + 0.9029) = 0.63895,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}(0.1071 + 0.625) = 0.36605.$$

These results give us the possibility to judge that it's more believable that given patient suffered from first disease.

4. CONCLUSION

It should be underlined that this method uses full information that is available. But for further analysis it should be also mentioned that here *FEV* distinguishes the only group with the chosen compatibility value. This way *FEV* avoids the other groups that also may not be very convenient. For this case such notion as Weighted Fuzzy Expected Value (*WFEV*) [4] or Generalized Weighted Fuzzy Expected Value (*GWFEV*) [5] can be used.

REFERENCES

1. D.Norris, B.W.Pilsworth, J.F.Baldwin, *Medical Diagnosis form Patient records – A Method Using Fuzzy Discrimination and Connectivity Analysis.*, Fuzzy Sets and Systems 21 (1989), 37-45.
2. A.Sikharulidze, *Application of Discrimination and Connectivity Analysis in Psychiatry – Bulletin of Georgian Academy of Sciences.*, 2001.
3. Kandel A. *On the Control and Evaluation of Uncertain Processes.* IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC-25, No.6 (1980), 1182-1187.
4. Friedman M. Schneider M., Kandel A. *The use of Weighted Fuzzy Expected Value (WFEV) in Fuzzy Expert Systems.* Fuzzy Sets and Systems 31 (1989) 37-45.
5. Sirbiladze G., Sikharulidze A. *Insufficient Expert data and Fuzzy Averages,* Applied Mathematics and Informatics, 2001.

შეხვედრის მიზანშეწონილი ანალიზი: სპეციფიკური დიაგნოსტიკა ავადმყოფთა ისტორიის მიხედვით

ა. სიხარულიძე

კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების კათედრა

ნაშრომში განხილულია გადაწყვეტილებათა კლასიფიკაციის მეთოდი, რომელიც აგებს ციფრულ-ცხრილურ ცოდნის ბაზას ავადმყოფთა ისტორიების მიხედვით და წარმოადგენს დისკრიმინაციული ანალიზის ვარიაციას. მეთოდი ამუშავებს ექიმის მიერ აღწერილ მონაცემებს და შესაძლებელს ხდის მთელი არსებული ინფორმაციის ეფექტურ გამოყენებას.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЭФФЕКТИВНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

**)Вл. В. Воеводин, **) П. А. Церетели*

**Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ, **)Факультет прикладной математики и компьютерных наук ТГУ*

Абстракт. Эффективное использование параллельных вычислительных систем на сегодняшний день является одной из основных проблем, т.к. пиковая производительность и реальная производительность, показанная на реальных программах, достаточно сильно отличаются друг от друга. Причиной этому может быть несколько. Иногда это может быть «по вине» алгоритма и нет никакой возможности улучшить результат, а иногда с помощью некоторых преобразований в программе можно улучшить производительность. Для достижения высокой эффективности структура алгоритма должна быть согласована со структурой и особенностями используемой параллельной вычислительной системы. Большое разнообразие структур и архитектур современных суперкомпьютеров не позволяет разработать общий подход для создания эффективных параллельных программ. Поэтому актуальной является разработка методов и программных средств, которые помогут пользователю исследовать структуру и свойства программ. В работе обсуждаются возможности одной такой системы – V-Ray.

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития научно-технического прогресса решение проблемы эффективного использования суперкомпьютеров является одной из стратегических задач. Производительность супер-ЭВМ на протяжении последних 2-3 десятилетий возростала в среднем на порядок в каждые 5 лет. Согласно последней редакции списка top500, содержащего 500 наиболее мощных суперкомпьютеров мира, на июнь 2000 года в мире было установлено более 10 компьютеров с пиковой производительностью более 1 TFLOPS (трлн. оп./сек.). В американской правительственной программе «Ускоренная стратегическая компьютерная инициатива» ASCI намечен выход на уровень производительности супер-ЭВМ 100 трлн. оп./сек. в 2004 г. [1] Но в том же top500 вместе с пиковой производительностью приводится и реальная производительность этих же вычислительных систем, показанная на тестовой программе LINPACK, и легко заметить разницу между этими двумя понятиями. Например, один из мощнейших суперкомпьютеров мира ASCI Blue Mountain (SGI, Inc.), установленный в Лос-Аламосской национальной лаборатории США, имеет 6144 процессоров и пиковую производительность более 3 TFLOPS, но лучший результат, показанный на тесте LINPACK, равен лишь 1,6 TFLOPS.

Причин, по которым теоретическая и реальная производительность столь сильно расходятся, достаточно много. Иногда это может быть «по вине» алгоритма и нет возможности улучшения результата, а иногда путем небольшого изменения в программе можно значительно уменьшить время реализации и, тем самым, увеличить производительность вычислительной системы на данной программе.

Что такое пиковая производительность? Допустим, у некоторой вычислительной системы есть устройство сложения и умножения. Ее пиковая производительность

считается исходя из того, что оба устройства работают одновременно с полной нагрузкой. Однако, если в нашей задаче нет операций умножения (допустим, вычисляем сумму элементов массива), то больше половины пиковой производительности мы уже никак не получим. Поэтому для эффективного использования параллельных вычислительных систем проблема соответствия структуры алгоритма структуре и особенностям архитектуры используемого компьютера выходит на первый план. Если программист хочет работать на пределе производительности компьютера, он должен учитывать его особенности.

Рассмотрим такой пример. Предположим, что на векторно-конвейерном суперкомпьютере CRAY Y-MP C90 надо реализовать операцию вида

$$A(i,j,k)=A(i,j,k-1)+b(j,i)+b(j,i), \quad i=1,\dots,1000, j,k=1,\dots,40$$

Большинство программистов, не имеющих опыта программирования на подобных вычислительных системах, напишет программу в таком виде:

```
for (i=1; i<=1000; i++)
for (j=1; j<=40; j++)
for (k=1; k<=40; k++)
A[i,j,k]=A[i,j,k-1]+B[j,i]+B[j,i];
```

Реализуя этот фрагмент на CRAY Y-MP C90, мы получим производительность около 20 MFLOPS (млн. оп./сек.) при пиковой производительности 960 MFLOPS.

Если учесть особенности архитектуры CRAY Y-MP C90, эту задачу можно запрограммировать таким образом:

```
for (k=1; k<=40; k+=2)
for (j=1; j<=40; j++)
for (i=1; i<=1000; i++) {
A[i,j,k]=A[i,j,k-1]+2*B[j,i];
A[i,j,k+1]=A[i,j,k]+2*B[j,i];
}
```

Реализация этого фрагмента дает производительность 700 MFLOPS. При этом эти два фрагмента эквивалентны, так как дают одинаковый результат с точностью до возможных ошибок округления, возникших при замене сложения на умножение, но второй фрагмент намного лучше соответствует особенностям архитектуры целевого компьютера. Отсюда и разница в производительности. [1]

Таким образом, с одной стороны, параллелизм позволяет обеспечить большую скорость обработки данных, но, с другой стороны, процесс разработки эффективных программ становится все более и более сложным. Проблему усугубляет еще и тот факт, что существует огромное количество программ, которые разрабатывались для «обычных» однопроцессорных вычислительных машин. Они решают определенные базовые задачи в

различных предметных областях и активно используются разработчиками прикладных программ. Естественно, они написаны без учета особенностей параллельных вычислительных систем. Программисту для достижения высокой эффективности приходится не только осмыслить структуру своей программы, но также изучить и пересмыслить структуру тех библиотечных модулей, которые он раньше использовал особо не задумываясь.

1. СОВРЕМЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Попробуем выделить некоторые основные классы современных параллельных вычислительных систем. Их классификацию можно осуществить по нескольким параметрам. Основным параметром классификации параллельных компьютеров является наличие общей или распределенной памяти. Между двумя этими способами организации памяти находится NUMA-архитектура, где память физически распределена, но логически общедоступна. Если у процессора есть возможность обработки векторов в конвейерном режиме, мы имеем дело с векторно-конвейерной архитектурой. Такие процессоры могут объединяться в системы с общей или распределенной памятью. Итак, выделим следующие классы:

1. Массивно-параллельные системы (MPP) состоят из однородных вычислительных узлов. Каждый узел содержит один или несколько процессорных устройств, локальную память, коммуникационный процессор или сетевой адаптер. Иногда узлы содержат еще жесткие диски и/или другие устройства ввода-вывода. Прямой доступ к памяти других узлов явным образом невозможен. К системе могут быть добавлены специальные узлы ввода-вывода и управляющие узлы. Узлы связаны через некоторую коммуникационную среду (высокоскоростная сеть, коммутатор и т.п.). Такими системами являются: IBM RS/6000 SP2, Intel PARAGON/ASCI Red, SGI/CRAY T3E, Hitachi SR8000.

2. Симметричная мультипроцессорная система (SMP) состоит из нескольких однородных процессоров и массива общей памяти. Память, как правило, разделена на несколько блоков. Все процессоры могут обратиться к любому месту памяти с одинаковой скоростью. Процессоры подключены к памяти либо с помощью общей шины, либо с помощью коммутатора. HP 9000 V-class, N-class; SMP-сервера и рабочие станции на базе процессоров различных фирм (Intel, IBM, Compaq и др.) являются представителями данного класса.

3. Система с неоднородным доступом к памяти (NUMA) состоит из однородных базовых модулей (плат). Модули имеют небольшое число процессоров и блок памяти. Они объединены с помощью высокоскоростного коммутатора. Поддерживается единое адресное пространство, аппаратно поддерживается доступ к удаленной памяти, т.е. к памяти других модулей. При этом, доступ к локальной памяти в несколько раз быстрее.



чем к удаленной. На принципе NUMA-архитектуры построены SGI Origin2000, Sun HPC 10000, IBM/Sequent NUMA-Q 2000.

4. Основным признаком параллельных векторных систем (PVP) систем является наличие специальных векторно-конвейерных процессоров. Процессоры имеют конвейерные функциональные устройства для выполнения отдельных операций и предусмотрены команды обработки векторов. Как правило, несколько таких процессоров (1-32) могут работать одновременно над общей памятью (аналогично SMP) в рамках многопроцессорных конфигураций, или они могут быть объединены с помощью коммутатора (аналогично MPP). Примеры: NEC SX-4/SX-5, линия векторно-конвейерных компьютеров CRAY: CRAY-1, CRAY J90/T90, CRAY Y-MP C90, CRAY SV1, серия Fujitsu VPP.

5. Кластерные системы представляют собой набор рабочих станций (или даже персональных компьютеров) общего назначения. Они используются в качестве дешевого варианта массивно-параллельного компьютера. Для связи узлов применяется одна из стандартных сетевых технологий (Fast/Gigabit Ethernet, Myrinet, SCI) на базе шпинной архитектуры или коммутатора. Если кластер объединяет компьютеры разной архитектуры, в этом случае говорят о неоднородных кластерах. Узлы кластера могут одновременно использоваться в качестве пользовательских рабочих станций.

Такое разнообразие параллельных архитектур очень затрудняет разработку единого подхода к созданию эффективных программ. Более того, каждый представитель вышеприведенных классов имеет свои особенности, которые тоже следует учитывать. Поэтому очень сложно говорить об эффективной переносимости программного обеспечения. Программист должен хорошо знать не только структуру реализуемого алгоритма, но и архитектуру целевого компьютера, чтобы согласовать структуру алгоритма с особенностями используемой машины.

В свое время языки программирования освободили пользователей от необходимости знания структуры и особенностей конкретных ЭВМ. Они стали посредниками между пользователем и вычислительной техникой и взяли на себя функции адаптации программ к конкретным ЭВМ. Однако если компиляторы и операционные системы «обычных» однопроцессорных ЭВМ по большей части справлялись с этой задачей, то с появлением параллельных вычислительных систем ситуация стала намного хуже. Существуют языки параллельного программирования, параллельные компиляторы и операционные системы, но практически все они требуют, чтобы пользователь сам указывал те свойства алгоритмов и программ, которые влияют на эффективность реализации. Обнаружить такие свойства крайне сложно (например, выделить циклы, итерации которых можно выполнить параллельно). Поэтому на повестку дня встала разработка методов и инструментальных средств, которые помогут исследовать свойства алгоритмов и



программ, обнаружить потенциал параллелизма и узкие места, которые мешают эффективной реализации на параллельной вычислительной системе, а потом приспособить программу к структуре целевого компьютера.

2. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА РЕАЛЬНУЮ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ

Вернемся сейчас к нашему примеру и попробуем проанализировать, из-за чего второй фрагмент работает в 35 раз быстрее первого. Если внимательно посмотрим на 1-ый фрагмент, то обнаружим, что самый внутренний цикл по k не является параллельным, так как для вычисления $A[i,j,k]$ требуется значение, вычисленное на предыдущей итерации $A[i,j,k-1]$. Так как CRAY-MP C90 является векторно-конвейерной вычислительной системой, в этой ситуации нельзя будет задействовать возможность векторной обработки и, следовательно, весь массив A будет вычисляться поэлементно.

Во втором фрагменте переставлены циклы, после чего итерации внутреннего цикла по i стали независимыми, т.е. для фиксированного j и k можно одновременно вычислить все элементы массива с первым индексом от 1 до 1000, а значит и будет возможность использовать потенциал векторной обработки. Более того, вычисления по k разбиты на k и $k+1$, что позволяет эффективно использовать векторные регистры вычислительной системы.

Какие же факторы влияют на эффективность программ? Вот некоторые из них. В первую очередь следует иметь в виду закон Амдала: если доля последовательных операций программы равна q ($0 \leq q \leq 1$), то максимальное ускорение S , которое можно получить на p процессорах, не превосходит величины
$$\frac{1}{q + \frac{1-q}{p}}$$

Кроме закона Амдала на эффективность программы влияют конфликты при обращении к памяти, ограниченная пропускная способность каналов передачи данных, несбалансированность (т.е. неравномерная нагрузка) функциональных устройств и процессоров. Векторная обработка вносит дополнительные факторы; это - необходимость секционирования длинных векторов, ограниченный набор векторных регистров и многое другое. Согласно закону Амдала, если в программе всего лишь 2% последовательных операций, то на ускорение больше чем в 50 рассчитывать не приходится независимо от того, сколько процессоров используются. И эта теоретическая оценка не учитывает массу других нюансов, которые также снижают эффективность программы. Если мы используем многопроцессорную систему, которая содержит несколько сот процессоров, для высокой эффективности почти вся программа должна исполняться в параллельном режиме, что можно обеспечить только после детального анализа всей программы. При



программировании для "обычных" последовательных компьютеров необходимости в таком анализе практически никогда не было.

3. СИСТЕМА АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ ПРОГРАММ

Исследование программы и структуры алгоритма может быть произведено на основе статического и динамического анализа. Статический анализ предполагает обработку только исходного кода, т.е. программы, записанной на каком-либо языке программирования, тогда как динамический анализ связан с выполнением программы на целевом или каком-нибудь другом компьютере.

Какие же средства могут понадобиться пользователю для анализа и исследования структуры программы. Рассмотрим некоторые такие средства на примере системы визуализации и исследования структуры программы V-Ray. [3,4]

При исследовании больших прикладных программных пакетов пользователь не всегда имеет достаточно полное понимание того, как программа устроена, т.е. какие процедуры используются и как они вызываются. Понимание макроструктуры программы может помочь ему определить основные процедуры, на оптимизацию которых нужно обратить внимание. Незнание макроструктуры может быть связано с тем, что разные части программы могут быть написаны разными людьми или просто программа может состоять из нескольких сотен процедур. В этих случаях очень трудно без специальных средств осознать макроструктуру программы. На рис.1 приведено изображение графа вызовов программы, полученное с помощью системы V-Ray. Каждой вершине этого графа соответствует некоторая процедура программы (подпрограмма или функция в терминах Фортрана). Из вершины V_1 в вершину V_2 идет дуга в том случае, если из V_1 вызывается процедура V_2 .

На такой граф вызовов можно наложить и некоторую другую информацию. Например, раскрасить вершины графа разными цветами, соответствующими максимальной глубине вложенных циклов в данной процедуре. Такая информация может быть полезна для пользователя, так как, как правило, в циклах и кроется весь потенциал параллелизма. Можно граф вызовов показать и с изображением циклического профиля каждой процедуры. На рис.2 приведено именно такое изображение графа. Здесь в каждой вершине изображена структура циклов n , в отличие от графа, приведенного на рис.1, если процедура вызывается из n разных мест, соответствующая вершина дублируется n раз. Такая форма представления в некоторых случаях может быть более удобна.

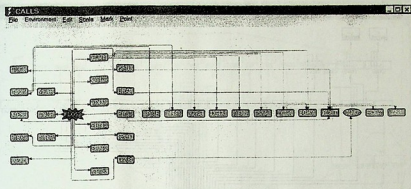


Рис. 1

Граф вызовов строится с помощью статического анализа. Динамический анализ позволяет собрать дополнительную полезную информацию, которую можно будет наложить на нем. Когда пользователь приступает к адаптации программы, естественно, исследование лучше начать с тех частей программы, которые вносят наибольший вклад в общее время реализации. Поэтому пользователю неплохо было бы знать какие фрагменты программы за какое время выполняется. Это позволит ему выделить те фрагменты (процедуры, циклы или другие части программы), которым следует уделить особое внимание при оптимизации. Но для того чтобы получить динамические характеристики программы, ее нужно специальным образом подготовить – вставить в нужных местах вызовы служебных функций, которые будут замерять время в контрольных точках. Система V-Ray позволяет в автоматическом режиме вставить такие вызовы в программу. В начале и в конце фрагмента ставятся вызовы функции времени и вычисляются такие показатели, как общее время выполнения фрагмента, число ее вызовов, минимальное и максимальное время работы. Такой способ сбора динамической информации называется профилировкой. После реализации на компьютере модифицированной программы, собранную в нужном формате информацию можно наложить на граф вызовов. На рис.3 приведен именно такой граф. Из него видно, что выполнение подпрограммы STEP, которая вызывается в цикле из подпрограммы MND2 занимает более 70% общего времени и, естественно, особое внимание нужно уделить оптимизации и эффективной реализации именно этой части программы.

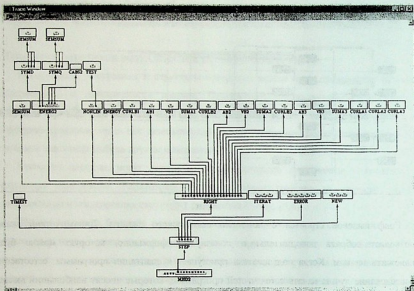


Рис. 2

Знание динамических характеристик программы позволяет также изучить поведение параллельных программ. В этом случае используется другой механизм сбора динамической информации, который состоит в том, что фиксируются моменты прохождения контрольных точек (событий) и называется трассировкой. Это позволяет определить на каком процессоре какое действие выполнялось в данный момент времени и быстро выявлять основные источники накладных расходов, такие, как ожидания на барьерах, ожидания при приеме сообщений, дисбаланс вычислительной нагрузки между процессами и т.д.

Особым случаем на практике является трассировка процедур, обеспечивающих взаимодействие между параллельными процессами, например, трассировка функций MPI. На рис. 4 и 5 приведены фрагменты визуализации трасс.

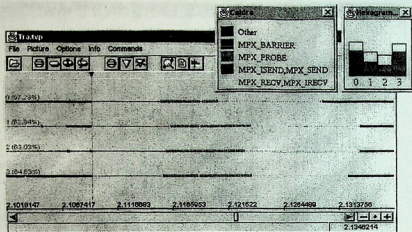


Рис. 5

Из этих изображений пользователю становится ясно, что 0-ой и 3-ий процесс (рис.5) достаточно долго простаивали на барьере, а на рис.4 можно увидеть структуру передачи сообщений между процессами. Развитые средства трассировки и визуализации позволяют получить достаточно подробную информацию о событиях - всегда можно определить какое событие какому оператору соответствует, по какому пути этот оператор вызывался, каков объем передаваемой информации и т.д.

Имея такие средства, пользователь получает возможность исследования тонких свойств программ. Например, объединив трассы, собранные во время нескольких запусков одной и той же программы, в одну метатрассу, можно изучить зависимость поведения параллельной программы от различных наборов входных данных. В частности, сложная структура программ, зачастую и недетерминированность поведения параллельных программ могут привести к миграции «узких» мест. [2]

Понимание структуры программы, обнаружение «узких» мест или определение наиболее «весомых», с точки зрения времени выполнения, подпрограмм (процедур) и фрагментов – это всего лишь первый шаг к разработке высокоэффективных программ. Далее следует исследовать структуру отдельных фрагментов и приспособить их к архитектуре целевого компьютера. Система V-Ray предоставляет и такую возможность – возможность исследования структуры отдельных процедур. С помощью статического анализа мы можем определить такие характеристики, как циклическая структура процедуры, независимость итераций циклов, информационная зависимость отдельных операторов и линейных участков и многое другое.

На рис.6 и 7 приведены графы управления фрагмента и циклический профиль процедуры. Вершины с метками соответствуют циклическим конструкциям (вложенные

циклы), метка означает максимальный уровень вложенности циклов. Остальным вершинам соответствуют отдельные операторы и линейные участки. Внизу изображена структура циклов. На рис.7 вершина более темного цвета с меткой 2 соответствует циклу, итерации которого независимы и, соответственно, его можно выполнить в параллельном режиме. Для исследования структуры алгоритмов на микроуровне, т.е. на уровне отдельных операторов используются графы зависимостей [5].

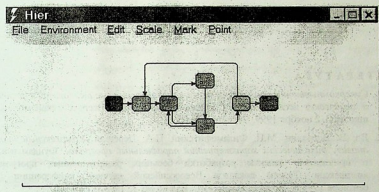


Рис. 6

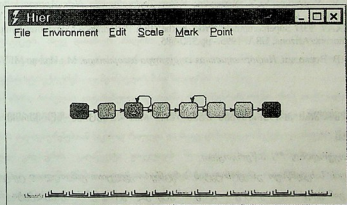


Рис. 7

В данной статье мы не можем и не имели целью описать всю функциональность системы V-Ray и коснулись лишь малой части ее возможностей. Основная мысль, которую нам хотелось довести до читателя заключается в том, что несмотря на всю сложность и многогранность задачи согласования структуры программ с особенностям,

архитектуры параллельных вычислительных систем, она может быть решена и, более того, она успешно решается на практике. Решение далеко не всегда тривиально и может не лежать “на поверхности”, но совместные усилия коллективов программистов и прикладных специалистов всегда приведут к желаемому результату.

Более подробную информацию о системе V-Ray, а также многочисленную информацию по проблемам параллельных вычислений можно найти в Интернете на сайте Информационно-аналитического центра по параллельным вычислениям <http://www.parallel.ru>.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суперкомпьютерные вычислительные и информационные технологии в физических и химических исследованиях*. Сборник лекций Первой Всероссийской молодежной школы (1-2 ноября 1999, Черноголовка).
2. Вл. В. Воеводин, М.П. Филимофитский, П.А. Церетели. *Комплексный подход к анализу динамических характеристик параллельных программ*. Фундаментальные и прикладные аспекты разработки больших распределенных программных комплексов: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции (21-26 сентября 1998 г., Новороссийск). –М.: Изд-во МГУ, 1998, с.123-126.
3. V.I. Voevodin. *Theory and Practice of Parallelism Detection in Sequential Programs*. Programming and computer software, 1992.
4. V.V. Voevodin, V.I. Voevodin. *V-Ray Technology: a New Approach to the Old Problems*. Optimization of the TRFD Perfect Club Benchmark to CRAY Y-MP and CRAY T3D Supercomputers. Proc. of the High Performance Computing Symposium'95, Phoenix, Arizona, USA, 1995.- pp.380-385.
5. В.В. Воеводин. *Информационная структура алгоритмов*. М.: Изд-во МГУ, 1997.

პარალელური პროგრამების ეფექტური რეალიზაციის ზომიერით ახსაქტი

*ელ.ვოევიდინი, ** პ.წერეთელი

*მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო-კვლევითი გამოთვლითი ცენტრი
 **თბილისის გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე სუპერკომპიუტერების ეფექტური გამოყენების პრობლემა წარმოადგენს ერთერთ სტრატეგიულ ამოცანას. თანამედროვე კომპიუტერების ბიკურმა მწარმოებლობამ კარგა ხანია უკვე გადააჭარბა 1 TFLOPS (1 ტრილიონი ოპერაცია წამში) ზღვარს, მაგრამ ბიკური მწარმოებლობის გარდა პარალელური გამოთვლითი სისტემები სასიათღებან რეალური მწარმოებლობით, რომლებსაც ისინი აწვევენ კონკრეტულ პროგრამებზე და განსხვავება ამ ორ სიდიდეს შორის საკმაოდ დიდია.



მიზეზი, რომელთა გამოც თეორიული (თეორიული) და რეალური შერამოვლობა ასე განსაზღვრება, ბევრია. ზოგჯერ ეს შეიძლება იყოს ალგორითმის "ზრალი" და უცუთუხი შედეგის მიღების შესაძლებლობა არ არსებობდეს. ზოგჯერ კი პროგრამაში მცირე ცვლილებების შეტანის შედეგად შეიძლება მნიშვნელოვნად შემცირდეს პროგრამის რეალიზაციის დრო. სტატიაში მოყვანილია პროგრამის ფრაგმენტი, რომლის რეალიზაციის დრო მასში შეტანილი ელემენტარული ცვლილებების შედეგად შემცირდა 35-ჯერ. ეს ეფექტი მიღწეულ იქნა პროგრამის სტრუქტურის პარალელური კომპიუტერის სტრუქტურასთან შესაბამისობაში მოყვანის შედეგად.

არსებული პარალელური გამოთვლითი სისტემების სტრუქტურებისა და არქიტექტურების მრავალფეროვნება ძალზე ართულებს ეფექტური პროგრამების შექმნისადმი ერთიანი მიდგომის შემუშავებას. პარალელური პროგრამირების ენები, კომპილატორები და ოპერაციული სისტემები ნაწილობრივ ცდილობენ გაათავისუფლან მომხმარებელი გამოთვლითი სისტემის არქიტექტურის ცოდნის აუცილებლობისაგან, მაგრამ პრაქტიკულად ყველა ისინი მოითხოვენ, რომ მომხმარებელმა თვითონ მიუთითოს ალგორითმებისა და პროგრამების ის თვისებები, რომლებსაც გაეუნა აქვთ მის ეფექტურობაზე (მაგალითად, მომხმარებელმა უნდა გამოუსოს ციკლები, რომლის იტერაციები შეიძლება შესრულდეს პარალელურად და გარკვეული წესით შეატყობინოს ეს კომპილატორს). ასეთი თვისებების აღმოჩენა პროგრამებში საკმაოდ რთულია და ამიტომ აქტუალური ხდება ისეთი მეთოდებისა და ინსტრუმენტული საშუალებების შემუშავება, რომლებიც დაეხმარება მომხმარებელს პროგრამებში აღმოჩენილ იქნას ბოტენციალური პარალელიზმი და ის "ვიწრო" ადგილები, რომლებიც ხელს უშლიან პროგრამის ეფექტურ რეალიზაციას. სტატიაში განხილულია ერთ-ერთი ასეთი სისტემა V-Ray, რომლის შემუშავებაც ხდებოდა ავტომატურად აქტუალური მონაწილეობით. ეს სისტემა არის ფორტრანზე დაწერილი პროგრამების სტრუქტურის შესწავლისა და ვიზუალიზაციის საშუალება და ემყარება პროგრამის როგორც სტატიკურ, ასევე დინამიურ ანალიზს. იგი აძლევს მომხმარებელს საშუალებას ნათლად წარმოიდგინოს რეალიზებადი პროგრამის მაკროსტრუქტურა, გაანალიზოს ცალკეული ქვეპროგრამების და ფრაგმენტების სტრუქტურები და შესწავლოს მისი ზოგიერთი თვისება.

ძირითადი აზრი, რომელიც გატარებულია სტატიაში, მდგომარეობს იმაში, რომ მოუხდავად იმისა რომ პროგრამის სტრუქტურის შესაბამისობაში მოყვანა პარალელური გამოთვლითი სისტემის არქიტექტურის თავისებურებებთან საკმაოდ რთულია და მოიცავს მრავალ ასპექტს, ეს ამოცანა შეიძლება წარმატებულად გადაიჭრას. გადაწყვეტა უკველთვის შეიძლება არ იყოს ტრივიალური, მაგრამ პროგრამისტებისა და გამოყენებითი სფეროს სპეციალისტების საერთო ძალისხმევა პრაქტიკულად ყოველთვის მიგვიყვანს სასურველ შედეგამდე.

ON SOME ASPECTS OF EFFICIENT EXECUTION OF PARALLEL PROGRAMS

**)Vl.Voevodin, **) P.Tsereteli*

**)Scientific-research computing center of Moscow State University*

***)Department of Applied Mathematics and Computer Science of Tbilisi State University*

Efficient using of parallel supercomputers is very important problem. Difference between peak performance of parallel computers and real performance achieving on real programs is large. The difference may be caused by many reasons. Sometimes the algorithm may be "bad" and we have no possibility to improve the result. Sometimes specific transformation of program will increase performance. To achieve high performance algorithm structure must correspond with structure and features of using supercomputer.

The large variety of parallel computer structures and architectures doesn't allow us to develop common approach for efficient parallel program creation. So, it's very important to develop methods and systems, which will help user to understand and investigate the program structure and features. The abilities of one of such systems V-Ray are discussed in the article.

სივრცითი მიმართებაჰის გამოხატველ თანდებულთა ზომიერით გახასიათებაჲი

ა. შადურთ

ზოგადი და გამოყენებითი ენათმეცნიერების კათედრა

აბსტრაქტი ნაშრომის მიზანია ბმული ფორმების სახით არსებულ ქართულ თანდებულთა ინვარიანტული სივრცითი მნიშვნელობების დადგენა და მათს საფუძველზე ისეთი აღწერითი ფრაზების აღება, რომელთა გამოყენება შესაძლებელი იქნება სალექსიკონო სტატისტიკის შედგენისას.

თანდებულებს, ჩვეულებრივ, შეუძლიათ გამოხატონ სხვადასხვა მიმართებები - სივრცითი, დროითი, ობიექტური და სხვა. აქ შემოვიფარგლებით განსახილველ მორფემათა სივრცითი მნიშვნელობებით, რომლებიც მათს "პირდაპირ" მნიშვნელობებზედ მიგვაჩინია.

სივრცითი განზომილებების მქონე ობიექტებს შორის არსებობს ძირითადად ორი სახის მიმართებები - განლაგება (ანუ ორიენტაცია) და მოძრაობა. ობიექტებს, რომლებიც ერთმანეთთან ამგვარ მიმართებებს ამყარებენ, შეიძლება ეწოდოს "ფიგურა" და "ორიენტირი": ფიგურა განლაგებულია ან გადაადგილდება ორიენტირის მიმართ.

ქართულში სივრცითი მიმართებების გამოხატველი საშუალებებიდან ამაჲამდ მხოლოდ ბმული ფორმის მქონე თანდებულებს განვიხილავთ. ესენია: -ქნ, -დან, -მდე, -ზე, -ში, -თან.

ამ მორფემების სემანტიკა ნაკლებად არის შესწავლილი. "ქართული ენის განმარტებით ლექსიკონში" თანდებულთა უმრავლესობა სემანტიკური დახასიათების გარეშეა დატოვებული. გამოაკლისს შეადგენენ -ზე და -ში, რომელთა განმარტებებში გამოყენებულია თვით ამ თანდებულების შემცველი ფრაზები, რაც მანკირ წრეს ქნის. მსგავსი ეთარებაა ამ საკითხისადმი მიძღვნილ სხვა გამოკვლევებშიც (იხ. მაგ., [1]).

არსებობს უნივერსალური მოდელები [2], რომელიც სხვადასხვა ენებში სივრცითი მიმართებათა გამოხატველ მორფემებს აღწერს მცირერიცხოვანი დიფერენციალური ნიშნების მარტივი კომბინაციების მეშვეობით. ამ ნიშნებს შორისაა: "ორიენტაცია" "შტანიო/გარეთ", "კონტაქტის ქონა/არქონა", "მიახლოება/დაშორება", "შეზღუდული/შეუზღუდავი მოძრაობა". მათი მეშვეობით ჩვენს მიკროსისტემის დახასიათების შედეგად გამოიყოფა, ერთი მხრივ, მორფემები, რომელთათვისაც განმსაზღვრელია მოძრაობასთან დაკავშირებული ნიშნები (-ქნ, -მდე, -დან) და, მეორე მხრივ, მორფემები, რომელთათვისაც ეს ნიშნები ჭარბია (-ზე, -ში, -თან). ვალკე უნდა ითქვას ეწ. პირობითი სივრცითი მიმართებების შესახებ, რომლებსაც გამოხატავენ -თან და -გან (-ით-გან > -იდან/-დან) მორფემები პირთა აღმნიშვნელი ორიენტირების გარემოცვაში: *მეგობართან სტუმრობს, ეს წიგნი შენთანაა, მეგობრისგან მხიარული დაბრუნდა* ტაპის ფრაზებში. -თან მორფემის სივრცითი მნიშვნელობა ხასიათდება ორი ნიშნით: "ორიენტაცია გარეთ" და "კონტაქტის არქონა". ეს მოდელირდება, რადგან -თან იწვევს "ახლოს" ცნებასთან ასოციაციას.

ინტუიციას ისიც ეწინააღმდეგება, რომ -ზე მორფემის დიფერენციალურ ნიშნებს შორის არ არის "ხეივთ" (-ზე მორფემის მახასიათებლებია "ორიენტაცია გარეთ" და "კონტაქტი").

სალექსიკონო დეფინიციების ასაგებად აუცილებელია აღწერითი ფრაზების შედგენა ინვარიანტული მნიშვნელობების საფუძველზე ჩვენ შევეცადეთ

დაგვეხსიათებინა ეს მნიშვნელობები მაქსიმალურად ლაკონიური და მარტივი ფორმით დეფინიციებს წავეყნებოდა კიდევ ორი მოთხოვნა: 1. მიკროსისტემის ფარგლებში განმარტებებს შორის სრული თანხედრის აკრძალვა; 2. თანდებულის განმარტებაში ამავე მიკროსისტემის სხვა წევრის (და, ცხადია, თვითონ ამ თანდებულის) გამოყენების აკრძალვა. ქვემოთ მოყვანილ დეფინიციებში "ორიენტირი" სიტყვა სადექსიკონო სტატიაში შეიძლება შენაცვალებული იქნეს ფრაზით: - თანდებულთან დაკავშირებული სახელი".

-ქვე "ორიენტირის მიმართულებით"; -დან "ორიენტირი ამოსავალი პუნქტია"; -მდე "ორიენტირი გზის ზედერული პუნქტია"; -ზე "ორიენტირის გარეთ, შეხებით"; -თან "ორიენტირის სიახლოვეს".

-ში თანდებულის განმარტებას დამატებითი მსჯელობის შემდეგ წარმოადგენთ თუღში საცქმია -ზე მორფემის რეგულარული ვარიანტული მნიშვნელობა "ორიენტირის ზევით", რომელიც გამოიკეთება, მაგ, ყუთი მაგიდასთან დგას და ყუთი მაგიდაზე დგას გამონათქვამთა დაპირისპირებისას. ეს ერთგვარად დამატებითი მნიშვნელობა გულისხმობს კიდევ ერთი ორიენტირის - მიწის ზედაპირის გათვალისწინებას, და ზოგ სიტუაციაში იგი წინა პლანზე წამოწეული.

სიერციით მნიშვნელობებისადმი მიძღვნილ გამოკვლევებში მიმართულების სემანტიკა და მისი გამოხატულება მარკირებულად არის მიწვეული განლაგების სემანტიკისა და გამოხატულების მიმართ (იხ, მაგ. [3]). -ზე და -ში მორფემებისათვის მიმართულების ვარიანტული მნიშვნელობების ფორმულირება შემდეგნაირად შეიძლება: "ორიენტირი დანიშნულების პუნქტია". -ზე თანდებულის მნიშვნელობა კონტაქტის არსებობასაც გულისხმობს, ამიტომ -ში თანდებულთან დაპირისპირებისას იგი მარკირებულ წევრად გვევლინება. დანარჩენი განსახილველი მორფემების მიმართ არამარკირებული -ში თანდებული ყველაზე რთულად განსამარტავი აღმოჩნდა. იგი გამოხატავს "შეგნით" და "იმი ადგილას (სადაც)" ცნებებს, რომლებიც, ავეებიცკას აზრით [4], პირველადი, განსაზღვრების გარეშე მისაღები ცნებებია. რამდენადაც სიერციით მნიშვნელობების მქონე ორი ომონიმური მორფემის სახით -ში თანდებულის წარმოდგენა არაბუნებრივი ჩანს, უნდა დავადგინოთ ამ მნიშვნელობების ინეარანტა კვლევის მოცემულ ეტაპზე იგი უარყოფითი ფორმით გამოვხატეთ, რაც ამ მორფემის სემანტიკურ არამარკირებულობასაც უსვამს ხაზს: "ორიენტირის არა-გარეთ".

თუმცა წარმოდგენილი განმარტებები არ არის უნაკლო, ემიდონებთ, რომ აქ გამოთქმული მოსაზრებები საინტერესო იქნება პრაქტიკოსი ლექსიკოგრაფებისათვის.

ლიტერატურა

1. ა. მარტინოვი. *თანდებულთა კარგული ში.* იკვ. I, თბილისი, 1946.
2. А. Е. Кибрик. *К типологии пространственных значений.* "Язык и человек". Москва, 1970.
3. A. Wierzbicka. *Semantics. Primes and Universals.* Oxford University Press, 1996.
4. R. Huijbregts, H. van Riemsdijk. *Interface in Space: How Natural Language Expresses Spatial Relations.* 3rd Tbilisi International Symposium on Language, Logic and Computation, 1999.

SOME FEATURES OF POSTPOSITIONS EXPRESSING SPATIAL RELATIONS

I. Shaduri

General and applied linguistic chair

Being bound morphemes, some postpositions have the meaning corresponding to the meaning of free linguistic units. The author tried to define the invariant spatial meanings of Georgian bound-form postpositions. The definitions were supposed to be compact, simply represented and to meet two more requirements: to avoid full coincidence and reference to other postpositions. The offered description will probably be useful for the Georgian practical lexicography.



სარჩევნი CONTENTS

ბაზოყენებითი მათემატიკა • APPLIED MATHEMATICS

<i>Г. Белтадзе, Д. Гиоргобидзе</i> ПОКОМПОНЕНТНОЕ СМЕШАННОЕ РАСШИРЕНИЕ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИХ ИГР.....	5
<i>ბ. ბელთაძე, დ. გიორგობიანი (აბსტრაქტი)</i> ლიქსიკოგრაფიული გახვივული თაგაშების კომპონენტობრივი შირაული გაყვართობა.....	10
<i>G. Beltadze, J. Giorgobiani (abstract)</i> COMPONENT WISE MIXED EXTENSION OF THE LEXICOGRAPHIC MATRICES.....	10
<i>D. Giorgadze, N. Jorjiashvili</i> STATISTICAL-POSSIBILISTIC MODEL OF WORD FORMATION PROCESS IN SPANISH LANGUAGE.....	11
<i>ბ. გიორგაძე, ნ. ჯორჯიაშვილი (აბსტრაქტი)</i> ესპანურ ენაში სიტყვათა წარმოების პროცესის სტატისტიკურად შისაბლო გოქაღის შესახებ.....	14
<i>Г. Гваберидзе</i> ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМ БУЛЕВОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ.....	15
<i>ბ. გვაბერიძე (აბსტრაქტი)</i> წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის ბაზოკვლევების შესახებ გულის მრავალკრიტერიუმურ პროგრამირებაში.....	20
<i>G. Gvaberidze (abstract)</i> ON THE RESEARCH LINEAR COVOLUTION OF CRITERIA IN MULTI- CRITERIAL BOOLEAN PROGRAMMING.....	20
<i>Г. Меладзе, Н. Схиртладзе, А. Чантурия</i> О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМ РЕГУЛЯРИЗАТОРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА МЕЛКОЙ ВОДЫ.....	21
<i>ბ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე, ა. ჭანტურია (აბსტრაქტი)</i> ბარჩხი წყლის სენ-ვენანის ბანტოლუგების შესახებისი არაწრფივ რებულარიზატორიანი სხვაობიანი სემის კრეზაღობის შესახებ.....	28
<i>H. Meladze, N. Skhirtladze, A. Chanturia (abstract)</i> ON CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEME WITH NONLINEAR REGULARIZATOR FOR SAINT-VENNANT SHALLOW WATER EQUATION.....	28
<i>М. Ментешашвили</i> ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	29
<i>მ. მენტეშაშვილი (აბსტრაქტი)</i> კოჭის შიქცეული ამოცანა გოქა რიგის კვაზიწრფივი ბანტოლუგებისათვის.....	34
<i>M. Menteshashvili (abstract)</i> INVERSE PROBLEM OF CAUCHY FOR SECOND ORDER QUAZILINEAR EQUATIONS.....	34

<i>J. Peradze</i>		
DISCRETIZATION OF A NONLINEAR WAVE SYSTEM.....		35
<i>ჯ. ფერაძე (აბსტრაქტი)</i>		
ერთი არაწრფივი ტალღური სისტემის დისკრეტიზაცია.....		50
<i>A. Shapatava, N. Kasradze</i>		
NON-LOCAL PROBLEM IN TIME FOR ONE NON-LINEAR EQUATION.....		51
<i>ა. შაფათავა, ნ. კასრადე (აბსტრაქტი)</i>		
დროითი არალოკალური ამოცანა ერთი არაწრფივი ბანტოლუგისათვის.....		56
<i>G. Sirbiladze, N. Jorjiashvili</i>		
PROBABILISTIC-POSSIBILISTIC ANALYSIS OF INSUFFICIENT DATA.....		57
<i>გ. სირბილაძე, ნ. ჯორჯიაშვილი (აბსტრაქტი)</i>		
ექსპერტული არასაკმარისი მონაცემების ალბათურ შესაძლებლობითი ანალიზი.....		67
<i>T. Vashakmadze</i>		
TO VON KARMAN-REISSNER TYPE EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELING OF PORO-ELASTO-PLASTIC MEDIA.....		69
<i>თ. ვაშაკმაძე (აბსტრაქტი)</i>		
ვონ კარმან-რეისნერის ტიპის ბანტოლუგათა სისტემებისა და ფორე-რეკალ პლასტიკური გარემოს მათემატიკური მოდელირების შესახებ.....		84

კომპიუტერული მეცნიერებები • COMPUTER SCIENCES

<i>A. Sikharulidze</i>		
POSSIBILISTIC DISCRIMINATION ANALYSIS: MEDICAL DIAGNOSIS FROM PATIENT RECORDS.....		87
<i>ა. სიხარულიძე (აბსტრაქტი)</i>		
შენსაძლებლობითი დისკრიმინაციული ანალიზი: სამედიცინო დიაგნოსტიკა ავადმყოფთა ისტორიების მიხედვით.....		94
<i>Вл. В. Воеводин, П. А. Церетели</i>		
НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЭФФЕКТИВНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ.....		95
<i>ვლ. ვოევიდინი, პ. ა. ცერეტელი (აბსტრაქტი)</i>		
პარალელური პროგრამების ეფექტური რეალიზაციის ზომიერეთი ასპექტები.....		106
<i>VI. Voevodin, P. Tsereteli (abstract)</i>		
ON SOME ASPECTS OF EFFICIENT EXECUTION OF PARALLEL PROGRAMS.....		108
<i>ა. შადური</i>		
სივრცითი მიმართებების გამომხატველ თანდებულთა ზომიერეთი მახასიათებელი.....		109
<i>I. Shaduri (abstract)</i>		
SOME FEATURES OF POSTPOSITIONS EXPRESSING SPATIAL RELATIONS.....		112
სარჩები.....		113
CONTENTS.....		113



გამომცემლობის რედაქტორები: ე. აბუაშვილი
მ. ინასარიძე

კორექტორები: ნ. დიხამინჯია
რ. კვაჭანტირაძე
ნ. ჩახაია

ხელმოწერილია დასაბუჯდად 23.VII.02
საბუჯდი ქაღალდი 60x84/16
პირ. ნაბუჯდი თაბახი 14.5
საადრ.-საგამომცემლო თაბახი 7.12

შეკვეთა No 3 ტირაჟი 120

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 14
თბილისის უნივერსიტეტის სარედაქციო-
სადუბლიკაციო კომპიუტერული სამსახური
თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 1

PROCEEDINGS of Javakhishvili TBILISI STATE UNIVERSITY

AIMS AND SCOPE

The Journal *Proceedings of Javakhishvili Tbilisi State University* publishes original research articles on Applied Mathematics, Computer Sciences, Linguistics and their application to science. Subject areas are very vast and include initial-boundary value problems for ordinary and partial differential equations and integral equations, appearing in applied mathematics and mathematical physics, theoretical contributions, numerical algorithms and computer simulations etc. all the areas concerning applied mathematics, computer sciences and linguistic theme. The journal will also concentrate on the interaction between different fields of mentioned disciplines. In this connection the journal will appreciate survey papers for publication.

NOTES FOR CONTRIBUTORS

Manuscripts, as Word files, may be sent to the Editor-in-Chief by e-mail: vasha@viam.hepi.edu.ge. Besides the electronic version of the manuscript, one hard copy with signature of one author should be submitted to the Editor-in-Chief: **I. Vekua Institute of Applied Mathematics, University St. #2, Tbilisi, Georgia.**

Submission of manuscript is welcome provided that:

- this manuscript, or any translation of it, has not been copyrighted or previously published and is not under consideration for publication elsewhere

Manuscripts should be written in English, Georgian, German, French, Italian, Russian, Spanish languages. Each article should have abstracts in Georgian and English languages. The length of paper is normally limited to 10 standard Word pages (format: **A4**, font size: **11pt**, Top: **3.46cm**, Bottom: **4.25cm**, Inside: **3.3cm**, Outside: **2.7cm**). Publication of the papers that exceed this limit will depend on a special decision of the Editors.

5-

hp 32/2

