ს. თოფურია
ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი

უმაღლესი მათემატიკის

მოკლე კურსი

რეკომენდებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ სახელმძღვანელოდ უმაღლესი
ტექნიკური სასწავლებლებისათვის

პროფ. ს. თოფურიას რედაქციით

თბილისი
2009

სახელმძღვანელო წარმოადგენს უმაღლესი მათემატიკის მოკლე კურსს და მასში სრულად არის გადმოცემული ტექნიკური სასწავლებლების ბაკალავრიატის და პროფესიული უმაღლესი განათლების სტუდენტებისათვის პროგრამით გათვალისწინებული მასალა.

რეცენზენტი: საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი *ვ. პაატაშვილი*

კომპიუტერული უზრუნველყოფა ც. ცანავა
ე. ზარიძე

ISBN 978-9941-14-169-0

წინასიტყვაობა

წინამდებარე სახელმძღვანელო უმაღლესი მათემატიკის მოკლე კურსია (თეორია და ამოცანათა კრებული) უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების, ბაკალავრიატის და პროფესიული უმაღლესი განათლების სტუდენტებისათვის.

იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით. მასში განხილულია შემდეგი საკითხები: წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები; ერთი და მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა; ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა; დიფერენციალური განტოლებები და მისი გამოყენება; მწკრივები (რიცხვთა და ხარისხოვანი).

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველში გადმოცემულია თეორიული მასალა. მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანას და სავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თეორიული მასალის შესაბამისად, მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით.

წიგნის ხელნაწერი გულდასმით წაიკითხა და სასარგებლო შენიშვნები მოგვცა რეცენზენტმა, რისთვისაც მას გულწრფელ მადლობას მოვახსენებთ.

ავტორები

მათემატიკის საგანი

სიტყვა მათემატიკა წარმოდგება ბერძნული სიტყვისაგან „მათემა“, რაც ნიშნავს ცოდნას, მეცნიერებას. მათემატიკა, ისევე როგორც ყველა სხვა მეცნიერება, წარმოიშვა პრაქტიკული საჭიროებისაგან. მათემატიკა განუწყვეტლივ კავშირშია ტექნიკის, ბუნებისმეტყველებისა და მრავალი სხვა მეცნიერების მოთხოვნილებასთან.

მათემატიკა უნივერსალური მეცნიერებაა. იგი სხვა მეცნიერებებს აძლევს რიცხვებისა და სიმბოლოების ენას, ბუნების მოვლენებს შორის სხვადასხვა სახის დამოკიდებულებათა გამოსახვისათვის. მათემატიკის უნივერსალობა იმაში გამოიხატება, რომ მისი შესწავლის ობიექტებია არა რაიმე კონკრეტული მოვლენები, არამედ ე.წ. მათემატიკური მოდელები. მისი ძალა იმაშია, რომ იგი ქმნის სულ უფრო ზოგად მათემატიკურ სქემებს, მოდელებს. ერთი და იმავე მათემატიკურ მოდელს შეუძლია აღწეროს თავიანთი კონკრეტული შინაარსით ერთმანეთისაგან ძალიან შორს მდგომი რეალური მოვლენების თვისებები. კერძოდ, ერთი და იმავე დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება როგორც რადიაქტიური დაშლის ხასიათი, ასევე სხეულის ტემპერატურის ცვლილება და სხვა მოვლენები. ამიტომ სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის პროცესში ადამიანის მოღვაწეობის ყველა სფეროში იჭრება მათემატიკური კვლევის მეთოდები.

მათემატიკის კავშირი ტექნიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებასთან ორი სახით გვევლინება: ბევრი მათემატიკური მოდელი თვითონ არის წარმოშობილი ტექნიკისა და ბუნებისმეტყველების უშუალო მოთხოვნილების საფუძველზე და ამგვარად ისინი განსაზღვრავენ მათემატიკის წინსვლის რეალურ შესაძლებლობას. მაგალითად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის წარმოშობა დაკავშირებულია გეოდეზიურ სამუშაოებთან, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ბევრი ახალი ტიპის შესწავლა პირველად დაიწყო ტექნიკური პრობლემის ამოხსნით.

საავიაციო ტექნიკის განვითარების პრობლემებმა, მიიყვანა აკადემიკოსი მ. ა. ლავრენტიევი კვაზიკონფორმული ასახვების თეორიის შექმნამდე.

ამავე დროს ხდება პირიქითაც: უკვე ჩამოყალიბებული მათემატიკური თეორია პოულობს გამოყენებას ტექნიკისა და

ბუნებისმეტყველების მანამდე ამოუხსნელი პრობლემების ამოხსნაში და ამით წინ სწევს მათ. ამის ბრწყინვალე მაგალითია ა. ეინშტეინის მიერ ფარდობითობის ზოგადი თეორიის შექმნა, რომლის სიზუსტე ექსპერიმენტულად მოგვიანებით იქნა შემოწმებული. იგივე შეიძლება ითქვას ნეიტრონის აღმოჩენის შესახებ, რომელიც, როგორც ფიზიკოსები ამბობენ, თავდაპირველად მათემატიკოსების „კალმის წვერზე" იქნა აღმოჩენილი და მხოლოდ მოგვიანებით აღმოაჩინეს ექსპერიმენტულად. ავიაციის განვითარებაში დიდი წარმატება იქნა მიღწეული მ.კელდიშის მიერ შექმნილი მათემატიკური თეორიის გამოყენებით „შიმისა" და „შტოპორის" პრობლემის გადაწყვეტაში. ეს მოვლენები წარმოადგენდა მრავალი თვითმფრინავის დაღუპვის მიზეზს.

თუ რამდენად დიდია მათემატიკის როლი თანამედროვე მეცნიერებაში, შეგვიძლია ვიმსჯელოთ იმ სიტყვებით, რომელიც ჯერ კიდევ XVI საუკუნეში წარმოთქვა დიდმა ხელოვანმა და მოაზროვნემ ლეონარდო და ვინჩიმ – არც ერთ გამოკვლევას, რაც კაცობრიობას ჩაუტარებია, არ შეიძლება ქწოდოს ჭეშმარიტი მეცნიერება თუ მან არ გაიარა მათემატიკური დამტკიცება, ხოლო XVIII საუკუნის დიდმა ფილოსოფოსმა ემანუელ კანტმა განაცხადა, რომ ყოველი მეცნიერება იმდენადაა მეცნიერება, რამდენადაც დიდია მასში მათემატიკა.

მათემატიკის უნივერსალობა იმაშიც გამოიხატება, რომ მისი შესწავლა ავითარებს ლოგიკურ და ალგორითმულ აზროვნებას. ამიტომ სტუდენტი მათემატიკაში უნდა სწავლობდეს არა მარტო იმ საკითხებს, რაც უშუალოდ მას სჭირდება თავისი სპეციალობის დასაუფლებლად, არამედ მან უნდა მიიღოს ისეთი ფუნდამენტური მათემატიკური განათლება, რომელიც საშუალებას მისცემს საჭიროების მიხედვით (დროის, საქმის მოთხოვნილების შესაბამისად) დამოუკიდებლად გააფართოოს და გააღრმაოს თავისი მათემატიკური ცოდნის დონე.

I თავი

ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვები

§1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე. ლოგიკის სიმბოლოები

განვსაზღვროთ რაიმე ცნება ნიშნავს – გადმოვცეთ მისი შინაარსი სხვა ადრე შემოღებული ცნებების საშუალებით. მაგრამ განსაზღვრებათა ამ ჯაჭვში უნდა გამოიყოს საწყისი ცნებები, რომლებიც სხვა ცნებების საშუალებით არ განისაზღვრებიან. ეს ცნებები მიღებულია ძირითად, პირველად ცნებებად და მათზე დაყრდნობით განისაზღვრება ყველა სხვა ცნება.

მათემატიკის ერთ-ერთი პირველადი ცნებაა სიმრავლის ცნება. სიმრავლეზე წარმოდგენას გვაძლევს რაიმე ნიშნის მიხედვით გაერთიანებული ობიექტების ერთობლიობა. მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ საქართველოს უმაღლეს სასწავლებელთა სიმრავლეზე, მზის სისტემის პლანეტების სიმრავლეზე, ქართული ანბანის ასოების სიმრავლეზე და ა. შ.

ობიექტებს, რომელთაგანაც შედგება სიმრავლე, ამ სიმრავლის ელემენტები ეწოდება.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით: A, B, $C, D...$, ხოლო მის ელემენტებს პატარა ასოებით: a, b, c, d...

იმ ფაქტს, რომ a წარმოადგენს A სიმრავლის ელემენტს, ასე ჩაწერენ: $a \in A$ (იკითხება "a ეკუთვნის A-ს"), ხოლო თუ a არ წარმოადგენს A-ს ელემენტს, მაშინ წერენ: $a \notin A$ ან $a \overline{\in} A$ (იკითხება "a არ ეკუთვნის A-ს").

სიმრავლე მოცემულია, თუ ნებისმიერ ობიექტზე შეიძლება ითქვას, წარმოადგენს თუ არა იგი ამ სიმრავლის ელემენტს.

სიმრავლე, რომლის ელემენტებია a, b, c..., აღინიშნება ასე: $\{a, b, c,...\}$, ხოლო ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ რაიმე P თვისება, აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$\{x{:}P\}.$$

მაგალითად, ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია 100-ზე, ასე აღინიშნება: $\{x{:}\ x\in N, x<100\}$, სადაც N ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცხადია, თუ რა თვისების მიხედვით არიან ელემენტები გაერთიანებული A სიმრავლეში, ეს თვისება შეიძლება არ მივუთითოთ და ჩავწეროთ

$$A=\{x\}.$$

მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$N=\{n\},$$

სადაც n აღნიშნავს ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვს.

სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად, $x^2+1=0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს და წერენ: $A\subset B$ (იკითხება "A ქვესიმრავლეა B-სი"). თუ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ წერენ $A\not\subset B$.

მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ე. ი. $\varnothing\subset A$.

ცხადია, რომ ნებისმიერი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს, ე. ი. $A\subset A$.

თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ხოლო B-ში არსებობს ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც A-ს არ ეკუთვნის, მაშინ A-ს ეწოდება B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $A\subset B$ და $B\subset A$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ტოლი ეწოდება და წერენ $A=B$.

ორი A და B სიმრავლის გაერთიანება (ჯამი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის და $A\cup B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა ვთქვათ, გვაქვს რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, \ldots, A_n$. ამ სიმრავლეთა გაერთიანება (ჯამი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან. სიმრავლეთა გაერთიანება აღინიშნება ასე:

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n \text{ ან } \bigcup_{k=1}^{n} A_k\,.$$

ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის, როგორც A ისე B სიმრავლეს და $A\cap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, \ldots, A_n$. ამ სიმრავლეთა თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სიმრავლეთა თანაკვეთა ასე აღინიშნება:

$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n \text{ ან } \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

ორ A და B სიმრავლეს ურთიერთარაგადამკვეთი (თანაუკვეთი) ეწოდება, თუ მათი თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

A და B სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან და $A \setminus B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ადვილია ჩვენება, რომ მოქმედებებს სიმრავლეებზე გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (გადანაცვლებადობა),

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ჯუფთებადობა),

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (დისტრიბუციულობა).

მათემატიკური წინადადებების (თეორემების, განსაზღვრებების და სხვ.) ფორმულირებისას ხშირად იყენებენ მათემატიკური ლოგიკის სიმბოლოებს.

თუ α და β-თი აღნიშნულია რაიმე წინადადებები, მაშინ $\alpha \Rightarrow \beta$ ($\Rightarrow$ იმპლიკაციის სიმბოლო) ჩანაწერი ნიშნავს: "α წინადადებიდან გამომდინარეობს β წინადადება".

ჩანაწერი $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ($\Leftrightarrow$ ეკვივალენტობის სიმბოლო) ნიშნავს: "α და β წინადადებები ეკვივალენტურია" ე. ი. $\alpha \Rightarrow \beta$ და $\beta \Rightarrow \alpha$.

$\forall$ სიმბოლო (ზოგადობის კვანტორი) იხმარება "ნებისმიერი", "თითოეული", "ყოველი" სიტყვების ნაცვლად. მაგალითად: $\forall x \in A : \alpha$ ნიშნავს: "A სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის ადგილი აქვს α წინადადებას".

$\exists$ სიმბოლო (არსებობის კვანტორი) იხმარება "არსებობს", "მოიძებნება" სიტყვების ნაცვლად. მაგალითად, $\exists y \in B : \beta$ ნიშნავს: "B სიმრავლეში არსებობს ელემენტი y, რომლისთვისაც ადგილი აქვს β წინადადებას".

ჩანაწერი $\exists! x \in A : \alpha$ ნიშნავს: "არსებობს A სიმრავლის ერთადერთი x ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს α წინადადებას" ($\exists!$ სიმბოლოს ეწოდება არსებობისა და ერთადერთობის კვანტორი).

$\alpha \wedge \beta$ ჩანაწერი ($\wedge$ კონიუნქციის სიმბოლო) ნიშნავს: "α და β-ს ერთდროულად აქვს ადგილი". იკითხება: "α და β".

$\alpha \vee \beta$ ჩანაწერი ($\vee$ დიზუნქციის სიმბოლო) ნიშნავს: "α და β-დან ერთ-ერთს მაინც აქვს ადგილი". იკითხება: "α ან β".

სიმბოლო $\overline{\alpha}$ აღნიშნავს α წინადადების უარყოფას და იკითხება "არა α". მაგალითად, $\overline{\forall x \in A : \alpha}$ ნიშნავს, რომ წინადადება α არ სრულდება A სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის. სხვანაირად რომ ვთქვათ, A სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც x ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს $\overline{\alpha}$ წინადადებას, ე. ი.

$$\overline{\forall x \in A : \alpha} \Leftrightarrow \exists x \in A : \overline{\alpha}.$$

§2. ნამდვილი რიცხვები. რიცხვითი ღერძი. რიცხვთა შუალედები

რიცხვის ცნება უძველეს დროში წარმოიშვა და განვითარების დიდი გზა გაიარა, რომლის დროსაც ხდებოდა რიცხვის ცნების გაფართოება და განზოგადება.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე:

$$N=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

წარმოიშვა საგნების თვლის შედეგად. შემდგომში პრაქტიკისა და თვითონ მათემატიკის განვითარების მოთხოვნილებით შემოტანილი იქნა მთელი რიცხვების

$$Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

და რაციონალური რიცხვების ცნება:

$$Q=\left\{\frac{m}{n} : m \in Z,\ n \in N\right\}.$$

როგორც მათემატიკის სასკოლო კურსიდანაა ცნობილი, ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ სასრული ათწილადის ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით და პირიქით.

რაციონალურ რიცხვთა შემოღებამ სრულად ვერ გადაჭრა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანა, მაგალითად მონაკვეთის სიგრძის გაზომვა. არსებობენ ისეთი მონაკვეთები, რომელთა სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება. ასეთი მონაკვეთია იმ კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდის სიგრძე 1-ის ტოლია. ე. ი. არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ასევე, არ არსებობს რიცხვები, რომელთა კვადრატებია 3, 5, 6, 7 და ა. შ. ასეთი რიცხვები ეკუთვნიან ე. წ. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. რადგან ასეთი რიცხვები არ არიან რაციონალური, ამიტომ მათი წარმოდგენა უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეუძლებელია.

უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე I ასოთი აღინიშნება.

მაგალითად, ირაციონალურია უსასრულო ათწილადი

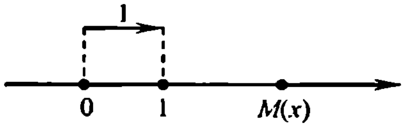
$$0{,}101001000100001\ldots$$

რომლის ჩანაწერში პირველი 1-იანის შემდეგ არის ერთი ნული, მეორე 1-იანის შემდეგ – ორი ნული და ა. შ.

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და R ასოთი აღინიშნება.

რადგან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ძირითადი თვისებები და არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე მკითხველისათვის ცნობილია მათემატიკის სასკოლო კურსიდან, ამიტომ ჩვენ მათზე არ შევჩერდებით.

წრფეს, რომელზედაც ფიქსირებულია რაიმე O წერტილი (სათავე), არჩეულია დადებითი მიმართულება და სიგრძის ერთეული (მასშტაბი), რიცხვითი ღერძი ანუ რიცხვითი წრფე ეწოდება (ნახაზი 1.1).



ნახ. 1.1

რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი ნამდვილი x რიცხვი და პირიქით. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს შემდეგი წესით: $x=|OM|$ (OM მონაკვეთის სიგრძეს), თუ O-დან M-საკენ მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას და $x=-|OM|$ — წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. ის ფაქტი, რომ x რიცხვი M წერტილის კოორდინატია, ასე ჩაიწერება: $M(x)$. ცხადია, რომ O სათავის კოორდინატია ნული. მოცემულია წერტილი ღერძზე ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის კოორდინატი.

შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე, რომელთაც რიცხვითი შუალედები ეწოდება.

ვთქვათ, a და b ორი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$.

***განსაზღვრება* 2.1.** ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a\le x\le b$, ჩაკეტილი შუალედი (მონაკვეთი) ეწოდება და $[a;b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$[a;b]=\{x\in R\colon a\le x\le b\}.$$

ანალოგიურად

$$]a;b[=\{x\in R\colon a<x<b\}$$

სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება, ხოლო

$$[a;b[=\{x\in R\colon a\le x<b\},$$

$$]a;b]=\{x\in R\colon a<x\le b\},$$

სიმრავლეებს ნახევრად ღია შუალედები ეწოდება.

a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება, ხოლო $b-a$ რიცხვს შუალედის სიგრძე.

***განსაზღვრება* 2.2.** ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x\geq a$, უსასრულო შუალედი ეწოდება და $[a;+\infty[$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$[a;+\infty[=\{x\in R\colon x\geq a\}.$$

უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები:

$$]a;+\infty[=\{x\in R\colon x>a\},$$
$$]-\infty;b]=\{x\in R\colon x\leq b\},$$
$$]-\infty;b[=\{x\in R\colon x<b\}.$$

ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება: $R=]-\infty;+\infty[$.

$a\in R$ რიცხვის მიდამო $U(a)$ ეწოდება ამ რიცხვის შემცველ ყოველ ინტერვალს.

$a\in R$ რიცხვის ε მიდამო $U(a;\varepsilon)$ ეწოდება $]a-\varepsilon;a+\varepsilon[$ ინტერვალს:

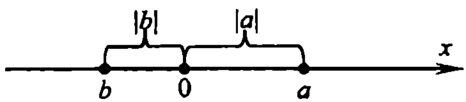
$$U(a;\varepsilon)=]a-\varepsilon;a+\varepsilon[.$$

§3. ნამდვილი რიცხვის მოდული (აბსოლუტური სიდიდე) და მისი თვისებები

***განსაზღვრება* 3.1.** ნამდვილი a რიცხვის მოდული (აბსოლუტური სიდიდე) ეწოდება თვით ამ რიცხვს, თუ იგი არაუარყოფითია, მის მოპირდაპირე რიცხვს, თუ იგი უარყოფითია და $|a|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{თუ} \quad a\geq 0, \\ -a, & \text{თუ} \quad a<0. \end{cases}$$

გეომეტრიულად ნამდვილი რიცხვის მოდული წარმოადგენს მანძილს რიცხვითი წრფის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე (ნახაზი 1.2).



ნახ. 1.2.

ნამდვილი რიცხვის მოდულის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

1. $|-a|=|a|$;
2. $-|a|\leq a\leq |a|$;
3. $|a|\leq\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon\leq a\leq\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$;
4. $|a|\geq\varepsilon \Leftrightarrow a\leq-\varepsilon \vee a\geq\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$.

მოვიყვანოთ მოდულის ზოგიერთი თვისება:

1. ორი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს, ე. ი. $|a+b| \le |a|+|b|$.

2. თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ $||a|-|b|| \le |a-b|$.

3. ორი რიცხვის ნამრავლის მოდული უდრის ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლს. ე. ი. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

4. a და b რიცხვების ($b \neq 0$) ფარდობის მოდული ამ რიცხვების მოდულების ფარდობის ტოლია, ე. ი. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

§4. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები

ვთქვათ მოცემულია A და B სიმრავლეები და წესი, რომლის საშუალებითაც A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი b ელემენტი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემულია შესაბამისობა A სიმრავლისა B სიმრავლეში. b-ს უწოდებენ a ელემენტის შესაბამისს.

A და B სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას ეწოდება ურთიერთცალსახა, თუ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი B სიმრავლიდან და B სიმრავლის ყოველი ელემენტი არის A სიმრავლის ერთადერთი ელემენტის შესაბამისი. ე. ი. ასეთი შესაბამისობა შექცევადია.

A და B სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და წერენ $A \sim B$.

ცხადია, რომ 1) $A \sim A$ (რეფლექსურობა); 2) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$ (სიმეტრიულობა); 3) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$ (ტრანზიტულობა).

A სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ იგი არის ცარიელი ან არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}.$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A სიმრავლის ელემენტთა რიცხვი არის n. ცარიელ სიმრავლეში ელემენტთა რიცხვი მიღებულია ნულის ტოლად.

ცხადია, რომ ორი სასრული სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ელემენტების რიცხვი ერთმანეთის ტოლია.

სიმრავლეს უსასრულო ეწოდება, თუ იგი სასრული არ არის.

სიმრავლეს თვლადი ეწოდება, თუ იგი ეკვივალენტურია ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის, ხოლო უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც თვლადი არაა, არათვლადი სიმრავლე ეწოდება.

მაგალითად, $M=\{2, 4,\ldots,2n,\ldots\}$ სიმრავლე თვლადია, რადგან N და M სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს თანადობით $n\leftrightarrow 2n$. ასევე სიმრავლე $M=\{2^n\}$ თვლადია რადგან შესაბამისობა $n\leftrightarrow 2^n$ ურთიერთცალსახაა.

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ N სიმრავლეში არსებობს მისი ეკვივალენტური საკუთრივი ქვესიმრავლე. ამ თვისებით ხასიათდება მხოლოდ უსასრულო სიმრავლე. ეს თვისება შეიძლებოდა მიგვეღო უსასრულო სიმრავლის განსაზღვრებად.

თვლადი სიმრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ შესაძლებელია მისი ელემენტების დანომვრა ნატურალური რიცხვებით, ამიტომ ხშირად თვლად სიმრავლეს ჩავწერთ მისი ელემენტების მიმდევრობის სახით:

$$A=\{a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots\}.$$

რადგან ეკვივალენტობის მიმართება ტრანზიტულია, ამიტომ ყველა თვლადი სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

მტკიცდება, რომ რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე თვლადია, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე არათვლადია. უფრო მეტიც, ირაციონალურ რიცხვთა I სიმრავლე არათვლადია და ნებისმიერი რიცხვთა შუალედიც არათვლადია.

§5. რიცხვითი სიმრავლის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი

***განსაზღვრება* 5.1.** ნამდვილ რიცხვთა რაიმე X სიმრავლეს ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი c რიცხვი, რომ ნებისმიერი $x\in X$ რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა $x\le c$ ($x\ge c$). c რიცხვს X სიმრავლის ზედა (ქვედა) საზღვარი ეწოდება.

სიმრავლეს, რომელიც შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან ასევე ქვემოდან, ეწოდება შემოსაზღვრული.

მაგალითად, ნებისმიერი სასრული შუალედი $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ შემოსაზღვრულია, ხოლო $[a;+\infty[$ ინტერვალი შემოსაზღვრულია ქვემოდან, $]-\infty;a[$ ინტერვალი კი ზემოდან.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული სიმრავლის ზედა (ქვედა) საზღვართა სიმრავლე უსასრულოა.

***განსაზღვრება* 5.2.** a რიცხვს ეწოდება X სიმრავლის უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი, თუ $a\in X$ და $\forall x\in X$ რიცხვისათვის $x\le a$ ($x\ge a$).

სიმრავლის უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი აღინიშნება $\max X$ ($\min X$) სიმბოლოთი. ცხადია, რომ თუ X სასრული არაცარიელი სიმრავლეა, მაშინ მასში არსებობს უდიდესი და უმცირესი რიცხვი. თუ სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ მასში უდიდესი ან უმცირესი რიცხვი შეიძლება არ არსებობდეს. მაგალითად,

$$X=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$$

სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი,

$$X=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n+1},\cdots\right\}$$

სიმრავლეში არ არის უმცირესი რიცხვი, ხოლო $]-1;2[$ სიმრავლეში არ არის არც უმცირესი და არც უდიდესი რიცხვი.

შევნიშნოთ, რომ თუ სიმრავლეს გააჩნია უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი, მაშინ იგი ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულია.

ბუნებრივად ისმება ამოცანა: ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი სიმრავლისათვის შემოვიტანოთ ისეთი მახასიათებლები (რიცხვები), რომლებიც გარკვეულად შეცვლიან $\max X$ და $\min X$-ს, როცა ისინი არ არსებობენ.

არაცარიელი სიმრავლის ასეთ მახასიათებლებს წარმოადგენენ სიმრავლის, ე. წ. ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები.

***განსაზღვრება* 5.3.** ზემოდან შემოსაზღვრული X სიმრავლის ზედა საზღვართა შორის უმცირესს ეწოდება X სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი და აღინიშნება $\sup X$-ით, ხოლო ქვემოდან შემოსაზღვრული X სიმრავლის ქვედა საზღვართა შორის უდიდესს ეწოდება X სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი და აღინიშნება $\inf X$-ით.

მაგალითად, $]a,b[$ ინტერვალის ზუსტი ზედა საზღვარია b, ხოლო ზუსტი ქვედა საზღვარია a.

ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვრის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ სიმრავლეს აქვს ეს საზღვარი, მაშინ ის ერთადერთია, რადგან ყოველ სიმრავლეში უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი ერთადერთია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ არსებობს $\max X$ ($\min X$), მაშინ $\max X=\sup X$ ($\min X=\inf X$).

გააჩნია თუ არა ყოველ ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულ სიმრავლეს ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

***თეორემა* 5.1.** ყოველ არაცარიელ ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულ სიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი.

შედეგი. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ არაცარიელ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი.

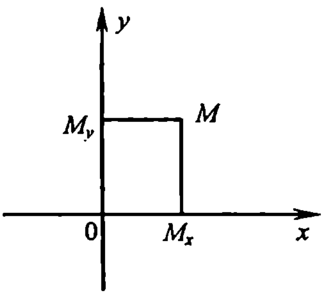
თუ X სიმრავლე ზემოდან (ქვემოდან) არ არის შემოსაზღვრული, წერენ, რომ $\sup X=+\infty$ ($\inf X=-\infty$).

§6. კოორდინატთა სისტემები

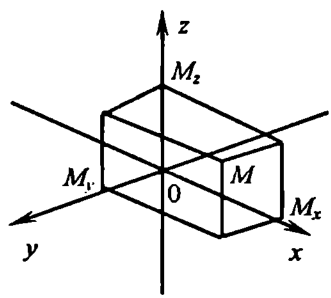
1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე. საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე. საერთო O სათავეს კოორდინატთა სათავე ეწოდება, ხოლო ღერძებს — საკოორდინატო ღერძები. მათ უწოდებენ აგრეთვე აბსცისთა Ox და ორდინატთა Oy ღერძებს.

განვიხილოთ სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილი. მისი გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე (ნახ. 1.3) შესაბამისად აღვნიშნოთ M_x და M_y-ით.

წერტილის დეკარტის მართკუთხა x და y კოორდინატები ეწოდება შესაბამისად M_x და M_y წერტილის კოორდინატებს სათანადო ღერძებზე. x კოორდინატს წერტილის აბსცისა ეწოდება, ხოლო y-ს ორდინატი. ის ფაქტი, რომ M წერტილის კოორდინა-



ნახ. 1.3.



ნახ. 1.4.

ტებია x და y ასე ჩაიწერება: $M(x,y)$. ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა ერთადერთი დალაგებული წყვილი და პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთადერთი წერტილი. ამრიგად, სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილების სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ოთხ ნაწილად ყოფს, ამ ნაწილებს მეოთხედებს ანუ კვადრატებს უწოდებენ.

2. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. დეკარტის კოორდინატთა სისტემა სივრცეში განისაზღვრება სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემის ანალოგიურად.

საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე წყვილ-წყვილად ურთიერთპერპენდიკულარული სამი ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში. საერთო O სათავეს კოორდინატთა სათავე ეწოდება, ხოლო ღერძებს — საკოორდინატო ღერძები. მათ უწოდებენ აგრეთვე აბსცისთა Ox, ორდინატთა Oy და აპლიკატთა Oz ღერძებს.

ვთქვათ, M_x, M_y და M_z სივრცის ნებისმიერი M წერტილის გეგმილებია შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებზე (ნახ. 1.4). M წერტილის დეკარტის მართკუთხა x, y და z კოორდინატები ეწოდება შესაბამისად M_x, M_y და M_z წერტილის კოორდინატებს სათანადო ღერძებზე. x კოორდინატს M წერტილის აბსცისა ეწოდება, y-ს — ორდინატი, ხოლო z-ს აპლიკატი. ის ფაქტი, რომ M წერტილის კოორდინატებია x, y და z ასე ჩაიწერება: $M(x,y,z)$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ სივრცის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულების სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

წყვილ-წყვილად აღებული საკოორდინატო ღერძები განსაზღვრავენ ე. წ. საკოორდინატო xOy, yOz და xOz სიბრტყეებს. ეს სიბრტყეები სივრცეს ყოფენ რვა ნაწილად, რომელთაც ოქტანტები (მერვედები) ეწოდება.

3. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა. კავშირი დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის. ზემოთ განხილული დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდა, სიბრტყეზე შეიძლება აიგოს კოორდინატთა მრავალი სხვა სისტემაც, რომლებიც საშუალებას იძლევიან განისაზღვროს სიბრტყის წერტილის მდებარეობა ორი ნამდვილი რიცხვით.

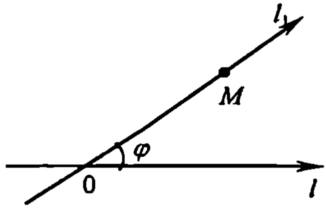
განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი, ე. წ. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემდეგ ყველაზე მოხერხებულია და საკმაოდ ხშირად გამოიყენება.

ავიღოთ სიბრტყეზე რიცხვითი l ღერძი. ამ ღერძს ვუწოდოთ პოლარული ღერძი, ხოლო მის სათავეს — პოლუსი.

ვთქვათ, M სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია, რომელიც პოლუსს არ ემთხვევა. გავავლოთ O პოლუსზე და M წერტილზე l_1 ღერძი, რომლის სათავეა O პოლუსი, ხოლო მიმართულება ემთხვევა O პოლუსიდან M წერტილისაკენ მიმართულებას (ნახ. 1.5). მოვაბრუნოთ l ღერძი O პოლუსის გარშემო l_1 ღერძთან შეთავსებამდე. მიღებულია, რომ თუ მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ მობრუნების კუთხე დადებითია, ხოლო თუ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ — უარყოფითი. შევნიშნოთ, რომ მოცემული M წერტილისათვის არსებობს უსასრულოდ ბევრი მობრუნების კუ-

თხე. კერძოდ, თუ φ ერთ-ერთი მობრუნების კუთხეა, მაშინ $\varphi+2\pi k$ აგრეთვე მობრუნების კუთხეა ნებისმიერი მთელი k-სათვის. M წერტილის კოორდინატი l_1 ღერძზე აღვნიშნოთ ρ-თი და ვუწოდოთ მას M წერტილის პოლარული რადიუსი, ხოლო l ღერძის მობრუნების კუთხეს პოლარული კუთხე.

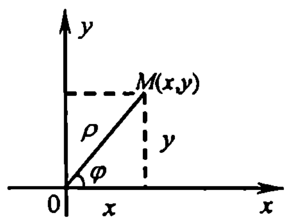
ცხადია, რომ $\rho>0$ და ამასთან სიბრტყის ყოველი წერტილი, რომელიც პოლუსს არ ემთხვევა, განისაზღვრება რიცხვთა წყვილით (ρ,φ).



ნახ. 1.5.

პოლუსისათვის პოლარული რადიუსი $\rho=0$, ხოლო პოლარული φ კუთხე განუსაზღვრელია. პოლუსის მდებარეობა სიბრტყეზე სავსებით განისაზღვრება $\rho=0$ კოორდინატით.

M წერტილის პოლარულ ρ რადიუსს და φ პოლარულ კუთხეს ეწოდება ამ წერტილის პოლარული კოორდინატები. ის ფაქტი, რომ M წერტილის პოლარული კოორდინატებია ρ და φ ასე ჩაიწერება $M(\rho,\varphi)$.



ნახ. 1.6.

თუ სიბრტყეზე არჩეულია პოლარული ღერძი და პოლუსი, მაშინ ვიტყვით, რომ სიბრტყეზე მოცემულია პოლარულ კოორდინატთა სისტემა.

შევნიშნოთ, რომ სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება უსასრულოდ ბევრი პოლარული კოორდინატები. კერძოდ, მოცემული წერტილისათვის პოლარული რადიუსი ცალსახად განისა-

ზღვრება, ხოლო პოლარული კუთხეები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π-ს ჯერადით.

ზოგჯერ, როდესაც სასურველია, რომ სიბრტყის წერტილებსა და კოორდინატებს შორის იყოს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა პოლარულ კუთხედ იღებენ მის უმცირეს არაუარყოფით მნიშვნელობას. ცხადია, ამ შემთხვევაში $0\leq\varphi<2\pi$.

ადვილი საჩვენებელია (ნახ. 1.6), რომ თუ პოლუსი ემთხვევა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავეს და პოლარული ღერძი აბსცისთა ღერძს, მაშინ

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi. \tag{6.1}$$

ეს ფორმულა გამოსახავს M წერტილის დეკარტის კოორდინატებს ამავე წერტილის პოლარული კოორდინატებით. პირიქით, თუ ცნობილია M წერტილის დეკარტის კოორდინატები (x,y), მაშინ (6.1) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad tg\varphi=\frac{y}{x}. \tag{6.2}$$

უკანასკნელი ტოლობიდან პოლარული კუთხისათვის უნდა ავიღოთ მნიშვნელობა $M(x,y)$ წერტილის მდებარეობის მიხედვით.

***მაგალითი* 1.** პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილი $M\left(2\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right)$. ვიპოვოთ ამ წერტილის დეკარტის კოორდინატები.

ამოხსნა. რადგან $\rho=2\sqrt{3}$ და $\varphi=\frac{\pi}{3}$, ამიტომ (6.1) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$x=2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,,\quad y=2\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=3\,.$$

***მაგალითი* 2.** დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილი $M\left(\sqrt{3};-1\right)$. ვიპოვოთ ამ წერტილის პოლარული კოორდინატები.

ამოხსნა. მოცემულია $x=\sqrt{3}$ და $y=-1$, ამიტომ (6.2) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$\rho=\sqrt{3+1}=2\,,\quad tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ $M\left(\sqrt{3};-1\right)$ წერტილის მდებარეობას, უკანასკნელი ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\varphi=\frac{11}{6}\pi$.

§7. კომპლექსური რიცხვები

1. კომპლექსური რიცხვების განსაზღვრება. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე. როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის სრულდება შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და მთელ დადებით ხარისხში ახარისხების ოპერაცია. რაც შეეხება ახარისხების შებრუნებულ ოპერაციას – ამოფესვას, იგი ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ასე, მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს რიცხვი, რომლის კვადრატი -1-ის ტოლია, ამიტომ ამ სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია ისეთ უმარტივეს კვადრატულ განტოლებას, როგორიცაა

$$x^2+1=0.$$

საზოგადოდ, ნამდვილ რიცხვთა სიმრაელეში არ არსებობს რიცხვი, რომლის ლუწი ხარისხი უარყოფითი რიცხვია, ამიტომ იმ ნამდვილ კოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლებებს, რომლებსაც უარყოფითი დისკრიმინანტი აქვთ, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

ისმის ამოცანა: მოვახდინოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი გაფართოება, რომ მიღებულ სიმრავლეში ნებისმიერ კვადრატულ განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი, ე. ი. ყოველთვის შესაძლებელი იყოს ფესვის ამოღების ოპერაცია.

კომპლექსური რიცხვი ეწოდება გამოსახულებას

$$z=x+iy,$$

სადაც x და y – ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i – ეგრეთწოდებული წარმოსახვითი ერთეული, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$i^2=-1.$$

x-ს უწოდებენ z კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, ხოლო y-ს წარმოსახვით ნაწილს და აღნიშნავენ სიმბოლოებით $x=\mathrm{Re}z$, $y=\mathrm{Im}z$.

განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ

1. $0+iy=iy$ და $x+i0=x$.

2. ორი $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$.

ამ ტოლობებიდან გამომდინარე $z=x+iy=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=0$ და $y=0$.

ორი $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ კომპლექსური რიცხვის z_1+z_2 ჯამი ეწოდება $z_1+z_2=(x_1+y_1)+i(x_2+y_2)$ კომპლექსურ რიცხვს.

z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვების z_1-z_2 სხვაობა ეწოდება z კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $z+z_2=z_1$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ კომპლექსური რიცხვების სხვაობა ყოველთვის არსებობს და იგი ცალსახად განისაზღვრება ტოლობით

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

ორი $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2$ კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი ეწოდება ისეთ კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც მიიღება თუ ამ რიცხვებს გადავამრავლებთ ისე როგორც ჩვეულებრივ ორწევრებს და გავითვალისწინებთ, რომ $i^2=-1$, ე. ი.

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2=$$
$$(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

***მაგალითი* 1.** მოცემულია კომპლექსური რიცხვები $z_1=2+3i$, $z_2=5-7i$. ვიპოვოთ ა) z_1+z_2; ბ) z_1-z_2; გ) $z_1\cdot z_2$.

ამოხსნა. ა) $z_1+z_2=(2+3i)+(5-7i)=2+3i+5-7i=(2+5)+(3i-7i)=7-4i$;

ბ) $z_1-z_2=(2+3i)-(5-7i)=(2-5)+(3+7)i=-3+10i$;

გ) $z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(5-7i)=(10+21)+(-14+15)i=31+i$.

კომპლექსური რიცხვი

$$-1\cdot z=(-1+i\cdot 0)(x+iy)=-x-iy$$

აღინიშნება $-z$-ით და მას ეწოდება z-ის სიმეტრიული რიცხვი.

ცხადია, რომ $z+(-z)=0$.

ადვილი გამოსათვლელია, რომ $i^3=-i$, $i^4=1$, და, საზოგადოდ, ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.$$

$x-iy$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული და $\bar{z}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი. $\bar{z}=x-iy$.

ცხადია, რომ ყოველი კომპლექსური z რიცხვისათვის $\overline{(\bar{z})}=z$.

შეუღლებულის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლობას $\bar{z}=z$ ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც z ნამდვილი რიცხვია.

$z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება $\sqrt{x^2+y^2}$ რიცხვს და $|z|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$$

ცხადია, რომ $|z|\geq 0$, ამასთან $|z|=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $z=0$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$|z|=|\bar{z}|,\quad z\cdot\bar{z}=|z|^2.$$

$z_1=x_1+iy_1$ კომპლექსური რიცხვის განაყოფი $z_2=x_2+iy_2\neq0$ კომპლექსურ რიცხვზე ეწოდება ისეთ $z=x+iy$ კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$z\cdot z_2=z_1 \tag{7.1}$$

და მას $z_1:z_2$ ან $\dfrac{z_1}{z_2}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

(7.1) ტოლობიდან გვაქვს

$$x_1+iy_1=(x_2+iy_2)(x+iy)=(x_2x-y_2y)+i(x_2y+y_2x),$$

საიდანაც

$$x_1=x_2x-y_2y, \quad y_1=y_2x+x_2y.$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \qquad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

ამრიგად

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

მაშასადამე $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2\neq0)$ განაყოფის გამოსათვლელად საკმარისია მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე. მაგალითად,

$$\frac{2-i}{3+2i}=\frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{6-4i-3i+2i^2}{9+4}=\frac{4-7i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i.$$

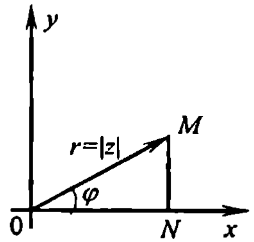
2. კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი. ავიღოთ სიბრტყეზე Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. $z=x+iy$ კომპლექსურ რიცხვს შევუსაბამოთ M წერტილი x და y კოორდინატებით. პირიქით, სიბრტყის ყოველ $M(x,y)$ წერტილს შევუსაბამოთ კომპლექსური რიცხვი $x+iy$. ასეთნაირად კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლესა და სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს შორის დამყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

სიბრტყეს, რომელიც გამოყენებულია კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული წარმოდგენისათვის, კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება და (z) სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვინაიდან M წერტილს და ამ წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორს* ერთნაირი კოორდინატები აქვთ (ნახ. 1.7), ამიტომ ყოველი

* სათავეზე მოდებულ $\overrightarrow{OM}$ ვექტორს M წერტილის რადიუს-ვექტორი ეწოდება.

z კომპლექსური რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიბრტყის წერტილი ან ამ წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი.



ნახ. 1.7.

ცხადია, რომ კომპლექსური რიცხვის მოდული წარმოადგენს მისი შესაბამისი რადიუს-ვექტორის r სიგრძეს.

$z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი რადიუს-ვექტორის მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ φ ასოთი (ნახ. 1.7).

ΔOMN-დან გვაქვს:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi. \tag{7.2}$$

საიდანაც

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{7.3}$$

φ კუთხეს, რომელიც (7.3) ტოლობებით განისაზღვრება, ეწოდება $z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი. როდესაც $z=0$, არგუმენტი განუსაზღვრელია და ამიტომ, როცა საკითხი ეხება არგუმენტს, ყველგან იგულისხმება, რომ $z\neq 0$.

(7.3) ტოლობებს აკმაყოფილებს φ-ს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც ერთმანეთისაგან 2π-ს ჯერადით განსხვავდებიან. ეს სიმრავლე $\mathrm{Arg}z$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

z კომპლექსური რიცხვის φ არგუმენტის იმ ერთადერთ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $-\pi<\varphi\leq\pi$, ეწოდება არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა და $\arg z$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად,

$$-\pi<\arg z\leq\pi,$$

ხოლო

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი და ტრიგონომეტრიული ფორმა. კომპლექსური რიცხვის $z=x+iy$ სახით ჩანაწერს მისი ალგებრული ფორმა ეწოდება.

თუ (7.2) ტოლობიდან x-ისა და y-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ z კომპლექსური რიცხვის ალგებრულ ფორმაში, მივიღებთ:

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{7.4}$$

$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ გამოსახულებას, სადაც $\varphi=\arg z$ ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა.

მაგალითი 2. $z=-2+2\sqrt{3}i$ კომპლექსური რიცხვი ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით.

ამოხსნა. ვინაიდან $x=-2$ და $y=2\sqrt{3}$ გვაქვს

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}=4\,.$$

ვინაიდან z რიცხვი მდებარეობს მეორე მეოთხედში და

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2};\ \ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

ამიტომ $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

(7.4) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$z=-2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

გამოვთვალოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით მოცემული $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ და $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი და განაყოფი:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\\&-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].\end{aligned} \tag{7.5}$$

თუ $z_2\neq 0$, მაშინ

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\times$$

$$\times\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \tag{7.6}$$

(7.5) და (7.6) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ (7.5) ფორმულა მართებულია თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის. კერძოდ, n ტოლ თანამამრავლისათვის იგი მიიღებს სახეს

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{7.7}$$

(7.7) ფორმულის გამოყენებით ადვილად მიიღება, რომ

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-n}=r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

ე. ი. (7.7) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი მთელი n-ისათვის.

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვი რომ ავახარისხოთ მთელ ხარისხში, საჭიროა მოდული ავახარისხოთ ამ ხარისხში, ხოლო არგუმენტი გავამრავლოთ ხარისხის მაჩვენებელზე.

(7.7) ფორმულას ეწოდება მუავრის ფორმულა.

თუ $|z|=1$ და $\varphi=\arg z$, მაშინ (7.4) ფორმულის თანახმად გვაქვს $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. კომპლექსური რიცხვი $\cos\varphi+i\sin\varphi$ აღინიშნება $e^{i\varphi}$ სიმბოლოთი, ე. ი. ნებისმიერი ნამდვილი φ რიცხვისათვის

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \tag{7.8}$$

ამ ფორმულას ეილერის ფორმულა ეწოდება. (7.6) და (7.7) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $e^{i\varphi}$ ფუნქციას აქვს ჩვეულებრივი მაჩვენებლიანი ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

1. $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$; 2. $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$; 3. $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$, $n=0,\pm1,\ldots$

(7.4) და (7.8) ფორმულების ძალით ნებისმიერი $z\neq0$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$z=re^{i\varphi} \tag{7.9}$$

სახით, სადაც $r=|z|$, $\varphi=\arg z$. კომპლექსური რიცხვის ჩანაწერს (7.9) სახით ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი ფორმა.

მაგალითი 3. რიცხვი $z=3-3\sqrt{3}i$ ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით.

ამოხსნა. გვაქვს $x=3$, $y=-3\sqrt{3}$, ამიტომ

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+27}=6.$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{1}{2};\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ვინაიდან $z=3-3\sqrt{3}i$ კომპლექსური რიცხვი მდებარეობს მეოთხე მეოთხედში, ამიტომ $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

ამრიგად, z რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმაა $z=6\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$, ხოლო მაჩვენებლიანი ფორმაა

$$z=6e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

4. ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან. n-ური ხარისხის ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან, $n \in N$, ეწოდება W კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$W^n = z. \tag{7.10}$$

n-ური ხარისხის ფესვი ნულისაგან განსხვავებული კომპლექსური რიცხვიდან ყოველთვის არსებობს და აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობები მიიღება ფორმულიდან

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

სადაც

$$k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n\text{-}1; \quad r=|z|, \ \ \varphi=\arg z.$$

მართლაც, ვთქვათ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ და $W=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, მაშინ გვაქვს:

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

აქედან მუავრის ფორმულის თანახმად

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

რადგან ორი ტოლი კომპლექსური რიცხვის მოდულები ტოლია, ხოლო არგუმენტები შეიძლება განსხვავდებოდნენ 2π-ს ჯერადით, ამიტომ $\rho^n=r$, $n\theta=\varphi+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2,\dots$
აქედან

$$\rho=\sqrt[n]{r}\,, \ \ \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}, \quad k=0, \pm1, \pm2,\dots$$

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (7.10) ტოლობას, არსებობს და ისინი შეიძლება ჩაიწერონ შემდეგი სახით:

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k=0, \pm1, \pm2,\dots \tag{7.11}$$

(7.11) ტოლობა განსაზღვრავს კომპლექსურ რიცხვთა უსასრულო რაოდენობას. ადვილია შემოწმება, რომ ამ უსასრულო რაოდენობათა შორის ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ n, ამასთან ისინი მიიღებიან (7.11) ტოლობიდან, თუ k-ს მივცემთ მიმდევრობით n მნიშვნელობას, მაგალითად, $k=0, 1, 2,\dots, n\text{-}1$.

მაშასადამე, n-ური ხარისხის ფესვი ნულისაგან განსხვავებული z კომპლექსური რიცხვიდან ყოველთვის არსებობს და აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა. ყველა ეს რიცხვი ძევს წრეწირზე, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე და რადიუსი უდრის $\sqrt[n]{|z|}$-ს. ისინი ამ წრეწირს ყოფენ n ტოლ ნაწილად.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ -1-დან კუბური ფესვის ყველა მნიშვნელობა.

ამოხსნა. რადგან $|-1|=1$ და $\arg(-1)=\pi$, ამიტომ (7.11)-ის ძალით გვაქვს

$$W_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,\,1,\,2.$$

აქედან

$$W_0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad W_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1,\quad W_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

II თავი

წრფივი ალგებრის ელემენტები

§1. მატრიცები და დეტერმინანტები

1. მატრიცის ცნება. მოქმედებანი მატრიცებზე. მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა ამოცანის შესწავლა მოითხოვს გარკვეული სახის ცხრილების, ე. წ. მატრიცების და მათზე მოქმედებათა წარმოების წესების შემოღებას. მატრიცთა თეორიას ფართო გამოყენება აქვთ წრფივი გარდაქმნებისა და წრფივი განტოლებების თეორიაში, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების ამოხსნაში, რხევათა თეორიაში, წარმოების დაგეგმვაში და სხვა.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს $m\times n$ რაოდენობის a_{ij} ($i=1,\,2,\ldots,m$; $j=1,\,2,\ldots,n$) რიცხვები. ამ რიცხვებისაგან შედგენილ მართკუთხა ცხრილს

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ეწოდება მატრიცა m სტრიქონითა და n სვეტით.

A მატრიცის შემადგენელ a_{ij} რიცხვებს ეწოდება მატრიცის ელემენტები. აქ პირველი ინდექსი i და მეორე ინდექსი j შესაბამისად იმ სტრიქონისა და სვეტის ნომრებია, რომლებსაც ეკუთვნის ეს ელემენტი. ხშირად ხმარობენ მატრიცის მოკლე ჩაწერას $A=(a_{ij})_{m,n}$. m და n რიცხვებს უწოდებენ მატრიცის რიგებს. ორ მატრიცას ეწოდება ერთნაირი ტიპის, თუ მათი რიგები შესაბამისად ტოლია. იმ შემთხვევაში, როცა $m=n$, მატრიცას ეწოდება კვადრატული, ხოლო $m=n$ რიცხვს მისი რიგი.

კვადრატული მატრიცის ელემენტები $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ქმნიან ეგრეთწოდებულ მთავარ დიაგონალს, ხოლო $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ ელემენტები არამთავარ დიაგონალს.

განსაზღვრება **1.2.** კვადრატულ მატრიცას ეწოდება დიაგონალური, თუ მისი ყველა ელემენტი, გარდა შესაძლებელია მთავარი დიაგონალის ელემენტებისა, ნულის ტოლია, ე. ი. $a_{ij}=0$, თუ $i\neq j$.

ყოველ n რიგის დიაგონალურ მატრიცას აქვს სახე

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix},$$

სადაც $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

განსაზღვრება **1.3.** დიაგონალურ მატრიცას ეწოდება ერთეულოვანი მატრიცა, თუ მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია.

ერთეულოვანი მატრიცა აღინიშნება E ასოთი, ე. ი.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება **1.4.** მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება.

ნულოვანი მატრიცა აღინიშნება O სიმბოლოთი:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება **1.5.** ერთი სტრიქონისაგან (სვეტისაგან) შედგენილ მატრიცას ეწოდება სტრიქონ-მატრიცა (სვეტ-მატრიცა).

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

არის სტრიქონ-მატრიცა, ხოლო

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

სვეტ-მატრიცა.

განსაზღვრება **1.6.** ორი ერთნაირი ტიპის მატრიცას ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია.

მატრიცებზე ძირითადი მოქმედებებია: მატრიცთა შეკრება, მატრიცის რიცხვზე გამრავლება და მატრიცის მატრიცზე გამრავლება.

***განსაზღვრება* 1.7.** ორი ერთნაირი ტიპის $A=(a_{ij})_{m,n}$ და $B=(b_{ij})_{m,n}$ მატრიცების ჯამი ეწოდება $C=(c_{ij})_{m,n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი უდრის A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=1, 2,\dots,m; j=1, 2,\dots,n)$. A და B მატრიცების ჯამი აღინიშნება $A+B$ სიმბოლოთი.

***მაგალითი* 1.** თუ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

***განსაზღვრება* 1.8.** $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება $C=(c_{ij})_{m,n}$ მატრიცას, რომლის ელემენტები მიიღება A მატრიცის ელემენტების λ რიცხვზე გამრავლებით: $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ $(i=1, 2,\dots,m; j=1, 2,\dots,n)$. A მატრიცის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება λA სიმბოლოთი.

იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda=-1$, მიღებულია აღნიშვნა $(-1)A=-A$. A და B მატრიცების სხვაობა განისაზღვრება ტოლობით $A-B=A+(-B)$.

***მაგალითი* 2.** თუ $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, მაშინ $5A=\begin{pmatrix} -10 & 15 & 0 \\ 5 & -20 & 10 \end{pmatrix}$.

***მაგალითი* 3.** ვიპოვოთ $3A-2B$, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. ვინაიდან

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}, \quad -2B=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

ამიტომ

$$3A\text{-}2B=\begin{pmatrix}6 & -12 & 0\\ -3 & 15 & 3\\ 0 & 9 & -21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 2 & 4\\ 0 & 6 & -10\\ -4 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -10 & 4\\ -3 & 21 & -7\\ -4 & 9 & -13\end{pmatrix}.$$

***განსაზღვრება* 1.9.** $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცის $B=(b_{ij})_{n,p}$ მატრიცაზე ნამრავლი ეწოდება $C=(c_{ij})_{m,p}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი გამოითვლება ფორმულით

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}. \tag{1.1}$$

A მატრიცის B მატრიცაზე ნამრავლი აღინიშნება AB სიმბოლოთი.

(1.1) ფორმულიდან ჩანს, რომ C მატრიცის c_{ij} ელემენტი წარმოადგენს A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს. მაგალითად, თუ

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{pmatrix}.$$

***მაგალითი* 4.** ვიპოვოთ A და B მატრიცების ნამრავლი, თუ

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ $C=A\cdot B$ მატრიცის თითოეული ელემენტი:

$$c_{11}=3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1=6;$$
$$c_{12}=3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0=2;$$
$$c_{21}=2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1=6;$$
$$c_{22}=2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0=1;$$
$$c_{31}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1=8;$$
$$c_{32}=1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0=-1.$$

ამრიგად,

$$C=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 6 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

ცხადია, BA არ არსებობს.

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის B მატრიცაზე გამრავლება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ეს შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A მატრიცის სვეტების რიცხვი ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რიცხვისა. AB მატრიცას იმდენი სტრიქონი აქვს, რამდენიც A-ს და იმდენი სვეტი, რამდენიც B-ს. ორივე ნამრავლი AB და BA განისაზღვრება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A-ს სვეტების რიცხვი უდრის B-ს სტრიქონების რიცხვს და A-ს სტრიქონების რიცხვი უდრის B-ს სვეტების რიცხვს.

ზემოთ მოყვანილ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. $A+B=B+A$ (ჯამის გადანაცვლებადობა),
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (ჯამის ჯუფდებადობა),
3. $A+0=0+A=A$, 4. $A-A=0$,
5. $1\cdot A=A$, 6. $(\lambda\mu)\,A=\lambda(\mu A)$,
7. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,
8. $(\lambda+\mu)\,A=\lambda A+\mu A$,
9. $A\cdot 0=0\cdot A=0$,
10. $A\cdot E=E\cdot A=A$,
11. $(A+B)\,C=AC+BC$ (დისტრიბუციულობა მარჯვნიდან),
12. $A(B+C)=AB+AC$ (დისტრიბუციულობა მარცხნიდან),
13. $A(BC)=(AB)\,C$ (ნამრავლის ჯუფდებადობა).

შევნიშნოთ, რომ მატრიცთა გამრავლება არ არის გადანაცვლებადი ოპერაცია, ე. ი. საზოგადოდ $AB\neq BA$. უფრო მეტიც, AB და BA შეიძლება სხვადასხვა ტიპის მატრიცები იყოს. მართლაც, თუ $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, მაშინ $AB=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, ხოლო $BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

იმისათვის, რომ AB უდრიდეს BA-ს, აუცილებელია A და B იყოს ერთიდაიმავე რიგის კვადრატული მატრიცები, მაგრამ ეს პირობა საკმარისი არ არის. მაგალითად, თუ $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, მაშინ $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, ხოლო $BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

მოვიყვანოთ ერთი საინტერესო ფაქტი: ცნობილია, რომ ორი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვის ნამრავლი არ უდრის ნულს. მატრიცებისათვის შესაძლებელია ორი არანულოვანი მატრიცის ნამრავლი ნულოვანი მატრიცა აღმოჩნდეს. მაგალითად, თუ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

თუ A კვადრატული მატრიცაა, მაშინ $A{\cdot}A$ აღინიშნება A^2-ით და მას A მატრიცის კვადრატი ეწოდება. A^n განისაზღვრება ტოლობით $A^n=(A^{n-1})\cdot A$.

განსაზღვრება 1.10. მატრიცას, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან ყველა სტრიქონის სვეტებით და სვეტების სტრიქონებით შეცვლით, ეწოდება A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა და A' სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი. თუ

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}\end{pmatrix},\ \text{მაშინ}\ \ A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2}\\ & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

2. დეტერმინანტები და მათი ძირითადი თვისებები. განვიხილოთ ნებისმიერი n რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

არსებობს წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ კვადრატულ მატრიცას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება.

თუ $n=1$, მაშინ (1.2) მატრიცა შედგება ერთი a_{11} რიცხვისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი ეწოდება თვით ამ რიცხვს.

თუ $n=2$, მაშინ (1.2) მატრიცას აქვს სახე

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის შესაბამისი მეორე რიგის დეტერმინანტი ეწოდება $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ რიცხვს და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით:

$$|A|, \quad \det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

ე. ი. განსაზღვრებით

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)-1\cdot(-3) = -3;$$

მესამე რიგის კვადრატული

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი აღინიშნება სიმბოლოთი

$$|A|, \ \det A, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

და განისაზღვრება ტოლობით:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

ამ ფორმულის დასამახსოვრებლად, თუ რომელი ნამრავლი აიღება "+" ნიშნით და რომელი "−" ნიშნით, სასარგებლოა გამოვიყენოთ ეგრეთწოდებული სამკუთხედების წესი, რომელიც სიმბოლურად ილუსტრირებულია შემდეგი სქემით:

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა. სამკუთხედების წესით გვაქვს

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot3+1\cdot2\cdot4+3\cdot2\cdot3-3\cdot5\cdot1-3\cdot4\cdot3-3\cdot2\cdot2=45+8+18-15-36-12=8.$$

ნებისმიერი $n>2$ რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება ინდუქციის წესით, თუ ვიგულისხმებთ, რომ n-1 რიგის მატრიცის შესაბამისი n-1 რიგის დეტერმინანტის ცნება უკვე შემოყვანილია.

წინასწარ მოვიყვანოთ მატრიცის ელემენტის მინორის და ალგებრული დამატების ცნებები: n რიგის კვადრატული მატრიცის a_{ij} $(i, j=1, 2,...,n)$ ელემენტის მინორი M_{ij} ეწოდება n-1 რიგის იმ მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება (1.2) მატრიციდან მისი i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით.

მაგალითად, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ მატრიცის ელემენტების მინორებია:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=18; \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=11; \qquad M_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=-23;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4; \qquad M_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-2; \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=-14;$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=-2; \qquad M_{32}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1; \qquad M_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-13.$$

a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ij} განისაზღვრება ტოლობით

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ A მატრიცის a_{13} და a_{21} ელემენტების ალგებრული დამატებები, თუ

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-4.$$

(1.3) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება რიცხვს

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j},$$

მოვიყვანოთ დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები.

1. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტის მათ შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი მოცემული დეტერმინანტის ტოლია, ე. ი.

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}=|A| \quad (j=1, 2,\dots,n), \tag{1.3}$$

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=|A| \quad (i=1, 2,\dots,n). \tag{1.4}$$

(1.3) და (1.4) ფორმულებს ეწოდება დეტერმინანტის გაშლა შესაბამისად j-ური სვეტის და i-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით.

დეტერმინანტის გამოთვლას ამ ფორმულებით უწოდებენ აგრეთვე დეტერმინანტის გამოთვლას მინორებად გაშლის წესით.

ამ თვისებიდან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$|E|=1.$$

მაგალითი 7. დეტერმინანტი

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

გამოვთვალოთ მინორებად გაშლის წესით.

ამოხსნა. გავშალოთ დეტერმინანტი მეორე სვეტის ელემენტების მიხედვით. გვაქვს

$$D = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2+12+68=82.$$

2. მატრიცის ტრანსპონირებით მისი დეტერმინანტი არ იცვლება, ე. ი.

$$|A'|=|A|.$$

3. დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს იცვლის, თუ მოვახდენთ მისი ნებისმიერი ორი სვეტის (სტრიქონის) ურთიერთშენაცვლებას.

4. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტი ნულია.

5. დეტერემინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

6. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტები პროპორციულია სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტებისა.

7. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტი ორი შესაკრების ჯამს წარმოადგენს, მაშინ ეს დეტერმინანტი წარმოიდგინება ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით. მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32}+a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული დეტერმინანტის ტოლ დეტერმინანტს.

9. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის ნებისმიერი სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0,$$
$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=0,$$

სადაც $i,j=1,2,\ldots,n$; $i\neq j$.

10. ორი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის ამ მატრიცათა დეტერმინანტების ნამრავლს, ე. ი.

$$|AB|=|A||B|.$$

3. შებრუნებული მატრიცა. ვთქვათ, A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო E – იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა.

განსაზღვრება 1.11. A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ეწოდება ისეთ B მატრიცას, რომლისთვისაც

$$A\cdot B=B\cdot A=E.$$

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება სიმბოლოთი A^{-1}, ე. ი.

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E. \tag{1.5}$$

(1.5) ტოლობა სიმეტრიულია A და A^{-1} მატრიცების მიმართ, ამიტომ თუ A^{-1} არის A-ს შებრუნებული, მაშინ A არის A^{-1}-ის შებრუნებული:

$$A=(A^{-1})^{-1}.$$

სიმეტრიულობიდან ცხადია აგრეთვე, რომ A^{-1} არის იმავე n რიგის კვადრატული მატრიცა.

ადვილია ჩვენება, რომ, თუ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა, მაშინ ის ერთადერთია.

***განსაზღვრება* 1.12.** კვადრატულ მატრიცას ეწოდება განსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია; წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული.

***განსაზღვრება* 1.13.** A კვადრატული მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა ეწოდება მატრიცას

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix},$$

სადაც A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} $(i, j=1, 2,...,n)$ ელემენტის ალგებრული დამატება.

მაშასადამე, A^* მატრიცის მისაღებად A მატრიცის ყოველი a_{ij} ელემენტი უნდა შეიცვალოს A_{ij} ალგებრული დამატებით და შემდეგ მოხდეს მისი ტრანსპონირება.

ადვილია ჩვენება, რომ

$$E^*=E.$$

შებრუნებული მატრიცის არსებობის შესახებ მართებულია შემდეგი თეორემა:

***თეორემა* 1.1.** იმისათვის, რომ A მატრიცას გააჩნდეს შებრუნებული მატრიცა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ A იყოს არაგანსაკუთრებული მატრიცა. შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* \tag{1.6}$$

***მაგალითი* 8.** ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

ამოხსნა. ვიპოვოთ A მატრიცის დეტერმინანტი

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6+4=10.$$

გამოვთვალოთ მატრიცის თითოეული ელემენტის ალგებრული დამატება.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 4=-4$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-1)=1$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$

ამრიგად, მიკავშირებული მატრიცაა

$$A^{*}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}.$$

(1.6) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1\\ -0,4 & 0,2\end{pmatrix}.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=-18+100-84-105+90+16=-1.$$

ცხადია

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-9+8=-1; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-(-18-20)=38;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-12-15=-27; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-(-15+14)=1;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-6-35=-41; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-(-4-25)=29;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=20-21=-1; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-(8-42)=34;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=6-30=-24.$$

ამრიგად, მიკავშირებული მატრიცა ტოლია

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}.$$

(1.6) ფორმულის მიხედვით გვაქვს

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$$

§2. წრფივ განტოლებათა სისტემები

1. ძირითადი ცნებები. კრამერის წესი. ვთქვათ მოცემულია n-უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

სადაც $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობებია, ხოლო $a_{11},a_{12},\ldots,a_{mn}$ კოეფიციენტები და $b_1,b_2,\ldots,b_m$ თავისუფალი წევრები კი ცნობილი რიცხვებია. საზოგადოდ, უცნობთა რიცხვი n არ უდრის განტოლებათა m რიცხვს. თუ $n=m$, მაშინ (2.1) სისტემას კვადრატული ეწოდება.

***განსაზღვრება* 2.1.** განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ხოლო არაერთგვაროვანი, თუ ერთი მაინც თავისუფალი წევრი განსხვავდება ნულისაგან.

***განსაზღვრება* 2.2.** $c_1,c_2,\ldots,c_n$ რიცხვთა ერთობლიობას ეწოდება (2.1) სისტემის ამონახსნი, თუ სისტემაში $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების ნაცვლად შესაბამისად $c_1,c_2,\ldots,c_n$ რიცხვების ჩასმით, სისტემის ყოველი განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად*.

***განსაზღვრება* 2.3.** სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, ხოლო არათავსებადი, თუ მას არა აქვს არცერთი ამონახსნი.

***განსაზღვრება* 2.4.** მატრიცას

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

რომელიც შედგენილია (2.1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან, ამ სისტემის მატრიცა ეწოდება.

განვიხილოთ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობებისაგან და $b_1,b_2,\ldots,b_m$ თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცები

---

* სისტემის ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს როგორც სტრიქონ-მატრიცის ასევე სვეტ-მატრიცის სახით.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

მატრიცთა გამრავლების წესის გამოყენებით განტოლებათა (2.1) სისტემა შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ:

$$A \cdot X = B.$$

ეს არის (2.1) სისტემის ჩაწერა მატრიცული ფორმით.

ვთქვათ მოცემულია კვადრატული სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.2)$$

ამ სისტემის მატრიცის დეტერმინანტს

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

სისტემის დეტერმინანტი ეწოდება.

სისტემის Δ დეტერმინანტის j-ური ($j=1,2,\ldots,n$) სვეტის ელემენტები შევცვალოთ შესაბამისი თავისუფალი წევრებით. ასეთნაირად მიღებული დეტერმინანტი აღვნიშნოთ Δ_j სიმბოლოთი (მას დამხმარე დეტერმინანტს უწოდებენ), ე. ი.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & a_{2n} \\ \cdots & & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თეორემა 2.1 (კრამერის წესი). თუ (2.2) სისტემის დეტერმინანტი Δ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემა თავსებადია, აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი გამოითვლება ფორმულით

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (2.3)$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ სვეტ-მატრიცა $C_0=A^{-1}B$ არის $AX=B$ მატრიცული განტოლების, ანუ (2.2) სისტემის ამონახსნი. მართლაც

$$AC_0=A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B.$$

დავამტკიცოთ, რომ ამონახსნი ერთადერთია. ვთქვათ სვეტ-მატრიცა C არის $AX=B$ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი, ე. ი.

$$AC=B.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხნიდან გავამრავლოთ A^{-1}-ზე, მივიღებთ

$$A^{-1}(AC)=A^{-1}B,$$
$$(A^{-1}A)C=C_0,$$
$$EC=C_0,$$
$$C=C_0.$$

ამრიგად, (2.2) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{\Delta}A^{*}B\,, \tag{2.4}$$

სადაც A^* არის A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა.

შევნიშნოთ, რომ (2.4) ამონახსნი მიიღება $AX=B$ მატრიცული განტოლების ორივე ნაწილის A^{-1}-ზე მარცხნიდან გამრავლებით.

ახლა (2.4) ტოლობიდან მივიღოთ (2.3) ფორმულები. მატრიცთა გამრავლების წესის გამოყენებით, გვაქვს

$$X=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots+A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\cdots+A_{nn}b_n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

დეტერმინანტთა პირველი თვისების ძალით

$$A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots+A_{n1}b_n=\Delta_1$$
$$A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots+A_{n2}b_n=\Delta_2$$

$$A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\cdots+A_{nn}b_n=\Delta_n,$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (2.5)-დან მივიღებთ

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j=1,2,\dots,n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(2.3) ფორმულები კრამერის ფორმულების სახელწოდებითაა ცნობილი. (2.4) არის კრამერის ფორმულების ჩაწერა მატრიცული სახით.

***მაგალითი* 1.** შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

რადგანაც

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

ამიტომ A^{-1} არსებობს. მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(2.4) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

საიდანაც, $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$.

***მაგალითი* 2.** კრამერის ფორმულების გამოყენებით ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -9 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

ამოხსნა. რადგან სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

ამიტომ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 1 & -9 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

კრამერის ფორმულების ძალით გვაქვს

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

შენიშვნა. კრამერის წესი საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა იმ კერძო შემთხვევაში, როცა განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. მტკიცდება, რომ თუ $\Delta=0$ და Δ_i დამხმარე დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (2.2) სისტემა არათავსებადია, ხოლო თუ სისტემის ყველა დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემა ან არათავსებადია, ან აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

III თავი

ვექტორთა ალგებრის ელემენტები

§1. ვექტორები

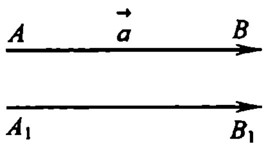
ფიზიკის, მექანიკისა და სხვადასხვა ტექნიკური მეცნიერებების შესწავლისას გვხვდება სხვადასხვა სახის სიდიდეები. ზოგი მათგანი სავსებით განისაზღვრება მისი რიცხვითი მნიშვნელობით. ასეთ სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდება. სკალარული სიდიდეების მაგალითებია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, ტემპერატურა, კუთხის ზომა, ადამიანის ასაკი და სხვა. არსე-

ბობს სხვა სახის სიდიდეებიც, რომელთა განსაზღვრისათვის, გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა, საჭიროა აგრეთვე მათი მიმართულების ცოდნა. ასეთ სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ან ვექტორები ეწოდება. ვექტორული სიდიდეებია, მაგალითად ძალა, სიჩქარე, აჩქარება, მაგნიტური ველის დაძაბულობა და სხვ. სხვადასხვა სახის ვექტორული სიდიდეების ზოგადად შესწავლისათვის (მათი კონკრეტული თვისებების გაუთვალისწინებლად) საჭიროა შემოვიღოთ ე. წ. ვექტორის ცნება.

***განსაზღვრება* 1.1.** ვექტორი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს, ე. ი. მონაკვეთს, რომლისთვისაც დასახელებულია სათავე და ბოლო წერტილი.

ვექტორი, რომლის სათავეა A, ხოლო ბოლო წერტილია B, აღინიშნება სიმბოლოთი $\vec{AB}$. ზოგჯერ ვექტორი აღინიშნება აგრეთვე ერთი ასოთი, მაგალითად, $\vec{a}$ ნახაზზე ვექტორი გამოისახება ისრით (ნახ. 3.1).

ვექტორის სათავეს მისი მოდების წერტილი ეწოდება.



ნახ. 3.1.

ვექტორს, რომლის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, ნულოვანი ვექტორი ანუ ნულ-ვექტორი ეწოდება. ის აღინიშნება $\vec{O}$ სიმბოლოთი. ნულ-ვექტორს გარკვეული მიმართულება არ გააჩნია.

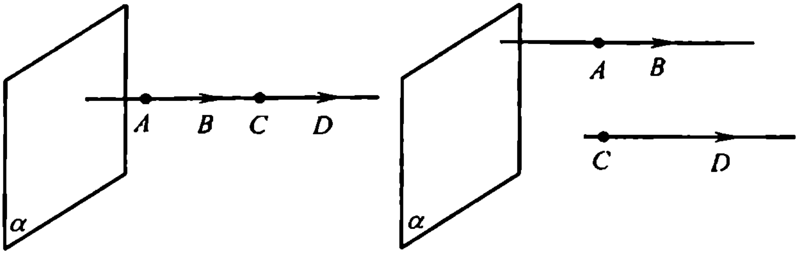
***განსაზღვრება* 1.2.** ვექტორის სიგრძე (მოდული) ეწოდება მანძილს მის სათავესა და ბოლო წერტილს შორის.

$\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე აღინიშნება $|\vec{AB}|$ სიმბოლოთი. ცხადია, ნულ-ვექტორის სიგრძე უდრის ნულს.

***განსაზღვრება* 1.3.** ვექტორს, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია, ერთეულოვანი ვექტორი ან ორტი ეწოდება.

***განსაზღვრება* 1.4.** ერთი და იგივე წრფის პარალელურ ვექტორებს კოლინეარული ვექტორები ეწოდება, ხოლო ერთი და იგივე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს — კომპლანარული.

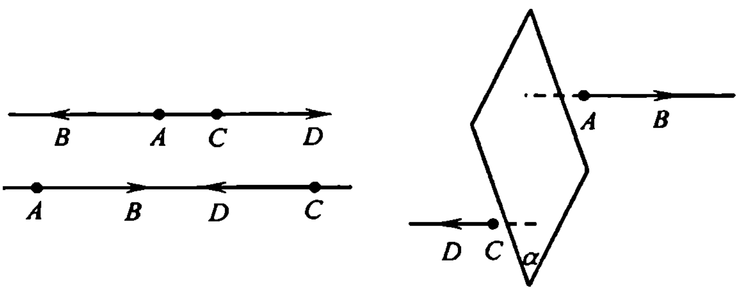
მიღებულია, რომ ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულია, ხოლო თუ სამი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ ისინი კომპლანარულია.



ნახ. 3.2

$\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ კოლინეარულ ვექტორებს თანამიმართული (ერთნაირად მიმართული) ეწოდება, თუ არსებობს AB წრფის არაპარალელური α სიბრტყე ისეთი, რომ AB და CD სხივები მდებარეობს α სიბრტყის ცალ მხარეს (ნახ. 3.2).

$\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ კოლინეარულ ვექტორებს საწინააღმდეგოდ მიმართული ეწოდება, თუ ისინი არ არიან თანამიმართული ვექტორები (ნახ. 3.3).



ნახ. 3.3

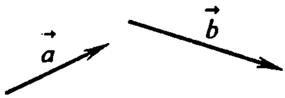
***განსაზღვრება* 1.5.** ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ ისინი თანამიმართულია და მათი სიგრძეები ტოლია.

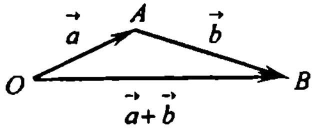
პარალელური გადატანის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ სივრცის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება მოვდოთ მოცემული ვექტორის ტოლი ვექტორი, თანაც ერთადერთი.

თუ $\vec{AB}$ და $\vec{A_1B_1}$ (ნახ. 3.1) ვექტორები ტოლია, წერენ

$\vec{AB}=\vec{A_1B_1}$

§2. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე





ნახ. 3.4

ვექტორებზე წრფივი ოპერაციები ეწოდება ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას.

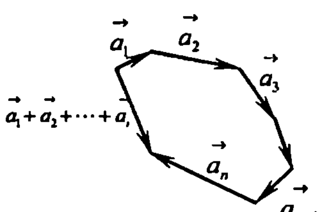
ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ნებისმიერი ორი ვექტორია. ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი O წერტილი და ავაგოთ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ვექტორი, შემდეგ კი $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ვექტორი. $\overrightarrow{OB}$ ვექტორს (ნახ. 3.4) ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი და აღინიშნება შემდეგნაირად: $\vec{a}+\vec{b}$, ე. ი.

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}.$$

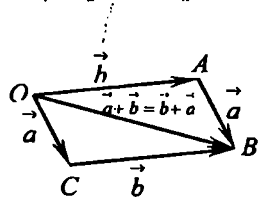
ვექტორთა შეკრების ამ წესს სამკუთხედის წესი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი არ არის დამოკიდებული იმ წერტილის შერჩევაზე, რომელსაც მოვდებთ პირველ შესაკრებ ვექტორს.

ვექტორთა შეკრების ეს წესი შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორები. $\vec{a}_1$ ვექტორის ბოლო წერტილზე მოვდოთ $\vec{a}_2$ ვექტორი, $\vec{a}_2$-ის ბოლო წერტილზე – $\vec{a}_3$ ვექტორი და ა. შ. $\vec{a}_{n-1}$ ვექტორის ბოლო წერტილზე – $\vec{a}_n$ ვექტორი. ვექტორს, რომლის სათავეა $\vec{a}_1$-ის სათავე, ხოლო ბოლო წერტილია $\vec{a}_n$-ის ბოლო წერტილი, ეწოდება $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორების ჯამი და ასე აღინიშნება: $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\dots+\vec{a}_n$ (ნახ. 3.5).



ნახ. 3.5



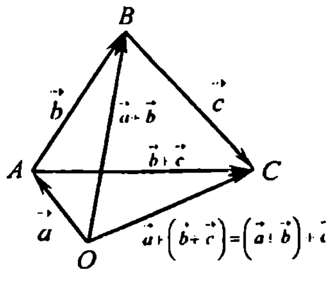
ნახ. 3.6

ვექტორთა შეკრების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (გადანაცვლებადობა).

2. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (ჯუფდებადობა).

ამ თვისებების მართებულობა ჩანს შესაბამისად 3.6 და 3.7 ნახაზებიდან.



ნახ. 3.7

ცხადია, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{b}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას: 1) $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$, 2) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, თუ $\lambda>0$ და საწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda<0$.

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება $\lambda\vec{a}$ სიმბოლოთი.

თუ $\lambda=0$ ან $\vec{a}=\vec{0}$, მაშინ მიღებულია, რომ $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

$\vec{a}$ ვექტორის (-1)-ზე ნამრავლს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი და აღინიშნება $-\vec{a}$ სიმბოლოთი. ცხადია

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e},$$

სადაც $\vec{e}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორი. მას $\vec{a}$ ვექტორის მიმმართველი ვექტორი, ანუ მგეზავი ეწოდება.

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია. პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$,

სადაც $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, თუ ამ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ,

და $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, თუ მათ საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ.

ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

***თეორემა* 2.1.** იმისათვის, რომ ორი ვექტორი იყოს კოლინეარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენდეს მეორის ნამრავლს გარკვეულ რიცხვზე.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

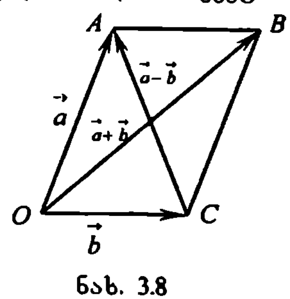
1. $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=(\lambda\mu)\vec{a}$; 2. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

3. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ ვექტორს და ასე აღინიშნება: $\vec{a}-\vec{b}$. ცხადია, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა არის ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომ $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

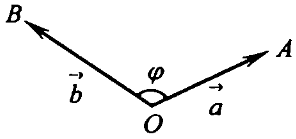
ბოლოს მოვიყვანოთ არაკოლინეარულ ვექტორთა შეკრების კიდევ ერთი წესი, ე. წ. პარალელოგრამის წესი, რომელიც გვაძლევს აგრეთვე ვექტორთა სხვაობის აგების წესს.

ვთქვათ, მოცემულია არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. ეს ვექტორები მოვდოთ ნებისმიერ O წერტილზე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი (ნახ. 3.8). ნახაზიდან ჩანს, რომ $\vec{OB}$ დიაგონალი წარმოადგენს ამ ვექტორების ჯამს $\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$, ხოლო $\vec{CA}$ დიაგონალი — მათ სხვაობას $\vec{CA}=\vec{a}-\vec{b}$.



ნახ. 3.8

§3. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. დეკარტის მართკუთხა ბაზისი

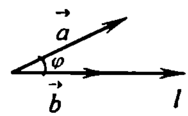


ნახ. 3.9

ვთქვათ, მოცემულია ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე მოვდოთ $\vec{OA}=\vec{a}$ და $\vec{OB}=\vec{b}$ ვექტორები (ნახ. 3.9).

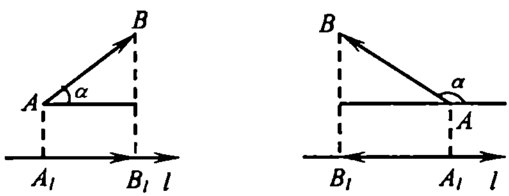
***განსაზღვრება* 3.1.** $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე ეწოდება იმ უმცირეს φ კუთხეს, რომლითაც უნდა მობრუნდეს ერთ-ერთი ვექტორი, რომ მისი მიმართულება დაემთხვეს მეორე ვექტორის მიმართულებას.

***განსაზღვრება* 3.2.** კუთხე $\vec{a}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის ეწოდება კუთხეს $\vec{a}$ ვექტორსა და l ღერძის მიმართულების მქონე ნებისმიერ $\vec{b}$ ვექტორს შორის (ნახ. 3.10).



ნახ. 3.10

ვთქვათ, მოცემულია l ღერძი და $\vec{AB}$ ვექტორი (ნახ. 3.11). A და B წერტილების ორთოგონალური გეგმილები l ღერძზე შესაბამისად იყოს A_1 და B_1.



ნახ. 3.11

***განსაზღვრება* 3.3.** $\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე ეწოდება $|A_1B_1|$-ს, თუ $\vec{A_1B_1}$ ვექტორსა და l ღერძს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ და $-|A_1B_1|$-ს წინააღმდეგ შემთხვევაში.

$\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე $გეგ_l\,\vec{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ თუ $\vec{AB}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის კუთხეა α, მაშინ

$$გეგ_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \cos\alpha . \qquad (3.1)$$

ცხადია, რომ ტოლ ვექტორებს ერთსა და იმავე ღერძზე ტოლი გეგმილები აქვთ.

ვექტორის გეგმილს ღერძზე გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამის ტოლია.

2. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილი უდრის ვექტორის გეგმილის ამავე რიცხვზე ნამრავლს.

ამოცანა 1. ვიპოვოთ $გეგ_{\vec{b}}\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)$, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

ამოხსნა გვაქვს

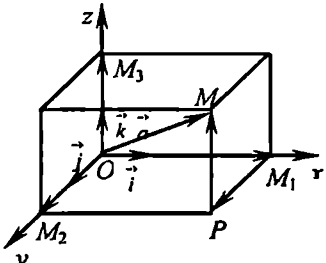
$$გეგ_{\vec{b}}\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)= გეგ_{\vec{b}}\vec{a} - 4\ გეგ_{\vec{b}}\vec{b} = |\vec{a}|\cos\frac{2\pi}{3} - 4|\vec{b}| = -2-4=-6.$$

განვიხილოთ ახლა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში $Oxyz$. ვთქვათ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძების მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორებია (ნახ. 3.12). ცხადია, ეს ვექტორები არაკომპლანარულილია.

თეორემა **3.1.** ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი ერთადერთი სახით წარმოიდგინება $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორებით:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} . \qquad (3.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$ ნებისმიერი ვექტორია. მოვდოთ იგი კოორდინატთა სათავეზე ($\vec{OM} = \vec{a}$, ნახ. 3.12). M წერტილზე გავავლოთ საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები. მივიღებთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ერთ-ერთი დიაგონალია $\vec{OM}$ ვექტორი. ნახაზიდან ჩანს, რომ



ნახ. 3.12

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1P} + \vec{PM}$$

რადგან $\vec{M_1P} = \vec{OM_2}$ და $\vec{PM} = \vec{OM_3}$, ამიტომ

$$\vec{a}=\vec{OM}_1+\vec{OM}_2+\vec{OM}_3 \tag{3.3}$$

ამასთან

$$\vec{OM}_1=x\cdot\vec{i}\ ,\quad \vec{OM}_2=y\cdot\vec{j}\ ,\quad \vec{OM}_3=z\cdot\vec{k}\ .$$

ამ ტოლობების ჩასმით (3.3)-ში მივიღებთ (3.2)-ს.

ვაჩვენოთ, რომ (3.2) წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ (3.2) ტოლობასთან ერთად ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\ . \tag{3.4}$$

(3.2) და (3.4)-დან მივიღებთ

$$(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}=\vec{0}\ . \tag{3.5}$$

ვინაიდან $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ არაკომპლანარული ვექტორებია (3.5) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$x-x_1=0,\ \ y-y_1=0,\ \ z-z_1=0,$$

ე. ი.

$$x=x_1,\ \ y=y_1,\ \ z=z_1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $\vec{a}$ ვექტორი წარმოდგენილია (3.2) სახით, მაშინ ვიტყვით, რომ ეს ვექტორი დაშლილია $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორების მიხედვით.

რადგან ყოველი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს (3.2) ტოლობას, ამიტომ ვექტორთა $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ დალაგებულ სამეულს დეკარტის მართკუთხა (ორთონორმირებული) ბაზისი ეწოდება, ხოლო x, y, z რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები და ჩავწერთ $\vec{a}=\{x,y,z\}$ ან $\vec{a}=(x,y,z)$.

ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის გეგმილებს შესაბამის ღერძებზე. მართლაც, $\text{გეგ}_{\vec{i}}\vec{a}=\text{გეგ}_{\vec{i}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=x\,\text{გეგ}_{\vec{i}}\vec{i}=x$, ანალოგიურად $y=\text{გეგ}_{\vec{j}}\vec{a}$, $z=\text{გეგ}_{\vec{k}}\vec{a}$

როგორც თეორემის დამტკიცებიდან ჩანს $\vec{OM}$ ვექტორის კოორდინატები უდრის მისი ბოლო M წერტილის კოორდინატებს.

ცხადია, რომ, თუ $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ და $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, მაშინ:

1. $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$,

2. $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}+(\lambda z_1)\vec{k}$,

3. $\vec{a}=\vec{b}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$.

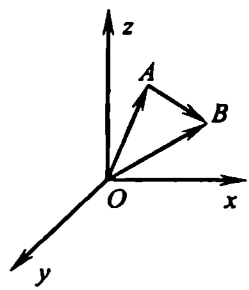
4. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოლინეარობის პირობაა

$$x_1=\lambda x_2, \quad y_1=\lambda y_2, \quad z_1=\lambda z_2.$$

ეს პირობა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობას ასეთი სახით ფორმალურად ჩავწერთ იმ შემთხვევაშიც, როცა ამ ვექტორების შესაბამის კოორდინატთა რომელიმე წყვილი ნულოვანია.



ნახ. 3.13

თეორემა 3.2. ვექტორის კოორდინატები უდრის მისი ბოლო წერტილისა და სათავის სათანადო კოორდინატების სხვაობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $A(x_1,y_1,z_1)$ და $B(x_2,y_2,z_2)$ წერტილები, მაშინ

$$\vec{OA}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}, \qquad \vec{OB}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

ნახ. 3.13-დან გვაქვს

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}. \tag{3.6}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 2. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(2;-1;3)$, $\vec{b}(-1;3;0)$. ვიპოვოთ შემდეგი ვექტორის კოორდინატები: ა) $\vec{a}+\vec{b}$; ბ) $\vec{a}-\vec{b}$; გ) $3\vec{a}+4\vec{b}$; დ) $2\vec{a}-3\vec{b}$.

ამოხსნა. მოყვანილი წესების თანახმად, გვაქვს:

ა) $\vec{a}+\vec{b}=\{2-1;-1+3;3+0\}=\{1;2;3\}$;

ბ) $\vec{a}-\vec{b}=\{2+1;-1-3;3-0\}=\{3;-4;3\}$;

გ) $3\vec{a}+4\vec{b}=\{6;-3;9\}+\{-4;12;0\}=\{2;9;9\}$;

დ) $2\vec{a}-3\vec{b}=\{4;-2;6\}-\{-3;9;0\}=\{7;-11;6\}$.

ამოცანა 3. მოცემულია წერტილები $A(2;-1;3)$, $B(-1;0;2)$, $C(3;2;-1)$. ვიპოვოთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები: 1) $\vec{AB}$; 2) $\vec{CA}$; 3) $\vec{AC}-\vec{AB}$; 4) $2\vec{AB}+3\vec{BC}$

ამოხსნა. მოყვანილი წესების თანახმად, გვაქვს:

1) $\vec{AB}=\{-1-2;0+1;2-3\}=\{-3;1;-1\}$;

2) $\vec{CA}=\{2-3;-1-2;3+1\}=\{-1;-3;4\}$;

3) $\vec{AC}=\{3-2;2+1;-1-3\}=\{1;3;-4\}$, $\vec{AB}=\{-3;1;-1\}$, ამიტომ $\vec{AC}-\vec{AB}=$
$=\{1+3;3-1;-4+1\}=\{4;2;-3\}$;

4) $\vec{AB}=\{-3;1;-1\}$, $\vec{BC}=\{4;2;-3\}$, ამიტომ $2\vec{AB}+3\vec{BC}=\{-6+12;2+6;-2-9\}=$
$=\{6;8;-11\}$.

§4. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

განსაზღვრება 4.1. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ან $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრებით

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha, \tag{4.1}$$

სადაც α არის $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ე. ი. $\alpha=\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ თუ მხედველობაში მივიღებთ ვექტორის ღერძზე გეგმილის (3.1) გამოსახულებას, (4.1) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\,\text{გეგ}_{\vec{a}}\,\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{გეგ}_{\vec{b}}\,\vec{a}, \tag{4.2}$$

სადაც $\text{გეგ}_{\vec{a}}\,\vec{b}$ არის $\vec{b}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{a}$ ვექტორით განსაზღვრულ ღერძზე. ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ერთ-ერთი ვექტორის სიგრძისა და ამ ვექტორზე მეორე ვექტორის გეგმილის ნამრავლს.

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. სკალარული ნამრავლი გადანაცვლებადია: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

2. სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები ურთიერთმართობულია ან ერთი მათგანი მაინც ნულ-ვექტორია. ე. ი. ორი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა.

3. ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2$, ე. ი.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}.$$

4. საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მგეზავებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$\left(\vec{i},\vec{i}\right)=\left(\vec{j},\vec{j}\right)=\left(\vec{k},\vec{k}\right)=1,$$

$$\left(\vec{i},\vec{j}\right)=\left(\vec{j},\vec{k}\right)=\left(\vec{i},\vec{k}\right)=0.$$

5. სკალარული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე. ი.

$$\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right).$$

6. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისა და λ რიცხვისათვის

$$\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა **4.1.** ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ და $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, მაშინ

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{4.3}$$

დამტკიცება. რადგან $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ და $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, ამიტომ 4, 5 და 6 თვისებების ძალით

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=x_1x_2\left(\vec{i},\vec{i}\right)+$$

$$+x_1y_2\left(\vec{i},\vec{j}\right)+x_1z_2\left(\vec{i},\vec{k}\right)+y_1x_2\left(\vec{j},\vec{i}\right)+y_1y_2\left(\vec{j},\vec{j}\right)+y_1z_2\left(\vec{j},\vec{k}\right)+$$

$$+z_1x_2\left(\vec{k},\vec{i}\right)+z_1y_2\left(\vec{k},\vec{j}\right)+z_1z_2\left(\vec{k},\vec{k}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\,.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობა კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\,.$$

შედეგი 2. $\vec{a}=\{x,y,z\}$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.4}$$

შედეგი 3. მანძილი $A(x_1,y_1,z_1)$ და $B(x_2,y_2,z_2)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ამ შედეგის მართებულობა გამომდინარეობს (3.6) ფორმულიდან და შედეგი 2-დან.

შედეგი 4. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,.$$

ვთქვათ, α, β და γ კუთხეებია, რომელსაც $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორი ადგენს შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებთან. რადგან ვექტორის კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის გეგმილებს შესაბამის ღერძზე, ამიტომ (3.1)-ის ძალით გვაქვს

$$x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha\,,\quad y=\left|\vec{a}\right|\cos\beta\,,\quad z=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma \tag{4.5}$$

(4.4) და (4.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსები ეწოდება. (4.5)-დან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ერთეულოვანი ვექტორის კოორდინატებია მისი მიმართულების კოსინუსები, აქედან გამომდინარე, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

ამოცანა 1. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია 4-ის ტოლი გვერდით. ვიპოვოთ: 1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$; 2) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$.

ამოხსნა. 1) ვინაიდან $\left(\vec{AB}\,\hat{}\,\vec{AC}\right)=60°$, ამიტომ

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos60°=4\cdot4\cdot\frac{1}{2}=8;$$

2) ვინაიდან $\left(\vec{AB}\,\hat{}\,\vec{BC}\right)=120°$, ამიტომ

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|\cdot\cos120°=-8.$$

ამოცანა 2. მოცემულია $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{4}$. ვიპოვოთ $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^{\,2}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}=|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}+4|\vec{b}|^2=$$

$$=25-30\sqrt{2}+36=61-30\sqrt{2}$$

ამოცანა 3. ვიპოვოთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, თუ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.

ამოხსნა. (4.3) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+3\cdot(-3)+6\cdot1=-2-9+6=-5.$$

ამოცანა 4. ვიპოვოთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ $\vec{a}=2\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}=\vec{c}-2\vec{d}$, $\vec{c}=\{2;1;-1\}$, $\vec{d}=\{0;1;2\}$.

ამოხსნა. გვაქვს $\vec{a}=\{4;2;-2\}+\{0;1;2\}=\{4;3;0\}$, $\vec{b}=\{2;1;-1\}-\{0;2;4\}=\{2;-1;-5\}$, ამიტომ

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{4\cdot2-3\cdot1-5\cdot0}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{4+1+25}}=\frac{5}{5\cdot\sqrt{30}}=\frac{1}{\sqrt{30}}.$$

ამოცანა 5. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(2;-1;3)$, $\vec{b}(-2;2;1)$, $\vec{c}(3;0;-1)$. ვიპოვოთ გეგ$_{\vec{b}}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$.

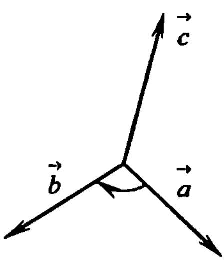
ამოხსნა ცხადია $\vec{a}+\vec{c}=\{5;-1;2\}$, ამიტომ

$$\text{გეგ}_{\vec{b}}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{-2\cdot5-2\cdot1+2\cdot1}{\sqrt{4+4+1}}=-\frac{10}{3}.$$

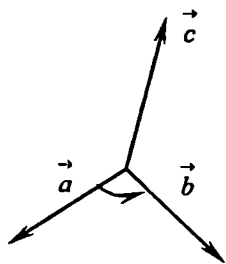
§5. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი

გავეცნოთ კიდევ ერთ ოპერაციას ვექტორებზე, ე. წ. ვექტორულ გამრავლებას. წინასწარ მოვიყვანოთ ვექტორთა დალაგებული სამეულის ორიენტაციის ცნება.

***განსაზღვრება* 5.1.** არაკომპლანარულ ვექტორთა დალაგებულ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ სამეულს ეწოდება მარცხენა ორიენტაციის ან მარცხენა სამეული, თუ მათი ერთ წერტილზე მოდების შემდეგ უმცირესი კუთხით მობრუნება $\vec{a}$ ვექტორისა $\vec{b}$ ვექტორისაკენ $\vec{c}$ ვექტორის ბოლოდან ჩანს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ. 3.14). თუ ეს მობრუნება ჩანს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ სამეულს მარჯვენა ეწოდება (ნახ. 3.15).



ნახ. 3.14



ნახ. 3.15

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ ვექტორთა ორიენტირებულ სამეულში რომელიმე ორ ვექტორს ურთიერთგადავანაცვლებთ, მაშინ სამეულის ორიენტაცია შეიცვლება. სახელდობრ, თუ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ მარცხენა სამეულია, მაშინ $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$; $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$; $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ სამეულები მარჯვენა ორიენტაციისაა. სამეულის ორიენტაცია შეიცვლება მაშინაც, როცა სამეულში რომელიმე ვექტორს შევცვლით მისი მოპირდაპირე ვექტორით. მაგალითად, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა სამეულია, მაშინ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$ სამეული მარჯვენაა.

თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის საკოორდინატო ღერძების მგეზავები $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ქმნიან მარცხენა (მარჯვენა) სამეულს, მაშინ ამ სისტემას მარცხენა (მარჯვენა) სისტემა ეწოდება. შემდეგში ჩვენ ვისარგებლებთ მხოლოდ მარცხენა სისტემით.

***განსაზღვრება* 5.2.** $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე, სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სამი პირობით:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b}\right)$;

2. $\vec{c}$ ვექტორი მართობულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით განსაზღვრული სიბრტყის;

3. $\vec{c}$ ვექტორის მიმართულება ისეთია, რომ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა სამეულია.

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ მიღებულია, რომ $\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი ნულვექტორია.

$\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\times\vec{b}$ ან $[\vec{a},\vec{b}]$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე რიცხობრივად უდრის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.

ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ვექტორული ნამრავლი ანტიკომუტაციურია: $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$.

2. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისა და λ რიცხვისათვის

$$[\lambda\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}].$$

3. ვექტორული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ:

$$[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}] \text{ და } [\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}].$$

4. საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მგეზავებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$[\vec{i},\vec{j}]=-[\vec{j},\vec{i}]=\vec{k},[\vec{j},\vec{k}]=-[\vec{k},\vec{j}]=\vec{i},$$
$$[\vec{k},\vec{i}]=-[\vec{i},\vec{k}]=\vec{j},[\vec{i},\vec{i}]=[\vec{j},\vec{j}]=[\vec{k},\vec{k}]=\vec{0}$$

ამოცანა 1. ვიპოვოთ $\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$, $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=3\vec{b}\times\vec{a},$$

ამიტომ

$$\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|=3\left|\vec{b}\times\vec{a}\right|=3|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=3\cdot2\cdot6\cdot\frac{1}{2}=18.$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ

$$\vec{j}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})-2\vec{k}\cdot(\vec{j}\times\vec{i})+3\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k}).$$

ამოხსნა. გვაქვს

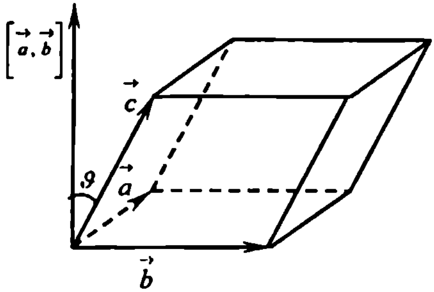
$$\vec{j}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})-2\vec{k}\cdot(\vec{j}\times\vec{i})+3\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{j}\cdot\vec{i}+2\vec{k}\cdot\vec{k}+3\vec{i}\cdot\vec{i}=2+3=5.$$

§6. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

განსაზღვრება 6.1. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, გამრავლებულს სკალარულად $\vec{c}$ ვექტორზე და აღინიშნება სიმბოლოთი $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, ე. ი.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}),$$

თეორემა 6.1. არაკომპლანარული $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლის მოდული უდრის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას. შერეული ნამრავლი დადებითია, თუ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ მარცხენა სამეულია, ხოლო უარყოფითია, თუ ეს სამეული მარჯვენაა.



ნახ. 3.16

დამტკიცება. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის V მოცულობა უდრის ფუძის $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ ფართობისა და $|\vec{c}||\cos\vartheta|$ სიმაღლის ნამრავლს (ნახ. 3.16), სადაც ϑ არის კუთხე $\vec{c}$ და $[\vec{a}, \vec{b}]$ ვექტორებს შორის, ე. ი.

$$V=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\vartheta\right|=\left|\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)\right|=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

ამრიგად, თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. რადგან

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\vartheta,$$

გამომდინარე აქედან შერეული ნამრავლის ნიშანი ემთხვევა $\cos\vartheta$-ს ნიშანს. თუ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ მარცხენა (მარჯვენა) სამეულია, მაშინ ϑ მახვილია (ბლაგვია), ამიტომ შერეული ნამრაელი დადებითია (უარყოფითია).

თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, თუ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ კომპლანარული ვექტორებია, მაშინ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=0$.

შერეულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})=(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})=-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})=$
$=-(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})=-(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;

2. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})=(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$;

3. $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})=\lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c})+\mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$.

§7. ვექტორული და შერეული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებით. სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა

თეორემა 7.1. თუ $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ და $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, მაშინ

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (7.1)$$

დამტკიცება. ვექტორული ნამრავლის თვისებების ძალით გვაქვს

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2(\vec{i}\times\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\times\vec{j})+$$

$$+x_1z_2(\vec{i},\vec{k})+y_1x_2(\vec{j}\times\vec{i})+y_1y_2(\vec{j}\times\vec{j})+y_1z_2(\vec{j}\times\vec{k})+z_1x_2(\vec{k}\times\vec{i})+$$

$$+z_1y_2(\vec{k}\times\vec{j})+z_1z_2(\vec{k}\times\vec{k})=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}, \qquad (7.2)$$

საიდანაც გამომდინარეობს (7.1).

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 1. ვიპოვოთ $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ და $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი.

ამოხსნა. (7.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=-13\vec{i}+5\vec{j}-11\vec{k}$$

თეორემა 7.2. თუ $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ და $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, მაშინ ამ ვექტორების შერეული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

დამტკიცება. (4.3) და (7.2) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7.3. იმისათვის, რომ $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ და $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$ ვექტორები იყოს კომპლანარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი შერეული ნამრავლი უდრიდეს ნულს:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{7.3}$$

დამტკიცება. აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს შერეული ნამრავლის განსაზღვრებიდან. ვაჩვენოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (7.3) პირობას. თუ დავუშვებთ, რომ ეს ვექტორები არაკომპლანარულია, მაშინ მათი შერეული ნამრავლის მოდული თეორემა 6.1-ის ძალით იქნება ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორები $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ და $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ კომპლანარულია.

ამოხსნა. შევამოწმოთ (7.3) პირობა

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix}=0.$$

ამრიგად, მოცემული ვექტორები კომპლანარულია.

§8. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება

1. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. ვთქვათ, მოცემულია $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ წერტილები და ნებისმიერი $\lambda\neq-1$ რიცხვი. $[M_1M_2]$ მონაკვეთის გაყოფა λ ფარდობით ნიშნავს ისეთი M წერტილის მოძებნას, რომლისთვისაც

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\,\overrightarrow{MM_2}\,.$$

თუ M წერტილის კოორდინატებია x, y, z, მაშინ $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$. ამიტომ გვაქვს

$$x-x_1=\lambda(x_2-x), \quad y-y_1=\lambda(y_2-y), \quad z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

აქედან

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (8.1)$$

კერძოდ, როცა $\lambda=1$, მაშინ M არის $[M_1M_2]$ მონაკვეთის შუა-წერტილი და მისი კოორდინატებია:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

***ამოცანა* 1.** K წერტილი MN მონაკვეთის ყოფს ფარდობით $|MK|:|KN|=2:3$. ვიპოვოთ K წერტილის კოორდინატები, თუ $M(7;4;9)$, $N(-3;9;-6)$.

ამოხსნა. (8.1)-დან მივიღებთ, რომ K წერტილის კოორდინატებია:

$$x = \frac{7 + \frac{2}{3}(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{7-2}{\frac{5}{3}} = 3, \qquad y = \frac{4 + \frac{2}{3}\cdot 9}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4+6}{\frac{5}{3}} = 6,$$

$$z = \frac{9 + \frac{2}{3}\cdot(-6)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9-4}{\frac{5}{3}} = 3.$$

ამრიგად, $K(3;6;3)$.

2. სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემულია ΔABC. როგორც ვიცით, ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე უდრის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს, ამიტომ ABC სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ვექტორის სიგრძის ნახევრის, ე. ი.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

***ამოცანა* 2.** ვიპოვოთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია $A(2;3;1)$, $B(1;2;3)$, $C(2;1;3)$ წერტილები.

ამოხსნა. ცხადია,

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\,, \quad \overrightarrow{AC} = -2\vec{j} + 2\vec{k}\,,$$

ამიტომ

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

ამრიგად

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right|=\sqrt{3}\,.$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა სამკუთხედის წვეროებია $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ და $C(x_3,y_3)$, სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|I|\,,\ \text{სადაც}\ \ I=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

3. ტეტრაედრის მოცულობის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემულია ტეტრაედრი, რომლის წვეროებია A, B, C, D წერტილები.

როგორც ვიცით, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ წიბოებზე აგებული ტეტრაედრის მოცულობა ტოლია ამავე წიბოებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის მეექვსედის, ამიტომ

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)\right|. \tag{8.2}$$

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ იმ პირამიდის მოცულობა, რომლის წვეროებია $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$.

ამოხსნა. ცხადია

$$\vec{OA}=5\vec{i}+2\vec{j}\,,\quad \vec{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}\,,\quad \vec{OC}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}\,.$$

ამიტომ

$$\left(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}\right)=\begin{vmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=84\,.$$

აქედან (8.2)-ის ძალით

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot 84=14\,.$$

4. ძალის მუშაობა. როგორც ფიზიკიდან ცნობილია, თუ $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით მატერიალური წერტილი სწორხაზობრივად გადაადგილდება A მდგომარეობიდან B მდგომარეობაში, მაშინ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა გამოითვლება ფორმულით

$$W=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|\cdot\cos\alpha\,,$$

სადაც $\alpha=\vec{F},\hat{}\,\vec{AB}$, ე. ი. $W=\left(\vec{F},\vec{AB}\right)$. ამრიგად, $\vec{F}$ ძალის მიერ $\vec{AB}$ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა ამ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ტოლია.

ამოცანა 4. ვიპოვოთ ერთ წერტილზე მოდებული $\vec{F_1}\,(2;0;-2)$ და $\vec{F_2}\,(-3;2;2)$ ძალების ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა, როცა მათი მოქმედებით სხეული სწორხაზოვნად გადაადგილდება $A(2;-4;-3)$ წერტილიდან $B(-4;-2;-1)$ წერტილამდე.

ამოხსნა. ვინაიდან $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\{-1;2;0\}$ და $\vec{AB}=\{-6;2;2\}$, ამიტომ შესრულებული მუშაობა იქნება

$$W=\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}\right)\cdot\vec{AB}=6+4+0=10.$$

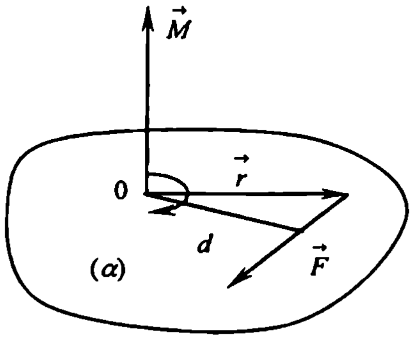
5. ძალის მომენტი წერტილის მიმართ. ვთქვათ მოცემულია რაიმე O წერტილი და $\vec{F}$ ძალა, რომელიც არ გადის O წერტილზე. აღვნიშნოთ α-თი $\vec{F}$ ვექტორითა და O წერტილით განსაზღვრული სიბრტყე. O წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის მოქმედების წრფემდე d მანძილს ეწოდება $\vec{F}$ ძალის მხარი O წერტილის მიმართ.

ცნობილია, რომ $\vec{F}$ ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ ეწოდება O წერტილზე მოდებულ და α სიბრტყის პერპენდიკულარულ ისეთ $\vec{M}$ ვექტორს, რომელიც მიმართულია ისე, რომ მისი ბოლოდან $\vec{F}$ ძალის მიერ α სიბრტყის "მობრუნება" ჩანს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და რომლის სიგრძე უდრის $\vec{F}$ ვექტორის სიგრძისა და d მხარის ნამრავლს (ნახ. 3.17).

განვიხილოთ რადიუს-ვექტორი $\vec{r}$, რომლის სათავეა O, ხოლო ბოლო წერტილია $\vec{F}$ ძალის მოდების წერტილი. თუ გავიხსენებთ ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებას და გავითვალისწინებთ, რომ $d=\left|\vec{r}\right|\cdot\sin\left(\vec{r}\,\hat{,}\,\vec{F}\right)$, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

ამრიგად, $\vec{F}$ ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ წარმოადგენს $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორისა და $\vec{F}$ ძალის ვექტორულ ნამრავლს.



ნახ. 3.17

ამოცანა 5. $\vec{G}(3;-1;2)$ ძალა მოდებულია $O(2;-2;0)$ წერტილზე. ვიპოვოთ ამ ძალის მომენტი $K(3;4;1)$ წერტილის მიმართ.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\vec{M}=\vec{KO}\times\vec{G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 6 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=12\vec{i}-\vec{k}+3\vec{j}-18\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j}=$$

$$=13\vec{i}+\vec{j}-19\vec{k}.$$

IV თავი

წრფე და სიბრტყე

§1. წირისა და ზედაპირის განტოლებები

ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა და რაიმე L წირი. განვიხილოთ განტოლება

$$F(x,y)=0, \tag{1.1}$$

რომელიც აკავშირებს x და y ცვლად სიდიდეებს.

განსაზღვრება 1.1. $F(x,y)=0$ განტოლებას ეწოდება (L) წირის განტოლება, თუ მას აკმაყოფილებს ამ წირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს არცერთი სხვა (L) წირზე არამდებარე) წერტილის კოორდინატები.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ L წირი წარმოადგენს (კოორდინატთა მოცემულ სისტემაში) სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას. ამის გამო ამბობენ, რომ (1.1) განტოლება განსაზღვრავს L წირს.

წირის განტოლების ცნება საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ გეომეტრიული ამოცანები ალგებრული მეთოდებით. მაგალითად, ორი წირის თანაკვეთის წერტილის მოძებნის ამოცანა დაიყვანება მათი განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემის ამოხსნის ალგებრულ ამოცანაზე.

წირის განსაზღვრა შეიძლება ასეთი სახის განტოლებითაც

$$F(\rho,\varphi)=0,$$

სადაც ρ და φ წერტილის პოლარული კოორდინატებია.

ხშირად L წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის მოსახერხებელია ამ წირის წერტილების x და y კოორდინატების გამოსახვა მესამე დამხმარე ცვლადის ანუ პარამეტრის დახმარებით:

$$x=x(t), \quad y=y(t),$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ t პარამეტრის ფუნქციებია. ამ განტოლებებს ეწოდება წირის პარამეტრული განტოლებები სიბრტყეზე.

***ამოცანა* 1.** შევადგინოთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია $C(a,b)$ წერტილი, ხოლო რადიუსია R.

ამოხსნა. ვთქვათ $M(x,y)$ წრეწირის ნებისმიერი წერტილია. რადგან მანძილი M და C წერტილებს შორის R-ის ტოლია, ამიტომ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R\ ,$$

საიდანაც

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1.2)$$

ცხადია, რომ (1.2) განტოლებას აკმაყოფილებს მოცემული წრეწირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს არცერთი სხვა წერტილის კოორდინატები, ამიტომ (1.2) არის მოცემული წრეწირის განტოლება.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, წრეწირის განტოლებას აქვს სახე

$$x^2+y^2=R^2$$

მოვიყვანოთ ახლა ზედაპირისა და წირის განტოლებების ცნებები სივრცეში.

ვთქვათ მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა და რაიმე S ზედაპირი. განვიხილოთ ტოლობა

$$\Phi(x,y,z)=0, \qquad (1.3)$$

რომელიც აკავშირებს x, y და z ცვლად სიდიდეებს.

განსაზღვრება **1.2.** $\Phi(x,y,z)=0$ განტოლებას ეწოდება S ზედაპირის განტოლება, თუ მას აკმაყოფილებს S ზედაპირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს არცერთი სხვა (S ზედაპირზე არამდებარე) წერტილის კოორდინატები.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ S ზედაპირი წარმოადგენს (კოორდინატთა მოცემულ სისტემაში) სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს (1.3) განტოლებას. ამის გამო ამბობენ, რომ (1.3) განტოლება განსაზღვრავს S ზედაპირს.

წირი სივრცეში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი ზედაპირის თანაკვეთა, ე. ი. როგორც იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ერთდროულად ორ ზედაპირზე მდებარეობენ, ამიტომ წირი შეიძლება განისაზღვროს ორი განტოლების მოცემით. ამრიგად, განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y,z)=0\\ \Phi_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

განსაზღვრავს წირს.

ანალოგიურად სიბრტყეზე მდებარე (ბრტყელი) წირისა, სივრცითი წირის მოცემა შეიძლება პარამეტრული სახის განტოლებებით

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).$$

ამოცანა 2. შევადგინოთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია $C(a;b;c)$ წერტილი, ხოლო რადიუსია R.

ამოხსნა. ვთქვათ $M(x,y,z)$ სფეროს ნებისმიერი წერტილია. რადგან მანძილი M და C წერტილებს შორის R-ის ტოლია, ამიტომ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R,$$

საიდანაც

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1.4)$$

ცხადია, რომ (1.4) განტოლებას აკმაყოფილებს მოცემული სფეროს ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს არცერთი სხვა წერტილის კოორდინატები. ამიტომ (1.4) არის მოცემული სფეროს განტოლება.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, სფეროს განტოლებას აქვს სახე

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

§2. წრფე სიბრტყეზე

1. წრფის ზოგადი სახის განტოლება. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და რაიმე L წრფე (ნახ. 4.1). განვიხილოთ L წრფის პერპენდიკულარული რაიმე არანულოვანი ვექტორი

$$\vec{n}\,(A,B).$$

ავიღოთ L წრფეზე ნებისმიერი წერტილი $M_0(x_0,y_0)$. ცხადია, L წრფეზე და მხოლოდ მასზე აღებული ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილისათვის ვექტორი $\overrightarrow{M_0M}$ იქნება $\vec{n}$ ვექტორის პერპენდიკულარული, ე. ი.

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})=0. \tag{2.1}$$

რადგან

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\},$$

ამიტომ (2.1)-დან გვაქვს

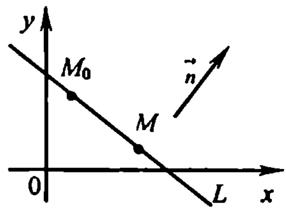
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{2.2}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$C=-Ax_0-By_0,$$

მაშინ (2.2) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$Ax+By+C=0. \tag{2.3}$$



ნახ. 4.1

ამრიგად, L წრფის წერტილების კოორდინატები და მხოლოდ ისინი აკმაყოფილებენ (2.3) წრფივ განტოლებას.

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველი წრფივი (2.3) სახის განტოლება მოცემული კოორდინატთა სისტემის მიმართ განსაზღვრავს რაღაც წრფეს.

ამრიგად, სიბრტყეზე ფიქსირებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ ყოველი წრფივი განტოლება განსაზღვრავს წრფეს და, პირიქით, ყოველი წრფის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებას.

(2.3) განტოლებას ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება სიბრტყეზე, ხოლო $\vec{n}=(A,B)$ ვექტორს – წრფის ნორმალური ვექტორი.

ახლა დავადგინოთ, თუ რა მდებარეობა აქვს წრფეს კოორდინატთა სისტემის მიმართ, როდესაც (2.3) განტოლების ერთი ან ორი კოეფიციენტი ნულია.

I. ვთქვათ $C=0$. მაშინ (2.3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+By=0.$$

რადგან $x=0$, $y=0$ აკმაყოფილებს ამ განტოლებას, ამიტომ წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

II. ვთქვათ $B=0$. მაშინ (2.3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+C=0.$$

აქედან

$$x=a,$$

სადაც

$$a=-\frac{C}{A}.$$

ეს წრფე Ox ღერძს კვეთს $(a;0)$ წერტილში და Oy ღერძის პარალელურია, რადგან მისი $\vec{n}=(A,0)$ ნორმალური ვექტორი Oy ღერძის მართობულია. კერძოდ, როცა $C=0$ გვაქვს Oy ღერძის განტოლება $x=0$.

III. ვთქვათ $A=0$. მაშინ (2.3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$By+C=0.$$

აქედან

$$y=b,$$

სადაც

$$b=-\frac{C}{B}.$$

ეს წრფე Oy ღერძს კვეთს $(0;b)$ წერტილში და Ox ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}=(0;B)$ ვექტორი Ox ღერძის მართობულია. კერძოდ, როცა $C=0$ გვაქვს Ox ღერძის განტოლება $y=0$.

შემდეგ პუნქტებში ჩვენ მივიღებთ წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებებს.

***ამოცანა* 1.** ვიპოვოთ a-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(a+1)x+$ $+(a-3)y+a^2-4a+3=0$ წრფე:

1) აბსცისთა ღერძის პარალელურია; 2) გადის კოორდინატთა სათავეზე; 3) ემთხვევა ორდინატთა ღერძს.

ამოხსნა. 1) ეს წრფე Ox ღერძის პარალელური იქნება, როცა $a+1=0$ ანუ $a=-1$; 2) ეს წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე, თუ $a^2-4a+3=0$, ანუ $a=1$ ან $a=3$; 3) იმისათვის, რომ ეს წრფე იყოს Oy ღერძის განტოლება საჭიროა

$$\begin{cases} a-3=0 \\ a^2-4a+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=3 \\ a=1 \text{ ან } a=3 \end{cases} \quad \text{ე.ი. } a=3.$$

2. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. დავუშვათ, რომ (2.3) განტოლებაში A, B და C მუდმივები განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ ეს განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

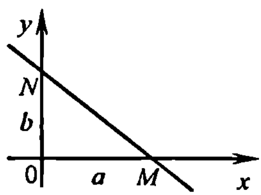
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a=-\frac{C}{A}, \quad b=-\frac{C}{B},$$

მაშინ წრფის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2.4)$$



ნახ. 4.2

a და b პარამეტრებს აქვთ მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. a წარმოადგენს (2.4) წრფის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი OM მონაკვეთის M წერტილის აბსცისას, ხოლო b – ამ წრფის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი ON მონაკვეთის N წერტილის ორდინატს (ნახ. 4.2). a და b პარამეტრების ამ გეომეტრიული შინაარსის გამო (2.4) განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.

ამოცანა 2. შევადგინოთ $M(3;5)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთს ტოლი სიგრძეების მონაკვეთებს.

ამოხსნა. საძებნი წრფის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში აქვს სახე $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$ ან $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$. ვინაიდან წრფე გადის $M(3;5)$ წერტილზე, ამიტომ $\frac{3}{a}+\frac{5}{a}=1$ ანუ $a=8$, ან $\frac{3}{a}+\frac{5}{-a}=1$ ანუ $a=-2$.

ამრიგად, საძებნი წრფეა $\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$ ან $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$.

3. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით. ვთქვათ, $B\neq0$. მაშინ (2.3) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

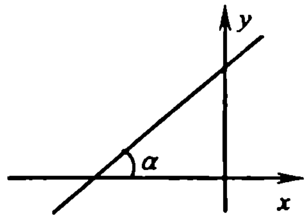
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$-\frac{A}{B}=k\ ,\quad -\frac{C}{B}=b\ ,$$

მაშინ მივიღებთ

$$y=kx+b. \tag{2.5}$$



ნახ. 4.3

ადვილია ჩვენება, რომ k არის იმ α კუთხის ტანგენსი, რომელსაც (2.5) წრფე ადგენს Ox ღერძთან (კუთხე წრფესა და ღერძს შორის ეწოდება იმ უმცირეს კუთხეს, რომლითაც უნდა მობრუნდეს წრფე საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, რომ დაემთხვეს ღერძს), (ნახ. 4.3). k-ს წრფის კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება. b წარმოადგენს წრფის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატს.

ამოცანა 3. შევადგინოთ $M(2;1)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც აბსცისთა ღერძთან ადგენს 135°-ის ტოლ კუთხეს.

ამოხსნა. ვინაიდან $k=tg135°=-1$, ამიტომ საძებნი წრფის განტოლებაა $y=-x+b$. რადგან წრფე გადის $M(2;1)$ წერტილზე, ამიტომ $1=-2+b$ ანუ $b=3$.

ამრიგად, საძიებელი განტოლებაა

$$y=-x+3.$$

4. წრფის კანონიკური და პარამეტრული განტოლებები. ყოველ არანულოვან ვექტორს, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია, ეწოდება მისი მიმმართველი ვექტორი.

შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომლის მიმმართველი ვექტორია $\vec{q}\,(l,m)$ და რომელიც გადის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე. ცხადია, რომ წერტილი $M(x,y)$ ძევს მოცემულ წრფეზე მაშინ და

მხოლოდ მაშინ, როცა $\overrightarrow{M_0M}$ და $\vec{q}$ ვექტორები კოლინეარულია, ე. ი. როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{2.6}$$

(2.6) განტოლებას ეწოდება წრფის კანონიკური განტოლება.

წრფის კანონიკური (2.6) განტოლებიდან გვაქვს

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt, \end{cases} \tag{2.7}$$

სადაც

$$t=\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

(2.7) წარმოადგენს წრფის პარამეტრულ განტოლებებს.

ნ. მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. წრფის (2.6) კანონიკური განტოლებიდან ადვილად მიიღება ორ $M_0(x_0,y_0)$ და $M_1(x_1,y_1)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ამისათვის, საკმარისია წრფის მიმმართველ ვექტორად ავიღოთ ვექტორი $\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1\text{-}x_0;y_1\text{-}y_0\}$. თუ გავითვალისწინებთ ამ გარემოებას, მივიღებთ M_0 და M_1 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებას

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

ამოცანა 4. შევადგინოთ ABC სამკუთხედის BD მედიანის განტოლება, თუ $A(1;-2)$, $B(3;0)$, $C(3;4)$.

ამოხსნა. ვიპოვოთ D წერტილის კოორდინატები. გვაქვს $x=\frac{1+3}{2}=2$, $y=\frac{-2+4}{2}=1$, ე. ი. $D(2;1)$.

დავწეროთ A და D წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y}{1} \text{ ანუ } x+y-3=0.$$

მ. მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გამავალი წრფის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის M_0 წერტილზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტია მოცემული k რიცხვი. საძიებელი განტოლება იყოს

$$y=kx+b. \tag{2.8}$$

რადგან ეს წრფე გადის M_0 წერტილზე, ამიტომ

$$y_0=kx_0+b. \tag{2.9}$$

(2.8) და (2.9)-დან მივიღებთ

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (2.10)$$

(2.10) არის მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გამავალი წრფის განტოლება. ამ განტოლებიდან k-ს სათანადო შერჩევით მიიღება M_0 წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლება გარდა იმ წრფისა, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია. (2.10)-ს უწოდებენ M_0 წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებას.

7. კუთხე ორ წრფეს შორის. ორი წრფის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები. ვთქვათ სიბრტყეზე ორი წრფე მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებებით

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

ეს წრფეები განსაზღვრავენ ორ კუთხეს, რომელთა ჯამი უდრის 180°. ამ კუთხეებს შორის უმცირესს ვუწოდოთ კუთხე მოცემულ წრფეებს შორის. რადგან $\vec{n}_1(A_1,B_1)$ და $\vec{n}_2(A_2,B_2)$ ვექტორები შესაბამისად მოცემული წრფეების პერპენდიკულარულია, ამიტომ მოცემულ წრფეთა შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (2.11)$$

ცხადია, რომ მოცემულ წრფეთა პარალელობის პირობა იგივეა, რაც მათი ნორმალური $\vec{n}_1$ და $\vec{n}_2$ ვექტორების კოლინეარობის პირობა, ე. ი. მათი კოორდინატების პროპორციულობა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ამ წრფეთა თანამთხვევის პირობაა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

რადგან ურთიერთპერპენდიკულარული წრფეებისათვის $\cos\varphi=0$, ამიტომ (2.11) ფორმულიდან გვაქვს ორი წრფის პერპენდიკულარობის პირობა

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

ახლა ვთქვათ ზემოთგანხილულ წრფეთა განტოლებები ჩაწერილია კუთხური კოეფიციენტებით:

$$y=k_1x+b_1,$$
$$y=k_2x+b_2,$$

ადვილია ჩვენება, რომ ამ შემთხვევაში

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

რომელიც აგრეთვე გამოიყენება ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელად.

ორი წრფის პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები კუთხური კოეფიციენტების საშუალებით შესაბამისად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$k_1=k_2$$

და

$$1+k_1k_2=0.$$

ამოცანა 5. ვიპოვოთ კუთხე $x+5y-3=0$ და $2x-3y+4=0$ წრფეებს შორის.

ამოხსნა. (2.11) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\cos\varphi=\left|\frac{1\cdot 2+5\cdot(-3)}{\sqrt{1+25}\cdot\sqrt{4+9}}\right|=\left|\frac{2-15}{13\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ამიტომ $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

ამოცანა 6. შევადგინოთ MN მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარის განტოლება, თუ $M(7;3)$, $N(-3;1)$.

ამოხსნა. M და N წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება იქნება $\frac{x-7}{-10}=\frac{y-3}{-2}$ ანუ $y=\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}$. ე. ი. ამ წრფის საკუთხო კოეფიციენტია $k_1=\frac{1}{5}$.

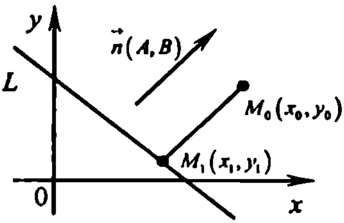
MN მონაკვეთის D შუაწერტილის კოორდინატები იქნება $x=\frac{7-3}{2}=2$, $y=\frac{3+1}{2}=2$, ანუ $D(2;2)$.

D წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება იქნება $y-2=k(x-2)$. ამ წრფეებიდან უნდა შევარჩიოთ ის, რომელიც მართობული იქნება MN წრფის. მართობულობის პირობიდან მივიღებთ $k=-\frac{1}{k_1}=-5$.

ამრიგად, საძებნი წრფის განტოლებაა $y-2=-5(x-2)$, ანუ $5x+y-12=0$.

8. მანძილი წერტილიდან წრფემდე. ვთქვათ, მოცემულია L წრფე (2.3) სახის განტოლებით და სიბრტყის ნებისმიერი $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი. ვიპოვოთ მანძილი $\rho(M_0,L)$, M_0 წერტილიდან L წრფემდე. ამ მიზნით M_0 წერტილიდან L-ზე დავუშვათ პერპენდიკულარი და აღვნიშნოთ მისი ფუძე $M_1(x_1,y_1)$-ით (ნახ. 4.4). ცხადია, რომ საძიებელი მანძილი

$$\rho(M_0,L)=|\overrightarrow{M_0M_1}|.$$



ნახ. 4.4

ვექტორები $\vec{n}(A;B)$ და $\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0;y_1-y_0\}$ კოლინეარულია, როგორც ერთი და იმავე L წრფის პერპენდიკულარული ვექტორები. ამიტომ მოიძებნება ისეთი t რიცხვი, რომ $\overrightarrow{M_0M_1}=t\vec{n}$, საიდანაც გვაქვს

$$\begin{cases} x_1-x_0=At, \\ y_1-y_0=Bt. \end{cases} \tag{2.12}$$

$M_1(x_1;y_1)$ წერტილი ძევს L წრფეზე, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2.3) განტოლებას. თუ (2.12) სისტემიდან x_1 და y_1-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (2.3) განტოლებაში და განვსაზღვრავთ t-ს, მივიღებთ

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

მეორეს მხრივ, რადგან

$$|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$$

ამიტომ

$$|\overrightarrow{M_0M_1}|=|t|\cdot\sqrt{A^2+B^2}$$

საიდანაც

$$\rho(M_0,L)=|\overrightarrow{M_0M_1}|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

კერძოდ,

$$\rho(O,L)=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ამოცანა 7. სამკუთხედის წვეროებია $A(-4;-2)$, $B(2;3)$, $C(0;1)$. ვიპოვოთ მანძილი A წვეროდან BD სიმაღლემდე.

ამოხსნა. AC გვერდის განტოლება იქნება $\frac{x+4}{4}=\frac{y+2}{3}$ ანუ $3x$-$4y$+4=0. მისი საკუთხო კოეფიციენტია $k_1=\frac{3}{4}$.

BD სიმაღლე გადის B წერტილზე და მისი საკუთხო კოეფიციენტია $k=-\frac{1}{k_1}=-\frac{4}{3}$, ამიტომ მისი განტოლება იქნება

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-2) \text{ ანუ } 4x+3y-17=0.$$

გამოვთვალოთ მანძილი $A(-4;-2)$ წერტილიდან BD წრფემდე.

$$d=\frac{|-4\cdot4-2\cdot3-17|}{\sqrt{16+9}}=\frac{39}{5}=7{,}8.$$

§3. სიბრტყის განტოლებები

1. სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება. წინა პარაგრაფში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველი წრფივი განტოლება

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3.1)$$

განსაზღვრავს სიბრტყეს ფიქსირებული $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ და პირიქით, ყოველი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებას.

(3.1) განტოლებას ეწოდება სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება, ხოლო სიბრტყის პერპენდიკულარულ $\vec{n}(A,B,C)$ ვექტორს ამ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.

დავადგინოთ, თუ რა მდებარეობა აქვს სიბრტყეს კოორდინატთა სისტემის მიმართ, როდესაც (3.1) განტოლების ერთი ან რამდენიმე კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

I. ვთქვათ D=0. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+By+Cz=0.$$

რადგან x=0, y=0, z=0 აკმაყოფილებს ამ განტოლებას, ამიტომ სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

II. ვთქვათ C=0. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+By+D=0.$$

ეს სიბრტყე Oxy საკოორდინატო სიბრტყეს კვეთს $Ax+By+D=0$ წრფეზე და Oz ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}(A,B,0)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Oz ღერძის.

III. ვთქვათ B=0. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+Cz+D=0.$$

ეს სიბრტყე Oxz საკოორდინატო სიბრტყეს კვეთს $Ax+Cz+D=0$ წრფეზე და Oy ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}\,(A,0,C)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Oy ღერძის.

IV. ვთქვათ $A=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$By+Cz+D=0.$$

ეს სიბრტყე Oyz საკოორდინატო სიბრტყეს კვეთს $By+Cz+D=0$ წრფეზე და Ox ღერძის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}\,(0,B,C)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Ox ღერძის.

V. ვთქვათ $A=0$, $B=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Cz+D=0.$$

აქედან

$$z=-\frac{D}{C}.$$

ეს სიბრტყე Oz ღერძს კვეთს $\left(0;0;-\frac{D}{C}\right)$ წერტილში და Oxy საკოორდინატო სიბრტყის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური $\vec{n}\,(0,0,C)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია Oxy საკოორდინატო სიბრტყის. კერძოდ, როცა $D=0$ გვაქვს Oxy სიბრტყის განტოლება $z=0$.

VI. ვთქვათ $A=0$, $C=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$By+D=0.$$

აქედან

$$y=-\frac{D}{B}.$$

ეს სიბრტყე Oy ღერძს კვეთს $\left(0;-\frac{D}{B};0\right)$ წერტილში და Oxz საკოორდინატო სიბრტყის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური ვექტორი $\vec{n}\,(0;B;0)$ პერპენდიკულარულია Oxz საკოორდინატო სიბრტყის. კერძოდ, როცა $D=0$, გვაქვს Oxz საკოორდინატო სიბრტყის განტოლება $y=0$.

VII. ვთქვათ $B=0$, $C=0$. მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+D=0.$$

აქედან

$$x=-\frac{D}{A}.$$

ეს სიბრტყე Ox ღერძს კვეთს $\left(-\frac{D}{A};0;0\right)$ წერტილში და Oyz საკოორდინატო სიბრტყის პარალელურია, რადგან მისი ნორმალური ვექტორი $\vec{n}(A;0;0)$ პერპენდიკულარულია Oyz საკოორდინატო სიბრტყის. კერძოდ, როცა $D=0$ გვაქვს Oyz საკოორდინატო სიბრტყის განტოლება $x=0$.

***ამოცანა* 1.** შევადგინოთ $K(2;-3;1)$ წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}(2;1;0)$.

ამოხსნა. ვინაიდან საძებნი სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}(2;1;0)$, ამიტომ სიბრტყის განტოლებას ექნება სახე

$$2x+y+D=0.$$

რადგან ეს სიბრტყე გადის $K(2;-3;1)$ წერტილზე, ამიტომ ამ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს სიბრტყის განტოლებას, ე. ი. $4-3+D=0$ ანუ $D=-1$.

ამრიგად, საძებნი სიბრტყის განტოლებაა

$$2x+y-1=0.$$

2. სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. დავუშვათ, რომ (3.1) განტოლებაში A, B, C და D მუდმივები განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ ეს განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1\,.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C},$$

მაშინ სიბრტყის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,.$$

a, b და c პარამეტრებს აქვთ მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. ისინი წარმოადგენენ შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებთან სიბრტყის გადაკვეთის წერტილების აბსცისას, ორდინატს და აპლიკატს.

3. სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია ერთ წრფეზე არამდებარე სამი $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ და $M_3(x_3;y_3;z_3)$ წერტილი. რადგან ეს წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ, ამიტომ ვექტორები

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\, y_3-y_1;\, z_3-z_1\}$$

არაკოლინეარულია. აქედან გამომდინარეობს, რომ წერტილი $M(x;y;z)$ ძევს M_1, M_2 და M_3 წერტილებზე გამავალ სიბრტყეზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ და $\overrightarrow{M_1M_3}$ კომპლანარულია, ე. ი. მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 .$$

ეს არის სამ M_1, M_2 და M_3 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

4. კუთხე ორ სიბრტყეს შორის. პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები. ვთქვათ მოცემულია ორი სიბრტყე განტოლებებით

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\; A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

რადგან ვექტორები $\vec{n}_1\,(A_1;B_1;C_1)$ და $\vec{n}_2\,(A_2;B_2;C_2)$ შესაბამისად მოცემული სიბრტყეების პერპენდიკულარულია, ამიტომ მოცემულ სიბრტყეთა შორის φ კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} .$$

ცხადია, რომ მოცემულ სიბრტყეთა პარალელობის პირობა იგივეა, რაც მათი ნორმალური $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ ვექტორების კოლინეარობის პირობა. ე. ი. მათი კოორდინატების პროპორციულობა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2} .$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ამ სიბრტყეთა თანამთხვევის პირობაა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2} .$$

მოცემულ სიბრტყეთა პერპენდიკულარობის პირობა იქნება $\vec{n}_1$ და $\vec{n}_2$ ვექტორების პერპენდიკულარობის პირობა

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

ამოცანა 2. ვიპოვოთ კუთხე $2x+2y+z+2=0$ და $3x+2y-6z+1=0$ სიბრტყეებს შორის.

ამოხსნა. კუთხის გამოსათვლელი ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{2\cdot3+2\cdot2-1\cdot6}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{9+4+36}}=\frac{4}{21},$$

ამიტომ $\varphi=\arccos\frac{4}{21}$.

ამოცანა 3. a-ს რა მნიშვნელობისთვისაა პერპენდიკულარული $2x+ay-5z+1=0$ და $(a-1)x-3y+az+2=0$ სიბრტყეები.

ამოხსნა. პერპენდიკულარობის პირობის ძალით გვაქვს

$$2\cdot(a-1)-3\cdot a-5a=0$$

აქედან $a=-\frac{1}{3}$.

5. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე. ვთქვათ მოცემულია α სიბრტყე განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0$$

და წერტილი $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

M_0 წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი $\rho(M_0,\alpha)$ გამოითვლება ფორმულით

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

ეს ფორმულა მიიღება წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის ანალოგიურად.

ამოცანა 4. ვიპოვოთ მანძილი $2x-y+2z-3=0$ და $4x-2y+4z+5=0$ სიბრტყეებს შორის.

ამოხსნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

ავიღოთ პირველ სიბრტყეზე რაიმე M წერტილი. ამისათვის დავუშვათ მაგალითად $x=1$ და $y=1$. მივიღებთ $2-1+2z-3=0$. აქედან გვაქვს $z=1$. ე.ი. $M(1;1;1)$.

საძებნი მანძილი იქნება მანძილი $M(1;1;1)$ წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე:

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{4\cdot1-2\cdot1+4\cdot1+5}{\sqrt{16+4+16}}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}.$$

6. სიბრტყეთა კონა და სიბრტყეთა კონა. მოცემულ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას ეწოდება სიბრტყეთა ძნული M_0 ცენტრით.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ძნულის განტოლებას აქვს სახე

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{3.2}$$

სადაც A, B და C რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

ერთსა და იმავე L წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას ეწოდება სიბრტყეთა კონა L ღერძით.

ვთქვათ მოცემულია ორი თანამკვეთი სიბრტყე

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ და } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

ამ სიბრტყეთა თანაკვეთის წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა კონის განტოლებას აქვს სახე

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

სადაც λ_1 და λ_2 რიცხვები ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის.

§4. წრფე სივრცეში

1. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებები. სიბრტყეზე განხილული წრფის ანალოგიურად, სივრცეში ფიქსირებული $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ იმ წრფის განტოლებები, რომლის მიმმართველი ვექტორია $\vec{q}\,(l;m;n)$ და რომელიც გადის $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილზე არის

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (4.1)$$

ამ განტოლებებს სივრცეში წრფის კანონიკური განტოლებები ეწოდება.

(4.1) განტოლებებიდან მარტივად მივიღებთ წრფის პარამეტრულ განტოლებებს

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

სადაც

$$t=\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

თუ ამ განტოლებებს განვიხილავთ, როგორც წერტილის მოძრაობის განტოლებებს, მაშინ ისინი განსაზღვრავენ თანაბარ სწორხაზოვან მოძრაობას. t დროში გავლილი მანძილი იქნება

$S=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ ხოლო სიჩქარე $V=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$

ვთქვათ მოცემულია ორი წერტილი $M_0(x_0;y_0;z_0)$ და $M_1(x_1;y_1;z_1)$, ამ წერტილებზე გამავალი წრფის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ ვექტორი

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0\}.$$

ამიტომ, (4.1)-ის მიხედვით, M_0 და M_1 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებებია

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

წრფე სივრცეში შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი გადამკვეთი $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ სიბრტყის თანაკვეთა. ამიტომ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

განსაზღვრავს გარკვეულ წრფეს.

განტოლებათა (4.2) სისტემას ეწოდება წრფის განტოლებები ზოგადი სახით.

***ამოცანა* 1.** წრფის განტოლებები

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{2}$$

ჩავწეროთ ზოგადი სახით.

ამოხსნა. წრფის განტოლებებიდან გვაქვს

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{5} \\ \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+2}{2} \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} 5x+3y-8=0 \\ 2y-5z-12=0 \end{cases}$$

ეს არის მოცემული წრფის განტოლება ჩაწერილი ზოგადი სახით.

ვაჩვენოთ როგორ დაიყვანება წრფის ზოგადი (4.2) სახის განტოლებები კანონიკურ (4.1) სახეზე. რადგან $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ სიბრტყეები გადამკვეთია, ამიტომ შემდეგი ტოლობებიდან

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

ერთი მაინც არ სრულდება. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

ამიტომ, (4.2)-დან მივიღებთ

$$\begin{cases} x = a_1 z + b_1 \\ y = a_2 z + b_2. \end{cases}$$

ამრიგად, მოცემული წრფის პარამეტრული განტოლებებია

$$\begin{cases} x = b_1 + a_1 t \\ y = b_2 + a_2 t \\ z = 0 + 1 \cdot t. \end{cases}$$

მაშასადამე, მოცემული წრფე გადის $M_0(b_1;b_2;0)$ წერტილზე და მისი მიმმართველი ვექტორია $\vec{q}\,(a_1;a_2;1)$. ამიტომ მისი კანონიკური განტოლებებია

$$\frac{x-b_1}{a_1} = \frac{y-b_2}{a_2} = \frac{z-0}{1}.$$

2. წრფეთა კონა. მოცემულ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას ეწოდება წრფეთა კონა M_0 ცენტრით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებებს აქვს სახე

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \tag{4.3}$$

სადაც l, m და n რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. მართლაც (4.3) განტოლებებით განსაზღვრული ნებისმიერი წრფე გადის M_0 წერტილზე. მეორეს მხრივ, თუ მოცემულია M_0 წერტილზე გამავალი რაიმე წრფე, მაშინ ის ცალსახად განისაზღვრება მისი მიმმართველი $\vec{q}\,(l;m;n)$ ვექტორის მოცემით, ე. ი. განისაზღვრება (4.3) განტოლებებით.

ამრიგად, მოცემულ M_0 წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლებები მიიღება (4.3) განტოლებებიდან l, m და n მუდმივების სათანადო შერჩევით.

***ამოცანა* 2.** შევადგინოთ $M(-1;3;0)$ წერტილზე $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ წრფის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლება.

ამოხსნა. $M(-1;3;0)$ წერტილზე გავლებული წრფეთა კონის განტოლებაა $\dfrac{x+1}{l} = \dfrac{y-3}{m} = \dfrac{z}{n}$. იმისათვის, რომ ეს წრფე პარალელური იყოს მოცემული წრფის, შეგვიძლია ავიღოთ $l=3$, $m=-1$, $n=2$. ე. ი. საძებნი წრფის განტოლებაა

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}.$$

3. კუთხე ორ წრფეს შორის. პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები. ვთქვათ მოცემულია ორი წრფე

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

რადგან $\vec{q}_1\,(l_1,m_1,n_1)$ და $\vec{q}_2\,(l_2,m_2,n_2)$ ვექტორები შესაბამისად მოცემული წრფეების პარალელურია, ამიტომ ამ წრფეებს შორის φ კუთხის კოსინუსი გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi=\frac{\left|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\right|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

ამ წრფეთა პარალელობის ან თანამთხვევის პირობაა

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2},$$

ხოლო პერპენდიკულარობის პირობაა

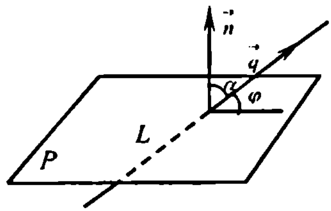
$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

4. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები. ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0$$

და L წრფე კანონიკური განტოლებებით

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$



ნახ. 4.5

ვიპოვოთ φ კუთხე (ნახ. 4.5) P სიბრტყესა და L წრფეს შორის. α იყოს კუთხე $\vec{n}\,(A;B;C)$ და $\vec{q}\,(l;m;n)$ ვექტორებს შორის, მაშინ $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, თუ α მახვილია და $\varphi=\alpha-\frac{\pi}{2}$, თუ α ბლაგვია, ამიტომ

$$\sin\varphi=|\cos\alpha|=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

წრფის და სიბრტყის პარალელობის ან წრფის სიბრტყეზე მდებარეობის პირობაა

$$Al+Bm+Cn=0,$$

ხოლო მათი პერპენდიკულარობის პირობა იქნება

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

§5. ზოგიერთი ამოცანა წრფესა და სიბრტყეზე სივრცეში

1. მოცემულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლებები. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილი და სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

რადგანაც საძიებელი წრფე უნდა გადიოდეს M_0 წერტილზე და მის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ მოცემული სიბრტყის ნორმალური $\vec{n}(A;B;C)$ ვექტორი, ამიტომ ამ წრფის განტოლებებია

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

2. მოცემულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილი და სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

რადგან საძიებელი სიბრტყე უნდა გადიოდეს M_0 წერტილზე და მის ნორმალურ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ $\vec{n}(A;B;C)$ ვექტორი, ამიტომ სიბრტყეთა კონის (3.2) განტოლების თანახმად, ამ სიბრტყის განტოლებაა

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

3. მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილი და წრფე

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

რადგან საძიებელი სიბრტყე უნდა გადიოდეს M_0 წერტილზე და მის ნორმალურ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ წრფის მიმმართველი $\vec{q}(l;m;n)$ ვექტორი, ამიტომ სიბრტყეთა კონის (3.2) განტოლების თანახმად, ამ სიბრტყის განტოლებაა

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0.$$

4. სიბრტყისა და წრფის თანაკვეთის წერტილის მოძებნა. ვთქვათ მოცემულია სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5.1}$$

და წრფე

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{5.2}$$

(5.2)-დან x, y და z-ის მნიშვნელობები შევიტანოთ (5.1) განტოლებაში. მივიღებთ

$$(Ax_0+By_0+Cz_0+D)+(Al+Bm+Cn)t=0. \qquad (5.3)$$

თუ $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ და $Al+Bm+Cn=0$, მაშინ (5.1)-ის ძალით წრფე ძევს სიბრტყეზე.

თუ $Al+Bm+Cn=0$ და $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ მაშინ წრფე სიბრტყის პარალელურია.

თუ $Al+Bm+Cn\neq0$, მაშინ (5.3) ტოლობიდან განსაზღვრული t-ს მნიშვნელობის ჩასმით (5.2)-ში, მივიღებთ თანაკვეთის წერტილის კოორდინატებს.

5. მოცემულ წრფეზე და მასზე არამდებარე წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ მოცემულია $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილი და წრფე

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

ვიპოვოთ მოცემულ წრფეზე მდებარე, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ წერტილისაგან განსხვავებული რაიმე M_2 წერტილი. საძებნი სიბრტყის განტოლება იქნება M_0, M_1, M_2 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

***ამოცანა* 1.** ვიპოვოთ $M_0(-1;0;1)$ წერტილზე და

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{2}$$

წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ამოხსნა. ვიპოვოთ მოცემულ წრფეზე მდებარე, $M_1(2;-3;3)$ წერტილისაგან განსხვავებული რაიმე M_2 წერტილი. ამისათვის დავუშვათ $z=5$. მაშინ წრფის განტოლებიდან მივიღებთ $x=3$, $y=-5$ ე. ი. წერტილი $M_2(3;-5;5)$ მდებარეობს მოცემულ წრფეზე.

შევადგინოთ M_0, M_1, M_2 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. გვაქვს

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

აქედან

$$2x+4y+3z-1=0.$$

ამრიგად, საძებნი სიბრტყის განტოლებაა $2x+4y+3z-1=0$.

6. მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის განტოლება. დავწეროთ მოცემულ M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება (იხ. პუნქტი 3). ვიპოვოთ ამ სიბრტყისა და მოცემული წრფის გადაკვეთის M_1 წერტილი (იხ. პუნქტი 4). საძებნი წრფის განტო-

ლებები იქნება M_0 და M_1 წერტილებზე გავლებული წრფის განტოლებები.

ამოცანა 2. შევადგინოთ $M_0(-1;0;2)$ წერტილიდან

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{0}$$

წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარული წრფის განტოლებები.

ამოხსნა. M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$x-y+1=0.$$

ვიპოვოთ მოცემული წრფისა და $x-y+1=0$ სიბრტყის თანაკვეთის წერტილი. ამისათვის მოცემული წრფის განტოლებები ჩავწეროთ პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=0. \end{cases}$$

თუ x, y და z-ის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ სიბრტყის განტოლებაში, მივიღებთ $t=-2$, ე. ი. გადაკვეთის წერტილია $M_1(0;1;0)$.

დავწეროთ M_0 და M_1 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებები:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}.$$

V თავი

მეორე რიგის წირები და ზედაპირები

განვიხილოთ ორუცნობიანი მეორე რიგის ზოგადი სახის განტოლება

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (*)$$

სადაც A, B და C რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

Oxy სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას, მეორე რიგის წირი ეწოდება. შესაძლებელია, რომ სიბრტყეზე არ არსებობს არცერთი წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (*) განტოლებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (*) განტოლება განსაზღვრავს მეორე რიგის წარმოსახვით წირს. მაგალითად, განტოლება

$$x^2+y^2=-1$$

არის მეორე რიგის წარმოსახვითი წირის განტოლება. მეორე რიგის წარმოსახვით წირებს ჩვენ არ შევისწავლით.

ზოგჯერ (*) განტოლება განსაზღვრავს პარალელურ, თანამთხვეულ ან გადამკვეთ წრფეთა წყვილს, მაგრამ მაშინაც ამ სიმრავლეებს მეორე რიგის წირებს უწოდებენ.

IV თავის §1-ში მიღებული იყო წრეწირის განტოლება

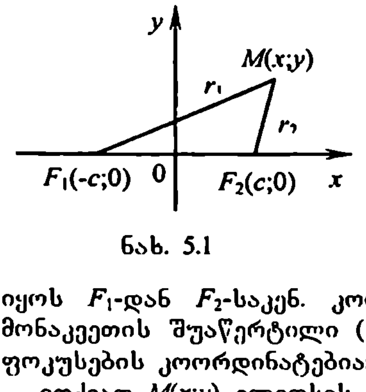
$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

ეს განტოლება მეორე ხარისხისაა x და y ცვლადების მიმართ. ამიტომ წრეწირი მეორე რიგის წირია.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით მეორე რიგის წირებს: ელიფსს, ჰიპერბოლას და პარაბოლას.

§1. ელიფსი

განსაზღვრება **1.1.** ელიფსი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ, ფოკუსებად წოდებულ წერტილებამდე მანძილების ჯამი ერთიდაიგივე მუდმივი სიდიდეა*.



ნახ. 5.1

აღვნიშნოთ ფოკუსები F_1 და F_2-ით. ვთქვათ ფოკუსებს შორის მანძილია $2c$, ხოლო ელიფსის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი უდრის $2a$-ს (განსაზღვრებით $2a>2c$).

შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი გადიოდეს ფოკუსებზე და მიმართული იყოს F_1-დან F_2-საკენ. კოორდინატთა სათავედ ავიღოთ F_1F_2 მონაკვეთის შუაწერტილი (ნახ. 5.1). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1(-c;0)$ და $F_2(c;0)$.

ვთქვათ $M(x;y)$ ელიფსის ნებისმიერი წერტილია. აღვნიშნოთ r_1 და r_2-ით მანძილები M წერტილიდან ფოკუსებამდე: $r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$. ამ რიცხვებს M წერტილის ფოკალური რადიუსები ეწოდება.

განსაზღვრების ძალით

$$r_1+r_2=2a.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

---

* იგულისხმება, რომ ეს მუდმივი სიდიდე მეტია ფოკუსებს შორის მანძილზე

ამიტომ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{1.1}$$

(1.1) არის ელიფსის განტოლება.

ელიფსის განტოლება (1.1) სახით პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოუხერხებელია, ამიტომ დავიყვანოთ ის უფრო მარტივ სახეზე. ამ მიზნით (1.1) ასე გადავწეროთ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

აქედან ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით მივიღებთ

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

ანუ

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილს ავიყვანთ კვადრატში, გვექნება

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

აქედან

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{1.2}$$

პირობის ძალით $a^2-c^2>0$. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\sqrt{a^2-c^2}=b,$$

მაშინ (1.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

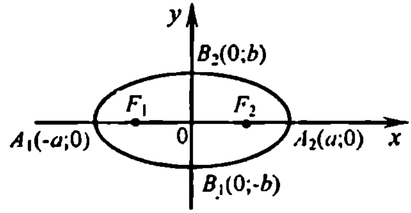
ანუ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1.3}$$

(1.3) განტოლებას ელიფსის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

დავადგინოთ ელიფსის ფორმა მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით. რადგან (1.3) განტოლება x და y ცვლადებს შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხებში, ამიტომ ელიფსი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ. ამის გამო საკმარისია დავადგინოთ ელიფსის ფორმა საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში. რადგან პირველ მეოთხედში $x\geq0$ და $y\geq0$, ამიტომ (1.3) განტოლებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ ელიფსის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, წარმოადგენს

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{1.4}$$



ნახ. 5.2

ფუნქციის გრაფიკს, როცა $0 \le x \le a$. (1.4) განტოლებიდან ჩანს, რომ x-ის 0-დან a-მდე ზრდისას, y მცირდება b-დან 0-მდე. მაშასადამე ელიფსის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, წარმოადგენს რკალს ბოლოებით $B_2(0;b)$ და $A_2(a;0)$ წერტილებში (ნახ. 5.2). თუ გაეითვალისწინებთ ელიფსის სიმეტრიულობას, დაეასკვენით, რომ ელიფსს აქვს 5.2 ნახაზზე გამოსახული ფორმა.

საკოორდინატო ღერძებთან ელიფსის გადაკვეთის წერტილებს ელიფსის წვეროები ეწოდება. ელიფსის სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს, რომ მისი წვეროებია $A_1(-a;0)$, $B_1(0;-b)$, $A_2(a;0)$ და $B_2(0;b)$ (ნახ. 5.2).

A_1A_2 და B_1B_2 მონაკვეთებს, აგრეთვე მათ $2a$ და $2b$ სიგრძეებს ($a>b$), ეწოდება ელიფსის დიდ და მცირე ღერძები, ხოლო a და b რიცხვებს კი დიდი და მცირე ნახევარღერძები. ღერძების გადაკვეთის წერტილს ელიფსის ცენტრი ეწოდება.

განვიხილოთ ელიფსის ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელი. ე. წ. ექსცენტრისიტეტი. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება ფოკუსებს შორის მანძილის ფარდობას დიდ ღერძთან და აღინიშნება e ასოთი. ე. ი.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

რადგან $c<a$, ამიტომ $e<1$. ექსცენტრისიტეტი ახასიათებს ელიფსის ფორმას. მართლაც

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right)^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-e^2$$

აქედან ჩანს, რომ რაც უფრო მცირეა ექსცენტრისიტეტი, მით უფრო ნაკლებად განსხვავდება ერთისაგან ელიფსის ნახევარღერძების ფარდობა, ე. ი. მით უფრო ახლოსაა ელიფსის ფორმა წრეწირის ფორმასთან. ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $b=a$ ($e=0$) ფოკუსები ერთმანეთს ემთხვევა და მიიღება a რადიუსიანი

წრეწირი $x^2+y^2=a^2$. პირიქით, რაც უფრო მცირედ განსხვავდება ექსცენტრისიტეტი ერთისაგან, ფარდობა $\dfrac{b}{a}$ მით უფრო მცირედ განსხვავდება ნულისაგან და მით უფრო გაჭიმულია ელიფსი დიდი ღერძის გასწვრივ.

ახლა გამოვიყვანოთ ელიფსის პარამეტრული განტოლებები. განვიხილოთ a რადიუსიანი წრეწირი, რომლის ცენტრი ემთხვევა (1.3) ელიფსის ცენტრს (ნახ. 5.3). ავიღოთ ამ ელიფსზე მდებარე ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილი. M წერტილზე გავავლოთ Oy ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც წრეწირს გადაკვეთს P წერტილში, ხოლო Ox ღერძს N წერტილში.

აღვნიშნოთ t-თი P წერტილის პოლარული კუთხე ($0\le t<2\pi$). გამოვსახოთ M წერტილის დეკარტის x და y კოორდინატები t-ს საშუალებით. ცხადია x არის აგრეთვე P წერტილის აბსცისა. თუ გავიხსენებთ კავშირს დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის, გვექნება

$$x=a\cdot\cos t. \tag{1.5}$$

ელიფსის (1.3) განტოლებიდან გვაქვს

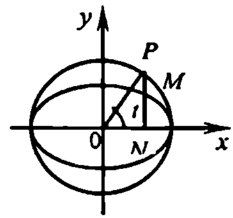
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right).$$

ამ ტოლობაში შევიტანოთ x-ის მნიშვნელობა (1.5)-დან, მივიღებთ

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-a^2\cdot\cos^2 t\right)=b^2\sin^2 t$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sin t$ და y-ს აქვთ ერთიდაიგივე ნიშანი, გვექნება

$$y=b\sin t.$$



ნახ. 5.3

ამრიგად, ელიფსის ნებისმიერი $M(x;y)$ წერტილისათვის გვაქვს

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad (0\le t\le 2\pi). \tag{1.6}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი t-სათვის (1.6) ტოლობებით განსაზღვრული წერტილი ძევს (1.3) ელიფსზე.

(1.6)-ს ეწოდება ელიფსის პარამეტრული განტოლებები.

შევნიშნოთ, რომ თუ $b>a$, მაშინ (1.3) განტოლება განსაზღვრავს ელიფსს, რომლის ფოკუსები მდებარეობს Oy ღერძზე, სათავის სიმეტრიულად და რომლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი უდრის $2b$-ს.

ამოცანა. შევადგინოთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია, რომ:

1) მისი მცირე ღერძია 6, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილია 8;

2) ფოკუსებს შორის მანძილია 12, ხოლო ექსცენტრისიტეტია $\frac{3}{5}$;

3) $M\left(4;\sqrt{3}\right)$ ელიფსის წერტილია და მისი დიდი ღერძია 16.

ამოხსნა. 1) პირობით $2b=6$, $2c=8$. ე. ი. $b=3$, $c=4$. ტოლობიდან $a^2-c^2=b^2$, გვაქვს $a^2=b^2+c^2=9+16=25$. ე. ი. $a=5$.

საძებნი განტოლებაა $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2) პირობით $2c=12$, $e=\frac{3}{5}$. ვინაიდან $e=\frac{c}{a}$, ამიტომ $\frac{3}{5}=\frac{6}{a}$ ანუ $a=10$.

ტოლობიდან $a^2-c^2=b^2$, $b^2=100\text{-}36=64$.

ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

3) პირობით $2a=16$. ე.ი. $a=8$, ამიტომ საძებნ განტოლებას აქვს სახე $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

ვინაიდან $M\left(4;\sqrt{3}\right)$ წერტილი მდებარეობს ელიფსზე, ამიტომ $\frac{16}{64}+\frac{3}{b^2}=1$ აქედან $b^2=4$. ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1$.

§2. ჰიპერბოლა

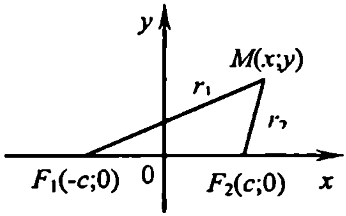
განსაზღვრება **2.1.** ჰიპერბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ, ფოკუსებად წოდებულ, წერტილამდე მანძილების სხვაობის მოდული ერთიდაიგივე მუდმივი სიდიდეა*.

აღვნიშნოთ ფოკუსები F_1 და F_2-ით. ვთქვათ ფოკუსებს შორის მანძილია $2c$, ხოლო ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფო-

* იგულისხმება, რომ ეს მუდმივი სიდიდე ნაკლებია ფოკუსებს შორის მანძილზე

კუსებამდე მანძილების სხვაობის მოდული უდრის $2a$-ს (განსაზღვრებით $2a<2c$).

შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი გადიოდეს ფოკუსებზე და მიმართული იყოს F_1-დან F_2-საკენ. კოორდინატთა სათავედ ავიღოთ F_1F_2 მონაკვეთის შუაწერტილი (ნახ. 5.4). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1(-c;0)$ და $F_2(c;0)$.



ნახ. 5.4

ვთქვათ $M(x;y)$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილია. აღვნიშნოთ r_1 და r_2-ით მანძილები M წერტილიდან ფოკუსებამდე $r_1=|F_1M|$, $r_2=|F_2M|$. ამ რიცხვებს M წერტილის ფოკალური რადიუსები ეწოდება.

განსაზღვრების ძალით

$$|r_1-r_2|=2a.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ამიტომ

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a. \tag{2.1}$$

(2.1) არის ჰიპერბოლის განტოლება.

ჰიპერბოლის განტოლება (2.1) სახით პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოუხერხებელია. ამიტომ, ისევე, როგორც ელიფსის შემთხვევაში, მარტივი გარდაქმნებით ის დაიყვანება მის ტოლფას განტოლებამდე

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.2}$$

სადაც $b=\sqrt{c^2-a^2}$

(2.2) განტოლებას ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

დავადგინოთ ჰიპერბოლის ფორმა მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით. რადგან (2.2) განტოლება x და y ცვლადებს შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხებში, ამიტომ ჰიპერბოლა სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ. ამის გამო საკმარისია დავადგინოთ ჰიპერბოლის ფორმა საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში. რადგან პირველ მეოთხედში $x \geq 0$ და $y \geq 0$, ამიტომ (2.2) განტოლებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ ჰიპერბოლის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში წარმოადგენს

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{2.3}$$

ფუნქციის გრაფიკს, როცა $x \geq a$. (2.3) განტოლებიდან ჩანს, რომ x-ის ზრდისას a-დან $+\infty$-მდე, y იზრდება 0-დან $+\infty$-მდე, ე. ი. როდესაც x მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, მაშინ ჰიპერბოლის $M(x;y)$ წერტილი მიისწრაფვის ∞-საკენ*.

ვაჩვენოთ, რომ M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ ისე, რომ იგი უსაზღვროდ უახლოვდება

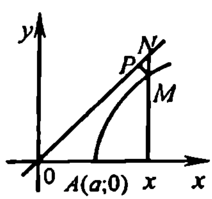
$$y = \frac{b}{a}x \tag{2.4}$$

წრფეს.

ავიღოთ ნებისმიერი $x \geq a$ და განვიხილოთ ორი წერტილი $M(x;y)$ და $N(x;y')$, სადაც

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad y' = \frac{b}{a}x\,.$$

ცხადია, რომ M წერტილი ძევს ჰიპერბოლაზე, ხოლო N წერტილი (2.4) წრფეზე. შევნიშნოთ, რომ



ნახ.5.5

* წერტილი მიისწრაფვის ∞-საკენ ნიშნავს, რომ მისი ერთი მაინც კოორდინატი მიისწრაფვის ∞-სკენ.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\frac{b}{a}x=y'$$

ეს ნიშნავს, რომ პირველ მეოთხედში ჰიპერბოლის ყოველი წერტილი ძევს (2.4) წრფის შესაბამისი წერტილის ქვემოთ. გამოვთვალოთ MN მონაკვეთის სიგრძე:

$$|MN|=y'-y=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2+a^2}}.$$

აქედან ჩანს, რომ როცა x მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ, მაშინ $|MN|$ მიისწრაფვის 0-საკენ და M წერტილიდან (2.4) წრფემდე MP მანძილი (ნახ. 5.5) მითუმეტეს მიისწრაფვის ნულისაკენ.

ამრიგად, როცა M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ ის უსაზღვროდ უახლოვდება $y=\frac{b}{a}x$ წრფეს.

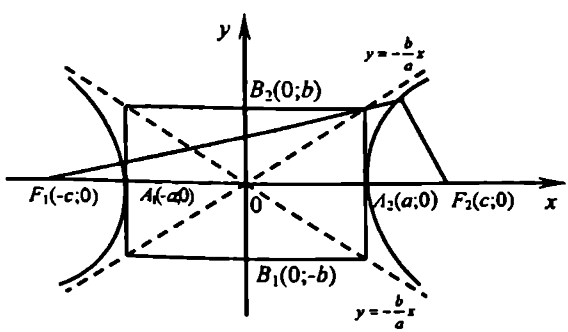
ანალოგიური თვისება გააჩნია ჰიპერბოლის სხვა ნაწილებსაც. სახელდობრ, ჰიპერბოლის მესამე მეოთხედში მოთავსებული ნაწილი უახლოვდება იმავე (2.4) წრფეს, ხოლო მეორე და მეოთხე მეოთხედებში მოთავსებული ნაწილები კი

$$y=-\frac{b}{a}x \tag{2.5}$$

წრფეს.

(2.4) და (2.5) წრფეებს უწოდებენ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს.

ცხადია, რომ ასიმპტოტები წარმოადგენენ Ox და Oy ღერძების მიმართ სიმეტრიული იმ მართკუთხედის დიაგონალების შემცველ წრფეებს, რომლის გვერდების სიგრძეებია შესაბამისად $2a$ და $2b$.



ნახ. 5.6

თუ გავითვალისწინებთ ჰიპერბოლის სიმეტრიულობას, დავასკვნით, რომ ჰიპერბოლას აქვს 5.6-ე ნახაზზე გამოსახული ფორმა.

ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ სიმეტრიის Oy ღერძი ჰიპერბოლას არ კვეთს, ხოლო სიმეტრიის Ox ღერძი ჰიპერბოლას კვეთს $A_1(-a;0)$ და $A_2(a;0)$ წერტილებში. ამ წერტილებს ჰიპერბოლის წვეროები ეწოდება. სიმეტრიის ღერძების გადაკვეთის წერტილს ჰიპერბოლის ცენტრი ეწოდება.

A_1A_2 მონაკვეთს და აგრეთვე მის $2a$ სიგრძეს ეწოდება ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძი, ხოლო $B_1(0;-b)$ და $B_2(0;b)$ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს და აგრეთვე მის $2b$ სიგრძეს ეწოდება ჰიპერბოლის წარმოსახვითი ღერძი. a და b რიცხვებს შესაბამისად ჰიპერბოლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძები ეწოდება.

განვიხილოთ ჰიპერბოლის ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელი ე. წ. ექსცენტრისიტეტი. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება ფოკუსებს შორის მანძილის ფარდობას ნამდვილ ღერძთან და აღინიშნება e ასოთი. ე. ი.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

რადგან $c>a$, ამიტომ $e>1$. გარდა ამისა

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}\right)^2=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=e^2-1.$$

აქედან ჩანს, რომ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების კუთხური კოეფიციენტები განისაზღვრება ექსცენტრისიტეტით. მაშასადამე, ჰიპერბოლის ფორმა გარკვეულად ხასიათდება ექსცენტრისიტეტით.

ჰიპერბოლას, რომლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ღერძები ტოლია, ე. ი. $a=b$, ტოლფერდა ჰიპერბოლა ეწოდება. ტოლფერდა ჰიპერბოლის კანონიკურ განტოლებას აქვს სახე

$$x^2-y^2=a^2.$$

მისი ასიმპტოტების განტოლებებია $y=x$ და $y=-x$. მაშასადამე, ასიმპტოტები წარმოადგენენ საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებს. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ არის ჰიპერბოლა, რომლის ფოკუსები მდებარეობს Oy ღერძზე სათავის სიმეტრიულად, ნამდვილი ნახევარღერძია b, ხოლო წარმოსახვითი ნახევარღერძია a.

***ამოცანა* 1.** შევადგინოთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია:

1) ფოკუსებს შორის მანძილია $10\sqrt{2}$, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x$.

2) $M\left(6;-4\sqrt{3}\right)$ და $N\left(-3\sqrt{3};4\sqrt{2}\right)$ ჰიპერბოლის წერტილებია.

ამოხსნა. 1) პირობით $2c=10\sqrt{2}$, $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, ანუ $c=5\sqrt{2}$, $b=\frac{3}{4}a$. ვინაიდან $a^2=c^2-b^2$, გვაქვს $a^2+\frac{9}{16}a^2=50$. აქედან $a^2=32$ და $b^2=18$.

ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$.

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს M და N წერტილების კოორდინატები. ამიტომ $\begin{cases}\frac{36}{a^2}-\frac{48}{b^2}=1\\ \frac{27}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1\end{cases}$ აქედან $a^2=9$, $b^2=16$.

ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

***ამოცანა* 2.** შევადგინოთ $M(4;-2)$ წერტილზე გამავალი იმ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობს Ox ღერძზე.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლებაა $x^2-y^2=a^2$.

ვინაიდან $M(4;-2)$ წერტილი მდებარეობს ჰიპერბოლაზე, ამიტომ $16-4=a^2$. ე. ი. $a^2=12$.

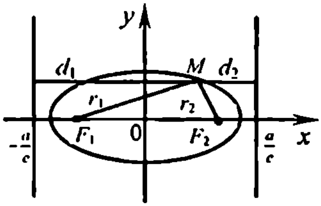
ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $x^2-y^2=12$.

§3. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები

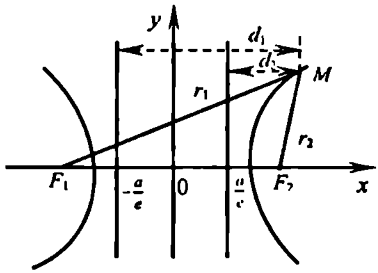
ვთქვათ ელიფსი მოცემულია კანონიკური სახის განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

სადაც $a>b$.



ნახ. 5.7



ნახ. 5.8

წრფეებს $x=\frac{a}{e}$ და $x=-\frac{a}{e}$ ეწოდება შესაბამისად ელიფსის მარჯვენა და მარცხენა დირექტრისები. რადგან ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $e<1$, ამიტომ დირექტრისები ელიფსს არ კვეთს (ნახ. 5.7)

მტკიცდება, რომ ელიფსის ყოველი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა ამ ელიფსის ექსცენტრისიტეტის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=e.$$

ახლა განვიხილოთ ჰიპერბოლა, რომლის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

წრფეებს $x=\frac{a}{e}$ და $x=-\frac{a}{e}$ ეწოდება ჰიპერბოლის შესაბამისად მარჯვენა და მარცხენა დირექტრისები. რადგან ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e>1$, ამიტომ დირექტრისები ჰიპერბოლას არ კვეთს (ნახ. 5.8).

მტკიცდება, რომ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა ამ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=e.$$

ელიფსისა და ჰიპერბოლის ზემოთ მოყვანილი თვისება შეიძლება მივიღოთ ამ წირების განსაზღვრებად.

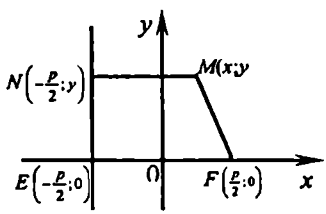
სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლის ყოველი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა ერთიდაიგივე e მუდმივია, არის ელიფსი, როცა $e<1$ და ჰიპერბოლა, როცა $e>1$.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რას წარმოადგენს სიბრტყის წერტილთა ანალოგიურად განსაზღვრული სიმრავლე, როცა $e=1$. როგორც შემდეგ პარაგრაფში ვნახავთ, ასეთ წერტილთა სიმრავლე არის მეორე რიგის წირი, რომელსაც პარაბოლა ეწოდება.

§4. პარაბოლა

***განსაზღვრება* 4.1.** პარაბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან მანძილები მოცემულ წერტილამდე, ე.წ. ფოკუსამდე და მოცემულ წრფემდე, ე. წ. დირექტრისამდე, ერთმანეთის ტოლია*.

აღვნიშნოთ ფოკუსი F-ით, ხოლო მანძილი ფოკუსიდან დირექტრისამდე p-თი (p-ს პარამეტრი ეწოდება). შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი გადიოდეს F ფოკუსზე დირექტრისის მართობულად და მიმართული იყოს დირექტრისიდან ფოკუსისაკენ. კოორდინატთა სათავედ ავიღოთ ფოკუსიდან დირექტრისაზე დაშვებული პერპენდიკულარის შუაწერტილი (ნახ. 5.9). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსის კოორდინატებია $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x=-\frac{p}{2}$.



ნახ. 5.9

* იგულისხმება, რომ დირექტრისა არ გადის ფოკუსზე.

ვთქვათ $M(x,y)$ პარაბოლის ნებისმიერი წერტილია. აღვნიშნოთ r და d-თი მანძილები M წერტილიდან შესაბამისად ფოკუსამდე და დირექტრისამდე: $r=|MF|$, $d=|MN|$. განსაზღვრების ძალით $r=d$.

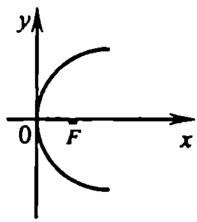
ცხადია, რომ თუ წერტილი ეკუთვნის პარაბოლას, მაშინ მისი აბსცისა არაუარყოფითია (წინააღმდეგ შემთხვევაში $r>d$). ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\,,\qquad d=x+\frac{p}{2}\,.$$

მაშასადამე

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}\,. \tag{4.1}$$

(4.1) არის პარაბოლის განტოლება. ტოლობის ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანით მივიღეთ



ნახ.5.10

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}\,.$$

ანუ

$$y^2=2px. \tag{4.2}$$

მტკიცდება, რომ (4.2) განტოლება (4.1) განტოლების ტოლფასია. (4.2) განტოლებას პარაბოლის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

დავადგინოთ პარაბოლის ფორმა მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით. რადგან (4.2) განტოლება y ცვლადს შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხში, ამიტომ პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ. ამის გამო საკმარისია დავადგინოთ პარაბოლის ფორმა საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში. ვინაიდან პირველ მეოთხედში $y\geq 0$, ამიტომ (4.2) განტოლებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ პარაბოლის ის ნაწილი, რომელიც

მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, წარმოადგენს $y=\sqrt{2px}$ ფუნქციის გრაფიკს. თუ გავითვალისწინებთ პარაბოლის სიმეტრიულობას, დავასკვნით, რომ პარაბოლას აქვს 5.10-ე ნახაზზე გამოსახული ფორმა.

სიმეტრიის Ox ღერძს პარაბოლის ღერძი ეწოდება. სიმეტრიის ღერძთან პარაბოლის გადაკვეთის წერტილს, პარაბოლის წვერო ეწოდება.

პარაბოლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე მისი ექსცენტრისიტეტი

$$e=\frac{r}{d}=1\,.$$

შევნიშნოთ, რომ განტოლება $x^2=2py$ განსაზღვრავს პარაბოლას, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და სიმეტრიის ღერძია Oy.

ამოცანა. შევადგინოთ პარაბოლის განტოლება, თუ:

1) პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ და დირექტრისის განტოლებაა $x+8=0$;

2) ფოკუსი მდებარეობს Oy ღერძზე და გადის $A(1;9)$ წერტილზე.

ამოხსნა. 1) $y^2=2px$ პარაბოლის დირექტრისის განტოლებაა $x+\frac{p}{2}=0$, ამიტომ $\frac{p}{2}=8$, ე. ი. $p=16$.

ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $y^2=32x$.

2) პარაბოლის განტოლებაა $x^2=2py$. ვინაიდან ის გადის $A(1;9)$ წერტილზე, გვაქვს $1=18p$, ანუ $p=\frac{1}{18}$.

ამრიგად, საძებნი განტოლებაა $x^2=\frac{1}{9}y$.

§5. მეორე რიგის წირები, როგორც კონუსური კვეთები

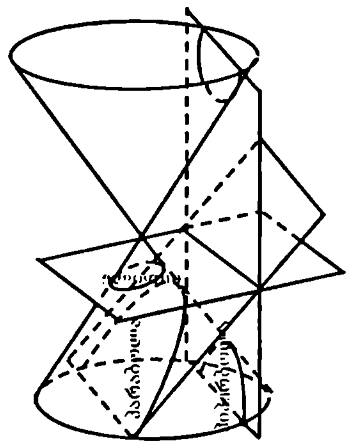
წრიული კონუსი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც მიიღება წრფის წრიული ბრუნვით მისი თანამკვეთი წრფის (ბრუნვის ღერძი) გარშემო. მბრუნავ წრფეს მის ნებისმიერ მდებარეობაში კონუსის მსახველი ეწოდება, ბრუნვის ღერძს – კონუსის ღერძი, ხოლო წრფეთა თანაკვეთის (უძრავ) წერტილს – კონუსის წვე-

რო. კონუსი მისი წვეროთი იყოფა ორ ნაწილად, რომელთაც კონუსის კალთები ეწოდება.

მტკიცდება, რომ წრეწირი, ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა წარმოადგენენ წრიული კონუსისა და იმ სიბრტყეების გადაკვეთის წირებს, რომლებიც არ გადიან კონუსის წვეროზე. ამის გამო ამ წირებს უწოდებენ კონუსურ კვეთებს.

თუ მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის პერპენდიკულარულია, მაშინ კვეთაში მიიღება წრეწირი.

თუ მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის პერპენდიკულარული არ არის, ჰკვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას და არ არის პარალელური არცერთი მსახველისა, მაშინ კვეთაში მიიღება ელიფსი.



ნახ. 5.11

თუ მკვეთი სიბრტყე პარალელურია კონუსის რომელიმე მსახველისა და ჰკვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას, მაშინ კვეთაში მიიღება პარაბოლა.

თუ სიბრტყე ჰკვეთს კონუსის ორივე კალთას, მაშინ კვეთაში მიიღება ჰიპერბოლა (ნახ. 5.11).

მეორე რიგის წირებს ფართო გამოყენება აქვთ მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებში. მოვიყვანოთ ზოგიერთი მაგალითი.

1) ცნობილია, რომ მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის ტრაექტორიები წარმოადგენენ ელიფსებს ერთი საერთო ფოკუსით, რომელშიც მოთავსებულია მზე.

2) თუ სინათლის წყაროს მოვათავსებთ პარაბოლის ფოკუსში, მაშინ სინათლის სხივები პარაბოლიდან აირეკლებიან პარაბოლის ღერძის პარალელურად. ამ თვისებაზეა დამყარებული პროექტორის მუშაობის პრინციპი.

3) მექანიკიდან ცნობილია, რომ დედამიწის ზედაპირიდან ჰორიზონტისადმი რაიმე კუთხით გაშვებული რაკეტა, რომლის საწყისი სიჩქარე $v_0=11{,}2$ კმ/წმ (II კოსმოსური სიჩქარე) იმოძრავებს რა პარაბოლაზე, უსასრულოდ დაშორდება დედამიწის ზედაპირს. თუ v_0 საწყისი სიჩქარე მეტია 11,2 კმ/წმ-ზე, რაკეტა კვლავ უსასრულოდ შორდება დედამიწის ზედაპირს ისე, რომ მისი მოძრაობის ტრაექტორია იქნება ჰიპერბოლა. თუ v_0 საწყისი სიჩქარე ნაკლებია 11,2 კმ/წმ-ზე, მაშინ რაკეტა იმოძრავებს ან

ელიფსზე, ან დაეცემა დედამიწის ზედაპირზე, ან გადაიქცევა მის ხელოვნურ თანამგზავრად.

§6. მეორე რიგის ზედაპირები

განვიხილოთ სამუცნობიანი მეორე რიგის ზოგადი სახის განტოლება

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+$$
$$+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \qquad (6.1)$$

სადაც a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13} და a_{23} რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას, მეორე რიგის ზედაპირი ეწოდება. შესაძლებელია, რომ სივრცეში არ არსებობდეს არცერთი წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებდეს (6.1) განტოლებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (6.1) განტოლება განსაზღვრავს მეორე რიგის წარმოსახვით ზედაპირს. წარმოსახვით ზედაპირებს ჩვენ არ შევისწავლით. ზოგჯერ (6.1) განტოლება განსაზღვრავს პარალელური ან თანხვედენილი სიბრტყეების წყვილს, გადამკვეთ სიბრტყეთა წყვილს, წრფეს, ან ერთადერთ წერტილსაც კი, მაგრამ მაშინაც ამ სიმრავლეებს მეორე რიგის ზედაპირებს უწოდებენ.

IV თავის §1-ში მიღებული იყო სფეროს განტოლება

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

ეს განტოლება მეორე ხარისხისაა x, y და z ცვლადების მიმართ. ამიტომ, სფერო წარმოადგენს მეორე რიგის ზედაპირს.

(6.1) განტოლება განსაზღვრავს სხვადასხვა სახის ზედაპირებს, რომელთა კანონიკური განტოლებები მიიღება (6.1) განტოლებიდან გარკვეული წრფივი გარდაქმნებით. განვიხილოთ ეს ზედაპირები.

1. ელიფსოიდი. მისი კანონიკური განტოლებაა

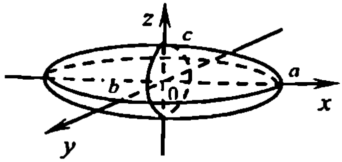
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0). \qquad (6.2)$$

კერძოდ, როცა $a=b=c=r$, მაშინ (6.2) განტოლება მიიღებს სახეს $x^2+y^2+z^2=r^2$, რომელიც წარმოადგენს r-რადიუსიანი სფეროს განტოლებას ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

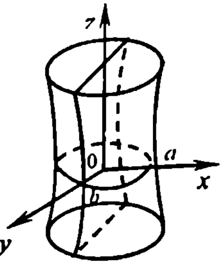
a, b, c რიცხვებს ელიფსოიდის ნახევარღერძები ეწოდება. (6.2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ელიფსოიდი შემოსაზღვრული ზედაპირია;

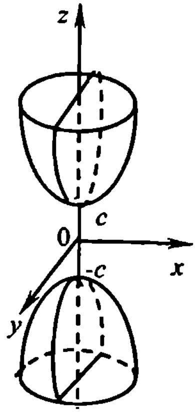
2) ელიფსოიდი საკოორდინატო ღერძებს კვეთს წერტილებში



ნახ. 5.12



ნახ. 5.13



ნახ. 5.14

$$A_1(-a;0;0),\ A_2(a;0;0),\ B_1(0;-b;0),$$
$$B_2(0;b;0),\ C_1(0;0;-c),\ C_2(0;0;c),$$

რომლებსაც ელიფსოიდის წვეროები ეწოდება.

3) ელიფსოიდი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ელიფსოიდს აქვს 5.12-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

2. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

2) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი აბსცისთა ღერძს კვეთს $A_1(-a;0;0)$, $A_2(a;0;0)$ წერტილებში, ორდინატთა ღერძს – $B_1(0;-b;0)$, $B_2(0;b;0)$ წერტილებში, ხოლო აპლიკატთა ღერძთან საერთო წერტილები არ გააჩნია. A_1, A_2, B_1, B_2 წერტილებს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წვეროები ეწოდება.

3) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის სახე მოცემულია 5.13-ე ნახაზზე.

3. ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,\ b,\ c>0).$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

2) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი აპლიკატთა ღერძს კვეთს $C_1(0;0;-c)$ და $C_2(0;0;c)$ წერტილებში, რომელთაც ორკალთა ჰიპერბოლოიდის წვეროები ეწოდება. ორდინატთა და აბსცისთა ღერძებთან ორკალთა ჰიპერბოლოიდს საერთო წერტილები არ გააჩნია;

3) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ორკალთა ჰიპერბოლოიდს აქვს 5.14-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

4. ელიფსური პარაბოლოიდი. მისი კანონიკური განტოლებაა

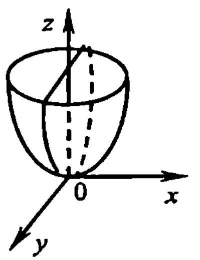
$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p, q>0). \tag{6.3}$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

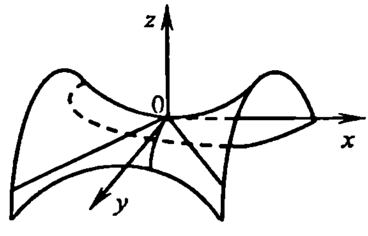
1) ელიფსური პარაბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია და რადგანაც $p, q>0$, ამიტომ ეს ზედაპირი მდებარეობს $z\geq 0$ ნახევარსივრცეში;

2) ელიფსური პარაბოლოიდი აპლიკატთა ღერძს კვეთს (0;0;0) წერტილში, რომელსაც ელიფსური პარაბოლოიდის წვერო ეწოდება და ამ წერტილში ეხება Oxy საკოორდინატო სიბრტყეს;

3) ელიფსური პარაბოლოიდი სიმეტრიულია Oxz და Oyz საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.



ნახ. 5.15



ნახ. 5.16

ელიფსურ პარაბოლოიდს აქვს 5.15-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

კერძოდ, როცა $p=q$, მაშინ (6.3) ზედაპირი არის ბრუნვითი ზედაპირი, რომელიც მიიღება $x^2=2pz$ პარაბოლის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო. მას ბრუნვითი პარაბოლოიდი ეწოდება.

5. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p, q>0).$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

2) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი გადის კოორდინატთა სათავეზე;

3) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი სიმეტრიულია Oxz და Oyz საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს აქვს 5.16-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

6. მეორე რიგის კონუსი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a, b, c>0).$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) მეორე რიგის კონუსი შემოუსაზღვრელი ზედაპირია;

2) მეორე რიგის კონუსი გადის კოორდინატთა სათავეზე;

3) მეორე რიგის კონუსი სიმეტრიულია საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

მეორე რიგის კონუსს აქვს 5.17-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

7. მეორე რიგის ცილინდრული ზედაპირები. ზედაპირს, რომელიც შექმნილია ურთიერთპარალელური წრფეებით, რომლებიც გავლებულია რაიმე წირის ყველა წერტილზე, ცილინდრული ზედაპირი ეწოდება. ამ წრფეებს ცილინდრული ზედაპირის მსახველები ეწოდება, ხოლო აღებულ წირს – მიმმართველი წირი. თუ მსახველი Oz ღერძის პარალელურია, მაშინ ცილინდრული ზედაპირის განტოლებას აქვს სახე

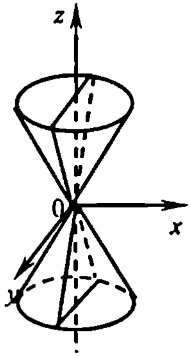
$$f(x,y)=0.$$

Oxy სიბრტყეზე ეს განტოლება წარმოადგენს მიმმართველი წირის განტოლებას.

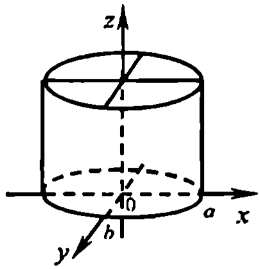
ა) ელიფსური ცილინდრი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a, b>0).$$

და აქვს 5.18-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 5.17



ნახ. 5.18

ბ) ჰიპერბოლური ცილინდრი. მისი კანონიკური განტოლებაა

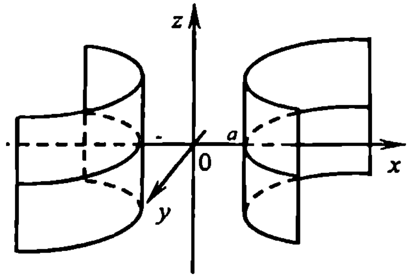
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a, b>0).$$

და აქვს 5.19-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

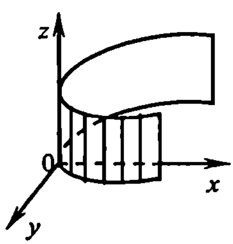
გ) პარაბოლური ცილინდრი. მისი კანონიკური განტოლებაა

$$y^2=2px \ (p>0)$$

და აქვს 5.20-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 5.19



ნახ.

დ) ცილინდრულ ზედაპირებს შეიძლება მივაკუთნოთ აგრეთვე:

1) ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეთა წყვილი

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \ (a, \ b>0).$$

2) ურთიერთპარალელურ ან თანხვედენილ სიბრტყეთა წყვილი

$$x^2-a^2=0 \ (a>0) \text{ და } z^2=0.$$

3) წრფე

$$x^2+y^2=0.$$

ვ. წერტილი.

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

VI თავი

მიმდევრობები

§1. მიმდევრობის ცნება

თუ რაიმე წესით ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება x_n ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

x_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, x_2-ს– მიმდევრობის მეორე წევრი და ა. შ. x_n–ს მიმდევრობის n–ური ან ზოგადი წევრი ეწოდება. მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრია x_n, მოკლედ $\{x_n\}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.*

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც $x_n=x_m$, $n\neq m$ ეს რიცხვები ითვლებიან მიმდევრობის განსხვავებულ წევრებად.

მიმდევრობის მოცემის ბუნებრივი წესია ანალიზური წესი, რომელიც გვიჩვენებს თუ რა მოქმედებები უნდა ჩავატაროთ n-ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის x_n წევრი.

მიმდევრობა აგრეთვე შეიძლება მოცემული იყოს რეკურენტული დამოკიდებულებით. ეს წესი იმაში მდგომარეობს, რომ მიმდევრობის ყოველი წევრი, რამოდენიმე საწყისი წევრის გარდა, რომლებიც თავიდანვეა მოცემული, მიიღება მის წინ მდგომ წევრებზე გარკვეული მოქმედებების ჩატარებით. განვიხილოთ მიმდევრობის რამოდენიმე მაგალითი.

1. მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $x_n=\dfrac{1}{n}$, არის შემდეგი მიმდევრობა

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

2. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ მისი ზოგადი წევრია $x_n=\dfrac{n}{n+1}$. ცხადია, რომ

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=\frac{3}{4}, \dots$$

---

* ზოგჯერ გამოვიყენებთ გამოთქმას "x_n მიმდევრობა".

3. $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ტოლობა განსაზღვრავს შემდეგ მიმდევრობას:

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{(-1)^n}{n},\dots .$$

4. თუ $x_n=\cos n\pi$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$.

5. თუ $x_n=n^2$, მაშინ $x_1=1, x_2=4, x_3=9,\dots$

6. თუ $x_n=-(2n-1)$, მაშინ $x_1=-1, x_2=-3, x_3=-5,\dots$

7. თუ $x_n=(-1)^n n^2$, მაშინ $x_1=-1, x_2=4, x_3=-9,\dots$

8. თუ მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით $x_n=aq^{n-1}$ ($a\neq 0, q\neq 0$), მაშინ

$$x_1=a, x_2=aq, x_3=aq^2,\dots,.$$

ამ მიმდევრობას გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

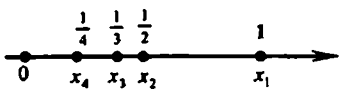
9. ვთქვათ $a_1=3$ და $a_{n+1}=a_n+2$; ცხადია, რომ

$$a_2=5, a_3=7, a_4=9,\dots .$$

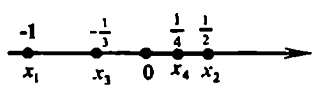
ეს მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით.

თუ $x_n=a$, $\forall n\in N$, მაშინ მიმდევრობას ეწოდება მუდმივი მიმდევრობა.

გეომეტრიულად მიმდევრობა რიცხვით წრფეზე გამოისახება წერტილთა მიმდევრობის სახით, რომელთა კოორდინატები ტოლია მიმდევრობის შესაბამისი ელემენტების. 6.1 და 6.2 ნახაზებზე გამოსახულია შესაბამისად $x_n=\frac{1}{n}$ და $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ მიმდევრობები.



ნახ. 6.1



ნახ. 6.2

განსაზღვრება 1.1. რიცხვთა $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომელიც მიმდევრობის ყველა წევრზე მეტია, ხოლო ქვემოდან შემოსაზღვრული — თუ მოიძებნება ისეთი L რიცხვი, რომელიც ნაკლებია მოცემული მიმდევრობის ყოველ წევრზე.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში 1, 2, 3, 4 მიმდევრობები შემოსაზღვრულია. მე-5 მაგალითი შემოსაზღვრულია ქვემოდან, 6 შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო

7 არ არის შემოსაზღვრული არც ზემოდან და არც ქვემოდან. მე-8 მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, თუ $|q|\leq 1$. მე-8 მიმდევრობა ქვემოდან (ზემოდან) შემოსაზღვრულია, თუ $a>0$ ($a<0$) და $q>1$. თუ $q<-1$, მაშინ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული.

განსაზღვრება **1.2.** x_n მიმდევრობას ეწოდება არაკლებადი, თუ $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq\cdots$ და არაზრდადი, თუ $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq\cdots$.

განსაზღვრება **1.3.** x_n მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ და კლებადი, თუ $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$.

თუ მიმდევრობა არაზრდადია ან არაკლებადი მას მონოტონური ეწოდება.

ცხადია, რომ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში 1, 2, 5 და 6, 8 (თუ $q>0$) და 9 მონოტონური მიმდევრობებია, ხოლო 3, 4 და 8 (თუ $q<0$) მიმდევრობები არ არიან მონოტონური.

§2. მიმდევრობის ზღვარი

განსაზღვრება **2.1.** a რიცხვს ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი (ε-ზე დამოკიდებული) რიცხვი $n_0=n_0(\varepsilon)$, რომ ყოველი ნატურალური $n>n_0(\varepsilon)$–ისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

ის ფაქტი, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი a რიცხვია, ასე ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,,$$

ან შემოკლებით $\lim x_n=a$, ან კიდევ $x_n\to a$.

ზღვრის განსაზღვრება ლოგიკური სიმბოლოების გამოყენებით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon)\in R)(\forall n>n_0(\varepsilon)):|x_n-a|<\varepsilon.$$

(2.1) უტოლობა ტოლფასია შემდეგი

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

ორმაგი უტოლობის, რაც ნიშნავს იმას, რომ x_n ეკუთვნის a წერტილის ε მიდამოს, ე. ი. $x_n\in u(a,\varepsilon)$.

ამრიგად, ის ფაქტი, რომ a რიცხვი არის $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ a რიცხვის ნებისმიერ ε მიდამოში მოთავსებულია $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა სასრული რაოდენობა წევრებისა.

მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი გააჩნია, ეწოდება კრებადი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობას განშლადი ეწოდება.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $x_n=a$, $\forall n\in N$, მაშინ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. ე. ი. მუდმივი მიმდევრობის ზღვარი თვით ამ მუდმივის ტოლია.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

ამოხსნა. ვთქვათ $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია. განვიხილოთ უტოლობა $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. აქედან $\frac{1}{n}<\varepsilon$ ანუ $n>\frac{1}{\varepsilon}$. მაშასადამე, თუ ავიღებთ $n_0(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$, მაშინ $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ უტოლობა შესრულდება ყოველი n–ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n_0>n_0(\varepsilon)$, ე. ი. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

მაგალითი 2. თუ $|q|<1$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \tag{2.2}$$

მართლაც, თუ $q=0$ (2.2) ცხადია. ვთქვათ, $0<|q|<1$, მაშინ

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon. \tag{2.3}$$

ამ უტოლობიდან გვაქვს

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon.$$

საიდანაც

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}=n_0(\varepsilon),$$

ე. ი. თუ $n>n_0(\varepsilon)$, ადგილი აქვს (2.3) უტოლობას.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ $\{(-1)^n\}$ მიმდევრობა განშლადია.

მოცემულ მიმდევრობას აქვს სახე

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\dots,\ (-1)^n,\dots$$

დავუშვათ, რომ ამ მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი. განვიხილოთ a რიცხვის $\left]a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right[$ მიდამო, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია. ამ მიდამოში ერთდროულად ვერ მოხვდება –1 და 1 რიცხვები (მოცემული მიმდევრობის წევრები), რადგან მათ შორის მანძილი 2-ის ტოლია. ამრიგად, როგორიც არ უნდა იყოს n რიცხვი, აღებული მიდამოს გარეთ დარჩება მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობა, ე. ი. მიმდევრობა განშლადია.

მაგალითი 4. ვთქვათ დადებითი a რიცხვი წარმოდგენილია უსასრულო ათწილადით:

$$a=a_0,\ a_1a_2\dots a_n\dots$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n.$$

ცხადია, რომ ყოველი $n \in N$-სათვის x_n რაციონალური რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a . \tag{2.4}$$

მართლაც

$$|a - x_n| = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n-ჯერ} a_{n+1} a_{n+2} \ldots \leq 10^{-n}.$$

აქედან ჩანს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი, $10^{-n} < \varepsilon$, თუ $n > n_0 = -\lg\varepsilon$. ე. ი. მართებულია (2.4) ტოლობა.

ანალოგიური მსჯელობა ჩატარდება, თუ $a<0$.

ამრიგად, ყოველი ნამდვილი რიცხვი წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყოველ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს ერთი მაინც რაციონალური რიცხვი. ამ თვისების გამო ამბობენ, რომ რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში.

§3. ზოგიერთი თეორემა მიმდევრობის ზღვრის შესახებ

***თეორემა* 3.1.** თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a და b რიცხვებისაკენ, მაშინ ზღვრის განსაზღვრების თანახმად ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n_0' და n_0'' რიცხვები, რომ

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.1}$$

როდესაც $n > n_0'$ და

$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.2}$$

როცა $n > n_0''$. ცხადია, რომ თუ $n > \max\{n_0', n_0''\}$, მაშინ (3.1) და (3.2) უტოლობებს ერთდროულად ექნებათ ადგილი. ამიტომ, თუ $n > \max\{n_0', n_0''\}$, მივიღებთ:

$$|a-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

მივიღეთ, რომ არაუარყოფითი $|a-b|$ რიცხვი ნაკლებია ნების-მიერ $\varepsilon>0$ რიცხვზე. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდე-საც $|a-b|=0$. ე. ი. $a=b$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა **3.2.** თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღ-ვრულია.

დამტკიცება. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ, მა-შინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლებელია მათი სასრული რაოდენობისა, მოხვდება a წერტილის ε მიდამოში. ამრიგად, $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ ინტერვალის გარეთ შეიძლება აღმოჩნდეს მიმდევრობის წევრთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა. ამიტომ არსებობს ორი m და M რიცხვი, ისეთი, რომ $[m;M]$ მონაკვეთი მიმდევრობის ყველა წევრს შეიცავს. ე. ი. ყოველი $n\in N$-ისათვის, $m\leq x_n\leq M$, რაც ნიშნავს, რომ $\{x_n\}$ მიმდევ-რობა შემოსაზღვრულია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა წარმოადგენს მიმ-დევრობის კრებადობის აუცილებელ პირობას. შევნიშნოთ, რომ, მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა არ არის მიმდევრობის კრება-დობის საკმარისი პირობა. მაგალითად, $\{(-1)^n\}$ მიმდევრობა შემო-საზღვრულია, მაგრამ როგორც ზემოთ ვნახეთ, ის არ არის კრებადი.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ შემდეგი

თეორემა **3.3.** თუ $\lim x_n=a$ და $\lim y_n=b$, მაშინ:

1) $\lim(x_n+y_n)=a+b$, 2) $\lim x_ny_n=ab$,

3) $\lim\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$, თუ $y_n\neq0$ $(n\in N)$ და $b\neq0$.

შედეგი **1.** მუდმივი მამრავლი შეიძლება ზღვრის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ. ე. ი. თუ $\{x_n\}$ კრებადი მიმდევრობაა, მაშინ:

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n)=c\cdot\lim_{n\to\infty}x_n.$$

შედეგი **2.** თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ კრებადი მიმდევრობებია, მაშინ:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n.$$

თეორემა **3.4.** თუ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.4-ის შებრუნებული საზოგადოდ სამართლიანი არ არის. მართლაც, თუ $x_n=(-1)^n$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$, მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ არ არსებობს.

თეორემა 3.5. თუ $x_n \le z_n \le y_n$ და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-2n}{5n+1}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5-2n}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}-2}{5+\frac{1}{n}}=\frac{0-2}{5+0}=-\frac{2}{5}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-2n^2+5}{3n^3+2n^2-1}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n-2n^2+5}{3n^3+2n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n^2}-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0-0+0}{3+0-0}=0.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)(1-n)(2n+5)}{(6n-2)(5-2n)(2n+3)}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(1-n)(2n+5)}{(6n-2)(5-2n)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)}{\left(6-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n}-2\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\frac{(3+0)(0-1)(2+0)}{(6-0)(0-2)(2+0)}=\frac{1}{4}.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

§4. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები

***განსაზღვრება* 4.1.** $\{\alpha_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა ან უსასრულოდ მცირე, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია.

§1-ის მაგალითებში 1, 3 და 8 (თუ $|q|<1$) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია.

***განსაზღვრება* 4.2.** $\{\beta_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი, თუ $\forall M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n_0 რიცხვი, რომ ყოველი $n>n_0$-ისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\beta_n>M$ ($\beta_n<-M$).

ის ფაქტი, რომ $\{\beta_n\}$ დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდია, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=+\infty \quad (\lim_{n\to\infty}\beta_n=-\infty) \text{ ან } \beta_n\to+\infty \quad (\beta_n\to-\infty).$$

თუ $\lim_{n\to\infty}\beta_n=+\infty$ ($\lim_{n\to\infty}\beta_n=-\infty$) ამბობენ, რომ $\{\beta_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ.

§1-ის 5 მიმდევრობა არის დადებითი უსასრულოდ დიდი, ხოლო 6 კი უარყოფითი უსასრულოდ დიდი.

შენიშვნა. $\{x_n\}$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$, უწოდებენ უსასრულოდ დიდს და წერენ $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$.

მიმდევრობა შეიძლება იყოს უსასრულოდ დიდი, მაგრამ არ წარმოადგენდეს არც დადებით უსასრულოდ დიდსა და არც უარყოფით უსასრულოდ დიდ მიმდევრობას. ასეთია მაგალითად §1-ის 7 მიმდევრობა.

ცხადია, რომ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული, მაგრამ საზოგადოდ ყოველი არაშემოსაზღვრული მიმდევრობა უსასრულოდ დიდი არ არის. მაგალითად $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4},\dots, n, \frac{1}{n+1},\dots$ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული, მაგრამ იგი უსასრულოდ დიდ მიმდევრობას არ წარმოადგენს.

თუ $\{x_n\}$ უსასრულო დიდი მიმდევრობაა, მაშინ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ უსასრულოდ მცირეა და პირიქით.

§5. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი

თეორემა 5.1. მონოტონური შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

თეორემა მონოტონური მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ ასეც შეგვეიძლია ჩამოვაყალიბოთ: იმისათვის, რომ მონოტონური მიმდევრობა იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს შემოსაზღვრული (აუცილებლობა გამომდინარეობს თეორემა 3.2-დან).

ცხადია, რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა არ არის მონოტონური. მაგალითად $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\ldots$ მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ, მაგრამ არ არის მონოტონური.

1. *e* რიცხვი. განვიხილოთ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ მიმდევრობა.

მტკიცდება, რომ x_n მიმდევრობა ზრდადია და შემოსაზღვრული, ამასთან $2\le x_n<3$, ამიტომ თეორემა 5.1-ის ძალით იგი კრებადია. ამ მიმდევრობის ზღვარი e ასოთი აღინიშნება. ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

აგრეთვე მტკიცდება, რომ e ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა $e\approx2{,}718281$.

მათემატიკის ზოგიერთი საკითხის განხილვისას მოხერხებულია ვისარგებლოთ ლოგარითმებით, რომელთა ფუძე e რიცხვია. a რიცხვის ლოგარითმს e ფუძით ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება და $\ln a$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{5n-1}$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+1}\right)^{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{2n+1}\cdot(5n-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-10n+2}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-10+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}}=e^{-5}$$

2. ვთქვათ $x_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$, $|q|<1$. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1-q}$.

გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$x_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

რადგან $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, როცა $|q|<1$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}.$$

§6. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა:

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

ცხადია $n_k > k$.

მიმდევრობას

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ყოველი მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს უსასრულო სიმრავლე ქვემიმდევრობებისა.

ზღვრის (უსასრულოდ დიდის) განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა **6.1.** თუ მიმდევრობა კრებადია (დადებითი უსასრულოდ დიდია, უარყოფითი უსასრულოდ დიდია), მაშინ მისი ყოველი ქვემიმდევრობა აგრეთვე კრებადია (დადებითი უსასრულოდ დიდია, უარყოფითი უსასრულოდ დიდია) იმავე ზღვრისაკენ.

შედეგი **1.** თუ მიმდევრობის ყველა ქვემიმდევრობა კრებადია, მაშინ ყველა ისინი კრებადია ერთი და იმავე ზღვრისაკენ (ამავე ზღვრისაკენ იკრიბება მოცემული მიმდევრობაც).

მართლაც, თვით მოცემული მიმდევრობა (როგორც ერთ-ერთი ქვემიმდევრობა) კრებადია რაღაც ზღვრისაკენ, ამიტომ თეორემა 6.1-ის ძალით მისი ნებისმიერი ქვემიმდევრობაც კრებადი იქნება იმავე ზღვრისაკენ.

შედეგი 2. თუ მიმდევრობის ერთი მაინც ქვემიმდევრობა განშლადია, მაშინ მოცემული მიმდევრობაც განშლადია.

შედეგი 3. თუ მიმდევრობის ორი მაინც ქვემიმდევრობა კრებადია სხვადასხვა ზღვრისაკენ, მაშინ მოცემული მიმდევრობა განშლადია.

როგორც ვიცით, ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა. თუმცა მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6.2 (ბოლცანო-ვაიერშტრასი). ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

VII თავი

ფუნქცია და მისი ზღვარი

§1. ფუნქცია. განსაზღვრის არე. მნიშვნელობათა სიმრავლე. შექცეული ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ მოცემულია ორი სიმრავლე X და Y. მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა სახის შესაბამისობა, რომლებსაც აღნიშნავენ $f, g, h,\ldots$ ასოებით.

განსაზღვრება 1.1. X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება, ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციის ჩასაწერად, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას X და Y სიმრავლეებს შორის რაიმე f წესით, მიღებულია აღნიშვნები:

$$X \xrightarrow{f} Y, \text{ ან } f\colon X \to Y, \text{ ან } y=f(x), \text{ სადაც } x\in X,\ y\in Y.$$

x-ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს ანუ არგუმენტს, ხოლო $f(x)$-ს ფუნქციის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის x მნიშვნელობას. შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ აგრეთვე გამოთქმებით: "f ფუნქცია", "$f(x)$ ფუნქცია", ან "y ფუნქცია".

X სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება და $D(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამებიან, f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ან ცვლილების არე ეწოდება და $E(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

f ფუნქციას, რომლისთვისაც $D(f)=X$, ხოლო $E(f)\subset Y$ უწოდებენ აგრეთვე X სიმრავლის ასახვას Y სიმრავლეში. კერძოდ, თუ $E(f)=Y$, მაშინ ვიტყვით, რომ f არის X სიმრავლის ასახვა Y-ზე.

ვთქვათ, მოცემულია f ფუნქცია, რომელიც X სიმრავლეს ასახავს Y სიმრავლეზე. თუ ამ ფუნქციის შექცეული g შესაბამისობა წარმოადგენს ფუნქციას, მაშინ f-ს ეწოდება შექცევადი, ხოლო g-ს მისი შექცეული ფუნქცია და იგი f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

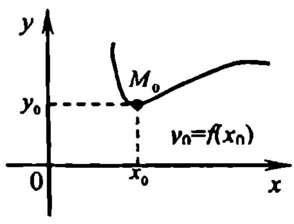
f^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არეა $E(f)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $D(f)$ ე. ი. $D(f^{-1})=E(f)$ და $E(f^{-1})=D(f)$. f-ს და f^{-1}-ს ურთიერთშექცეულ ფუნქციებს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ შექცევადია მხოლოდ ის ფუნქცია, რომელიც თავის ყოველ მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ ერთხელ.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება. ე. ი. რიცხვითი ფუნქცია არის R სიმრავლის რაიმე D ქვესიმრავლის ასახვა R სიმრავლის მეორე E ქვესიმრავლეზე, სადაც D წარმოადგენს ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ხოლო E მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

შემდგომში ჩვენ მხოლოდ რიცხვით ფუნქციებს განვიხილავთ, თუ არ იქნა სპეციალური მითითება.

***განსაზღვრება* 1.2.** f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება xOy სიბრტყის ყველა იმ $(x;y)$ წერტილთა A სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y=f(x)$, სადაც $x\in D(f)$ (ნახ. 7.1). ე. ი. $A=\{(x;y): x\in D(f),\ y=f(x)\}$.

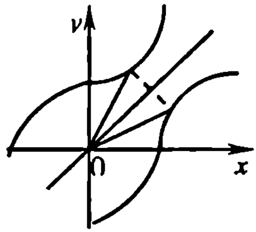


ნახ. 7.1

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია შექცევადია, მაშინ $x=f^{-1}(y)$. მიღებულია, რომ f და f^{-1} ფუნქციების არგუმენტად ერთი და იგივე ცვლადი ვიგულისხმოთ და ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ჩაიწერება $y=f^{-1}(x)$ სახით. ცხადია, რომ $f[f^{-1}(x)]=x$ და

$f^{-1}[f(x)]=x$. ამასთან, იმისათვის, რომ f ფუნქცია იყოს თავისთავის შექცეული, აუცილებელია, რომ $D(f)=E(f)$.

თეორემა **1.1.** ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელსაც პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისები შეადგენენ (ნახ. 7.2).



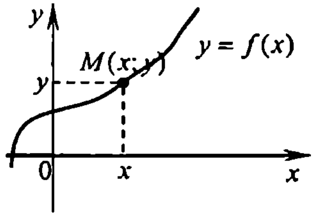
ნახ. 7.2

§2. ფუნქციის მოცემის ხერხები

განსაზღვრის თანახმად ფუნქცია ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია ფუნქციის განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. ამასთან, ამ წესის მოცემის ხერხი შეზღუდული არ არის. განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის სამი ყველაზე უფრო გავრცელებული ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

ცხრილური ხერხი. ბუნების მოვლენათა შესწავლის დროს ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ცვლადებთან, რომელთა შორის არსებულ დამოკიდებულებას ადგენენ ცდის საფუძველზე. ასეთ შემთხვევაში ცდათა შედეგების მიხედვით ადგენენ ცხრილს, რომელშიც მოცემულია არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობები.

გრაფიკული ხერხი. ვთქვათ სიბრტყეზე აღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და ამ სისტემაში მოცემულია ისეთი $M(x;y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან არც ერთი ორი წერტილი არ ძევს Oy ღერძის პარალელურ ერთსადაიმავე წრფეზე. წერტილთა ასეთი სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლეა შესაბამისად მოცემულ წერტილთა სიმრავლის აბსცისთა და ორდინატთა სიმრავლეები. მართლაც, ნებისმიერ x რიცხვს განსაზღვრის არედან შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი, ისეთი რომ $M(x;y)$ წერტილი მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნის (ნახ. 7.3).



ნახ. 7.3

ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს გრაფიკული ხერხი ეწოდება.

ანალიზური ხერხი. უმეტეს შემთხვევაში ფუნქცია მოცემულია ფორმულის საშუალებით, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა ჩავატაროთ არგუმენტზე, რომ მივიღოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. ასეთ ფორმულას ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება ეწოდება, ხოლო ხერხს – ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი.

თუ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით და არ არის მითითებული განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

1. $y=x^2+1$ ფორმულით მოცემულია ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[1;+\infty[$ შუალედი.

2. $y=\sqrt{16-x^2}$ ფორმულა განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა $[-4;4]$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $[0;4]$ შუალედი.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია განსაზღვრის არის სხვადასხვა უბანზე შეიძლება სხვადასხვა ფორმულით იყოს მოცემული, მაგალითად ფუნქცია

$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & \text{თუ} \quad x>0,\\ 0, & \text{თუ} \quad x=0,\\ -1, & \text{თუ} \quad x<0,\end{cases}$$

მოცემულია ანალიზური წესით მთელ რიცხვთა ღერძზე. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება სამი რიცხვისაგან:-1, 0 და 1.

ასევე, დირიხლეს ფუნქცია:

$$D(x)=\begin{cases}0, & x \text{ რაციონალურია},\\ 1, & x \text{ ირაციონალურია},\end{cases}$$

მოცემულია ანალიზური წესით მთელ რიცხვით ღერძზე და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება ორი რიცხვისაგან: 0 და 1.

უნდა აღინიშნოს, რომ დირიხლეს ფუნქციის გრაფიკის აგება შეუძლებელია.

ვთქვათ მოცემულია ფუნქციები $f:X\to Y$ და $g:Y\to Z$. ამ ფუნქციათა სუპერპოზიცია ან რთული ფუნქცია ეწოდება ისეთ $h:X\to Z$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$h(x)=g(f(x)),\ x\in X.$$

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ რთული ფუნქცია, რომელიც მიიღება რამოდენიმე ფუნქციის სუპერპოზიციით:

$$y=f_1(f_2(\dots f_n(x))\dots).$$

ვთქვათ მოცემულია t ცვლადის ორი ფუნქცია:

$$x=\varphi(t),\ y=g(t), \tag{2.1}$$

ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $x=\varphi(t)$ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია $t=\varphi^{-1}(x)$. ე. ი. y შეიძლება განვიხილოთ, როგორც x-ის რთული ფუნქცია:

$$y=g(\varphi^{-1}(x)).$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით (2.1) ფორმულების საშუალებით.

ახლა ვთქვათ x და y ცვლადები დაკავშირებულია ერთმანეთთან რაიმე განტოლებით, რომელიც სიმბოლურად ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$F(x,y)=0. \tag{2.2}$$

თუ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x,f(x))=0,\quad \forall x\in E,$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია (2.2) განტოლებით არაცხადი სახით.

ანალიზური სახით მოცემულ ფუნქციებს შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავთ ე. წ. ელემენტარულ ფუნქციებს. თავდაპირველად მოვიყვანოთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები. ასე უწოდებენ შემდეგ ფუნქციებს:

1. მუდმივი $y=C$, სადაც C ნამდვილი რიცხვია.
2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$).
3. ლოგარითმული ფუნქცია $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$).
4. ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^\alpha$, სადაც α ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია.
5. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$.
6. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$.

განსაზღვრება. ერთი ფორმულით, ცხადი სახით მოცემულ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

§9. ზრდადი და კლებადი, შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები

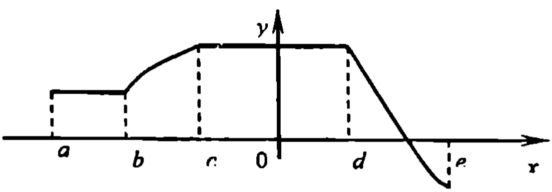
განსაზღვრება 9.1. f ფუნქციას ეწოდება არაკლებადი (არაზრდადი) რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა:

$$f(x_1)\le f(x_2) \quad (f(x_1)\ge f(x_2)).$$

განსაზღვრება 9.2. f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი (კლებადი) რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა:

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2))^{*}$$

7.7 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკით მოცემული ფუნქცია არაკლებადია $[a;d]$ სეგმენტზე, ზრდადია $[b;c]$-ზე, არაზრდადია $[c;d]$-ზე და კლებადია $[d;e]$-ზე.



ნახ. 7.7

განსაზღვრება 9.3. f ფუნქციას ეწოდება მონოტონური რაიმე სიმრავლეზე, თუ ის ამ სიმრავლეზე არის არაზრდადი ან არაკლებადია.

თუ ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი, მაშინ იგი თავის ყოველ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთხელ ღებულობს, ამიტომ იგი შექცევადია და მისი შექცეული ფუნქცია შესაბამისად ზრდადია ან კლებადი.

განსაზღვრება 9.4. f ფუნქციას ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი M რიც-

---

* ცხადია ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია არაკლებადია (არაზრდადია).

ხეი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$).

განსაზღვრება **3.5.** f ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე იგი შემოსაზღვრულია ზემოდან და ქვემოდან.

თუ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, მას ეწოდება შემოუსაზღვრავი ამ სიმრავლეზე.

მაგალითად, $y = \dfrac{1}{x}$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[1;2]$ სეგმენტზე და შემოუსაზღვრავია $]0;1]$-ზე.

განსაზღვრება **3.6.** თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია E სიმრავლეზე და არსებობს ამ სიმრავლის ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) ნებისმიერი x წერტილისათვის E-დან, მაშინ $f(x_0)$-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა E სიმრავლეზე და წერენ $f(x_0) = \max\limits_{E} f(x)$ ან $f(x_0) = \max f(x)$.

$$(f(x_0) = \min_{E} f(x) \text{ ან } f(x_0) = \min f(x)).$$

მაგალითად, $f(x)=x^2$ ფუნქციისათვის $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 4$. ფუნქციის უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას უწოდებენ აგრეთვე მის მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას. ფუნქციის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს უწოდებენ ექსტრემალურ მნიშვნელობებს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობები შეიძლება არ გააჩნდეს. მაგალითად $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქციას უმცირესი მნიშვნელობა არ გააჩნია.

განსაზღვრება **3.7.** E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი ეწოდება ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის ზუსტ ზედა (ქვედა) საზღვარს და აღინიშნება სიმბოლოთი $\sup\limits_{E} f(x)$ ან $\sup f(x)$, ($\inf\limits_{E} f(x)$ ან $\inf f(x)$).

პირველი თავის თეორემა 5.1-ის ძალით შემოსაზღვრულ ფუნქციას ყოველთვის გააჩნია ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები. ცხადია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში ღებულობს უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას, მაშინ $f(x_0) = \sup f(x)$ ($f(x_0) = \inf f(x)$).

ზემოთ განხილული $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქციისათვის $\inf f(x) = 0$.

§4. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციები

ვთქვათ, E რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა. ამ სიმრავლეს ეწოდება სიმეტრიული ნულის მიმართ, თუ $x \in E$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $-x \in E$. მაგალითად, $[-a;a]$, R, Z, Q ნულის მიმართ სიმეტრიული სიმრავლეებია.

***განსაზღვრება* 4.1.** f ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის

$$f(-x)=f(x).$$

მაგალითად, $y=x^2$ და $y=|x|$ ლუწი ფუნქციებია.

***განსაზღვრება* 4.2.** f ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის

$$f(-x)=-f(x).$$

მაგალითად, $y=x$ და $y=\operatorname{sign} x$ კენტი ფუნქციებია.

ცხადია, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია შეიძლება არც ლუწი იყოს და არც კენტი.

მაგალითად, $y=x^2+x$ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია სიმეტრიულ შუალედზე, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით. მართლაც,

$$f(x)=\varphi(x)+g(x),$$

სადაც

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ არის ლუწი ფუნქცია, ხოლო $g(x)$ — კენტი.

***განსაზღვრება* 4.3.** f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, პერიოდით $l \neq 0$, თუ ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის რიცხვები $x-l$ და $x+l$ აგრეთვე ეკუთვნის $D(f)$-ს და მართებულია ტოლობა:

$$f(x+l)=f(x).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ f ფუნქციის პერიოდი არის l და $x \in D(f)$, მაშინ

$$f(x)=f((x-l)+l)=f(x-l).$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$f(x+kl)=f(x), \text{ სადაც } k \in Z.$$

ამრიგად, ყოველ პერიოდულ ფუნქციას გააჩნია პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე. შემდგომში ფუნქციის პერიოდის ქვეშ ვიგულისხმებთ უმცირეს დადებით პერიოდს, თუ იგი არსებობს.

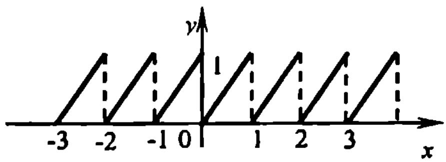
სასკოლო კურსიდან ცნობილია, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია. პერიოდული ფუნქციის მაგალითია აგრეთვე დირიხლეს ფუნქცია:

$$D(x)=\begin{cases}0, & x \text{ რაციონალურია,}\\ 1, & x \text{ ირაციონალურია}\end{cases}$$

და მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური r რიცხვი.

მართლაც, თუ x რაციონალურია, მაშინ $x+r$ აგრეთვე რაციონალურია, ხოლო, თუ x ირაციონალურია, მაშინ $x+r$ რიცხვიც ირაციონალურია. ამიტომ დირიხლეს ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x+r)=f(x)$, ე. ი. $f(x)$ პერიოდულია პერიოდით r. ამრიგად, დირიხლეს ფუნქცია არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც უმცირესი დადებითი პერიოდი არ გააჩნია.

ფუნქცია $y=x-[x]$, სადაც $[x]$ წარმოადგენს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს, ასევე წარმოადგენს პერიოდული ფუნქციის მაგალითს. მისი პერიოდია $l=1$ რიცხვი (ნახ. 7.8).



ნახ. 7.8

§5. ფუნქციის ზღვარი

***განსაზღვრება* 5.1.** A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია ε-ზე, ისეთი, რომ თუ $0<|x-x_0|<\delta$, მაშინ

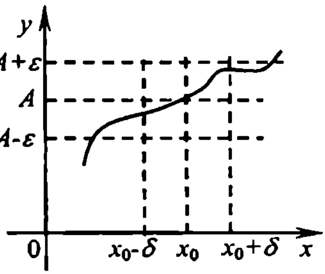
$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ A არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ ან } f(x)\to A\,(x\to x_0).$$

ფუნქციის ზღვრის ეს განსაზღვრება ეკუთვნის კოშს.

რადგან $|x-x_0|<\delta$ უტოლობა ტოლფასია $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ ორმაგი უტოლობისა, ამიტომ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრება შეიძლება შემდეგნაირადაც ჩამოყალიბდეს: A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ A რიცხვის ნებისმიერი ε მიდამოსათვის მოიძებნება x_0 წერტილის ისეთი δ მიდამო, რომ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება δ მიდამოს წერტილებს, გარდა შესაძლებელია x_0 წერტლისა, არ გამოვა $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ ზოლიდან (ნახ. 7.9).



ნახ. 7.9

ფუნქციის ზღვრის სხვაგვარი განსაზღვრება მიმდევრობის ზღვრის საშუალებით ჩამოაყალიბა ჰეინემ.

***განსაზღვრება* 6.2.** A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის ($x_n\neq x_0$), რომელიც კრებადია x_0-საკენ, $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

მტკიცდება, რომ ფუნქციის ზღვრის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

განვიხილოთ ზღვრის გამოთვლის მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ

$$f(x)=c, \text{ როცა } x\in[a;b], \quad x\neq x_0.$$

სადაც c რაიმე რიცხვია. x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$, ე. ი. მუდმივის ზღვარი იგივე მუდმივია.

მართლაც ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon, \text{ როცა } x\neq x_0.$$

მაშასადამე, ყოველი $\delta>0$ რიცხვისათვის

$$|f(x)-c|<\varepsilon, \text{ როცა } 0<|x-x_0|<\delta,$$

ე. ი. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

მაგალითი **2.** ვთქვათ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, გარდა $x=1$ წერტილისა. ვიპოვოთ $f(x)$-ის ზღვარი ამ წერტილში. ყოველი $x\neq 1$-სათვის $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, ამიტომ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1).$$

ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$. მართლაც, რადგან $|(x+1)-2|=|x-1|$, ამიტომ თუ $\varepsilon>0$-სათვის ავიღებთ $\delta=\varepsilon$, გვექნება:

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |(x+1)-2|<\varepsilon.$$

ე. ი. $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ და მაშასადამე:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

მაგალითი **3.** ვაჩვენოთ, რომ $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ფუნქციას $x_0=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მართლაც, თუ განვიხილავთ ნულისაკენ კრებად $x_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ მიმდევრობას, მაშინ

$$f(x_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n.$$

ამ მიმდევრობას კი ზღვარი არ გააჩნია.

განსაზღვრება **5.3.** ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ და ჩავწერთ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$), თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ როცა $x>M$ ($x<M$), მაშინ:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

თუ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, მაშინ ვიტყვით, რომ A არის $f(x)$-ის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ და დავწერთ:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ ან } f(x)\to A, \text{ როცა } x\to\infty.$$

განსაზღვრება 5.3-ის ეკვივალენტურია შემდეგი განსაზღვრება:

A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ, თუ ნებისმიერი $\{x_n\}$ დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობისათვის $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

***განსაზღვრება* 5.4.** A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა (მარცხენა) ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$, მაშინ $|f(x)-A|<\varepsilon$ და წერენ:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=A \quad \left(\lim_{x\to x_0-} f(x)=A\right).$$

ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრებს ფუნქციის ცალმხრივ ზღვრებს უწოდებენ. ხშირად $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრებს x_0 წერტილში აღნიშნავენ შესაბამისად $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ სიმბოლოთი.

ზღვრის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა:

***თეორემა* 5.1.** იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მას ამ წერტილში გააჩნდეს ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი ზღვრები.

ამ თეორემის საფუძველზე ვაჩვენოთ, რომ:

$$f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & \text{თუ} \quad x>0,\\ 0, & \text{თუ} \quad x=0,\\ -1, & \text{თუ} \quad x<0,\end{cases}$$

ფუნქციას $x_0=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მართლაც $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} 1=1$, ხოლო $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-1)=-1$.

ამრიგად $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x_0=0$ წერტილში ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, ამიტომ მას ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

§6. თეორემები ფუნქციის ზღვრის შესახებ

სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

***თეორემა* 6.1.** თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი გააჩნია, მაშინ ის ერთადერთია.

თეორემა 6.2. თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში*.

თეორემა 6.3. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ და $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, მაშინ:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))=A+B$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, თუ $B\neq 0$**

შედეგი 1. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ და $n\in N$, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n=A^n$.

შედეგი 2. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ არსებობს, მაშინ ყოველი ნამდვილი c რიცხვისათვის $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი შეგვიძლია გამოვიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ.

თეორემა 6.4. თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)\leq g(x)\leq \varphi(x)$ $(x\neq x_0)$ და $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=A$, მაშინ:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

თეორემა 6.5. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$.

შენიშვნა. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. მაგალითად, თუ:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ როცა } x \text{ რაციონალურია,}\\ -1, \text{ როცა } x \text{ ირაციონალურია,}\end{cases}$$

მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=1$ ნებისმიერი $x_0\in R$ რიცხვისათვის, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას არც ერთ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

თეორემა 6.6. თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)\geq 0$ და $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ $\forall n\in N$-სათვის

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{A}$$

---

* შეიძლება x_0 არ ეკუთვნოდეს ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

** ადვილია ჩვენება, რომ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც $g(x)\neq 0$.

§7. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები

განსაზღვრება 7.1. $\alpha(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე a წერტილში (როდესაც $x\to a$), თუ $\alpha(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ნულის ტოლია.

ანალოგიურად განისაზღვრება უსასრულოდ მცირე ფუნქციები, როდესაც $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a+$, $x\to a-$.

თეორემა 7.1. a წერტილში უსასრულოდ მცირე ფუნქციების ჯამი და ნამრავლი არის უსასრულოდ მცირე ფუნქცია a წერტილში.

თეორემა 7.2. a წერტილში უსასრულოდ მცირე ფუნქციისა და a წერტილის რაღაც მიდამოში შემოსაზღვრული ფუნქციის ნამრავლი არის უსასრულოდ მცირე a წერტილში.

განსაზღვრება 7.2. $\beta(x)$ ფუნქციას ეწოდება დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი ფუნქცია a წერტილში (როდესაც $x\to a$), თუ ნებისმიერი M რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ, როცა $0<|x-a|<\delta$, მაშინ $\beta(x)>M$ ($\beta(x)<M$) და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$\lim_{x\to a}\beta(x)=+\infty \quad (\lim_{x\to a}\beta(x)=-\infty).$$

განსაზღვრება 7.3. $\beta(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდი ფუნქცია a წერტილში, თუ $|\beta(x)|$ დადებითი უსასრულოდ დიდია და დავწერთ:

$$\lim_{x\to a}\beta(x)=\infty \text{ ან } \beta(x)\to\infty.$$

შევნიშნოთ, რომ a წერტილში დადებითი უსასრულოდ დიდი ან უარყოფითი უსასრულოდ დიდი ფუნქცია ამავე დროს არის უსასრულოდ დიდიც ამავე წერტილში. პირიქით კი საზოგადოდ მართებული არ არის. მაგალითად, $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია არის უსასრულოდ დიდი $a=0$ წერტილში, მაგრამ არ არის არც დადებითი და არც უარყოფითი უსასრულოდ დიდი ამ წერტილში.

ცალმხრივი ზღვრების განსაზღვრების ანალოგიურად განისაზღვრება უარყოფითი უსასრულოდ დიდი, დადებითი უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები, როცა $x\to a+$ და $x\to a-$.

თეორემა 7.3. თუ $\varphi(x)$ უსასრულოდ მცირეა a წერტილში ($\varphi(x)\neq0$, $x\neq a$), მაშინ $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ უსასრულოდ დიდია a წერტილში და პირიქით,

თუ $\varphi(x)$ უსასრულოდ დიდია a წერტილში, მაშინ $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ უსასრულოდ მცირეა a წერტილში.

§8. ორი შესანიშნავი ზღვარი

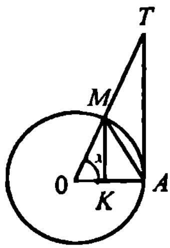
ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორ ზღვარს, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ მათემატიკურ ანალიზში.

1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 .$$

განვიხილოთ ერთეულრადიუსიანი წრეწირის ცენტრალური x კუთხე (ნახ. 7.10), რომლის რადიანული ზომა აკმაყოფილებს პირობას $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. რადგან $OA=1$, ამიტომ

$$\sin x=MK,\ \operatorname{tg} x=AT. \tag{8.1}$$



ნახ. 7.10

ცხადია, რომ OAM სამკუთხედის ფართობი ნაკლებია OAM სექტორის ფართობზე, რომელიც თავის მხრივ ნაკლებია OAT სამკუთხედის ფართობზე. ე. ი.

$$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot MK<\frac{1}{2}OA^2x<\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AT.$$

თუ გავითვალისწინებთ (8.1) ტოლობებს, უკანასკნელი თანაფარდობები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x. \tag{8.2}$$

თუ გავყოფთ ამ უტოლობებს $\sin x$-ზე, გვექნება $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, ანუ $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. აქედან ვღებულობთ

$0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x$. რადგან $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ და (8.2) უტოლობის ძალით $2\sin^2\dfrac{x}{2}<2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{2}$, ამიტომ

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}. \tag{8.3}$$

ამრიგად, თუ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, მართებულია (8.3) უტოლობები. მაგრამ რადგან $\dfrac{\sin x}{x}$ და $\dfrac{x^2}{2}$ ლუწი ფუნქციებია, (8.3) უტოლობები მართებული იქნება მაშინაც, როდესაც $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$. ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}=0$, ამიტომ (8.3)-დან თეორემა 6.4-ის ძალით

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0 \quad \text{ანუ} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

2. მტკიცდება, რომ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\,tg\,2x}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\,tg\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 x}{x\sin 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\cos 2x\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]=\frac{1}{2}.$$

***ამოცანა* 2.** გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{x+3}$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{\frac{-2(x+3)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x-6}{x}}=e^{-2}.$$

VIII თავი

უწყვეტი ფუნქციები

§1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში

***განსაზღვრება* 1.1.** $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1.1}$$

წერტილს, რომელშიც ფუნქცია უწყვეტია, ამ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი ეწოდება.

თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის ზღვრის კოშისა და ჰეინეს განსაზღვრებებს, ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრება შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ა) $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } |x-x_0|<\delta.$$

ბ) $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია x_0 რიცხვისაკენ, $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია $f(x_0)$ რიცხვისაკენ.

მოვიყვანოთ ფუნქციის უწყვეტობის კიდევ ერთი განსაზღვრება. (1.1) ტოლობაში $f(x_0)$ გადავიტანოთ მარცხენა ნაწილში და შევიტანოთ ზღვრის ნიშნის ქვეშ. რადგან $x\to x_0$ და $x-x_0\to 0$ პირობები ტოლფასია, მივიღებთ:

$$\lim_{x-x_0\to 0} [f(x)-f(x_0)]=0. \tag{1.2}$$

$x-x_0$ სხვაობას ეწოდება x არგუმენტის ნაზრდი x_0 წერტილში და Δx სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო $f(x)-f(x_0)$ სხვაობას არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში და Δy ან Δf სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. (1.2) ტოლობა ახალი აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y=0. \tag{1.3}$$

(1.3) ტოლობის საფუძველზე ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს: ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი რაიმე წერტილში, თუ ამ წერტილში არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ე. ი.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

რადგან $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, ამიტომ ეს ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

მაშასადამე, თუ ფუნქცია უწყვეტია, შეიძლება ზღვარზე გადასვლა "ფუნქციის ნიშნის" ქვეშ – არგუმენტში.

***განსაზღვრება* 1.2.** $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან (მარცხნიდან) უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)\right).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$f(x_0+)=f(x_0-)=f(x_0).$$

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ x_0 წერტილში. მართლაც

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|<2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|. \qquad (1.4)$$

როგორც VII თავის §8-ში ვაჩვენეთ, $|\sin x|<|x|$, როცა $0<|x|<\frac{\pi}{2}$. ამიტომ (1.4)-დან მივიღებთ

$$|\sin x-\sin x_0|<|x-x_0|.$$

აქედან ცხადია, რომ $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$, ე. ი. $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $y=\cos x$ ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty;+\infty[$ შუალედის ნებისმიერ წერტილში. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყველა ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავისი განსაზღვრის არის ნებისმიერ წერტილში.

***განსაზღვრება* 1.3.** $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $]a;b[$ ინტერვალში, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ყველა წერტილში, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a;b]$ სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია $]a;b[$ ინტერვალში და გარდა ამისა, a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, b წერტილში კი მარცხნიდან.

ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემების მართებულობა.

***თეორემა* 1.1.** რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

***თეორემა* 1.2.** თუ ფუნქცია უწყვეტია წერტილში, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ წერტილის რაიმე მიდამოში.

თეორემა **1.3.** თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და $f(x_0)\neq 0$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f(x_0)$-ს.

თეორემა **1.4.** თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

ამ თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს VII თავის თეორემა 6.5-დან.

თეორემა **1.5.** თუ $u=g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ხოლო $f(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $u_0=g(x_0)$ წერტილში, მაშინ რთული ფუნქცია $F(x)=f[g(x)]$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

თეორემა **1.6.** თუ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) და უწყვეტი $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია $x=f^{-1}(y)$, რომელიც აგრეთვე ზრდადია (კლებადია) და უწყვეტი თავის განსაზღვრის არეში.

თეორემა **1.7.** ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

§2. ფუნქციის წყვეტის წერტილები და მათი კლასიფიკაცია

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში (ცალმხრივ მიდამოში), გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

ა) x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის.

ბ) ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი (ცალმხრივი ზღვარი) არ გააჩნია.

გ) x_0 წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა განსხვავებულია x_0 წერტილში ფუნქციის ზღვრისაგან (ცალმხრივი ზღვრისაგან).

თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (წყვეტილია) x_0 წერტილში.

როგორც ვიცით, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი

$$f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0).$$

განსაზღვრება **2.1.** თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი და არსებობს ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0-)$ და $f(x_0+)$, მაშინ x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. მაგალითად,

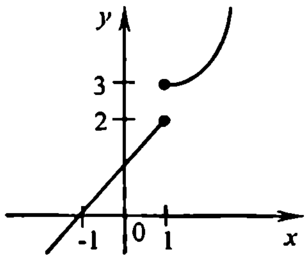
$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{როცა } x<1, \\ x^2+2, & \text{როცა } x\geq 1 \end{cases}$$

ფუნქციას $x=1$ წერტილში გააჩნია პირველი გვარის წყვეტა (ნახ. 8.1). მართლაც

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x+1)=2,$$

ხოლო

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+2)=3.$$



ნახ. 8.1

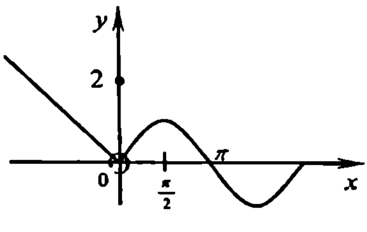
სხვაობას $f(x_0+)-f(x_0-)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში. განხილულ მაგალითში $f(1+)-f(1-)=3-2=1$.

თუ x_0 პირველი გვარის წყვეტის წერტილია და $f(x_0+)=f(x_0-)$, მაშინ x_0 წერტილს აცილებადი წყვეტის წერტილი ეწოდება.

მაგალითად,

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{როცა } x<0,\\ 2, & \text{როცა } x=0,\\ \sin x, & \text{როცა } x>0\end{cases}$$

ფუნქციისათვის, $x=0$ წერტილი არის აცილებადი წყვეტის წერტილი (ნახ. 8.2).



ნახ. 8.2

***განსაზღვრება* 2.2.** x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, თუ x_0 წერტილში ფუნქციას არ გააჩნია ერთი მაინც ცალმხრივი ზღვარი, ან ცალმხრივი ზღვრებიდან ერთი მაინც უსასრულოდ დიდია. მაგალითად,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{თუ } x>0,\\ x, & \text{თუ } x\le 0\end{cases}$$

ფუნქციას $x_0=0$ წერტილში მარჯვენა ზღვარი არ გააჩნია, ამიტომ ფუნქციისათვის $x_0=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, ხოლო

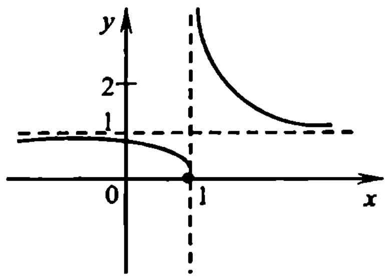
$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{როცა } x\ne 1,\\ 0, & \text{როცა } x=1\end{cases}$$

ფუნქციისათვის $x=1$ მეორე გვარის წყვეტის წერტილია (ნახ. 8.3). მართლაც

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=0,$$

ხოლო

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=+\infty.$$



ნახ. 8.3

§9. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები

ამ პარაგრაფში დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის ძირითად თვისებებს.

თეორემა 9.1 (ვაიერშტრასის პირველი თეორემა). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

შენიშვნა. თეორემაში არსებითია, რომ ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე. ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქციები საზოგადოდ არ არიან შემოსაზღვრული ამ ინტერვალზე. მაგალითად, $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია

უწყვეტია $]0;1[$ ინტერვალზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული მასზე.

ახლა, ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია შუალედში (ეს შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი, ინტერვალი, ნახევრად სეგმენტი).

თუ შუალედში არსებობს ისეთი ξ_1 წერტილი, რომ (იხ. VII თავი, §3)

$$f(\xi_1)=\sup_{x\in I} f(x),$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს შუალედზე თავის ზუსტ ზედა საზღვარს; ასევე, თუ შუალედში არსებობს ისეთი ξ_2 წერტილი, რომ

$$f(\xi_2)=\inf_{x\in I} f(x),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს შუალედზე.

თეორემა 3.2 (ვაიერშტრასის მეორე თეორემა). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია აღწევს ამ შუალედზე თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

შენიშვნა 1. სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის ზუსტი ზედა (ზუსტი ქვედა) საზღვარი, რადგანაც ის მიიღწევა, წარმოადგენს ამ ფუნქციის მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას. ამიტომ თეორემა 3.2 ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას ამ სეგმენტზე აქვს მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობანი.

$f(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობანი $[a;b]$ სეგმენტზე აღინიშნება შესაბამისად სიმბოლოებით:

$$\max_{a\le x\le b} f(x)=\max_{x\in[a;b]} f(x),$$

$$\min_{a\le x\le b} f(x)=\min_{x\in[a;b]} f(x).$$

შენიშვნა 2. ინტერვალზე ან ნახევრად სეგმენტზე უწყვეტმა ფუნქციამ შეიძლება ვერ მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა ან ზუსტ ქვედა საზღვარს. მართლაც $]0;1[$ ინტერვალზე ფუნქცია $f(x)=x$ ვერ მიაღწევს ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს ამ ინტერვალზე.

შენიშვნა 3. სეგმენტზე წყვეტილმა ფუნქციამ შეძლება მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს. მართლაც, დირიხლეს $D(x)$ ფუნქცია $[0;1]$-ზე აღწევს ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

შენიშვნა 4. შეიძლება ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს სეგმენტზე, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ

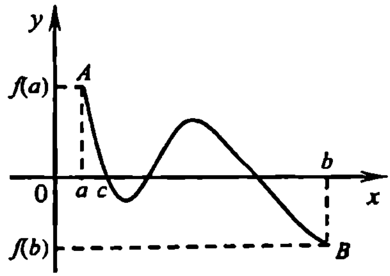
ქვედა საზღვრებს. მაგალითად ასეთია შემდეგი წყვეტილი ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{თუ } 0\le x<1,\\ 1-x, & \text{თუ } 1\le x<2,\\ x-2, & \text{თუ } 2\le x\le 3.\end{cases}$$

ცხადია $\sup\limits_{0\le x\le 3} f(x)=2$, $\inf\limits_{0\le x\le 3} f(x)=-1$, მაგრამ ისინი არ მიიღწევა.

თეორემა 8.3 (ბოლცანო). ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე. თუ $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც c წერტილი, ისეთი, რომ $f(c)=0$.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ უწყვეტი $y=f(x)$ წირის A და B წერტილები მდებარეობენ Ox ღერძის სხვადასხვა მხარეს, მაშინ ეს წირი გადაკვეთს Ox ღერძს ერთ წერტილში მაინც (ნახ. 8.4).



ნახ. 8.4

თეორემა 8.4 (კოში). თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და $f(a)\ne f(b)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის.

ცხადია, რომ ბოლცანოს თეორემა არის კოშის თეორემის კერძო შემთხვევა. კოშის თეორემას ხშირად უწოდებენ თეორემას შუალედური მნიშვნელობის შესახებ.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ უწყვეტ წირს ჰკვეთს $y=A$ და $y=B$ წრფეები, მაშინ მას ჰკვეთს ყოველი $y=C$ წრფე, რომელიც მდებარეობს მათ შორის.

შედეგი 1. თუ ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო შუალედზე და მუდმივი არ არის, მაშინ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე აგრეთვე წარმოადგენს შუალედს.

შედეგი 2. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტზე ღებულობს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია მის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის, ე. ი. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობათა არე სეგმენტია.

შენიშვნა. თეორემა 3.4 საზოგადოდ მართებული არ არის სეგმენტზე განსაზღვრული წყვეტილი ფუნქციისათვის. ამასთან შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის თვისება, მიიღოს შუალედური მნიშვნელობა, არ არის უწყვეტობის ეკვივალენტური. არსებობს წყვეტილი ფუნქცია რომელიც ღებულობს ყველა შუალედურ მნიშვნელობას. მართლაც, ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{თუ } x\neq 0,\\ 0, & \text{თუ } x=0\end{cases}$$

წყვეტილია $x=0$ წერტილში, მაგრამ ის ყოველ ინტერვალში, რომელიც შეიცავს ამ წერტილს, ღებულობს ყველა მნიშვნელობას -1-სა და 1-ს შორის.

განსაზღვრება 3.1. E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ε-ზე, ისეთი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x'-x''|<\delta$, მართებულია უტოლობა

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

თეორემა 3.5 (კანტორი). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

§4. ზოგიერთი ზღვრის გამოთვლა

1. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

რადგან $\log_a x$ ფუნქცია უწყვეტია $]0;+\infty[$ შუალედში, ამიტომ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e.$$

კერძოდ, როცა $a=e$, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

2. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a\neq 1,\ a>0).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $a^x-1=\alpha$. გვექნება $a^x=1+\alpha$ და მივიღებთ

$$x\ln a=\ln(1+\alpha),$$

აქედან

$$x=\frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}.$$

როდესაც $x\to 0$, მაშინ $\alpha\to 0$. ამიტომ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\ln a}{\ln(1+\alpha)}=\ln a\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}=\ln a.$$

კერძოდ, როცა $a=e$, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

3. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $(1+x)^\alpha=1+t$. მაშინ:

$$\alpha\ln(1+x)=\ln(1+t),$$

მაშასადამე

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

§6. უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შედარება. o და O სიმბოლოები

ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია a წერტილის (a შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო) რაიმე $u(a)$ მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა. ვიგულისხმოთ, რომ $u(a)$ მიდამოში $\beta(x)\neq 0$.

***განსაზღვრება* 6.1.** ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია a წერტილში. ვიტყვით, რომ:

1. $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ეკვივალენტური (ტოლფასი) უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია, თუ:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ და წერენ $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

ცხადია, რომ თუ $\alpha(x)\sim\beta(x)$, მაშინ $\beta(x)\sim\alpha(x)$, ხოლო თუ $\alpha(x)\sim\beta(x)$ და $\beta(x)\sim\gamma(x)$, მაშინ $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

2. $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \quad (A \text{ სასრულია}).$$

3. $\alpha(x)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\beta(x)$-თან შედარებით, ხოლო $\beta(x)$ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირესთან შედარებით, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

4. $\alpha(x)$ უსასრულო მცირე n რიგის უსასრულოდ მცირეა $\beta(x)$-თან შედარებით, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება უსასრულოდ მცირეთა შედარება, როცა $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, ამიტომ $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, როცა $x \to 0$.

მაგალითი 1. $\sin 3x$ და $\operatorname{tg} 2x$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to 0$.

მართლაც,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cos 2x\right) = \frac{3}{2}.$$

მაგალითი 2. $x^2\sin x$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $1-\cos 2x$-თან შედარებით.

მართლაც

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

მაგალითი 3. $1-\cos x$ ფუნქცია მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეა x-თან შედარებით.

მართლაც $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

ცვლადი სიდიდეების შედარებისას ხშირად გამოიყენება სიმ-
ბოლო "o" ("o" მცირე). თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, მაშინ ეს ასე ჩაიწერება:

$$\alpha(x)=o(\beta(x)),\quad x\to a.$$

(იკითხება: $\alpha(x)$ უდრის o მცირე $\beta(x)$).

კერძოდ ჩანაწერი $\alpha(x)=o(1)$, როცა $x\to a$ ნიშნავს, რომ $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირეა a წერტილში.

მაგალითად:

$$\sin^4 x=o(x^3)\quad x\to 0,$$
$$(x-a)^3=o((x-a)^2),\quad x\to a,$$
$$x^n=o(x^m),\quad x\to\infty \text{ თუ } m>n \text{ და } m,n\in N.$$

ადვილია შემოწმება, რომ თუ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია a წერტილში, მაშინ:

$$\alpha(x)\beta(x)=o(\alpha(x)) \text{ და } \alpha(x)\beta(x)=o(\beta(x)),\quad x\to a.$$

***თეორემა* 5.1.** ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლით მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე ფუნქციებით.

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია a წერტილში და $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ როცა $x\to a$. დავუშვათ, რომ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ არსებობს, ვაჩვენოთ, რომ მაშინ იარსებებს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ და

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

მართლაც

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა გამოიყენება ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შეფარდების ზღვრის გამოთვლის დროს.

***მაგალითი* 4.** გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x^2)}{\sin^2 x}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^2)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2}{x^2}=-3.$$

***მაგალითი* 5.** გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}}{x^3+3x^2}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x^3+3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2(x+3)}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(x+3)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{3}.$$

***მაგალითი* 6.** გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[5]{1+\sin x}}{x^2+2x}$.

ამოხსნა. რადგან $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$, ამიტომ გვაქვს

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{1+\sin x}}{x^2+2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{5}}-1}{x(x+2)}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(x+2)}=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=-0,1.$$

***შენიშვნა* 1.** ორი უსასრულოდ მცირე შეიძლება არ იყოს შედარებადი. მართლაც, ფუნქციები $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ და $\beta(x)=x$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to 0$, მაგრამ ზღვარი

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

არ არსებობს.

***შენიშვნა* 2.** თუ $\beta_1(x),\beta_2(x),\dots,\beta_n(x)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეებია a წერტილში $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირესთან შედარებით, მაშინ:

$$\sigma(x)=\alpha(x)+\beta_1(x)+\beta_2(x)+\dots+\beta_n(x)\sim\alpha(x).$$

მართლაც,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sigma(x)}{\alpha(x)}=1+\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\alpha(x)}+\lim_{x\to a}\frac{\beta_2(x)}{\alpha(x)}+\dots+\lim_{x\to a}\frac{\beta_n(x)}{\alpha(x)}=1.$$

ე. ი. $\sigma(x)\sim\alpha(x)$, როცა $x\to a$.

აქედან გამომდინარეობს პრაქტიკული წესი ზღვრულ ოპერაციებში უსასრულოდ მცირეთა ჯამის გამარტივების შესახებ. თუ მოცემულია უსასრულოდ მცირეთა ჯამი $\alpha(x)+\beta_1(x)+\beta_2(x)+\dots+\beta_n(x)$ რომლის შესაკრებთა რიცხვი სასრულია და თუ ამ ჯამის $\alpha(x)$

შესაკრები დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა დანარჩენ შესაკრებთა მიმართ, მაშინ ზღვრულ თანაფარდობათა განხილვისას შეგვიძლია უკუვაგდოთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები $\beta_1(x),\beta_2(x),\ldots,\beta_n(x)$. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე შესაკრები უნდა იყოს მხოლოდ ერთი.

***მაგალითი* 7.** ვთქვათ $\beta(x)=(1-\cos x)+3\sin x+4x^3-x^5$. ვაჩვენოთ, რომ $\beta(x)\sim 3\sin x$, როცა $x\to 0$.

მართლაც, რადგან $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\sin x\sim x$, ამიტომ $\beta(x)\sim 3\sin x$.

უსასრულოდ მცირეთა უკუგდების წესი გამოიყენება ორი უსასრულოდ მცირის შეფარდების ზღვრის გამოთვლის დროს.

***მაგალითი* 8.** გამოვთვალოთ ზღვარი:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3tgx+4\sin^3 x+x^5)}{\sin x+5tg^5x-7x^6}.$$

ცხადია, რომ როცა $x\to 0$.

$$\ln(1+3tgx+4\sin^3x+x^5)\sim 3tgx+4\sin^3x+x^5\sim 3tgx\sim 3x,$$

$$\sin x+5tg^5x-7x^6\sim\sin x\sim x,$$

ამრიგად,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3tgx+4\sin^3 x+x^5)}{\sin x+5tg^5x-7x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3}=3.$$

ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

***განსაზღვრება* 5.2.** თუ არსებობს ისეთი დადებითი მუდმივი C რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|\alpha(x)|\le C|\beta(x)|,$$

მაშინ ეს პირობითად ასე ჩაიწერება:

$$\alpha(x)=O(\beta(x))$$

და იკითხება: $\alpha(x)$ არის "O – დიდი" $\beta(x)$-ის მიმართ.

კერძოდ ჩანაწერი $\alpha(x)=O(1)$ ნიშნავს, რომ $\alpha(x)$ შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

ცხადია, რომ თუ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ერთიდაიმავე რიგის უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია, მაშინ $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

მაგალითები: 1) $\sin x=O(1)$, $]-\infty;+\infty[$-ზე;

2) $\sin x=O(x)$, $]-\infty;+\infty[$-ზე;

3) $\cos x=O(x)$, $]1;+\infty[$-ზე.

IX თავი

წარმოებული და დიფერენციალი

§1. ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო x წარმოადგენს ამ მიდამოს x_0-ისაგან განსხვავებულ წერტილს.

როგორც ვიცით, $x-x_0$ სხვაობას ეწოდება არგუმენტის ნაზრდი x_0 წერტილში და აღინიშნება Δx სიმბოლოთი, ე. ი. $\Delta x=x-x_0$, ხოლო $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ სხვაობას ეწოდება ფუნქციის ნაზრდი და აღინიშნება $\Delta f(x_0)$ ან Δy სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

***განსაზღვრება* 1.1.** f ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

x_0 წერტილში $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის აღსანიშნავად მიღებულია y' ან $f'(x_0)$ სიმბოლოები. ე. ი. თანახმად განსაზღვრებისა

$$y'=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

თუ (1.1) ზღვარი არსებობს, მაშინ f ფუნქციას x_0 წერტილში წარმოებადი ფუნქცია ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ, თუ (1.1) ზღვარი $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში უსასრულოა.

თუ (1.1) ტოლობაში $\Delta x\to 0$, ისე რომ Δx იღებს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, მაშინ შესაბამის ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული x_0 წერტილში და აღინიშნება $f'_+(x_0)$ სიმბოლოთი, ე. ი. განსაზღვრებით

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

ანალოგიურად, (1.1) ზღვარს როცა $\Delta x\to 0$, ისე რომ $\Delta x<0$, ეწოდება f ფუნქციის მარცხენა წარმოებული x_0 წერტილში და აღინიშნება $f'_-(x_0)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$f'_+(x_0)$ და $f'_-(x_0)$-ს ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები ეწოდება x_0 წერტილში.

ადვილი შესამჩნევია, რომ წერტილში ფუნქციის წარმოებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ წერტილში ფუნქციას გააჩნდეს ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი წარმოებულები.

ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება $]a;b[$ ინტერვალზე, თუ ის წარმოებადია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, ხოლო ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება $[a;b]$ სეგმენტზე, თუ ის წარმოებადია $]a;b[$ ინტერვალზე და a წერტილში წარმოებადია მარჯვნიდან, b-ში კი მარცხნიდან.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

***მაგალითი* 1.** ვთქვათ $y=C=const$. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. თანახმად წარმოებულის განსაზღვრებისა

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0\,.$$

ე. ი. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია.

***მაგალითი* 2.** გამოვთვალოთ $y=x$ ფუნქციის წარმოებული. თანახმად წარმოებულის განსაზღვრებისა:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\,.$$

ე. ი. $x'=1$.

***მაგალითი* 3.** გამოვთვალოთ $y=\sin x$ ფუნქციის წარმოებული. რადგან

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\,,$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\,.$$

მაშასადამე $(\sin x)'=\cos x$.

***მაგალითი* 4.** გამოვთვალოთ $y=\cos x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x .$$

ე. ი. $(\cos x)' = -\sin x$.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ $y=a^x$ ფუნქციის წარმოებული. რადგან

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

ამიტომ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} .$$

თუ გავითვალისწინებთ VIII თავის §4-ის მე-2 მაგალითს, მივიღებთ:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a .$$

მაშასადამე,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

ამ ტოლობიდან კერძოდ მივიღებთ:

$$(e^x)' = e^x.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ $y=\log_a x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

ამიტომ

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} .$$

ამ ტოლობიდან კერძოდ მიიღება

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} .$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ $y=x^\alpha$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \frac{x^\alpha\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{\Delta x} =$$

$$=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

აქედან, VIII თავის §4-ის მე-3 მაგალითის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(x^{\alpha})'=x^{\alpha-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

ე. ი.

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

ამ ფორმულის გამოყვანისას ცხადია იგულისხმებოდა, რომ x ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და $x\neq 0$. თუ $x=0$ მაშინ ამ წერტილის მიდამოში ფუნქციას აზრი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა α მაჩვენებელი ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვია, რომლის მნიშვნელი კენტია, ამასთან:

$$(x^{\alpha})'_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\alpha}}{\Delta x}=\begin{cases}0, & \text{როცა } \alpha>1,\\ 1, & \text{როცა } \alpha=1,\\ \infty, & \text{როცა } \alpha<1.\end{cases}$$

§2. კავშირი წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის

თეორემა 2.1. თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, მაშინ ის ამ წერტილში უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, მაშინ:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0\cdot f'(x_0)=0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული დებულება საზოგადოდ არ არის მართებული. მაგალითად განვიხილოთ ფუნქცია $y=|x|$.

ცხადია ეს ფუნქცია უწყვეტია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვაჩვენოთ, რომ მას $x=0$ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია. მართლაც, თუ $x=0$ მაშინ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \text{თუ} \quad \Delta x>0, \\ -1, & \text{თუ} \quad \Delta x<0.\end{cases}$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1, \quad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

ე. ი. ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული $x=0$ წერტილში 1-ის ტოლია, ხოლო მარცხენა წარმოებული კი (-1)-ის, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია $y=|x|$ არ არის წარმოებადი $x=0$ წერტილში.

მაშასადამე, ფუნქცია შეიძლება იყოს უწყვეტი წერტილში, მაგრამ ის ამ წერტილში არ იყოს წარმოებადი.

შეიძლება ვაჩვენოთ უფრო მეტიც, რომ ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში არ უზრუნველყოფს ამ წერტილში ცალმხრივი წარმოებულების არსებობასაც კი.

მაგალითად, ფუნქცია

$$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0.\end{cases}$$

უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. დავამტკიცოთ, რომ ამ ფუნქციას $x=0$ წერტილში ცალმხრივი წარმოებულები არ გააჩნია. მართლაც, $x=0$ წერტილში მოცემული ფუნქციის Δy ნაზრდი ასე გამოისახება:

$$\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

მაგრამ $\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში ცალმხრივი ზღვრები არ გააჩნია (იხ. თავი VII, §5, მაგალითი 3).

შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია.

§3. ჯამის, ნამრავლის და ფარდობის წარმოებული

სამართლიანია შემდეგი თეორემები

***თეორემა* 3.1.** თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია წერტილში, მაშინ მათი ჯამიც წარმოებადია ამ წერტილში და

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x).$$

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

თეორემა 3.2. თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, მაშინ მათი ნამრავლიც წარმოებადია x წერტილში და

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x).$$

შედეგი. თუ $u(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში და C რაიმე მუდმივია, მაშინ $C\cdot u(x)$ ფუნქცია წარმოებადია ამავე წერტილში და

$$(Cu(x))'=Cu'(x),$$

ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი შეიძლება გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ.

თეორემა 3.3. თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში და $v(x)\neq 0$, მაშინ $\frac{u(x)}{v(x)}$ წარმოებადია ამავე წერტილში და

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v(x)'u(x)}{v^2(x)}. \qquad (3.1)$$

მაგალითი 1. განვიხილოთ $y=\mathrm{tg}x$ ფუნქცია. (3.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $y=\mathrm{ctg}x$ ფუნქციის წარმოებული. (3.1) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$(\mathrm{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§4. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს VIII თავის თეორემა 1.6-ის პირობებს შექცეული ფუნქციის არსებობისა და უწყვეტობის შესახებ. დავუშვათ, რომ $x=\varphi(y)$ მისი შექცეული ფუნქციაა. მართებულია შემდეგი თეორემა

თეორემა 4.1. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში და $f'(x_0)\neq 0$, მაშინ შექცეულ $x=\varphi(y)$ ფუნქციას $y_0=f(x_0)$ წერტილში აქვს წარმოებული და მართებულია ტოლობა:

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

ანუ

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}. \qquad (4.1)$$

1. ვიპოვოთ $y=\arcsin x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1;1]$ სეგმენტზე. ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $x=\sin y$, $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$. ვთქვათ $x\in]-1;1[$, მაშინ $y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, ამიტომ $\cos y>0$. (4.1) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ამრიგად

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1.$$

2. ვიპოვოთ $y=\arccos x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1;1]$ სეგმენტზე. ვთქვათ $x\in]-1;1[$, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

მივიღებთ

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. ვიპოვოთ $y=\mathrm{arctg}x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty;\infty[$ შუალედში. მისი შექცეული ფუნქციაა $x=\mathrm{tg}y$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. (4.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(tgy)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

4. ვიპოვოთ $y=\mathrm{arcctg}x$ ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიცით $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$. აქედან გვაქვს:

$$(\mathrm{arcctg}x)'=\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

§5. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $y=f(u)$, სადაც $u=\varphi(x)$.

თეორემა **5.1.** თუ $u=\varphi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე x წერტილში, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის წარმოებადია $y=f(u)$ ფუნქცია, მაშინ

$$y=F(x)=f[\varphi(x)]$$

რთული ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$F'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x) \tag{5.1}$$

ანუ

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

ე. ი. რთული ფუნქციის წარმოებული უდრის მოცემული ფუნქციის წარმოებულს დამხმარე ცვლადით, გამრავლებულს დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე დამოუკიდებელი ცვლადით.

შევნიშნოთ, რომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი მართებულია მაშინაც, როდესაც ფუნქცია წარმოდგენილია არა ორი, არამედ რამოდენიმე ფუნქციის კომპოზიციით. მაგალითად, თუ

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=g(x),$$

მაშინ

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x.$$

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი რთული ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლაზე.

მაგალითი **1.** გამოვთვალოთ $y=\sin^2 x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს $y=u^2$ და $u=\sin x$ ფუნქციების კომპოზიციას, ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გვექნება:

$$y'=(u^2)'_u(\sin x)'_x=2u\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

მაგალითი **2.** გამოვთვალოთ $y=2^{arctg^3 5x}$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა.

$$y'=2^{arctg^3 5x}\ln 2\left(arctg^3 5x\right)'=2^{arctg^3 5x}\ln 2\cdot 3arctg^2 5x\cdot\left(arctg 5x\right)'=$$

$$=2^{arctg^3 5x}\ln 2\cdot 3arctg^2 5x\cdot\frac{1}{1+25x^2}\cdot(5x)'=$$

$$=15\ln 2\cdot 2^{arctg^3 5x}\frac{arctg^2 5x}{1+25x^2}.$$

მაგალითი **3.** გამოვთვალოთ $y=\ln|x|$ $(x\neq 0)$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა როგორც ვიცით $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ და $(\ln(-x))'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{1}{x}$. ამდენად

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}. \tag{5.1}$$

შენიშვნა იმ შემთხვევაში, როცა ფუნქცია მოცემულია რამოდენიმე ფორმულით, წარმოებულის გამოთვლა ზოგჯერ გვიხდება უშუალოდ წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით. მაგალითად, ვიპოვოთ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{თუ} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{თუ} \quad x=0 \end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული.

როცა $x\neq0$, მაშინ წარმოებული გამოითვლება ჩვეულებრივ გაწარმოების წესის გამოყენებით:

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

ამ გამოსახულებით მოცემული ფუნქციის წარმოებულს $x=0$ წერტილში ვერ გამოვითვლით. $x=0$ წერტილში მოცემული ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ წარმოებულის განსაზღვრება:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

ამრიგად

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0. \end{cases}$$

როგორც აქედან ჩანს, $f'(x)$ ყველგან განსაზღვრულია, უწყვეტია როცა $x\neq0$; $x=0$ წერტილზე $f'(x)$ განიცდის მეორე გვარის წყვეტას რადგან $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

§6. უმარტივეს ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი

1. $(C)'=0$.
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.
3. $(a^x)'=a^x\ln a$.
4. $(e^x)'=e^x$.
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.
6. $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.
7. $(\sin x)'=\cos x$.
8. $(\cos x)'=-\sin x$.
9. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
14. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

§7. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული. ხარისხოვანმაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული

(5.1) ფორმულის გამოყენებით გამოვითვალოთ $y=\ln|f(x)|$ რთული ფუნქციის წარმოებული, სადაც $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა და $f(x)\neq 0$. გვაქვს

$$y'=(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{7.1}$$

გამოვთვალოთ ახლა ხარისხოვანმაჩვენებლიანი $y=[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქციის წარმოებული, სადაც u და v წარმოებადი ფუნქციებია და $u(x)>0$. რადგან $\ln y=v(x)\ln u(x)$, ამიტომ (7.1) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$\frac{y'}{y}=\left[v(x)\ln u(x)\right]'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

აქედან

$$y'=\left[u(x)\right]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \tag{7.2}$$

მაგალითი. გამოვითვალოთ $y=x^{\sin x}$ ფუნქციის წარმოებული. (7.2) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ $y=[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქციის წარმოებული შეიძლება გამოვითვალოთ აგრეთვე სხვა გზით. ამისათვის $y=[u(x)]^{v(x)}$

ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით $y=e^{v(x)\ln u(x)}$ და გამოვთვალოთ y':

$$y'=(e^{v(x)\ln u(x)})'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot(v(x)\ln u(x))'=y\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]=$$

$$=\left[u(x)\right]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

§8. ფუნქციის დიფერენციალი

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

***განსაზღვრება* 8.1.** f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი x_0 წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \tag{8.1}$$

სადაც A არ არის დამოკიდებული Δx-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x)\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x=o(\Delta x)$, ამიტომ (8.1) ტოლობა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\Delta y=A\Delta x+o\,(\Delta x). \tag{8.2}$$

$A\cdot\Delta x$ წრფივ ფუნქციას (Δx-ის მიმართ) ეწოდება f ფუნქციის დიფერენციალი x_0 წერტილში და აღინიშნება $df(x_0)$ ან dy სიმბოლოთი. მაშასადამე $dy=A\Delta x$ და ამიტომ (8.2) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\Delta y=dy+o(\Delta x), \quad \text{როცა } \Delta x\to 0. \tag{8.3}$$

შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალი $\Delta y=A\Delta x$, როგორც წრფივი ფუნქცია, განსაზღვრულია Δx-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის: $-\infty<\Delta x<+\infty$. რაც შეეხება ფუნქციის ნაზრდს $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, ცხადია ის განიხილება Δx-ის მხოლოდ იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლისთვისაც $x_0+\Delta x$ ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

თუ $A\neq 0$, მაშინ (8.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის ნაზრდი და ფუნქციის დიფერენციალი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, როცა $\Delta x\to 0$, ხოლო თუ $A=0$, მაშინ $dy=0$ და $\Delta y=o(\Delta x)$, როცა $\Delta x\to 0$. ე. ი. ამ შემთხვევაში Δy არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე Δx-თან შედარებით.

***თეორემა* 8.1.** იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, ის ამ წერტილში იყოს წარმოებადი, ამასთან ამ შემთხვევაში $dy=f'(x_0)\Delta x$.

აუცილებლობა. ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, ე. ი. $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$, აქედან

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A.$$

მაშასადამე, ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში და $f'(x_0)=A$, ამიტომ $dy=f'(x_0)\Delta x$.

საკმარისობა. ვთქვათ f ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, ე. ი. არსებობს $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x),\quad \alpha(\Delta x)\to 0,\ \text{როცა}\ \Delta x\to 0.$$

საიდანაც

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის წარმოებადობა და დიფერენცირებადობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის დიფერენციალი გამოითვლება ფორმულით:

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

შევნიშნოთ, რომ $dx=(x')\Delta x=\Delta x$, ამიტომ დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალს განსაზღვრავენ, როგორც მის ნაზრდს, რის გამოც $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$dy=d(f(x))=f'(x)dx.$$

ვინაიდან $o(\Delta x)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა Δx-თან შედარებით, ამიტომ (8.3) ტოლობაში $o(\Delta(x))$ შესაკრების უკუგდებით მივიღებთ მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x, \tag{8.4}$$

რომელიც მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა Δx. რადგან $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, ამიტომ (8.4)-დან გვაქვს:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x, \tag{8.5}$$

რომელიც გამოიყენება ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლაში.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\sqrt[4]{90}$ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა. თუ დავუშვებთ, რომ $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x=81$, $\Delta x=9$ და გავი-

თვალისწინებთ, რომ $f(81)=\frac{1}{4}\cdot(81)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\cdot 3^3}$, მაშინ (8.5) ფორმული-დან მივიღებთ:

$$\sqrt[4]{90}\approx\sqrt[4]{81}+9\cdot\frac{1}{4\cdot 3^3}=3+\frac{1}{12}\approx 3{,}083.$$

§9. მაღალი რიგის წარმოებული

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $]a;b[$ ინტერვალში. მაშინ $y'=f'(x)$ წარმოებული არის x ცვლადის ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $]a;b[$ ინტერვალი. თუ $f'(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება y'' ან $f''(x)$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად, $f''(x)$ წარმოებულის წარმოებულს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული და აღინიშნება y''' ან f''' სიმბოლოთი.

საზოგადოდ, $y=f(x)$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული ეწოდება ამ ფუნქციის $(n$-$1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს და აღინიშნება $y^{(n)}$ ან $f^{(n)}(x)$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში აქვს წარმოებულები n-ურ რიგამდე ჩათვლით, მაშინ

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))',$$

ე. ი.

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

განვიხილოთ მაგალითები ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებულის გამოთვლაზე.

***მაგალითი* 1.** ვთქვათ $y=a^x$, მაშინ:

$$y'=(a^x)'=a^x\ln a,\ y''=(a^x)''=a^x\ln^2 a,\ldots,y^{(n)}=(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a.$$

კერძოდ $(e^x)^{(n)}=e^x$.

***მაგალითი* 2.** ვთქვათ $y=x^\alpha$, მაშინ:

$$y'=(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\ \ y''=(x^\alpha)''=\alpha(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2},\ldots,y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

თუ α ნატურალურია, მაშინ ცხადია

$$\left(x^\alpha\right)^{(n)}=\begin{cases}n!, & \text{როცა}\quad \alpha=n,\\ 0, & \text{როცა}\quad \alpha<n.\end{cases}$$

***მაგალითი* 3.** ვთქვათ $y=\sin x$, მაშინ

$$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots,y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ანალოგიურად მიიღება:

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

ცხადია, რომ ჯამის გაწარმოების წესი უცვლელად გადაიტანება ნებისმიერი რიგის წარმოებულებზე, ხოლო რაც შეეხება ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულს, მის შესახებ მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ.

თეორემა 9.1 (ლაიბნიცი). თუ u და v ფუნქციებს რაიმე წერტილში აქვს n-ური რიგის წარმოებულები, მაშინ ამ წერტილში uv ნამრავლსაც გააჩნია იმავე რიგის წარმოებული და მართებულია ტოლობა:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $y=x\sin x$ ფუნქციის მეასე რიგის წარმოებული.

ლეიბნიცის ფორმულის ძალით

$$(x\sin x)^{(100)}=x(\sin x)^{(100)}+100\cdot1\cdot(\sin x)^{(99)}=x\sin\left(x+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+100\sin\left(x+99\cdot\frac{\pi}{2}\right)=x\sin x-100\cos x.$$

§10. პარამეტრულად და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის გაწარმოება

1. ვთქვათ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით ფორმულებით $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$ (იხ. VII თავი, §2).

გამოვიყვანოთ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულა.

თუ $x=\varphi(t)$ და $y=g(t)$ ფუნქციები წარმოებადია $t=t_0$ წერტილში და $\varphi'(t_0)\neq0$, მაშინ პარამეტრულად მოცემული $y=g[\varphi^{-1}(x)]$ ფუნქცია წარმოებადია $x_0=\varphi(t_0)$ წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$y'_x(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}=\frac{g'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{10.1}$$

მართლაც, $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, მაგრამ $dy=g'(t_0)dt$, $dx=\varphi'(t_0)dt$, ამიტომ

$$y'_x = \frac{g'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

მეორე რიგის წარმოებულისათვის გვაქვს:

$$y''_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}. \qquad (10.2)$$

ანალოგიურად მიიღება y-ის ნებისმიერი რიგის წარმოებული x-ით.

გამოვითვალოთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები პარამეტრულად მოცემული

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

ფუნქციის.

წირს, რომელიც წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკს, ციკლოიდა ეწოდება. ეს წირი წარმოადგენს a-რადიუსიანი წრეწირის რაიმე წერტილის ტრაექტორიას, თუ ეს წრეწირი უსრიალოდ გორავს წრფეზე, (t პარამეტრი არის წრეწირის ამ რადიუსის მობრუნების კუთხე). (10.1) და (10.2) ფორმულების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$y'(x) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = ctg\,\frac{t}{2},$$

$$y''(x) = \frac{a(1 - \cos t)\cdot a\cos t - a\sin t \cdot a \sin t}{a^3(1 - \cos t)^3} =$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2}{a^3(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^4 \dfrac{t}{2}}.$$

2. თუ წარმოებადი $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით განტოლებით $F(x,y)=0$ (იხ. VII თავი, §2), მაშინ $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ წარმოებულის მოსაძებნად უნდა გავაწარმოოთ x-ით იგივეობა $F(x,f(x))=0$, როგორც რთული ფუნქცია.

მაგალითი. ვიპოვოთ $\sin y - x^2 y = 0$ ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი y ფუნქციის წარმოებული.

ამ ტოლობაში იგულისხმება, რომ y წარმოადგენს x-ის ფუნქციას და მაშასადამე გვაქვს იგივეობა:

$$\sin y - x^2 y \equiv 0.$$

ამ იგივეობის გაწარმოება, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით, გვაძლევს:

$$\cos y\cdot\frac{dy}{dx}-2xy-x^2\frac{dy}{dx}=0.$$

აქედან
$$\frac{dy}{dx}(\cos y-x^2)=2xy,$$

საიდანაც
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{\cos y-x^2}.$$

აქ იგულისხმება, რომ $\cos y-x^2\neq 0$ და, ამას გარდა x და y აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

§11. მაღალი რიგის დიფერენციალები და მათი კავშირი წარმოებულებთან

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქციას რაიმე $]a;b[$ ინტერვალში აქვს ყველა რიგის სასრული წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით. მაშინ როგორც ვიცით, მისი დიფერენციალი

$$dy=f'(x)dx.$$

აქ dx დამოუკიდებელი x ცვლადის Δx ნაზრდია, ის არ არის დამოკიდებული x-ზე, ამიტომ

$$(dx)'_x=0. \tag{11.1}$$

$y=f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი, რომელიც აღინიშნება d^2y სიმბოლოთი, ეწოდება პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს, ე. ი. განსაზღვრებით:

$$d^2y=d(dy).$$

(11.1) ტოლობისა და ნამრავლის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$d^2y=d(dy)=d\left[f'(x)dx\right]=\left[f'(x)dx\right]'dx=$$
$$=\left[f''(x)dx+(dx)'\ \ f'(x)\right]dx=f''(x)dx^2,$$

სადაც dx^2-ით აღნიშნულია $(dx)^2$.

საზოგადოდ, განსაზღვრებით n-ური რიგის დიფერენციალი ეწოდება n-1 რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს და აღინიშნება d^ny სიმბოლოთი. ადვილია ჩვენება, რომ

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=f^{(n)}(x)dx^n, \tag{11.2}$$

სადაც $dx^n=(dx)^n$. მართლაც (11.2) ტოლობა მართებულია $n=1$-სათვის. თუ დავუშვებთ, რომ ის მართებულია n-1-სათვის, მაშინ

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=d\left(df^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)=\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)'dx=f^{(n)}(x)dx^n$$

(11.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}, \tag{11.3}$$

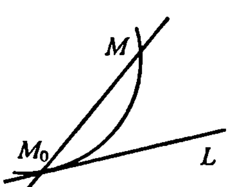
ე. ი. ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული დამოუკიდებელი ცვლადით უდრის ამავე ფუნქციის n-ური რიგის დიფერენციალს, გაყოფილს არგუმენტის დიფერენციალის n-ურ ხარისხზე.

§12. წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება გეომეტრიასა და მექანიკაში

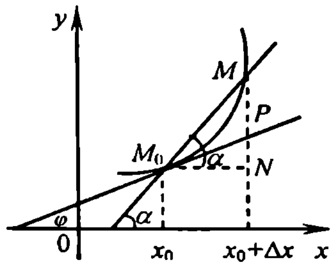
1. წარმოებულისა და დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად თავდაპირველად შემოვიყვანოთ $y=f(x)$ წირისადმი მოცემულ წერტილში გავლებული მხების ცნება.

ვთქვათ $y=f(x)$ წირზე მოცემულია რაიმე M_0 წერტილი. განვიხილოთ ამ წირის მეორე M წერტილი და გავავლოთ M_0M მკვეთი (ნახ. 9.1). თუ M წერტილი მოძრაობს წირზე, ხოლო M_0 — უძრავია, მაშინ მკვეთი იცვლის თავის მდებარეობას. M_0 წერტილზე გავლებულ L წრფეს ეწოდება მოცემული წირის მხები M_0 წერტილში, თუ კუთხე L წრფესა და M_0M მკვეთს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ წირის გასწვრივ. მოკლედ რომ ვთქვათ, მხები წარმოადგენს მოცემულ წერტილში გავლებული მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკს $M_0(x_0,f(x_0))$ წერტილში გააჩნია მხები, რომლის კუთხური კოეფიციენტი $f'(x_0)$-ის ტოლია.



ნახ. 9.1



ნახ. 9.2

ვთქვათ, M წერტილის აბსცისაა $x_0+\Delta x$ და M_0M მკვეთი Ox ღერძთან ადგენს α კუთხეს. გავავლოთ $M_0N||Ox$ და $MN||Oy$ (ნახ. 9.2). ΔM_0MN-დან გვაქვს:

$$tg\alpha = \frac{MN}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (12.1)$$

ცხადია, როცა M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ წირის გასწვრივ, მაშინ $\Delta x \to 0$ და პირიქით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ტანგენს ფუნქცია უწყვეტია და ვისარგებლებთ წარმოებულის განსაზღვრებით, (12.1)-დან მივიღებთ

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M \to M_0} tg\alpha = tg\varphi,$$

ე. ი.

$$\alpha \to \varphi, \text{ როცა } M \to M_0. \quad (12.2)$$

გავავლოთ Ox ღერძისადმი φ კუთხით დახრილი M_0P წრფე. რადგან $\gamma = \angle MM_0P = \alpha - \varphi$, ამიტომ (12.2)-დან გამომდინარეობს, რომ $\gamma \to 0$, როცა $M \to M_0$. ეს კი ნიშნავს, რომ M_0P წრფე წარმოადგენს $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხებს M_0 წერტილში, ამასთან მისი კუთხური კოეფიციენტია $f'(x_0)$. ამიტომ მხების განტოლებას აქვს სახე

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

სადაც $y_0 = f(x_0)$.

ამრიგად მივიღეთ, რომ წარმოებულს გააჩნია შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი: $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში უდრის ამ ფუნქციის გრაფიკისადმი $M_0(x_0; f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f'(x_0) = +\infty$, ან $f'(x_0) = -\infty$, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკს $M_0(x_0; f(x_0))$ წერტილში აგრეთვე გააჩნია მხები და მისი განტოლებაა $x = x_0$. ასევე, იმ შემთხვევაშიც, როცა $f'_+(x_0) = +\infty$ და $f'_-(x_0) = -\infty$ ან პირიქით, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს $M_0(x_0; f(x_0))$ წერტილში აგრეთვე გააჩნია მხები და მისი განტოლებაა $x = x_0$.

განვიხილოთ ფუნქცია: 1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$. ვაჩვენოთ, რომ $f'(0) = +\infty$. მართლაც

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}},$$

აქედან ცხადია, რომ $f'(0) = +\infty$. ე. ი. $\sqrt[3]{x}$ ფუნქციის გრაფიკის მხები (0;0) წერტილში არის $x = 0$ წრფე.

2) $g(x) = x^{2/3}$ ფუნქციისათვის

$$\frac{\Delta g(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}.$$

აქედან გამომდინარე $g'_+(0)=+\infty$, $g'_-(0)=-\infty$, ამიტომ $x^{2/3}$ ფუნქციის გრაფიკის მხები (0;0) წერტილში არის $x=0$ წრფე.

წრფეს, რომელიც გადის M_0 წერტილში ამ წერტილში გავლებული მხების მართობულად, ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ნორმალი ამ წერტილში. ნორმალის განტოლებაა

$$x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0.$$

დავადგინოთ ახლა დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი. ΔM_0NP-დან (ნახ. 9.2) გვაქვს, რომ:

$$NP=M_0N\cdot\operatorname{tg}\varphi=\Delta x\cdot f'(x_0)=dy.$$

ამრიგად, ფუნქციის დიფერენციალი წერტილში უდრის ფუნქციის გრაფიკისადმი შესაბამის წერტილში გავლებული მხების ორდინატის ნაზრდს.

***ამოცანა* 1.** შევადგინოთ $y=x^3-3x^2$ ფუნქციის გრაფიკის $M(1;-2)$ წერტილში გავლებული მხებისა და ნორმალის განტოლებები.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ ფუნქციის წარმოებული $y'=f'(x)=3x^2-6x$. ცხადია $f'(x_0)=f'(1)=3-6=-3$, $y_0=-2$, ამიტომ მხების განტოლებაა $y+2=-3(x-1)$ ანუ $3x+y-1=0$, ხოლო ნორმალის განტოლება იქნება

$$x-1-3(y+2)=0 \text{ ანუ } x-3y-7=0.$$

2. წარმოებულისა და დიფერენციალის ფიზიკური შინაარსი. 1) ვთქვათ წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლებაა $s=s(t)$, რომლის მიხედვითაც დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება გამოვიანგარიშოთ გავლილი მანძილი. დროის t_0 მომენტიდან $t_0+\Delta t$ მომენტამდე გავლილი მანძილი ტოლია $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$-ისა, ამიტომ დროის Δt მონაკვეთში მოძრაობის საშუალო სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით:

$$V_{\text{საშ}}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

ეს ფორმულა მით უკეთესად ახასიათებს წერტილის სიჩქარეს t_0 მომენტში რაც უფრო მცირეა Δt, ამიტომ მიღებულია, რომ

$$V(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t_0)$$

წარმოადგენს წერტილის მყის სიჩქარეს დროის t_0 მომენტში.

ამრიგად, სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში არის მანძილის წარმოებული დროით.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ აჩქარება დროის t_0 მომენტში არის სიჩქარის წარმოებული, ე. ი.

$$a(t_0)=\frac{dV(t_0)}{dt}.$$

ან რაც იგივეა აჩქარება არის მანძილის მეორე რიგის წარმოებული დროით, ე. ი.

$$a(t_0)=\frac{d^2s(t_0)}{dt^2}.$$

დიფერენციალის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს, რომ:

$$ds=s'(t_0)dt=V(t_0)\Delta t.$$

მაშასადამე, მანძილის დიფერენციალი არის მანძილი, რომელსაც გაივლიდა წერტილი დროის Δt მონაკვეთში, თუ ის იმოძრავებდა თანაბრად იმ სიჩქარით, რაც ჰქონდა მას დროის t_0 მომენტში.

***ამოცანა* 2.** მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფივად $s=t^3-3t$ კანონით. ვიპოვოთ წერტილის აჩქარება დროის იმ მომენტში, როცა მისი სიჩქარე 9 მ/წმ-ის ტოლია.

ამოხსნა. როგორც ვიცით $V=\dfrac{ds}{dt}=3t^2-3$. პირობით $3t^2-3=9$. აქედან $t=2$.

გამოვთვალოთ წერტილის აჩქარება $a=\dfrac{d^2s}{dt^2}=6t$. აქედან $a(2)=6\cdot 2=12$ მ/წმ^2.

2) ვთქვათ მოცემულია l სიგრძის არაერთგვაროვანი ძელი. დავუშვათ, რომ ძელი მოთავსებულია Ox ღერძზე ისე, რომ მისი ერთ-ერთი ბოლო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს. $m=m(x)$ იყოს ფუნქცია, რომლის საშუალებითაც ძელის ნებისმიერი x_0 წერტილისათვის გამოითვლება სათავიდან x_0 წერტილამდე მოთავსებული ძელის ნაწილის მასა. განვიხილოთ ძელის რაიმე x_0 და $x_0+\Delta x$ წერტილები. ამ წერტილებს შორის მოთავსებულ ძელის მონაკვეთს აქვს Δx სიგრძე და $\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$ მასა. $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ ფარდობას ეწოდება ძელის განხილული მონაკვეთის საშუალო სიმკვრივე. ძელის სიმკვრივე x_0 წერტილში ეწოდება საშუალო სიმკვრივის ზღვარს, როცა Δx მიისწრაფვის ნულისაკენ და $\rho(x_0)$-ით აღინიშნება, ე. ი.

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=m'(x_0).$$

თუ ρ სიმკვრივე არ არის დამოკიდებული x-ზე ე. ი. მუდმივია, მაშინ ძელს ეწოდება ერთგვაროვანი.

დიფერენციალის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს, რომ:

$$dm = m'(x_0)dx = \rho(x_0)\Delta x.$$

ამრიგად, მასის დიფერენციალი არის Δx სიგრძისა და $\rho(x_0)$ სიმკვრივის მქონე ერთგვაროვანი ძელის მასა, სადაც $\rho(x_0)$ არის ძელის სიმკვრივე x_0 წერტილში.

§13. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები

***თეორემა* 13.1 (*ფერმა*).** ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და წარმოებადია x_0 წერტილში. თუ ამ წერტილში f ფუნქცია ღებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ $f'(x_0)=0$.

***დამტკიცება*.** აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, მაშინ საკმარისად მცირე Δx რიცხვისათვის ადგილი ექნება უტოლობას:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leq 0.$$

აქედან

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0\text{, როცა } \Delta x>0, \qquad (13.1)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0\text{, როცა } \Delta x<0. \qquad (13.2)$$

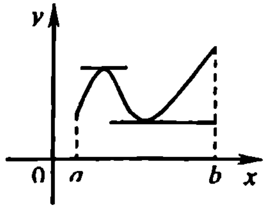
თეორემის პირობით x_0 წერტილში არსებობს ფუნქციის წარმოებული, ამიტომ (13.1) და (13.2) უტოლობებიდან გვაქვს:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0, \qquad (13.3)$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0. \qquad (13.4)$$

(13.3) და (13.4) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ $f'(x_0)=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ფერმას თეორემის გეომეტრიული შინაარსია: თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული f ფუნქცია ამ წერტილში ღებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას და ფუნქციის გრაფიკს $(x_0;f(x_0))$ წერტილში აქვს მხები (Oy ღერძის არაპარალელური), მაშინ ეს მხები Ox ღერძის პარალელურია (ნახ. 93).



ნახ. 9.3

თეორემა 13.2 (როლი). ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $]a;b[$ ინტერვალში. თუ $f(a)=f(b)$, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $f'(c)=0$.

დამტკიცება. ვინაიდან f უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ის ამ სეგმენტზე მიიღებს უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს. ვთქვათ $m=\min f(x)$ და $M=\max f(x)$, მაშინ:

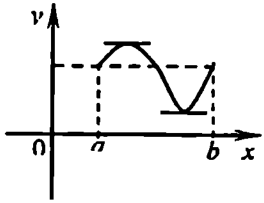
$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a;b].$$

თუ $m=M$ მაშინ f მუდმივია $[a;b]$ სეგმენტზე და ამიტომ $\forall x \in]a;b[$-დან გვექნება $f'(x)=0$. ამ შემთხვევაში c წერტილად შეიძლება ავიღოთ $]a;b[$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი.

თუ $m \ne M$, მაშინ $f(a)=f(b)$ პირობის ძალით f ფუნქცია m და M მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთს მაინც მიიღებს $]a;b[$ ინტერვალის რაიმე c წერტილში. ამ შემთხვევაში ფერმას თეორემის ძალით $f'(c)=0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

როლის თეორემის გეომეტრიული შინაარსია: თუ f ფუნქციის გრაფიკს ყოველ $(x,f(x))$, $a<x<b$ წერტილში აქვს მხები (Oy ღერძის არაპარალელური) და $f(a)=f(b)$, მაშინ ამ გრაფიკზე არსებობს ერთი მაინც წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია (ნახ. 9.4).



ნახ. 9.4

თეორემა 13.3 (კოში). ვთქვათ f და g ფუნქციები უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $]a;b[$ ინტერვალში. თუ ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში $g'(x)\neq 0$, მაშინ $]a;b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (13.5)$$

თეორემა 13.4 (ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ). თუ $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია $]a;b[$ ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c). \qquad (13.6)$$

დამტკიცება. ლაგრანჟის თეორემა მიიღება კოშის თეორემიდან, როგორც მისი კერძო შემთხვევა. მართლაც, ვთქვათ $g(x)=x$, მაშინ $g'(x)=1$, $g(a)=a$, $g(b)=b$, ამიტომ (13.5) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1}. \qquad (13.7)$$

აქედან

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. (13.6) ფორმულა f ფუნქციის $f(b)-f(a)$ ნაზრდს აკავშირებს არგუმენტის $b-a$ ნაზრდთან, ამიტომ ლაგრანჟის (13.6) ფორმულას სასრული ნაზრდის ფორმულასაც უწოდებენ.

შენიშვნა 2. როლის თეორემა არის ლაგრანჟის თეორემის კერძო შემთხვევა, როცა $f(a)=f(b)$.

ვინაიდან (13.6) ფორმულაში $a<c<b$, ამიტომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{c-a}{b-a}=\theta,$$

გვექნება $0<\theta<1$ და $c=a+\theta(b-a)$.
ამიტომ (13.6) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)).$$

კერძოდ, თუ $b=a+h$, გვექნება:

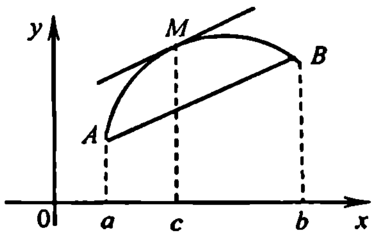
$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის ასეთი სახით ჩაწერას ხშირად სასარგებლო გამოყენება აქვს.

ლაგრანჟის თეორემის გეომეტრიული შინაარსია: თუ $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქციის გრაფიკს ყოველ $(x;f(x))$,

$a<x<b$ წერტილში აქვს მხები (Oy ღერძის არაპარალელური), მაშინ $y=f(x)$ წირზე A და B წერტილებს შორის არსებობს ერთი მაინც ისეთი M წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები AB ქორდის პარალელურია (ნახ. 9.5).

მართლაც, ვთქვათ $y=f(x)$ წირის ბოლოებია $A(a,f(a))$ და $B(b,f(b))$, მაშინ (13.7) ტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს AB ქორდის კუთხურ კოეფიციენტს, ხოლო მარჯვენა ნაწილი $f'(c)$ არის $y=f(x)$ წირის $(c,f(c))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი, ე. ი. მხები AB ქორდის პარალელურია.



ნახ. 9.5

შედეგი. თუ f ფუნქცია წარმოებადია $]a;b[$ ინტერვალში და $f'(x)=0$ ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ ფუნქცია მუდმივია $]a;b[$-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ x_0 რაიმე ფიქსირებული, ხოლო x ნებისმიერი წერტილია $]a;b[$-ში, მაშინ (13.6) ფორმულიდან გვაქვს:

$$f(x)=f(x_0)=const.$$

ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $]a;b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში $f'(x)=g'(x)$, მაშინ ეს ფუნქციები მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, ე. ი. $f(x)=g(x)+const$.

§14. განუსაზღვრელობათა გახსნა. ლოპიტალის წესი

იმ შემთხვევაში, როცა f და g ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, ან უსასრულოდ დიდებია, როცა $x \to a$, მაშინ ამბობენ, რომ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ფარდობა $x=a$ წერტილზე არის $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა. ამ ტიპის ზღვრის გამოთვლას, რომელიც უშუალოდ ზღვარზე გადასვლის გზით არ ხერხდება, განუსაზღვრულობის გახსნა ეწოდება. ასეთი ზღვრის გამოსათვლელად ზოგჯერ ხელსაყრელია ეგრეთწოდებული "ლოპიტალის წესის" გამოყენება, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ფუნქციათა ფარდობის ზღვრის გამოთვლა შევცვალოთ მათი წარმოებულების ფარდობის ზღვრის გამოთვლით.

ასეთი განუსაზღვრელობის გახსნა ნიშნავს გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, თუ ის არსებობს, ან დავადგინოთ რომ ის არ არსებობს.

ლოპიტალის წესის გამოყენება ემყარება შემდეგ თეორემას

***თეორემა* 14.1.** ვთქვათ:

1) $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა.

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ან $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

3) $g'(x) \neq 0$, $x \neq a$.

4) არსებობს $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ სასრული ან უსასრულო (ტოლი $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის).

მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ და

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***შენიშვნა* 1.** ლოპიტალის წესის მიხედვით თუ არსებობს წარმოებულთა შეფარდების ზღვარი, მაშინ არსებობს თვით ამ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარიც. მაგრამ შეიძლება წარმოებულთა შეფარდების ზღვარი არ არსებობდეს, თუმცა თვით ამ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი კი არსებობდეს. მართლაც

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 .$$

მაგრამ წარმოებულთა ფარდობა არის

$$\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

ამ ფარდობის ზღვარი კი, როცა $x\to 0$ არ არსებობს.

შენიშვნა 2. ეს წესი გამოიყენება მაშინაც, როცა $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to +\infty$, $x\to -\infty$ ან $x\to \infty$.

შენიშვნა 3. თუ $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ფარდობა აგრეთვე წარმოადგენს განუსაზღვრელობას $x=a$ წერტილზე, მაშინ შეიძლება გადავიდეთ მეორე რიგის წარმოებულების ფარდობის ზღვარზე და ა. შ.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^{a}}{\ln(x+1)}$, $a>1$. აქ გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის წესის გამოყენებით მიიღება

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^{a}}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{a\,x^{a-1}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0+}a\,x^{a-1}(1+x)=0.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}$.

ლოპიტალის წესის გამოყენებით გვაქვს:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^{2}}.$$

აქ ისევ მივიღეთ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის წესის კვლავ გამოყენება გვაძლევს:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}}$.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^{x}}=2\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი დებულების გამოყენებით ლოპიტალის წესი საშუალებას გვაძლევს გავხსნათ $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობები. ხშირად სხვადასხვა გარდაქმნებით $0\cdot\infty$,

$\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ სახის განუსაზღვრელობები შეიძლება დავიყვანოთ $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუსაზღვრელობამდე.

1. $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}, \tag{14.1}$$

ან

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}. \tag{14.2}$$

(14.1) და (14.2) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა დაიყვანება $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობების გახსნამდე.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$.

გვაქვს $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. (14.1)-ის ძალით

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}}=\frac{2}{\pi}.$$

2. $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$) და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$). ამ შემთხვევაში $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ ზღვრის გამოთვლა დაიყვანება $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე, მართლაც:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-tgx}{xtgx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx+\frac{x}{\cos^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x+x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x+1}=0.$$

3. 1^{∞}, 0^0, ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები. ამ სახის განუსაზღვრელობების გახსნა დაიყვანება $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},\quad (f(x)>0).$$

განვიხილოთ სათანადო მაგალითები.

მაგალითი 6.

$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}=e^0=1.$$

მაგალითი 7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{ctgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{ctgx\ln tgx}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{tgx}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}ctgx}=1.$$

მაგალითი 8.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)\left(e^x-1\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}}=e^2$$

§15. ტეილორის ფორმულა და მისი ზოგიერთი გამოყენება

თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს $n+1$ რიგის წარმოებული, მაშინ ამ მიდამოს ნებისმიერი x წერტილისათვის მართებულია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1.$$

$R_n(x)$ არის ტეილორის ფორმულის ნაშთი ლაგრანჟის სახით. ნაშთი შეიძლება ჩაიწეროს აგრეთვე პეანოს სახითაც: $R_n(x)=\bar{\bar{o}}\left((x-x_0)^n\right)$.

როცა $x_0=0$, მაშინ ტეილორის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

რომელსაც მაკლორენის ფორმულა ეწოდება.

მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით ადვილად მიიღება, რომ

1. თუ $f(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, მაშინ

$$P_n(x)=P_n(0)+\frac{P_n'(0)}{1!}x+\frac{P_n''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

2. თუ $f(x)=(a+x)^n$, $n\in N$, მაშინ

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}x^k+\cdots+x^n.$$

ამ ფორმულას უწოდებენ ნიუტონის ბინომის ფორმულას.

3. თუ $f(x)=e^x$, მაშინ

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

ნებისმიერი x-სათვის $[-R;R]$ სეგმენტიდან $e^{\theta x}<e^R$, ამიტომ ნაშთითი წევრისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$|R_n(x)|<\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}e^R$$

4. თუ $f(x)=\sin x$, მაშინ

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right].$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი x-ისათვის $[-R;R]$ სეგმენტიდან ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შეფასება:

$$|R_n(x)|<\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (15.1)$$

5. თუ $f(x)=\cos x$, მაშინ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right].$$

აქაც ნებისმიერი x-ისათვის $[-R;R]$ სეგმენტიდან ნაშთითი წევრისათვის ადგილი აქვს (15.1) შეფასებას.

6. თუ $f(x)=\ln(1+x)$, მაშინ

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

§16. ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით

1. ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ნიშნები. ფუნქციის გამოკვლევისას ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა დავადგინოთ ამ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები. ეს საკითხი კი წარმოებადი ფუნქციის შემთხვევაში დაკავშირებულია ფუნქციის წარმოებულის ნიშანთან. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა **16.1.** თუ $]a;b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს უტოლობას

$$f'(x)>0 \quad (f'(x)<0),$$

მაშინ ამ ინტერვალზე $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია)*.

დამტკიცება. დავუშვათ ადგილი აქვს $f'(x)>0$ პირობას. ვთქვათ x_1 და x_2 $]a;b[$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილებია, ისეთი, რომ $x_1<x_2$. მაშინ ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, ამ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი c წერტილი, რომ

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1). \qquad (16.1)$$

რადგან პირობის ძალით $f'(c)>0$ და $x_2-x_1>0$, ამიტომ (16.1) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $f(x_2)-f(x_1)>0$, ე. ი.

$$f(x_2)>f(x_1).$$

ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა $f'(x)<0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

2. ფუნქციის ექსტრემუმი. მეცნიერებისა და ტექნიკის მრავალი ამოცანა დაკავშირებულია ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნასთან. ასეთი ამოცანების ერთი ნაწილი შეისწავლება დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით.

ვთქვათ მოცემულია $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია.

---

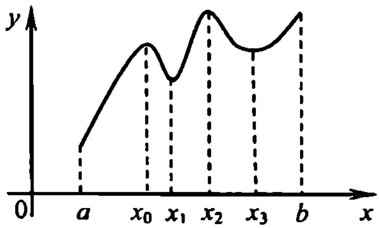
* თუ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ თეორემის პირობებში ზრდადობას (კლებადობას) ადგილი ექნება $[a;b]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრება 10.1. $[a;b]$ სეგმენტის შიგა x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ მოიძებნება x_0-ის ისეთი $]x_0-\delta;x_0+\delta[$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$).

ფუნქციის მნიშვნელობებს მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში უწოდებენ შესაბამისად ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმს* და ლოკალურ მინიმუმს.

ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი ანუ ექსტრემუმები.

მოყვანილი განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ფუნქციის მაქსიმუმი (მინიმუმი) უდიდესია (უმცირესია) იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელიც მას აქვს მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილის გარკვეულ მიდამოში. მაშასადამე ის ფაქტი, რომ ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმი რაიმე წერტილში არის ამ ფუნქციის ლოკალური, ე. ი. მხოლოდ ამ წერტილის რაიმე მიდამოსათვის დამახასიათებელი თვისება.



ნახ. 9.6

როგორც 9.6 ნახაზიდან ჩანს, მოცემულ შუალედზე ფუნქციას შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე ექსტრემუმი. ამასთან ზოგიერთი მინიმუმი შეიძლება ზოგიერთ მაქსიმუმზე მეტი აღმოჩნდეს.

ახლა შევისწავლოთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოძებნის წესი.

ფერმას თეორემის თანახმად, თუ x წერტილში წარმოებად $f(x)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $f(x)=0$. ე. ი. წარმოებადი

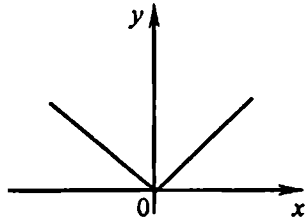
---

*შემდგომში, იქ სადაც გაურკვევლობას არ გამოიწვევს, ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) ნაცვლად გამოვიყენებთ გამოთქმას მაქსიმუმი (მინიმუმი).

ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი რიგის წარმოებულის ნულთან ტოლობა.

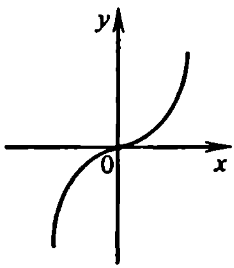
შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს იმ წერტილშიც, სადაც წარმოებული არ არსებობს.

მაგალითად, $f(x)=|x|$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში წარმოებული არა აქვს, მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი (ნახ. 9.7)

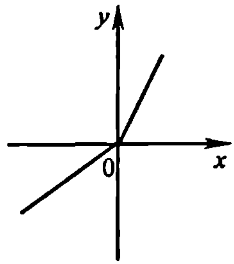


ნახ. 9.7

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არარსებობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე. ი. იქიდან, რომ ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია



ნახ. 9.8



ნახ. 9.9

მაგალითად, $x=0$ წერტილში $f(x)=x^3$ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } x \le 0, \\ 2x, & \text{როცა } x > 0. \end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული არ არსებობს, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციებს ექსტრემუმი არ გააჩნია (ნახ. 9.8 და ნახ. 9.9).

***განსაზღვრება* 16.2.** წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, ამ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი ეწოდება.

***განსაზღვრება* 16.3.** წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

დავადგინოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

***თეორემა* 16.2.** ვთქვათ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. თუ f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0, \quad \text{როცა } x<x_0 \\ f'(x)<0, \quad \text{როცა } x>x_0 \end{array}\right\} \tag{16.2}$$

მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)<0, \quad \text{როცა } x<x_0 \\ f'(x)>0, \quad \text{როცა } x>x_0 \end{array}\right\} \tag{16.3}$$

მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

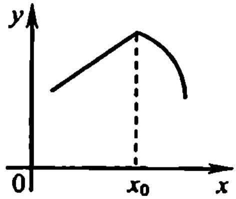
დამტკიცება. ვთქვათ x_0 წერტილის რაიმე $]x_0-\delta,x_0+\delta[$ მიდამოში შესრულებულია (16.2) პირობა. რადგან $]x_0-\delta,x_0[$ ინტერვალში $f'(x)>0$ და $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ იგი ზრდადია $]x_0-\delta,x_0]$ შუალედში. ე. ი. ნებისმიერი $x\in]x_0-\delta,x_0[$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x)<f(x_0)$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს უტოლობა მართებულია აგრეთვე ნებისმიერი $x\in]x_0,x_0+\delta[$ წერტილისათვის.

ამრიგად, x_0-საგან განსხვავებული ყოველი x წერტილისათვის $]x_0-\delta,x_0+\delta[$ მიდამოდან მართებულია უტოლობა $f(x)<f(x_0)$. ე. ი. x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

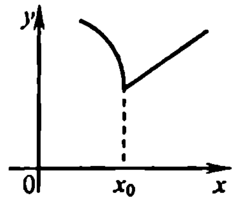
ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში შესრულებულია (16.3) პირობა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

თეორემა დამტკიცებულია.

ხშირად სარგებლობენ ამ თეორემის შემდეგი ფორმულირებით: თუ წერტილში ფუნქცია უწყვეტია და ამ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს წარმოებული ნიშანს იცვლის "+"-დან "–"-ზე, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია (ნახ. 9.10), ხოლო, თუ წარმოებული ნიშანს იცვლის "–"-დან "+"-ზე x_0 მინიმუმის წერტილია (ნახ. 9.11).



ნახ. 9.10



ნახ. 9.11

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 16.2-ში კრიტიკულ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის მოთხოვნა აუცილებელია. მართლაც

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{როცა } x\le 0,\\ x, & \text{როცა } x>0 \end{cases}$$

ფუნქციისათვის $x=0$ წერტილში შესრულებულია თეორემა 16.2-ის ყველა პირობა, გარდა უწყვეტობისა, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

***შენიშვნა* 1.** თუ ფუნქცია უწყვეტია კრიტიკულ წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში ფუნქციის წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს, მაშინ ფუნქციას ამ წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

***შენიშვნა* 2.** ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს ისეთ სტაციონალურ წერტილშიც, რომლის ნებისმიერ მარჯვენა და მარცხენა მიდამოებში ფუნქციის წარმოებული ნიშანს არ ინარჩუნებს. მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=\begin{cases} 2+x^2\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{როცა } x\ne 0,\\ 2, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$$

გვაქვს:

$$y'=2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)+\cos\frac{1}{x},\quad x\neq 0$$

და

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2+x^2\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)-2}{x}=\lim_{x\to 0}x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

$\cos\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $x=0$ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არის $[-1;1]$ სეგმენტი, ხოლო $2x\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

უსასრულოდ მცირეა, როცა $x\to 0$. ამიტომ არ არსებობს $x=0$ წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც მოცემული ფუნქციის წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს, თუმცა მოცემულ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი.

ამრიგად, თეორემა 16.2-ის (16.2) და (16.3) პირობები ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი, მაგრამ არა აუცილებელი პირობებია.

***თეორემა* 16.3.** ვთქვათ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი და $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), მაშინ x_0 წერტილში $f(x_0)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი).

დამტკიცება. მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრების ძალით:

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}.$$

ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $f''(x_0)<0$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიაც

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f'(x_0)<0$, როცა $x>x_0$ და $f'(x_0)>0$, როცა $x<x_0$. თეორემა 16.2-ის ძალით $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ $f''(x_0)>0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

თეორემა დამტკიცებულია.

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს:

$$f'(x)=3x^2-12x+9=0.$$

აქედან მივიღებთ ფუნქციის სტაციონალურ წერტილებს: $x_1=1$, $x_2=3$. გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x)=6x-12.$$

გამოვარკვიოთ უკანასკნელის ნიშანი $x_1=1$ წერტილში:

$$f''(1)=6-12<0.$$

ამიტომ $x_1=1$ არის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და

$$\max f(x)=f(1)=2.$$

ახლა შევამოწმოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი $x_2=3$ წერტილში. გვაქვს:

$$f''(3)=18-12>0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_2=3$ არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\min f(x)=f(3)=-2.$$

შენიშვნა. თუ $f'(x_0)=0$ და $f''(x_0)=0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი და შეიძლება არა. მართლაც, $\varphi(x)=x^3$ და $f(x)=x^4$ ფუნქციების პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები $x=0$ წერტილში ნულის ტოლია, მაგრამ $x=0$ წერტილი $\varphi(x)=x^3$ ფუნქციისათვის არ არის ექსტრემუმის წერტილი, ხოლო $f(x)=x^4$ ფუნქციისათვის კი არის მინიმუმის წერტილი.

თეორემა **16.4.** ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია n-ური რიგის წარმოებული და შესრულებულია პირობები:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0\quad (n\geq 2).$$

მაშინ:

1) x_0 წერტილში ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი, თუ n ლუწია და $f^{(n)}(x_0)<0$;

2) x_0 წერტილში ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი, თუ n ლუწია და $f^{(n)}(x_0)>0$;

3) x_0 წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია, თუ n კენტია.

მაგალითი **2.** მოვძებნოთ $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ ნულს

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x.$$

აქედან მივიღებთ ერთადერთ სტაციონალურ წერტილს $x=0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

$$f''(0)=f'''(0)=0,\quad f^{IV}(0)=4>0.$$

მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი და

$$\min f(x)=f(0)=4.$$

მაგალითი **3.** ვიპოვოთ $f(x)=x^5+x^3$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. ადვილია ჩვენება, რომ $f'(0)=f''(0)=0$ და $f'''(0)\neq 0$, ამიტომ მოცემულ ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 16.4-ის გამოყენებით ყოველთვის არ ხერხდება ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის დადგენა. მართლაც, ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ

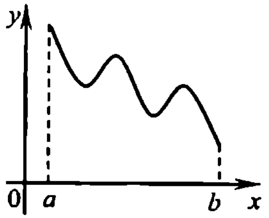
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა}\quad x=0\end{cases}$$

ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებული $x=0$ წერტილში 0-ის ტოლია, თუმცა ამ წერტილში ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი და $\min f=f(0)=0$.

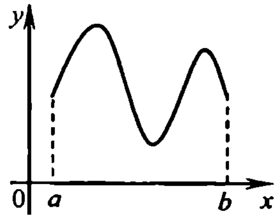
3. უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები სეგმენტზე. როგორც ვიცით სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას ამ სეგმენტზე აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები (თავი VIII, თეორემა 3.2-ის შენიშვნა 1).

ცხადია, ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მაქსიმუმს (მინიმუმს) ამ სეგმენტზე (ნახ. 9.12).

ასევე ცხადია, რომ თუ ფუნქცია უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას ღებულობს სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილიც იქნება (ნახ. 9.13).



ნახ. 9.12



ნახ. 9.13

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ამ სეგმენტზე, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებზე და ამ სეგმენტზე მოთავსებულ ყველა კრიტიკულ წერტილზე; გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი კი ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $f(x)=x^3-3x^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები [1;3] სეგმენტზე.

ამოხსნა. მოცემულ ფუნქციას [1;3] სეგმენტზე აქვს ერთადერთი კრიტიკული წერტილი $x=2$ და $f(2)=-4$. ვინაიდან $f(1)=-2$ და $f(3)=0$, ამიტომ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 0, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობაა -4.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ არის $[a;b]$ სეგმენტზე ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია, მაშინ $f(a)$ და $f(b)$ იქნება შესაბამისად მისი

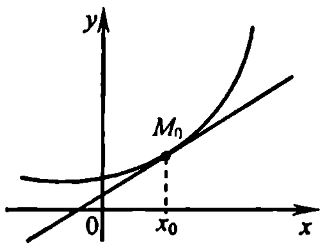
უმცირესი (უდიდესი) და უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე.

მაგალითი **5.** გამოვთვალოთ $f(x)=x^5+x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები [-1;2] სეგმენტზე.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია ზრდადია, რადგან $f'(x)=5x^4+1>0$, ამიტომ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა $f(-1)=-2$, ხოლო უდიდესი მნიშვნელობაა – $f(2)=34$.

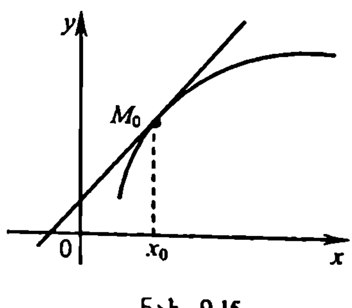
4. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი. განვიხილოთ $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის გრაფიკზე ავიღოთ ისეთი $M_0(x_0,f(x_0))$ წერტილი, რომლისთვისაც $f'(x_0)$ სასრულია, ე. ი. გრაფიკის M_0 წერტილზე გამავალი მხები Oy ღერძის პარალელური არ არის (ნახ. 9.14).

განსაზღვრება **10.4.** $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება ჩაზნექილი $M_0(x_0,f(x_0))$ წერტილში ($f(x)$ ფუნქციას ჩაზნექილი x_0 წერტილში), თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს M_0 წერტილში გავლებული მხების ზემოთ (ნახ. 9.14).



ნახ. 9.14

განსაზღვრება **10.5.** $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება ამოზნექილი $M_0(x_0,f(x_0))$ წერტილში ($f(x)$ ფუნქციას ამოზნექილი x_0 წერტილში), თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს M_0 წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ (ნახ. 9.15).



ნახ. 9.15

***თეორემა* 10.5.** თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მეორე რიგის წარმოებული და $f''(x_0)>0$, მაშინ ფუნქცია x_0 წერტილში ჩაზნექილია, ხოლო თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ ამოზნექილია.

შევნიშნოთ, რომ $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$) პირობა არ არის აუცილებელი იმისათვის, რომ $f(x)$ იყოს ჩაზნექილი (ამოზნექილი) x_0 წერტილში ვინაიდან, თუ $f''(x_0)=0$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს ჩაზნექილი, ამოზნექილი ან არც ჩაზნექილი და არც ამოზნექილი. მართლაც $f(x)=x^4$ და $\varphi(x)=x^3$ ფუნქციებისათვის $f''(0)=\varphi''(0)=0$, მაგრამ $x=0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია ჩაზნექილია, ხოლო $\varphi(x)$ – არც ამოზნექილი და არც ჩაზნექილი.

ვიტყვით, რომ ფუნქცია ჩაზნექილია (ამოზნექილია) შუალედზე, თუ იგი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) ამ შუალედის ყოველ წერტილზე.

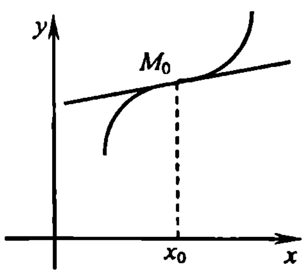
***მაგალითი* 6.** ვიპოვოთ $y=x^4-6x^3+x$ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები.

ამოხსნა. ვინაიდან $y''=12x^2-36x$, ამიტომ, როცა $x\in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$, მაშინ $y''>0$ და, როცა $x\in]0;3[$, მაშინ $y''<0$.

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, როცა $x\in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$ და ამოზნექილია, როცა $x\in]0;3[$.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს წარმოებული (სასრული ან უსასრულო).

***განსაზღვრება* 10.6.** $M_0(x_0,f(x_0))$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი (x_0-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი), თუ არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $]x_0-\delta;x_0[$ და $]x_0;x_0+\delta[$ ინტერვალების შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკის ნაწილები მდებარეობენ M_0 წერტილში გავლებული მხების სხვადასხვა მხარეს (ნახ. 9.16).



ნახ. 9.16

ცხადია, რომ თუ x_0 გადაღუნვის წერტილია, მაშინ ამ წერტილში ფუნქცია არც ჩაზნექილია და არც ამოზნექილი. ასევე,

თუ x_0 წერტილში ფუნქცია ჩაზნექილია ან ამოზნექილია, მაშინ x_0 არ არის გადაღუნვის წერტილი.

თეორემა **16.6.** თუ x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია და არსებობს $f''(x_0)$, მაშინ $f''(x_0)=0$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $f''(x_0)\neq 0$. მაშინ $f''(x_0)>0$ ან $f''(x_0)<0$, ე. ი. ფუნქცია x_0 წერტილში ან ჩაზნექილია ან ამოზნექილი, ამიტომ x_0 არ არის გადაღუნვის წერტილი. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ გადაღუნვის წერტილში ფუნქციას მეორე რიგის წარმოებული შეიძლება არ გააჩნდეს. მაგალითად

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & \text{როცა} \quad x\geq 0,\\ -\dfrac{x^2}{2}, & \text{როცა} \quad x<0\end{cases}$$

ფუნქციისათვის $x=0$ გადაღუნვის წერტილია, მაგრამ $f''(0)$ არ არსებობს, ვინაიდან $f'(x)=|x|$.

ამ შენიშვნიდან და თეორემა 16.6-დან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი უნდა ვეძებოთ იმ წერტილებს შორის, სადაც მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია ან არ არსებობს.

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არარსებობა წარმოადგენს გადაღუნვის წერტილის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე. ი. იქიდან, რომ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი გადაღუნვის წერტილია.

მაგალითად, $x=0$ წერტილში $f(x)=x^4$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & \text{როცა} \quad x<0,\\ x^2, & \text{როცა} \quad x\geq 0\end{cases}$$

ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული არ არსებობს, მაგრამ $x=0$ ამ ფუნქციებისათვის არ არის გადაღუნვის წერტილი.

ახლა მოვიყვანოთ გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა.

თეორემა **16.7.** თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს წარმოებული (სასრული ან უსასრულო), ხოლო ამ წერტილის რაიმე მიდამოში $f''(x)$ წარმოებულს აქვს სხვადასხვა ნიშანი $x>x_0$ და $x<x_0$

მნიშვნელობებისათვის, მაშინ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.

მაგალითი 7. მოვძებნოთ $y=e^{\operatorname{arctg} x}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები, ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$y'=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}, \qquad y''=\frac{1-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}$$

აქედან ჩანს, რომ $y''>0$, როცა $x<\frac{1}{2}$, და $y''<0$, როცა $x>\frac{1}{2}$.

ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, როცა $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, ამოზნექილია, როცა $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, ხოლო $x=\frac{1}{2}$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია.

5. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. ვთქვათ $M(x,y)$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. ვიტყვით, რომ M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, თუ ამ წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ.

ფუნქციის გამოკვლევის დროს ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მომენტია მისი გრაფიკის ფორმის დადგენა, როდესაც გრაფიკის წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როდესაც ფუნქციის გრაფიკი მისი წერტილის უსასრულობისაკენ მისწრაფების დროს უახლოვდება რაღაც წრფეს.

განსაზღვრება 10.7. რაიმე წრფეს ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, თუ მანძილი გრაფიკის წერტილიდან ამ წრფემდე მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც ეს წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, ვერტიკალური ასიმპტოტი ეწოდება, ხოლო ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არ არის, დახრილი ასიმპტოტი.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $x=a$ წრფე არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, თუ:

$$\lim_{x\to a+}|f(x)|=+\infty \quad \text{ან} \quad \lim_{x\to a-}|f(x)|=+\infty .$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში გრაფიკის წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა $x\to a$, ამასთან მანძილი გრაფიკის $M(x,y)$ წერტილიდან $x=a$ წრფემდე არის $|x-a|$ (ნახ. 9.17), რომელიც

ცხადია მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x \to a$, ე. ი. $x=a$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ არგუმენტის ის მნიშვნელობა რომლის ერთ-ერთ ცალმხრივ მიდამოში მაინც ფუნქცია უსასრულოდ დიდია.

მაგალითად, $x=0$ წრფე არის $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, რადგან

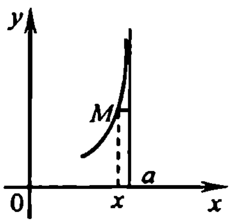
$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

ახლა ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს დახრილი ასიმპტოტი, მაშინ მის განტოლებას ექნება სახე (ნახ. 9.18)

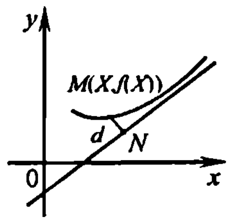
$$y=kx+b. \tag{16.4}$$

ვიპოვოთ k და b რიცხვები. ვთქვათ $M(X,f(X))$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის რაიმე წერტილი. მანძილი M წერტილიდან (16.4) წრფემდე გამოითვლება ფორმულით:

$$d=\frac{|kX-f(X)+b|}{\sqrt{k^2+1}}.$$



ნახ. 9.17



ნახ. 9.18

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x\to+\infty$ (შემთხვევა $x\to-\infty$ განიხილება ანალოგიურად). ასიმპტოტის განსაზღვრების ძალით

$$\lim_{X\to+\infty}(kX-f(X)+b)=0, \tag{16.5}$$

ანუ

$$\lim_{X\to+\infty}X\left(k-\frac{f(X)}{X}+\frac{b}{X}\right)=0.$$

აქედან

$$\lim_{X\to+\infty}\left(k-\frac{f(X)}{X}+\frac{b}{X}\right)=0.$$

საიდანაც:

$$k = \lim_{X \to +\infty} \frac{f(X)}{X}. \qquad (16.6)$$

ახლა b შეგვიძლია განვსაზღვროთ (16.5) ტოლობიდან:

$$b = \lim_{X \to +\infty} \left(f(X) - kX\right). \qquad (16.7)$$

ამრიგად, თუ $y=kx+b$ წრფე არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, მაშინ k და b გამოითვლება (16.6) და (16.7) ფორმულებით. ადვილია ჩვენება, რომ პირიქითაც, თუ (16.6) და (16.7) ზღვრები არსებობენ, მაშინ $y=kx+b$ წრფე არის ასიმპტოტი, ე. ი. იმისათვის, რომ $y=kx+b$ წრფე იყოს ასიმპტოტი, აუცილებელია და საკმარისი, არსებობდეს (16.6) და (16.7) სასრული ზღვრები.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $\lim\limits_{X \to +\infty} f(X)$ სასრული რიცხვია, (16.6) და (16.7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $k=0$ და $b = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X)$. ამიტომ ფუნქციის გრაფიკს გააჩნია ასიმპტოტი, რომლის განტოლებაა $y=b$ და მას ჰორიზონტალური ასიმპტოტი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტთან შეიძლება ჰქონდეს საერთო წერტილები (სასრული ან უსასრულო). ამის მაგალითია ფუნქცია $y = \frac{\sin x}{x}$ (შეამოწმეთ).

***მაგალითი* 8.** ვიპოვოთ $y=x$-2arctg$x$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. ცხადია, რომ ამ ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია (მოცემული ფუნქცია უწყვეტია R-ზე). ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტები:

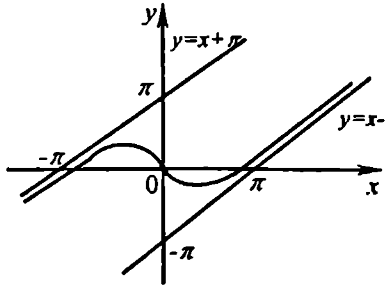
1) როცა $x \to +\infty$ გვაქვს

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2arctgx}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2arctgx}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}\left(x - 2arctgx - x\right) = -2 \lim_{x \to +\infty} arctgx = -\pi.$$

ამრიგად, როცა $x \to +\infty$ მოცემული ფუნქციის ასიმპტოტია $y=x-\pi$ წრფე.

2) როცა $x \to -\infty$, მაშინ ადვილია გამოთვლა, რომ $k=1$ და $b=\pi$. ე. ი. როცა $x \to -\infty$, მოცემული ფუნქციის ასიმპტოტია $y=x+\pi$ წრფე (ნახ. 9.19).



ნახ. 9.19

მაშასადამე $y=x$-2arctg$x$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ორი სხვადასხვა ასიმპტოტი: $y=x-\pi$, როცა $x\to+\infty$ და $y=x+\pi$, როცა $x\to-\infty$.

8. ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემა. ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად მიზანშეწონილია დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდების დახმარებით გამოეიკვლიოთ ფუნქცია და შემდეგ ავაგოთ მისი გრაფიკი. ფუნქციის გამოკვლევა შეიძლება ჩავატაროთ შემდეგი სქემით:

1) ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და წყვეტის წერტილები;

2) თუ შესაძლებელია, ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;

3) შევამოწმოთ არის თუ არა ფუნქცია ლუწი ან კენტი, არის თუ არა იგი პერიოდული;

4) მოვძებნოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები;

5) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები, გადაღუნვის წერტილები;

6) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

***მაგალითი* 8.** გამოეიკვლიოთ $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty;\infty[$ შუალედი და ეს ფუნქცია უწყვეტია. როცა $x=0$, მაშინ $y=0$ და პირიქით, როცა $y=0$, მაშინ $x=0$, ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე და სხვა თანაკვეთის წერტილი კოორდინატთა ღერძებთან გრაფიკს არა აქვს.

ცხადია ფუნქცია კენტია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის წარმოებული:

$$y' = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},$$

აქედან მივიღებთ, რომ ფუნქციის სტაციონალური წერტილებია $x_1=-1$ და $x_2=1$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $y'>0$ როცა $x\in]-1;1[$ და $y'<0$ როცა $x\in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[$, ე. ი. ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in]-1;1[$ და კლებადია, როცა $x\in]-\infty;-1[\bigcup]1;+\infty[$. ამიტომ $x_1=-1$ არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, ხოლო $x_2=1$ – მაქსიმუმის წერტილი.

$$\min y=-\frac{1}{2}, \quad \max y=\frac{1}{2}.$$

ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$y''=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

აქედან მიიღება, რომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, როცა $x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\bigcup]0;\sqrt{3}[$ და ჩაზნექილია, როცა $x\in]-\sqrt{3};0[\bigcup]\sqrt{3};+\infty[$.

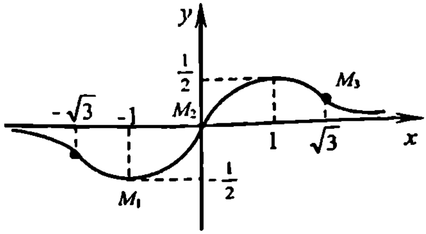
ცხადია, გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები იქნება $M_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_2(0;0)$ და $M_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

ვინაიდან:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0,$$

ამიტომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ჰორიზონტალური ასიმპტოტი $y=0$. ცხადია, რომ $y=\frac{x}{1+x^2}$ ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია.

ჩატარებული გამოკვლევის საფუძველზე ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 9.20).



ნახ. 9.20

X თავი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§1. მრავალი ცვლადის ფუნქცია, ზღვარი და უწყვეტობა

1. ევკლიდეს კოორდინატული სივრცე. ვთქვათ E არის ნამდვილ რიცხვთა $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ სახის ყველა შესაძლო დალაგებული n-ეულების სიმრავლე. შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$x+y=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n),$$

$$\lambda x=\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n).$$

სიმრავლეს, ზემოთ მოყვანილი შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებით, ეწოდება ევკლიდეს n-განზომილებიანი კოორდინატული სივრცე და აღინიშნება R^n სიმბოლოთი.

$x_1,x_2,\dots,x_n$ რიცხვებს უწოდებენ $x=x(x_1,x_2,\dots,x_n)$ წერტილის კოორდინატებს.

R^n სივრცის $x=x(x_1,x_2,\dots,x_n)$ და $y=y(y_1,y_2,\dots,y_n)$ წერტილებს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$$

როცა $n=2$ ე. ი. სიბრტყის შემთხვევაში

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$

ვთქვათ $x=x(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ და $\delta>0$. სიმრავლეს

$$u(x,\delta)=\{y:y\in R^n,\ \rho(x,y)<\delta\}$$

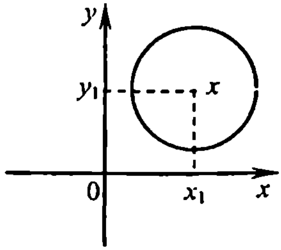
ეწოდება n-განზომილებიანი ღია ბირთვი ცენტრით $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ წერტილში და რადიუსით δ.

$u(x,\delta)$ სიმრავლეს ეწოდება აგრეთვე $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ წერტილის სფერული მიდამო (δ-მიდამო).

როცა $n=2$, მაშინ $u(x,\delta)$ არის δ რადიუსიანი ღია წრე ცენტრით $x=(x_1,x_2)$ წერტილში (ნახ. 10.1)

ზოგჯერ R^2 სიბრტყის წერტილი ნაცვლად $x(x_1,x_2)$-სა უფრო მოხერხებულია აღვნიშნოთ $M(x,y)$-ით.

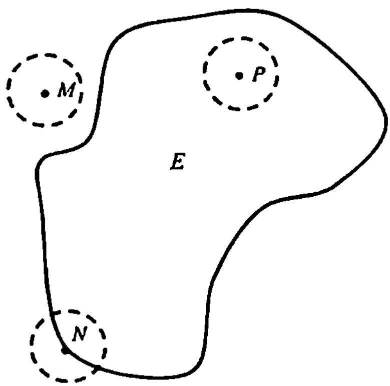
ქვემოთ ყველა საკითხი სიმარტივისათვის განხილული იქნება სიბრტყის შემთხვევაში.



ნახ. 10.1

სიბრტყის წერტილთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი წრე, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის ყველა წერტილს.

P წერტილს ეწოდება E სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს P წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად E სიმრავლეს ეკუთვნის (ნახ. 10.2). M წერტილს ეწოდება E სიმრავლის გარე წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის არცერთი წერტილი არ ეკუთვნის E სიმრავლეს (ნახ. 10.2). N წერტილს ეწოდება E სიმრავლის საზღვრის წერტილი, თუ იგი არ არის ამ სიმრავლის არც შიგა და არც გარე წერტილი.



ნახ. 10.2

E სიმრავლის საზღვრის წერტილების სიმრავლეს E სიმრავლის საზღვარი ეწოდება.

სიმრავლეს, რომელიც შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან, ღია სიმრავლე ეწოდება. მაგალითად, იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $1<x^2+y^2<4$ ღია სიმრავლეა. ეს სიმრავლე წარმოადგენს წრიულ რგოლს.

სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება უწყვეტი წირი, თუ ამ სიმრავლის წერტილთა x, y კოორდინატები არიან t პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციები $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

ღია სიმრავლეს არე ეწოდება, თუ მისი ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შევაერთოთ ისეთი უწყვეტი წირით, რომლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს.

არისა და მისი საზღვრის გაერთიანებას ჩაკეტილი არე ეწოდება.

2. ორი ცვლადის ფუნქციის ცნება.

***განსაზღვრება* 1.1.** თუ სიბრტყის E სიმრავლის ყოველ $M(x,y)$ წერტილს რაიმე წესით შეესაბამება ნამდვილი z რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $M(x,y)$ წერტილის ფუნქცია, ანუ ორი x, y ცვლადის ფუნქცია და მას ასე აღნიშნავენ:

$$z=f(M) \text{ ან } z=f(x,y).$$

x, y ცვლადებს უწოდებენ არგუმენტებს ანუ დამოუკიდებელ ცვლადებს z-ს კი დამოკიდებულ ცვლადს, ხოლო E სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არეს და მას $D(f)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ანალოგიურად განისაზღვრება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქცია.

***განსაზღვრება* 1.2.** $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება სიმრავლეს:

$$\Gamma=\{(x,y,z)\in R^3:\ z=f(x,y)\}.$$

ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი საზოგადოდ წარმოადგენს რაიმე ზედაპირს R^3-ში.

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი არის რაიმე S ზედაპირი. S ზედაპირის შესასწავლად შეგვიძლია გამოვყოთ მისი ყველა ის წერტილი, რომლებიც ერთი და იმავე მანძილით არიან დაშორებული Oxy სიბრტყიდან. ე. ი. S ზედაპირზე გამოვყოთ ის წერტილები, რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე აპლიკატი $z=h$. ეს წერტილები შეადგენენ S ზედაპირისა და $z=h$ სიბრტყის გადაკვეთის წირს. აღვნიშნოთ ეს წირი C' ასოთი, ხოლო მისი გეგმილი Oxy სიბრტყეზე C-თი.

რადგანაც C' წირის ყველა წერტილის აპლიკატს აქვს ერთი და იგივე h მნიშვნელობა, ამიტომ C წირის განტოლება Oxy სიბრტყეზე იქნება

$$f(x,y)=h. \tag{1.1}$$

C წირს ეწოდება S ზედაპირის ან $f(x,y)$ ფუნქციის დონის წირი.

თუ (1.1) განტოლებაში h პარამეტრს მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ S ზედაპირზე Oxy სიბრტყის პარალელურ კვეთებს. ამ კვეთების მართობული გეგმილები Oxy სიბრტყეზე გვაძლევს $f(x,y)$ ფუნქციის დონის წირთა ერთობლიობას. წირთა ამ ერთობლიობის განტოლება არის (1.1), სადაც h განიხილება როგორც პარამეტრი.

3. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. განვიხილოთ სიბრტყის წერტილთა რაიმე მიმდევრობა

$$P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2),\ldots,\ P_n(x_n,y_n),\ldots \tag{1.2}$$

ვიტყვით, რომ წერტილთა (1.2) მიმდევრობა კრებადია $P_0(x_0,y_0)$ წერტილისაკენ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty} y_n=y_0$$

და დავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} P_n=P_0. \tag{1.3}$$

ცხადია, (1.3) ტოლობა ტოლფასია ტოლობის

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n=0,$$

სადაც $\rho_n=\rho(P_0,P_n)$.

ვთქვათ $z=f(P)=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $P_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით P_0 წერტილისა.

***განსაზღვრება* 1.3.** A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი $P_0(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ როცა $0<\rho(P_0,P)<\delta$, მაშინ

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ A რიცხვი არის $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი P_0 წერტილში, შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \ \text{ან}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

ფუნქციის ზღვრის ეს განსაზღვრება ეკუთვნის კოშს. ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზღვრის მეორე განსაზღვრება, რომელიც ჰეინეს ეკუთვნის.

***განსაზღვრება* 1.4.** A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი P_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{P_n(x_n,y_n)\}$ მიმდევრობისათვის ($P_n\neq P_0$, $n=1,2,\ldots$), რომელიც კრებადია P_0-საკენ, ფუნქციის მნიშვნელობათა შესაბამისი $\{f(P_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

ფუნქციის ზღვრის ეს ორი განსაზღვრება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზღვრის ცნება, როცა $P\to\infty$.*

***განსაზღვრება* 1.5.** A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $P\to\infty$ და ჩავწერთ $\lim\limits_{P\to\infty} f(P)=A$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი-

---

* ვიტყვით, რომ $P\to\infty$, თუ P წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით მიისწრაფვის $+\infty$-კენ.

სათვის არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ როცა $\sqrt{x^2+y^2}>M$, მაშინ

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვისაც, ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურად, განისაზღვრება

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=\infty \text{ და } \lim_{P\to\infty} f(x,y)=\infty.$$

შენიშვნა. ზოგჯერ საჭიროა ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა ისეთ P_0 წერტილში, რომლის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს წერტილებს, რომელზედაც ფუნქცია არ არის განსაზღვრული და აგრეთვე წერტილებს, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია. ამ შემთხვევაში ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრებაში განიხილება P_0 წერტილის მიდამოს მხოლოდ ის წერტილები, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია.

ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის ფუნქციათა ზღვრებისთვისაც ადგილი აქვს შესაბამის თეორემებს, ჯამის, ნამრავლის, ფარდობის ზღვრების შესახებ და სხვა.

განვიხილოთ მაგალითები.

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ ჩასმა $x^2+y^2=t$, მაშინ $t\to 0$, როცა $x\to 0$ და $y\to 0$, ამიტომ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t\left(1+\sqrt{1+t}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

***მაგალითი* 2.** ვთქვათ $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

მართლაც, $x^2+y^2\geq 2|x|\cdot|y|$ უტოლობის ძალით გვაქვს:

$$|f(x,y)-0|=\frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

ამიტომ თუ მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის ავიღებთ $\delta=2\varepsilon$, მაშინ იმ (x,y) წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ გვექნება:

$$|f(x,y)-0| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon ,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)=0.$$

***მაგალითი* 3.** ვაჩვენოთ, რომ $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ფუნქციას (0;0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

ვთქვათ $P(x,y)=0$ წერტილი მიისწრაფვის $P_0(0;0)$ წერტილისაკენ $y=kx$ წრფის გასწვრივ. მივიღებთ

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

შედეგი დამოკიდებულია k-ზე, ამიტომ ფუნქციას (0;0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

***მაგალითი* 4.** ვაჩვენოთ, რომ $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ ფუნქციას (0;0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, თუმცა (0;0) წერტილზე გამავალი ნებისმიერი $y=kx$ წრფის გასწვრივ მას გააჩნია ზღვარი და ის უდრის ნულს.

მართლაც,

$$f(x,kx)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\frac{kx}{x^2+k^2}\to0,$$

როცა $x\to0$.

ახლა, ვთქვათ $y=x^2$, მაშინ

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

ე. ი.

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=x^2}} f(x,y)=\frac{1}{2}.$$

ამრიგად, მოცემულ ფუნქციას (0;0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

4. ორი ცვლადის ფუნქციის განმეორებითი ზღვრები. ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე $U(M_0,\delta)$ მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით $M_0(x_0,y_0)$ წერტილისა. დავუშვათ, რომ $\forall x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[$, $x\neq x_0$ არსებობს

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=g(x).$$

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

მაშინ მას ეწოდება განმეორებითი ზღვარი.

ანალოგიურად განისაზღვრება განმეორებითი ზღვარი

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

მაგალითი **5.** განვიხილოთ ფუნქცია $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

როგორც ვნახეთ (მაგალითი 3) ამ ფუნქციას (0;0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მიუხედავად ამისა

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

მაგალითი **6.** ვთქვათ $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. ცხადია, რომ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ არ არსებობს, თუმცა

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1.$$

ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია ერთმანეთის არატოლი განმეორებითი ზღვრები.

მაგალითი **7.** ვთქვათ

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad xy\neq 0,\\ 0, \quad \text{როცა} \quad xy=0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

რაც შეეხება განმეორებით

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right] \text{ და } \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right]$$

ზღვრებს, ისინი არ არსებობენ.

ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია ზღვარი, მაგრამ არ გააჩნია არცერთი განმეორებითი ზღვარი.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან გამომდინარეობს, რომ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის არსებობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს განმეორებითი ზღვრების არსებობა, და პირიქით, განმეორებითი ზღვრების (უფრო მეტიც, ერთმანეთის ტოლი განმეორებითი ზღვრების) არსებობიდან არ გამომდინარეობს ფუნქციის ზღვრის არსებობა.

5. ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა. $u=f(P)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი P_0 წერტილში თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1) $f(P)$ ფუნქცია განსაზღვრულია P_0 წერტილში;

2) არსებობს $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$; 3) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

$f(P)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი რაიმე D არეში, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილში. თუ P_0 წერტილში დარღვეულია 1)-3) პირობებიდან ერთი მაინც, მაშინ P_0 წერტილს ეწოდება $f(P)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი. ამ შემთხვევაში ვიტყვით აგრეთვე, რომ $f(P)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (წყვეტილია) P_0 წერტილში.

მოვიყვანოთ უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციის მაგალითები.

***მაგალითი* 8.** განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია (0;0) წერტილში უწყვეტია ვინაიდან შესრულებულია 1)-3) პირობები (იხ. მაგალითი 2).

***მაგალითი* 9.** განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0.\end{cases}$$

როგორც ვნახეთ (მაგალითი 3) ამ ფუნქციას (0;0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, ე. ი. ის ამ წერტილში განიცდის წყვეტას. Oxy სიბრტყის სხვა წერტილებში მოცემული ფუნქცია უწყვეტია (აჩვენეთ).

ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა.

***თეორემა* 1.1.** თუ ორი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.*

ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა საზოგადოდ მართებული არ არის. მართლაც, მაგალით 9-ში განხილული ფუნქცია წყვეტილია (0;0) წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ იგი ამ წერტილში უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ. ცხადია

$$f(x,0)=f(0,y)=0,$$

---

* $f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (x_0,y_0) წერტილში x ცვლადის მიმართ, თუ ერთი ცვლადის $f(x,y_0)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0).$$

ე. ი. $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0;0) წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.

6. ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის თვისებები. ისე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვისაც მართებულია შემდეგი თეორემები:

***თეორემა* 1.2.** რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

***თეორემა* 1.3.** თუ ფუნქცია უწყვეტია წერტილში, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ წერტილის რაიმე მიდამოში.

***თეორემა* 1.4.** თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია (x_0,y_0) წერტილში და $f(x_0,y_0)\neq 0$, მაშინ არსებობს (x_0,y_0) წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f(x_0,y_0)$-ს.

***თეორემა* 1.5.** თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ $|f(x,y)|$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

§2. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი

1. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და მათი გეომეტრიული შინაარსი. განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x_0,y_0)\in D$. გამოსახულებებს

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

სადაც $\Delta x=x-x_0$ და $\Delta y=y-y_0$, ეწოდება შესაბამისად $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდი x-ით და კერძო ნაზრდი y-ით (x_0,y_0) წერტილში.

***განსაზღვრება* 2.1.** f ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის x არგუმენტით კერძო ნაზრდის x არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

(x_0,y_0) წერტილში $z=f(x,y)$ ფუნქციის x ცვლადით კერძო წარმოებულის აღსანიშნავად მიღებულია z'_x, f_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ან $z'_x(x_0,y_0)$,

$f'_x(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ სიმბოლოები. ე. ი. თანახმად განსაზღვრებისა

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით (x_0,y_0) წერტილში:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებული რომელიმე ცვლადით არის ამ ფუნქციის, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებული, თუ მეორე ცვლადს გაწარმოებისას ჩავთვლით, როგორც მუდმივს. ამიტომ, კერძო წარმოებულები გამოითვლება ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულებითა და წესებით.

ანალოგიურად განისაზღვრება კერძო წარმოებული სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციებისათვის.

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ:

1) $f'_x(2;1)$, თუ $f(x,y)=x^3y^2-xy^2+5y$;

2) $f'_y(2;-1)$, თუ $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$

ამოხსნა. 1) გვაქვს $f'_x(x,y)=3x^2y^2-y^2$, ამიტომ $f'_x(2;1)=12-1=11$.

2) გვაქვს $f'_y(x,y)=e^{x^2-y^2}\cdot(-2y)$. ამიტომ $f'_y(2;-1)=e^{4-1}\cdot 2=2e^3$.

***შენიშვნა* 1.** მრავალი ცვლადის ფუნქციის მოცემულ წერტილში უწყვეტობიდან არ გამომდინარეობს მისი კერძო წარმოებულების არსებობა ამ წერტილში. მაგალითად $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქცია უწყვეტია (0;0) წერტილში, მაგრამ მას ამ წერტილში კერძო წარმოებულები არ გააჩნია. მართლაც

$$\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

მაგრამ $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია, როცა $\Delta x\to 0$. ე. ი. $f'_x(0;0)$ არ არსებობს. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f'_y(0;0)$ არ არსებობს.

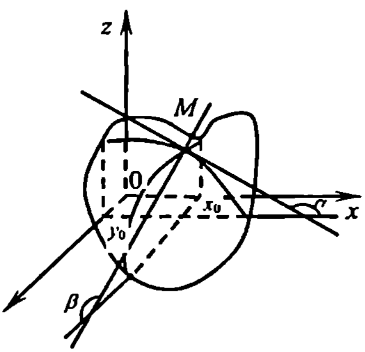
***შენიშვნა* 2.** მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების არსებობიდან მოცემულ წერტილში არ გამომდინარეობს მისი უწყვეტობა ამ წერტილში. მართლაც,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0 \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტილია (0;0) წერტილში (§1, მაგალითი 9), ადვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$$

ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციის $f'_x(x_0,y_0)$ და $f'_y(x_0,y_0)$ კერძო წარმოებულების განსაზღვრების ძალით მათი გეომეტრიული შინაარსი უშუალოდ გამომდინარეობს ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან.



ნახ. 10.3

კერძოდ, გეომეტრიულად $f'_x(x_0,y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z=f(x,y)$ ზედაპირისა და $y=y_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძთან (ნახ. 10.3), ხოლო კერძო წარმოებული $f'_y(x_0,y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z=f(x,y)$ ზედაპირისა და $x=x_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Oy ღერძთან (ნახ. 10.3). ამრიგად

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha, \quad f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta.$$

2. ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი. განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x,y)\in D$.

გამოსახულებას

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი (x,y) წერტილში.

***განსაზღვრება* 2.2.** f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x,y) წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის სრული ნაზრდი შეიძლება წარმოიდგინოს შემდეგი სახით

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

სადაც A და B რაღაც რიცხვებია, რომლებიც არ არის დამოკიდებული Δx-ზე და Δy-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ და $\beta(\Delta x,\Delta y)$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $\rho\to 0$ ($\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$).

***განსაზღვრება* 2.3.** დიფერენცირებადი f ფუნქციის პირველი რიგის სრული დიფერენციალი (x,y) წერტილში ეწოდება $A\Delta x+B\Delta y$ წრფივ ფუნქციას (Δx-ისა და Δy-ის მიმართ) და აღინიშნება dz ან $df(x,y)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

დიფერენცირებადი $z=f(x,y)$ ფუნქციისათვის საკმარისად მცირე $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ -სათვის ადგილი აქვს მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta z\approx dz.$$

ე. ი.

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y).$$

***თეორემა* 2.1.** თუ f ფუნქცია დიფერენცირებადია (x,y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f'_x(x,y)=A,\quad f'_y(x,y)=B.$$

ამრიგად, თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x,y) წერტილზე, მაშინ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\Delta y}\Delta y\,.$$

დამოუკიდებელი x და y ცვლადების დიფერენციალები ეწოდოთ ამ ცვლადების ნაზრდებს: $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. მაშინ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\Delta y}dy$$

***მაგალითი* 2.** გამოვთვალოთ $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი $M(-2;1)$ წერტილში.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები. გვაქვს $f'_x(x,y)=\dfrac{2x}{y}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{x^2}{y^2}$, ამიტომ $f'_x(-2;1)=-4$, $f'_y(-2;1)=-4$.

მოცემული ფუნქციის სრული დიფერენციალია

$$df(-2;1)=f'_x(-2;1)\cdot dx+f'_y(-2;1)\cdot dy=-4dx-4dy=-4(dx+dy).$$

***თეორემა* 2.2.** თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

შენიშვნა. თეორემა 2.1-სა და 2.2-ის შებრუნება საზოგადოდ არ შეიძლება. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}\,.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია (0;0) წერტილში და გააჩნია კერძო წარმოებულები, მაგრამ ის ამ წერტილში დიფერენცირებადი არ არის.

ამრიგად, $z=\sqrt{|xy|}$ არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა რომელიც უწყვეტია (0;0) წერტილში, აქვს კერძო წარმოებულები ამ წერტილში, მაგრამ დიფერენცირებადი არ არის ამ წერტილში. ე. ი. ფუნქციის უწყვეტობა და კერძო წარმოებულების არსებობა არის დიფერენცირებადობის აუცილებელი მაგრამ არა საკმარისი პირობა.

***თეორემა* 2.3 (*ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა*).** თუ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ არსებობს $M(x,y)$ წერტილის რაიმე $u(M,\delta)$ მიდამოში და $M(x,y)$ წერტილში ისინი უწყვეტია, მაშინ ამ წერტილში $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია.

ანალოგიურად განისაზღვრება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი.

§3. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

ვთქვათ რაიმე D არეში მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია

$$z=f(x,y).$$

ვიგულისხმოთ, რომ x და y წარმოადგენენ ერთი t ცვლადის ფუნქციებს:

$$x=\varphi(t),\ y=g(t),$$

რომლებიც განსაზღვრულია $]\alpha;\beta[$ შუალედში. დავუშვათ, რომ (x,y) წერტილი არ გამოდის D არიდან, როცა t იცვლება $]\alpha;\beta[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში

$$z=f[\varphi(t),g(t)]$$

წარმოადგენს ერთი t ცვლადის რთულ ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა:

***თეორემა* 3.1.** ვთქვათ $x=\varphi(t)$ და $y=g(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია t_0 წერტილში. თუ $z=f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში, სადაც $x_0=\varphi(t_0)$ და $y_0=g(t_0)$, მაშინ $z=f[\varphi(t),g(t)]$ რთული ფუნქცია წარმოებადია t_0 წერტილში და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\,. \tag{3.1}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=e^{x^2+y^2}$ სადაც $x=3t^2-1, y=3t^2+1$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2} \quad \frac{dx}{dt}=6t\ , \ \frac{dy}{dt}=6t$$

ამიტომ (3.1) ტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 6t+2y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 6t=$$

$$=12t\cdot e^{x^2+y^2}\cdot(x+y)=72t^3\cdot e^{18t^4+2}$$

შედეგი. თუ $z=f(x,y)$, $y=\varphi(x)$, მაშინ (3.1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dz}{dx}$ წარმოებულს ეწოდება z ფუნქციის სრული წარმოებული.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\ln\left(x^2y-xy^2\right)$, სადაც $y=\sin^2 x$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy-y^2}{x^2y-xy^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2xy}{x^2y-xy^2},\ \frac{dy}{dx}=\sin 2x,$$

ამიტომ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x^2-xy}+\frac{x-2y}{xy-y^2}\cdot\sin 2x=$$

$$=\frac{2xy-y^2+x^2\sin 2x-2xy\sin 2x}{xy\left(x-y\right)}.$$

ახლა ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$z=f(x,y),$$

სადაც $x=\varphi(t,\tau)$, $y=g(t,\tau)$. ამ შემთხვევაში z წარმოადგენს ორი t და τ ცვლადის რთულ ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.2. ვთქვათ $x=\varphi(t,\tau)$ და $y=g(t,\tau)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია (t_0,τ_0) წერტილში, ხოლო $z=f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილში, სადაც $x_0=\varphi(t_0,\tau_0)$, $y_0=g(t_0,\tau_0)$. მაშინ $z=f[\varphi(t,\tau),g(t,\tau)]$ რთული ფუნქცია დიფერენცირებადია (t_0,τ_0) წერტილში და კერძო წარმოებულები გამოითვლება ფორმულებით

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \tau}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}. \tag{3.2}$$

$\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$ წარმოებულებს ეწოდება z ფუნქციის სრული კერძო წარმოებულები.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\frac{\partial z}{\partial u}$, თუ $z=\frac{x^2}{y^3}$, სადაც $x=2u-3v, y=u^2-v^2$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4},\ \frac{\partial x}{\partial u}=2,\ \frac{\partial y}{\partial u}=2u.$$

ამიტომ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{y^3}\cdot 2-\frac{3x^2}{y^4}\cdot 2u=\frac{4xy-6x^2u}{y^4}.$$

§4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია კერძო $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ წარმოებულები რაიმე $D\subset R^2$ არეში. საზოგადოდ ეს კერძო წარმოებულები წარმოადგენენ x და y ცვლადის ფუნქციებს, რომლის განსაზღვრის არეა D.

განსაზღვრება 4.1. თუ $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციებს აქვს წარმოებული x ცვლადით (x,y) წერტილში, მაშინ მათ ეწოდებათ $f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები (x,y) წერტილში და აღინიშნება შესაბამისად შემდეგი სიმბოლოებით

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y)=z''_{x^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}.$$

ასევე განისაზღვრება $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები y ცვლადით (x,y) წერტილში:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{y^2}.$$

მაშასადამე, ორი ცვლადის ფუნქციისათვის გვაქვს ოთხი მეორე რიგის კერძო წარმოებული. $f''_{xy}(x,y)$ და $f''_{yx}(x,y)$ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს უწოდებენ შერეულ კერძო წარმოებულებს.

ანალოგიურად განისაზღვრება მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. მაგალითად განსაზღვრებით

$$\frac{\partial^{n+k+1} f}{\partial y^n\partial x^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n+k} f}{\partial y^n\partial x^k}\right).$$

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$z=xy^2+\sin(x+y)$$

ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+\cos(x+y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy+\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin(x+y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x-\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2y-\sin(x+y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2y-\sin(x+y).$$

ამ მაგალითში

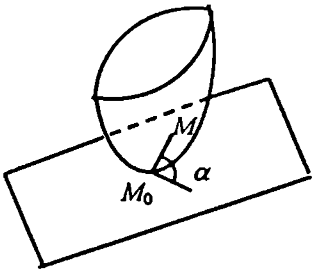
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}. \tag{4.1}$$

ისმება კითხვა: მართებულია თუ არა (4.1) ტოლობა ნებისმიერი ფუნქციისათვის? პასუხი უარყოფითია, (4.1) ტოლობა საზოგადოდ მართებული არ არის.

§5. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

თავდაპირველად შემოვიყვანოთ $z=f(x,y)$ ზედაპირისადმი მოცემულ წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის ცნება.

ვთქვათ ზედაპირზე მოცემულია რაიმე M_0 წერტილი. განვიხილოთ ამ ზედაპირზე ნებისმიერი მეორე M წერტილი და გავავლოთ M_0M მკვეთი (ნახ. 10.4). თუ M წერტილი მოძრაობს ზედაპირზე, ხოლო M_0 უძრავია, მაშინ მკვეთი იცვლის თავის



ნახ. 10.4

მდებარეობას. ზედაპირის M_0 წერტილში გავლებულ P სიბრტყეს ეწოდება მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყე M_0 წერტილში, თუ კუთხე P სიბრტყესა და M_0M მკვეთს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ ზედაპირის გასწვრივ.

შევნიშნოთ, რომ თუ M_0 წერტილში არსებობს მხები სიბრტყე, მაშინ ცხადია, ამ სიბრტყეში მდებარეობს M_0 წერტილზე გამავალი და ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი წირისადმი ამავე წერტილზე გავლებული მხები წრფე.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.1. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $N_0(x_0,y_0)$ წერტილში, მაშინ $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკს შესაბამის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილში (ნახ. 10.5), სადაც $z_0=f(x_0,y_0)$, გააჩნია მხები სიბრტყე და მისი განტოლებაა

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \qquad (5.1)$$

ამრიგად, $z=f(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0,y_0) წერტილში გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ $z=f(x,y)$ ზედაპირს $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ წერტილში გააჩნია მხები სიბრტყე.

მაგალითი. შევადგინოთ $z=\sqrt{19-x^2-y^2}$ ზედაპირის მხები სიბრტყის განტოლება $M(3;3;1)$ წერტილში.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{19-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{19-x^2-y^2}},$$

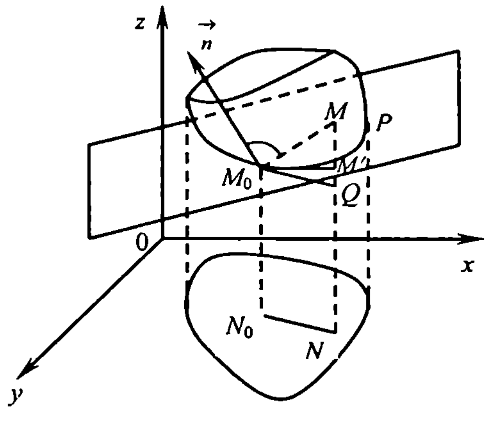
$$\frac{\partial z(3;3)}{\partial x}=-3,\ \frac{\partial z(3;3)}{\partial y}=-3.$$

ამიტომ (5.1) ტოლობის ძალით მხები სიბრტყის განტოლება იქნება

$$z-1=-3(x-3)-3(y-3) \text{ ანუ } 3x+3y+z-19=0.$$

განსაზღვრება 5.1. წრფეს, რომელიც მხები სიბრტყის მართობია და გადის შეხების წერტილში, ზედაპირის ნორმალი ეწოდება.

რადგანაც ნორმალის მიმმართველი ვექტორია $\vec{n}\{f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0),-1\}$, ამიტომ მისი განტოლება იქნება



ნახ. 10.5

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

§6. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე არეში.

განსაზღვრება 6.1. $(x_0,y_0)\in D$ წერტილს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ მოიძებნება (x_0,y_0) წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი (x,y) წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ ($f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$).

ფუნქციის მნიშვნელობებს მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში უწოდებენ შესაბამისად ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმს და ლოკალურ მინიმუმს.

ფუნქციის მაქიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი ანუ ექსტრემუმი.

თეორემა 6.1 (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა). ვთქვათ $z=f(x,y)$ ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილში აქვს ექსტრემუმი. თუ ამ წერტილში არსებობს რომელიმე სასრული კერძო წარმოებული, მაშინ ეს კერძო წარმოებული უდრის ნულს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს იმ წერტილში, სადაც კერძო წარმოებულებიდან ერთი მაინც არ არსებობს.

მაგალითად, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქციას (0;0) წერტილში კერძო წარმოებულები არ გააჩნია, მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი.

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის ყოველი კერძო წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არ არსებობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე. ი. იქიდან, რომ ფუნქციის ყოველი კერძო წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია.

***განსაზღვრება* 6.2.** წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის ყველა კერძო წარმოებული ნულის ტოლია, ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი ეწოდება.

***განსაზღვრება* 6.3.** წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის ყოველი კერძო წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, ამ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

***თეორემა* 6.2 (*ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა*).** ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქციას სტაციონარული $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის მიდამოში გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და

$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}=AC-B^2,$$

$$\left(A=f''_{x^2}(x_0,y_0),\ C=f''_{y^2}(x_0,y_0),\ B=f''_{xy}(x_0,y_0)\right).$$

მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას M_0 წერტილში:

1) როცა $\Delta>0$ აქვს ექსტრემუმი, კერძოდ მაქსიმუმი, თუ $A<0$ და მინიმუმი, თუ $A>0$;

2) როცა $\Delta<0$ ექსტრემუმი არ გააჩნია.

***შენიშვნა* 1.** თუ $AC-B^2=0$, მაშინ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი და შეიძლება არა. ე. ი. გვაქვს "საეჭვო" შემთხვევა, რის გამოც საჭირო ხდება დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება.

მართლაც, თუ $f(x,y)=x^4+y^4$, მაშინ $f'_x=4x^3, f'_y=4y^3$, $f''_{x^2}=12x^2, f''_{xy}=0$, $f''_{y^2}=12y^2$.

ადვილია შემჩნევა, რომ (0;0) არის სტაციონარული წერტილი და $\Delta(0,0)=AC-B^2=0$, ე. ი. საეჭვო შემთხვევაა. ცხადია, რომ (0;0) წერტილზე მოცემული ფუნქცია ღებულობს მინიმუმს.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $f(x,y)=x^4+y^3$. წერტილი (0;0) ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილია და $\Delta(0,0)=AC-B^2=0$, ე. ი. საეჭვო შემთხვევაა. ადვილია ჩვენება, რომ (0;0) არ არის

ექსტრემუმის წერტილი. მართლაც, $f(x,y)-f(0,0)>0$, როცა $y>0$ და $f(0,y)-f(0,0)<0$, როცა $y<0$. ამრიგად, სრული ნაზრდი (0;0) წერტილში ნიშანს არ ინარჩუნებს, ე. ი. (0;0) წერტილი ექსტრემუმის წერტილი არ არის.

***შენიშვნა* 2.** თუ $\Delta>0$, მაშინ $A=f''_{x^2}(x_0,y_0)$ და $C=f''_{y^2}(x_0,y_0)$ რიცხვებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, ამიტომ $A>0$ ან $A<0$ პირობების ნაცვლად შეიძლება შევამოწმოთ შესაბამისად $C>0$ ან $C<0$ პირობები.

მაგალითი. მოვძებნოთ ექსტრემუმი ფუნქციის

$$z=f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები სისტემიდან

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0. \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნებია (-1;-2), (1;2), (2;1), (-2;-1), ე. ი. სტაციონარული წერტილებია $M_1(-1;-2)$, $M_2(1;2)$, $M_3(2;1)$, $M_4(-2;-1)$.

გვაქვს $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y$, $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$, $\Delta f(x,y)=AC-B^2=36(x^2-y^2)$.

1) $\Delta(-1;-2)=-108<0$, ამიტომ ფუნქციას $M_1(-1;-2)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

2) $\Delta(1;2)=-108<0$, ამიტომ ფუნქციას $M_2(1;2)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

3) $\Delta(2;1)=108>0$ და $A=12>0$, ამიტომ ფუნქციას $M_3(2;1)$ წერტილში აქვს მინიმუმი $z_{min}=f(2;1)=-28$.

4) $\Delta(-2;-1)=108>0$ და $A=-12<0$, ამიტომ ფუნქციას $M_4(-2;-1)$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი $z_{max}=f(-2;-1)=28$.

XI თავი
განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§1. პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

დიფერენციალური აღრიცხვის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა. მათემატიკური ანალიზის მრავალმხრივ გამოყენებებს (გეომეტრიაში, მექანიკაში, ფიზიკაში, ტექნიკაში) მივყავართ შებრუნებულ ამოცანამდე: ვიპოვოთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია რომლის წარმოებული უდრის მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას.

ასეთი ამოცანაა მაგალითად მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონის დადგენა, როდესაც მოცემულია მისი მოძრაობის სიჩქარე ან აჩქარება.

***განსაზღვრება* 1.1.** $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი $]a;b[$ შუალედზე, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $F(x)$ წარმოებადია და $F'(x)=f(x)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება პირველადი ფუნქცია უსასრულო შუალედებზე.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $]a,b[$ შუალედის ყოველ წერტილზე $F'(x)=f(x)$ და $F'(a+)=f(a+)$, $F'(b-)=f(b-)$.

***მაგალითი* 1.** $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ წარმოადგენს $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ფუნქციის პირველადს $]-1;1[$ შუალედზე, ვინაიდან ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

***მაგალითი* 2.** $\sin x$ წარმოადგენს $\cos x$ ფუნქციის პირველადს $]-\infty;+\infty[$ შუალედზე, ვინაიდან ამ შუალედის ყოველ წერტილში $(\sin x)'=\cos x$.

***მაგალითი* 3.** $\ln x$ წარმოადგენს $\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის პირველადს $]0;+\infty[$ შუალედზე, ვინაიდან ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $F(x)$ წარმოადგენს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირველადს, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველადს, რადგან $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

***თეორემა* 1.1.** თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველადია $F(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველადების სიმრავლეა $\{F(x)+C: C\in R\}$. ე. ი. ერთიდაიგივე ფუნქციის ორი პირველადი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით.

დამტკიცება. ვთქვათ $\Phi(x)$ არის $F(x)$ ფუნქციისაგან განსხვავებული $f(x)$-ის პირველადი ფუნქცია. ე. ი. $\Phi'(x)=f(x)$ და $F'(x)=f(x)$. აქედან $F'(x)=\Phi'(x)$.

როგორც ვიცით, თუ ორი ფუნქციის წარმოებული ტოლია, მაშინ ეს ფუნქციები ერთმანეთისაგან მუდმივი სიდიდით განსხვავდებიან, ე. ი. $\Phi(x)=F(x)+C$.

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 1.2. $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირვანდელების სიმრავლეს რაიმე შუალედზე ეწოდება განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან ამ შუალედზე და $\int f(x)dx$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე. ი. თუ $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელ ფუნქციას, მაშინ

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

უკანასკნელ ტოლობაში $f(x)$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, $f(x)dx$-ს ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, ხოლო სიმბოლოს $\int$ – ინტეგრალის ნიშანი.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნის ოპერაციას (გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას) ინტეგრება ეწოდება.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირვანდელი ფუნქცია, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა რაიმე შუალედზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია? ამ კითხვაზე პასუხი საზოგადოდ უარყოფითია, თუმცა მტკიცდება, რომ შუალედზე უწყვეტ ყოველ ფუნქციას გააჩნია პირვანდელი ფუნქცია.

შევნიშნოთ, რომ ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული არის ელემენტარული ფუნქცია. მტკიცდება, რომ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. მაგალითად,

$$e^{-x^2},\ \sin x^2,\ \frac{1}{\ln x},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{e^x}{x},\ \sqrt{\sin x}$$

უწყვეტი ფუნქციებია თავიანთ განსაზღვრის არეში, ამიტომ მათ გააჩნიათ პირვანდელი ფუნქციები, მაგრამ მათი პირვანდელები არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს.

§2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალი ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ტოლია, ე. ი.

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

მართლაც განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრების თანახმად

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x).$$

აქედან ცხადია, რომ

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაიმე ფუნქციის წარმოებულიდან ამ ფუნქციისა და ნებისმიერი მუდმივის ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

ან რაც იგივეა

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრებიდან.

3. თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ $Af(x)$, სადაც A მუდმივი სიდიდეა, აგრეთვე ინტეგრებადია და როცა $A\neq 0$ მართებულია ტოლობა

$$\int Af(x)dx=A\int f(x)dx. \tag{2.1}$$

4. ორი ინტეგრებადი ფუნქციის ჯამი ინტეგრებადია და

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx. \tag{2.2}$$

მე-3 და მე-4 თვისებები გამომდინარეობს იქიდან, რომ 1-ლი თვისების ძალით (2.1) და (2.2) ტოლობების ორივე ნაწილის წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. ისინი წარმოადგენენ ერთიდაიგივე ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალებს.

შევნიშნოთ, რომ (2.2) ტოლობა მართებულია ინტეგრებად ფუნქციათა ნებისმიერი სასრული ჯამისათვის.

შენიშვნა. (2.1) და (2.2) ტოლობები გვესმის სიმრავლური თვალსაზრისით.

5. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია, მაშინ

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

ამ თვისების მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრებიდან და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესიდან.

§3. ძირითად განუსაზღვრელ ინტეგრალთა ცხრილი

ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილიდან, განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრების ძალით, მიიღება ძირითად ინტეგრალთა შემდეგი ცხრილი:

1) $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1),$ 2) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C,$

3) $\int\sin x dx=-\cos x+C,$ 4) $\int\cos x dx=\sin x+C,$

5) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C,$ 6) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C,$

7) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,$ 8) $\int e^x dx=e^x+C,$

9) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x+C=-\mathrm{arcctg}x+C,$

10) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C.$

თუ გაეითვალისწინებთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის §2-ში მოყვანილ მე-5 თვისებას, უშუალოდ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ინტეგრალები ისეთი ფუნქციებიდან, რომლებიც მიიღებიან ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციებისაგან დამოუკიდებელი ცვლადის წრფივი ფუნქციით შეცვლით.

მაგალითად:

1. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C,$ 2. $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C,$

3. $\int\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax+b)+C,$ 4. $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C.$

მომდევნო პარაგრაფებში განხილული იქნება ინტეგრების ძირითადი მეთოდები და დადგენილი იქნება ზოგიერთი კლასი ფუნქციებისა, რომელთა ინტეგრალები წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

§4. ზოგიერთი მაგალითი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე

ისეთი ფუნქციების ინტეგრება, რომლებიც წარმოადგენს ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციების წრფივ კომბინაციას, ხდება განუსაზღვრელ ინტეგრალთა §2-ში მოყვანილი მე-3 და მე-4 თვისებების გამოყენებით.

მაგალითი 1. $\int\left(4x^3-3\cos x+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx=4\int x^3dx-3\int\cos xdx+$

$$+\int x^{1/3}dx-2\int\frac{dx}{1+x^2}-2\int x^{-3}dx=x^4-3\sin x+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-2\mathrm{arctg}x+\frac{1}{x^2}+C.$$

ზოგჯერ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მარტივი გარდაქმნებით შეიძლება წარმოვადგინოთ ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციების წრფივი კომბინაციით.

მაგალითი 2.

$$\int\frac{x^2-2}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-3}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{3}{x^2+1}\right)dx=x\text{-}3\mathrm{arctg}x+C.$$

მაგალითი 3. $\int tg^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\mathrm{tg}x\text{-}x+C.$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}.$$

ვინაიდან

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

ამიტომ

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x\text{-}a|\text{-}\ln|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

მაგალითი 5. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=$

$$\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\mathrm{tg}x\text{-}\mathrm{ctg}x+C.$$

მაგალითი 6. $\int\sin^2xdx=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x+C.$

§5. ცვლადის გარდაქმნის ხერხი

ხშირად ახალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემოღებით ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შესაძლებელია მივიყვანოთ ისეთ სახეზე, რომლის ინტეგრება უფრო მარტივია. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის ეს ხერხი ემყარება შემდეგ თეორემას:

თეორემა 5.1. ვთქვათ $x=\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია რაიმე T შუალედზე და X მისი მნიშვნელობათა არეა. თუ X სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირველადი ფუნქცია, მაშინ T შუალედზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \qquad (5.1)$$

(5.1)-ს უწოდებენ ცვლადის გარდაქმნის ფორმულას განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის.

შენიშვნა. (5.1) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს $x=\varphi(t)$ ცვლადთა გარდაქმნით $\int f(x)dx$-ის გამოთვლა დავიყვანოთ

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$-ს გამოთვლაზე და პირიქით $t=\varphi(x)$ ჩასმით $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$-ის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int f(t)dt$-ს გამოთვლაზე, ე. ი.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\Big|_{t=\varphi(x)}=\int f(t)dt \tag{5.2}$$

(5.2) ტოლობაში ზოგჯერ ნაცვლად $t=\varphi(x)$ ჩასმისა გამოიყენება დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ ფუნქციის შეტანა, ე. ი.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x). \tag{5.3}$$

მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{xdx}{x^2+a}.$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $x^2+a=t$. გვაქვს $xdx=\frac{1}{2}dt$, ამიტომ

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right|+C$$

2. გამოვთვალოთ

$$I=\int xe^{-x^2}dx.$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $-x^2=t$. აქედან $xdx=-\frac{1}{2}dt$, ამიტომ

$$I=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი და მისი მსგავსი ზოგიერთი მაგალითი შეიძლება აგრეთვე გამოვთვალოთ დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ ფუნქციის შეტანის (5.3) ფორმულის გამოყენებით.

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$, ($a>0$).

5. $\displaystyle\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$

6. $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg\frac{x}{2}} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

8. გამოვთვალოთ

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

დავუშვათ $\sqrt{x^2+a}+x=t$, მაშინ $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=dt$, ე. ი.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}.$$

ამიტომ გვაქვს

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

§6. კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი ინტეგრალი

I. ინტეგრალები

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{და} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{6.1}$$

დაიყვანებიან ცხრილის ინტეგრალებამდე, კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის გზით.

1. $\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3}+C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{x-3}{2}+C.$

3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$

4. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{16}} = \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{4x-5}{\sqrt{7}}+C\cdot$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+16}} = \int \frac{dx}{|x-4|} = \begin{cases} \ln(x-4)+C, & \text{როცა } x>4, \\ -\ln|x-4|+C, & \text{როცა } x<4. \end{cases}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2-9}} = \ln|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\,|+C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{7}{4}x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{81}{64}-\left(x+\frac{7}{8}\right)^2}} =$

$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+7}{9}+C.$

II. ინტეგრალები

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{და} \quad \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

დაიყვანებიან (6.1) ინტეგრალებამდე მრიცხველში ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის $2ax+b$ წარმოებულის გამოყოფის გზით.

8. გამოვთვალოთ

$$\int \frac{2x-1}{5x^2+4x+1}dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\int \frac{2x-1}{5x^2+4x+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{10x+4}{5x^2+4x+1}dx - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{5x^2+4x+1} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\left(5x^2+4x+1\right)}{5x^2+4x+1} - \frac{9}{25}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}\ln\left(5x^2+4x+1\right) -$$

$$-\frac{9}{5}arctg\left(5x+2\right)+C.$$

§7. ნაწილობითი ინტეგრება

თეორემა 7.1. ვთქვათ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე შუალედზე. თუ ამ შუალედზე არსებობს $\int v(x)u'(x)dx$, მაშინ არსებობს $\int u(x)v'(x)dx$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

ანუ

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (7.1)$$

(7.1) ტოლობას უწოდებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\int udv$ ინტეგრალის

გამოთვლა დავიყვანოთ $\int vdu$ ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი გამოსათვლელი აღმოჩნდეს, ვიდრე მოცემული ინტეგრალი.

მოვიყვანოთ მაგალითები ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებაზე.

1. $$\int x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin x dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx =$$
$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

2. $$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

ზოგიერთი ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის რამოდენიმეჯერ გამოყენება:

3. $$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & dv = e^x dx \\ du = 2xdx, & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} =$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი
$$\int \sqrt{x^2 + a} dx.$$

გვაქვს
$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{x^2 + a}, & dv = dx \\ du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}}, & v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} =$$
$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

აქედან §5-ის მაგალითი 8-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:
$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

5. მივიღოთ
$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}, \; n \in N, \; a \neq 0$$

ინტეგრალის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა.

გვაქვს:

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\left|\begin{matrix} u=\dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}, & dv=dx \\ du=-\dfrac{2nxdx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}, & v=x\end{matrix}\right|=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+$$

$$+2n\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}-2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$I_{n+1}=\frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n\,. \qquad (7.2)$$

რადგან

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\,,$$

ამიტომ (7.2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C\,.$$

§8. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

რაციონალური ფუნქცია (წილადი) ეწოდება $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ სახის ფუნქციას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია. ამ პარაგრაფში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $P(x)$ და $Q(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, ე. ი. მათ არა აქვთ საერთო ფესვები.

რაციონალურ წილადს ეწოდება წესიერი, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას არაწესიერი წილადი ეწოდება.

ცხადია, რომ ყოველი არაწესიერი წილადი, მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით, შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მრავალწევრისა და წესიერი წილადის ჯამი.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერ წილადს, ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ მნიშვნელში x-ის უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

განსაზღვრება. უმარტივესი რაციონალური წილადი ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციებს

1. $\dfrac{A}{x-a}$, 2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,...)$,

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ $(k=2,3,...)$,

სადაც A, M, N, a, p, q ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x^2+px+q კვადრატულ სამწევრს აქვს კომპლექსური ფესვები (ე. ი. $p^2-4q<0$).

მტკიცდება, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით, ამიტომ განუსაზღვრელი ინტეგრალი წესიერი რაციონალური წილადიდან წარმოადგენს უმარტივესი წილადების განუსაზღვრელი ინტეგრალების ჯამს.

პირველი ორი ტიპის უმარტივესი წილადების ინტეგრება მარტივია.

მესამე ტიპის უმარტივესი წილადის ინტეგრება განხილულია მეექვსე პარაგრაფის მეორე პუნქტში.

მეოთხე ტიპის უმარტივესი წილადის ინტეგრება ხდება შემდეგნაირად:

$$I_k=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}dx .$$

დავუშვათ $t=x+\frac{p}{2}$, $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a$ $\left(q-\frac{p^2}{4}>0\right)$. მივიღებთ

$$I_k=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt .$$

აქედან ცხადია, რომ I_k ინტეგრალი წარმოადგენს

$$I'_k=\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} \quad \text{და} \quad I''_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

ინტეგრალების წრფივ კომბინაციას. გვაქვს

$$I'_k=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C,$$

ხოლო I''_k ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ §7-ის მაგალითი 5-ში მიღებული (7.2) რეკურენტული ფორმულით

$$I_{k+1}''=\frac{x}{2ka^2\left(x^2+a^2\right)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}J_k\,.$$

ამასთან
$$I_1''=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{1}{a}+C\,.$$

ამრიგად მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. ინტეგრალი ყოველი რაციონალური ფუნქციიდან თავის განსაზღვრის არეში წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას, რომელიც გამოისახება რაციონალური, არქტანგენს და ლოგარითმული ფუნქციების წრფივი კომბინაციით.

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი
$$\int\frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}.$$

ამოხსნა. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს წესიერ რაციონალურ წილადს და მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და მარტივი ფესვები, ამიტომ
$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3};$$

აქედან გვაქვს
$$1=A(x-1)(x-3)+B(x+2)(x-3)+C(x+2)(x-1).$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $x=-2$, $x=1$ და $x=3$-ს, შესაბამისად მივიღებთ
$$15A=1,\ -6B=1 \text{ და } 10C=1.$$

აქედან
$$A=\frac{1}{15},\ B=-\frac{1}{6},\ C=\frac{1}{10}.$$

ამრიგად,
$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)}=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{10}\frac{1}{x-3},$$

საიდანაც
$$\int\frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}=\frac{1}{15}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{1}{10}\ln|x-3|+C.$$

***მაგალითი* 2.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი
$$\int\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2\left(x^2+2x+5\right)}dx\,.$$

ამოხსნა. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წესიერი რაციონალური წილადია, ხოლო მნიშვნელს აქვს ნამდვილი ორჯერადი

ფესვი და მარტივი კომპლექსური ფესვები, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+5},$$

აქედან გვაქვს ტოლობა

$$3x^3-5x+10=A_1(x^2+2x+5)+A_2(x-1)(x^2+2x+5)+(Bx+D)(x-1)^2.$$

ამ იგივეობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეების x ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტების გატოლებით და მიღებული სისტემის ამოხსნით, გვექნება

$$A_1=1,\ A_2=0,\ B=3,\ D=5.$$

ამრიგად

$$\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3x+5}{x^2+2x+5}=\frac{1}{(x-1)^2}+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+2\frac{1}{(x+1)^2+4},$$

საიდანაც გვაქვს

$$\int\frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}dx=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

§9. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

1. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \tag{9.1}$$

სადაც $R(u,v)$ არის u და v არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, α, β, γ, δ – მუდმივი რიცხვებია და $n\in N$, $n\neq 1$. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha\delta\neq\beta\gamma$. თუ $\alpha\delta=\beta\gamma$, მაშინ $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ფარდობა მუდმივი სიდიდეა.

$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ სახის ფუნქციას უწოდებენ წილად-წრფივ ირაციონალურ ფუნქციას. (9.1) ინტეგრალი იხსნება ჩასმით

$$t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},$$

რომელსაც (9.1) ინტეგრალი დაჰყავს ინტეგრალამდე t ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან.

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}.$$

ამოხსნა. მოვახდინოთ ჩასმა

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

საიდანაც

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t\text{-}2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

2. ზოგადი სახის წილად-წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left[x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1},\ldots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right]dx, \tag{9.2}$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ რაციონალური არამთელი რიცხვებია, ხოლო α, β, γ, δ ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $\alpha\delta\neq\beta\gamma$. (9.2) ინტეგრალი იხსნება ჩასმით

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^{\lambda},$$

სადაც λ არის $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ რიცხვების საერთო მნიშვნელი.

***მაგალითი* 2.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}.$$

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{3}$ და ამიტომ $\lambda=6$. მაშასადამე საჭიროა ვისარგებლოთ ჩასმით $2x-1=t^6$. აქედან

$$x=\frac{1}{2}(t^6+1),\quad dx=3t^5dt.$$

ამიტომ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2x-1}}=\int\frac{3t^5}{t^3+t^2}dt=3\int\frac{t^3}{t+1}dt=$$

$$= 3\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3\ln|t+1| + C =$$

$$= \sqrt{2x-1} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1} + 3\sqrt[6]{2x-1} - \ln\left(\sqrt[6]{2x-1} + 1\right) + C .$$

§10. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება

I. $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$ და $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$ ინტეგრალების გამოსათვლელად საჭიროა ინტეგრალქვეშა ფუნქციების ნამრავლი გარდავქმნათ ჯამად.

II. ინტეგრალი

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{10.1}$$

ჩასმით

$$t = tg\frac{x}{2},\ x \in]-\pi, \pi[\tag{10.2}$$

დაიყვანება ინტეგრალამდე t-ს მიმართ რაციონალური ფუნქციიდან. ამიტომ მას უწოდებენ უნივერსალურ ჩასმას. უნივერსალური ჩასმით ინტეგრალის გამოთვლის დროს გამოიყენება ტოლობები

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x = 2\mathrm{arctg}t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int\frac{dx}{2+\cos x}.$$

ამოხსნა. მოვახდინოთ (10.2) ჩასმა; გვექნება

$$I = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C .$$

შევნიშნოთ, რომ არსებობს (10.1) ინტეგრალის ისეთი კერძო შემთხვევა, როდესაც მისი გამოთვლა უფრო მოხერხებულია სხვა ჩასმებით. მოვიყვანოთ ასეთი შემთხვევებიდან ზოგიერთი.

1) თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია cosx-ის მიმართ, ე. ი.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა sinx=t.

2) თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია sinx-ის მიმართ, ე. ი.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა cosx=t.

3) თუ

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\operatorname{tg}x=t$.

***მაგალითი* 2.** გამოთვალეთ

$$I=\int\frac{\sin^2 x\cos^3 x}{2-\cos^2 x}dx.$$

ამოხსნა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\cos x$-ის მიმართ. ამიტომ გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x=t$. გვექნება

$$I=\int\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{t^2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}dt=-\int\frac{t^4-t^2}{1+t^2}dt=$$

$$=-\int\left(t^2-2+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=-\frac{t^3}{3}+2t-2arctgt+C=-\frac{\sin^3 x}{3}+2\sin x-$$

$$-2\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

***მაგალითი* 3.** გამოთვალეთ

$$I=\int\sin^3 x\cos^4 x dx.$$

ამოხსნა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\sin x$-ის მიმართ. თუ გამოვიყენებთ $\cos x=t$ ჩასმას, გვექნება

$$I=-\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x d\cos x=\int\left(t^2-1\right)t^4dt=\int\left(t^6-t^4\right)dt=$$

$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

***მაგალითი* 4.** გამოთვალეთ

$$I=\int\frac{\sin x+2\cos x}{\sin^2 x\cos x+4\cos^3 x}dx.$$

ამოხსნა ვისარგებლოთ ჩასმით $\operatorname{tg}x=t$. თუ მრიცხველსა და მნიშვნელს გავყოფთ $\cos^3 x$-ზე მივიღებთ

$$I=\int\frac{tgx+2}{tg^2x+4}dtgx=\int\frac{t+2}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+4\right)+arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(tg^2x+4\right)+arctg\frac{tgx}{2}+C$$

III. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left(e^x\right)dx. \qquad (10.3)$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $t=e^x$, საიდანაც $dx=\frac{dt}{t}$. ამიტომ

$$\int R\left(e^x\right)dx=\int\frac{R(t)}{t}dt=\int R_1(t)dt.$$

ე. ი. (10.3) ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

***მაგალითი* 7.** გამოთვალეთ

$$I=\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $t=e^x$. საიდანაც $dx=\dfrac{dt}{t}$. ამიტომ გვაქვს

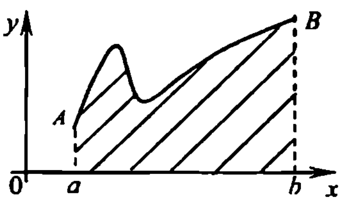
$$I=\int\frac{t-1}{t(t+1)}dt=2\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{t}=2\ln(1+t)-\ln t+C=2\ln\left(1+e^x\right)-x+C.$$

XII თავი

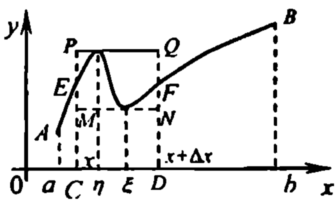
განსაზღვრული ინტეგრალი

§1. მრუდწირული ტრაპეცია და მისი ფართობი

ვთქვათ მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი $y=f(x)$ ფუნქცია. მრუდწირული ტრაპეცია ეწოდება ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით (ნახ. 12.1)



ნახ. 12.1



ნახ. 12.2

ისმება ამოცანა: როგორ ვიპოვოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი? მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციაში განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეცია $CEFD$ (ნახ. 12.2), რომლის C წერტილის აბსცისაა x, ხოლო D წერტილის აბსცისაა $x+\Delta x$. მრუდწირული $aAEC$ ტრაპეციის ფართობი S_{aAEC} არის x-ის ფუნქცია, აღვნიშნოთ ის $S(x)$ სიმბოლოთი. ცხადია $S(a)=0$ და $S(b)=S$, სადაც S არის $aABb$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. $S(x+\Delta x)=S_{aAFD}$. ვთქვათ, $\xi(\Delta x)$ და $\eta(\Delta x)$ არის, შესაბამისად $f(t)$ ფუნქციის მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილები $[x;x+\Delta x]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ მართკუთხედები $CMND$ და $CPQD$ ($MN||Ox$, $PQ||Ox$). ნახ. 12.2-დან ჩანს, რომ

$$S_{CMND}=f[\xi(\Delta x)]\cdot\Delta x\le S(x+\Delta x)-S(x)\le S_{CPQD}=f[\eta(\Delta x)]\cdot\Delta x.$$

აქედან გვაქვს

$$f\left[\xi(\Delta x)\right] \le \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \le f\left[\eta(\Delta x)\right]. \qquad (1.1)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ (1.1)-ს ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $\Delta x<0$.

თუ (1.1) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$-კენ და გავითვალისწინებთ, რომ $f(t)$ უწყვეტია, მივიღებთ $S'(x)=f(x)$. ე. ი. ფართობი $S(x)$ არის იმ $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია, რომლის გრაფიკითაც ზემოდან არის შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეცია. აღვნიშნოთ $F(x)$-ით $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადი ფუნქცია, მაშინ ცხადია ნებისმიერი x-სათვის $[a,b]$ სეგმენტიდან ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x)=S(x)+C.$$

აქედან მიიღება $F(a)=S(a)+C=C$, $F(b)=S(b)+C=S+F(a)$, საიდანაც

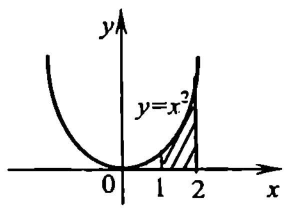
$$S=F(b)-F(a). \qquad (1.2)$$

(1.2) არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა.

მაგალითი **1.** გამოვთვალოთ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$-ის გრაფიკით და წრფეებით $x=1, x=2, y=0$ (ნახ. 12.3)

ამოხსნა. $y=x^2$ დადებითია [1,2] სეგმენტზე. ამ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქციაა $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ ამიტომ (1.2) ფორმულის ძალით მოცემული ფიგურის ფართობი იქნება

$$S=\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

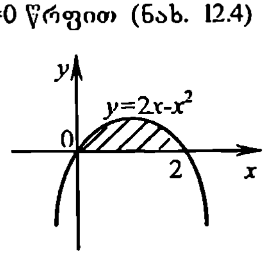


ნახ. 12.3

მაგალითი **2.** გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2x-x^2$ პარაბოლით და $y=0$ წრფით (ნახ. 12.4)

ამოხსნა. $y=2x-x^2$ ფუნქცია არაუარყოფითია [0,2] სეგმენტზე, მისი ერთ-ერთი პირველადი ფუნქციაა $F(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3$ (1.2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ საძებნი ფართობი

$$S=F(2)-F(0)=4-\frac{8}{3}-0-0=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$



ნახ. 12.4

§2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება

$[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი, რომელიც აღინიშნება სიმბოლოთი $\int_a^b f(x)dx$ (იკითხება: განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე ეფ იქს დე იქსიდან), ეწოდება რიცხვს $F(b)-F(a)$, სადაც $F(x)$ არის $f(x)$-ის რაიმე პირველადი ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე.

ამრიგად

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{2.1}$$

a-ს ინტეგრალის ქვედა საზღვარი ეწოდება, ხოლო b-ს ზედა საზღვარი.

(2.1) ტოლობას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება.

(2.1) ფორმულის ჩასაწერად იყენებენ აღნიშვნას $F(b)-F(a)=$ $=F(x)\Big|_a^b$. ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით (2.1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \tag{2.2}$$

(2.2) ფორმულიდან ნათლად ჩანს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის პროცესი.

გამოვთვალოთ ინტეგრალები

1. $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-0=1=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

§3. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი და თვისებები

მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლიდან და განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებიდან გვაქვს: განსაზღვრული ინტეგრალი $[a,b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციიდან, უდრის იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით.

ამრიგად, მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{3.1}$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები:

1) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx\,.$

2) თუ $[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)=M$, სადაც M მუდმივია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=M(b-a).$$

3) მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ნიშნის გარეთ, ე. ი. თუ A მუდმივია, მაშინ

$$\int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

4) ფუნქციათა ჯამიდან ინტეგრალი უდრის ინტეგრალთა ჯამს ამავე ფუნქციებიდან, ე. ი.

$$\int_a^b\left[f(x)+\varphi(x)\right]dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b\varphi(x)\,dx\,.$$

5) თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე და $a<c<b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

1) $$\int_1^2\left(5x^4+2x-8\right)dx=\int_1^2 5x^4dx+\int_1^2 2xdx-\int_1^2 8dx=x^5\Big|_1^2+x\Big|_1^2-8x\Big|_1^2=$$
$$=(2^5-1)+(2^2-1)-8(2-1)=26$$

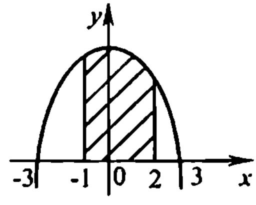
2) $$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(8\cos 4x-4\sin 2x+\frac{2}{\cos^2 2x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}8\cos 4xdx-$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{8}}4\sin 2xdx+\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{2}{\cos^2 2x}dx=2\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}+2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}+tg\,2x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=$$
$$=(2-0)+\left(\sqrt{2}-2\right)+(1-0)=\sqrt{2}+1\,.$$

2. გამოვთვალოთ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=9-x^2$ პარაბოლით და წრფეებით $y=0$, $x=-1$, $x=2$ (ნახ. 12.5).

ამოხსნა. $y=9-x^2$ ფუნქცია დადებითია [-1,2] სეგმენტზე, ამიტომ საძებნი S ფართობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (3.1) ფორმულა

$$S=\int_{-1}^{2}\left(9-x^2\right)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(9\cdot2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(9\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24\,.$$



ნახ. 12.5

§4. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში

სამართლიანია თეორემა:

***თეორემა* 4.1.** ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ $x=\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, ამასთან $a\le\varphi(t)\le b$, როცა $\alpha\le t\le\beta$ და $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, მაშინ

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\,. \tag{4.1}$$

(4.1) ფორმულას ეწოდება ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში.

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J=\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\cos x^2dx$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x^2=t$, როცა $x=0$, მაშინ $t=0$, როცა $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, მაშინ $t=\frac{\pi}{2}$, $2xdx=dt$, $xdx=\frac{1}{2}dt$. გვაქვს

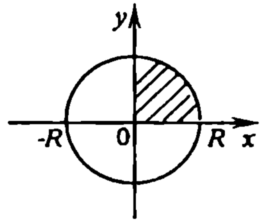
$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\,.$$

***მაგალითი* 2.** გამოვთვალოთ R რადიუსიანი წრის ფართობი.

ამოხსნა. $x^2+y^2=R^2$ არის R რადიუსიანი წრეწირის განტოლება ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 12.6). წრეწირის ზედა ნახევრის განტოლებაა $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ეს ფუნქცია არაუარყოფითია $[-R,R]$ სეგმენტზე, ამიტომ წრის საძებნი ფართობის გამოსათვლელად (რადგანაც ის სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ) საკმარისია გამოვთვალოთ იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია I საკოორდინატო მეოთხედში (ნახ. 12.6)

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx .$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x=R\sin t$ გვექნება, როდესაც $x=0$, მაშინ $t=0$, ხოლო როდესაც $x=R$, მაშინ $t=\frac{\pi}{2}$. ამრიგად



ნახ. 12.6

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2R^2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{x+1} = t$, ე. ი. $x=t^2-1$. როცა $x=3$, მაშინ $t=2$, ხოლო, როცა $x=8$, მაშინ $t=3$. გვაქვს

$$I = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = 2\int_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 10\frac{2}{3} .$$

§6. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის

მართებულია თეორემა:

თეორემა 6.1. თუ $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx . \qquad (5.1)$$

(5.1) ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის. იგი შეიძლება მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. $\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{vmatrix} x = u, & \sin x dx = dv \\ du = dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^\pi +$

$$+\int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi .$$

მაგალითი 2. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \begin{vmatrix} \ln x = u, & \frac{dx}{\sqrt{x}} = dv \\ du = \frac{dx}{x}, & v = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e -$

$$-2\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 2\left(2-\sqrt{e}\right).$$

მაგალითი 3. $\int_0^1 arctgx dx = \begin{vmatrix} arctgx = u, & dx = dv \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{vmatrix} = xarctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 .$$

§6. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციის ინტეგრება

სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{თუ } f(x) \text{ ლუწია,} \\ 0, & \text{თუ } f(x) \text{ კენტია.} \end{cases}$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია, პერიდით l და ინტეგრებადია $[0,l]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი $c\in R$-ისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_c^{c+l} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx .$$

მაგალითი 1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

მაგალითი 2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$, $n\in Z$ რადგან $\sin nx$ კენტი ფუნქციაა.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0$, $n\in Z$, $n\neq 0$. ვინაიდან $\cos nx$ ლუწია, ამიტომ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=2\int_{0}^{\pi}\cos nxdx=\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=0$.

§7. არასაკუთრივი ინტეგრალები

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნების განზოგადებას იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია უსასრულო შუალედზე და იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქცია განსაზღვრულია სასრულ შუალედზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული ამ შუალედზე.

1. არასაკუთრივი ინტეგრალები უსასრულო საზღვრით. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,+\infty[$ შუალედზე.

განსაზღვრება 7.1. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{l\to+\infty}\int_{a}^{l}f(x)dx, \tag{7.1}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,+\infty[$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx. \tag{7.2}$$

ამრიგად

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{l\to+\infty}\int_{a}^{l}f(x)dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა (7.1) ზღვარი სასრულია (7.2) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას – ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a,+\infty[$ შუალედზე. თუ (7.1) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ (7.2) ინტეგრალი განშლადია.

შენიშვნა. თუ $c>a$, მაშინ $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ და $\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია $[a,+\infty[$ შუალედზე, მაშინ

$$\int_{a}^{t}f(x)dx=F(t)-F(a),$$

ამიტომ

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t)-F(a)=F(+\infty)-F(a)= F(x)\Big|_a^{+\infty}, \qquad (7.3)$$

სადაც

$$F(+\infty)= \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

$]-\infty,a]$ შუალედზე მოცემული უწყვეტი ფუნქციისათვის არასაკუთრივი ინტეგრალი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx .$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში, მაშინ მას ინტეგრებადი ეწოდება ამ შუალედში, თუ კრებადია ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx .$$

მათ ჯამს ეწოდება ინტეგრალი $]-\infty,+\infty[$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქციიდან და

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx .$$

***მაგალითი* 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} .$$

$\dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $F(x)=\operatorname{arctg}x$. ცხადია, რომ $F(0)=0$, $F(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$. ამიტომ (7.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} .$$

***მაგალითი* 2.** ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ განშლადია.

$\cos x$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $\sin x$. მაგრამ $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ არ არსებობს, ე. ი. $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ განშლადია.

***მაგალითი* 3.** ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, სადაც $a>0$, კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 1$.

თუ $\alpha\neq 1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}+\infty, & \text{როცა } \alpha<1,\\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{როცა } \alpha>1.\end{cases}$$

თუ $\alpha=1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln a)=+\infty.$$

მაშასადამე $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a>0$, კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\leq 1$.

2. არასაკუთრივი ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b[$ შუალედში და

$$\lim_{x\to b-}f(x)=\infty.$$

***განსაზღვრება* 7.3.** თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx\,, \tag{7.4}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,b]$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^b f(x)dx\,. \tag{7.5}$$

იმ შემთხვევაში, როცა (7.4) ზღვარი სასრულია, (7.5) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ (7.4) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ (7.5) ინტეგრალი განშლადია.

შენიშვნა. თუ $a<c<b$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ და $\int_c^b f(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან განშლადია.

თუ $[a,b[$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $F(x)$, მაშინ

$$\int_a^t f(x)dx=F(t)-F(a),$$

ამიტომ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} (F(t)-F(a))=F(b-)-F(a),$$

სადაც

$$F(b-)=\lim_{t\to b-} F(t).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $]a,b]$ შუალედში და $\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$, ე. ი.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx .$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $]a,b[$ ინტერვალზე და

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\infty,\ \ \lim_{x\to b-} f(x)=\infty,$$

მაშინ მას ეწოდება ინტეგრებადი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $c\in]a,b[$-სათვის კრებადია ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)dx \ \text{ და } \int_c^b f(x)dx .$$

ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b]$ სეგმენტზე და განსაზღვრით:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

ახლა ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;c[$ და $]c;b]$ შუალედებზე, ამასთან $\lim_{x\to a+} f(x)$; $\lim_{x\to c-} f(x)$ ზღვრებიდან ერთი მაინც უსასრულობაა. თუ არსებობს ინტეგრალები $\int_a^c f(x)dx$ და $\int_c^b f(x)dx$, მაშინ ჯამს

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b]$ სეგმენტზე და განსაზღვრით

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha<1$ და განშლადია, როცა $\alpha\geq 1$.

როცა $\alpha\neq 1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \text{თუ} \quad \alpha<1,\\ +\infty, \text{ თუ} & \alpha>1.\end{cases}$$

როცა $\alpha=1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_0^1=+\infty.$$

მაშასადამე $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha<1$ და განშლადია, როცა $\alpha\geq 1$.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

გვაქვს

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-}\arcsin t=\frac{\pi}{2}.$$

მაგალითი 6. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \ln x dx$ კრებადია.

$\ln x$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $F(x)=x\ln x-x$. ცხადია $F(1)-F(0+)=-1$, ე. ი.

$$\int_0^1 \ln x dx=-1.$$

§8. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიაში

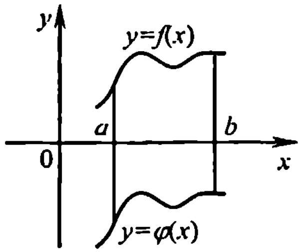
I. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

1. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში. როგორც ვიცით იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია არაუარყოფითი, უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$, $\varphi(x)\le f(x)$, უწყვეტ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით (ნახ. 12.7) გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx\,. \tag{8.1}$$

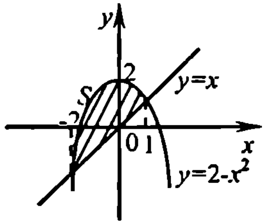


ნახ. 12.7

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2-x^2$ და $y=x$ ფუნქციათა გრაფიკებით (ნახ. 12.8).

ამოხსნა. თავდაპირველად ვიპოვოთ ამ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები. $2-x^2=x$ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ ეს აბსცისებია $x_1=-2$ და $x_2=1$. (8.1) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$



ნახ. 12.8

2. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით. ვთქვათ მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია Ox ღერძით, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ წრფეებით და ფუნქციის გრაფიკით, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=g(t), \end{cases} \tag{8.2}$$

სადაც $g(t)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია, ამასთან $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. თუ (8.2) სისტემიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს მივიღებთ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $y=g(\varphi^{-1}(x))=f(x)$ ფუნქციას და მაშასადამე მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b y\,dx\,.$$

თუ მიღებულ ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=\varphi(t)$, გვექნება

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi'(t)\,dt \tag{8.3}$$

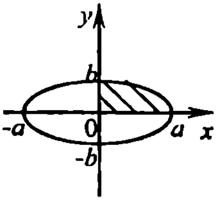
(8.3) წარმოადგენს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას, როდესაც ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა. რადგან ელიფსი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ, ფიგურის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ საკოორდინატო მეოთხედში (ნახ. 12.9). როდესაც $x=0$, მაშინ $t=\dfrac{\pi}{2}$, ხოლო, როდესაც $x=a$, მაშინ $t=0$. ე. ი. $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ და $\beta=0$. მაშასადამე (8.3) ფორმულის ძალით გვაქვს



ნახ. 12.9

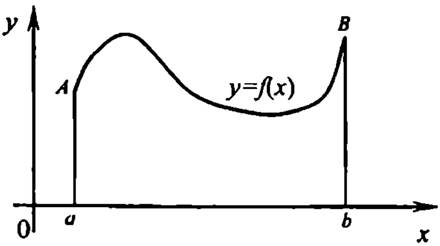
$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(a\cos t)'\,dt =$$

$$=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab\,.$$

II. წირის რკალის სიგრძე

1. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში. ვთქვათ ბრტყელი AB წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია (ნახ. 12.10).



ნახ. 12.10

მტკიცდება, რომ AB რკალის სიგრძე L გამოითვლება ფორმულით

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\,. \qquad (8.4)$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე.

ამოხსნა. R რადიუსიანი წრეწირის (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში) ზედა ნახევრის განტოლებაა $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (იხ. §4, მაგალითი 2). რადგანაც წრეწირი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ (ნახ. 12.6), ამიტომ წრეწირის სიგრძე L ტოლია:

$$L=4\int_0^R\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^R=$$

$$=4R\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi R\,.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ განტოლებით მოცემული წირის რკალის სიგრძე, როცა $0\le x\le 1$.

ამოხსნა. (8.4) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\bigg|_0^1=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^2-1}{2e}\,.$$

2. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით. ვთქვათ AB წირი წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=g(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. რადგანაც $x=\varphi(t)$ მონოტონური ფუნქციაა (იხილეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრება), ამიტომ, როცა ის ზრდადია $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, ხოლო, როცა კლებადია $a=\varphi(\beta)$ და $b=\varphi(\alpha)$ (a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია). თუ (8.4) ფორმულაში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=\varphi(t)$, მივიღებთ

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2}\,dt\,. \tag{8.5}$$

ეს არის პარამეტრული სახით მოცემული წირის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა.

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ

$$x=a(t\text{-}\sin t),\ y=a(1\text{-}\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi,$$

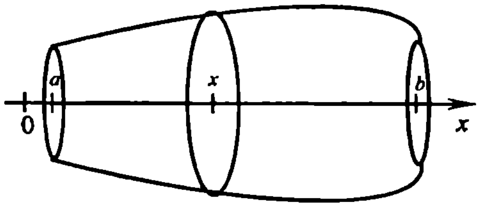
ციკლოიდის ერთი თაღის სიგრძე.

ამოხსნა. რადგან $x'=\varphi'(t)=a(1\text{-}\cos t)$ და $y'=g'(t)=a\sin t$, ამიტომ (8.5) ფორმულის ძალით

$$L=\int_0^{2\pi}a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a\,.$$

III. სხეულის მოცულობის გამოთვლა

1. სხეულის მოცულობის გამოთვლა განივი კვეთის ფართობების საშუალებით. ვთქვათ მოცემულია რაიმე სხეული, რომლისთვისაც ცნობილია Ox ღერძის მართობული ნებისმიერი სიბრტყით კვეთის ფართობი (ნახ. 12.11).



ნახ. 12.11

ასეთ კვეთებს განივ კვეთებს უწოდებენ. ცხადია განივი კვეთა სავსებით განისაზღვრება სიბრტყით Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილის აბსცისით. მაშასადამე განივი კვეთის ფართობი წარმოადგენს x-ის ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $S(x)$-ით და ვიგულისხმოთ, რომ იგი ცნობილია. a და b-თი აღვნიშნოთ კიდური კვეთების შესაბამისი აბსცისები. მტკიცდება, რომ თუ $S(x)$

ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ მოცემული სხეულის მოცულობა V გამოითვლება ფორმულით

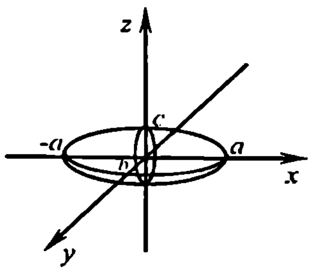
$$V=\int_a^b S(x)dx\,. \tag{8.6}$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ელიფსოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა. ელიფსოიდის განივი კვეთა, რომლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისაა x, წარმოადგენს



ნახ. 12.12

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

ელიფსს, რომლის ნახევარღერძებია $b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ და $c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ (ნახ. 12.12). თუ ამ ელიფსით შემოსაზღვრულ ფიგურის ფართობს აღვნიშნავთ $S(x)$-ით, გვექნება (იხ. მაგალითი 2)

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

აქედან კი (8.6)-ის ძალით

$$V=\int_{-a}^{a} S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc\,.$$

კერძოდ, თუ $a=b=c=R$, მივიღებთ R-რადიუსიანი ბირთვის მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულას

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

2. ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა.

ვთქვათ არაუარყოფითი $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით. ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 12.13).

ამ სხეულის განივი კვეთა, რომელიც შეესაბამება [a,b] სეგმენტის x წერტილს წარმოადგენს წრეს რადიუსით $f(x)$. ამიტომ კვეთის ფართობია

$$S(x)=\pi[f(x)]^2=\pi y^2.$$

(8.6) ფორმულის ძალით გვაქვს

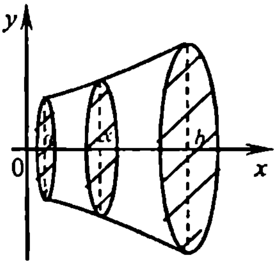
$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx=\pi\int_a^b y^2dx\,. \qquad (8.7)$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება [$0,\pi$] სეგმენტზე მოცემული $y=\sin x$ სინუსოიდით შექმნილი მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

ამოხსნა. (8.7) ფორმულის ძალით

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2 x dx=$$

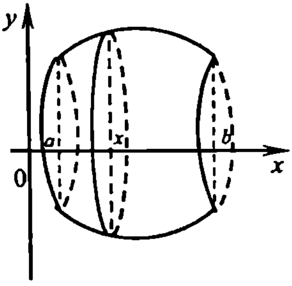
$$=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{2}.$$



ნახ. 12.13

IV. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ $y=f(x)$ არის [a,b] სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია. განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 12.14).



ნახ. 12.14

მტკიცდება, რომ ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\,. \qquad (8.8)$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ R-რადიუსიანი სფეროს ფართობი.

ამოხსნა. მოცემული სფერო წარმოადგენს $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს. ამიტომ (8.8) ფორმულის ძალით

$$S=4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4\pi\int_0^R R\,dx=4\pi R^2$$

§9. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ფიზიკაში

1. ძალის მუშაობა. ვთქვათ მატერიალური M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, რომლის მიმართულება ემთხვევა Ox ღერძის მიმართულებას. მაშინ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, როცა M წერტილი გადაადგილდება $x=a$ წერტილიდან $x=b$ წერტილამდე გამოისახება ფორმულით

$$W=\int_a^b F(x)dx\,,$$

იგულისხმება, რომ $\vec{F}$ ძალის F სიდიდე x-ის უწყვეტი ფუნქციაა.

2. მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ, მატერიალური AB წირის განტოლებაა $y=f(x)$, სადაც $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და წირს აქვს უწყვეტი სიმკვრივე $\rho=\rho(x)$. ასეთი მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით

$$x_0=\frac{\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}\,,\qquad y_0=\frac{\int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}\,. \qquad (9.1)$$

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ არაერთგვაროვანი $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ნახევარი წრეწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. ცხადია

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\,;\qquad \sqrt{1+(y')^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,.$$

(9.1) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\xi=\frac{\int\limits_{-r}^{r}\frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\pi r}=0$$

(ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია),

$$\eta=\frac{1}{\pi r}\int\limits_{-r}^{r}\frac{rydx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r}dx=\frac{2r}{\pi}.$$

ამრიგად, მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია $\xi=0$, $\eta=\frac{2r}{\pi}$.

3. ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი. განვიხილოთ თხელი მატერიალური ერთგვაროვანი ფირფიტა, რომელიც შემოსაზღვრულია უწყვეტი $y=f(x)$, $y=g(x)$ წირებით $f(x)\geq g(x)$ და წრფეებით $x=a$, $x=b$. ასეთი მატერიალური ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულებია

$$x_0=\frac{1}{S}\int\limits_a^b x\left[f(x)-g(x)\right]dx,\quad y_0=\frac{1}{2S}\int\limits_a^b\left\{\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right\}dx,\quad (9.2)$$

სადაც S არის ფირფიტის ფართობი:

$$S=\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ იმ ერთგვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y=x^2$, $y^2=8x$.

ამოხსნა. მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილებია (0;0) და (2;4). აქ $f(x)=\sqrt{8x}$, $g(x)=x^2$. ადვილია ჩვენება, რომ

$$\int\limits_0^2 x\left(\sqrt{8x}-x^2\right)dx=\frac{12}{5},\quad S=\int\limits_0^2\left(\sqrt{8x}-x^2\right)dx=\frac{8}{3};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left[\left(\sqrt{8x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=\frac{24}{5}.$$

(9.2) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\xi=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{9}{10},\quad \eta=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{9}{5}.$$

XIII თავი

დიფერენციალური განტოლებები

§1. ამოცანები, რომელთაც მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ცნებამდე

ბუნებასა და ტექნიკაში მიმდინარე პროცესები, როგორც წესი აღიწერება ამ პროცესებისათვის დამახასიათებელი რამოდენიმე პარამეტრის საშუალებით. ვთქვათ x და y რაიმე პროცესის დამახასიათებელი სიდიდეებია. ხშირად მათ შორის არსებობს დამოკიდებულება $F(x,y)=0$, მაგრამ მისი უშუალო დადგენა ყოველთვის არ ხერხდება, რადგან ამისათვის საჭიროა პროცესის დამახასიათებელი სხვა პარამეტრების ცოდნაც, რომლებიც ასევე შეიძლება x-ის ფუნქციებს წარმოადგენდნენ. მაგალითად, შეუძლებელია მოძრავი სხეულის მდებარეობასა და მოძრაობის დროს შორის დამოკიდებულების დადგენა, თუ არ გვეცოდინება სხეულის სიჩქარე და აჩქარება, რომლებიც აგრეთვე დროის ფუნქციებია.

საზოგადოდ, რაიმე პროცესის დამახასიათებელ ორ ან რამდენიმე პარამეტრს შორის დამოკიდებულების დადგენა საკმაოდ რთული ამოცანაა. მისი გადაწყვეტა ზოგ შემთხვევაში მოითხოვს დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას, ე. ი. ისეთი განტოლების ამოხსნას, რომელშიც უცნობ სიდიდეს წარმოადგენს ერთი ან რამოდენიმე ცვლადის ფუნქცია და რომელიც აუცილებლად შეიცავს ამ ფუნქციის წარმოებულს.

განვიხილოთ რამოდენიმე ამოცანა, რომელთა ამოხსნას მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ცნებამდე.

ამოცანა **1.** ვთქვათ m მასის მქონე სხეული ვარდება დედამიწაზე. ვიპოვოთ V სიჩქარის t დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ სხეულზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა და მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმართული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც სიჩქარის პირდაპირპროპორციულია.

ამოხსნა. ნიუტონის II კანონის თანახმად

$$m\frac{dV}{dt}=F,$$

სადაც $\frac{dV}{dt}$ წარმოადგენს სხეულის აჩქარებას, ხოლო F არის ძალა, რომელიც სხეულზე მოქმედებს მოძრაობის მიმართულებით. ცხადია, რომ F ძალა ტოლია სხეულზე მოქმედი სიმძიმის ძალისა და ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის სხვაობის (რადგან

ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ). ამრიგად

$$m\frac{dV}{dt}=mg-kV, \tag{1.1}$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია.

მივიღეთ განტოლება, რომელშიც უცნობ სიდიდეს წარმოადგენს $V=V(t)$ ფუნქცია. ამასთანავე განტოლებაში შედის მისი $\frac{dV}{dt}$ წარმოებული. ე. ი. (1.1) განტოლება არის დიფერენციალური განტოლება.

ამოვხსნათ (1.1) დიფერენციალური განტოლება ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი $V=V(t)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას აქცევს იგივეობად.

ადვილია ჩვენება, რომ ნებისმიერი C რიცხვისათვის

$$V(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \tag{1.2}$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას.

ამრიგად, (1.1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა. ბუნებრივია ვიკითხოთ – ამონახსნთა ამ სიმრავლიდან რომელი გამოხატავს ჭეშმარიტ დამოკიდებულებას კონკრეტული ვარდნის შემთხვევაში სხეულის სიჩქარესა და ვარდნის ხანგრძლივობას შორის?

იმისათვის, რომ მივიღოთ ამ კითხვაზე პასუხი, საჭიროა ვიცოდეთ ვარდნილი სხეულის მოძრაობის შესახებ რაიმე დამატებითი ინფორმაცია. მაგალითად, სხეულის სიჩქარე დროის რაიმე მომენტში. ვთქვათ, როდესაც $t=0$, მაშინ $V=V_0$. თუ დროისა და სიჩქარის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1.2) ტოლობაში, მივიღებთ $V_0=C+\frac{mg}{k}$, საიდანაც $C=V_0-\frac{mg}{k}$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში დამოკიდებულებას ვარდნილი სხეულის სიჩქარესა და ვარდნის ხანგრძლივობას შორის ამყარებს ფუნქცია

$$V=\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

ამოცანა 2. ცნობილია, რომ რადიაქტიური ნივთიერების დაშლის სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია რადიაქტიური ნივთიერების მასისა მოცემულ მომენტში. ვიპოვოთ რადიაქტიური ნივთიერების მასის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ დროის საწყის $t=0$ მომენტში რადიაქტიური ნივთიერების მასა m_0-ის ტოლია.

ამოხსნა. ვთქვათ დროის t მომენტში რადიაქტიური ნივთიერების მასაა m, ხოლო $t+\Delta t$ მომენტში კი $m+\Delta m$. შეფარდებას $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ ეწოდება დაშლის საშუალო სიჩქარე, ხოლო ამ შეფარდების ზღვარს $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$ კი ეწოდება დაშლის სიჩქარე დროის t მომენტში. რადგან

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt},$$

ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{dm}{dt}=-km, \tag{1.3}$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია, ხოლო ნიშანი "–" დასმულია იმიტომ, რომ დროის ზრდასთან ერთად რადიაქტიური ნივთიერების მასა კლებულობს. (1.3) განტოლება წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას. მას აკმაყოფილებს შემდეგი ფუნქციები

$$m=Ce^{-kt}.$$

რადგან $m=m_0$, როცა $t=0$, ადვილად დავადგენთ, რომ მასის დროზე დამოკიდებულებას გამოსახავს ფუნქცია

$$m=m_0e^{-kt}. \tag{1.4}$$

k კოეფიციენტის მნიშვნელობა გამოითვლება ექსპერიმენტულად. ვთქვათ t_0 დროის განმავლობაში დაიშალა თავდაპირველი მასის $\alpha\%$. ე. ი.

$$m_0\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)=m_0e^{-kt_0}$$

აქედან $k=-\frac{1}{t_0}\ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$. ასე იქნა დადგენილი, რომ რადიუმისათვის $k=0{,}000436$.

ვიპოვოთ რადიუმის ნახევარდაშლის პერიოდი T, ანუის დრო, რომლის განმავლობაში რადიუმის თავდაპირველი მასის ნახევარი იშლება. ამისათვის (1.4) ტოლობაში ჩავსვათ $m=\frac{m_0}{2}$. მივიღებთ $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-kT}$, საიდანაც

$$T=\frac{\ln 2}{k}=\frac{\ln 2}{0{,}000436}\approx 1590 \text{ წელი.}$$

ამოცანა 3 (პირველი გვარის ქიმიური რეაქცია). ვიპოვოთ პირველი გვარის ქიმიური რეაქციის დროს რეაქციაში შესული ნივთიერების მასის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ $t=0$ მომენტში ქიმიურ რეაქციაში შემავალი ნივთიერების მასაა m_0.

ამოხსნა. ვთქვათ m_0 მასის მქონე რაიმე ნივთიერება შედის რეაქციაში. აღვნიშნოთ Δm-ით ნივთიერების მასის ის ნაწილი, რომელიც შევიდა რეაქციაში დროის t მომენტიდან $t+\Delta t$ მომენტამდე. ზღვარს $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta t}=\dfrac{dm(t)}{dt}$ ეწოდება ქიმიური რეაქციის სიჩქარე დროის t მომენტში.

ქიმიურ რეაქციას ეწოდება პირველი გვარის, თუ ქიმიური რეაქციის სიჩქარე დროის t მომენტში პირდაპირპროპორციულია ნივთიერების იმ რაოდენობის, რომელიც ამ მომენტში რეაქციაში არ არის შესული.

თუ $m(t)$ არის t მომენტისათვის რეაქციაში შესული ნივთიერების მასა, მაშინ ამ მომენტისათვის რეაქციაში არ შესული ნივთიერების მასა იქნება $m_0-m(t)$. ამოცანის პირობის მიხედვით გვაქვს

$$\frac{dm(t)}{dt}=k(m_0-m(t)).$$

მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება, სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია. ამ განტოლებას აკმაყოფილებს შემდეგი ფუნქციები

$$m(t)=m_0-Ce^{-kt}$$

ნებისმიერი C-სათვის.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m=0$, როცა $t=0$, მივიღებთ, რომ $C=m_0$. საბოლოოდ გვექნება

$$m=m_0(1-e^{-kt}).$$

ვინაიდან t-ს ზრდასთან ერთად მაჩვენებლიანი ფუნქცია e^{-kt} უსასრულოდ მცირდება, ამიტომ გარკვეული დროის შემდეგ იგი გახდება იმდენად მცირე, რომ m თითქმის არ განსხვავდება m_0-გან და რეაქცია პრაქტიკულად შეწყდება.

§2. ძირითადი ცნებები

***განსაზღვრება* 2.1.** განტოლებას რაიმე უცნობი ფუნქციის მიმართ, რომელიც შეიცავს ამ ფუნქციის ერთ რომელიმე წარმოებულს მაინც, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0. \qquad (2.1)$$

განსაზღვრება 2.2. დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება ამ განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლეს რიგს.

მაგალითად, $y''-y'=1$ არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, ხოლო $y'-xy^3=5x$ კი – პირველი რიგისა.

განსაზღვრება 2.3. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი რაიმე ინტერვალში ეწოდება ფუნქციას, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას აქცევს იგივეობად არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამ ინტერვალიდან.

ამრიგად, დიფერენციალური განტოლების ყოველ ამონახსნს შეესაბამება გარკვეული ინტერვალი. შემდგომში, იქ სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ჩვენ არ მივუთითებთ ინტერვალს, რომელზედაც ფუნქცია არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა საზოგადოდ დაკავშირებულია ინტეგრებასთან. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებას უწოდებენ, მის ამონახსნს – დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს, ხოლო ამონახსნის გრაფიკს კი ინტეგრალურ წირს. რადგან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებსა და ინტეგრალურ წირებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, ამიტომ მათ აიგივებენ ერთმანეთთან და ხმარობენ გამოთქმას: მოცემული წირი არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

განსაზღვრება 2.4. დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ამოხსნილია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ, ეწოდება ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება.

საზოგადოდ, *n*-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}).$$

§3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x,y,y')=0.$$

თუ იგი ამოხსნილია y' წარმოებულის მიმართ, ე. ი. მოცემულია ნორმალური სახით, მაშინ ის შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$y'=f(x,y). \qquad (3.1)$$

(3.1) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{3.2}$$

მართლაც, თუ (3.1) განტოლებაში y'-ს შევცვლით $\dfrac{dy}{dx}$-ით და შემდეგ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ dx-ზე, მივიღებთ

$$f(x,y)dx-dy=0,$$

რაც არის (3.1) დიფერენციალური განტოლების (3.2) სახე, როცა $M(x,y)=f(x,y)$ და $N(x,y)=-1$. ახლა, თუ მოცემულია (3.2) განტოლება, მაშინ მეორე წევრის მარჯვენა მხარეში გადატანით და $N(x,y)$-ზე გაყოფით ($N(x,y)\neq 0$), გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,x)}{N(x,y)},$$

რომელიც წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების (3.1) სახეს.

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხის დადგენა. ამ მხრივ (3.1) განტოლებისათვის მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის კოშის თეორემა.

***თეორემა* 3.1.** თუ $f(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ უწყვეტი ფუნქციებია სიბრტყის წერტილთა რაიმე D არეში, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0,y_0)\in D$ წერტილი, არსებობს (3.1) განტოლების ერთადერთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, რომელიც აკმაყოფილებს $\varphi(x_0)=y_0$ პირობას.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ნებისმიერი $(x_0,y_0)\in D$ წერტილისათვის არსებობს (3.1) განტოლების ერთადერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (x_0,y_0) წერტილში.

თეორემა 3.1-დან გამომდინარეობს, რომ (3.1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა, რადგან D არის განსხვავებულ (x_0,y_0) და (x_0,y_1) წერტილებს $(y_0\neq y_1)$ განსხვავებული ამონახსნები შეესაბამება.

პირობას, რომ $y(x_0)=y_0$, ეწოდება საწყისი პირობა. მას ხშირად შემდეგნაირად ჩავწერთ

$$y\big|_{x=x_0}=y_0.$$

ამოცანას, ვიპოვოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(x_0)=y_0$ საწყის პირობას, ეწოდება კოშის ამოცანა. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია (x_0,y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში აკმაყოფილებს თეორემა 3.1-ის

პირობებს, მაშინ როგორც ეს აღნიშნული თეორემიდან გამომდინარეობს, კოშის ამოცანას (3.1) განტოლებისათვის გააჩნია ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

***განსაზღვრება* 3.1.** პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ანუ ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება $y=\varphi(x,C)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია ნებისმიერ C მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) C-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარკვეული სიმრავლიდან, $y=\varphi(x,C)$ ფუნქცია არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

ბ) მოცემული საწყისი $y(x_0)=y_0$ პირობისათვის, სადაც (x_0,y_0) ეკუთვნის (x,y)-ის ცვლილების იმ არეს, რომელშიც შესრულებულია არსებობის და ერთადერთობის თეორემის პირობები, შეიძლება ვიპოვოთ $C=C_0$ ისეთი მნიშვნელობა, რომ $y=\varphi(x,C_0)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას.

ზოგ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით: $\Phi(x,y,C)=0$, რომელიც y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში შეიძლება საზოგადოდ არ ამოიხსნას.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან მასში C მუდმივის რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმით, ეწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

შენიშვნა. D არის წერტილს, რომელშიც დარღვეულია კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა, ეწოდება დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილი.

$y'=f(x,y)$ განტოლების ამონახსნს (ინტეგრალურ წირს), რომლის ყოველ წერტილში დარღვეულია კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა, ეწოდება ამ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი (განსაკუთრებული ინტეგრალური წირი). განსაკუთრებული ამონახსნი არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან C მუდმივის არცერთი მნიშვნელობისათვის ($C=\pm\infty$-ის ჩათვლით).

§4. დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით

***განსაზღვრება* 4.1.** დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0, \tag{4.1}$$

სადაც $f_1(x)$ და $f_2(y)$ შესაბამისად x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით.

(4.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy=C. \qquad (4.2)$$

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ

$$\frac{dx}{1+x^2}-\frac{dy}{y}=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. (4.2)-ს ძალით გვაქვს

$$\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{dy}{y}=\ln C,$$

$$\operatorname{arctg}x-\ln|y|=\ln C.$$

საიდანაც

$$y=Ce^{\operatorname{arctg}x}.$$

***მაგალითი* 2.** ვიპოვოთ

$$\frac{dx}{1+x}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$$

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

ამოხსნა. ვაინტეგროთ მოცემული განტოლება. მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$\int\frac{dx}{1+x}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=C,$$

ანუ

$$\ln|1+x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C.$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $x=0$, $y=1$. გვექნება

$$C=\frac{1}{2}\ln 2.$$

ამრიგად, საძიებელი კერძო ამონახსნია

$$\ln|1+x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

§5. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

***განსაზღვრება* 5.1.** დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0, \qquad (5.1)$$

სადაც $f_1(x)$, $f_2(x)$ და $g_1(y)$, $g_2(y)$ შესაბამისად x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

ვიგულისხმოთ, რომ $g_1(y)f_2(x)\neq 0$ და გავყოთ (5.1) განტოლება ამ ნამრავლზე, მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0\,.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით. მისი ინტეგრებით მიიღება (5.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C\,. \tag{5.2}$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f_1(x)g_1(y)\equiv 0$, მაშინ (5.2)-ის ამონახსნია $y=C$. თუ $g_1(y)=0$, როცა $y=y_0$, მაშინ (5.2) ზოგად ამონახსნთან ერთად (5.1) განტოლების ამონახსნია აგრეთვე $y=y_0$ ფუნქცია.

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ $xydx+(1+x^2)dy=0$ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. განტოლება გავყოთ $y(1+x^2)$ გამოსახულებაზე. გვექნება

$$\frac{xdx}{1+x^2}+\frac{dy}{y}=0\,.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{y}=\ln C$$

ანუ

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln|y|=\ln C,$$

საიდანაც $y=\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$.

***მაგალითი* 2.** ვიპოვოთ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ვთქვათ $y\neq 0$. მაშინ გვექნება $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$. ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\ln C \ \ (C>0).$$

აქედან გვაქვს

$$\ln|y|=\ln C|x|,$$

ანუ $y=Cx$, სადაც C ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მუდმივია.

შევნიშნოთ, რომ $y=0$ ფუნქცია აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y=Cx$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა.

§6. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

განსაზღვრება 6.1. ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ ნებისმიერი $\lambda\neq0$ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y).$$

მაგალითად, $f(x,y)=x^2+y^2$ არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ხოლო $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ კი – პირველი რიგის.

განსაზღვრება 6.2. პირველი რიგის

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (6.1)$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $f(x,y)$ არის 0-რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ.

ერთგვაროვანი განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით. პირობის თანახმად $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$. თუ ამ ტოლობაში ავიღებთ $\lambda=\frac{1}{x}$, გვექნება

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

მოვახდინოთ ჩასმა $y=ux$. მაშინ $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. ამის გათვალისწინებით (6.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u),$$

ანუ

$$(f(1,u)-u)dx-xdu=0.$$

მივიღეთ განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. $\dfrac{x+y}{x-y}$ არის 0-რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$, მაშინ $dy=udx+xdu$. მივიღებთ:

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{1+u}{1-u}.$$

აქედან გვაქვს

$$x(1-u)du-(1+u^2)dx=0,$$

ანუ

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2}-\frac{dx}{x}=0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით გვექნება

$$\mathrm{arctg}u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln C|x|,\quad C>0.$$

თუ ჩავსვამთ $u=\dfrac{y}{x}$, მივიღებთ

$$\mathrm{atctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln C|x|.$$

შენიშვნა. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ განტოლება იქნება ერთგვაროვანი, თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ერთი და იმავე რიგის ორი ერთგვაროვანი ფუნქციის შეფარდება ნულოვანი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$xydx-(x^2+y^2)dy=0$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

ამოხსნა. რადგან xy და x^2+y^2 ფუნქციები მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ამიტომ ეს განტოლება არის ერთგვაროვანი. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$. მაშინ $dy=udx+xdu$ და გვექნება

$$x^2udx-x^2(1+u^2)(udx+xdu)=0$$

ანუ

$$x(1+u^2)du+u^3dx=0.$$

ცვლადთა განცალების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+u^2}{u^3}du=0.$$

აქედან

$$\ln C|ux|=\frac{1}{2u^2}.$$

თუ ჩავსვამთ $u=\frac{y}{x}$, გვექნება

$$\ln C|y|=\frac{x^2}{2y^2}.$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $C=1$, ე. ი. საძებნი ამონახსნია $\ln|y|=\frac{x^2}{2y^2}$.

§7. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

განსაზღვრება 7.1. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულის მიმართ.

პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{7.1}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში. როდესაც $Q(x)\equiv 0$, მაშინ (7.1) განტოლებას ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არაერთგვაროვანი.

(7.1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით $y=uv$. მაშინ

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}.$$

თუ y და $\frac{dy}{dx}$-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (7.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)v\right]=Q(x). \tag{7.2}$$

v ფუნქცია შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს განტოლებას განცალებადი ცვლადებით. ცვლადთა განცალებით გვექნება

$$\frac{dv}{v}+P(x)dx=0.$$

აქედან

$$\ln v+\int p(x)dx=0,$$

ე. ი.

$$v=e^{-\int p(x)dx}$$

ცხადია $v(x)\neq 0$. v-ს ასეთი მნიშვნელობისათვის (7.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$v\frac{du}{dx}=Q(x),$$

საიდანაც

$$u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

თუ u და v ფუნქციების მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ $y=uv$ გამოსახულებაში, საბოლოოდ გვექნება

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right). \tag{7.3}$$

ცხადია, (7.3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია იქნება (7.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$y'-y\operatorname{tg}x=\sin x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $P(x)=-\operatorname{tg}x$, $Q(x)=\sin x$. (7.3) ფორმულის თანახმად ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{\int \operatorname{tg}x dx}\left(C+\int\sin xe^{-\int\operatorname{tg}xdx}dx\right)=$$

$$=e^{-\ln|\cos x|}\left(C+\int\sin xe^{\ln|\cos x|}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{|\cos x|}\left(C+\frac{1}{2}sign(\cos x)\int\sin 2xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{|\cos x|}\left(C-\frac{1}{4}sign(\cos x)\cdot\cos 2x\right)=\frac{1}{\cos x}\left(C-\frac{1}{4}\cos 2x\right).$$

§8. ბერნულის განტოლება

განტოლებას

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n, \tag{8.1}$$

სადაც $n\neq 0$ და $n\neq 1$, ეწოდება ბერნულის განტოლება (როცა $n=0$ ან $n=1$ (8.1) წარმოადგენს წრფივ განტოლებას).

(8.1) განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ წრფივ განტოლებაზე. მართლაც, (8.1) განტოლების ორივე მხარე გავყოთ y^n-ზე, მივიღებთ

$$y^{-n}y'+P(x)y^{-n+1}=Q(x). \tag{8.2}$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $z=y^{-n+1}$, მაშინ $(-n+1)y^{-n}y'=z'$ და (8.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

ეს განტოლება z-ის მიმართ წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას.

***მაგალითი* 1.** ამოვხსნათ განტოლება

$$y'-\frac{1}{x}y=x^2y^2.$$

ამოხსნა. განტოლების ორივე მხარე გავყოთ y^2-ზე. მივიღებთ

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=x^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{1}{y}=z$. მაშინ $-\frac{y'}{y^2}=z'$ და გვექნება

$$z'+\frac{1}{x}z=-x^2.$$

აქედან

$$z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int\left(-x^2\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{|x|}\left(C-\frac{signx}{4}x^4\right)=\frac{1}{x}\left(C-\frac{x^4}{4}\right).$$

საბოლოოდ
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\left(C-\frac{x^4}{4}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ $y=0$ აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია.

§9. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

განვიხილოთ შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{9.1}$$

(9.1) განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში, თუ ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს რაიმე $u(x,y)$ ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ე. ი.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y).$$

ამ შემთხვევაში (9.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$du(x,y)=0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ (9.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$u(x,y)=C.$$

მაგალითად, ადვილია შემოწმება, რომ

$$2xydx+(x^2-2y)dy=0$$

განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $u(x,y)=x^2y-y^2$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ამიტომ ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$d(x^2y-y^2)=0,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$x^2y-y^2=C.$$

ბუნებრივად ისმება კითხვა: რა პირობებში იქნება (9.1) განტოლების მარცხენა მხარე $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ რაიმე $u(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი და როგორ უნდა ვიპოვოთ იგი? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი თეორემა

***თეორემა* 9.1.** თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ფუნქციები და მათი $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე D არეში, მაშინ: 1) იმისათვის, რომ გამოსახულება $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ წარმოადგენდეს რაიმე $u(x,y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს D არეში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ D არის ყოველ წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{9.2}$$

2) თუ შესრულებულია (9.2) ტოლობა, მაშინ $u(x,y)$ გამოითვლება ტოლობით

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\tau)d\tau, \tag{9.3}$$

სადაც (x_0,y_0) არის D-ს რაიმე წერტილი.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy=0$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. პირველ რიგში შევამოწმოთ (9.2) პირობა. გვაქვს

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2y.$$

ე. ი. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. მაშასადამე, მოცემული განტოლება წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ამიტომ (9.3) ფორმულის თანახმად მივიღებთ (ავიღოთ $x_0=y_0=0$):

$$u(x,y)=\int_0^x\left(3t^2y+y^2\right)dt=\left(t^3y+ty^2\right)\Big|_0^x=x^3y+xy^2.$$

ამრიგად მიღებული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x^3y+xy^2=C.$$

§10. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა რიგი ერთზე მეტია, ეწოდება მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0. \tag{10.1}$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა ზოგადი სახეა

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}). \tag{10.2}$$

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამოკიდებულია მუდმივებზე. ამიტომ ზოგადი ამონახსნიდან რაიმე კერძო ამონახსნის გამოყოფისათვის საჭიროა დიფერენციალურ განტოლებასთან ერთად რაიმე დამატებითი პირობები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ განვსაზღვროთ ზოგად ამონახსნში შემავალი მუდმივები. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ასეთ პირობას წარმოადგენდა ამონახსნის მნიშვნელობის დაფიქსირება რომელიმე წერტილში — $y_0=y(x_0)$. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ასეთი პირობები სხვადასხვაგვარად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ. მაგალითად, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამოკიდებულია ორ მუდმივზე. მათი მოძებნისათვის საჭიროა ორი პირობა. ასეთი პირობები შეიძლება იყოს ამონახნის მნიშვნელობების დაფიქსირება ორ სხვადასხვა წერტილში ან ერთსა და იმავე წერტილში ამონახსნისა და მისი წარმოებულის მნიშვნელობების ცოდნა. ამ ორი ხერხიდან უფრო მეტად გავრცელებულია მეორე. კერძოდ, ის უფრო მოხერხებულია მექანიკის იმ ამოცანების ამოხსნისათვის, რომლებიც დაკავშირებულია სხეულის მოძრაობის განტოლების პოვნასთან. ამ შემთხვევაში მოცემულია სხეულის საწყისი კოორდინატი (ფუნქციის მნიშვნელობა) და საწყისი სიჩქარე (ფუნქციის წარმოებუ-

ლი). ამიტომ პირობებს $y_0=y(x_0)$ და $y'_0=y'(x_0)$ უწოდებენ საწყის პირობებს.

პირობებს

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (10.3)$$

ეწოდება საწყისი პირობები n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ამოცანას, ვიპოვოთ n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (10.3) საწყის პირობებს, ეწოდება კოშის ამოცანა.

***განსაზღვრება* 10.1.** n-ური რიგის (10.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ანუ ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება $y=y(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია n ნებისმიერ მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $y=y(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ ფუნქცია არის (10.2) განტოლების ამონახსნი $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარკვეული სიმრავლიდან.

ბ) მოცემული (10.3) საწყისი პირობისათვის შეიძლება ვიპოვოთ $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივების ისეთი მნიშვნელობები $c_1^0,c_2^0,\dots,c_n^0$, რომ $y=y(x,c_1^0,c_2^0,\dots,c_n^0)$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (10.3) საწყის პირობებს.

ზოგ შემთხვევაში n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით: $\Phi(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$, რომელიც y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში შეიძლება საზოგადოდ არ ამოიხსნას.

ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივების რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, ეწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

§11. განტოლებები, რომლებიც ამოიხსნებიან რიგის დაწევით

ზოგ შემთხვევაში შესაძლებელია, მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის დაყვანა უფრო დაბალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნამდე ანუ განტოლების რიგის დაწევა. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

I. $y^{(n)}=f(x)$.

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+c_1=g_1(x)+c_1, \qquad (11.1)$$

სადაც c_1 ნებისმიერი მუდმივია. (11.1)-დან გვაქვს

$$y^{(n-2)}=\int g_1(x)dx+c_1x+c_2=g_2(x)+c_1x+c_2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$y=\int g_{n-1}(x)dx+\frac{c_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{c_2x^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+c_n.$$

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=2$, $y'(0)=0$ საწყის პირობებს.

ამოხსნა. ინტეგრებით მივიღებთ

$$y'=\operatorname{tg}x+c_1,\ y=-\ln|\cos x|+c_1x+c_2.$$

შევარჩიოთ ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს. გვაქვს

$$\begin{cases}-\ln|\cos 0|+0\cdot c_1+c_2=2,\\ tg0+c_1=0.\end{cases}$$

აქედან $c_1=0$, $c_2=2$. ე. ი. საძებნი ამონახსნია

$$y=-\ln|\cos x|+2.$$

II. ვთქვათ (10.1) განტოლება ცხადი სახით არ შეიცავს y-ს, ე. ი. განტოლებას აქვს სახე

$$F(x,y',\dots,y^{(n)})=0. \qquad (11.2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z(x)=y'(x)$. მაშინ $z'=y'',\dots,z^{(n-1)}=y^{(n)}$ და (11.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$F(x,z,z',\dots,z^{(n-1)})=0.$$

მივიღეთ (n-1) რიგის დიფერენციალური განტოლება. თუ $z=z(x,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (იგი დამოკიდებულია n-1 მუდმივზე), მაშინ (11.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=\int z(x,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})dx+c_n$$

***მაგალითი* 2.** ვიპოვოთ $xy''=1+y'$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=z$. მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$xz'=1+z.$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$\frac{dz}{1+z}=\frac{dx}{x},\quad \ln|1+z|=\ln|c_1x|.$$

ე. ი.

$$z=c_1x-1.$$

რადგან $z=y'$, ამიტომ $dy=(c_1x-1)dx$ და $y=c_1\frac{x^2}{2}-x+c_2$.

III. ვთქვათ (10.1) განტოლება (n=2-სათვის) ცხადი სახით არ შეიცავს x-ს, ე. ი. აქვს სახე

$$F(y,y',y'')=0. \tag{11.3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ განტოლებაში y არის დამოუკიდებელი ცვლადი, y' – კი საძიებელი ფუნქცია. აღვნიშნოთ $y'=z(y)$. მაშინ

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z_y'\cdot z.$$

თუ y ფუნქციის წარმოებულების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (11.3) განტოლებაში, z ფუნქციის მიმართ მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას.

მაგალითი 3. ამოეხსნათ $yy''-y'^2=0$ განტოლება.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=z(y)$, მაშინ

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz(y)}{dx}=z_y'\cdot z.$$

ამ მნიშვნელობების ჩასმით მოცემულ განტოლებაში მივიღებთ

$$yzz'_y-z^2=0.$$

აქედან $z=0$ ან $y\frac{dz}{dy}-z=0$. ტოლობიდან $z=0$ გვაქვს $y=c$, რომელიც ცხადია წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნს.

ვთქვათ $z\neq0$, მაშინ $y\frac{dz}{dy}-z=0$ განტოლებიდან გვაქვს

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{y},$$

აქედან

$$z=c_1y.$$

რადგან $z=\frac{dy}{dx}$, ამიტომ გვაქვს

$$\frac{dy}{dx}=c_1y,$$

საიდანაც

$$\ln\left|\frac{y}{c_2}\right|=c_1x,$$

ანუ

$$y=c_2e^{c_1x}$$

§12. წრფივი ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი განტოლებები

განსაზღვრება **12.1.** n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ, ე. ი. აქვს შემდეგი სახე

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x). \qquad (12.1)$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ განტოლებებს, რომელშიც $a_0(x)\equiv1$.

თუ $f(x)\neq0$, (12.1) განტოლებას ეწოდება არაერთგვაროვანი, ხოლო თუ $f(x)\equiv0$, ე. ი. (12.1) განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0, \qquad (12.2)$$

ეწოდება ერთგვაროვანი. (12.2) განტოლებას ეწოდება (12.1) არაერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება.

განსაზღვრება **12.2.** $y_1,y_2,\dots,y_m$ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია ეწოდება $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m$ სახის ჯამს, სადაც $c_1,c_2,\dots,c_m$ რაიმე მუდმივებია.

განსაზღვრება **12.3.** $y_1,y_2,\dots,y_m$ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული E სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი $c_1,c_2,\dots,c_m$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და E სიმრავლეზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m=0. \qquad (12.3)$$

თუ (12.3) ტოლობა სრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$, მაშინ $y_1,y_2,\dots,y_m$ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი E სიმრავლეზე.

შევნიშნოთ, რომ y_1 და y_2 ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\dfrac{y_1}{y_2}\neq const$.

მაგალითად, $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ხოლო $\arcsin x$ და $\arccos x-\dfrac{\pi}{2}$ ფუნქციები კი წრფივად დამოკიდებულია ამავე სეგმენტზე.

ადვილია ჩვენება, რომ თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (12.2) განტოლების ამონახსნებია, მაშინ $c_1y_1+c_2y_2$, სადაც c_1 და c_1 ნებისმიერი მუდმივებია, ასევე იქნება ამ განტოლების ამონახსნი.

წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის სტრუქტურასთან დაკავშირებით მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 12.1. თუ $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ფუნქციები წარმოადგენენ (12.2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს, მაშინ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n,$$

სადაც $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

თეორემა 12.2. წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $\overline{y}$ ზოგადი ამონახსნისა და მოცემული განტოლების რაიმე y^* კერძო ამონახსნის ჯამს. ე. ი. ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y=\overline{y}+y^*.$$

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \tag{12.4}$$

ამ განტოლების კერძო ამონახსნის მოძებნისათვის სასარგებლოა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 12.3. თუ არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ორი ფუნქციის ჯამს, ე. ი.

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x)+f_2(x),$$

მაშინ ამ განტოლების კერძო ამონახსნია $y^*=y_1^*+y_2^*$, სადაც y_1^* და y_2^* არის შესაბამისად შემდეგი განტოლებების

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x),$$

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_2(x)$$

კერძო ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია (12.4) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების რაიმე ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, მაშინ (12.4) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მათი საშუალებით ე. წ. მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის გამოყენებით. გავეცნოთ ამ მეთოდს.

ვთქვათ y_1 და y_2 ფუნქციები

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. (12.4) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x),$$

სადაც $c_1(x)$ და $c_2(x)$ ფუნქციები გამოითვლებიან შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2=0, \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases}$$

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$y''-\frac{2y'}{x}+\frac{2y}{x^2}=x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $y_1=x$ და $y_2=x^2$ ფუნქციები მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებია. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=c_1x+c_2x^2.$$

მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2,$$

სადაც $c_1(x)$ და $c_2(x)$ აკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases} xc_1'(x)+x^2c_2'(x)=0, \\ c_1'(x)+2xc_2'(x)=x. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $c'_1(x)=-x$ და $c'_2(x)=1$, საიდანაც $c_1=-\frac{x^2}{2}$, $c_2=x$. ე. ი. მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y^*=-\frac{x^2}{2}x+x\cdot x^2=\frac{x^3}{2}.$$

ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1x+c_2x^2+\frac{x^3}{2},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§13. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებები

I. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება.

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{13.1}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივი რიცხვებია. ასეთ განტოლებას მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება.

როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 12.1) (13.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ მისი წრფივად დამოუკიდებელი ორი ამონახსნი. ვეძებოთ (13.1) განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y=e^{kx}, \text{ სადაც } k=const;$$

მაშინ

$$y'=ke^{kx}, \quad y''=k^2e^{kx}.$$

თუ y ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (13.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0.$$

რადგან $e^{kx}\neq 0$, გვექნება

$$k^2+a_1k+a_2=0. \tag{13.2}$$

ამრიგად, თუ k არის (13.2) განტოლების ფესვი, მაშინ e^{kx} იქნება (13.1) განტოლების ამონახსნი. (13.2) განტოლებას ეწოდება (13.1) განტოლების მახასიათებელი განტოლება. (13.2) განტოლება არის კვადრატული განტოლება. მას გააჩნია ორი ფესვი ჯერადობის გათვალისწინებით. განვიხილოთ შემთხვევები.

1. (13.2) განტოლებას აქვს ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვები k_1 და k_2 ($k_1\neq k_2$). მაშინ e^{k_1x} და e^{k_2x} ფუნქციები იქნება (13.1) განტოლების ამონახსნები. ამასთან ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია. ამიტომ ამ შემთხვევაში (13.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ $y''+5y'-6y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2+5k-6=0,$$

რომლის ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-6$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-6x}.$$

2. მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორჯერადი ფესვი $k_1=k_2=r$; მაშინ $y_1=e^{rx}$ ფუნქცია იქნება (13.1) განტოლების ამონახსნი. ადვილია ჩვენება, რომ ამ შემთხვევაში მეორე კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_2=xe^{rx}.$$

მართლაც, $y'=e^{rx}+rxe^{rx}$, $y''=2re^{rx}+r^2xe^{rx}$. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (13.1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$r^2xe^{rx}+2re^{rx}+a_1e^{rx}+a_1rxe^{rx}+a_2xe^{rx}=e^{rx}[x(r^2+a_1r+a_2)+(2r+a_1)]=0,$$

ვინაიდან r (13.2) განტოლების ორჯერადი ფესვია.

რადგან y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, (13.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$y=e^{rx}(c_1+c_2x).$$

***მაგალითი* 2.** ვიპოვოთ

$$y''+4y'+4y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2+4k+4=0.$$

მისი ფესვია $k=-2$, ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{-2x}(c_1x+c_2).$$

3. (13.2) განტოლებას გააჩნია კომპლექსური ფესვები $\alpha\pm\beta i$. ამ შემთხვევაში წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია

$$y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ და } y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

ამიტომ (13.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x).$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $y''-4y'+13y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2-4k+13=0,$$

რომელსაც გააჩნია კომპლექსური ფესვები $k_1=2+3i$, $k_2=2-3i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{2x}(c_1\cos3x+c_2\sin3x).$$

II. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0. \qquad (13.3)$$

(13.3) განტოლების ზოგად ამონახსნს ვიპოვით ისევე, როგორც მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში:

1) უნდა შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\dots+a_n=0.$$

2) ვიპოვოთ მახასიათებელი განტოლების ფესვები.

3) განტოლების ფესვების საშუალებით ვიპოვოთ (13.3) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები შემდეგი წესის თანახმად:

ა) ყოველ ნამდვილ მარტივ k ფესვს შეესაბამება კერძო ამონახსნი e^{kx}.

ბ) ყოველ r ჯერად ნამდვილ k ფესვს შეესაბამება r ცალი კერძო ამონახსნი – $e^{kx}, xe^{kx},\dots, x^{r-1}e^{kx}$.

გ) ყოველ მარტივ კომპლექსურ ფესვთა წყვილს $k^{(1)}=\alpha+i\beta$, $k^{(2)}=\alpha-i\beta$ შეესაბამება ორი კერძო ამონახსნი $e^{\alpha x}\cos\beta x$ და $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

დ) ყოველ μ-ჯერად კომპლექსურ ფესვთა წყვილს $k^{(1)}=\alpha+i\beta$, $k^{(2)}=\alpha-i\beta$ შეესაბამება 2μ კერძო ამონახსნი

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ასეთი წესით შედგენილი კერძო ამონახსნთა სისტემა იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. ამასთან სისტემაში იქნება ზუსტად n

ცალი ამონახსნი. ამ ფუნქციათა წრფივი კომბინაცია იქნება ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$y'''-3y''-y'+3y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^3-3k^2-k+3=0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=3$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$y'''+3y''-4y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^3+3k^2-4=0,$$

რომლის ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-2$. ამასთან -2 არის ორჯერადი ფესვი. ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ

$$y^{IV}-y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^4-1=0.$$

მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_3\sin x.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ

$$y^V+2y^{IV}-8y''-12y'-8y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^5+2k^4-8k^2-12k-8=0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1=2$, $k_2=-1+i$, $k_3=-1-i$, ამასთან k_2 და k_3 ორჯერადი ფესვებია. ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}\cos x+c_3xe^{-x}\cos x+c_4e^{-x}\sin x+c_5xe^{-x}\sin x.$$

III. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ განტოლება

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x), \tag{13.4}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 12.2) (13.4) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $y=\overline{y}+y^*$, სადაც $\overline{y}$ არის (13.4) განტოლე-

ბის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y^* კი (13.4) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი.

(13.4) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით (იხ. §12). მაგრამ მუდმივკოეფიციენტებიანი (13.4) განტოლების კერძო ამონახსნის პოვნა ზოგ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია სხვა გზით, ე. წ. "განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით". განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

1) ვთქვათ (13.4) განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს სახე

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}, \tag{13.5}$$

სადაც $P_n(x)$ არის n-ური რიგის მრავალწევრი. შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

ა) ვთქვათ α რიცხვი არ არის

$$k^2+a_1k+a_2=0$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვი. ამ შემთხვევაში (13.4) განტოლების კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y^*=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)e^{\alpha x}=Q_n(x)e^{\alpha x},$$

სადაც $A_0,A_1,\cdots,A_n$ ჯერჯერობით უცნობი რიცხვებია. ეს რიცხვები უნდა ვიპოვოთ იმ პირობით, რომ y^* დააკმაყოფილოს (13.4) განტოლება.

ბ) ვთქვათ α რიცხვი არის მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვი, ე. ი. $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ და $2\alpha+a_1\neq0$. ამ შემთხვევაში y^* ფუნქციას ვეძებთ

$$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}$$

სახით.

გ) α რიცხვი არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი. ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0,\quad 2\alpha+a_1=0.$$

ამ შემთხვევაში y^* ფუნქციას ვეძებთ

$$y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$$

სახით.

შენიშვნა. როცა $\alpha=0$, მაშინ (13.5) ტოლობით განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არის n-ური რიგის მრავალწევრი. ამიტომ როცა 0 არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ $y^*=Q_n(x)$ სახით. ხოლო თუ 0 არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი (l=1, l=2), მაშინ კერძო ამონახსნს ვეძებთ $y^*=x^lQ_n(x)$ სახით.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ

$$y''+y'-6y=x^2+3$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y}=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}.$$

რადგან რიცხვი 0 არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ y^* ფუნქცია ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=Ax^2+Bx+C.$$

მაშინ $y^{*\prime}=2Ax+B$, $y^{*\prime\prime}=2A$. მოცემულ განტოლებაში y^* ფუნქციისა და მისი წარმოებულის ჩასმით მივიღებთ

$$2A+(2Ax+B)-6(Ax^2+Bx+C)=x^2+3,$$

ანუ

$$-6Ax^2+(2A-6B)x+(2A+B-6C)=x^2+3.$$

ორივე მხარეში მდგომი x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} -6A=1, \\ 2A-6B=0, \\ 2A+B-6C=3. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $A=-\dfrac{1}{6}$, $B=-\dfrac{1}{18}$, $C=-\dfrac{61}{108}$. ამრიგად

$$y^*=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{18}x-\frac{61}{108}$$

და ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{18}x-\dfrac{61}{108}$.

***მაგალითი* 9.** ვიპოვოთ

$$y''+3y'=1-2x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+3k=0$, რომლის ფესვებია $k_1=0$, $k_2=-3$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y}=c_1+c_2e^{-3x}.$$

რადგან $k=0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=x(Ax+B)=Ax^2+Bx.$$

მაშინ $y^{*\prime}=2Ax+B$, $y^{*\prime\prime}=2A$. განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$2A+6Ax+3B=1-2x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=-\dfrac{1}{3}$, $B=\dfrac{5}{9}$. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y^*=-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1+c_2e^{-3x}-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x.$$

***მაგალითი* 10.** ვიპოვოთ

$$y''-9y=(x+1)e^{3x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y}=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}.$$

რადგან $\alpha=3$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=x(Ax+B)e^{3x}=(Ax^2+Bx)e^{3x},$$

მაშინ

$$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^{3x}+3(Ax^2+Bx)e^{3x},$$

$$y^{*\prime\prime}=2Ae^{3x}+6(2Ax+B)e^{3x}+9(Ax^2+Bx)e^{3x}.$$

განტოლებაში ჩასმით და e^{3x}-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$2A+6(2Ax+B)+9(Ax^2+Bx)-9(Ax^2+Bx)=x+1,$$

ანუ

$$2A+12Ax+6B=x+1.$$

აქედან

$$A=\frac{1}{12},\ B=\frac{5}{36}.$$

ე. ი.

$$y^*=\left(\frac{1}{12}x^2+\frac{5}{36}x\right)e^{3x}.$$

ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\left(\frac{1}{12}x^2+\frac{5}{36}x\right)e^{3x}.$$

***მაგალითი* 11.** ვიპოვოთ

$$y''-2y'+y=xe^x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y}=(c_1+c_2x)e^x.$$

რადგან $\alpha=1$ არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი, ამიტომ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=x^2(Ax+B)=(Ax^3+Bx^2)e^x.$$

ადვილია ჩვენება, რომ $A=\frac{1}{6}$ და $B=0$. ამდენად განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

***მაგალითი* 12.** ვიპოვოთ

$$y''-4y'-5y=x+e^{-x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}.$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ $y^*=y_1^*+y_2^*$ სახით, სადაც y_1^* არის $y''-4y'-5y=x$ განტოლების კერძო ამონახსნი, ხოლო y_2^* არის $y''-4y'-5y=e^{-x}$ განტოლების კერძო ამონახსნი. ადვილად მივიღებთ, რომ $y_1^*=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{25}$ და $y_2^*=-\frac{1}{6}xe^{-x}$. ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=\overline{y}+y_1^*+y_2^*=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}-\frac{1}{5}x+\frac{4}{25}-\frac{1}{6}xe^{-x}.$$

2) ვთქვათ (13.4) განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს სახე

$$f(x)=(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \qquad (13.6)$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია.

ამ შემთხვევაში y^* ფუნქციას ვეძებთ შემდეგი სახით:

ა) თუ $\alpha\pm i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$$y^*=[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x)]e^{\alpha x},$$

სადაც $u(x)$ და $v(x)$ არის ერთიდაიგივე რიგის მრავალწევრები, რომელთა ხარისხი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრების ხარისხებს შორის უდიდესის ტოლია.

ბ) თუ $\alpha\pm i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$$y^*=x[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x)]e^{\alpha x}.$$

ბოლოს განვიხილოთ (13.6)-ის ერთი კერძო შემთხვევა, როდესაც ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x,$$

ე. ი. როდესაც $P(x)=M$, $Q(x)=N$, $\alpha=0$.

ამ შემთხვევაში, თუ $\pm i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x,$$

ხოლო თუ $\pm i\beta$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, მაშინ

$$y^*=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

სახით.

მაგალითი 13. ვიპოვოთ

$$y''+2y'+5y=2\cos x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+2k+5=0$. მისი ფესვებია $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$, ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x).$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

მაშინ $y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$, $y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$. განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$-A\cos x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos x+5A\cos x+5B\sin x=2\cos x$$

ანუ

$$(4A+2B)\cos x+(-2A+4B)\sin x=2\cos x.$$

განტოლების ორივე მხარეში $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=\dfrac{2}{5}$, $B=\dfrac{1}{5}$.

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

მაგალითი 14. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''+9y=\cos 3x.$$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $\pm 3i$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x.$$

კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x).$$

მაშინ

$$y^{*\prime}=A\cos 3x+B\sin 3x+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),$$

$$y^{*\prime\prime}=-6(A\sin 3x-B\cos 3x)+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x).$$

განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x=\cos 3x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=0$, $B=\dfrac{1}{6}$.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{x}{6}\sin 3x.$$

***მაგალითი* 15.** ამოვხსნათ განტოლება

$$y'-y=3e^{2x}\cos x.$$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2-1=0$. მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

რადგან კომპლექსური რიცხვი $2+i$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^*=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$$

სახით.

განტოლებაში ჩასმითა და მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ

$$(2A+4B)e^{2x}\cos x+(-4A+2B)e^{2x}\sin x=3e^{2x}\cos x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით გვექნება

$$2A+4B=3,\quad -4A+2B=0.$$

აქედან $A=\dfrac{3}{10}$, $B=\dfrac{3}{5}$. ე. ი. კერძო ამონახსნია

$$y^*=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right),$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნი

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right).$$

IV. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

განვიხილოთ განტოლება

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=f(x). \qquad (13.7)$$

ამ განტოლების y^* კერძო ამონახსნის "განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით" მოძებნა განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1) ვთქვათ

$$f(x)=P_m(x)e^{\alpha x},$$

სადაც $P_m(x)$ არის m-ური რიგის მრავალწევრი. თუ α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=Q_m(x)e^{\alpha x},$$

სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური რიგის მრავალწევრი.

იმ შემთხვევაში როდესაც α მახასიათებელი განტოლების l-ჯერადი ფესვია, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^*=x^lQ_m(x)e^{\alpha x}$$

სახით.

2) ვთქვათ
$$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x.$$
მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ
$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x$$
სახით, თუ $\pm i\beta$ კომპლექსური რიცხვი არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი და
$$y^*=x^\mu(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$
სახით, თუ $\pm i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების μ ჯერადობის კომპლექსური ფესვი.

3) ვთქვათ
$$f(x)=[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$
სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია.

თუ $\alpha\pm i\beta$ კომპლექსური რიცხვი არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ
$$y^*=[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$
სახით, სადაც $u(x)$ და $v(x)$ ერთი და იმავე რიგის მრავალწევრებია, რომელთა რიგი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრების რიგებს შორის უდიდესის ტოლია.

თუ $\alpha\pm i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების μ ჯერადობის ფესვი, y^* უნდა ვეძებოთ
$$y^*=x^\mu[u(x)\cos\beta x+v(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$
სახით.

***მაგალითი* 10.** ვიპოვოთ
$$y^{IV}-y=x^2+x-1$$
განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$. ამიტომ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება
$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

კერძო ამონახსნი ვეძებოთ
$$y^*=Ax^2+Bx+C$$
სახით. მაშინ $(y^*)^{IV}=0$ და განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ
$$-Ax^2-Bx-C=x^2+x-1.$$
აქედან $A=-1$, $B=-1$, $C=1$. ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია
$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-x^2-x+1.$$

XIV თავი

რიცხვთა მწკრივი

§1. ნამდვილ რიცხვთა მწკრივი. კრებადობა და განშლადობა

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

ამ მიმდევრობის წევრებისაგან შევადგინოთ გამოსახულება

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{1.1}$$

(1.1) გამოსახულებას რიცხვთა მწკრივი ეწოდება. a_n რიცხვს მწკრივის n-ური წევრი ანუ მწკრივის ზოგადი წევრი ეწოდება. გამოიყენება აგრეთვე ასეთი გამოთქმა: მწკრივი ზოგადი a_n წევრით, ან მოკლედ (a_n) მწკრივი.

(1.1) გამოსახულებას ჯამის სიმბოლოს გამოყენებით ასე ჩავწერთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

ჯამს

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

ეწოდება (1.1) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი ან უბრალოდ – კერძო ჯამი. თუ n-ს მივანიჭებთ $1,2,\ldots,n,\ldots$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ (1.1) მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობას

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

განსაზღვრება 1.1. (1.1) მწკრივს ეწოდება კრებადი, თუ ამ მწკრივის კერძო ჯამთა $\{S_n\}$ მიმდევრობა კრებადია. $\{S_n\}$ მიმდევრობის S ზღვარს ეწოდება (1.1) მწკრივის ჯამი და ჩაიწერება ასე:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .$$

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ არ არსებობს ან უსასრულობაა, მაშინ მოცემულ მწკრივს განშლადი ეწოდება.

შევისწავლოთ მწკრივის კრებადობის საკითხი ნიშნავს, დავადგინოთ მწკრივი კრებადია თუ განშლადი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მწკრივი

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

ამ მწკრივის წევრები შეადგენენ უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია 1, მნიშვნელი კი $\frac{1}{2}$. ამიტომ n-ური კერძო ჯამისათვის გვექნება

$$S_n = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right),$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2 .$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივის ჯამია 2.

მაგალითი **2.** განვიხილოთ ეგრეთწოდებული ლეიბნიცის მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

ამ მწკრივის n-ური კერძო ჯამისათვის გვაქვს:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$. ამრიგად ლეიბნიცის მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი S=1.

მაგალითი **3.** განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობაა

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ldots,\ S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0,\ldots$$

ამ მიმდევრობისათვის $\lim_{n\to\infty} S_n$ არ არსებობს. ამრიგად, მოცემული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი **4.** ვაჩვენოთ, რომ

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

მწკრივი განშლადია. მართლაც

$$S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

რადგანაც $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$, ამიტომ $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, ე. ი. მოცემული მწკრივი განშლადია.

განსაზღვრება **1.2.** (a_n) მწკრივის ნაშთი n-ური წევრის შემდეგ ეწოდება მწკრივს

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}a_{n+i}$$

თეორემა **1.1.** თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი ნებისმიერი ნაშთი კრებადია. თუ (1.1) მწკრივის რაიმე ნაშთი კრებადია, მაშინ კრებადია თვით მწკრივიც, ამასთან, თუ

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\ ,\ \ S_m=\sum_{i=1}^{m}a_i\ ,\ \ R_m=\sum_{i=1}^{\infty}a_{m+i}\ ,$$

მაშინ

$$S=S_m+R_m.$$

ე. ი. მწკრივი და მისი ნებისმიერი ნაშთი ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

შედეგი **1.** თუ მწკრივში რამოდენიმე წევრს ახალი წევრით შევცვლით, ან თუ მას ჩამოვაშორებთ (დავუმატებთ) რამოდენიმე წევრს ამით მწკრივის კრებადობა არ შეიცვლება.

შედეგი **2.** თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი ნაშთის R_m ჯამი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თეორემა **1.2.** გეომეტრიული პროგრესია

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots\ \ (a\neq 0)$$

არის კრებადი მწკრივი, როცა $|q|<1$ და მისი ჯამია $S=\dfrac{a}{1-q}$. ეს მწკრივი განშლადია, როცა $|q|\geq 1$ (იხ. VI თავი, §5).

§2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა. კრებადი მწკრივის ძირითადი თვისებები

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა **2.1** (*მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა*). (a_n) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ მისი ზოგადი a_n წევრი მიისწრაფვოდეს ნულისაკენ, როცა $n\to\infty$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\,.$$

შედეგი. თუ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ ან $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ არ არსებობს, მაშინ მწკრივი განშლადია.

მაგალითი **1.** მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{n}{n+1}+\cdots$ განშლადია, რადგანაც

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0\,.$$

მაგალითი 2. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$ განშლადია, რადგანაც

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{3} \text{ არ არსებობს.}$$

შევნიშნოთ, რომ მწკრივის ზოგადი წევრის ნულისაკენ მისწრაფება არის მწკრივის კრებადობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა. ე. ი. თუ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს რომ მწკრივი კრებადია. ამ დებულების დასამტკიცებლად (თუმცა ეს გამომდინარეობს §1-ის მაგალითი 4-დანაც) განვიხილოთ ეგრეთწოდებული ჰარმონიული მწკრივი

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{2.1}$$

ვაჩვენოთ, რომ (2.1) მწკრივი განშლადია. მართლაც, რადგან ყოველი $k\in N$-თვის

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k},$$

ამიტომ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{n+1}=\ln(n+1).$$

მაშასადამე

$$S_n>\ln(n+1)$$

ნებისმიერი $n\in N$-თვის. ამ უტოლობიდან გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

ე. ი. ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

***თეორემა* 2.2.** თუ (a_n) მწკრივი კრებადია S რიცხვისაკენ, მაშინ ნებისმიერი λ რიცხვისათვის (λa_n) მწკრივი კრებადია λS რიცხვისაკენ.

***თეორემა* 2.3.** თუ (a_n) და (b_n) მწკრივები კრებადია და მათი ჯამია, შესაბამისად, A და B, მაშინ (a_n+b_n) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $A+B$. ასევე (a_n-b_n) მწკრივიც კრებადია და მისი ჯამია $A-B$.

§3. დადებითი მწკრივები. კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. მწკრივთა შედარების ნიშნები

(a_n) მწკრივს, რომლის ყოველი წევრი დადებითი რიცხვია, დადებითი მწკრივი ეწოდება.

თეორემა 3.1. დადებითი მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული.

თეორემა 3.2 (შედარების პირველი ნიშანი). ვთქვათ (a_n) და (b_n) დადებითი მწკრივებია. თუ, n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, $a_n \le b_n$, მაშინ (b_n) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებადობა, ხოლო (a_n) მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარეობს (b_n) მწკრივის განშლადობა.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$

კრებადია. მართლაც, შევადაროთ ამ მწკრივის წევრები ლეიბნიცის

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

მწკრივის შესაბამის წევრებს. გვაქვს

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}.$$

მაგრამ ლეიბნიცის მწკრივი კრებადია. მაშასადამე თეორემა 3.2-ის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია.

ამრიგად, §1-ის თეორემა 1.1-ის შედეგი 1-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \tag{3.1}$$

მწკრივი კრებადია.

შენიშვნა. ჩვენ დავადგინეთ, რომ (3.1) მწკრივი კრებადია, მაგრამ არა გვაქვს გამოთვლილი მისი ჯამი. მწკრივის ჯამის პოვნა საზოგადოდ უფრო რთული ამოცანაა, ვიდრე მწკრივის კრებადობის დადგენა. უფრო მეტიც, ზოგიერთი კრებადი მწკრივის ჯამის პოვნა პრაქტიკულად არ ხერხდება. მტკიცდება, რომ (3.1) მწკრივის ჯამია $\dfrac{\pi^2}{6}$.

მაგალითი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sin\frac{1}{1^2}+\sin\frac{1}{2^2}+\cdots+\sin\frac{1}{n^2}+\cdots$$

ვიცით, რომ

$$\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2},$$

აქედან გამომდინარე მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ

$$tg\frac{1}{1}+tg\frac{1}{2}+\cdots+tg\frac{1}{n}+\cdots$$

მწკრივი განშლადია. მართლაც, ვიცით, რომ

$$tg\frac{1}{n}>\frac{1}{n},$$

ე. ი. მოცემული მწკრივის წევრები მეტია ჰარმონიული მწკრივის შესაბამის წევრებზე. მაშასადამე თეორემა 3.2-ის ძალით მწკრივი განშლადია.

თეორემა 3.2-დან მიიღება:

შედეგი 1. თუ (a_n) და (b_n) მწკრივებისათვის არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (0\le k<\infty),$$

მაშინ (b_n) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებადობა.

შედეგი 2. თუ არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (0<k\le\infty),$$

მაშინ (b_n) მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის განშლადობა.

შედეგი 3. თუ არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (0<k<\infty),$$

მაშინ (a_n) და (b_n) მწკრივები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

მაგალითი 4. დავადგინოთ კრებადია თუ არა მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{2}.$$

რადგანაც $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ შედეგი 1-ის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 5. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sin\frac{1}{1}+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}+\cdots$$

გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

ჰარმონიული $\left(\frac{1}{n}\right)$ მწკრივი განშლადია, ამიტომ შედეგი 2-ის ძალით მოცემული მწკრივი განშლადია.

თეორემა 3.3 (შედარების მეორე ნიშანი). ვთქვათ (a_n) და (b_n) დადებითი მწკრივებია. თუ n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული (ვთქვათ $n>n_0$-დან) ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

მაშინ (b_n) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებადობა, ხოლო (a_n) მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარეობს (b_n) მწკრივის განშლადობა.

§4. დადებით მწკრივთა კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნები

თეორემა 4.1 (კოშის ნიშანი). თუ დადებითი (a_n) მწკრივის წევრებისათვის

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l,$$

მაშინ:

1) როდესაც $l<1$, მწკრივი კრებადია,
2) როდესაც $l>1$, მწკრივი განშლადია.

შენიშვნა. როდესაც $l=1$ ამ მეთოდით მწკრივის კრებადობის დადგენა ვერ ხერხდება.

მართლაც, ჰარმონიული $\left(\frac{1}{n}\right)$ მწკრივისათვის, რომელიც განშლადია, გვაქვს

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1,$$

ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

ასევე $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ მწკრივისათვის, რომელიც კრებადია, აგრეთვე გვაქვს

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1\,.$$

მაშასადამე, არსებობს როგორც კრებადი, ისე განშლადი მწკრივები, რომელთათვისაც $l=1$, ე. ი. როდესაც $l=1$, გვაქვს გაურკვეველი შემთხვევა, რომელიც მოითხოვს დამატებით გამოკვლევას.

***მაგალითი* 1.** გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

გვაქვს

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1\,.$$

კოშის ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია.

თეორემა* 4.2 *(დალამბერის ნიშანი). თუ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\,,$$

მაშინ

1) როდესაც $l<1$, მწკრივი კრებადია,

2) როდესაც $l>1$, მწკრივი განშლადია.

შენიშვნა. როდესაც $l=1$, ამ მეთოდით მწკრივის კრებადობის დადგენა ვერ ხერხდება.

როგორც კოშის ნიშნის შემთხვევაში, აქაც შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს როგორც კრებადი, ისე განშლადი მწკრივები, რომელთათვისაც $l=1$.

***მაგალითი* 2.** დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$$

კრებადია.

გვაქვს

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!2^n}{n^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\,,$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{e}<1.$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივი კრებადია.

§5. დადებით მწკრივთა კრებადობის კოშის ინტეგრალური ნიშანი

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ დადებითი მწკრივის კრებადობის კიდევ ერთ ნიშანს, რომელიც ზოგიერთ შემთხვევაში წარმატებით წყვეტს საკითხს მწკრივის კრებადობის შესახებ, მაშინ როდესაც კოშისა და დალამბერის ნიშნებით მათი კრებადობის დადგენა ვერ ხერხდება. კრებადობის ეს ნიშანი დამყარებულია $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის დადგენაზე, სადაც $f(x)$ ფუნქცია ისეა შერჩეული, რომ მოცემული მწკრივის თითოეული წევრი წარმოადგენს ამ ფუნქციის მნიშვნელობებს არგუმენტის მთელი მნიშვნელობებისათვის.

თეორემა. ვთქვათ $f(x)$ დადებითი, უწყვეტი არაზრდადი ფუნქციაა $[a,+\infty]$ შუალედში, სადაც a რაიმე ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\cdots+f(a+n)+\cdots \tag{5.1}$$

მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ იყოს კრებადი.

***მაგალითი* 1.** გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots \tag{5.2}$$

თუ $\alpha\le 0$, მაშინ მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ ის განშლადია. ვთქვათ $\alpha>0$. ადვილია შემოწმება, რომ კოშისა და დალამბერის ნიშნებით ამ მწკრივის კრებადობის დადგენა ვერ ხერხდება. კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით (5.2) მწკრივის კრებადობის დადგენა ადვილია. $[1,+\infty[$ შუალედში განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$. ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემის ყველა პირობას. მოცემული (5.2) მწკრივი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (5.1) სახის მწკრივი, რადგან (5.2) მწკრივის წევრები წარმოადგენენ $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ ფუნქციის მნიშვნელობებს როცა $x=1,2,3,\ldots$

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha}-1\right), & \text{როცა } \alpha\neq 1,\\ \ln A, & \text{როცა } \alpha=1.\end{cases}$$

აქედან გვაქვს:

1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$, თუ $\alpha>1$, ე. ი. ინტეგრალი კრებადია და, მაშასადამე, როცა $\alpha>1$, თეორემის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია.

2) თუ $\alpha\le 1$, მაშინ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty,$$

ამიტომ იმავე თეორემის თანახმად მოცემული მწკრივი განშლადია.

***მაგალითი* 2.** განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^\alpha n}.$$

დავადგინოთ α რიცხვის რა მნიშვნელობებისათვისაა ეს მწკრივი კრებადი და რა მნიშვნელობებისათვის განშლადი.

$[2,+\infty[$ შუალედში განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^\alpha x}.$$

ადვილია ჩვენება, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^\alpha x}$$

კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 1$. ამრიგად, თეორემის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 1$.

§6. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი. ლეიბნიცის თეორემა

განსაზღვრება. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი ეწოდება ისეთ მწკრივს, რომლის წევრებს რიგრიგობით დადებითი და უარყოფითი ნიშნები აქვთ. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots \tag{6.1}$$

სადაც $a_1, a_2, a_3,\dots,a_n,\dots$ დადებითი რიცხვებია. ასეთი მწკრივებისათვის მართებულია შემდეგი

თეორემა (ლეიბნიცი). თუ ნიშანმონაცვლეობითი (6.1) მწკრივის წევრები აკმაყოფილებენ პირობებს:

1) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

მაშინ (6.1) მწკრივი კრებადია და მისი S ჯამისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$0<S\le a_1.$$

გარდა ამისა, მწკრივის R_n ნაშთის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია უკუგდებული პირველი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე:

$$|R_n|=|S-S_n|\le a_{n+1}. \tag{6.2}$$

მაგალითი **1.** მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots \tag{6.3}$$

აკმაყოფილებს ლეიბნიცის თეორემის ორივე პირობას, ამიტომ ის კრებადია და მისი ჯამი ნაკლებია 1-ზე. მტკიცდება, რომ (6.3) მწკრივის ჯამი ტოლია ln2-ის (იხ. XVI თავი, §3-ის მაგალითი 1).

მაგალითი **2.** მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad \text{და} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln^{\alpha} n}$$

კრებადია ყოველი $\alpha>0$ რიცხვისათვის.

(6.2) უტოლობა შეიძლება გამოვიყენოთ მწკრივის ჯამის მიახლოებითი მნიშვნელობის ცდომილების შეფასებაში.

მაგალითი **3.** განვიხილოთ კრებადი მწკრივი

$$S=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots \tag{6.4}$$

თუ ავიღებთ პირველი ხუთი წევრის ჯამს

$$S_5=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4},$$

მაშინ

$$|S-S_5|<\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}<0,00078.$$

მაშასადამე, (6.4) მწკრივის პირველი ხუთი წევრის ჯამი საკმაოდ კარგი სიზუსტით გვაძლევს ამ მწკრივის ჯამის მიახლოებას.

§7. აბსოლუტურად და პირობით კრებადი მწკრივები

განვიხილოთ მწკრივი

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{7.1}$$

სადაც $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

შევადგინოთ მწკრივის წევრების აბსოლუტური სიდიდეებისაგან მწკრივი

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots \tag{7.2}$$

განსაზღვრება 7.1. (7.1) მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია (7.2) მწკრივი.

თეორემა. თუ (7.2) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება (7.1) მწკრივიც, ე. ი. მწკრივის აბსოლუტური კრებადობიდან გამომდინარეობს მისი კრებადობა.

აქვე შევნიშნოთ, რომ (7.1) მწკრივი შეიძლება იყოს კრებადი, მაგრამ (7.2) არ იყოს კრებადი. მართლაც, როგორც §6-ში ენახეთ ნიშანმონაცვლეობითი (6.3) მწკრივი კრებადია, მისი წევრების აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი არის ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც როგორც ვიცით განშლადია.

განსაზღვრება 7.2. თუ (7.1) მწკრივი კრებადია, ხოლო (7.2) მწკრივი განშლადია, მაშინ (7.1) მწკრივს პირობით ანუ არააბსოლუტურად კრებადი მწკრივი ეწოდება.

მაშასადამე §6-ის (6.3) მწკრივი პირობით კრებადი მწკრივია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^{\alpha}} \tag{7.3}$$

გამოვიკვლიოთ α რიცხვის რა მნიშვნელობისათვისაა ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი და რა მნიშვნელობისათვის პირობით კრებადი.

(7.3) მწკრივი არის ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი. ადვილია ჩვენება, რომ ყოველი ფიქსირებული α რიცხვისათვის მოცემული მწკრივის წევრები აკმაყოფილებენ ლეიბნიცის თეორემის პირობებს, ამიტომ ის ყოველი ფიქსირებული α-სათვის კრებადია.

§5-ის მაგალითი 2-ის ძალით (7.3) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია როცა $\alpha>1$ და პირობით კრებადია, როცა $\alpha\le 1$.

შენიშვნა. 1) §1-ის თეორემა 1.1-ის შედეგი 1-დან გამომდინარეობს, რომ პირობით კრებადი მწკრივი შეიცავს როგორც დადებით, ასევე უარყოფით წევრთა უსასრულო რაოდენობას. 2) დადებითი მწკრივის კრებადობის ზემოთ მოყვანილი ყველა ნიშანი მართებულია მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის დასადგენად.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

აბსოლუტურად კრებადია.

კოშის ნიშნის გამოყენებით გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

ე. ი. მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

მაგალითი 3. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყოველი x-სათვის. მართლაც, როგორიც არ უნდა იყოს n და x, გვაქვს

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}.$$

მაგრამ მწკრივი $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ კრებადია. აქედან გამომდინარე მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

§8. პირობით და აბსოლუტურად კრებად მწკრივთა თვისებები

სასრულ წევრებიანი ჯამის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა: შესაკრებთა გადანაცვლებით ჯამი არ იცვლება. ბუნებრივად ისმის კითხვა: არის თუ არა სასრულწევრებიანი ჯამის ეს თვისება მართებული კრებადი მწკრივებისათვის, ე. ი. თუ კრებად მწკრივში მოვახდენთ წევრების ნებისმიერ გადანაცვლებას, მაშინ ახალი მწკრივის ჯამი იქნება თუ არა ტოლი მოცემული მწკრივის ჯამის (და საზოგადოდ იქნება თუ არა ახალი მწკრივი კრებადი?). ამ კითხვაზე პასუხი საზოგადოდ უარყოფითია. პირობით კრებად მწკრივში შეიძლება წევრების ისე გადანაცვლება, რომ მიღებული მწკრივი განშლადი იყოს ან იყოს კრებადი ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული რიცხვისაკენ. რაც შეეხება აბსოლუტურად კრებად მწკრივებს, მისი წევრების ნებისმიერი გადანაცვლებით მწკრივის კრებადობის "ხასიათი" და ჯამი არ იცვლება. სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 8.1 (დირიხლე). აბსოლუტურად კრებად მწკრივში წევრთა ნებისმიერი გადანაცვლებით მიღებული მწკრივი კვლავ აბსოლუ-

ტურად კრებადია და მისი ჯამი უდრის მოცემული მწკრივის ჯამს.

მაგალითი. განვიხილოთ პირობით კრებადი მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

ამ მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ S-ით. ლეიბნიცის თეორემის ძალით $0<S<1$. ამ მწკრივში მოვახდინოთ წევრების გადანაცვლება ისე, რომ პირველი დადებითი წევრის შემდეგი მომდევნო ორი წევრი იყოს უარყოფითი მოცემულ მწკრივში მათი მიმდევრობის რიგის შეუცვლელად. აღნიშნული გადანაცვლებით მივიღებთ მწკრივს

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots \qquad (8.1)$$

ვაჩვენოთ, რომ (8.1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი უდრის $\frac{1}{2}S$ მართლაც განვიხილოთ კერძო ჯამი

$$S'_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}S_{2n},$$

სადაც S_{2n} არის მოცემული მწკრივის კერძო ჯამი. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{1}{2}S.$$

აქედან და (8.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S'_{3n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}S,$$

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(S'_{3n+1}-\frac{1}{4n+2}\right)=\frac{1}{2}S.$$

მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty}S'_{n}=\frac{1}{2}S.$$

ამრიგად, განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ პირობით კრებად მწკრივში წევრთა გადანაცვლებამ შეიძლება შეცვალოს მისი ჯამი.

თეორემა 8.2 (რიმანი). თუ (a_n) მწკრივი პირობით კრებადია, მაშინ ამ მწკრივის წევრთა სათანადო გადანაცვლებით შეიძლება მივიღოთ როგორც განშლადი, ისე ნებისმიერი წინასწარ მოცემული S რიცხვისაკენ კრებადი მწკრივი.

XV თავი

ხარისხოვანი მწკრივები

§1. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალი და კრებადობის რადიუსი

ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (1.1)$$

სახის მწკრივს, სადაც $a_0, a_1,\dots,a_n,\dots$ მუდმივი რიცხვებია, ხოლო x – ცვლადია. ამ მუდმივებს ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება.

ჩვეულებრივ ხარისხოვანი მწკრივი განიხილება უფრო ზოგადი სახით

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots \qquad (1.2)$$

ეს მწკრივი $x-x_0=t$ ჩასმით დაიყვანება (1.1) სახემდე. ამიტომ შემდგომში სიმარტივისათვის განვიხილავთ (1.1) სახის მწკრივებს.

განსაზღვრება **1.1.** (1.1) მწკრივს ეწოდება კრებადი $x_0\in R$ წერტილში, თუ კრებადია რიცხვთა მწკრივი

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n+\dots \qquad (1.3)$$

თუ რიცხვთა (1.3) მწკრივი განშლადია, მაშინ (1.1) მწკრივს ეწოდება განშლადი x_0 წერტილში.

(1.1) მწკრივს ეწოდება კრებადი $D\subset R$ სიმრავლეზე, თუ ის კრებადია ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში. თუ $G\subset R$ სიმრავლის ყოველ წერტილში (1.1) მწკრივი განშლადია, მაშინ (1.1) მწკრივს ეწოდება განშლადი G-ზე.

ხარისხოვან მწკრივთა თეორიაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხია ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არის სტრუქტურის დადგენა.

შევნიშნოთ, რომ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე ცარიელი სიმრავლე არ არის, რადგან (1.1) სახის ნებისმიერი ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x=0$ წერტილში მაინც და ამ წერტილში მისი ჯამია a_0. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის

არის სტრუქტურის დადგენა დამყარებულია აბელის შემდეგ თეორემაზე.

თეორემა 1.1 (აბელის პირველი თეორემა). თუ (1.1) ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x_0\neq 0$ წერტილში, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x|<|x_0|$.

შედეგი. თუ (1.1) მწკრივი განშლადია x_1 წერტილში, მაშინ ის განშლადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x|>|x_1|$.

მართლაც, (1.1) ხარისხოვანი მწკრივი კრებადი რომ იყოს ისეთი x-თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x|>|x_1|$, მაშინ აბელის თეორემის ძალით (1.1) მწკრივი კრებადი იქნებოდა x_1 წერტილში, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

აბელის თეორემისა და მისი შედეგის აზრი მდგომარეობს შემდეგში: თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია x_0 წერტილში, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია $]-|x_0|,|x_0|[$ ინტერვალში, ხოლო თუ ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია x_1 წერტილში, მაშინ ის განშლადია $[-|x_1|,|x_1|]$ სეგმენტის გარეთ.

არსებობს ხარისხოვანი მწკრივი, რომელიც კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში. ასეთია მაგალითად მწკრივი

$$1+1!x+2!x^2+\cdots+n!x^n+\cdots$$

არსებობს ხარისხოვანი მწკრივი, რომელიც კრებადია $]-\infty;\infty[$ შუალედში. ასეთია მაგალითად, მწკრივი

$$1+x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}+\cdots$$

არსებობს აგრეთვე მწკრივი, რომლის კრებადობის არეა სასრული შუალედი. ასეთია მაგალითად მწკრივი

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

ამ მწკრივის კრებადობის არეა $]-1,1[$ ინტერვალი.

თეორემა 1.2. თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x_1\neq 0$ წერტილში და განშლადია x_2-ში, მაშინ არსებობს $R>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როცა $|x|<R$ და განშლადია, როცა $|x|>R$.

ამრიგად, ზემოთმოყვანილი თეორემით დგინდება, რომ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $]-R,R[$ ინტერვალში და განშლადია $[-R,R]$ სეგმენტის გარეთ. რაც შეეხება $x=-R$ და $x=R$ წერტილებს, ამ წერტილებში კრებადობის საკითხი შეისწავლება ყოველი კონკრეტული მწკრივისათვის. შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს ყველა შესაძლო შემთხვევას. მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს ორივე წერტილში, ან კრებადი იყოს ამ წერტი-

ლებიდან მხოლოდ ერთ-ერთში, ან განშლადი იყოს ორივე წერტილში.

$]-R,R[$ ინტერვალს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალი, ხოლო R რიცხვს კი კრებადობის რადიუსი. თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ ამ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=0$, ხოლო როცა ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $]-\infty;\infty[$ შუალედში, მაშინ ვიტყვით, რომ ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=+\infty$.

***შენიშვნა* 1.** თუ (1.1) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია R, მაშინ (1.2) მწკრივის კრებადობის ინტერვალი იქნება $|x-x_0|<R$, ან რაც იგივეა $]-R+x_0,R+x_0[$ ინტერვალი.

***შენიშვნა* 2.** თუ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არეა სეგმენტი, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია ამ სეგმენტის ბოლოებზე, ხოლო, თუ კრებადობის არეა ნახევრად ღია სეგმენტი, მაშინ ის პირობით კრებადია კრებადობის არის ბოლო წერტილზე.

§2. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოთვლა

მოვიყვანოთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოთვლის ორი ხერხი, რომლებიც მიიღება რიცხვითი მწკრივის კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნების გამოყენებით.

***თეორემა* 2.1.** თუ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ხარისხოვანი მწკრივისათვის

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L \quad \text{ან} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L,$$

მაშინ კრებადობის რადიუსი

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{L}, & \text{როცა} \quad 0<L<+\infty,\\ +\infty, & \text{როცა} \quad L=0,\\ 0, & \text{როცა} \quad L=+\infty.\end{cases}$$

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ $1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}+\cdots$ მწკრივის კრებადობის არე.

გვაქვს $a_n=\dfrac{1}{n}$ და $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$, ამიტომ

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

ადვილია შემოწმება, რომ $x=1$ წერტილში მოცემული მწკრივი განშლადია, ხოლო $x=-1$ წერტილში – კრებადი. ამრიგად მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა [-1;1[შუალედი.

მაგალითი **2.** ვიპოვოთ $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$ მწკრივის კრებადობის არე.

რადგან $a_n=\frac{1}{n^2}$, ამიტომ $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.

ადვილია შემოწმება, რომ მწკრივი კრებადია $x=-1$ და $x=1$ წერტილებში. ამრიგად მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა [-1;1] სეგმენტი.

მაგალითი **3.** ვიპოვოთ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^n$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამ მწკრივისათვის $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=3$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მოცემული მწკრივი განშლადია $x=-\frac{1}{3}$ და $x=\frac{1}{3}$ წერტილებში. მაშასადამე, მწკრივის კრებადობის არეა $\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$ ინტერვალი.

მაგალითი **4.** ვიპოვოთ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

ამ მწკრივისათვის $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

გამომდინარე აქედან $R=+\infty$, ე. ი. მოცემული მწკრივი კრებადია $]-\infty;+\infty[$ შუალედში. შევნიშნოთ, რომ თანახმად მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობისა, ყოველი x-თვის

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

§3. ხარისხოვანი მწკრივების ზოგიერთი თვისება

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა **3.1.** ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი უწყვეტია კრებადობის ინტერვალში.

ამ თეორემის თანახმად ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი უწყვეტია $]-R,R[$ ინტერვალში. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x=R$ ან $x=-R$ წერტილში.

***თეორემა* 3.2 *(აბელი)*.** ვთქვათ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია R. თუ ეს მწკრივი კრებადია $x=-R$ ან $x=R$ წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია შესაბამისად $[-R;0]$ ან $[0;R]$ სეგმენტზე, ე. ი.

$$\lim_{x \to R}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \text{ან} \quad \lim_{x \to -R}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$$

შენიშვნა. თუ მწკრივი ერთდროულად კრებადია $x=-R$ და $x=R$ წერტილებში, მაშინ ის იქნება უწყვეტი $[-R;R]$ სეგმენტზე.

3. ხარისხოვანი მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება და გაწარმოება. განვიხილოთ მწკრივები

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3.3}$$

(3.2) მწკრივი მიიღება (3.1) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით $[0;x]$ შუალედში, ხოლო (3.3) კი – (3.1) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებით.

***თეორემა* 3.3.** (3.1), (3.2) და (3.3) მწკრივების კრებადობის რადიუსები ერთმანეთის ტოლია.

***თეორემა* 3.4.** ვთქვათ (3.1) მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R>0$, მაშინ ყოველი $x \in]-R;R[$-თვის

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

***თეორემა* 3.5.** (3.1) მწკრივის $f(x)$ ჯამი წარმოებადია ამ მწკრივის კრებადობის $]-R;R[$ ინტერვალში და ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

შედეგი. ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს აქვს ყველა რიგის წარმოებული თავის კრებადობის ინტერვალში. ამასთან, ჯამის n-ური ($n=1,2,\ldots$) რიგის წარმოებული წარმოადგენს მწკრივის n-ჯერ წევრ-წევრად გაწარმოებით მიღებული მწკრივის ჯამს.

***მაგალითი* 1.** ვიპოვოთ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. როგორც ვიცით

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots \qquad (|x|<1).$$

ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით, როცა $|x|<1$, მივიღებთ

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (3.4)$$

ამ მწკრივს ეწოდება ლოგარითმული მწკრივი. მისი კრებადობის რადიუსი $R=1$.

(3.4) ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა $x=1$. მართლაც, თუ $x=1$, გვაქვს მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

რომელიც კრებადია. მაშასადამე აბელის თეორემის ძალით

$$\lim_{x\to1}\ln(1+x)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

ე. ი.
$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

***მაგალითი* 2.** ვიპოვოთ $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. როგორც ვიცით $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots$.

ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით ($|x|<1$):

$$arctgx=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad (3.5)$$

მიღებული მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=1$.

(3.5) ფორმულა ძალაში რჩება მაშინაც, როცა $x=1$. მართლაც ამ შემთხვევაში მიიღება მწკრივი

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

ეს მწკრივი კრებადია. ამიტომ აბელის თეორემის ძალით

$$\lim_{x\to1}arctgx=arctg1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

ე. ი.
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

§4. ფუნქციის გაშლა ხარისხოვან მწკრივად. ტეილორისა და მაკლორენის მწკრივი და მათი გამოყენება

***განსაზღვრება* 4.1.** ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია $]-r,r[$ ინტერვალში იშლება $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ხარისხოვან მწკრივად, თუ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\quad x\in]-r,r[. \tag{4.1}$$

წინა პარაგრაფის თეორემა 3.5-ის შედეგის თანახმად იმისათვის, რომ ფუნქცია გაიშალოს ხარისხოვან მწკრივად, აუცილებელია ამ ფუნქციას ჰქონდეს ყველა რიგის წარმოებული მოცემულ შუალედში.

***განსაზღვრება* 4.2.** ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და ამ წერტილში აქვს ყველა რიგის წარმოებული. მაშინ მწკრივს

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{4.2}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი x_0 წერტილში. როცა $x_0=0$, (4.2) მწკრივს მაკლორენის მწკრივი ეწოდება.

მტკიცდება, რომ ერთიდაიგივე ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს (4.1) სახის ორი სხვადასხვა გაშლა. სამართლიანია შემდეგი თეორემა

***თეორემა* 4.1.** ვთქვათ ხარისხოვანი

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R>0$. მაშინ ეს მწკრივი წარმოადგენს თავისი ჯამის ტეილორის მწკრივს.

თეორემა 4.1-დან გამომდინარეობს, რომ, თუ კრებადობის არეში ორი ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ტოლი იქნება მათი კოეფიციენტები. ე. ი. თუ $f(x)$ ფუნქცია იშლება ხარისხოვან მწკრივად, მაშინ ეს გაშლა ერთადერთია და ეს ხარისხოვანი მწკრივი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივს.

ისმება კითხვა, მართებულია თუ არა შებრუნებული დებულება? თუ $f(x)$ ფუნქციას $]-R;R[$ ინტერვალში გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული, მაშინ ამ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი იქნება თუ არა კრებადი $]-R;R[$ ინტერვალში, და თუ კრებადია, იქნება თუ არა მისი ჯამი $f(x)$-ის ტოლი? საზოგადოდ პასუხი ამ კითხვაზე უარყოფითია. მოვიყვანოთ სათანადო მაგალითი.

***მაგალითი* 1.** განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0. \end{cases}$$

ამ ფუნქციას]-∞;∞[შუალედში გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული. მართლაც, თუ $x\neq 0$, ცხადია

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \quad f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\ldots$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული $x=0$ წერტილშიც და გამოვთვალოთ ის. ცხადია, რომ

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0,$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0,$$

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=0,\ldots$$

მაშასადამე $f(x)$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივია

$$0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+\cdots=0, \quad -\infty<x<\infty.$$

ამრიგად, მოცემული $f(x)$ ფუნქციისა და მაკლორენის მწკრივის ჯამი ერთმანეთს ემთხვევა მხოლოდ და მხოლოდ $x=0$ წერტილში. ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია არ იშლება თავის ტეილორის მწკრივად $x=0$ წერტილის არცერთ მიდამოში.

მოყვანილი ფუნქცია არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული და მისი ტეილორის მწკრივი ყველგან კრებადია, მაგრამ მწკრივის ჯამი არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას.

განხილული მაგალითიდან გამომდინარეობს, რომ ორ სხვადასხვა ფუნქციას ერთიდაიგივე შუალედში შეიძლება ჰქონდეს ერთიდაიგივე ტეილორის მწკრივი. მართლაც თუ $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ მაშინ ცხადია, რომ იგივე $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ტეილორის მწკრივი x_0 წერტილში აქვს $\varphi(x)+f(x)$ ფუნქციას, სადაც

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}, & \text{როცა} \quad x\neq x_0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=x_0. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული, მაგრამ მისი ტეილორის მწკრივი ყველგან განშლადია, გარდა ერთი წერტილისა.

***თეორემა* 4.2.** იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი კრებადი იყოს $f(x)$ ფუნქციისაკენ $]x_0-R;x_0+R[$ ინტერვალში, აუცილებელია და საკმარისი ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0\,,$$

სადაც $r_n(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივის ნაშთითი წევრი.

მოვიყვანოთ (4.1) ტოლობის შესრულების ეფექტური საკმარისი პირობა.

***თეორემა* 4.3.** ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას $]x_0-R;x_0+R[$ ინტერვალში აქვს ყველა რიგის წარმოებული. თუ არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ

$$|f^{(n)}(x)|\le M,\quad x\in]x_0-R;x_0+R[,\ n=0,1,2,\ldots$$

მაშინ $]x_0-R;x_0+R[$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქცია იშლება ტეილორის მწკრივად

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)\,,\quad |x-x_0|<R.$$

***მაგალითი* 2.** გავშალოთ მაკლორენის მწკრივად $f(x)=e^x$ ფუნქცია.

ამოხსნა. რადგან $f^{(n)}(x)=e^x$, $n=1,2,\ldots$ ამიტომ ნებისმიერი $R>0$ რიცხვისთვის

$$0<f^{(n)}(x)<e^R,\ \forall x\in]-R,R[,n=0,1,2,\ldots$$

მაშასადამე, e^x ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 4.3-ის პირობებს ნებისმიერ სასრულ ინტერვალში. ამიტომ e^x გაიშლება ხარისხოვან მწკრივად მთელს რიცხვით ღერძზე:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,.$$

***მაგალითი* 3.** გავშალოთ მაკლორენის მწკრივად $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები.

ამოხსნა. თუ $f(x)=\sin x$, მაშინ $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, ამიტომ $|f^{(n)}(x)|\le 1$ ყოველი $x\in]-\infty;\infty[$-თვის. აქედან გამომდინარე თეორემა 4.3-ის ძალით $\sin x$ ფუნქცია იშლება მაკლორენის მწკრივად მთელს რიცხვით ღერძზე:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\tag{4.3}$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

მაგალითი 4. გავშალოთ მაკლორენის მწკრივად $\ln(1+x)$ და $\operatorname{arctg} x$ ფუნქციები.

ამოხსნა. როგორც ვიცით

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots \quad (|t|<1)$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots \quad (|t|<1).$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად ინტეგრებით მივიღებთ შესაბამისად $\ln(1+x)$ და $\operatorname{arctg} x$ ფუნქციების მაკლორენის მწკრივებს:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ამ მწკრივების კრებადობის რადიუსია $R=1$.

ამოცანათა კრებული

წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

§1. სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

1.1. მართებულია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $3\in\{0,-1,3,5\}$; 2) $-2\in\{-5,2,3\}$,

3) $5\in\{2n-1: n\in N\}$; 4) $7\in\{2n: n\in Z\}$;

1.2. დაადგინეთ შემდეგი ორი ჩანაწერიდან რომელია მართებული:

1) $\{2,3\}\in\{2,3,\{2,3,4\}\}$ თუ $\{2,3\}\subset\{2,3,\{2,3,4\}\}$;

2) $\{2,3\}\in\{2,3,5,\{2,3\},\{0,1,3\}\}$ თუ $\{2,3\}\subset\{2,3,5,\{2,3\},\{0,1,3\}\}$.

1.3. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$ და $A\setminus B$, თუ:

1) $A=\{-3;\ 0;\ 2;\ 3;\ 5\}$, $B=\{-2;\ 0;\ 1;\ 3;\ 4\}$

2) $A=\{-8;\ -4;\ 1;\ 5;\ 7;\ 8\}$, $B=\{-3;\ 1;\ 5\}$

3) $A=[-5;\ 2]$, $B=[1;\ 4]$

4) $A=[0;7[$, $B=[1;\ 7]$

1.4. ჩაწერეთ მოცემული სიმრავლე მისი ელემენტების ჩამოთვლით:

1) $A=\{x(x-2)=0:\ x\in R\}$; 2) $A=\left\{-x^2+3x+10=0:\ \ x\in R\right\}$;

3) $A=\{-1<n+2<5:\ n\in N\}$; 4) $A=\left\{\frac{1}{3}<3^x<27:\ \ x\in Z\right\}$;

5) იმ ლუწი ნატურალური რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც არ აღემატებიან 10-ს;

6) 24-ის გამყოფების სიმრავლე.

1.5. გამოსახეთ კოორდინატთა სიბრტყეზე შემდეგი სიმრავლე:

1) $A=\left\{1\le x\le 3,\ -2\le y\le 1,\quad x,y\in R\right\}$;

2) $A=\left\{xy\le 0,\quad x,y\in R\right\}$; 3) $A=\left\{\frac{x}{y}\ge 0,\quad x,y\in R\right\}$;

4) $A=\left\{|x|\le 1,\quad x\in R\right\}$; 5) $A=\left\{|y|>3,\quad y\in R\right\}$;

6) $A=\left\{y>x,\quad x,y\in R\right\}$; 7) $A=\left\{y\le x^2,\quad x,y\in R\right\}$;

8) $A=\left\{x^2\le y\le 2,\quad x,y\in R\right\}$

1.6. კლასში 35 მოსწავლეა. მათგან 20 დადის მათემატიკის წრეში, 11 – ფიზიკის წრეში, ხოლო 10 ბავშვი არ დადის

ამ წრეებიდან არც ერთში. ამ კლასის რამდენი მოსწავლე დადის ერთდროულად მათემატიკისა და ფიზიკის წრეებში?

1.7. მთელი დღის განმავლობაში მაღაზიაში 120 ადამიანი შემოვიდა. მათგან 50-მა შეიძინა მაგნიტოფონი, 40-მა ტელევიზორი, ხოლო 20-მა შეიძინა ტელევიზორიც და მაგნიტოფონიც. მაღაზიაში შემომსვლელთაგან რამდენმა ადამიანმა არ შეიძინა არც ტელევიზორი და არც მაგნიტოფონი?

1.8. კლასის ყოველი მოსწავლე სწავლობს ინგლისური, გერმანული და ფრანგული ენებიდან ერთ ან ორ უცხო ენას. ინგლისურს სწავლობს 16 მოსწავლე, გერმანულს – 10, ფრანგულს – 9, ინგლისურს და გერმანულს ერთდროულად სწავლობს 6 მოსწავლე, ინგლისურს და ფრანგულს – 3 მოსწავლე, ხოლო ერთდროულად გერმანულსა და ფრანგულს არცერთი მოსწავლე არ სწავლობს. რამდენი მოსწავლეა ამ კლასში ?

1.9. აჩვენეთ, რომ

1) $(A\cup B)\setminus C\subset A\cup(B\setminus C)$; 2) $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$;

3) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$; 4) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

1.10. დაადგინეთ შემდეგი წინადადებებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი:

1) $\forall x\ \exists y: x+y=3$; 2) $\exists y\ \forall x: x+y=3$;

3) $\exists x, y: x+y=3$; 4) $\forall x, y: x+y=3$;

1.11. იპოვეთ $\max E$, $\min E$, $\sup E$ და $\inf E$ შემდეგი სიმრავლეებისათვის (თუ ისინი არსებობენ):

1) $E=\{x:\ -2\le x<5,\ x\in R\}$; 2) $E=\{x:\ x\le 3,\ x\in R\}$;

3) $E=\left\{\frac{1}{n}: n\in N\right\}$; 4) $E=\left\{\frac{n}{n+1}: n\in N\right\}$.

§2. მოქმედებები ერთწევრებზე და მრავალწევრებზე მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა

შეკვეცეთ წილადები (№№2.1-2.3):

2.1. 1) $\frac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3}$; 2) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$; 3) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 4) $\frac{1-x^3}{3+3x+3x^2}$.

2.2. 1) $\frac{3x^2-3xy}{3(x-y)^2}$; 2) $\frac{20a^2-45b^2}{(2a+3b)^2}$;

3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; 4) $\frac{5m^2+10mn+5n^2}{15m^2-15n^2}$.

2.3. 1) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{p^3-q^3}{p^2-q^2}$; 3) $\frac{2x^3-2y^3}{5x^2-5y^2}$; 4) $\frac{3m^2-3n^2}{6m^3+6n^3}$.

შეასრულეთ მოქმედებები წილადებზე (№№2.4-2.8):

2.4. 1) $\frac{7a}{x^2-9}+\frac{5a}{x-3}+\frac{a}{x+3}$; 2) $\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}-\frac{x+2}{x^2-4}$;

3) $\frac{m}{1-a}-\frac{m}{1+a}+\frac{m}{1-a^2}$; 4) $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}$.

2.5. 1) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$;

2) $\frac{3}{a^2+2ab+b^2}-\frac{4}{a^2-2ab+b^2}+\frac{5}{a^2-b^2}$;

3) $\frac{1}{a-b}-\frac{3ab}{a^3-b^3}-\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$; 4) $\frac{a}{a-b}+\frac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}$.

2.6. 1) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$; 2) $\left(\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)\cdot\frac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$;

3) $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x+a}{a}-\frac{x-a}{x}\right)$; 4) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

2.7. 1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$; 2) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$;

3) $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$.

2.8. 1) $\left(\frac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\right):\frac{ax^{-1}}{x-a}$;

2) $\left[\frac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2}\cdot\frac{y^2(x^{-2}-y^{-2})}{x(xy^{-1}-x^{-1}y)}\right]:\frac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1}$;

3) $\frac{1}{4}\left(xa^{-1}-ax^{-1}\right)\left(\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}+x^{-1}}-\frac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)$;

4) $\left(\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-2n}-a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}+a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1}$

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ (№№2.9; 2.10):

2.9. 1) $\frac{4-2\sqrt{x}}{x-4}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$, თუ $x=8$;

2) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{2\sqrt{ab}}-1\right)\cdot\sqrt{ab}$, თუ $a=2+\sqrt{2}$, $b=4-\sqrt{2}$;

3) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{2\sqrt{a}}-1\right)\cdot\sqrt{a}$, თუ $a=7$;

4) $\left(\sqrt[4]{a}+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\sqrt{a}$, თუ $a=4$.

2.10. 1) $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-3\sqrt{ab}}$, თუ $a=6{,}25$, $b=2{,}25$;

2) $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}-1}{1-x\sqrt{x}}$, თუ $x=\sqrt{3}+1$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^{-2}$ თუ $x=4$;

4) $\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$, თუ $a=2+\sqrt{2}$, $b=3-\sqrt{2}$

§3. კოორდინატთა სისტემები

3.1. *Ox* ღერძზე იპოვეთ $x=3$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $x=-2$ წერტილის მიმართ.

3.2. *Oy* ღერძზე იპოვეთ $y=-2$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $y=1$ წერტილის მიმართ.

3.3. იპოვეთ მანძილი Ox ღერძზე მდებარე $x=-5$ და $x=2$ წერტილებს შორის.

3.4. იპოვეთ მანძილი Oy ღერძზე მდებარე $y=-15$ და $y=-3$ წერტილებს შორის.

3.5. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები: $A(-2;3)$, $B(4;-1)$, $C(0;2)$, $D(-3;-2)$. იპოვეთ მათი Ox ღერძზე გეგმილების კოორდინატები.

3.6. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები: $A(4;-3)$, $B(-2;-4)$, $C(-2;0)$, $D(3;5)$. იპოვეთ მათი Oy ღერძზე გეგმილების კოორდინატები.

3.7. იპოვეთ $A(-4;-3)$, $B(0;-4)$, $C(2;3)$, $D(3;0)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Ox ღერძის მიმართ.

3.8. იპოვეთ $A(5;-1)$, $B(-3;-5)$, $C(-4;0)$, $D(0;7)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oy ღერძის მიმართ.

3.9. იპოვეთ $A(7;1)$, $B(-4;0)$, $C(-5;-2)$, $D(0;6)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები კოორდინატთა სათავის მიმართ.

3.10. იპოვეთ $A(5;2)$, $B(-4;-6)$, $C(-3;1)$, $D(2;-4)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების მიმართ.

3.11. იპოვეთ $A(-4;1)$, $B(2;-4)$, $C(2;0)$, $D(-5;-6)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები მეორე და მეოთხე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების მიმართ.

3.12. განსაზღვრეთ, რომელ საკოორდინატო მეოთხედებს შეიძლება ეკუთვნოდეს $M(x;y)$ წერტილი, თუ:

1) $xy>0$;	2) $xy<0$;	3) $x-y=0$;
4) $x+y=0$;	5) $x+y>0$;	6) $x+y<0$.

3.13. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის, თუ:

1) $A(3;0)$, $B(-7;0)$;	2) $A(0;-1)$, $B(0;-8)$;
3) $A(-2;4)$, $B(6;4)$;	4) $A(2;-9)$, $B(2;-11)$;
5) $A(-4;3)$, $B(0;0)$;	6) $A(0;0)$, $B(5;-12)$;
7) $A(-3;2)$, $B(2;-10)$;	8) $A(2;-1)$, $B(-2;2)$.

3.14. იპოვეთ $M(-3;4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები აბსცისთა ღერძის მიმართ.

3.15. იპოვეთ $M(-2;4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები ორდინატთა ღერძის მიმართ.

3.16. იპოვეთ $M(-3;2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა სათავის მიმართ.

3.17. იპოვეთ $A(-3;2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები $B(2;-1)$ წერტილის მიმართ.

3.18. იპოვეთ $A(-4;2;-1)$ და $B(3;-1;1)$ წერტილების გეგმილების კოორდინატები საკოორდინატო ღერძებზე.

3.19. იპოვეთ $A(2;-3;1)$ და $B(-4;2;0)$ წერტილების გეგმილების კოორდინატები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

3.20. იპოვეთ $A(-3;1;2)$, $B(2;0;-1)$, $C(3;5;2)$, $D(-1;-3;-2)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oxy საკოორდინატო სიბრტყის მიმართ.

3.21. იპოვეთ $A(4;-2;-1)$, $B(-4;1;-1)$, $C(0;-2;1)$, $D(4;1;2)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oxz საკოორდინატო სიბრტყის მიმართ.

3.22. იპოვეთ $A(-3;2;-1)$, $B(4;5;2)$, $C(-3;-2;-1)$, $D(2;-1;0)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Ox ღერძის მიმართ.

3.23. იპოვეთ $A(4;3;-2)$, $B(-4;-1;3)$, $C(-1;0;-2)$, $D(-2;1;-3)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები Oz ღერძის მიმართ.

3.24. იპოვეთ $A(2;-5;1)$, $B(-2;3;-2)$, $C(0;-3;3)$, $D(4;2;1)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები კოორდინატთა სათავის მიმართ.

3.25. პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ წერტილები $A\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $D\left(3;\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

3.26. იპოვეთ $A\left(3;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $C\left(2;\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $D\left(1;\dfrac{11\pi}{6}\right)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილების კოორდინატები პოლარული ღერძის მიმართ.

3.27. პოლარულ კოორდინატთა სისტემის პოლუსი ემთხვევა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავეს, ხოლო პოლარული ღერძი აბსცისათა ღერძს.

1) პოლარულ სისტემაში მოცემულია წერტილები $A\left(5;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C(7;0)$, $D\left(3;\dfrac{2\pi}{3}\right)$. იპოვეთ ამ წერტილების დეკარტის კოორდინატები.

2) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები $A(2;2)$, $B(3;0)$, $C(0;5)$, $D(-5;0)$. იპოვეთ ამ წერტილების პოლარული კოორდინატები.

§4. კომპლექსური რიცხვები

4.1. იპოვეთ z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვების ჯამი და სხვაობა, თუ:

1) $z_1=2-3i$, $z_2=-3+i$; 2) $z_1=3$, $z_2=-1+2i$;

3) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$; 4) $z_1=-4i$, $z_2=-2$.

4.2. იპოვეთ $z_1 \cdot z_2$ და $\dfrac{z_1}{z_2}$, თუ:

1) $z_1=1+2i$, $z_2=1-i$; 2) $z_1=3-i$, $z_2=3+i$;

3) $z_1=-2$, $z_2=4+3i$; 4) $z_1=\sqrt{5}-i$, $z_2=\sqrt{5}-2i$.

4.3. შეასრულეთ მოქმედებანი:

1) $i+i^2+i^3+i^4$; 2) $i-i^2+i^3-i^4$;

3) $5i^3+3i^2-4i^5+i^4$; 4) $3i^3-2i^7+i^5-i$.

4.4. შეასრულეთ მოქმედებანი და პასუხი ჩაწერეთ ალგებრული ფორმით:

1) $(1-2i)\cdot(2+i)^2+5i$; 2) $(2-i)^3\cdot(2+11i)$;

3) $\dfrac{2-3i}{1+4i}-i^8$; 4) $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$.

4.5. იპოვეთ განტოლების (x,y) ამონახსნი, სადაც x და y ნამდვილი რიცხვებია:

1) $(1+i)x+(2-3i)y=3+2i$, 2) $(3+2i)x+(5+i)y=-2+3i$.

4.6. ამოხსენით განტოლება

1) $2z+3i+iz=0$ 2) $z-2\bar{z}-3i=0$.

4.7. იპოვეთ კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი:

1) $-i$; 2) $-1+i$; 3) $-1-\sqrt{3}\,i$; 4) $-\sqrt{3}+i$.

4.8. წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1) 3; 2) i; 3) $-2i$;

4) $1+i$; 5) $1-i\sqrt{3}$; 6) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.9. ტრიგონომეტრიული ფორმით მოცემული კომპლექსური რიცხვების გამრავლებისა და გაყოფის წესის გამოყენებით შეასრულეთ მოქმედებანი და პასუხი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4}+i\sin\dfrac{11\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$;

4) $(1-i)\cdot 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$;

6) $\dfrac{2(\cos\pi+i\sin\pi)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$.

4.10. წარმოადგინეთ მაჩვენებლიანი ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:
1) $-1+i$; 2) $1-\sqrt{3}\,i$; 3) $-\sqrt{3}+i$; 4) $-2+i$.

4.11. მუავრის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ:
1) $(1+i)^{20}$; 2) $(1-i)^{40}$;
3) $(1+\sqrt{3}\,i)^{20}$; 4) $\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$

4.12. გამოთვალეთ:
1) კუბური ფესვი 1-დან; 2) მეოთხე ხარისხის ფესვი -1-დან; 3) კვადრატული ფესვი i-დან; 4) კვადრატული ფესვი $-i$-დან; 5) კუბური ფესვი i-დან; 6) კუბური ფესვი $-i$-დან; 7) კვადრატული ფესვი $1+i$; 8) კუბური ფესვი $-1+i$-დან; 9) მეოთხე ხარისხის ფესვი $1-i$; 10) კვადრატული ფესვი $1+\sqrt{3}\,i$-დან.

4.13. ამოხსენით განტოლება:
1) $z^2+4=0$; 2) $4z^2+9=0$;
3) $z^2+2z+5=0$; 4) $z^2-4z+13=0$;
5) $5z^2-2z+1=0$; 6) $2z^2-10z+25=0$;
7) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$; 8) $z^2+(2i-3)z+1-3i=0$;
9) $z^4-3z^2-4=0$; 10) $z^4+2z^2+4=0$;
11) $z^3-8=0$; 12) $z^4+16=0$.

§5. მატრიცები და დეტერმინანტები

5.1. იპოვეთ $A+B$, თუ:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -7 & 4\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -5 & 2 & 6\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 7\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

5.2. მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ: 1) $-4A$; 2) $A+3B$; 3) $3A-2B$; 4) $B-A$.

5.3. მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ: 1) $A-B$; 2) $2A+B$; 3) $A-4B$; 4) $3A-2B$.

5.4. იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -5 & 2\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ -4 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

5.5. 1) იპოვეთ A^3, თუ $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

2) იპოვეთ A^2, თუ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) იპოვეთ $AB-BA$, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4) იპოვეთ $BA-AB$, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

5) იპოვეთ $(AB)C$, თუ

$$A=(2 \quad 3), \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

6) იპოვეთ $A(B+C)$, თუ:

$$A=(1 \quad 2), \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.6. იპოვეთ C მატრიცა, თუ:

1) $C=A'B-2B'$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $C=A'B-BA'$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$;

5.7. გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$.

5.8. გამოთვალეთ დეტერმინანტები სამკუთხედის წესით:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & 7 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} a & -a & -a \\ a & a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$.

5.9. გამოთვალეთ დეტერმინანტები მინორებად დაშლის წესით:

1) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

5.10. ამოხსენით განტოლებები:

1) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; 2) $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & x \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

5.11. იპოვეთ A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა, თუ:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.12. იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, თუ:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}15 & 6 & 8\\ 7 & 1 & 6\\ 10 & 5 & 4\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 10 & 2 & 7\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

§6. წრფივ განტოლებათა სისტემები

ამოხსენით სისტემები კრამერის ფორმულების გამოყენებით (№№6.1-6.4):

6.1. 1) $\begin{cases}4x-y=5\\ 3x+2y=1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-3y=-1\\ 3x+4y=18,\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+3y=-2\\ 3x-y=4,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x+5y=1\\ -2x+3y=5,\end{cases}$

5) $\begin{cases}2x+3y=0\\ x-4y=0,\end{cases}$ 6) $\begin{cases}7x-2y=0\\ x+2y=0.\end{cases}$

6.2. 1) $\begin{cases}3x+2y+z=8\\ 2x-y-2z=-2\\ 4x-6y+7z=-1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3y+z=6\\ x-2y+z=0\\ 2x+2y+z=5,\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-y+z=3\\ x+2y-z=2\\ 2x-y+3z=4,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-2x+y-3z=4\\ 3x-y+2z=-4\\ x+y+z=-3.\end{cases}$

6.3. 1) $\begin{cases}x+y+z=0\\ 2x-3y+4z=0\\ 5x-7y+8z=0,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+y-z=0\\ x+2y+z=0\\ 2x-y+3z=0.\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-y+z=0\\ x+2y-2z=0\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 3x-y+4z=0\\ -x+y+z=0.\end{cases}$

6.4. 1) $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=2\\ 3x_1-x_2+x_3=6\\ x_1-3x_3=-5,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=5\\ x_1-3x_2+13x_3=9\\ 2x_1+x_2-3x_3=4,\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x_1+x_2-2x_3=3\\ 2x_1+x_3=3\\ -x_1+2x_2-x_3=2,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=-3\\ x_2-x_3=0\\ 3x_1-4x_2+2x_3=-1.\end{cases}$

ამოხსენით სისტემები შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით (№№6.5; 6.6):

6.5. 1) $\begin{cases}3x_1-2x_2=4\\2x_1+5x_2=9,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1+3x_2=8\\4x_1-x_2=2,\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x_1+x_2=5\\x_1-3x_2=-1,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x_1-4x_2=3\\-2x_1+x_2=1.\end{cases}$

6.6. 1) $\begin{cases}5x_1+4x_2+3x_3=17\\4x_1+3x_2+2x_3=14\\2x_1+2x_2+x_3=7,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1-3x_2+4x_3=-1\\x_1+4x_2+5x_3=8.\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x_1+7x_2+7x_3=4\\3x_1+4x_2+4x_3=2\\4x_1+4x_2-5x_3=0,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5x_1+x_2+6x_3=2\\3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1-x_2+3x_3=0.\end{cases}$

6.7. დაადგინეთ თავსებადია თუ არა განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

1) $\begin{cases}3x_1-x_2=5\\x_1+2x_2=4,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-2x_2=3\\2x_1-4x_2=1,\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\3x_1+4x_2+x_3=2\\2x_1+2x_2+2x_3=3,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x_1-x_2=3\\x_1+2x_2-x_3=3\\3x_1-4x_2+2x_3=4.\end{cases}$

6.8. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases}2x_1+5x_2-4x_3=8\\3x_1+15x_2-9x_3=5\\x_1-5x_2+x_3=11,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3=2\\3x_1+x_2-3x_3=1\\x_1+7x_2-11x_3=-3,\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1-x_2+3x_3=0\\x_1+3x_2-4x_3=0,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x_1-x_2+3x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\\5x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$

§7. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. ვექტორის კოორდინატები

7.1. მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის ააგეთ $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $4\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.

7.2. მოცემული $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებისათვის ააგეთ: $3\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

7.3. მოცემულია $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$

7.4. მოცემულია $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=11$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

7.5. მოცემულია $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$ და $|\vec{a}-\vec{b}|$.

7.6. მოცემულია $|\vec{a}|=1{,}5$, $|\vec{b}|=0{,}8$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. იპოვეთ $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.

7.7. მოცემულია $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=120^\circ$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

7.8. მოცემულია $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=60^\circ$. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$.

7.9. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე, თუ მისი სიგრძეა $|\vec{a}|=4$ და l ღერძთან ადგენს კუთხეს:

1) 30°; 2) 120°.

7.10. იპოვეთ Oxy სიბრტყეზე მდებარე $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილი Oy ღერძზე, თუ მისი სიგრძეა $|\vec{a}|=6$ და Ox ღერძთან ადგენს 60°-იან კუთხეს.

7.11. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(1;-2;4)$, $\vec{b}(-3;1;-2)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $3\vec{a}-5\vec{b}$.

7.12. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(4;-3;6)$, $\vec{b}(-5;2;4)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები:

1) $3\vec{b}$; 2) $2\vec{a}-5\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+4\vec{b}$; 4) $2\vec{a}-\vec{b}$.

7.13. მოცემულია $A(-3;4;2)$ და $B(-2;1;5)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორების კოორდინატები.

7.14. მოცემულია $\vec{AB}(-4;-2;1)$ ვექტორი და $B(1;4;5)$ წერტილი. იპოვეთ A წერტილის კოორდინატები.

7.15. მოცემულია წერტილები $A(3;-1;2)$; $B(0;-5;3)$; $C(-2;1;4)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები: 1) $\vec{AB}$; 2) $\vec{BC}$; 3) $\vec{CA}$; 4) $\vec{AB}+\vec{BC}$; 5) $\vec{AC}-\vec{AB}$; 6) $2\vec{AB}+3\vec{BC}-4\vec{CA}$.

7.16. მოცემულია წერტილები $A(4;0;-4)$; $B(-1;3;1)$; $C(5;7;0)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები: 1) $\vec{AC}$; 2) $\vec{AB}$; 3) $\vec{BC}$; 4) $\vec{AB}+\vec{AC}$; 5) $\vec{AB}-\vec{BC}$; 6) $-3\vec{AB}+2\vec{BC}-5\vec{AC}$.

7.17. კოლინეარულია თუ არა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, თუ:

1) $\vec{a}(-3;-2;1)$, $\vec{b}(6;4;-2)$; 2) $\vec{a}\left(\frac{1}{2};4;\frac{1}{3}\right)$, $\vec{b}(-1;-8;1)$.

7.18. λ-ს რა მნიშვნელობისთვისაა კოლინეარული ვექტორები $\vec{a}(1;-2;\lambda)$ და $\vec{b}(-4;8;3)$?

7.19. α და β-ს რა მნიშვნელობებისათვის არის კოლინეარული ვექტორები $\vec{a}(1;\alpha;-2)$, $\vec{b}(\beta;4;6)$?

7.20. აჩვენეთ, რომ $A(-3;-1;1)$, $B(2;3;-1)$, $C(3;3;-5)$ და $D(2;-1;-19)$ წერტილები წარმოადგენენ ტრაპეციის წვეროებს.

7.21. აჩვენეთ, რომ $A(1;-1;3)$, $B(2;2;-5)$, $C(4;1;-6)$ და $D(3;-2;2)$ წერტილები წარმოადგენენ პარალელოგრამის წვეროებს.

§8. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

8.1. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

8.2. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

8.3. მოცემულია $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$. იპოვეთ

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{b}^2$; 3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$;

4) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$;   5) $\left(3\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot 2\vec{a}$;   6) $\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

8.4. მოცემულია $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. იპოვეთ

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;   2) $\vec{a}^2$ 3) $\vec{b}^2$

4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$;   5) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$;   6) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

8.5. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}$.

8.6. იპოვეთ კუთხე $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს შორის, თუ $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=4$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=6$.

8.7. იპოვეთ გეგ$_{\vec{a}}\vec{b}$, თუ $|\vec{a}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$.

8.8. იპოვეთ გეგ$_{\vec{a}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, თუ $|\vec{a}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$.

8.9. იპოვეთ გეგ$_{\vec{a}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

8.10. იპოვეთ გეგ$_{\vec{a}}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

8.11. გამოთვალეთ:

1) $\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)\left(\vec{i}-\vec{j}\right)-\left(\vec{k}+2\vec{j}\right)\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+\vec{k}\left(\vec{j}-\vec{k}\right)$;

2) $\vec{i}\left(\vec{j}-2\vec{i}\right)-\vec{j}\left(2\vec{j}+\vec{i}\right)\left(\vec{k}-\vec{j}\right)+\vec{k}\left(\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)$;

3) $\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)^2-\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)\left(\vec{k}-\vec{j}\right)+\vec{k}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)$;

4) $\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)\cdot\vec{k}-\vec{j}\left(2\vec{i}+3\vec{k}\right)+\left(\vec{j}-\vec{k}\right)^2$

8.12. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

1) $\vec{a}\,(1;0;-5)$, $\vec{b}\,(-3;1;-2)$; 2) $\vec{a}\left(2\sqrt{2};3;-1\right)$, $\vec{b}\left(-\sqrt{2};1;-2\right)$;

3) $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$; 4) $\vec{a}=\sqrt{3}\,\vec{i}-4\vec{j}+\sqrt{5}\,\vec{k}$, $\vec{b}=-2\sqrt{3}\,\vec{i}-3\vec{j}$.

8.13. იპოვეთ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$, თუ $A(3;2;-1)$, $B(-4;0;2)$, $C(1;2;3)$.

8.14. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, თუ $A(-1;2;0)$, $B(2;-3;2)$, $C(1;4;5)$.

8.15. იპოვეთ $\vec{c}_1$ და $\vec{c}_2$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

1) $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$; $\vec{c}_2=\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{a}\,(1;-2;-1)$, $\vec{b}\,(2;1;-1)$;

2) $\vec{c}_1=2\vec{a}+5\vec{b}$; $\vec{c}_2=-3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}\,(2;-2;-1)$, $\vec{b}\,(0;3;1)$.

8.16. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები, თუ:

1) $\vec{a}\,(3;-2;6)$; 2) $\vec{a}\left(3\sqrt{3};-2;\sqrt{3}\right)$;

3) $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$; 4) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$.

8.17. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის მგეზავი, თუ

1) $\vec{a}\,(-6;2;-3)$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

8.18. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ:

1) $\vec{a}\,(1;-2;-2)$; $\vec{b}\,(2;-6;3)$; 2) $\vec{a}\,(3;-\sqrt{2};5)$, $\vec{b}\,(-1;2\sqrt{2};0)$.

3) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$; $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$;

4) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

8.19. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ:
$\vec{a}=\vec{c}+2\vec{d}$, $\vec{b}=2\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{c}=(1;-1;-1)$, $\vec{d}=(-2;3;1)$.

8.20. იპოვეთ კუთხე $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებს შორის, თუ: $A(1;3;-2)$, $B(4;5;4)$, $C(5;7;6)$.

8.21. განსაზღვრეთ, α-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნებიან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ:

1) $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$;

2) $\vec{a}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+\alpha\vec{j}+7\vec{k}$.

8.22. მოცემულია $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ვექტორები. იპოვეთ გეგ$_{\vec{b}}\vec{a}$.

8.23. იპოვეთ გეგ$_{\vec{a}}\vec{b}$, თუ $\vec{a}=(-2;2;1)$, $\vec{b}=(0;3;6)$.

8.24. მოცემულია $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ და $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ ვექტორები. იპოვეთ გეგ$_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

8.25. მოცემულია $A(1;2;-3)$, $B(7;4;0)$ და $C(1;-1;2)$ წერტილები. იპოვეთ გეგ$_{\vec{AC}}\vec{AB}$.

§9. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

9.1. $ABCDA_1B_1C_1D$ პარალელეპიპედში $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$ ვექტორთა სამეულს მარცხენა ორიენტაცია აქვს. განსაზღვრეთ ვექტორთა შემდეგი სამეულების ორიენტაცია.

1) $\vec{DD_1}$, $\vec{DA}$, $\vec{DC}$; 2) $\vec{C_1C}$, $\vec{C_1D_1}$, $\vec{C_1B_1}$;

3) $\vec{D_1D}$, $\vec{D_1B_1}$, $\vec{D_1A_1}$; 4) $\vec{DA}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{BC}$.

9.2. იპოვეთ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, თუ:

1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{6}$; 2) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2\sqrt{3}$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

3) $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=3$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$; 4) $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{4}$.

9.3. იპოვეთ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, თუ:

1) $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$; 2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$.

9.4. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, თუ:

1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=72$; 2) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=15\sqrt{2}$.

9.5. მოცემულია $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. იპოვეთ:

1) $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$; 2) $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$.

9.6. მოცემულია $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. იპოვეთ:

1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$; 2) $\left(\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right)^2$

3) $\left(\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right)^2$; 4) $\left(\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right)^2$

9.7. შეასრულეთ მოქმედებანი:

1) $\vec{i}\times\left(\vec{j}+\vec{k}\right)-\vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{k}\right)+\vec{k}\times\left(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)$;

2) $3\vec{i}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)-2\vec{j}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)-\vec{k}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)$;

3) $2\vec{k}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)-4\vec{i}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+6\vec{j}\cdot\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)$;

4) $\vec{k}\times\left(\vec{j}+2\vec{i}\right)-\vec{j}\times\left(\vec{i}-\vec{k}\right)+\vec{i}\times\left(-\vec{j}+\vec{k}-3\vec{i}\right)$.

9.8. იპოვეთ $\vec{a}\times\vec{b}$, თუ:

1) $\vec{a}\,(2;-3;1)$, $\vec{b}\,(-2;0;-1)$; 2) $\vec{a}\,(3;-2;0)$, $\vec{b}\,(-2;1;4)$;

3) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 4) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}-3\vec{k}$.

9.9. მოცემულია $\vec{a}\,(3;-1;-2)$ და $\vec{b}\,(1;2;-1)$ ვექტორები. იპოვეთ:

1) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$; 2) $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.

9.10. იპოვეთ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი, თუ:

1) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$;

2) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$.

9.11. შეამოწმეთ კომპლანარულია თუ არა $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ვექტორები

1) $\vec{a}\,(2;3;-1)$, $\vec{b}\,(1;-1;3)$, $\vec{c}\,(1;9;-11)$; 2) $\vec{a}\,(2;-2;1)$, $\vec{b}\,(2;1;2)$,

$\vec{c}\,(3;-1;-2)$; 3) $\vec{a}\,(3;-1;2)$, $\vec{b}\,(1;2;-3)$, $\vec{c}\,(3;-4;7)$; 4) $\vec{a}\,(2;5;7)$, $\vec{b}\,(1;1;-1)$; $\vec{c}\,(1;2;2)$.

9.12. შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა ერთ სიბრტყეში წერტილები: 1) $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$; 2) $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$; 3) $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$; 4) $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$, $D(5;5;6)$.

§10. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება

10.1. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის:
1) $A(-2;1)$, $B(1;5)$; 2) $A(14;2)$, $B(9;14)$;
3) $A(-1;3;1)$, $B(1;0;7)$; 4) $A(-2;-6;2)$, $B(4;-6;-6)$.

10.2. სამკუთხედის წვეროებია $A(3;-4)$, $B(-3;4)$, $C(-2;2)$. იპოვეთ გვერდების სიგრძეები.

10.3. სამკუთხედის წვეროებია $A(1;4;3)$, $B(7;8;-1)$ და $C(1;2;1)$. იპოვეთ მისი შუამონაკვეთების სიგრძეები.

10.4. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(1;1)$, $B(2;3)$ და $C(5;-1)$ მართკუთხაა.

10.5. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-2;3;4)$, $B(3;1;-5)$ და $C(0;-2;-5)$ ტოლფერდაა.

10.6. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები, თუ: 1) $A(-2;4)$, $B(4;-6)$; 2) $A(3;-1;2)$, $B(4;-3;0)$.

10.7. M არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები, თუ: 1) $A(-3;-2)$, $M(1;2)$; 2) $A(1;3;1)$, $M(-2;-1;3)$.

10.8. მოცემულია $A(-2;4)$ და $B(2;2)$ წერტილები. იპოვეთ B წერტილის მიმართ A წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.

10.9. მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია $A(-4;-6)$ და $B(2;8)$, დაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

10.10. მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია $A(1;-3)$ და $B(4;3)$, დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

10.11. იპოვეთ $ABCD$ ტეტრაედრის მოცულობა და D წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე, თუ: 1) $A(2;1;3)$, $B(4;1;3)$, $C(5;5;3)$, $D(5;5;5)$; 2) $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

10.12. იპოვეთ $\vec{F}$ ძალის მიერ $\vec{s}$ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა, თუ $|\vec{F}|=2$, $|\vec{s}|=5$, $\left(\vec{F},\hat{\ }\vec{s}\right)=\frac{\pi}{6}$.

10.13. იპოვეთ მუშაობა, რომელსაც შეასრულებს $\vec{F}(3;-2;-5)$ ძალა მისი მოდების წერტილის სწორხაზოვანი გადაადგილებისას $A(2;-3;5)$ წერტილიდან $B(3;-2;-1)$ წერტილამდე.

10.14. მოცემულია ერთ წერტილზე მოდებული სამი ძალა $\vec{M}(3;-4;2)$, $\vec{N}(2;3;-5)$, $\vec{P}(-3;-2;4)$. გამოთვალეთ მათი ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა, როცა მათი მოქმედების წერტილი სწორხაზოვნად გადაადგილდება $A(5;3;-7)$ წერტილიდან $B(4;-1;-4)$ წერტილამდე.

10.15. $\vec{F}(3;2;-4)$ ძალა მოდებულია $M(2;-1;1)$ წერტილზე. იპოვეთ ამ ძალის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

10.16. $\vec{F}(2;-4;5)$ ძალა მოდებულია $M(4;-2;3)$ წერტილზე. იპოვეთ ამ ძალის მომენტი $A(3;2;-1)$ წერტილის მიმართ.

10.17. $\vec{F}(3;4;-2)$ ძალა მოდებულია $M(2;-1;-2)$ წერტილზე. იპოვეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ ამ ძალის მომენტის სიდიდე და მიმართულების კოსინუსები.

10.18. $\vec{F}(2;2;9)$ ძალა მოდებულია $M(4;2;-3)$ წერტილზე. იპოვეთ $A(2;4;0)$ წერტილის მიმართ ამ ძალის მომენტის სიდიდე და მიმართულების კოსინუსები.

§11. წრფე სიბრტყეზე

11.1. მოცემულია წრფე $2x-3y-3=0$. შემდეგი წერტილებიდან რომელი მდებარეობს მასზე და რომელი არა: $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$?

11.2. M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილები მდებარეობენ $3x-2y-6=0$ წრფეზე. იპოვეთ ამ წერტილების ორდინატები, თუ მათი აბსცისებია შესაბამისად 4; 0; 2; -6.

11.3. M_1, M_2, M_3, M_4 წერტილები მდებარეობენ $x-3y+2=0$ წრფეზე. იპოვეთ ამ წერტილების აბსცისები, თუ მათი ორდინატებია შესაბამისად 1; 0; -1; 3.

10.4. იპოვეთ $4x-5y-12=0$ წრფის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი.

11.5. იპოვეთ $2x-3y-12=0$ წრფის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ააგეთ ეს წრფე.

11.6. დაადგინეთ, a-ს რა მნიშვნელობისთვისაა $(a+2)x+(a^2-9)y+$ $+3a^2-8a+5=0$ წრფე:

1) აბსცისთა ღერძის პარალელური;

2) ორდინატთა ღერძის პარალელური;

3) კოორდინატთა სათავეზე გამავალი?

11.7. დაადგინეთ a-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(a-2)x+(a+3)y+a^2+a-6=0$ ტოლობა წარმოადგენს: ა) აბსცისთა ღერძის განტოლებას; ბ) ორდინატთა ღერძის განტოლებას.

11.8. იპოვეთ შემდეგ წრფეთა გადაკვეთის წერტილები:

1) $5x-3y-4=0$, $y-2=0$; 2) $3x+4y-6=0$, $x+2=0$;

3) $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$; 4) $2x-3y+5=0$, $x+2y-1=0$.

11.9. ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდების განტოლებებია შესაბამისად $4x+3y-5=0$, $x+3y+10=0$ და $x-2=0$. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები.

11.10. წრფის კუთხური კოეფიციენტია k, ხოლო ამ წრფის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატია b. შეადგინეთ წრფის განტოლება და ააგეთ ნახაზი, თუ:

1) $k=3$, $b=-2$; 2) $k=-1$, $b=\dfrac{3}{4}$; 3) $k=2$, $b=0$; 4) $k=0$, $b=-3$.

11.11. შემდეგი წრფეებისათვის იპოვეთ k კუთხური კოეფიციენტი და Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის b ორდინატი:

1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $y-3=0$; 4) $3x+2y=0$.

11.12. შემდეგი წრფეების განტოლებები ჩაწერეთ ღერძთა მონაკვეთებში და ააგეთ ნახაზი:

1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$; 4) $5x+2y-1=0$.

11.13. გამოთვალეთ საკოორდინატო ღერძებითა და მოცემული წრფით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი:

1) $3x+2y-12=0$; 2) $7x-2y-14=0$.

11.14. შემდეგი წრფეების განტოლებები ჩაწერეთ ზოგადი სახით:

1) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{2}$; 2) $\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-1}{2}$;

3) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{0}$; 4) $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{6}$.

11.15. შემდეგი წრფეების განტოლებები ჩაწერეთ ზოგადი სახით:

1) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2t+1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3 \\ y=t-1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=2t \\ y=5t \end{cases}$.

11.16. შეადგინეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება: 1) $A(-1;2)$, $B(2;-1)$; 2) $A(2;-2)$, $B(2;3)$; 3) $A(-2;-1)$, $B(2;1)$; 4) $A(7;1)$, $B(1;1)$.

11.17. იპოვეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი: 1) $A(2;-5)$, $B(3;2)$; 2) $A(5;-3)$, $B(-1;6)$.

11.18. $A(-12;-13)$ და $B(-2;-5)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ წერტილი, რომლის აბსცისაა 3.

11.19. $A(2;-3)$ და $B(-6;5)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ორდინატა -5-ის ტოლია.

11.20. შეადგინეთ ABC სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, სადაც $A(-1;2)$, $B(5;3)$, $C(4;-2)$.

11.21. შეადგინეთ $ABCD$ კვადრატის დიაგონალების განტოლებები, სადაც $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(5;-1)$, $D(2;-2)$.

11.22. შეადგინეთ ABC სამკუთხედის მედიანების განტოლებები, სადაც $A(7;0)$, $B(3;6)$, $C(-1;1)$.

11.23. შეადგინეთ M_0 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომლის კუთხური კოეფიციენტია k:

1) $M_0(-2;1)$, $k=2$; 2) $M_0(0;2)$, $k=-1$.

11.24. შეადგინეთ $B(5;3)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}\,(5;0)$.

11.25. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}\,(-3;2)$ და რომელიც გადის წერტილზე $C(-3;5)$.

11.26. შეამოწმეთ, პარალელურია თუ არა წრფეები:

1) $y=2x-5$, $y=2x+1$; 2) $y=-x+3$, $y=x-1$;

3) $2x-3y+4=0$, $3x+4y-3=0$; 4) $x-3y-2=0$, $-2x+6y+7=0$;

5) $9x+3y+2=0$, $y=-3x+1$; 6) $x+3y-6=0$, $y=2x-3$.

11.27. შეამოწმეთ, პერპენდიკულარულია თუ არა წრფეები:

1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $y=-3x-1$; 2) $y=-\frac{4}{3}x+4$, $y=-\frac{3}{4}x-2$;

3) $2x-y-1=0$, $x-2y+1=0$; 4) $2x-2y+1=0$, $3x+3y+1=0$;

5) $2x+10y-5=0$, $y=5x-1$; 6) $x-3=0$, $y-2=0$.

11.28. შეადგინეთ M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლება.

1) $M_0(0;2)$, $y=\frac{1}{2}x-1$; 2) $M_0(1;1)$, $y=-3x$; 3) $M_0(2;1)$, $2x+3y+4=0$;

4) $M_0(-2;-5)$, $3x+4y-2=0$; 5) $M_0(-1;3)$, $x-4=0$; 6) $M_0(1;3)$, $y+2=0$.

11.29. შეადგინეთ M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლება:

1) $M_0(2;2)$, $y=3x-1$; 2) $M_0(4;0)$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}$; 3) $M_0(1;3)$, $3x-3y-1=0$;

4) $M_0(2;-1)$, $x-6y+12=0$; 5) $M_0(2;5)$, $x+3=0$; 6) $M_0\left(\frac{1}{6};2\right)$, $2y-1=0$.

11.30. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

1) $y=2x+5$, $y=-3x+1$; 2) $y=\frac{3}{2}x+7$, $y=-\frac{2}{3}x-3$;

3) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; 4) $2y-2\sqrt{3}\,x+1=0$, $y+2=0$;

5) $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+5, \end{cases}$ $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=t+3, \end{cases}$; 6) $2x-3y+5=0$, $\begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+1 \end{cases}$;

7) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}$, $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}$; 8) $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}$, $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+2 \end{cases}$.

11.31. გამოთვალეთ მანძილი წერტილიდან წრფემდე:

1) $M(2;-1)$, $4x+3y+10=0$; 2) $M(0;-3)$, $5x-12y-23=0$;

3) $M(-2;3)$, $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$; 4) $M(3;1)$, $3y-1=0$;

5) $M(1;-1)$, $\begin{cases} x=4t-1 \\ y=3t-\frac{5}{8} \end{cases}$; 6) $M(-1;0)$, $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}$.

11.32. $A(2;-3)$ წერტილი იმ კვადრატის წვეროა, რომლის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა $3x-2y+1=0$. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

11.33. იპოვეთ მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის:

1) $3x+y-3\sqrt{10}=0$, $6x+2y+5\sqrt{10}=0$; 2) $2x-y+3=0$, $y=2x-7$;

3) $x-1=0$, $2x+7=0$; 4) $\frac{x}{-4}=\frac{y+1}{3}$, $\frac{x-2}{8}=\frac{y-3}{-6}$.

11.34. კვადრატის ორი გვერდის განტოლებებია $x-3y+5=0$, $x-3y+25=0$. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

11.35. შეადგინეთ ABC სამკუთხედის $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$ წვეროებზე მოპირდაპირე გვერდების პარალელურად გავლებული წრფეების განტოლებები.

11.36. იპოვეთ იმ სამკუთხედის კუთხეები, რომლის გვერდების განტოლებებია $18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$ და $5x+10y-9=0$.

11.37. შეადგინეთ $2x+3y-18=0$ და $x-5y+17=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი საკოორდინატო ღერძების პარალელური წრფეების განტოლებები.

11.38. შეადგინეთ $2x-3y+7=0$ და $3x+y-6=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე $2x-y-5=0$ წრფის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლება.

11.39. იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ $A(1;0)$, $B(7;0)$, $C\left(4;3\sqrt{3}\right)$.

11.40. სამკუთხედის წვეროებია $A(2;1)$, $B(-1;-1)$ და $C(3;2)$. შეადგინეთ სიმაღლეების განტოლებები.

11.41. სამკუთხედის წვეროებია $A(3;2)$, $B(5;-2)$ და $C(1;0)$. შეადგინეთ მედიანების განტოლებები.

11.42. სამკუთხედის წვეროებია $A(-1;-3)$, $B(-2;1)$ და $C(3;1)$. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან BD მედიანამდე.

§12. სიბრტყე

12.1. მოცემულია სიბრტყე $x-3y+2z-5=0$. შემდეგი წერტილებიდან რომელი მდებარეობს მასზე და რომელი არა: $M_1(1;2;5)$, $M_2(-2;1;4)$, $M_3(5;3;4)$, $M_4(3;0;1)$.

12.2. $A(2;4;a)$, $B(b;5;-3)$ და $C(-1;c;2)$ წერტილები მდებარეობენ $5x+y-3z+1=0$ სიბრტყეზე. იპოვეთ a, b და c.

12.3. იპოვეთ $4x-2y+3z-24=0$ სიბრტყის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ააგეთ ეს სიბრტყე.

12.4. შეადგინეთ M წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}$:

1) $M(-6;1;3)$, $\vec{n}(2;4;5)$; 2) $M(1;-3;-2)$, $\vec{n}(5;-1;4)$.

12.5. შეადგინეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომლის ნორმალური ვექტორია $\vec{n}(7;-2;2)$.

12.6. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე $\overrightarrow{M_2M_3}$ ვექტორის პერპენდიკულარულად:

1) $M_1(3;5;0)$, $M_2(-4;2;7)$, $M_3(5;-3;4)$;

2) $M_1(8;1;-3)$, $M_2(3;3;3)$, $M_3(-2;4;7)$.

12.7. მოცემულია $M_1(-5;2;1)$ და $M_2(2;-2;3)$ წერტილები. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის პერპენდიკულარულად.

12.8. შეამოწმეთ, პარალელურია თუ არა სიბრტყეები:

1) $x-4y+2z-5=0$, $x-4y+2z+1=0$; 2) $3x-7y+z-1=0$, $6x-14y+2z-5=0$;

3) $5x+y-3z-2=0$, $10x+2y+6z+7=0$; 4) $x-z+1=0$, $3x-3z+2=0$.

12.9. a და b-ს რა მნიშვნელობებისთვისაა პარალელური შემდეგი სიბრტყეები:
1) $5x-ay+3z+1=0$, $10x+9y+bz-2=0$;
2) $(a+1)x-2y+(3-b)z+(a-b)=0$, $9x+6y+9z-13=0$.

12.10. შეამოწმეთ პერპენდიკულარულია თუ არა სიბრტყეები:
1) $5x-2y+3z+2=0$, $x+y-z=0$; 2) $6x-7y+z+1=0$, $5x+4y-z+1=0$;
3) $4x+y-12=0$, $3x-12y+5z=0$; 4) $3y-2z+1=0$, $2x+3y-1=0$.

12.11. a-ს რა მნიშვნელობებისთვისაა პერპენდიკულარული შემდეგი სიბრტყეები:
1) $ax+5y-3z+2=0$, $2x-4y+(a+2)z-2=0$;
2) $(a+1)x-ay+2z-4=0$, $ax+6y+3z+5=0$.

12.12. შეადგინეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $6x+4y-2z+9=0$ სიბრტყის პარალელურია.

12.13. შეადგინეთ $M(2;2;5)$ წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $4x-y+3z-1=0$ სიბრტყის პარალელურია.

12.14. შეადგინეთ $M(-2;4;-5)$ წერტილზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) Oxy სიბრტყის პარალელურია; 2) Oxz სიბრტყის პარალელურია; 3) Oyz სიბრტყის პარალელურია.

12.15. განსაზღვრეთ a-ს რა მნიშვნელობისთვისაა $(a-3)x+(a^2-5a+4)y+(6-a)z+a=0$ სიბრტყე: 1) Ox ღერძის პარალელური; 2) Oy ღერძის პარალელური; 3) Oz ღერძის პარალელური; 4) გადის კოორდინატთა სათავეზე.

12.16. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის: 1) Ox ღერძზე და $M(3;-4;1)$ წერტილზე; 2) Oy ღერძზე და $M(-2;5;-1)$ წერტილზე: 3) Oz ღერძზე და $M(1;4;5)$ წერტილზე.

12.17. შეადგინეთ M_1, M_2, M_3 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება:
1) $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;5;7)$, $M_3(1;-1;-6)$;
2) $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;-1;2)$, $M_3(2;3;-1)$.

12.18. იპოვეთ კუთხე შემდეგ სიბრტყეებს შორის:
1) $x-4y-z+5=0$, $5x-4y+3z-1=0$; 2) $2x-3y+6z-1=0$, $x-2y-2z+4=0$;
3) $x+z+1=0$, $x+y-5=0$; 4) $2x-y+7z+3=0$, $x-5y-z+1=0$.

12.19. შემდეგი სიბრტყეების განტოლებები ჩაწერეთ ღერძთა მონაკვეთებში და ააგეთ ნახაზი:
1) $4x+3y+6z-24=0$; 2) $5x-y+3z+30=0$;
3) $2x+5y+3z-20=0$; 4) $4x+3y-5z+8=0$.

12.20. იპოვეთ იმ პირამიდის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო სიბრტყეებით და $6x-4y+3z-12=0$ სიბრტყით.

12.21. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე:

1) $M(-3;1;2)$, $2x-3y+6z+11=0$; 2) $M(5;3;6)$, $x+2y-2z-8=0$;
3) $M(2;-3;-3)$, $3x-4z+2=0$; 4) $M(1;-5;3)$, $2x-5y-3z=0$.

12.22. იპოვეთ მანძილი $P(2;-3;-1)$ წერტილიდან $M_1(-1;10;1)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(-1;2;0)$ წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

12.23. იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის:

1) $6x+2y-3z+1=0$, $6x+2y-3z+15=0$; 2) $x+2y-2z-3=0$, $x+2y-2z-15=0$.

§13. წრფე სივრცეში. წრფე და სიბრტყე

13.1. შემდეგ წრფეთა განტოლებები ჩაწერეთ ზოგადი სახით:

1) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-5}$; 2) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{x+4}{1}$;

3) $\begin{cases} x=-t-1 \\ y=3t+2 \\ z=-2t-3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=2t \\ y=-2t+1 \\ z=t-3. \end{cases}$

13.2. შემდეგ წრფეთა განტოლებები ჩაწერეთ პარამეტრული სახით:

1) $\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{5}$; 2) $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$.

12.3. შემდეგ წრფეთა განტოლებები ჩაწერეთ კანონიკური სახით:

1) $\begin{cases} x=2t-2 \\ y=t+1 \\ z=-3t+4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2 \\ y=-2t-3 \\ z=t+2. \end{cases}$

13.4. შეადგინეთ M წერტილზე $\vec{a}$ ვექტორის პარალელურად გამავალი წრფის განტოლებები:

1) $M(-2;1;3)$ $\vec{a}(4;1;-1)$; 2) $M(3;-1;2)$ $\vec{a}(0;2;-2)$.

13.5. შეადგინეთ $M(-2;1;0)$ წერტილზე გავლებული წრფის განტოლებები, რომელიც პარალელურია: 1) Ox ღერძის; 2) Oy ღერძის; 3) Oz ღერძის.

13.6. შეადგინეთ M წერტილზე მოცემული წრფის პარალელურად გავლებული წრფის განტოლებები;

1) $M(0;2;-3)$, $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{1}$; 2) $M(-5;0;3)$, $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-5}{-3}$;

3) $M(-4;1;-2)$, $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-3 \\ z = 3t+2; \end{cases}$ 4) $M(2;0;-1)$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t+2 \\ z = 5t-1. \end{cases}$

13.7. პარალელურია თუ არა შემდეგი წრფეები:

1) $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{3}$, $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -10t-3 \\ z = -6t+4; \end{cases}$

2) $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-1}{-5}$, $\begin{cases} 6x - y + 2z + 20 = 0 \\ 4x + y + 2z + 10 = 0? \end{cases}$

13.8. პერპენდიკულარულია თუ არა შემდეგი წრფეები:

1) $\dfrac{x+4}{-3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{-2}$, $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{1}$.

2) $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{-4}$, $\begin{cases} x = t+4 \\ y = -3t+1 \\ z = 3t? \end{cases}$

13.9. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

1) $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-4}$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{2}$;

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{\sqrt{2}} = \dfrac{z}{-\sqrt{2}}$, $\begin{cases} x = 2t+4 \\ y = -\sqrt{2}t \\ z = -\sqrt{2}t-2. \end{cases}$

13.10. შეადგინეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებები:

1) $A(0;3;1)$, $B(-2;1;-3)$; 2) $A(3;-1;2)$, $B(1;2;6)$.

13.11. მდებარეობს თუ არა ერთ წრფეზე შემდეგი სამი წერტილი:

1) $A(2;4;4)$, $B(-3;0;5)$, $C(-8;-4;5)$; 2) $A(6;-1;2)$, $B(5;-3;1)$, $C(7;1;3)$?

13.12. იპოვეთ მოცემული წრფის საკოორდინატო სიბრტყეებთან გადაკვეთის წერტილები:

1) $\begin{cases} 5x + 3y - 5z + 1 = 0 \\ 5x - y + 5z - 7 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 3y - 3z - 15 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0; \end{cases}$

3) $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{4}$; 4) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-4 \\ z = 6t. \end{cases}$

13.13. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია $\begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$ იპოვეთ მისი სიჩქარე.

13.14. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია $\begin{cases} x = 4 - 12t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t. \end{cases}$ იპოვეთ მის მიერ გავლილი მანძილი t=2 მომენტიდან t=6 მომენტამდე.

13.15. შეადგინეთ იმ წერტილის მოძრაობის განტოლებები, რომელიც საწყის მომენტში იმყოფება $M_0(1;-3;2)$ წერტილში და მოძრაობს $\vec{P}(2;-2;1)$ ვექტორის მიმართულებით v=9 მუდმივი სიჩქარით.

13.16. შეადგინეთ იმ წერტილის მოძრაობის განტოლებები, რომელიც $M_0(-5;3;-3)$ წერტილიდან იწყებს სწორხაზოვან თანაბარ მოძრაობას და t=2 მომენტისთვის იმყოფება $M_1(7;-13;5)$ წერტილში.

13.17. შეადგინეთ M წერტილზე მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლებები:
1) $M(3;-1;4)$, $2x-y+6z+1=0$; 2) $M(0;5;-2)$, $3x+2y+3=0$.

13.18. B და C რიცხვების რა მნიშვნელობებისათვის არის $6x+By+Cz-3=0$ სიბრტყე $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t + 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ წრფის პერპენდიკულარული?

13.19. იპოვეთ კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის:

1) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+5}{-5}$, $x+4y-z+2=0$;

2) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-5}{\sqrt{2}} = \dfrac{z+1}{-1}$, $x-y\sqrt{2}+z-1=0$.

13.20. შეამოწმეთ, პარალელურია თუ არა წრფე და სიბრტყე:

1) $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = -2t + 7, \end{cases}$ $4x-5y+z-8=0$;

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{-1}$, $6x+5y-3z+9=0$?

13.21. m-ის რა მნიშვნელობებისათვის არიან პარალელური მოცემული წრფე და სიბრტყე:

1) $\frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{m}$, $4x-4y+3z+1=0$;

2) $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=2t-1 \\ z=3t+4, \end{cases}$ $3x+my+4z-8=0$?

13.22. იპოვეთ წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილი:

1) $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t-1 \\ z=t+2, \end{cases}$ $5x+y+3z-4=0$;

2) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{-1}$, $x-5y-4z+4=0$.

§14. წრეწირი

14.1. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C და რადიუსია R:

1) $C(0;0)$, $R=2$; 2) $C(-3;1)$, $R=4$.

14.2. შეადგინეთ A წერტილზე გამავალი იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C:

1) $A(3;1)$, $C(0;2)$; 2) $A(4;0)$, $C(-2;1)$.

14.3. იპოვეთ წრეწირის ცენტრი და რადიუსი:

1) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$; 2) $x^2+y^2-6x+5=0$;
3) $x^2+y^2+4y-12=0$; 4) $4x^2+4y^2+20x-32y+85=0$.

14.4. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ A და B წერტილები წარმოადგენენ მისი დიამეტრის ბოლოებს:

1) $A(3;2)$, $B(-1;4)$; 2) $A(0;-5)$, $B(4;3)$.

14.5. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი და რომელიც ეხება მოცემულ წრფეს:

1) $C(0;0)$, $3x-2y-26=0$; 2) $C(-2;1)$, $x-3y-5=0$.

14.6. დაადგინეთ სად მდებარეობს M წერტილი: მოცემულ წრეწირზე, მის შიგნით თუ გარეთ:

1) $M(-3;2)$, $(x+2)^2+(y+3)^2=26$; 2) $M(0;5)$, $(x+4)^2+(y-2)^2=32$;
3) $M(1;5)$, $(x-5)^2+y^2=40$; 4) $M(-2;2)$, $x^2+y^2+6x-10y=0$.

§15. ელიფსი

15.1. იპოვეთ მოცემული ელიფსის ნახევარღერძები, ფოკუსები, ექსცენტრისიტეტი და დირექტრისის განტოლებები:

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $x^2+9y^2=9$; 3) $9x^2+36y^2=1$; 4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

15.2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომლის აბსცისაა $x=2\sqrt{3}$

15.3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ორდინატია $y=\sqrt{5}$.

15.4. შეადგინეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია, რომ:

1) მისი ნახევარღერძებია 7 და 2;

2) მისი დიდი ღერძია 16 და ფოკუსებს შორის მანძილია 12;

3) მისი მცირე ღერძია 10 და ფოკუსებს შორის მანძილია 20;

4) ერთ-ერთი ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 15 და 1;

5) ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{4}{5}$-ს;

6) მისი დიდი ღერძია 34, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{15}{17}$-ს;

7) მისი მცირე ღერძია 24, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{13}$-ს;

8) ფოკუსებს შორის მანძილია 4, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის 25-ის ტოლია;

9) მისი დიდი ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 9$;

10) მისი მცირე ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 15$;

11) დირექტრისებს შორის მანძილია 49, ხოლო ექსცენ-ტრისიტეტი უდრის $\frac{2}{7}$-ს;

12) $M(3;1)$ ელიფსის წერტილია და მისი მცირე ღერძია 4;

13) $M_1\left(\sqrt{6};\sqrt{3}\right)$ და $M_2\left(3;-\sqrt{2}\right)$ ელიფსის წერტილებია.

15.5. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ ორდინატთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია, რომ:

1) მისი ნახევარღერძებია 9 და 5;

2) მისი დიდი ღერძია 8 და ფოკუსებს შორის მანძილია $2\sqrt{15}$;

3) მისი მცირე ღერძია 4 და ფოკუსებს შორის მანძილია 14;

4) ფოკუსებს შორის მანძილია 14 და ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{7}{8}$-ს;

5) მისი დიდი ღერძია 12, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდ-რის $\frac{5}{6}$-ს;

6) მისი მცირე ღერძია 12, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდ-რის $\frac{4}{5}$-ს;

7) ფოკუსებს შორის მანძილია 6, ხოლო მანძილი დირექ-ტრისებს შორის 54-ის ტოლია;

8) მისი დიდი ღერძია 24, ხოლო დირექტრისების გან-ტოლებებია $y=\pm 16$;

9) მისი მცირე ღერძია 6, ხოლო დირექტრისების განტო-ლებებია $y=\pm 6$;

10) დირექტრისებს შორის მანძილია 32, ხოლო ექსცენ-ტრისიტეტი უდრის $\frac{1}{2}$-ს.

15.6. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვე-რო ემთხვევა მოცემული ელიფსის ფოკუსებს, ხოლო დანარჩენი ორი მისი მცირე ღერძის ბოლოებს:

1) $4x^2+5y^2=100$; 2) $2x^2+y^2=32$.

15.7. დაადგინეთ, სად მდებარეობენ მოცემული წერტილები $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფსზე, მის შიგნით, თუ გარეთ: $A(2;\sqrt{3})$, $B(-1;2)$, $C(-2;-1)$; $D(-3;1)$, $E(2\sqrt{3};1)$, $F(3;-2)$.

15.8. დაადგინეთ, რას წარმოადგენს შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი:

1) $y=\frac{12}{5}\sqrt{25-x^2}$ 2) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$

§16. ჰიპერბოლა

16.1. იპოვეთ მოცემული ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ფოკუსები, ექსცენტრისიტეტი, ასიმპტოტების და დირექტრისების განტოლებები:

1) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 2) $4x^2-y^2=4$;

3) $16x^2-9y^2=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=-1$.

16.2. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომლის აბსცისაა $x=-4$.

16.3. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ორდინატაა $y=\sqrt{2}$.

16.4. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია:

1) მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია შესაბამისად 5 და 3;

2) მისი წარმოსახვითი ღერძია 4 და ფოკუსებს შორის მანძილი 14;

3) ერთ-ერთი ფოკუსიდან ნამდვილი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 13 და 3;

4) ფოკუსებს შორის მანძილია 20 და ექსცენტრისიტეტი უდრის 2-ს;

5) მისი ნამდვილი ღერძია 16, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{9}{8}$-ს;

6) მისი წარმოსახვითი ღერძია 6, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{4}$-ს;

7) ფოკუსებს შორის მანძილია 30, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x$;

8) ფოკუსებს შორის მანძილია 16, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის 6-ის ტოლია;

9) მისი ნამდვილი ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 4$;

10) მისი წარმოსახვითი ღერძია 8, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 6$;

11) დირექტრისებს შორის მანძილია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის 2-ს;

12) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{50}{13}$, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{12}{5}x$;

13) $M(8;-3)$ ჰიპერბოლის წერტილია და მისი ნამდვილი ღერძია 8;

14) $M_1(-10;3)$ და $M_2(20;-3\sqrt{6})$ ჰიპერბოლის წერტილებია;

15) $M(-8;2\sqrt{2})$ ჰიპერბოლის წერტილია, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{1}{2}x$.

16.5. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მდებარეობენ ორდინატთა ღერძზე კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულად, თუ ცნობილია:

1) მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია შესაბამისად 4 და 7;

2) მისი ნამდვილი ღერძია 6 და ფოკუსებს შორის მანძილია 14;

3) ერთ-ერთი ფოკუსიდან ნამდვილი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 11 და 5;

4) ფოკუსებს შორის მანძილია 14 და ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{7}{6}$-ს;

5) მისი ნამდვილი ღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის 1,8-ს;

6) მისი წარმოსახვითი ღერძია 16, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის $\frac{5}{3}$-ს;

7) ფოკუსებს შორის მანძილია 26, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{12}{5}x$;

8) ფოკუსებს შორის მანძილია 20, ხოლო მანძილი დირექტრისებს შორის 16-ის ტოლია;

9) მისი ნამდვილი ღერძია 16, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $y=\pm4$;

10) მისი წარმოსახვითი ღერძია 12, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $y=\pm5$;

11) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{1}{2}$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი უდრის 4-ს;

12) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{18}{5}$, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x$;

13) $M(-3;10)$ ჰიპერბოლის წერტილია და მისი ნამდვილი ღერძია 10;

14) $M_1(6;5)$ და $M_2(9;5\sqrt{2})$ ჰიპერბოლის წერტილებია:

15) $M(3;-4)$ ჰიპერბოლის წერტილია, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{2}{3}x$.

16.6. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო ემთხვევა მოცემული ჰიპერბოლის ფოკუსებს, ხოლო დანარჩენი ორი მისი წარმოსახვითი ღერძის ბოლოებს:

1) $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{36}=1$; 2) $8x^2-y^2=-8$.

16.7. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები მოცემული ჰიპერბოლის ღერძების ბოლოებია:

1) $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{20}=1$; 2) $4x^2-y^2=8$.

16.8. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}=1$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან ამ ფოკუსის შესაბამის დირექტრისამდე.

16.9. ჰიპერბოლის ფოკუსებია $F_1(-16;0)$ და $F_1(16;0)$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. იპოვეთ მანძილი დირექტრისამდე ჰიპერბოლის იმ წერტილიდან, რომლის აბსცისაა -8.

16.10. დაადგინეთ რას წარმოადგენს შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი:

1) $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-12}$; 2) $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2-24}$.

16.11. შეადგინეთ იმ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები ემთხვევა $\dfrac{x^2}{40}-\dfrac{y^2}{24}=1$ ელიფსის ფოკუსებს.

16.12. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ექსცენტრისიტეტი $e=3$ და რომლის ფოკუსები ემთხვევა $\dfrac{x^2}{300}+\dfrac{y^2}{75}=1$ ელიფსის ფოკუსებს.

16.13. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები წარმოადგენს $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{18}=1$ ელიფსის წვეროებს, ხოლო წვეროები ამ ელიფსის ფოკუსებს.

§17. პარაბოლა

17.1. $y^2=12x$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილები, რომლის აბსცისაა $x=3$.

17.2. $y^2=4x$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ორდინატაა $y=2$.

17.3. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და მისი ფოკუსია:

1) $F(3;0)$; 2) $F(-1;0)$; 3) $F(0;2)$; 4) $F(0;-5)$.

17.4. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და დირექტრისის განტოლებაა:

1) $x+4=0$; 2) $x-7=0$; 3) $y+10=0$; 4) $y-6=0$.

17.5. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მოცემულია მისი ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება:

1) $F(4;0)$, $x+4=0$; 2) $F(-8;0)$, $x-8=0$; 3) $F(0;3)$, $y+3=0$; 4) $F(0;-1)$, $y-1=0$.

17.6. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, თუ ცნობილია, რომ:

1) პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ და გადის $A(2;-8)$ წერტილზე;

2) პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ და გადის $A(-9;6)$ წერტილზე;

3) პარაბოლა სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ და გადის $A(1;4)$ წერტილზე;

4) პარაბოლა სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ და გადის $A(10;-5)$ წერტილზე.

17.7. დაადგინეთ, რას წარმოადგენს შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=-\sqrt{x}$; 3) $y=-\sqrt{-x}$;

4) $x=-\sqrt{y}$; 5) $x=\sqrt{y}$; 6) $x=\sqrt{-y}$

17.8. იპოვეთ მოცემული პარაბოლის F ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება:

1) $y^2=32x$; 2) $y^2=-12x$; 3) $x^2=4y$; 4) $x^2=-40y$.

17.9. შეადგინეთ მოცემული პარაბოლის M წერტილის ფოკალური რადიუსის განტოლება:

1) $y^2=36x$, $M(1;6)$; 2) $y^2=-4x$, $M(-4;4)$;

3) $x^2=9y$, $M(-3;1)$; 4) $x^2=-5y$, $M(5;-5)$.

17.10. იპოვეთ მოცემული პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის აბსცისაა x_0, თუ:

1) $y^2=16x$, $x_0=5$; 2) $y^2=-20x$, $x_0=-3$.

17.11. იპოვეთ მოცემული პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის ორდინატია y_0, თუ:

1) $x^2=36y$, $y_0=1$; 2) $x^2=-12y$, $y_0=-4$.

§18. მეორე რიგის ზედაპირები

18.1. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C და რადიუსი R, თუ:

1) $C(0;0;0)$, $R=5$; 2) $C(-2;3;-7)$, $R=4$.

18.2. შეადგინეთ A წერტილზე გამავალი იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C:

1) $A(-4;1;2)$, $C(0;-2;1)$; 2) $A(3;-5;2)$, $C(-1;7;-2)$.

18.3. შეადგინეთ სფეროს განტოლება, თუ A და B წერტილები მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია:

1) $A(-4;-5;1)$, $B(2;-3;5)$; 2) $A(3;-2;4)$, $B(-1;2;6)$.

18.4. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი და რომელიც ეხება მოცემულ სიბრტყეს:

1) $C(-1;3;-2)$, $2x+2y-z+12=0$; 2) $C(3;-1;4)$, $6x-3y-2z+8=0$.

18.5. შეადგინეთ $M_1(5;-1;0)$, $M_2(9;-4;3)$, $M_3(6;-5;-1)$, $M_4(8;-5;3)$ წერტილებზე გამავალი სფეროს განტოლება.

18.6. იპოვეთ სფეროს ცენტრი და რადიუსი:

1) $(x-7)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$; 2) $(x+5)^2+y^2+(z-8)^2=81$;

3) $x^2+y^2+z^2+4x+6y-10z+37=0$; 4) $x^2+y^2+z^2+8x-6y=0$.

18.7. დაადგინეთ სად მდებარეობს M წერტილი, მოცემულ სფეროზე, მის შიგნით, თუ გარეთ:

1) $M(-6;8;-13)$, $(x+5)^2+(y-7)^2+(z+10)^2=20$;

2) $M(-3;-4;8)$, $(x+5)^2+(y+7)^2+(z-2)^2=49$;

3) $M(4;3;2)$, $(x-7)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=50$.

18.8. დაადგინეთ სფეროსა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა (იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ ეხებიან):

1) $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=20$, $z=1$;

2) $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=72$, $x-2y+2z-28=0$;

3) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$, $3x+y-2z+3=0$;

4) $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$, $2x-9y+6z-32=0$.

18.9. დაადგინეთ სფეროსა და წრფის ურთიერთმდებარეობა (იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ ეხებიან):

1) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$, $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-8}{5}$;

2) $x^2+(y-2)^2+z^2=49$, $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-25}{-21}=\dfrac{z-1}{2}$;

3) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=81$, $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+27}{-2}$.

18.10. შეადგინეთ $(x+4)^2+(y-1)^2+z^2=121$ სფეროს $M(5;-5;2)$ წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის განტოლება.

18.11. აჩვენეთ, რომ $6x-2y-3z+14=0$ სიბრტყე ეხება $(x-5)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=49$ სფეროს და იპოვეთ შეხების წერტილის კოორდინატები.

18.12. რა ზედაპირს განსაზღვრავს მოცემული განტოლება:

1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{81}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$;

3) $\dfrac{x^2}{16}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=-1$; 4) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=2z$;

5) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 6) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{81}-z^2=1$;

7) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{5}=2z$; 8) $y^2=10x$;

9) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=0$.

18.13. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{27}+\frac{z^2}{12}=1$ ელიფსოიდის x-4=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

18.14. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{32}-\frac{z^2}{8}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის z-2=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ჰიპერბოლას. იპოვეთ ამ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები და წვეროები.

18.15. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{27}-\frac{z^2}{3}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის z+1=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

18.16. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{3}=-1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის z-2=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

18.17. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{50}+\frac{z^2}{18}=-1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის x-4=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ჰიპერბოლას. იპოვეთ ამ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები და წვეროები.

18.18. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$ ელიფსური პარაბოლოიდის z-2=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს ელიფსს. იპოვეთ ამ ელიფსის ნახევარღერძები და წვეროები.

18.19. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=2z$ ელიფსური პარაბოლოიდის y-4=0 სიბრტყით კვეთა წარმოადგენს პარაბოლას. იპოვეთ ამ პარაბოლის წვერო.

18.20. გამოარკვიეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{12}=2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის კვეთა მოცემული სიბრტყით და იპოვეთ მიღებული წირების წვეროები:
1) z-1=0; 2) z+6=0; 3) y+12=0; 4) x-6=0.

18.21. დაადგინეთ, რა წირს წარმოადგენს $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის x-$2y$+2=0 სიბრტყით კვეთა.

18.22. შეადგინეთ

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

ელიფსის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება.

18.23. შეადგინეთ

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

ელიფსის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება.

18.24. შეადგინეთ

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

ელიფსის Oz ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება.

ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§19. მიმდევრობა და მისი ზღვარი

19.1. ჩაწერეთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა:
1) 2,4,6,8,10,...; 2) 1,3,5,7,9,...; 3) 2,5,8,11,14,...;
4) 1,4,9,16,25,...; 5) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$; 6) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots$;
7) $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\ldots$; 8) 2,5,10,17,26,....

19.2. იპოვეთ $\{x_n\}$ მიმდევრობის პირველი სამი წევრი, თუ:
1) $x_1=7,\ x_{n+1}=x_n-3$; 2) $x_1=-5,\ x_{n+1}=2x_n$;
3) $x_1=\frac{1}{6},\ x_{n+1}=-x_n$; 4) $x_1=3,\ x_{n+1}=\frac{1}{x_n}$.

19.3. არის თუ არა მონოტონური მიმდევრობა:

1) $1,5,9,13,\ldots$ 2) $2,-2,2,-2,\ldots$ 3) $0,-1,-2,-3,\ldots$

4) $\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27},-\frac{1}{81},\ldots$ 5) $x_n=10-n$; 6) $x_n=19-n^2$;

7) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$; 8) $x_n=(n-6)^2$.

19.4. დაადგინეთ მოცემული მიმდევრობიდან რომელია შემოსაზღვრული ზემოდან, შემოსაზღვრული ქვემოდან, არ არის შემოსაზღვრული:

1) $x_n=2n+1$; 2) $x_n=\frac{2n+1}{n}$; 3) $x_n=(-2)^n$;

4) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 5) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; 6) $x_n=\frac{n\sin n}{n^2+1}$.

19.5. მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრების საფუძველზე აჩვენეთ, რომ:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{1-n}=-3$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{1-3n^2}=-\frac{4}{3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^6-1}{n^6+1}=3$.

19.6. აჩვენეთ, რომ შემდეგ მიმდევრობას არა აქვს ზღვარი:

1) $x_n=1+(-1)^n$; 2) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$; 3) $x_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$; 4) $x_n=(-1)^n n$.

იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი (19.7-19.21):

19.7. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-7n}{n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{1-2n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-8n}{4-2n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+(-1)^n}{3-2n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n-n}{\cos n+n}$.

19.8. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+1}{n^2+2n+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-3n^2}{n^2+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-3n+2}{3-2n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4n-8n^2}{2n^2-n}$.

19.9. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n^2-2n+5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-5n}{n^2+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{1-5n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+2n+3}{3n+1}$.

19.10. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^2-n^2}{(n-2)^2-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-4n^2}{(3n-1)^2-9n^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2-n^2}{(2n-1)^2-n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-4n}{(n+4)^2-n^2}$.

19.11. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)^2+(n+2)^2}{n^2+(n+1)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-4)^2+(3n+1)^2}{n^2+(3n-2)^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-5n^2+1}{n-4n^3+2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^4-3n^3+2}{2n-3n^4}$.

19.12. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{1-4n^3+n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n}{5n^3-3n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-1}{1-4n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n^2-5n^3}{3-n^2}$.

19.13. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(3n+2)}{(6n-1)(n+2)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2)(3n-5)}{0,5n^3-n^2+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)(n+1)(1-2n)}{(4n+1)(n+2)(2n+3)}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)(2n+1)(1-4n)(1-n)}{(2n+1)(n+2)(4-3n)(1+2n)}$.

19.14. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+3)(1-4n^2)}{n^4-3n^3+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+3)(5-4n^3)}{(n^3+1)(2n^2-1)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^6+(2n^2+1)^3}{(n-1)^6+(2n^3+3)^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)^3+(n^3+1)^2}{(n+1)^6+(2n^3-1)^2}$.

19.15. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}+5n}{3-4n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^4-5n^2+1}+3n^2}{n^2+3n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^4+1}}{\sqrt{n^4+3n}+2n^2}$.

19.16. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+3n-1}}{\sqrt{n^2+4}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^4+n^3-3}+n}{\sqrt[3]{3-4n-8n^6}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27n^3-1}+n}{\sqrt[4]{16n^4+n^2}-n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^6+5n}-n^3}{\sqrt[3]{n^9+3n^2}+n^3}$.

19.17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2\cdot 2^n}{3^n-4\cdot 2^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-3\cdot 4^n}{2\cdot 4^{n+1}-5^n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{-n+2}-9\cdot 4^{-n+1}}{2\cdot 5^{-n+1}+3\cdot 4^{-n}}$.

19.18. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-\sqrt{2+n^2}\right)$.

19.19. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{n}\right)^{n+1}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-n^2+3n}{3n^2+2}\right)^{n^2}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+n}\right)^{n^2-1}$

19.20. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n+2}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^{3n-2}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+10}{n+3}\right)^{\frac{n}{3}-1}$

19.21. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+2}\right)^{n+1}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+7n+1}{3n^2-n+2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4n+5}{n^2+4n+1}\right)^{n^2+n}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+1}{2n^3-3}\right)^{n-n^3}$

§20. ფუნქცია

20.1. იპოვეთ $f(0)$, $f(-1)$ და $f(3)$, თუ $f(x)=x^3-2x+3$.

20.2. იპოვეთ $g(1)$, $g(-3)$, $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, თუ $g(x)=\dfrac{3+2x}{1-2x}$.

20.3. იპოვეთ $\varphi(3)$, $\varphi(-700)$ და $\varphi(1,1)$, თუ $\varphi(x)=\dfrac{x+|x|}{1-x}$.

20.4. იპოვეთ $F(0)$, $F(-3)$ და $F(4)$, თუ

$$F(x)=3^{x-1}+\log_2(x+4).$$

20.5. იპოვეთ $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ და $f\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$, თუ

$$f(x)=\cos^2 2x-|\lg x|.$$

20.6. იპოვეთ $f(-2)$, $f(-3)$ და $f(1)$, თუ

$$f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & \text{როცა } |x|\le 2,\\ 1-3x^2, & \text{როცა } |x|>2.\end{cases}$$

20.7. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

1) $y=\dfrac{2}{1-x}$; 2) $y=\dfrac{1}{2x-5}$; 3) $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$;

4) $y=\dfrac{x-12}{x^2+x-12}$; 5) $y=\sqrt{x-4}$; 6) $y=\sqrt{6-2x}$;

7) $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$; 8) $y=\lg(2x-4)+\sqrt{5-x}$;

9) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; 10) $y=\lg(x^2-6x+5)$; 11) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{3x+1}}$;

12) $y=\lg\dfrac{3x+2}{x+3}$; 13) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{5x-4-x^2}}$;

14) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{6x-8-x^2}}$; 15) $y=\sqrt{\dfrac{\lg x-1}{\lg x}}$; 16) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

17) $y=\arcsin\dfrac{x}{4}$; 18) $y=\arcsin(x-2)$; 19) $y=\arccos(1-2x)$;

20) $y=\arcsin\dfrac{1-2x}{4}$.

20.8. იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

1) $y=3x-2$, $x\in[-1;4]$; 2) $y=3-5x$, $x\in[0;3]$;

3) $y=x^2-1$, $x\in[-4;-2]$; 4) $y=x^2-4x-7$, $x\in[1;4]$.

20.9. დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ლუწი, რომელი კენტი და რომელია არც ლუწი და არც კენტი:

1) $y=2x^4$; 2) $y=-\dfrac{5}{x}$; 3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; 4) $y=\dfrac{x^5}{x^2+2}$;

5) $y=|x|+1$; 6) $y=|x+1|$; 7) $y=|x+1|+|x-1|$;

8) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$; 9) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}$;

10) $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{5^x-5^{-x}}$; 11) $y=2^x+2^{-x}$; 12) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

13) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 14) $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

20.10. აჩვენეთ, რომ $f(x)=\cos 5x$ ფუნქციის პერიოდია $T=\dfrac{2\pi}{5}$.

20.11. აჩვენეთ, რომ $f(x)=\mathrm{tg}^2 x$ ფუნქციის პერიოდია $T=\dfrac{\pi}{2}$.

20.12. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციების უმცირესი დადებითი პერიოდი:

1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\cos\dfrac{4\pi x}{5}$; 3) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; 4) $y=\sin^2 x$.

20.13. იპოვეთ $y=2x+3$, $x\in[-1,5;1]$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

20.14. იპოვეთ $y=3x+4$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

20.15. აჩვენეთ, რომ f და g ფუნქციები ურთიერთშექცეულია:

1) $f(x)=2x-5$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$, $g(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$

20.16. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია ემთხვევა თავის შექცეულს:

1) $y=7-x$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$; 4) $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

20.17. გამოსახეთ y როგორც x-ის ფუნქცია:

1) $y=u^2$, $u=\sin x$; 2) $y=\sqrt{u^2+1}$, $u=\mathrm{tg}x$;

3) $y=\mathrm{arctg}\,u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$; 4) $y=\sqrt{1+u^2}$, $u=\lg v$, $v=\sin x$.

20.18. მოცემული ელემენტარული ფუნქცია ჩაწერეთ ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა სუპერპოზიციის სახით:

1) $y=(3x+1)^5$; 2) $y=5^{\sin x}$; 3) $y=\lg\,tg\,10x$;

4) $y=|x|$; 5) $y=\mathrm{tg}\sin\sqrt{x}$; 6) $y=\arccos 2^{-x^2}$

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი (№№20.19-20.22):

20.19. 1) $y=2x-5$; 2) $y=3-4x$; 3) $y=x^2+2$;
4) $y=3-x^2$; 5) $y=3+2x-x^2$; 6) $y=x^2-4x+3$.

20.20. 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=2\sqrt{x}+1$; 3) $y=\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\dfrac{-1}{x+1}$.

20.21. 1) $y=2^{-x}$; 2) $y=3^{1-x}$; 3) $y=-\log_2 x$;

4) $y=1+\lg(x+2)$; 5) $y=\sin 2x$; 6) $y=\cos\dfrac{x}{2}$.

20.22. 1) $y=\begin{cases}1-x, & \text{როცა } x\le 0,\\ x^2+1, & \text{როცა } x>0;\end{cases}$; 2) $y=\begin{cases}x^3+1, & \text{როცა } x\le 0,\\ 2^{-x}, & \text{როცა } x>0;\end{cases}$;

3) $y=\begin{cases}\dfrac{4}{x+2}, & \text{როცა } x<-2,\\ 2x+2, & \text{როცა} -2\le x\le 1,\\ \ln(x-1), & \text{როცა } x>1;\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases}3^{-x}-1, & \text{როცა } x<1,\\ \ln x, & \text{როცა } 1\le x<2,\\ (x-1)\ln 2, & \text{როცა } x\ge 2.\end{cases}$

§21. ფუნქციის ზღვარი

ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების საფუძველზე (კოშისა და ჰეინეს მიხედვით) აჩვენეთ, რომ (№№21.1-21.3):

21.1. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x+4\right)=4$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x-3}{2x+2}=1$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+2}{x+1}=4$.

21.2. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}=+\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 5+}\dfrac{2}{x-5}=+\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{x-5}{x^2-4x+3}=+\infty$.

21.3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{6x-1}=\dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x+1}=0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+1}{5x^2+1}=\dfrac{4}{5}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3}{x^3-1}=3$.

გამოთვალეთ ფუნქციის ზღვარი (№№21.4-21.41)*:

21.4. 1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4x+5)$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-4x}{x^2+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{37+4x-2x^3}{x^2-4}$.

21.5. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-10)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x+12)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(4-2x-x^2)$.

---

* ზოგიერთი ზღვრის გამოთვლისას საჭიროა ისარგებლოთ ელემენტარული ფუნქციის უწყვეტობით

21.6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2-4x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+3x-2x^2}{x-2}$.

21.7. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 7^{3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{1-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{4-7x}$.

21.8. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3+7x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2(3x+1)$; 4) $\lim\limits_{x\to2+} \lg(3x-6)$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_{\frac{1}{2}}(1-3x)$; 6) $\lim\limits_{x\to1-} \log_{0.1}(1-x)$.

21.9. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+2}{5x-1}\right)^{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x+2}{5x-1}\right)^{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{7x-3}{3x+4}\right)^{1+2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x+3}{4x-1}\right)^{1-3x}$.

21.10. 1) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+3}{x^2+3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2x-8}{x^2-16}$.

21.11. 1) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{12x+24}{x^3+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

21.12. 1) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-7x+10}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \dfrac{1-x-6x^2}{x+\frac{1}{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{x-\frac{1}{2}}{2-3x-2x^2}$.

21.13. 1) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+12}$; 2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2x^2-9x+4}{20-x-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1+x-2x^2}{x^2-1}$.

21.14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+3}{2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-4x}{2x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2-x+10}{2x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-x-5x^2}{3x^2-4x+9}$.

21.15. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-7x^2+2}{x^3-4x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x-x^3+1}{3x^3+x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x^5}{2x^5+x^2-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-x^3+4x^4}{2x^2+4x-3-x^4}$.

21.16. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x-3\cdot4^x}{5^x-7\cdot3^x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot7^{x+2}-4\cdot5^{x+3}}{2\cdot7^{x+1}+4^{x-3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x-3^x}{5^x-2^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\cdot7^{2x}+5\cdot4^{2x}}{16^x-5^{2x}}$.

21.17. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

21.18. 1) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{x-16}{2-\sqrt[4]{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{1-x}$.

21.19. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{2-\sqrt{x+1}}$.

21.20. 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x^2-x+4}}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}-2}$.

21.21. 1) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4-\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

21.22. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

21.23. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+4}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+4}\right)$.

21.24. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$, $n\neq 0$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$.

21.25. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}xctg2x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}tg3x\cdot ctg\frac{x}{5}$.

21.26. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{arctg2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg4x}{\arcsin 3x}$.

21.27. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{xtg5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^3 3x}{x^2 tg\frac{x}{2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin^2 2x}{arctg^3 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,arctg2x}{tg^2 x}$.

21.28. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 15x-x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg7x-2x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin x+\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 15x-\sin x}{tg2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin x}{\sin 3x-\sin 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin x}{tg5x+tgx}$.

21.29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos 5x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 7x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\arcsin 6x}{\cos 5x-\cos x}$.

21.30. 1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{tgx-tga}{x-a}$; 4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{ctgx-ctga}{x-a}$.

21.31. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{1-x}$

21.32. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{2}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)^{\frac{2}{x}}$

21.33. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{-2x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x}{x^2+1}\right)^{x+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x+1}\right)^{2x-1}$

21.34. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{e^{5x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-4x}}{2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{e^{-7x}-1}$.

21.35. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{3x^3}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{e^{-4x^4}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^6}}{x^6}$.

21.36. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2^{-3x}}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{-x^2}-1}{3x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-7^{2x^3}}{x^3}$.

21.37. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(1+4x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+5x^3\right)}{x^3+2x^2}$.

21.38. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_3(1+2x)}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\log_2(1-4x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\log_5\left(1+3x^2\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3}{\log_3\left(1-2x^3\right)}$.

21.39. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\ln(x+3)}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-3x+1\right)}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\log_3(5-x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\log_2\left(x^2-24\right)}{x^2-5x}$.

21.40. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{tgx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{tgx}-1}{\sin 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{tg4x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 2x}{1-5^{tg^2 x}}$.

21.41. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-3^{-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-5^{2x}}{tg3x-\sin x}$.

§22. ფუნქციის უწყვეტობა

22.1. აჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების უწყვეტობა "ε-δ" ენაზე:

1) $y=ax+b$; 2) $y=ax^2+bx+c$;

3) $y=x^3$; 4) $y=\sqrt{x}$

22.2. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქცია x_0 წერტილში ისე, რომ იგი იყოს უწყვეტი ამ წერტილში:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_0=-1$;

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; 6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x_0=0$;

7) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$; 8) $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$, $x_0=0$.

22.3. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია განიცდის წყვეტას x_0 წერტილში. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

1) $f(x)=\begin{cases}2-x, \text{ როცა } x<0,\\ x, \text{ როცა } x\ge 0,\end{cases}$ $x_0=0$;

2) $f(x)=\begin{cases}1+3x, \text{ როცა } x<-1,\\ -x^2, \text{ როცა } x\ge -1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

3) $f(x)=\begin{cases}3\sin x, \text{ როცა } x<0,\\ \cos x, \text{ როცა } x\ge 0,\end{cases}$ $x_0=0$;

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, \text{ როცა } |x|>1, \\ 2^x-1, \text{ როცა } |x|\le 1. \end{cases}$ $x_0=-1$.

22.4. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები. გამოარკვიეთ რომელი გვარის წყვეტა აქვს, იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობა წყვეტის წერტილში და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

1) $y=\begin{cases} x^2+1, \text{ როცა } x\le 0, \\ x-2, \text{ როცა } x>0; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ როცა } x\ne 0, \\ 0, \text{ როცა } x=0; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{ როცა } x<0, \\ 5x-x^2, \text{ როცა } x\ge 0; \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} -x, \text{ როცა } x\le -1, \\ \dfrac{2}{x+1}, \text{ როცა } x>-1; \end{cases}$

5) $y=\begin{cases} 2-x, \text{ როცა } x<1, \\ \lg x, \text{ როცა } x\ge 1; \end{cases}$ 6) $y=\begin{cases} 2^{-x}, \text{ როცა } x\le -1, \\ 2, \text{ როცა } x>-1; \end{cases}$

7) $y=\begin{cases} x+1, \text{ როცა } x\le -1, \\ -x^2+1, \text{ როცა } -1<x\le 1, \\ x-1, \text{ როცა } x>1; \end{cases}$ 8) $y=\begin{cases} 2x+2, \text{ როცა } x\le -1, \\ x^2-x-2, \text{ როცა } -1<x\le 2, \\ -\dfrac{1}{2}x+1, \text{ როცა } x>2; \end{cases}$

9) $y=\begin{cases} x^2, \text{ როცა } x<0, \\ 1, \text{ როცა } x=0, \\ lgx, \text{ როცა } x>0; \end{cases}$ 10) $y=\begin{cases} (x+1)^2, \text{ როცა } x\le -1, \\ 3, \text{ როცა } -1<x\le 1, \\ 2^x, \text{ როცა } x>1. \end{cases}$

22.5. *a*-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1) $y=\begin{cases} x\,ctg\,2x, \text{ როცა } x\ne 0,\ |x|<\dfrac{\pi}{2}; \\ a, \text{ როცა } x=0; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x+1, \text{ როცა } x\le 1, \\ 3-ax^2, \text{ როცა } x>1; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} a(x+1), \text{ როცა } x<1, \\ x^2+2, \text{ როცა } x\ge 1; \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} ax^2+2, \text{ როცა } x\le 2, \\ x^3+2a, \text{ როცა } x>2; \end{cases}$

5) $y=\begin{cases} 3a\sin x, \text{ როცა } x\le 0, \\ 4\cos x+a, \text{ როცა } x>0; \end{cases}$ 6) $y=\begin{cases} 2^{x-1}+a, \text{ როცა } x\le 1, \\ 2ax^2+1, \text{ როცა } x>1. \end{cases}$

22.6. *a* და *b* პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ როცა } x \le 2, \\ ax+b, \text{ როცა } 2 < x \le 3, \\ a(x-1), \text{ როცა } x > 3; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x+a, \text{ როცა } x \le 0, \\ 2x+3, \text{ როცა } 0 < x \le 1, \\ ax^2+b, \text{ როცა } x > 1; \end{cases}$;

3) $y=\begin{cases} -2\sin x, \text{ როცა } x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x+b, \text{ როცა } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ როცა } x \ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} a\sin x+2b, \text{ როცა } x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x+b\cos x, \text{ როცა } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 3\cos x+b+1, \text{ როცა } x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

§23. წარმოებული და დიფერენციალი

23.1. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის $\Delta y=\Delta f(x)$ ნაზრდი x_0 წერტილში, თუ:

1) $y=x^2$, $x_0=1$, $\Delta x=0,1$; 2) $y=\lg x$, $x_0=1$, $\Delta x=9$;

3) $y=4^x$, $x_0=2$, $\Delta x=-0,5$; 4) $y=\sin x$, $x_0=0$, $\Delta x=-\dfrac{\pi}{6}$.

23.2. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი Δy ნაზრდი x წერტილში:

1) $y=ax+b$; 2) $y=ax^2+bx+c$; 3) $y=a^x$;
4) $y=\ln x$; 5) $y=\sin x$; 6) $y=\cos x$.

23.3. იპოვეთ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა x_0 წერტილში, თუ:

1) $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=\dfrac{19}{8}$; 2) $y=\left(\dfrac{1}{27}\right)^x$, $x_0=0$, $\Delta x=-\dfrac{1}{3}$.

23.4. წარმოებულის განსაზღვრების საფუძველზე გამოთვალეთ $f'(x_0)$, თუ:

1) $f(x)=x^2-x$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x_0=2$;
3) $f(x)=2|x^2-4|$, $x_0=-1$; 4) $f(x)=3^{x+2}$, $x_0=0$;
5) $f(x)=\ln(x^2-1)$, $x_0=3$; 6) $f(x)=\sin 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

23.5. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებული x_0 წერტილში, თუ:

1) $f(x)=|x+2|$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=|x^2-1|$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები (№№23.6-23.19):

23.6. 1) $y=3x-1$; 2) $y=x^2-2x$; 3) $y=x^2-5x+6$; 4) $y=x-3x^3+x^2$.

23.7. 1) $y=x^2+2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}+x^2-1$;

3) $y=2x^{7/2}-3x^{5/3}+3x-1$; 4) $y=3x^{1/3}-4x^{3/2}+2$.

23.8. 1) $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{3}{x^3}$;

3) $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\dfrac{1}{5x^5}-\dfrac{3}{4x^4}+\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{2x^2}$.

23.9. 1) $y=\dfrac{2}{x^{3/2}}-\dfrac{3}{x^{4/3}}+\dfrac{5}{x^{1/5}}$; 2) $y=\dfrac{2}{x^{5/3}}-2x^{-(1/2)}+\dfrac{1}{2x^2}$;

3) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^5}}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}$; 4) $y=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{\sqrt{x}}{x^{1/3}}-\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2}}-x$.

23.10. 1) $y=3x^3-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}-2$; 2) $y=5x^4-3\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x^3}+x$;

3) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-5\sqrt[5]{x^2}+2x^2-1$; 4) $y=4\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}$.

23.11. 1) $y=3\sin x-4\cos x+1$; 2) $y=2\mathrm{tg}x-3\mathrm{ctg}x+2\sin x-1$;

3) $y=2x-\arcsin x+2\arccos x$; 4) $y=2\mathrm{arctg}x+3\mathrm{arcctg}x-2x$.

23.12. 1) $y=3\cos x+2\sin x-x$; 2) $y=5\mathrm{arctg}x-2x^2$;

3) $y=3\arcsin x-2\arccos x$; 4) $y=2\mathrm{tg}x-3\mathrm{ctg}x-1$.

23.13. 1) $y=x^2\ln x$; 2) $y=e^x\cos x$;

3) $y=\sqrt{x}\cdot 3^x$; 4) $y=(x^2-4x+1)\arccos x$.

23.14. 1) $y=2e^x-3\cdot 5^x$; 2) $y=7^x-3e^x$;

3) $y=5\ln x-2e^x$; 4) $y=3\log_3 x+5e^x$.

23.15. 1) $y=5^x\,\mathrm{arctg}x$; 2) $y=x\log_2 x$;

3) $y=(1+e^x)\arcsin x$; 4) $y=(1+x^2)\mathrm{arctg}x-2x\sin x$.

23.16. 1) $y=\dfrac{3x+1}{2x-3}$; 2) $y=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; 4) $y=\dfrac{1-4x^2}{x^2+1}$.

23.17. 1) $y=\dfrac{x}{5^x}$; 2) $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$; 3) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$; 4) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

23.18. 1) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 2) $y=\dfrac{tgx+2}{ctgx-2}$;

3) $y=\dfrac{arctgx}{1+x^2}$; 4) $y=\dfrac{\ln x+1}{x}$.

23.19. 1) $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$; 2) $y=\dfrac{3^x+5^x}{3^x-5^x}$;

3) $y=\dfrac{\ln x+2}{\ln x-2}$; 4) $y=\dfrac{\log_3 x+\log_2 x}{x}$.

იპოვეთ $f'(x_0)$, თუ (№№23.20-23.22):

23.20. 1) $f(x)=x^4-3x^2+7$, $x_0=2$; 2) $f(x)=2x^3-3x^2+2x-1$, $x_0=1$;

3) $f(x)=3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$, $x_0=64$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x^{-\frac{1}{3}}$, $x_0=1$.

23.21. 1) $f(x)=3\mathrm{tg}x+4\cos x-1$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

2) $f(x)=2\arcsin x-\mathrm{arctg}x+x^2-2$, $x_0=0$;

3) $f(x)=20\cdot 3^x-9^x$, $x_0=2$; 4) $f(x)=5\log_3 x+\ln x$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

23.22. 1) $f(x)=x\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; 2) $f(x)=3e^x\cos x-7x$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$, $x_0=2\pi$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0=e$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები (№№23.23-23.40):

23.23. 1) $y=(x^2-1)^5$; 2) $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^3$;

3) $y=(3x^2+5x-1)^4$; 4) $y=(x^5-2x^4)^6$.

23.24. 1) $y=\sqrt{3x-5}$; 2) $y=\sqrt{4+2x-3x^2}$;

3) $y=\sqrt[3]{7-2x}$; 4) $y=\sqrt[5]{(2x+1)^3}$

23.25. 1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\mathrm{tg}(2x-5)$; 3) $y=\arccos 7x$; 4) $y=\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{3}$.

23.26. 1) $y=e^{4x-1}$; 2) $y=5^{1-x^2}$; 3) $y=\ln(4-x^3)$; 4) $y=\log_6(x^2+x)$;

23.27. 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\cos^3 x$; 3) $y=\mathrm{arctg}^2 x$; 4) $y=\mathrm{ctg}^5 x$.

23.28. 1) $y=\sqrt{\sin x}$; 2) $y=\cos\sqrt{x}$; 3) $y=4^{\sqrt{x}}$; 4) $y=\sqrt[3]{\ln x}$.

23.29. 1) $y=\ln\sin x$; 2) $y=3^{\cos x}$; 3) $y=\mathrm{arctg}4^x$; 4) $y=\arccos\ln x$.

23.30. 1) $y=5^{\arcsin x}$; 2) $y=\log_3 \mathrm{tg} x$; 3) $y=\cos\ln x$; 4) $y=\mathrm{arctg}\cos x$.

23.31. 1) $y=\sin^3\sqrt{x}$; 2) $y=\cos^4 3x$; 3) $y=\mathrm{tg}^5 x^2$; 4) $y=\arcsin^3 5x$.

23.32. 1) $y=\sin^2(2x+5)$; 2) $y=\sqrt{tg\left(x^2+x\right)}$;

3) $y=2^{\cos^3 x}$; 4) $y=\ln^2\left(\sqrt{x}+2\right)$.

23.33. 1) $y=\mathrm{arctg}^3\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{4^{\sin x}}$;

3) $y=\mathrm{ctg}3^{\cos x}$; 4) $y=\arccos^2\log_3 x$.

23.34. 1) $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$; 2) $y=\mathrm{tg}^2(x-\cos x)$;

3) $y=e^{\arcsin 2x}$; 4) $y=e^{\sqrt{\ln x}}$

23.35. 1) $y=\sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$; 2) $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$

3) $y=\ln^{10}\sin 7x$; 4) $y=\arcsin^7(\ln^3 x)$.

23.36. 1) $y=\dfrac{1}{\sin^3 5x}$; 2) $y=\dfrac{3}{\ln^5\cos x}$; 3) $y=-\dfrac{5}{tg^7 2^{-x}}$; 4) $y=-\dfrac{4}{\sqrt[3]{ctg 3^{\frac{1}{x}}}}$.

23.37. 1) $y=\sin\dfrac{x}{3}\cdot\sin 4x$; 2) $y=e^{-x^3}\cos 10x$;

3) $y=2^{1/x}\ln x$; 4) $y=3^{x^3+2x}\cdot\arcsin x^4$.

23.38. 1) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$; 2) $y=\dfrac{\ln(\sin x)}{tgx}$; 3) $y=\dfrac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; 4) $y=\dfrac{\cos^2 5x}{\sin 6x}$.

23.39. 1) $y=x^x$; 2) $y=x^{x^2}$ 3) $y=(\ln x)^x$; 4) $y=x^{\ln x}$.

23.40. 1) $y=x^{1/x}$; 2) $y=(\sin x)^{\cos x}$; 3) $y=(x+1)^{2/x}$; 4) $y=x^{\sin x}$.

23.41. იპოვეთ $f'(x_0)$, თუ:

1) $f(x)=\sin 5x+\cos 6x$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\ln\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=\ln(1+2^x)$, $x_0=2$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}^3\dfrac{\pi x}{6}$, $x_0=2$;

5) $f(x)=xe^{-x^2}$ $x_0=0$; 6) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+25}$, $x_0=5$.

იპოვეთ დიფერენციალი dy (№№23.42.-23.44):

23.42. 1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=2\sin x-3\cos x$;

3) $y=2tg\dfrac{x}{2}-2ctg\dfrac{x}{2}$; 4) $y=e^{x^3-1}$

23.43. 1) $y=\sin 5x$; 2) $y=\ln\sin x$; 3) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; 4) $y=2x^2\sin\sqrt{x}$

23.44. 1) $y=3\sqrt{x}-\dfrac{4}{x}$; 2) $y=5^{\ln tgx}$;

3) $y=2^{\frac{1}{\cos x}}$; 4) $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$.

23.45. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x_0 წერტილში, თუ:

1) $y=2x^2-x$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$;
2) $y=x^3-x^2$, $x_0=-1$, $\Delta x=-0{,}2$;
3) $y=\sqrt{x^2-2x}$, $x_0=-1$, $\Delta x=-0{,}01\sqrt{3}$;
4) $y=2^{x^2-1}$, $x_0=1$, $\Delta x=\dfrac{0{,}1}{\ln 2}$.

იპოვეთ $f(x_0+\Delta x)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა დიფერენციალის გამოყენებით, თუ (№№23.46; 23.47):

23.46. 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}004$;
2) $f(x)=\sin x$, $x_0=30°$, $\Delta x=1°$;
3) $f(x)=\cos x$, $x_0=60°$, $\Delta x=1°$;
4) $f(x)=\mathrm{arctg}x$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$.

23.47. 1) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}2$;
2) $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $\Delta x=0{,}2$;
3) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $\Delta x=-0{,}1$;
4) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}012$.

§24. მაღალი რიგის წარმოებული და დიფერენციალი

იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები (№№24.1-24.3):

24.1. 1) $y=x^3-4x^2+2$, $y''=?$ 2) $y=4x^4-3x^3+2x+6$, $y'''=?$
3) $y=5x^4-3x^3+1$, $y'''=?$ 4) $y=x^3-x^4+x^2-x$, $y''=?$

24.2. 1) $y=e^{-2x}$, $y''=?$ 2) $y=3^{7x}$, $y''=?$
3) $y=\sin^2 x$, $y''=?$ 4) $y=\ln(2x-3)$, $y''=?$

24.3. 1) $y=x\ln x$, $y'''=?$ 2) $y=(1+x^2)\mathrm{arctg}x$, $y''=?$
3) $y=e^{-x^2}$ $y''=?$ 4) $y=x^3\ln x$, $y^{IV}=?$

იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები მოცემულ წერტილში (№№24.4; 24.5):

24.4. 1) $y=x^5-x^4+2x^2-1$, $y''(1)=?$ 2) $y=x-3x^3+x^4$, $y'''(2)=?$

3) $y=\cos 5x$, $y''\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=?$ 4) $y=x^3-10\ln x$, $y''(1)=?$

24.5. 1) $y=x^3\ln x$, $y''(e)=?$ 2) $y=x^2\sin 2x$, $y'''(0)=?$
3) $y=e^{\sqrt{x}}$, $y''(4)=?$ 4) $y=e^{2x^2-1}$, $y'(0)=?$

24.6. იპოვეთ n–ური რიგის წარმოებულები:
1) $y=\ln x$; 2) $y=\sin ax$; 3) $y=\dfrac{1}{1-x}$; 4) $y=a^x$.

24.7. ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები:
1) $y=xe^x$, $y^{(n)}=?$ 2) $y=x^3\ln x$, $y^{(n)}=?$
3) $y=(x-1)2^{x-1}$, $y^{(n)}=?$ 4) $y=x\cos x$, $y^{(n)}=?$

იპოვეთ მითითებული რიგის დიფერენციალები (№№24.8; 24.9):

24.8. 1) $y=3x^4-4x^3$, $d^2y=?$ 2) $y=5x-2\ln x$, $d^2y=?$
3) $y=\cos 5x$, $d^2y=?$ 4) $y=5^x-2e^x$, $d^2y=?$

24.9. 1) $y=(x^2+x+1)e^{-x}$, $d^2y=?$ 2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $d^2y=?$
3) $y=x^2e^{-x}$, $d^3y=?$ 4) $y=\dfrac{x^4}{2-x}$, $d^4y=?$

24.10. იპოვეთ მითითებული რიგის დიფერენციალები მოცემულ წერტილში:
1) $y=x^5-5x^4+4x^3$, $d^2y(1)=?$ 2) $y=(x+5)^5$, $d^3y(0)=?$
3) $y=x^2\ln x$, $d^2y(e)=?$ 4) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$, $d^2y(1)=?$

§25. პარამეტრული და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებული

იპოვეთ $y'=\dfrac{dy}{dx}$, თუ y ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით (№№25.1; 25.2):

25.1. 1) $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=e^t-1, \\ y=2e^t+1. \end{cases}$

25.2. 1) $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = t - arctgt; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \dfrac{t}{\left(t+1\right)^2}. \end{cases}$

25.3. იპოვეთ $y_x'(t_0)$, თუ:

1) $\begin{cases} x = t^2+1, \\ y = 2t-1, \end{cases}$ $t_0 = 1$; 2) $\begin{cases} x = r\sin t, \\ y = r\cos t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $\begin{cases} x = a\left(t-\sin t\right), \\ y = a\left(1-\cos t\right), \end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{2}$; 4) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$ $t_0=0$.

25.4. იპოვეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის მითითებული რიგის წარმოებული:

1) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$ 2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

3) $\begin{cases} x = 2e^{2t}, \\ y = e^{-2t}, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$ 4) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

25.5. იპოვეთ t_0 წერტილში $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, თუ:

1) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\begin{cases} x = 1-\cos t, \\ y = 1+\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

25.6. იპოვეთ $\dfrac{dy}{dx}$, თუ y ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით:

1) $y^2=2px$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

25.7. იპოვეთ $y'(x_0)$, როცა $y_0=y(x_0)$, თუ:

1) $x^2+2xy-y^2=2x$, $x_0=2$, $y_0=4$;
2) $e^y+xy=e$, $x_0=0$, $y_0=1$;
3) $2y=1+xy^3$, $x_0=1$, $y_0=1$;
4) $xy+\ln y=1$, $x_0=1$, $y_0=e$.

§26. წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება გეომეტრიასა და მექანიკაში

26.1. იპოვეთ $y=5x^3$ კუბური პარაბოლის იმ წერტილზე გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტი, რომლის აბსცისაა $x=2$.

26.2. იპოვეთ $y=3x^2-2x+1$ პარაბოლის $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ წერტილზე გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტი.

26.3. იპოვეთ $y=x^3$ კუბური პარაბოლის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი 3-ის ტოლია.

26.4. იპოვეთ $y=x^2-x$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი 5-ის ტოლია.

26.5. $y=x^2+2$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძთან ადგენს 30°-იან კუთხეს.

26.6. იპოვეთ $y=x^3+1$ კუბური პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია.

26.7. იპოვეთ $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ წირის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია.

26.8. იპოვეთ $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ წირის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხებები პარალელურია აბსცისთა ღერძის.

26.9. იპოვეთ $y=2+x-x^2$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძთან ადგენს 45°-იან კუთხეს.

26.10. იპოვეთ $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ ფუნქციის გრაფიკის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძთან ადგენს 135°-იან კუთხეს.

26.11. $y=2x^3-3x^2+7$ ფუნქციის გრაფიკზე იპოვეთ წერტილები, რომელშიც გავლებული მხები პარალელურია აბსცისთა ღერძის.

26.12. იპოვეთ $y=x^2-7x+3$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები $5x+y-3=0$ წრფის პარალელურია.

26.13. იპოვეთ $y=2x^2-3x+1$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები $x+5y+2=0$ წრფის მართობულია.

შეადგინეთ $y=f(x)$ წირის $M(x_0,y_0)$ წერტილში გავლებული მხებისა და ნორმალის განტოლებები, თუ (№№26.14; 26.15):

26.14. 1) $y=\sqrt{x}$, $M_0(4;2)$; 2) $y=x^3+2x^2-4x-3$, $M_0(-2;5)$;
3) $y=x^2-2$, $M_0(2;2)$; 4) $y=x^3-4x^2+8x+6$, $M_0(2;14)$.

26.15. 1) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $M_0(1;0)$; 2) $y=\mathrm{tg}2x$, $M_0(0;0)$;
3) $y=\arccos 3x$, $M_0\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $y=e^{1-x^2}$ $M_0(-1;1)$.

26.16. წერტილი მოძრაობს წრფივად კანონით $S=2t^3+t^2-4$. იპოვეთ მისი სიჩქარე დროის $t=4$ მომენტში.

26.17. მატერიალური წერტილის Ox ღერძის გასწვრივ მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე $x=3t-t^3$. იპოვეთ სიჩქარე დროის $t_0=0$, $t_1=1$ და $t_2=2$ მომენტში.

26.18. სხეული მოძრაობს წრფივად ისე, რომ მოძრაობის საწყისი წერტილიდან მისი დაშორება დროის ყოველ t მომენტში გამოითვლება ფორმულით $s=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$. იპოვეთ:

1) დროის რა მომენტში იმყოფებოდა სხეული საწყის წერტილში?
2) დროის რა მომენტში იყო სიჩქარე ნულის ტოლი.

26.19. 3 კგ მასის სხეული მოძრაობს წრფივად შემდეგი კანონით $s=1+t+t^2$. s გამოსახულია სანტიმეტრებში, t-წამებში. განსაზღვრეთ სხეულის კინეტიკური ენერგია $\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ მოძრაობის დაწყებიდან 5 წმ-ის შემდეგ.

26.20. 8 კგ მასის სხეული მოძრაობს წრფივად კანონით $s=2t^2+3t-1$. იპოვეთ მისი კინეტიკური ენერგია მოძრაობის დაწყებიდან 3 წმ-ის შემდეგ.

26.21. მოძრავი ავტომობილის სამუხრუჭე მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $s(t)=30t-16t^2$. რამდენი წამის განმავლობაში მიმდინარეობს დამუხრუჭება მის სრულ გაჩერებამდე? რა მანძილს გაივლის ავტომობილი დამუხრუჭების დაწყებიდან?

26.22. ბორბლის შემობრუნების კუთხის დროზე დამოკიდებულება გამოისახება ფუნქციით $\varphi=t^2+3t-5$. იპოვეთ კუთხური სიჩქარე დროის $t=5$ წმ მომენტში.

26.23. ბორბალი ბრუნავს ისე, რომ შემობრუნების კუთხე დროის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. პირველი ბრუნი შესრულდა 8 წმ-ში. იპოვეთ ბორბლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე დროის $t=64$ წმ მომენტში.

26.24. წერტილი მოძრაობს $y=8x-x^2$ პარაბოლაზე ისე, რომ მისი აბსცისა იცვლება კანონით $x=\sqrt{t}$ (x-იზომება მეტრებში,

t-წამებში). იპოვეთ წერტილის ორდინატის სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან 9 წამის შემდეგ.

26.25. წერტილი მოძრაობს წრფივად კანონით $s=3t^2-3t+8$. იპოვეთ მისი აჩქარება $t=4$ მომენტში.

26.26. დროის t მომენტში სხეული მდებარეობს საწყისი წერტილიდან $s=\frac{1}{4}t^4+4t^3+16t^2$ კილომეტრ მანძილზე. იპოვეთ მისი აჩქარება მოძრაობის დაწყებიდან 2 სთ-ის შემდეგ.

26.27. მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფივად კანონით $s=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-5$. იპოვეთ წერტილის სიჩქარე დროის იმ მომენტში, როცა მისი აჩქარება ნულის ტოლია.

26.28. მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფივად კანონით $s=t^3-t$. იპოვეთ წერტილის აჩქარება დროის იმ მომენტში, როცა მისი სიჩქარე 11 მ/წმ-ის ტოლია.

26.29. სხეული მასით 3 კგ, გარკვეული ძალის მოქმედებით, მოძრაობს წრფივად კანონით $s(t)=t^3-3t^2+2$. იპოვეთ მასზე მოქმედი ძალა $t=4$ წმ მომენტში.

26.30. სხეული მასით 5 კგ, გარკვეული ძალის მოქმედებით, მოძრაობს წრფივად კანონით $s=\frac{1}{3}t^3+t^2-1$. იპოვეთ მასზე მოქმედი ძალა დროის იმ მომენტში, როცა მისი სიჩქარეა 3 მ/წმ.

§27. ლოპიტალის წესი

გამოთვალეთ ზღვარი (№№27.1-27.14):

$\frac{0}{0}$ **სახის განუსაზღვრელობა**

27.1. 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{2x^3-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^5-4x^4+2x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^3-2x^2+4x-1}{x^3+3x^2-x-1}$.

27.2. 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3^x-3}{\ln x}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(x-1)}{\ln(2x-3)}$.

27.3. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{3-\sqrt{x+7}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{6}}$; 4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $(a>0)$.

27.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{5^x-2^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 7^x-4^x-3^x}{\ln(1-x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3^x-2^{x+1}}{\ln(1+\sin x)}$.

27.5. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა

27.6. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{3x-1}$.

27.7. 1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3+\ln x}{3-\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x+1}-3}{e^{-x}+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg3x}$.

27.8. 1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)}{ctg\pi x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln tg2x}$.

$0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობა

27.9. 1) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to 2+}(x-2)\ln(x-2)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0+}\sin 5x\cdot\ln 3x$.

27.10. 1) $\lim\limits_{x\to 2+}\ln(5-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\ln tgx$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{a}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 e^{\frac{1}{x}}$.

$\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობა

27.11. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x\cos x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

1^∞, 0^0, ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები

27.12. 1) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

27.13. 1) 1) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

27.14. 1) 1) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{2}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

§28. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა, ექსტრემუმი, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა

იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები (№№28.1-28.5):

28.1. 1) $y=x^2-4x+2$; 2) $y=8x-x^2$; 3) $y=x^3-3x^2$; 4) $y=12x-x^3$

28.2. 1) $y=x^3-1,5x^2-6x$; 2) $y=x^3-3x^2-9x+14$;
3) $y=x^3-6x^2+15x-2$; 4) $y=2-3x-6x^2-5x^3$.

28.3. 1) $y=x^4-2x^2-5$; 2) $y=1-x^3+6x^2-15x$; 3) $y=x+x\sqrt{x}$; 4) $y=x^3+x$.

28.4. 1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; 2) $y=x^2(x-12)^2$;

3) $y=\frac{2x}{1+x^2}$; 4) $y=\frac{2x^2-1}{x^4}$.

28.5. 1) $y=x-e^x$; 2) $y=x^2e^{-x}$; 3) $y=2x^2-\ln x$; 4) $y=\sqrt{2x-x^2}$

იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმი (№№28.6-28.13):

28.6. 1) $y=x^2-2x-6$; 2) $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$;

3) $y=1-6x-x^2$; 4) $y=10-3x^2$.

28.7. 1) $y=x^3-12x+1$; 2) $y=2x^3-3x^2$;

3) $y=2x^3-6x^2-18x+7$; 4) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

28.8. 1) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$; 2) $y=2x^2-x^4$;

3) $y=x^4-8x^2+12$; 4) $y=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2$.

28.9. 1) $y=3x^4-4x^3$; 2) $y=(x^2-7)(x+5)^2$; 3) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; 4) $y=3x+\frac{12}{x}$.

28.10. 1) $y=\frac{x^2}{x^2+3}$; 2) $y=\frac{1}{x^2-x}$; 3) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; 4) $y=\frac{x}{x^2+4}$.

28.11. 1) $y=\frac{4x}{1+x^2}$; 2) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$; 3) $y=\frac{x^2}{x^2+2x+2}$; 4) $\frac{x^2}{x^2+5x+6}$.

28.12. 1) $y=xe^x$; 2) $y=x^2e^{-x}$; 3) $y=\frac{e^x}{x}$; 4) $y=2e^x+e^{-x}$.

28.13. 1) $y=x-\ln(1+x)$; 2) $y=x\ln x$; 3) $y=x\ln^2 x$; 4) $y=x-\ln(1+x^2)$.

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა მითითებულ შუალედში (№№28.14-28.17):

28.14. 1) $y=x^2-4x+3$, $[0;3]$; 2) $y=x^2-6x+8$, $[1;4]$;

3) $y=2x^3-6x+5$, $\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$; 4) $y=x^3-3x^2+2$, $[2;5]$;

28.15. 1) $y=x^4-\frac{8}{3}x^3-6x^2+1$, $[-2;4]$; 2) $y=3x^4+4x^3+1$, $[-2;1]$;

3) $y=x^5-5x^4+5x^3+3$, $[-1;2]$; 4) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+1$.

28.16. 1) $y=\frac{x^2+3x}{x-1}$, $[-3;0]$; 2) $y=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$, $[1;7]$;

3) $y=x+\frac{4}{(x+2)^2}$, $[-1;2]$; 4) $y=\sqrt{100-x^2}$, $[-6;8]$.

28.17. 1) $y=x-2\ln x+3{,}5$, $[1;e]$; 2) $y=x^2\ln x$, $[1;e]$;

3) $y=\cos 2x-4\cos x+3$, $\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$; 4) $y=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0;\frac{5}{4}\pi\right]$.

28.18. მოცემული a დადებითი რიცხვი დაშალეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი. იპოვეთ ამ შესაკრებების ნამრავლი, თუ $a=8$.

28.19. იპოვეთ რიცხვი, რომელიც თავის კვადრატთან შეკრების შემდეგ გვაძლევს უმცირეს შედეგს.

28.20. იპოვეთ რიცხვი, რომელიც თავის კვადრატით შემცირების შემდეგ გვაძლევს უმცირეს შედეგს.

28.21. l სიგრძის მავთულისაგან დაამზადეთ ისეთი მართკუთხედი, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი. იპოვეთ ეს ფართობი, თუ l=32.

28.22. ყველა იმ მართკუთხედებს შორის, რომელთა პერიმეტრია 36, იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის ფართობი.

28.23. რიცხვი 24 დაშალეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომ მათი კუბების ჯამი იყოს უმცირესი. იპოვეთ ამ შესაკრებთაგან უდიდესი.

28.24. რიცხვი 81 დაშალეთ ისეთ ორ თანამამრავლად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი. იპოვეთ ამ თანამამრავლთა ჯამი.

28.25. რიცხვი 10 წარმოადგინეთ ორი ისეთი დადებითი შესაკრების სახით, რომელთა კვადრატების ჯამი უმცირესი იქნება.

28.26. იპოვეთ ისეთი a რიცხვი, რომ $4a$-a^2 სხვაობა იყოს უდიდესი.

28.27. იპოვეთ ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ ამ რიცხვისა და მისი შებრუნებულის ჯამი იყოს უმცირესი.

28.28. მოცემული პერიმეტრის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედებიდან რომელს აქვს უდიდესი ფართობი?

28.29. იპოვეთ უდიდესი ფართობი R რადიუსიან წრეში ჩახაზული მართკუთხედისა $\left(R=3\sqrt{5}\right)$.

28.30. $M(2;4)$ წერტილზე გავლებული წრფის მონაკვეთი საკოორდინატო ღერძებთან (x>0, y>0) ქმნის მართკუთხა სამკუთხედს. რას უნდა უდრიდეს კათეტების სიგრძეები, რომ სამკუთხედის ფართობი უმცირესი იყოს.

28.31. იპოვეთ $M(1;2)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, რომელიც პირველ საკოორდინატო კუთხიდან მოჰკვეთს უმცირესი ფართობის მქონე სამკუთხედს.

28.32. სამკუთხედში, რომლის ფუძეა a, ხოლო სიმაღლე h, ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი ორი წვერო მდებარეობს ფუძეზე, ხოლო დანარჩენი ორი ფერდებზე. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის ფართობი.

28.33. ნახევარწრეში რომლის რადიუსი $R=14\sqrt{5}$ ჩახაზულია უდიდესი პერიმეტრის მქონე მართკუთხედი (მართკუთხედის ერთი გვერდი ნახევარწრის დიამეტრზე მდებარეობს). იპოვეთ ამ მართკუთხედის დიდი გვერდის სიგრძე.

28.34. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი, რომლის პერიმეტრი უმცირესია იმ ტოლფერდა ტრაპეციებს შორის, რომელთა ფართობია S და მახვილი კუთხე α.

28.35. სარწყავ არხს აქვს ტოლფერდა ტრაპეციის ფორმა, რომლის ფერდი მცირე ფუძის ტოლია. რისი ტოლი უნდა იყოს არხის ფერდის დახრის α კუთხე, რომ არხის კვეთა იყოს უდიდესი?

28.36. ფანჯარას აქვს მართკუთხედის ფორმა, რომელიც მთავრდება ნახევარწრით. ფანჯრის პერიმეტრია a. რას უნდა უდრიდეს ნახევარწრის რადიუსი, რომ ფანჯარამ უდიდესი რაოდენობის სინათლე გაატაროს?

28.37. სხეულის განვლილი მანძილის დროსთან დამოკიდებულება გამოისახება ტოლობით $s=18t+9t^2-t^3$. იპოვეთ სხეულის მაქსიმალური სიჩქარე.

28.38. ქიმიური რეაქციის შედეგად t დროში მიღებული პროდუქციის Q რაოდენობა გამოითვლება ტოლობით $Q=3+9t^2-t^3$. იპოვეთ რეაქციის მაქსიმალური სიჩქარე.

28.39. საჭიროა დამზადდეს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ღია ავზი, რომლის ფსკერიც იქნება კვადრატი და რომელიც დაიტევს v მოცულობის სითხეს. რას უნდა უდრიდეს ამ ავზის სიმაღლე, რომ მის დასამზადებლად დაიხარჯოს უმცირესი რაოდენობის მასალა? ($v=108$).

28.40. გვაქვს კვადრატის ფორმის თუნუქის ფურცელი, რომლის გვერდის სიგრძეა 60 სმ. ფურცლის კუთხეებში უნდა ამოიკვეთოს ტოლი კვადრატები და დარჩენილი ნაწილი უნდა გადაიკეცოს ისე, რომ მივიღოთ მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის თავღია ყუთი. რისი ტოლი უნდა იყოს ამოკვეთილი კვადრატის გვერდი, რომ მიღებული ყუთის მოცულობა აღმოჩნდეს მაქსიმალური?

28.41. ცილინდრის ღერძული კვეთის პერიმეტრი $6a$-ს ტოლია. იპოვეთ ასეთი ცილინდრების მოცულობებს შორის უდიდესი.

28.42. ყველა ცილინდრებს შორის, რომელთა სრული ზედაპირის ფართობია 54π სმ^3 იპოვეთ იმ ცილინდრის სიმაღლე, რომელსაც აქვს უდიდესი მოცულობა.

28.43. კონუსის მსახველია l. იპოვეთ ასეთი კონუსების მოცულობებს შორის უდიდესი.

28.44. იპოვეთ იმ კონუსის სიმაღლის ფარდობა ფუძის დიამეტრთან, რომელსაც მოცემული მოცულობისათვის აქვს უმცირესი გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

28.45. წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა არის V. როგორი უნდა იყოს ფუძის გვერდი, რომ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი იყოს უმცირესი?

§29. ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა, გადაღუნვის წერტილი, ასიმპტოტები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები (№№29.1-29.4):

29.1. 1) $y=x^2-x$; 2) $y=3+5x-2x^2$; 3) $y=x^3$; 4) $y=3x^2-x^3$.

29.2. 1) $y=x^3-5x^2+3x-5$; 2) $y=x^3-6x^2+12x+4$; 3) $y=2x^4-3x^2+x-1$; 4) $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

29.3. 1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; 3) $y=\dfrac{x^2}{12+x^2}$; 4) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$.

29.4. 1) $y=e^{-x^2}$ 2) $y=e^{\frac{1}{x}}$; 3) $y=\ln(1+x^2)$; 4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

იპოვეთ წირის ასიმპტოტები (№№29.5; 29.6):

29.5. 1) $y=\dfrac{a}{x}$; 2) $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$;

3) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+10}$.

29.6. 1) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$; 3) $y=\sqrt{x^2-1}$; 4) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

§30. ფუნქციის გრაფიკის აგება

გამოიკვლიეთ ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი (№№30.1-30.11):

30.1. 1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=3x-x^3$;

3) $y=3x^3-2x^2+4$; 4) $y=-\dfrac{2}{3}x^3+2x-\dfrac{4}{3}$.

30.2. 1) $y=x^3-3x^2-9x$; 2) $y=3+x-3x^3$;

3) $y=x^3-6x^2+9x-2$; 4) $y=\dfrac{4}{3}x^3-4x$.

30.3. 1) $y=\frac{1}{2}x^4-x^2$; 2) $y=x^4-2x^3+3$;

3) $y=-x^4+4x^3-2x^2$. 4) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$.

30.4. 1) $y=\frac{1}{9}x(x-4)^3$; 2) $y=x^2(x-2)^2$;

3) $y=(x+2)(4-x^2)$; 4) $y=(x-1)^2(x+2)$.

30.5. 1) $x=\frac{1}{5}x^5-4x^2$; 2) $y=6x^5+16x^4+10x^3$;

3) $y=(x-1)^3(x+1)^2$; 4) $y=\frac{1}{6}x^3(x^2-5)$.

30.6. 1) $y=\frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$; 2) $y=32x^2(x^2-1)^3$; 3) $y=\frac{x^2}{x^3+3}$; 4) $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

30.7. 1) $y=x+\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; 3) $y=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$; 4) $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{x}$.

30.8. 1) $y=x^2+\frac{2}{x}$; 2) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{x^4-3}{x}$; 4) $y=\frac{x^4+3}{x}$.

30.9. 1) $y=x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}$; 2) $y=3x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}$; 3) $y=\frac{1}{x^2+8x}$; 4) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.

30.10. 1) $y=e^x-x$; 2) $y=xe^x$; 3) $y=xe^{-x}$; 4) $y=x^2e^{-x}$.

30.11. 1) $y=x\ln x$; 2) $y=\frac{\ln x}{x}$; 3) $y=\frac{x}{\ln x}$; 4) $y=x-\ln x$.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§31. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

31.1. გამოსახეთ ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი, როგორც მისი x ფუძისა და y ფერდის ფუნქცია.

31.2. გამოსახეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, როგორც მისი x ფუძისა და y ფერდის ფუნქცია.

31.3. გამოსახეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი, როგორც მისი x კათეტისა და y ჰიპოტენუზის ფუნქცია.

31.4. გამოსახეთ წრეზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის S ფართობი, როგორც მისი x და y ფუძეების ფუნქცია.

31.5. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი l მსახველისა და ფუძის r რადიუსის ფუნქცია.

31.6. გამოსახეთ მართი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის S ფართობი, როგორც მისი ფუძის x, y და z გვერდებისა და h სიმაღლის ფუნქცია.

31.7. იპოვეთ $f\left(\sqrt{3};1\right)$ და $f\left(2;\sqrt{2}\right)$, თუ $f(x,y)=x^2-3y^2$.

31.8. იპოვეთ $f\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right)$, თუ $f(x,y)=\cos(x+y)-2\sin(x-y)$.

31.9. იპოვეთ $f\left(6;1\right)$, თუ $f(x,y)=2^{x-2y}+\ln(x-5y)$.

31.10. იპოვეთ $f(0;1)$, $f\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ და $f\left(\dfrac{1}{x};-y\right)$, თუ $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე (№№31.11-31.15):

31.11. 1) $z=xy+\sqrt{x}$; 2) $z=x-\sqrt{-y}$; 3) $z=\sqrt{xy}$; 4) $z=\sqrt{-\dfrac{x}{y}}$.

31.12. 1) $z=\ln(x^2+y^2-9)$; 2) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

3) $z=\ln(x-2y)$; 4) $z=\sqrt{4x-y^2}$

31.13. 1) $z=\ln(xy-1)$; 2) $z=\sqrt{xy+1}$; 3) $z=\sqrt{4-xy}$; 4) $z=\ln(2-xy)$.

31.14. 1) $z=\ln(y^2-4x+8)$; 2) $z=\sqrt{y^2-4x}$;

3) $z=\sqrt{\ln\left(x^2+y^2\right)}$; 4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

31.15. 1) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{9-y^2}$ 2) $z=\ln(9-x^2)+\sqrt{y^2-4}$;

3) $z=\ln(25-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-9}$; 4) $z=\ln(1-x^2-y^2)+\sqrt{4x-y^2}$

იპოვეთ ფუნქციის დონის წირები (№№31.16; 31.17):

31.16. 1) $z=x+y$; 2) $z=x^2+y^2$; 3) $z=xy$; 4) $z=\sqrt{xy}$.

31.17. 1) $z=\dfrac{y}{x^2}$; 2) $z=x^2-y^2$; 3) $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$; 4) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

გამოთვალეთ შემდეგი განმეორებითი ზღვრები (№№31.18-31.20):

31.18. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{3x+y-2}{x+y^2-4}$; 2) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+y-2}{3x-2y-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}$; 4) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}$.

31.19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x+y}{x+y^2}$; 2) $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+y}{x+y^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+3y^2}{x^3-y^2}$.

31.20. 1) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y\cdot\sin 2x}{\sin y\cdot tgx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+tgxy)}{\sin 2x\cdot\sin y}$;

3) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-xy}}{x\cdot tgy}$; 4) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^2\ln\left(1+2x^2\right)}{x^2\sin^2 y}$.

გამოთვალეთ ზღვარი (31.21-31.23):

31.21. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{4-\sqrt{yx+16}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}(1-xy)\,tg\dfrac{\pi xy}{2}$.

31.22. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{x^2+y^2}}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(1+tgy)^{x^2ctgy}$

31.23. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}xy\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2-y}\right)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$ ($a\neq k\pi$, $k=\pm1,\pm2\ldots$);

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+tgy)^{\frac{x^2}{y}}$

31.24. დაადგინეთ უწყვეტია თუ არა $f(x,y)$ ფუნქცია (0;0) წერტილზე, თუ:

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=y=0;\end{cases}$

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=y=0;\end{cases}$

3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0; \end{cases}$

4) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0. \end{cases}$

იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები (№№31.25; 31.26):

31.25. 1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 2) $z=\ln(x^2+y^2)$; 3) $z=\dfrac{1}{y-2x}$; 4) $z=\dfrac{y+2x^2}{y-2x^2}$.

31.26. 1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$; 2) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$;

3) $z=\dfrac{1}{(x+y)(y^2-x)}$; 4) $z=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

§32. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები (№№32.1-32.10):

32.1. 1) $z=x^2-y^2$; 2) $z=3x^2+4y^2$; 3) $z=x^2+3y^2$; 4) $z=3x^3-2y^2+x-y$.

32.2. 1) $z=x^2y^3$; 2) $z=5x^3y$; 3) $z=x^3y^2-x^2y^3$; 4) $z=3xy^3+x^3y$.

32.3. 1) $z=x^3-y^2+4x^2y$; 2) $z=x^2y^3-3xy+x^2+2$;

3) $z=x^4y^3-3xy^2+2x^2-y^2$; 4) $z=3x^2y^2-2x^3y+2x-3y$.

32.4. 1) $z=x^2\sqrt{y}-2\sqrt[3]{xy}$; 2) $z=y\sqrt[4]{x}-2\sqrt{xy}$;

3) $z=x\sqrt[3]{y}-y\sqrt[3]{x}$; 4) $z=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[5]{y}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

32.5. 1) $z=\dfrac{y}{x}$; 2) $z=\dfrac{x^2}{y^5}$; 3) $z=xy+\dfrac{y}{x}$; 4) $z=x^3y^2-\dfrac{x^2}{y^3}$.

32.6. 1) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$; 2) $z=\dfrac{2x+3y}{2x-3y}$; 3) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 4) $z=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

32.7. 1) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; 2) $z=e^{x^2+y^2}$ 3) $z=\sin(x^2-y)$;

4) $z=\mathrm{tg}(x+y)+\mathrm{ctg}(xy)$; 5) $z=x\sin(x+y)$; 6) $z=\cos\dfrac{x}{y}$.

32.8. 1) $z=\sin^3(xy)$; 2) $z=\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{y^2}$; 3) $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$; 4) $z=\arcsin\dfrac{y}{x+y}$.

32.9. 1) $z=e^{-\frac{x}{y}}$; 2) $z=x^y$; 3) $z=e^{\sin\frac{x}{y}}$ 4) $z=\left(x^2+x\right)^{y^2-1}$

32.10. 1) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; 2) $u=xy+yz+zx$; 3) $u=(xy)^z$; 4) $u=z^{xy}$.

32.11. იპოვეთ ფუნქციის კერძო წარმოებულები M წერტილში:
1) $f(x,y)=x^3y+xy^2-2x+3y-1$, $M(3;2)$;
2) $f(x,y)=x^2y^2-2xy^3+y$, $M(1;-1)$;
3) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}-e^x$, $M(1;2)$;
4) $f(x,y)=\ln(x^2-y^2)$, $M(3;1)$;
5) $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$, $M(1;2;0)$;
6) $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$, $M\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

32.12. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას

1) $z=\ln(x^2+xy+y^2)$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$; 2) $z=\ln(e^x+e^y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$;

3) $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$;

4) $u=(x-y)(y-z)(z-x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

იპოვეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი (№№32.13-32.15):

32.13. 1) $z=x^3y-xy^3$; 2) $z=2xy^3-x^3y^2$; 3) $z=\ln(x^2+y^2)$; 4) $z=\cos(xy-y^2)$.

32.14. 1) $z=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$; 2) $z=\mathrm{tg}\dfrac{y^2}{x}$; 3) $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}+\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$; 4) $z=\ln\cos\dfrac{x}{y}$.

32.15. 1) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$; 2) $u=\mathrm{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$; 3) $u=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$; 4) $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

32.16. გამოთვალეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი მითითებულ M წერტილში:
1) $f(x,y)=3x^2y-3xy^2$, $M(1;1)$; 2) $f(x,y)=x^2y^3-x^2+y^2$, $M(2;1)$;
3) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$, $M(1;1)$; 4) $f(x,y)=3^{x^2y}$, $M(1;2)$;

5) $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}$ $M(1;1;1)$; 6) $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M(3;4;5)$.

32.17. იპოვეთ ფუნქციის სრული ნაზრდი და სრული დიფერენციალი M წერტილში, თუ:

1) $f(x,y)=x^2y$, $M(3;4)$, $\Delta x=1$, $\Delta y=0{,}5$;

2) $f(x,y)=\frac{y}{x}$, $M(2;1)$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$;

3) $f(x,y)=\sin(x-y)$, $M(0;0)$, $\Delta x=\frac{\pi}{3}$, $\Delta y=\frac{\pi}{6}$;

4) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$, $M(0;1)$, $\Delta x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Delta y=-0{,}5$.

32.18. იპოვეთ $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა დიფერენციალის გამოყენებით, თუ:

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$;

2) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ $x_0=1$, $y_0=2$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=-0{,}03$;

3) $f(x,y)=x^y$, $x_0=2$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$;

4) $f(x,y)=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$, $x_0=5$, $y_0=5$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}02$.

32.19. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=e^{2x-3y}$, სადაც $x=\mathrm{tg}\,t$, $y=t^2-t$.

32.20. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=x^2+xy^2$, სადაც $x=e^{2t}$, $y=\sin t$.

32.21. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=x^y$, სადაც $x=\ln t$, $y=\sin t$.

32.22. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z=\cos^3(3x^2+y)$, სადაც $x=t^2$, $y=\frac{1}{t}$.

32.23. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u=xyz$, სადაც $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\mathrm{tg}\,t$.

32.24. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u=\ln(x^2+y+z)$, სადაც $x=e^t$, $y=\sin 2t$, $z=\mathrm{arctg}\,t$.

32.25. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\ln(e^x+e^y)$, სადაც $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

32.26. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z=\mathrm{arctg}(xy)$, სადაც $y=e^x$.

32.27. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=x^2\ln y$, სადაც $x=\frac{v}{u}$, $y=u^2+v^2$.

32.28. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\frac{x^2}{y}$, სადაც $x=u-2v$, $y=v+2u$.

32.29. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z=u+v^2$, სადაც $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(x+y)$.

32.30. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$, თუ $z=e^{x-2y}$, სადაც $x=\sin t$, $y=t^3+\tau^2$.

§33. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

33.1. 1) $z=x^5y^3-x^3y^5$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

2) $z=5x^2y^3-y^4$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

3) $z=x^3-3xy^2+x^2y-y^3$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

4) $z=x^4-3xy^3+2x^3y-y^3$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

33.2. 1) $z=xy+\frac{y}{x}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

2) $z=\frac{x-y}{x+y}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

3) $z=\ln(x^2+y)$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

4) $z=\sqrt{2xy+y^2}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

33.3. 1) $z=\arcsin(xy)$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 2) $z=y^{\ln x}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

3) $z=xe^{-xy}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; 4) $z=y^x$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

5) $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

6) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

33.4. 1) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$;

2) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$;

3) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$; 4) $u=x^{y/z}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

33.5. 1) $z=\sin xy$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$; 2) $z=\ln(x^2+y^2)$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$;

3) $u=e^{xyz}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$; 4) $u=e^{xy}\sin z$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

33.6. იპოვეთ $f''_{x^2}(3;2)$, $f''_{y^2}(3;2)$ და $f''_{xy}(3;2)$, თუ $f(x,y)=x^3y+xy^2-2x+3y-1$.

33.7. იპოვეთ $f'''_{x^3}(0;1)$, $f'''_{y^3}(0;1)$, $f'''_{x^2y}(0;1)$, $f'''_{xy^2}(0;1)$, თუ $f(x,y)=e^{x^2y}$

33.8. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, თუ:

1) $z=x^y$; 2) $z=x\sin(ax+by)$.

33.9. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას

1) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (ლაპლასის განტოლება);

2) $z=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3) $z=A\sin\lambda x\cdot\cos a\lambda t$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (სიმის რხევის განტოლება);

4) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

§34. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

შეადგინეთ მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები M_0 წერტილში (№№34.1-34.3):

34.1. 1) $z=x^2+y^2$, $M_0(1;-2;5)$; 2) $z=2x^2-4y^2$, $M_0(2;1;4)$;

3) $z=xy$, $M_0(1;1;1)$; 4) $z=\sin x\cos y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$.

34.2. 1) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $M_0(3;4;-7)$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $z=e^{x\cos y}$, $M_0\left(1;\pi;\frac{1}{e}\right)$; 4) $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$, $M_0(a;a;-a)$.

34.3. 1) $x^2+y^2+z^2=14$, $M_0(1;2;3)$;

2) $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $M_0(R\cos\alpha,R\sin\alpha,R)$;

3) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$, $M_0(3;2;1)$; 4) $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$, $M_0(1;2;-1)$.

34.4. იპოვეთ $z=4x-xy+y^2$ ზედაპირის ის მხები სიბრტყე, რომელიც პარალელურია $4x+y+2z+9=0$ სიბრტყის.

34.5. იპოვეთ $x^2+2y^2+3z^2=21$ ზედაპირის ის მხები სიბრტყე, რომელიც პარალელურია $x+4y+6z=0$ სიბრტყის.

34.6. $x^2+y^2-z^2-2x=0$ ზედაპირზე იპოვეთ წერტილები, რომლებზედაც გავლებული მხები სიბრტყეები პარალელურია საკოორდინატო სიბრტყეების.

34.7. იპოვეთ $z=xy$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ წრფის მართობულია.

34.8. იპოვეთ $x^2-z^2-2x+6y-4=0$ ზედაპირის ის ნორმალი, რომელიც $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ წრფის პარალელურია.

34.9. იპოვეთ $x^2-y^2-3z=0$ ზედაპირის იმ მხები სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(0;0;-1)$ წერტილზე $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ წრფის პარალელურად.

§35. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქცია (№№35.1-35.6):

35.1. 1) $z=(x+1)^2+(y-2)^2$; 2) $z=(x+1)^2-(y-2)^2$;

3) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; 4) $z=xy-x^2-y^2+2x-y$;

5) $z=2x^2+xy-y^2-6x+3y-1$; 6) $z=x^2+2y^2+xy+3x-2y$.

35.2. 1) $z=x^3+y^3-3xy$; 2) $z=x^3+y^3+3xy$;

3) $z=2x^3+y^3-12x^2y+45y$; 4) $z=x^3+3y^3-3xy^2+\frac{3}{2}y^2$;

5) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$; 6) $z=x^3+3x^2+3xy^2+3y^2-12x-12y-14$.

35.3. 1) $z=xy^2(1-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$; 2) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

3) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$; 4) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

35.4. 1) $z=x^2y^3(6-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$; 2) $z=x^3y^2(6-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$;

3) $z=x^2-2xy^2+y^4-y^5$; 4) $z=xy^4+yx^2$;

5) $z=x^2y^4+x^2y$; 6) $z=x^2y^3+x^3y^2-\frac{5}{2}x^2y^2$.

35.5. 1) $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$; 2) $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$;

3) $z=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; 4) $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-xy$;

5) $z=e^{x/2}(x+y^2)$; 6) $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

35.6. 1) $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$; 2) $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$;

3) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$.

35.7. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ სამ ისეთ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

35.8. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ისეთ სამ შესაკრებად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.

35.9. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ისეთ სამ თანამრავლად, რომ მათი შებრუნებული სიდიდეების ჯამი იყოს უმცირესი.

35.10. მოცემული V მოცულობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

35.11. იმ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის, რომლის განზომილებების ჯამი მოცემული რიცხვია. იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

35.12. მოცემული ზედაპირის ფართობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

§36. უშუალო ინტეგრება

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები (№№36.1-36.30):

36.1. 1) $\int x^3 dx$; 2) $\int x^6 dx$; 3) $\int 3x^2 dx$; 4) $\int 4x^7 dx$.

36.2. 1) $\int \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int \frac{dx}{x^5}$; 3) $\int x^{\frac{2}{3}} dx$; 4) $\int x^{-\frac{1}{3}} dx$.

36.3. 1) $\int \sqrt{x} dx$; 2) $\int \sqrt[5]{x^2} dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

36.4. 1) $\int \frac{3dx}{x^4}$; 2) $\int \frac{2dx}{x^2}$; 3) $\int 5x^{\frac{2}{3}} dx$; 4) $\int \frac{5dx}{x^{\frac{3}{4}}}$.

36.5. 1) $\int \left(x^2 + 3x + 1\right) dx$; 2) $\int \left(3x^5 - 4x^3 + 2x - 2\right) dx$;

3) $\int \left(5x^3 - 2x^2 + 3x - 8\right) dx$; 4) $\int \left(4x^3 - 15x^2 + 14x - 3\right) dx$.

36.6. 1) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x} + 1\right) dx$; 2) $\int \left(\frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x} - 2\right) dx$;

3) $\int \left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} - 1\right) dx$; 4) $\int \left(x\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x}\right) dx$.

36.7. 1) $\int \left(5x^{\frac{3}{2}} - 7x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{2}} + 1\right) dx$; 2) $\int \left(x^{\frac{1}{3}} - 7x^{\frac{2}{5}} + 5x^{\frac{1}{4}} - x + 1\right) dx$;

3) $\int \left(3x^{-\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{4}}\right) dx$; 4) $\int \left(4x^{-\frac{1}{5}} - 4x^{-\frac{3}{7}} - \frac{2}{x^3} + 1\right) dx$.

36.8. 1) $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^2} dx$; 2) $\int \frac{3 - x + x^3}{x} dx$;

3) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x - 4}{x^2} dx$; 4) $\int \frac{(3x+1)^2}{x} dx$.

36.9. 1) $\int \left(6x^5 + 3e^x\right) dx$; 2) $\int \left(2e^x - 3^x\right) dx$;

3) $\int \left(7x^6 + 5^x + 4e^x\right) dx$; 4) $\int \left(2e^x - 3^x + 2 \cdot 5^x\right) dx$.

36.10. 1) $\int (3\sin x - 2\cos x + 1) dx$; 2) $\int (2\sin x + 3\cos x) dx$;

3) $\int\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$; 4) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

36.11. 1) $\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

3) $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+3e^x\right)dx$; 4) $\int\left(5^x-\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx$.

36.12. 1) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$; 2) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$; 3) $\int tg^2 x dx$; 4) $\int ctg^2 x dx$.

36.13. 1) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 2) $\int\frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)}dx$;

3) $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 4) $\int\frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

36.14. 1) $\int\frac{x^2e^x-x}{x^2}dx$; 4) $\int\frac{2^x+8^x}{4^x}dx$;

3) $\int\frac{4+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; 4) $\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

36.15. 1) $\int(3x+1)^4dx$; 2) $\int(2-x)^5dx$; 3) $\int\sqrt[3]{1-2x}dx$; 4) $\int\sqrt[7]{(3x-2)^5}dx$.

36.16. 1) $\int\frac{dx}{(4-5x)^3}$; 2) $\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$.

36.17. 1) $\int\frac{dx}{2x+5}$; 2) $\int\frac{dx}{1-3x}$;

3) $\int\left(\frac{2}{3x+1}-\frac{3}{1-5x}\right)dx$; 4) $\int\left(\frac{3}{x-3}-\frac{4}{2x+1}\right)dx$.

36.18. 1) $\int\sin 3x dx$; 2) $\int\cos 2x dx$; 3) $\int\sin\pi x dx$;

4) $\int\cos(\pi x+2)dx$; 5) $\int\cos\frac{x}{5}dx$; 6) $\int\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$.

36.19. 1) $\int\frac{dx}{\cos^2 4x}$; 2) $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x-4\right)}$; 4) $\int\frac{dx}{\cos^2(2x+1)}$.

36.20. 1) $\int e^{-2x}dx$; 2) $\int a^{-x}dx$; 3) $\int\left(e^{3x}-e^{-x}\right)dx$; 4) $\int\left(a^{-2x}+a^{2x}\right)dx$.

36.21. 1) $\int\frac{x+2}{x+4}dx$; 2) $\int\frac{x-3}{x+3}dx$; 3) $\int\frac{2x+1}{2x-1}dx$; 4) $\int\frac{3x-4}{3x+1}dx$.

36.22. 1) $\int\frac{x-1}{2x+3}dx$; 2) $\int\frac{2x-1}{1-3x}dx$; 3) $\int\frac{x+2}{2x+1}dx$; 4) $\int\frac{5x-1}{3x+2}dx$.

36.23. 1) $\int\frac{x^2+6x+2}{x+3}dx$; 2) $\int\frac{6x^2+x+1}{3x-1}dx$;

3) $\int\frac{x^3+2}{1-2x}dx$; 4) $\int\frac{x^3-4x^2+1}{x+2}dx$.

36.24. 1) $\int\frac{x^4}{x-1}dx$; 2) $\int\frac{x^4+1}{x+2}dx$; 3) $\int\frac{x^5}{x+1}dx$; 4) $\int\frac{x^5-3x}{1-x}dx$.

36.25. 1) $\int\frac{dx}{x^2-4}$; 2) $\int\frac{dx}{5-x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{5x^2-12}$; 4) $\int\frac{dx}{7-4x^2}$.

36.26. 1) $\int\frac{dx}{x^2+16}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2+7}$; 3) $\int\frac{dx}{3x^2+4}$; 4) $\int\frac{dx}{9x^2+16}$.

36.27. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

36.28. 1) $\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx$; 2) $\int\frac{4-3x^2}{x^2-2}dx$; 3) $\int\frac{x^4}{x^2-4}dx$; 4) $\int\frac{x^4+2}{3-x^2}dx$.

36.29. 1) $\int\frac{dx}{(3x+1)^2+1}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$;

3) $\int\frac{dx}{(2x-1)^2+4}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-(5x-1)^2}}$.

36.30. 1) $\int\frac{dx}{(4x-1)^2-9}$; 2) $\int\frac{dx}{5-(2x+1)^2}$;

3) $\int\frac{dx}{(4x+3)^2+3}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-(2x+3)^2}}$.

§37. ჩასმის ხერხი

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№37.1-37.16):

37.1. 1) $\int\frac{xdx}{x^2+1}$; 2) $\int\frac{x}{4-5x^2}dx$; 3) $\int\frac{x^2dx}{x^3+3}$; 4) $\int\frac{x^3dx}{3x^4+2}$.

37.2. 1) $\int\left(1+x^5\right)^7\cdot x^4dx$; 2) $\int\left(9-2x^3\right)^4x^2dx$;

3) $\int x\sqrt[5]{x^2+2}dx$; 4) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$;

5) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; 6) $\int x^4\sqrt[5]{x^5+1}dx$.

37.3. 1) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{7+x^4}}$; 2) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; 3) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-3x^3}}$; 4) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(8x^3+27\right)^2}}$.

37.4. 1) $\int x\sin\left(x^2+2\right)dx$; 2) $\int x^2\cos\left(1-3x^3\right)dx$;

3) $\int x^2e^{-x^3}dx$; 4) $\int x\cdot3^{-2x^2}dx$.

37.5. 1) $\int\sin^2x\cos xdx$; 2) $\int\frac{\sin x}{\cos^4x}dx$;

3) $\int e^{\sin x}\cos xdx$; 4) $\int3^{-\cos x}\sin xdx$.

37.6. 1) $\int\frac{\ln^3x}{x}dx$; 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; 4) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1-\ln x}}$.

37.7. 1) $\int\frac{\sin2x}{\cos^32x}dx$; 2) $\int\sin3x\cdot\cos^23xdx$;

3) $\int ctg3xdx$; 4) $\int tg\frac{x}{2}dx$.

37.8. 1) $\int\frac{3^{1/x}}{x^2}dx$; 2) $\int\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$; 3) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\frac{2^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

37.9. 1) $\int\frac{e^xdx}{e^x+3}$; 2) $\int\frac{3^xdx}{1+3^x}$; 3) $\int\frac{2^xdx}{1+4^x}$; 4) $\int\frac{3^x}{\sqrt{4-9^x}}dx$.

37.10. 1) $\int\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$; 2) $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;

3) $\int\frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 4) $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctgx}$.

37.11. 1) $\int\frac{xdx}{1+x^4}$; 2) $\int\frac{x^2dx}{x^6+2}$; 3) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; 4) $\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$.

37.12. 1) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$; 2) $\int\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$;

3) $\int\left(2x^3-1\right)\cdot e^{x^4-2x}dx$; 4) $\int\frac{x^2+1}{x^2}\cdot 5^{x-\frac{1}{x}}dx$.

37.13. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$; 3) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; 4) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+5}}$.

37.14. 1) $\int x\sqrt{3+x}dx$; 2) $\int x\sqrt{x-1}dx$;

3) $\int(x-3)\sqrt{x+4}dx$; 4) $\int(x+4)\sqrt{x-1}dx$.

37.15. 1) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 3) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

37.16. 1) $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 3) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 4) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$.

§38. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№38.1-38.9):

38.1. 1) $\int xe^x dx$; 2) $\int xe^{-x}dx$; 3) $\int x\cdot 3^x dx$;

4) $\int(3x-4)e^{2x}dx$; 5) $\int(x-1)e^{3x}dx$; 6) $\int(x+2)\cdot 2^x dx$.

38.2. 1) $\int x\sin 2xdx$; 2) $\int x\cos xdx$;

3) $\int x\sin 5xdx$; 4) $\int x\cos\frac{x}{3}dx$;

5) $\int(2x+5)\cos 2xdx$; 6) $\int(1-3x)\sin 4xdx$.

38.3. 1) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$; 2) $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$;

3) $\int\frac{x+1}{\sin^2 2x}dx$; 4) $\int\frac{2x-1}{\cos^2 3x}dx$.

38.4. 1) $\int x\ln xdx$; 2) $\int x^5\ln xdx$; 3) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; 4) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$.

38.5. 1) $\int(3x+2)\ln xdx$; 2) $\int\left(x^2-x+1\right)\ln xdx$;

3) $\int\ln\left(x^2+1\right)dx$; 4) $\int x^2\ln(1+x)dx$.

38.6. 1) $\int x\,arctgxdx$; 2) $\int arctgxdx$; 3) $\int\arcsin xdx$; 4) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$.

38.7. 1) $\int x^2e^{-x}dx$; 2) $\int x^2\sin xdx$; 3) $\int\ln^2 xdx$; 4) $\int x^3\sin xdx$.

38.8. 1) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$; 2) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$;

3) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; 4) $\int x^3 arctgx dx$.

38.9. 1) $\int e^x \sin x dx$; 2) $\int e^x \cos x dx$; 3) $\int \sqrt{x^2 - 3} dx$; 4) $\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

§39. კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი ინტეგრალები

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№39.1-39.7):

39.1. 1) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; 3) $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$; 4) $\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$.

39.2. 1) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x}$; 4) $\int \frac{dx}{5 - 12x - 9x^2}$.

39.3. 1) $\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$; 2) $\int \frac{dx}{x - x^2 - 2,5}$; 3) $\int \frac{2dx}{2x - 2x^2 - 5}$; 4) $\int \frac{dx}{2x^2 - x - 3}$.

39.4. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x - x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$.

39.5. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$.

39.6. 1) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2 + 2x + 2}$; 2) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - x - 1}$;

3) $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2 - 4x + 17}$; 4) $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2 + 6x + 18}$.

39.7. 1) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$; 2) $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5 + 2x - x^2}}$;

3) $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}$; 4) $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$.

§40. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№40.1-40.12):

I. მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი მარტივი ფესვები

40.1. 1) $\int\frac{dx}{(x-3)(x+4)}$; 2) $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

3) $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 4) $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

40.2. 1) $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int\frac{3x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$;

3) $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; 4) $\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$.

40.3. 1) $\int\frac{14-3x}{x^2-4}dx$; 2) $\int\frac{x+13}{x^2+x-6}dx$;

3) $\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}$; 4) $\int\frac{9x-19}{2x^2-17x+21}dx$.

40.4. 1) $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$; 2) $\int\frac{2x^2-15x-9}{x^3-9x}dx$;

3) $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 4) $\int\frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$.

II. მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, რომელთაგან ზოგიერთი ჯერადია.

40.5. 1) $\int\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx$; 2) $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

3) $\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$; 4) $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

40.6. 1) $\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}$; 2) $\int\frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$;

3) $\int\frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$; 4) $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$.

40.7. 1) $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$; 2) $\int\frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx$;

3) $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$; 4) $\int\frac{(x-1)dx}{(x-2)\left(x^2+x\right)^2}$.

III. მნიშვნელს აქვს კომპლექსური მარტივი ფესვები.

40.8. 1) $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$; 2) $\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$; 3) $\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$; 4) $\int\frac{dx}{\left(x^2+x\right)\left(x^2+1\right)}$.

40.9. 1) $\int\frac{dx}{x^3+1}$; 2) $\int\frac{xdx}{x^3-1}$;

3) $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}dx$; 4) $\int\frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}dx$.

40.10. 1) $\int\frac{dx}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+2\right)}$;

3) $\int\frac{xdx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$; 4) $\int\frac{dx}{x^4-x^3-x+1}$.

IV. მნიშვნელს აქვს კომპლექსური ფესვები, რომელთაგან ზოგიერთი ჯერადია.

40.11. 1) $\int\frac{x^3+x^2-4x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; 2) $\int\frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$;

3) $\int\frac{3x+5}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$; 4) $\int\frac{5x^2-12}{\left(x^2-6x+13\right)^2}dx$.

40.12. 1) $\int\frac{xdx}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}$; 2) $\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}$;

3) $\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$; 4) $\int\frac{x(x-2)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}dx$.

§41. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№41.1-41.7):

I. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება

41.1. 1) $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$.

41.2. 1) $\int\frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; 3) $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$; 4) $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

41.3. 1) $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; 2) $\int x\sqrt[4]{x-2}dx$; 3) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$; 4) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

41.4. 1) $\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$;

3) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$.

II. ზოგადი სახის წილად-წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება.

41.5. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$;

3) $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

41.6. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; 2) $\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$; 3) $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

41.7. 1) $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$; 2) $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$.

§42. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№42.1-42.13):

1. $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x dx$ სახის ინტეგრალები.

42.1. 1) $\int \sin 3x\cos x dx$; 2) $\int \sin 3x\cos 5x dx$;

3) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2}{3}x dx$; 4) $\int \sin(3x+2)\cos(x-1)dx$.

42.2. 1) $\int \sin 10x\sin 15x dx$; 2) $\int \sin 2x\sin 5x dx$;

3) $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{5}dx$; 4) $\int \sin(5x+8)\sin(3x-7)dx$.

42.3. 1) $\int \cos 4x\cos 7x dx$; 2) $\int \cos x\cos 4x dx$;

3) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$; 4) $\int \cos x\cos^2 3x dx$.

42.4. 1) $\int \sin^5 x\cos x dx$; 2) $\int \sin x\cdot\cos^6 x dx$;

3) $\int \sin x\cdot\cos^3 x dx$; 4) $\int \sin^5 x\cdot\cos x dx$.

42.5. 1) $\int \sin^3 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$; 3) $\int \sin^5 x dx$;

4) $\int \cos^5 x dx$; 5) $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$; 6) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$.

42.6. 1) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$; 6) $\int tg^3 x dx$.

42.7. 1) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$; 2) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$; 3) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$; 4) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}dx$

42.8. 1) $\int \sin^2 x dx$; 2) $\int \cos^2 x dx$; 3) $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x dx$;

4) $\int \sin^4 x dx$; 5) $\int \cos^4 x dx$; 6) $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x dx$.

3. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(u,v)$ არის u და v ცვლადების რაციონალური ფუნქცია.

42.9. 1) $\int \frac{dx}{\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin x}$; 3) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$;

4) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 5) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 6) $\int \frac{dx}{4-\sin x}$.

42.10. 1) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$; 2) $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x}$.

42.11. 1) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$; 2) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\cdot \sin^2 x}$;

3) $\int \frac{1+tgx}{1-tgx} dx$; 4) $\int \frac{2-\sin x}{2-\cos x} dx$.

4. $\int R\left(e^x\right) dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(t)$ არის t ცვლადის რაციონალური ფუნქცია.

42.12. 1) $\int \frac{e^x dx}{\left(1+e^x\right)^2}$; 2) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$;

3) $\int \frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2} dx$; 4) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

42.13. 1) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} - 2}$; 2) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx$;

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x - 5} dx$; 4) $\int \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} - 4}$.

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

§43. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

1. ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№43.1-43.8):

43.1. 1) $\int_2^5 dx$; 2) $\int_0^1 x dx$; 3) $\int_0^1 x^2 dx$; 4) $\int_0^2 4x^3 dx$.

43.2. 1) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$; 2) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

43.3. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 2) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int_0^3 e^x dx$.

43.4. 1) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int_0^1 2^x dx$; 4) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$.

43.5. 1) $\int_1^5 \left(x^2-6x+5\right)dx$; 2) $\int_{-1}^{2} \left(2x+3x^2+4x^3\right)dx$;

3) $\int_1^2 \left(5x^4+2x-8\right)dx$; 4) $\int_{-1}^{1} \left(2x+3x^2+4x^3+5x^4\right)dx$.

43.6. 1) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; 3) $\int_0^1 \cos\frac{\pi}{3} x dx$; 4) $\int_0^{\pi^2} \sin\frac{x}{3\pi} dx$.

43.7. 1) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$; 2) $\int_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$;

3) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - \cos 4x\right)dx$; 4) $\int_0^1 \left(e^{1-x} - \ln 3 \cdot 3^{x-1}\right)dx$.

43.8. 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$; 3) $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$; 4) $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ჩასმის ხერხით (№№43.9-43.15):

43.9. 1) $\int_0^2 xe^{x^2} dx$; 2) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx$;

3) $\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^2 \cos x^3 dx$; 4) $\int_0^1 x\cdot\left(x^2+1\right)^5 dx$.

43.10. 1) $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+4}$; 2) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{arctgx}{1+x^2} dx$; 3) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 4) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$.

43.11. 1) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$; 2) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$; 4) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

43.12. 1) $\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; 2) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 4) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

43.13. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 xdx$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctgxdx$.

43.14. 1) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 2) $\int_0^1 x\left(2-x^2\right)^{12}dx$; 3) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$; 4) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$.

43.15. 1) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$; 2) $\int_0^4 \sqrt{x^2+9}dx$; 3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2-\cos x}$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით (№№43.16-43.20):

43.16. 1) $\int_0^1 xe^x dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin 2xdx$; 5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

43.17. 1) $\int_1^e \ln xdx$; 2) $\int_1^2 x\ln xdx$; 3) $\int_1^2 x^2\ln xdx$; 4) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

43.18. 1) $\int_1^e \ln^2 xdx$; 2) $\int_0^{2\pi} x^2\cos xdx$; 3) $\int_0^1 xarctgxdx$; 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx$.

43.19. 1) $\int_0^1 \arccos xdx$; 2) $\int_1^3 arctg\sqrt{x}dx$; 3) $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$; 4) $\int_0^{\pi} x^3\sin xdx$.

43.20. 1) $\int_0^{\pi} e^x\sin xdx$; 2) $\int_0^2 e^x\cos xdx$; 3) $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)dx$; 4) $\int_1^e x^2\ln^2 xdx$.

§44. არასაკუთრივი ინტეგრალები

1. არასაკუთრივი ინტეგრალები უსასრულო საზღვრით. გამოთვალეთ ინტეგრალები ან აჩვენეთ მათი განშლადობა (№№44.1-44.5):

44.1. 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.

44.2. 1) $\int\limits_1^{+\infty}e^{-3x}dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty}2^{-x}dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-kx}dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{0}7^{x}dx$.

44.3. 1) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x+1}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{3x+1}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$; 4) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{3x^2+1}$.

44.4. 1) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; 2) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$; 4) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

44.5. 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{atctg}x}{1+x^2}dx$;

3) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (№№44.6-44.8):

44.6. 1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x^4}dx$;

3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 4) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

44.7. 1) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+1}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt[4]{x}}dx$;

4) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}}dx$; 5) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sin^2 x}$; 6) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2\sin^2 x}$.

44.8. 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$; 2) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$; 3) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln x}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx$.

2. არასაკუთრივი ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (№№44.9-44.11):

44.9. 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 4) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}$;

44.10. 1) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

44.11. 1) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tgxdx$; 3) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

4) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (№№44.12; 44.13):

44.12. 1) $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; 4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$.

44.13. 1) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^a}dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+arctgx}$.

§45. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიაში

1. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

გამოთვალეთ დეკარტის კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (№№45.1-45.11):

45.1. 1) $y=2x$, $y=0$, $x=2$; 2) $y=x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;
3) $y=3-x$, $y=0$, $x=-1$; 4) $y=4-2x$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

45.2. 1) $y=2x^2$, $y=0$, $x=4$; 2) $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;
3) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; 4) $y=x^2-2x+2$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.

45.3. 1) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; 2) $y=\frac{10}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;
3) $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; 4) $y=e^x$, $y=0$, $x=1$, $x=\ln 7$.

45.4. 1) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le \pi$; 2) $y=2\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $y=4\cos 2x,\ y=0,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$; 4) $y=2\sin 2x,\ y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$.

45.5. 1) $y=4-x^2,\ y=0$; 2) $y=12-3x^2,\ y=0$;
3) $y=4x-x^2,\ y=0$; 4) $y=6x-x^2,\ y=0$.

45.6. 1) $y=2+x-x^2,\ y=0$; 2) $y=7x-3x^2-2,\ y=0$;
3) $y=-x^2-1,\ x=1,\ x=4,\ y=0$; 4) $y=x^2-6x,\ y=0$.

45.7. 1) $y=x^2,\ y=9$; 2) $y=x^4,\ y=1$;
3) $y=x,\ y=2x,\ x=4$; 4) $y=x^2,\ y=2x$.

45.8. 1) $y=x^2+4x,\ y=x+4$; 2) $y=x^2+2x,\ y=x+2$;
3) $y=2x-x^2,\ y=x$; 4) $y=x^2-3x+4,\ y=x+1$.

45.9. 1) $y=x^2,\ y=2x-x^2$; 2) $y=x^2,\ y=2x^2-1$;
3) $y=-x^2,\ y=x^2-2x-4$; 4) $y=x^2-2x+2,\ y=2+4x-x^2$.

45.10. 1) $y^2=x,\ x=4$; 2) $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$;
3) $y=\sqrt{x},\ y=x-2,\ x=0$; 4) $y^2=4-x,\ y^2=12+3x$.

45.11. 1) $y^2=3x,\ x^2=3y$; 2) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$; 3) $y=\dfrac{5}{x},\ y=6-x$;

4) $y=\dfrac{6}{x},\ y=7-x$; 5) $y=x+1,\ y=2-x,\ y=0$; 6) $y=2-2x,\ y=x-1,\ y=2$.

45.12. გამოთვალეთ პარამეტრული სახით მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1) $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t, \end{cases}$ (წრეწირი); 2) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ (ელიფსი);

3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, (ციკლოიდა) და $y=0$;

4) $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=b\cos^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, (ასტროიდა);

5) $\begin{cases} x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, \\ y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t, \end{cases}$ $c^2=a^2-b^2$, $0\le t\le 2\pi$,

6) $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ (კარდიოიდი).

2. წირის რკალის სიგრძე

იპოვეთ წირის რკალის სიგრძე (№№45.13-45.17):

45.13. 1) $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0\le x\le 1$; 2) $y=x\sqrt{x}$, $0\le x\le 4$;

2) $y=x^2$, $0\le x\le 1$; 4) $y=\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

45.14. 1) $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, $0\le x\le 3$; 2) $y=\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}$, $1\le x\le 3$;

3) $y=e^x$, $0\le x\le\ln 7$; 4) $y=2\sqrt{1+e^{\frac{x}{2}}}$, $\ln 9\le x\le\ln 64$.

45.15. 1) $y=2\sqrt{x}$, $0\le x\le 1$; 2) $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 5$;

3) $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$; 4) $y=\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

45.16. 1) $\begin{cases} x=\frac{2}{3}t\sqrt{t}, \\ y=t, \end{cases}$ $0\le t\le 8$; 2) $\begin{cases} x=\frac{3}{2}t, \\ y=t^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$ $0\le t\le 3$;

3) $\begin{cases} x=\frac{2}{3}t^3-2t, \\ y=2t^2, \end{cases}$ $0\le t\le 1$; 4) $\begin{cases} x=\frac{2}{3}t^3, \\ y=\frac{1}{5}t^5-t, \end{cases}$ $0\le t\le 3$.

45.17. 1) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$,

2) $\begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t), \\ y=a(3\sin t-\sin 3t), \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, 4) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$;

5) $\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\sin^4 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, 6) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 1$.

3. სხეულის მოცულობა

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (№№45.18-45.23):

45.18. 1) $y=2x+1$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; 2) $y=x+3$, $y=0$, $x=0$, $x=3$;

3) $y=2-x,\ y=0,\ x=0,\ x=-2$; 4) $y=-2x-2,\ y=0,\ x=-4,\ x=-2$.

45.19. 1) $y=x^2,\ y=0,\ x=1$; 2) $y=x^3,\ y=0,\ x=2$;
3) $y=8\sqrt{x},\ y=0,\ x=1$; 4) $y=5\sqrt{2x},\ y=0,\ x=\sqrt{3}$

45.20. 1) $y=\dfrac{4}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$; 2) $xy=5,\ y=0,\ x=1,\ x=5$;
3) $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$; 4) $y=2^x,\ y=0,\ x=1,\ x=2$.

45.21. 1) $y=x^2+2,\ y=0,\ x=0,\ x=1$; 2) $y=4-x^2,\ y=0,\ x=0,\ x=1$;
3) $y=\sin x,\ y=0,\ -\pi\le x\le 0$; 4) $y=\cos x,\ y=0,\ 0\le x\le \pi$.

45.22. 1) $y=x^2-2x,\ y=0$; 2) $y=1-x^3,\ y=0,\ x=2$;
3) $y=x^2-1,\ y=0$; 4) $y=4-x^2,\ y=0$.

45.23. 1) $y=\dfrac{1}{2}x^2,\ 2x+2y-3=0$; 2) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$;
3) $y=\dfrac{1}{x},\ y=x,\ y=0,\ x=2$; 4) $y=\dfrac{1}{x},\ y=x,\ x=3$;
5) $y=4-x^2,\ y=3x,\ y=0,\ -2\le x\le 0$; 6) $y^2=2x,\ x=2$.

§46. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ფიზიკაში

46.1. მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება მოცემულია ტოლობით $v=(4t^3-2t+1)$ მ/წმ. იპოვეთ წერტილის მიერ პირველ 4 წუთში გავლილი მანძილი.

46.2. სხეული მოძრაობს წრფივად სიჩქარით $v(t)=(3+3t^2)$ მ/წმ. იპოვეთ სხეულის მიერ მოძრაობის დაწყებიდან პირველ 5 წამში გავლილი მანძილი.

46.3. სხეული მოძრაობს წრფივად სიჩქარით $v(t)=(t^2+4t-2)$ მ/წმ. იპოვეთ მის მიერ მეათე წამში გავლილი მანძილი.

46.4. სხეული მოძრაობს წრფივად სიჩქარით $v(t)=(3t^2-2t-3)$ მ/წმ. იპოვეთ მის მიერ მეოთხე წამში გავლილი მანძილი.

46.5. სხეული მოძრაობს წრფივად სიჩქარით $v(t)=(12t-3t^2)$ მ/წმ. განსაზღვრეთ სხეულის მიერ მოძრაობის დაწყებიდან მის სრულ გაჩერებამდე გავლილი მანძილი.

46.6. სხეული მოძრაობს წრფივად სიჩქარით $v(t)=(18t-3t^2)$ მ/წმ. იპოვეთ მოძრაობის დაწყებიდან სრულ გაჩერებამდე სხეულის მიერ გავლილი მანძილი.

46.7. სხეული აისროლეს ვერტიკალურად ზევით სიჩქარით $v(t)=(49-9{,}8t)$ მ/წმ. იპოვეთ ამ სხეულის უდიდესი დაშორება საწყისი წერტილიდან.

46.8. სხეული აისროლეს ვერტიკალურად ზევით სიჩქარით $v(t)=(39,2-9,8t)$ მ/წმ. იპოვეთ ამ სხეულის უდიდესი დაშორება საწყისი წერტილიდან.

46.9. სხეული მოძრაობს წრფივად კანონით $v(t)=(2t+a)$ მ/წმ. იპოვეთ a, თუ ცნობილია, რომ $t_1=0$ მომენტიდან $t_2=2$ წმ მომენტამდე სხეულმა გაიარა 40 მ.

46.10. სხეული მოძრაობს წრფივად კანონით $v(t)=(4t+a)$ მ/წმ. ამ სხეულის მიერ პირველ 2 წმ-ში გავლილი მანძილია 48 მ. იპოვეთ a.

46.11. ორი სხეული იწყებს წრფივ მოძრაობას ერთიდაიგივე წერტილიდან ერთიდაიმავე მიმართულებით, პირველი $v_1=5t$ მ/წმ სიჩქარით, ხოლო მეორე – $v_2=3t^2$ მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ ამ სხეულებს შორის მანძილი მოძრაობის დაწყებიდან 20 წმ-ის შემდეგ.

46.12. ორი სხეული იწყებს წრფივ მოძრაობას ერთიდაიმავე წერტილიდან ერთიდაიგივე მიმართულებით: პირველი $v_1=(6t^2+4t)$ მ/წმ სიჩქარით, ხოლო მეორე – $v_2=4t$ მ/წმ სიჩქარით. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენი წამის შემდეგ იქნება ამ სხეულებს შორის მანძილი 250 მ?

46.13. რა მუშაობას ასრულებს 10 ნ ძალა ზამბარის 2 სმ-ით გაჭიმვისას?

46.14. რა მუშაობას ასრულებს 8 ნ ძალა ზამბარის 6 სმ-ით გაჭიმვისას?

46.15. 60 ნ ძალა ზამბარას ჭიმავს 2 სმ-ით. ზამბარის საწყისი სიგრძეა 14 სმ. რა მუშაობაა საჭირო ზამბარის 20 სმ-მდე გასაჭიმად?

46.16. 40 ნ ძალა ზამბარას ჭიმავს 0,04 მ-ით. რა მუშაობაა საჭირო ზამბარის 0,02 მ-ით გასაჭიმად?

46.17. ზამბარის 5 სმ-ით გასაჭიმად საჭიროა 29,43 ჯოული მუშაობის შესრულება. რამდენი სანტიმეტრით გაიჭიმება ზამბარა, თუ მის გასაჭიმად შევასრულებთ 9,81 ჯოულის ტოლ მუშაობას?

46.18. ზამბარის 3 სმ-ით შესაკუმშად საჭიროა 16 ჯოული მუშაობის შესრულება. რამდენი სანტიმეტრით შეიკუმშება ზამბარა, თუ მის შესაკუმშად შევასრულებთ 144 ჯოულის ტოლ მუშაობას?

46.19. გაუჭიმავი ზამბარის სიგრძეა 20 სმ. მას 9,8 ნ ძალა ჭიმავს 2 სმ-ით. განსაზღვრეთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა ზამბარის სიგრძის 25 სმ-დან 35 სმ-მდე გასაჭიმად.

46.20. გაუჭიმავი ზამბარის სიგრძეა 20 სმ. მას 50 ნ ძალა ჭიმავს 1 სმ-ით. განსაზღვრეთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა ზამბარის სიგრძის 22 სმ-დან 32 სმ-მდე გასაჭიმად.

46.21. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს ზამბარის 5 სმ-ით გასაჭიმად, თუ მისი 1 სმ-ით გასაჭიმად საჭიროა 1 ნ ძალა.

46.22. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს სპილენძის მავთულის გასაჭიმად 1 მმ-ით, თუ მისი სიგრძეა 1 მ, ხოლო განივი კვეთის დიამეტრი 4 მმ.

46.23. ელექტრული მუხტი e კოორდინატთა სათავეში მოდებული e_0 მუხტის მხრიდან მოქმედი განზიდვის ძალის მოქმედებით გადაადგილდა $(a;0)$ წერტილიდან $(b;0)$ წერტილში. გამოთვალეთ განზიდვის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა.

46.24. გამოთვალეთ მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი სიმკვრივეა $\rho(x)$;

1) $y=x^2$, $x\in[-1;1]$, $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$;

2) $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in[1;2]$, $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$.

46.25. გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები:

1) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; 2) $y^2=\dfrac{x^3}{a}$, $x=a$, $y=0$, $a>0$, $y\geq0$;

3) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq\pi$; 4) $y=\dfrac{2}{\pi}x$, $y=\sin x$, $y=0$.

დიფერენციალური განტოლებები

§47. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. ძირითადი ცნებები.

დაადგინეთ არე, რომელზედაც შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები (№№47.1; 47.2):

47.1. 1) $y'=x^2-y^2$; 2) $y'=\dfrac{x}{y}$; 3) $y'=xy+e^{-y}$; 4) $y'=\dfrac{y}{y-x}$.

47.2. 1) $y'=\sqrt{1-y^2}$; 2) $y'=\sqrt{x-y}$; 3) $y'=\sqrt{x^2-y}-x$; 4) $y'=1+\mathrm{tg}y$.

47.3. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მითითებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

1) $y=x^2+x+c$, $dy=(2x+1)dx$; 2) $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$;

3) $y=ce^{-x^2}$ $dy+2xydx=0$; 4) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x$;

5) $y=\sin x-1+ce^{-\sin x}$, $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$;

6) $y=ce^{-2x}+\dfrac{1}{3}e^x$, $y'+2y=e^x$.

47.4. შეადგინეთ დიფერენცილაური განტოლება, რომლის ამონახსნს წარმოადგენს მოცემულ წირთა ოჯახის ყოველი წირი:

1) $x^2+y^2=2cx$; 2) $y^2=2cx$; 3) $x^3=c(x^2-y^2)$; 4) $y=\sin(x+c)$.

2. დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით.

ამოხსენით განტოლება (№№47.5-47.8):

47.5. 1) $y'=3x^2-1$; 2) $y'=2x-3x^2$; 3) $y'=e^{2x}-e^{-x}$; 4) $y'=\cos 2x-\sin 2x$.

47.6. 1) $2xdx-3y^2dy=0$; 2) $e^ydy-e^xdx=0$;

3) $\sqrt{x}\,dx=\sqrt{y}\,dy$; 4) $\cos xdx=\cos ydy$.

47.7. 1) $e^xdx=\dfrac{dy}{y}$; 2) $\operatorname{tg}tdt+\dfrac{ds}{s}=0$; 3) $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x-1}$; 4) $\dfrac{dy}{1+y^2}=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

47.8. 1) $\dfrac{dx}{2x-1}-\dfrac{dy}{2y+1}=0$; 2) $\dfrac{xdx}{x^2+2}=\dfrac{ydy}{y^2+1}$;

3) $xe^xdx=\dfrac{\ln y}{y}dy$; 4) $x\ln xdx-\dfrac{dy}{y}=0$.

47.9. იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას:

1) $y'=x^2-e^x$, $y(0)=2$; 2) $y'=\operatorname{tg}x$, $y(0)=1$;

3) $xdx-ydy=0$, $y(2)=4$; 4) $\dfrac{dy}{\sqrt{y}}-\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=0$, $y(1)=4$;

5) $\dfrac{dy}{y}-\dfrac{xdx}{1+x^2}=0$, $y\left(\sqrt{3}\right)=2$; 6) $\dfrac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=0$, $y(1)=1$.

3. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

ამოხსენით განტოლება (№№47.10-47.15):

47.10. 1) $xdy-ydx=0$; 2) $xdy+2ydx=0$;

3) $x^2dy=y^2dx$; 4) $(y-1)dx+xdy=0$.

47.11. 1) $\dfrac{dy}{2x}+ydx=0$; 2) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$;

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}$; 4) $e^{-y}dx-e^{-2x}dy=0$.

47.12. 1) $(1+x)y'+1+y=0$; 2) $y'=y^2\cos x$;
3) $y'-y-1=0$; 4) $y'\operatorname{tg}x=y$.

47.13. 1) $y'=e^{x+y}$; 2) $(1+y^2)dx+xydy=0$;
3) $\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy$; 4) $xydx+(x+1)dy=0$.

47.14. 1) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$; 2) $xydx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$;
3) $ye^{2x}dx+(1+e^{2x})dy=0$; 4) $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$.

47.15. 1) $x^2y^2y'+1=y$; 2) $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$;
3) $y'+\frac{x\sin x}{y\cos y}=0$; 4) $xy'+2y=xyy'$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (№№47.16; 47.17):

47.16. 1) $x^2dy+y^2dx=0$, $y(1)=1$; 2) $(1+y^2)dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$, $y(0)=1$;
3) $(x^2+4)dy-(y^2+1)dx=0$, $y(2)=1$; 4) $y'\operatorname{ctg}x+y=2$, $y(0)=-1$.

47.17. 1) $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$;
2) $(xy^2+x)dy+(x^2y-y)dx=0$, $y(1)=1$;
3) $y'=(2y+1)ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$;
4) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$, $y(0)=\sqrt{2}$.

4. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

ამოხსენით განტოლება (№№47.18-47.21):

47.18. 1) $y'=\frac{y}{x}-1$; 2) $y'=\frac{y+2x}{x}$; 3) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$; 4) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

47.19. 1) $(x+2y)dx-xdy=0$; 2) $(x+y)dx+xdy=0$;
3) $xdy-ydx=ydy$; 4) $(x-y)dx+xdy=0$.

47.20. 1) $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$; 2) $y'=\frac{y}{x}-2ctg\frac{y}{x}$;
3) $y'=\frac{x-y}{x+y}$; 4) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$.

47.21. 1) $(x-y)ydx-x^2dy=0$; 2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;
3) $(x^2+2y^2)dx=xydy$; 4) $(x^2+y^2+3xy)dx=x^2dy$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (№№47.22; 47.23):

47.22. 1) $y'=3\dfrac{y}{x}+2,\;\; y(1)=0;$ 2) $(x+y)dx=xdy,\;\; y(1)=1;$

3) $xdy=(3x+4y)dx,\;\; y(1)=0;$ 4) $y'=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x},\;\; y(1)=\dfrac{\pi}{4}.$

47.23. 1) $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy,\;\; y(1)=0;$ 2) $xy'+2\sqrt{xy}=y,\;\; y(1)=0;$

3) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0,\;\; y(0)=1;$ 4) $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right),\;\; y(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

ნ. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.
ამოხსენით განტოლება (№№47.24-47.27):

47.24. 1) $y'-\dfrac{y}{x}=x;$ 2) $y'-\dfrac{2y}{x}=2x^3;$ 3) $y'-\dfrac{3}{x}y=x;$ 4) $y'-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x^2}.$

47.25. 1) $y'+y=e^{-x};$ 2) $y'+2xy=xe^{-x^2};$ 3) $y'-xy=(1+x)e^{x};$ 4) $y'-y=\dfrac{e^x}{x}.$

47.26. 1) $y'-y\,\mathrm{ctg}x=\dfrac{1}{\sin x};$ 2) $y'+y\cdot\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x};$

3) $y'-\dfrac{2y}{x+5}=2x(x+5)^2;$ 4) $y'-4xy=2xe^{2x^2}$

47.27. 1) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2;$ 2) $y'-4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x};$
3) $xy'-y=2x\ln x;$ 4) $(2x+1)y'=4x+2y;$
5) $y'+2y=4x;$ 6) $y'+y=\cos x.$

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (№№47.28; 47.29):

47.28. 1) $xy'+2y=3x,\;\; y(-2)=0;$ 2) $t^2\dfrac{ds}{dt}=2ts-3,\;\; s(-1)=1;$

3) $y'-y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x},\;\; y(0)=0;$ 4) $y'-y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos^3 x},\;\; y(0)=0.$

47.29. 1) $y'\cos x-y\sin x=2x,\;\; y(0)=0;$ 2) $y'+y\cos x=\sin x\cos x,\;\; y(0)=1;$

3) $y'=2y+e^x-x,\;\; y(0)=\dfrac{1}{4};$ 4) $y'+2xy=2x,\;\; y(0)=2.$

6. ბერნულის დიფერენციალური განტოლება

ამოხსენით განტოლება (№№47.30; 47.31):

47.30. 1) $y'+2y=y^2e^x$; 2) $3y'+y=\dfrac{1}{y^2}$; 3) $y'=\dfrac{4}{x}y+x\sqrt{y}$; 4) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{y}$.

47.31. 1) $y'-y\,\mathrm{tg}x=-y^2\cos x$; 2) $y'=y\,\mathrm{ctg}x+\dfrac{y^3}{\sin x}$;

3) $y'+2y\,\mathrm{tg}x=\sqrt{y}\cdot\sin x$; 4) $(x-1)y'-y=\dfrac{(x-1)^3}{y}$.

47.32. იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას:

1) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{xy}$, $y(1)=\sqrt{3}$; 2) $y'+2y\cdot\cos x=2\sqrt{y}\cos x$, $y(0)=4$;

3) $y'+2xy=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\cdot y^2$, $y(0)=2$; 4) $2y'+y\,\mathrm{tg}x=2y^3\sin x$, $y(0)=1$.

7. დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში

ამოხსენით განტოლება (№№47.33-47.35):

47.33. 1) $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$; 2) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$;
3) $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$; 4) $(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0$.

47.34. 1) $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$; 2) $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$;
3) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$; 4) $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$.

47.35. 1) $\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$; 2) $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$;

3) $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$; 4) $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$.

47.36. იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობას:

1) $\dfrac{2x}{y^3}dx-\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$, $y(1)=1$; 2) $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$, $y(1)=0$;

3) $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$;

4) $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$, $y(0)=2$.

§48. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენებაზე

48.1. შეადგინეთ $M(1;3)$ წერტილზე გავლებული იმ წირის განტოლება, რომლის ყოველ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტია $2x$-3.

48.2. შეადგინეთ $M\left(-2;-\frac{8}{3}\right)$ წერტილზე გავლებული იმ წირის განტოლება, რომლის ყოველ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტია x^2.

48.3. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ყოველ წერტილში მხების საკუთხო კოეფიციენტი ორჯერ ნაკლებია ამ წერტილის აბსცისაზე.

48.4. უძრავად მყოფი სხეული იწყებს მოძრაობას სიჩქარით $v(t)=5t^2$ მ/წმ. იპოვეთ სხეულის მიერ 3 წამში გავლილი მანძილი.

48.5. უძრავად მყოფმა სხეულმა დაიწყო მოძრაობა Ox ღერძის გასწვრივ წერტილიდან $M(4;0)$ და იგი მოძრაობს სიჩქარით $v(t)=2t+3t^2$. შეადგინეთ ამ სხეულის მოძრაობის განტოლება.

48.6. სწორხაზოვნად მოძრავი სხეულის სიჩქარე დროის პირდაპირპროპორციულია. იპოვეთ ამ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ პირველ 10 წამში მან გაიარა 20 მ, ხოლო 20 წამში – 35 მეტრი.
მითითება. ამოცანის პირობით

$$\frac{ds}{dt}=kt\text{, აქედან } s=\frac{kt^2}{2}+C.$$

48.7. სხეულის მოძრაობის სიჩქარე განვლილი გზის პირდაპირპროპორციულია. იპოვეთ ამ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ დროის საწყის მომენტში ის ათვლის წერტილიდან დაშორებული იყო 1 მ-ით, ხოლო 2 წმ-ის შემდეგ – e მეტრით.
მითითება. პირობით

$$\frac{ds}{dt}=ks\text{, აქედან } \ln s=kt+C.$$

48.8. სხეული მოძრაობს ისე, რომ მისი სიჩქარე განვლილი გზის პირდაპირპროპორციულია. იპოვეთ ამ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ მოძრაობის დაწყებიდან 2 წმ-ში სხეულმა გაიარა 10 მ, ხოლო 4 წმ-ში – 40 მ.

48.9. ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია დროის t მომენტში მათი რაოდენობის. დაადგინეთ ბაქტერიების რაოდენობის დროზე დამოკიდებულება, თუ პირველ საათში ბაქტერიების რაოდენობა გასამმაგდა. თაეიდან აღებული იყო 10 ბაქტერია.

მითითება. თუ დროის t მომენტში არის $x(t)$ რაოდენობის ბაქტერია, მაშინ

$$\frac{dx}{dt} = kx \text{, ანუ } \frac{dx}{x} = kdt \text{,}$$

აქედან $x(t) = ce^{kt}$

პირობით $x(0)=10$ და $x(5)=30$. ამ პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$x(t) = 10 \cdot e^{0,2t \cdot \ln 3}$$

48.10. ბაქტერიების გამრავლების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია დროის t მომენტში მათი რაოდენობის. დროის საწყის $t=0$ მომენტში არის 100 ბაქტერია, ხოლო 3 საათის განმავლობაში მათი რაოდენობა გაორმაგდა. დაადგინეთ ბაქტერიების რაოდენობის დროზე დამოკიდებულება.

48.11. რადიუმის დაშლის სიჩქარე პირდაპირპროპრციულია დროის t მომენტში მისი რაოდენობის. ცნობილია, რომ საწყის მომენტში გვაქვს R_0 რაოდენობის რადიუმი და 1600 წლის შემდეგ მისი რაოდენობა განახევრდება. დაადგინეთ რადიოაქტიური დაშლის კანონი.

მითითება. ვთქვათ R არის დროის t მომენტში რადიუმის რაოდენობა, მაშინ

$$\frac{dR}{dt} = -kR \text{,}$$

აქედან $R = ce^{-kt}$

$x(0)=R_0$ და $x(1600)=\frac{R_0}{2}$ პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$R = R_0 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{1600}}$$

48.12. რადიუმის დაშლის სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია დროის ამ მომენტში მისი რაოდენობის. რაღაც რადიოაქტიური ნივთიერების ნახევრადდაშლის პერიოდია 1000 წელი. რამდენი კილოგრამი რადიოაქტიური ნივთიერება დარჩება 500 წლის შემდეგ, თუ მისი წონა ახლა არის 20 კგ.

48.13. ნიუტონის კანონის თანახმად ჰაერში სხეულის გაციების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია სხეულის T ტემპერატურისა და ჰაერის T_0 ტემპერატურის სხვაობის. დაადგინეთ სხეულის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულება, თუ ცდა ტარდება $T_0=20^0$ ტემპერატურაზე და 20 წუთის განმავლობაში სხეული გაცივდა 100^0დან 60^0-მდე.

მითითება. პირობით

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20),\ \text{აქედან}\ T=20+Ce^{kt}$$

$T(0)=100$ და $T(20)=60$ პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ $C=80$, $e^k=2^{-\frac{1}{20}}$.

48.14. სხეულის გაციების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია სხეულის T ტემპერატურისა და ჰაერის T_0 ტემპერატურის სხვაობის. ჰაერის ტემპერატურაა 20^0. სხეული 40 წუთში ცივდება 80^0-დან 30^0-მდე. იპოვეთ სხეულის ტემპერატურა საწყისი გაზომვიდან 30 წუთის შემდეგ.

48.15. სხეულის გაციების სიჩქარე პროპორციულია სხეულის ტემპერატურისა და ჰაერის ტემპერატურის სხვაობის. ღია ჭურჭელში მყოფი წყლის საწყისი ტემპერატურა იყო 70^0, ხოლო 10 წუთის შემდეგ მისი ტემპერატურა გახდა 65^0. ჰაერის ტემპერატურაა 15^0. იპოვეთ: 1) წყლის ტემპერატურა საწყისი მომენტიდან 30 წუთის შემდეგ; 2) საწყისი მომენტიდან რა დროის შემდეგ გახდება წყლის ტემპერატურა ჭურჭელში 20^0.

48.16. ნავზე მოქმედი წყლის წინააღმდეგობის ძალა პირდაპირპროპორციულია ნავის მოძრაობის v სიჩქარის. ნავი მოძრაობს მდგარ წყალში სიჩქარით $v_0=20$ კმ/სთ. იპოვეთ ნავის სიჩქარე მოტორის გამორთვიდან 2 წუთის შემდეგ, თუ 40 წმ-ში ის შემცირდა 8 კმ/სთ-მდე.

მითითება. თუ ნავის მასაა m, მაშინ ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

სადაც $k-$ პროპორციულობის კოეფიციენტია.
ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$v(t)=ce^{-\frac{k}{m}t}$$

$v(0)=20, v\left(\frac{1}{90}\right)=8$ პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$C=20,\ e^{-\frac{k}{m}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{90}$, ანუ

$$v(t)=20\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{90t}$$

48.17. მოტორიანი ნავი მოძრაობს v=10 კმ/სთ სიჩქარით. რაღაც მომენტში გამორთეს ძრავი და ძრავის გამორთვიდან 20 წმ-ის შემდეგ ნავის სიჩქარე შემცირდა v_1=6 კმ/სთ-მდე. ჩათვალეთ, რომ ნავის მოძრაობისადმი წყლის წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ნავის სიჩქარისა და იპოვეთ ნავის სიჩქარე 2 წთ-ის შემდეგ ძრავის გამორთვიდან.

48.18. m მასის მქონე მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფივად. მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც პროპორციულია მოძრაობის დროის კუბისა (პროპორციულობის კოეფიციენტია k) და უკუპროპორციულია სიჩქარის მოძრაობის დროზე ნამრავლისა (პროპრციულობის კოეფიციენტია k_1). იპოვეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ მისი საწყისი სიჩქარეა v_0.

48.19. სითხეში. წრიულ მბრუნავ დისკზე მოქმედი ხახუნის ძალა პროპორციულია ბრუნვის კუთხური სიჩქარის. ვიპოვოთ დისკის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ 100 ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით მბრუნავი დისკის კუთხური სიჩქარე 1 წთ-ის გავლის შემდეგ გახდება 60 ბრ/წთ.

§49. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. ძირითადი ცნებები. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

49.1. დაადგინეთ არე, რომელზედაც შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები:

1) $y''=\sin y'+e^{-x^2y}$; 2) $y''=x+\sqrt{x^2-y'}$; 3) $y''=y'\ln y'$; 4) $y''=\sqrt{y}$

49.2. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მითითებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

1) $y=C_1x+C_2,\quad y''=0$; 2) $y=\ln\dfrac{1}{x+C_1}+C_2,\quad y''=y'^2$;

3) $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3,\ xy'''=2$; 4) $y=\frac{1}{2}(x^2+1),\quad 1+y'^2=2yy''$.

შეისწავლეთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოკიდებულების საკითხი (№№49.3; 49.4):

49.3. 1) $x+2,\ x-2$; 2) $1,\ x,\ x^2$; 3) $6x+9,\ 8x+12$; 4) $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8$.

49.4. 1) $x,\ \ln x$; 2) $e^{-x},\ xe^{-x}$; 3) $\sin 2x,\ \sin x\cos x$; 4) $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$.

2. განტოლება, რომელიც ამოიხსნება რიგის დაწევით

ამოხსენით განტოლება (49.5-49.10):

49.5. 1) $y''=x+\sin x$; 2) $y''=x-\cos 2x$; 3) $y''=x^2-e^{-x}$; 4) $y''=\sin 2x-e^{2x}$.

49.6. 1) $y''=\dfrac{1}{x}$; 2) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 3) $y''=\dfrac{1}{\sin^2 2x}$; 4) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.

49.7. 1) $y'''=\cos 2x$; 2) $y'''=x+\cos x$; 3) $y'''=x-e^x$;

4) $y'''=1-\sin x$; 5) $y'''=\dfrac{\ln x}{x^2}$; 6) $y'''=2x\ln x$.

49.8. 1) $xy''=y'$; 2) $y''+2xy'^2=0$; 3) $x^2y''=y'^2$; 4) $y''\cdot\operatorname{tg}x-y'=0$.

49.9. 1) $xy''=(1+2x^2)y'$; 2) $y''\cdot x\ln x=y'$; 3) $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$;

4) $xy''-y'=y'\ln\dfrac{y'}{x}$; 5) $xy''-3y'=x^2$; 6) $y''+\dfrac{2x}{1-x^2}y'=x^2-1$.

49.10. 1) $y'''=(y'')^2$; 2) $x\cdot y'''-y''=0$;
3) $xy'''+y''=x+1$; 4) $y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg}x$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№49.11; 49.12):

49.11. 1) $y'''=\dfrac{6}{x^3}$, $y(1)=2,\ y'(1)=1,\ y''(1)=1$; 2) $y''=4\cos 2x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

3) $y'''=e^{-x},\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$; 4) $y''=xe^x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

49.12. 1) $xy''=y',\ y(0)=0,\ y'(1)=1$; 2) $(1+x^2)y''-2xy'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$;

3) $y''=\dfrac{y'}{x}\left(1+\ln\dfrac{y'}{x}\right),\quad y(1)=\dfrac{1}{2},\quad y'(1)=1$;

4) $y''(1+\ln x)+\dfrac{1}{x}y'=2+\ln x,\quad y(1)=\dfrac{1}{2},\quad y'(1)=1$.

3. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (№№49.13-49.20):

49.13. 1) $y''-5y'+6y=0$; 2) $y''+3y'-4y=0$;

3) $2y''-5y'+2y=0$; 4) $2y''+5y'-7y=0$.

49.14. 1) $y''+3y'=0$; 2) $2y''-5y'=0$; 3) $y''-16y=0$; 4) $9y''-25y=0$.

49.15. 1) $y''-6y'+9y=0$; 2) $y''+4y'+4y=0$;
3) $4y''+4y'+y=0$; 4) $4y''-12y'+9y=0$.

49.16. 1) $y''+y=0$; 2) $y''+49y=0$; 3) $4y''+9y=0$; 4) $25y''+16y=0$.

49.17. 1) $y''-6y'+13y=0$; 2) $y''+2y'+5y=0$;
3) $4y''+8y'+13y=0$; 4) $9y''-30y'+29y=0$.

49.18. 1) $y'''-4y''+3y'=0$; 2) $y'''-2y''-y'+2y=0$;
3) $y'''-2y''+y'=0$; 4) $y'''-3y'-2y=0$.

49.19. 1) $y'''-8y=0$; 2) $y'''-y''+4y'-4y=0$; 3) $y'''-3y''+3y'-y=0$; 4) $y'''-3y'+2y=0$.

49.20. 1) $y^{IV}-16y=0$; 2) $y^{IV}-5y''+4y=0$;
3) $y^{IV}+3y''-4y=0$; 4) $y^{IV}-8y'''+22y''-24y'+9y=0$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№49.21; 49.22):

49.21. 1) $y''-3y'+4y=0,\ y(0)=5,\ y'(0)=8$;
2) $y''+2y'=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;
3) $y''-2y'+y=0,\quad y(2)=1,\ y'(2)=-2$;
4) $y''-10y'+25y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=8$.
5) $y''+4y=0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$;
6) $y''+2y'+5y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$.

49.22. 1) $y'''+y'=0,\quad y(0)=2,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1$;
2) $y^{IV}-y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1,\ y'''(0)=1$;
3) $y^{V}-y'=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=1,\ y^{IV}(0)=2$;
4) $y''+4y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=2$.

4. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (№№49.23-49.31):

49.23. 1) $y''-y'-12y=12$; 2) $y''+2y'+y=-2$;
3) $y''-5y'+6y=6x+1$; 4) $y''+4y=4x-8$.

49.24. 1) $y''+y'-2y=6x^2$; 2) $y''-4y'+5y=10x^2-16x-1$;
3) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$; 4) $y''+4y=4x^3-14x+4$.

49.25. 1) $y''-3y'=6$; 2) $2y''-3y'-6=0$; 3) $y''+8y'=8x$;
4) $7y''-y'=14x$; 5) $y''-2y'=x^2-1$; 6) $2y''+y'=3x^2+10x-4$.

49.26. 1) $y''-2y'-3y=e^{4x}$; 2) $y''-y=e^{-x}$; 3) $y''+4y'+4y=xe^{2x}$; 4) $y''-y'-2y=(1-2x)e^{x}$.

49.27. 1) $y''+4y'+3y=9e^{-3x}$; 2) $y''+y'-2y=3xe^{x}$;
3) $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$; 4) $y''-2y'+y=6xe^{x}$.

49.28. 1) $y''-3y'+2y=\sin x$; 2) $y''-2y'+2y=-\sin x-3\cos x$;

3) $4y''+8y'=x\sin x$; 4) $y''-3y'+2y=x\cos x$.

49.29. 1) $y''-y'=e^x\sin x$; 2) $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x)$;
3) $y''+y=4x\cos x$; 4) $y''+y=\cos x$.

49.30. 1) $y''-y=2e^x-x^2$; 2) $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$;
3) $y''+2y'+2y=(5x+4)e^x+e^{-x}$; 4) $y''+2y'+5y=4e^{-x}+17\sin 2x$.

49.31. 1) $y'''-3y''+3y'-y=e^x$; 2) $y^{IV}-81y=27e^{-3x}$;
3) $y'''+2y''+y'=2x+e^x$; 4) $y^{V}+y'''=x+2e^{-x}$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№49.32; 49.33):

49.32. 1) $y''-y=4e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
2) $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$, $y(0)=1$, $y'(0)=3{,}2$;
3) $y''+4y=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;
4) $y''-2y'=e^{2x}+x^2-1$, $y(0)=\frac{1}{8}$, $y'(0)=1$.

49.33. 1) $y'''+2y''+y'=-2e^{-2x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=1$;
2) $y'''-y'=-2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$;
3) $y'''-y'=6-3x^2$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$;
4) $y^{IV}-y=8e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=4$, $y'''(0)=1$.

§50. ამოცანები მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენებაზე

50.1. წერტილი მოძრაობს წრფივად მუდმივი a სმ/წმ² აჩქარებით. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება (განვლილი გზის დროზე დამოკიდებულება), თუ დროის საწყის მომენტში სიჩქარეა v_0, ხოლო განვლილი მანძილია s_0.

მითითება. პირობით $s''=a$. ამ განტოლების ამონახსნია

$$s=\frac{at^2}{2}+c_1t+c_2.$$

50.2. სხეული მოძრაობს წრფივად აჩქარებით $a=6t-4$. დაადგინეთ განვლილი მანძილის დროზე დამოკიდებულება (მოძრაობის განტოლება), თუ დროის საწყის $t=0$ მომენტში განვლილი მანძილია $s_0=0$, ხოლო სიჩქარეა $v_0=4$ მ/წმ.

50.3. წრფივად მოძრავი სხეულის აჩქარებაა $w=t^2+1$. დაადგინეთ სხეულის მოძრაობის კანონი, თუ დროის $t=1$ წმ მომენტში მას განვლილი ჰქონდა $s=1$ მ მანძილი და მისი სიჩქარე იყო $v=2$ მ/წმ.

50.4. ზევით ასროლილი სხეულის აჩქარება მუდმივია და 9 მ/წმ²-ის ტოლია. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლე-

ბა, თუ დროის საწყის $t=0$ მომენტში სიჩქარე $v=v_0$, ხოლო განვლილი მანძილი $s=0$.

50.5. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ვერტიკალურად ზემოთ $v_0=1$ მ/წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაღწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

50.6. იპოვეთ $y''+2y'+2y=0$ განტოლების ის ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (0;1) წერტილზე და ამ წერტილში ეხება $y=x+1$ წრფეს.

მითითება. $y''+2y'+2y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

ამოცანის პირობით, როცა $x=0$, მაშინ $y=1$ და $y'=1$. ამ მონაცემების გათვალისწინებით მივიღებთ $c_1=1$, $c_2=2$.

50.7. იპოვეთ $y''-4y'+3y=0$ განტოლების ის ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (0;2) წერტილზე და ამ წერტილში ეხება $y=x+2$ წრფეს.

50.8. m მასის მქონე მოტორიან ნავს, რომელიც მოძრაობს სიჩქარით $v_0=5$ მ/წმ, გამოურთეს მოტორი. მოძრაობის დროს ნავზე მოქმედებს წყლის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც მოძრაობის სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია, ამასთან პროპორციულობის კოეფიციენტია $\frac{m}{50}$. რა დროის შემდეგ შემცირდება ნავის სიჩქარე ორჯერ და რა მანძილს გაივლის ნავი ამ დროში?

მითითება. ამოცანის პირობით

$$ms''=-\frac{m}{50}\left(s'\right)^2$$

გვაქვს მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება. დავწიოთ მისი რიგი. დავუშვათ $s'=z$, მაშინ

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{50}z^2 \quad \text{ანუ} \quad \frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{50}dt\,,$$

აქედან მივიღებთ $z=\frac{50}{t+50c_1}$. გავითვალისწინოთ პირობა $v_0=5$. მივიღებთ $c_1=\frac{1}{5}$. ამრიგად $z=\frac{50}{t+10}$, ანუ

$$v=s'=\frac{50}{t+10}\,,$$

აქედან $s=50\ln\left(t+10\right)+c_2$.

პირობით $s=0$, როცა $t=0$. ამიტომ $c_2=-50\ln 10$, საიდანაც გვაქვს

$$s=50\ln\frac{t+10}{10}.$$

ეს არის ნავის მოძრაობის განტოლება.

ახლა ვუპასუხოთ ამოცანის კითხვებს. თუ $v=\frac{v_0}{2}=2,5$, მაშინ $2,5=\frac{50}{t+10}$. აქედან $t=10$ წმ. ამ დროში ნავი გაივლის $s=50\ln 2$ მანძილს.

50.9. ვიპოვოთ ვერტიკალურად ვარდნილი სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ ვარდნის დროს მასზე სიმძიმის ძალასთან ერთად მოქმედებს ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულის სიჩქარის კვადრატისა, პროპორციულობის კოეფიციენტია k.

მითითება. ამოცანის პირობით

$$ms''=mg-k\left(s'\right)^2$$

50.10. m მასის მქონე სხეული მიიზიდება უძრავი O წერტილის მიერ. ამასთან მიზიდულობის ძალა პროპორციულია სხეულის m მასის და სხეულის O წერტილიდან დაშორების, ისე, რომ პროპორციულობის კოეფიციენტია w^2. დაადგინეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება.

მითითება. ამოცანის პირობით

$$mx''=-w^2mx.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$x=c_1\cos wt+c_2\sin wt.$$

50.11. უძრავ წერტილზე დამაგრებულ ზამბარაზე დაკიდებულია ტვირთი. ზამბარა შეკუმშეს ისე, რომ უძრავი წერტილიდან ტვირთის x დაშორება გახდა b-ს ტოლი და შემდეგ გაანთავისუფლეს. ტვირთმა დაიწყო ვარდნა ისე, რომ მისი აჩქარება გახდა $-p^2s$, სადაც p მუდმივია. დაადგინეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება.

მითითება. ამოცანის პირობით

$$s''=-p^2s.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$s=c_1\sin pt+c_2\cos pt.$$

რადგან საწყის $t=0$ მომენტში $s=b$ და $v=s'=0$, ამიტომ $c_1=0$ და $c_2=b$. ამრიგად, მოძრაობის განტოლებაა

$$s=b\cos pt.$$

მწკრივები

§51. რიცხვთა მწკრივები

შეადგინეთ მწკრივის კერძო ჯამი S_n და გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი (№№51.1; 51.2):

51.1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

51.2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3\cdot 3^n}{6^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^{n+1}}$.

შეამოწმეთ შესრულებულია თუ არა მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა (№№51.3; 51.4):

51.3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

51.4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

შედარების ნიშნების გამოყენებით შეისწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№51.5-51.7):

51.5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$.

51.6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

51.7. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n^3+1}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$.

კოშის ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№51.8; 51;9):

51.8. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{3^{n}}$.

51.9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{5}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^3}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№51.10; 51.11):

51.10. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n^2\cdot 2^{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{n!}$.

51.11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n\cdot 5^{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n}}{3^{n}(n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{2^{n}n!}$.

კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№51.12; 51.13):

51.12. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+5}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

51.13. 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\left(\ln^4 n+1\right)}$.

შეისწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№51.14; 51.15):

51.14. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3}{1+n^4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,01}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{n}(n+1)}{n^{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln^2 n}$.

51.15. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)n^2(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+5\right)\ln n}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-3\right)\ln^2 n}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-1\right)\ln n}$.

შეისწავლეთ ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№51.16; 51.17):

51.16. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

51.17. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}tg\frac{\pi}{n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+\sin^2 n}$.

51.18. იპოვეთ მოცემული ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივის ჯამი ε სიზუსტით:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, ε=0,01; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}$, ε=0,1;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, ε=0,01; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!}$, ε=0,001.

51.19. შეისწავლეთ მწკრივების პირობით და აბსოლუტურად კრებადობის საკითხი:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+\cos^2 n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}tg\frac{1}{n}$.

§52. ხარისხოვანი მწკრივები

იპოვეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი და კრებადობის არე (№№52.1-52.3):

52.1. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.

52.2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

52.3. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{\sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}n2^n x^n$

52.4. იპოვეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე და ჯამი:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n)x^{n-1}}{2^{n-1}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$

52.5. გამოთვალეთ რიცხვითი მწკრივის ჯამი:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n4^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

გაშალეთ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად და იპოვეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის არე (№№52.6; 52.7):

52.6. 1) $f(x)=2^x$; 2) $f(x)=e^{3x}$; 3) $f(x)=\cos 5x$; 4) $f(x)=\sin x^2$.

52.7. 1) $f(x)=e^{-x^4}$ 2) $f(x)=\cos\frac{2}{3}x^3$; 3) $f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$.

52.8. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად x_0 წერტილის მიდამოში და იპოვეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის არე:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$; 4) $f(x)=\frac{1}{3+x}$, $x_0=-2$.

პასუხები

§1

1.1. 1) მართებულია; 2) არა; 3) მართებულია; 4) არა. **1.2.** 1) მართებულია მეორე; 2) ორივე. **1.3.** 1) $A \cup B = \{-3;-2;0;1;2;3;4;5\}$, $A \cap B = \{0;3\}$, $A \setminus B = \{-3;2;5\}$; 2) $A \cup B = \{-8;-4;-3;1;5;7;8\}$, $A \cap B = \{1;5\}$, $A \setminus B = \{-8;-4;7;8\}$; 3) $A \cup B = [-5;4]$, $A \cap B = [1;2]$, $A \setminus B = [-5;1[$; 4) $A \cup B = [0;7]$, $A \cap B = [1;7[$, $A \setminus B = [0;1[$ **1.4.** 1) $A = \{0;2\}$; 2) $A = \{-2;5\}$; 3) $A = \{1;2;3\}$; 4) $A = \{0;1;2\}$; 5) {2,4,6,8,10}; 6) {1,2,3,4,6,8,12,24}. **1.6.** 6. **1.7.** 50. **1.8.** 26. **1.10.** 1) ჭეშმარიტია; 2) მცდარია; 3) ჭეშმარიტია; 4) მცდარია. **1.11.** 1) $\min E=-2$, $\sup E=5$; 2) $\inf E=-\infty$, $\max E=-3$; 3) $\max E=1$, $\inf E=0$; 4) $\sup E=1$, $\min E=\frac{1}{2}$.

§2

2.1. 1) $\frac{x}{y(3x-4y)}$; 2) $-\frac{x}{y}$; 3) $\frac{x-2}{x+2}$; 4) $\frac{1-x}{3}$. **2.2.** 1) $\frac{x}{x-y}$; 2) $\frac{5(2a-3b)}{2a+3b}$; 3) $\frac{a-b}{2(a+b)}$; 4) $\frac{m+n}{3(m-n)}$. **2.3.** 1) $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$; 2) $\frac{p^2+pq+q^2}{p+q}$; 3) $\frac{2(x^2+xy+y^2)}{5(x+y)}$; 4) $\frac{m-n}{2(m^2-mn+n^2)}$. **2.4.** 1) $\frac{6ax+19a}{x^2-9}$; 2) $\frac{6x-4}{x^2-4}$; 3) $\frac{2ma+m}{1-a^2}$; 4) $\frac{2}{a+2}$. **2.5.** 1) $\frac{12a}{1-a^3}$; 2) $\frac{2(2a^2-7ab-3b^2)}{(a-b)^2(a+b)^2}$; 3) $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$; 4) $\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$. **2.6.** 1) $3-x^2$; 2) $\frac{x+a}{x-a}$; 3) $\frac{ax}{x^2-a^2}$; 4) $-m$. **2.7.** 1) $\frac{b+a}{b-a}$; 2) $\frac{4a}{3(a-4)}$; 3) $\frac{a(n-a)}{n+a}$; 4) $\frac{b}{2(3b-2a)}$. **2.8.** 1) $x(x-a)$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) -1; 4) $\frac{2b^{2n}}{a^n(b^{2n}-a^{2n})}$. **2.9.** 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) $\sqrt{2}$ **2.10.** 1) 1; 2) $-\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 5.

§3

3.1. $x=-7$. **3.2.** $y=4$. **3.3.** 7. **3.4.** 12. **3.5.** (-2;0), (4;0), (0;0), (-3;0). **3.6.** (0;-3), (0;-4), (0;0), (0;5). **3.7.** (-4;3), (0;4), (2;-3), (3;0). **3.8.** (-5;-1), (3;-5), (4;0), (0;7). **3.9.** (-7;-1), (4;0), (5;2), (0;-6). **3.10.** (2;5), (-6;-4), (1;-3), (-4;2). **3.11.** (-1;4), (4;-2), (0;-2), (6;5). **3.12.** 1) პირველს ან მესამეს; 2) მეორეს ან

მეოთხეს; 3) პირველს ან მესამეს; 4) მეორეს ან მეოთხეს; 5) პირველს, მეორეს ან მეოთხეს; 6) მეორეს, მესამეს ან მეოთხეს. **3.13.** 1) 10; 2) 7; 3) 8; 4) 2; 5) 5; 6) 13; 7) 13; 8) 5. **3.14.** 1) (-3;-4). **3.15.** 1) (2;4). **3.16.** 1) (3;-2). **3.17.** 1) (7;-4). **3.18.** A წერტილის გეგმილების კოორდინატებია (-4;0;0), (0;2;0) და (0;0;-1). B წერტილის გეგმილების კოორდინატებია (3;0;0), (0;-1;0) და (0;0;1). **3.19.** A წერტილის გეგმილების კოორდინატებია (2;-3;0), (2;0;1), (0;-3;1); B წერტილის გეგმილების კოორდინატებია (-4;2;0), (-4;0;0) და (0;2;0). **3.20.** (-3;1;-2), (2;0;1), (3;5;-2), (-1;-3;2). **3.21.** (4;2;-1), (-4;-1;-1), (0;2;1), (4;-1;2). **3.22.** (-3;-2;1), (4;-5;-2), (-3;2;1), (2;1;0). **3.23.** (-4;-3;-2), (4;1;3), (1;0;-2), (2;-1;-3). **3.24.** (-2;5;-1), (2;-3;2), (0;3;-3), (-4;-2;-1). **3.26.** $\left(3;\frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2;\frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$. **3.27.** 1) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, (0;4), (7;0), $\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$, (3;0), $\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $(5;\pi)$.

§4

4.1. 1) $-1-2i$, $5-4i$; 2) $2+2i$, $4-2i$; 3) $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{3}\,i$; 4) $-2-4i$, $2-4i$. **4.2.** 1) $3+i$, $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$; 2) 10, $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$; 3) $-8-6i$, $-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$; 4) $3-3\sqrt{5}\,i$, $\frac{7}{9}+\frac{\sqrt{5}}{9}i$. **4.3.** 1) 0; 2) 0; 3) $-2-9i$; 4) $-i$. **4.4.** 1) $11+3i$; 2) 125; 3) $-\frac{27}{17}-\frac{11}{17}i$; 4) 0. **4.5.** 1) $\left(\frac{13}{5};\frac{1}{5}\right)$; 2) $\left(\frac{17}{7};-\frac{13}{7}\right)$. **4.6.** 1) $z=-\frac{3}{2}(1+2i)$; 2) $z=i$. **4.7.** 1) 1; $-\frac{\pi}{2}$; 2) $\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$; 3) 2; $-\frac{2\pi}{3}$; 4) 2; $\frac{5\pi}{6}$. **4.8.** 1) $3(\cos 0°+i\sin 0°)$; 2) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 3) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; 4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 6) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **4.9.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $6\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$; 3) $4\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)$; 4) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 6)

$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. **4.10.** 1) $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ 2) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 3) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ 4) $\sqrt{5}e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$. **4.11.** 1) -2^{10}; 2) 2^{20}; 3) $-2^{19}+2^{19}\sqrt{3}\,i$; 4) $(\sqrt{2}+1)(1+i)$. **4.12.** 1) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$; 2) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]+i\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]$, $k=0,1,2,3$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k=0,1$; 4) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+$ $+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k=0,1$; 5) $\cos\left[(4k+1)\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[(4k+1)\frac{\pi}{6}\right]$, $k=0,1,2$; 6) $\cos\left[(4k-1)\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[(4k-1)\frac{\pi}{6}\right]$, $k=0,1,2$; 7) $\sqrt[4]{2}\cos\left[(8k+1)\frac{\pi}{8}\right]+$ $+i\sin\left[(8k+1)\frac{\pi}{8}\right]$, $k=0,1$; 8) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi+8k\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)$, $k=0,1,2$;

9) $\sqrt[8]{2}\left(\cos(8k-1)\frac{\pi}{16}+i\sin(8k-1)\frac{\pi}{16}\right)$, $k=0,1,2.3$;

10) $\sqrt{2}\left\{\cos\left[(6k+1)\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[(6k+1)\frac{\pi}{6}\right]\right\}$, $k=0,1$. **4.13.** 1) $\pm 2i$; 2) $\pm 1{,}5i$; 3) $-1\pm 2i$; 4) $2\pm 3i$; 5) $\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$; 6) $\frac{5}{2}\pm\frac{5}{2}i$; 7) $-2+i$, $-3+i$; 8) $1-i$, $2-i$; 9) $\pm i$; ± 2; 10) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$; 11) 2, $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 12) $\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$.

§5

5.1. 1) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 5\\ -3 & -5 & 10\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ 11 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 8\\ -7 & 2\end{pmatrix}$.

5.2. 1) $\begin{pmatrix}-8 & -4 & 0\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}11 & -2 & 6\\ -1 & 5 & -5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ -3 & 4 & 7\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$. **5.3.** 1) $\begin{pmatrix}4 & -5 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}5 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -8\\ 9 & -7 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 7 & -17 & -2 \\ -12 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 11 & -11 & 4 \\ -6 & 6 & -5 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **5.4.** 1) $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -7 \\ 19 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 10 & -4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 28 & -13 \\ 10 & 4 \\ 18 & -17 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 10 & -11 & -12 \\ -10 & 7 & -26 \\ -22 & 19 & -16 \end{pmatrix}$. **5.5.** 1) $\begin{pmatrix} 37 & 9 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ -4 & 9 & 3 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 51 & 7 & 24 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 4 & 21 \end{pmatrix}$. **5.6.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$. **5.7.** 1) 10; 2) 17; 3) −13; 4) −4; 5) $\sin(\alpha-\beta)$; 6) $\cos(\alpha+\beta)$. **5.8.** 1) 44; 2) 6; 3) 63; 4) −139; 5) 25; 6) −19; 7) $4a^3$; 8) $-x^3-x$. **5.9.** 1) 2; 2) 72; 3) 0; 4) 44; 5) 75; 6) 0. **5.10.** 1) $-\frac{1}{6}$; $\frac{3}{2}$; 2) 2; 0,5; 3) 0; 4) -9; 2. **5.11.** 1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 15 & -1 & -3 \\ -5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **5.12.**

1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -13 & 8 & 14 \\ 16 & -10 & -17 \\ \frac{25}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 11 & 13 & -10 \\ -13 & -16 & 12 \\ -12 & -14 & 11 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

§6

6.1. 1) $x=1$; $y=-1$, 2) $x=2$; $y=3$, 3) $x=1$; $y=-1$, 4) $x=-1$; $y=1$, 5) $x=0$; $y=0$, 6) $x=0$; $y=0$. **6.2.** 1) $x=1$; $y=2$; $z=1$, 2) $x=1$; $y=1$; $z=1$, 3) $x=1$; $y=1$; $z=1$, 4) $x=-1$; $y=-1$; $z=-1$. **6.3.** 1) $x=0$; $y=0$; $z=0$, 2) $x=0$; $y=0$; $z=0$; 3) $x=0$; $y=0$; $z=0$; 4) $x=0$; $y=0$; $z=0$. **6.4.** 1) $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=2$, 2) $x_1=3$; $x_2=-2$; $x_3=0$; 3) $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=1$; 4) $x_1=-1$; $x_2=-1$; $x_3=-1$. **6.5.** 1) $x_1=2$; $x_2=1$, 2) $x_1=1$; $x_2=2$, 3) $x_1=2$; $x_2=1$,

4) x_1=-1; x_2=-1. **6.6.** 1) x_1=4; x_2=0; x_3=−1, 2) x_1=−1; x_2=1; x_3=1, 3) x_1=−2; x_2=2; x_3=0, 4) x_1=−7; x_2=−11; x_3=8. **6.7.** 1) თავსებადია, 2) არათავსებადია, 3) არათავსებადია, 4) თავსებადია. **6.8.** 1) $x_1=\frac{19}{3}+x_3$; $x_2=-\frac{14}{15}+\frac{2}{5}x_3$; x_3-ნებისმიერია. 2) x_1=0,5+0,5x_3; x_2=-0,5+1,5x_3; x_3-ნებისმიერია, 3) $x_1=-\frac{5}{7}x_3$; $x_2=\frac{11}{7}x_3$; x_3-ნებისმიერია, 4) $x_1=-\frac{1}{3}x_3$; $x_2=\frac{5}{3}x_3$; x_3-ნებისმიერია.

§7

7.3. $5\sqrt{10}$. **7.4.** 12. **7.5.** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$=13. **7.6.** 5. **7.7.** 7. **7.8.** 7. **7.9.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) −2. **7.10.** $3\sqrt{3}$ ან $-3\sqrt{3}$; **7.11.** 1) (-2;-1;2); 2) 4;-3;6); 3) 2;-4;8); 4) (18;-11;22). **7.12.** 1) (−15,6,12); 2)(33,-16,-8); 3) $\left(-18,\frac{13}{2},19\right)$; 4) (13,-8,8).

7.13. $\vec{AB}$ (1;-3;3), $\vec{BA}$ (-1;3;-3). **7.14.** A(5;6;4). **7.15.** 1) (-3;-4;1); 2) (-2;6;1); 3) (5;-2;-2); 4) (-5;2;2); 5) (-2;6;1); 6) (-36;18;13). **7.16.** 1) (1;7;4);2)(-5;3;5); 3) (6;4;-1); 4) (-4;10;9); 5) (-11;-1;6); 6) (22;-36;-37). **7.17.** 1) კოლინეარულია; 2) არაკოლინეარულია. **7.18.** $\lambda=-\frac{3}{4}$. **7.19.** $\alpha=-\frac{4}{3}$, β=−3.

§8

8.1. 5. **8.2.** −6. **8.3.** 1) $6\sqrt{3}$; 2) 16; 3) 25+12$\sqrt{3}$; 4) 25+12$\sqrt{3}$; 5) 54-60$\sqrt{3}$; 6) 75+60$\sqrt{3}$. **8.4.** 1) −3; 2) 9; 3) 4; 4) 7; 5) 19; 6) 49. **8.5.** $\frac{\pi}{4}$. **8.6.** $\frac{\pi}{3}$. **8.7.**-2. **8.8.** 1. **8.9.** 6. **8.10.** 6. **8.11.** 1) −2; 2) −1; 3) 7; 4) 2. **8.12.** 1) 7; 2) 1; 3) −1; 4) 6. **8.13.** −6. **8.14.** −32. **8.15.** 1) −11; 2) 87. **8.16.** 1) $|\vec{a}|$=7, $\cos\alpha=\frac{3}{7}$; $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$; 2) $|\vec{a}|$=6, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $|\vec{a}|$=6, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; $\cos\beta=-\frac{5}{6}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{6}$; 4) $|\vec{a}|$=7, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$.

8.17. 1) $-\frac{6}{7}\vec{i}+\frac{2}{7}\vec{j}-\frac{3}{7}\vec{k}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$. **8.18.** 1) $\arccos\frac{8}{21}$; 2) $\arccos\left(-\frac{7}{18}\right)$; 3) $\arccos\frac{5}{21}$; 4) $\arccos\frac{8}{21}$. **8.19.** π-$\arccos\frac{8}{\sqrt{70}}$. **8.20.** $\arccos\frac{19}{21}$. **8.21.** 1) $\alpha=-6$; 2) $\alpha=-4$. **8.22.** 6. **8.23.** 4. **8.24.** –4. **8.25.** $\frac{9\sqrt{34}}{34}$.

§9

9.1. 1) მარცხენა; 2) მარჯვენა; 3) მარცხენა; 4) მარცხენა. **9.2.** 1) 6. 2) 15; 3) 9; 4) 20. **9.3.** 1) 16; 2) $6\sqrt{3}$. **9.4.** 1) ±30; 2) $\pm15\sqrt{2}$. **9.5.** 1) 24; 2) 60. **9.6.** 1) 3; 2) 27; 3) 300; 4) 127. **9.7.** 1) $2(\vec{k}-\vec{i})$; 2) 4; 3) –12; 4) 0. **9.8.** 1) $3\vec{i}-6\vec{k}$; 2) $-8\vec{i}-12\vec{j}-\vec{k}$; 3) $-5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$; 4) $5\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k}$. **9.9.** 1) $10\vec{i}+2\vec{j}+14\vec{k}$; 2) $20\vec{i}+4\vec{j}+28\vec{k}$ **9.10.** 1) –7; 2) –21. **9.11.** 1) კომპლანარულია; 2) არაკომპლანარულია; 3) არაკომპლანარულია; 4) კომპლანარულია. **9.12.** 1) მდებარეობს; 2) არ მდებარეობს; 3) მდებარეობს; 4) არ მდებარეობს.

§10

10.1. 1) 5; 2) 13; 3) 7; 4) 10. **10.2.** $|AB|=10$, $|AC|=\sqrt{61}$, $|BC|=\sqrt{5}$. **10.3.** $\sqrt{19}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$. **10.6.** 1) (1;-1); 2) $\left(\frac{7}{2};-2;1\right)$. **10.7.** 1) (5;6), 2) (-5;-5;5). **10.8.** (6;0). **10.9.** $\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$, (-1;1), $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$. **10.10.** (2;-1), (3;1). **10.11.** 1) $\frac{8}{3}$; 2; 2) $\frac{154}{3}$; 11. **10.12.** $5\sqrt{3}$. **10.13.** 31. **10.14.** 13. **10.15.** (2;11;7). **10.16.** (-4;3;4). **10.17.** 15; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. **10.18.** 28; $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$; $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{2}{7}$.

§11

11.1. 1) M_1, M_3, M_4 წერტილები მდებარეობენ წრფეზე, ხოლო M_2, M_5, M_6 არ მდებარეობენ. **11.2.** 3; -3; 0; -12. **11.3.** 1; -2; -5; 7. **11.4.** (3;0).

11.5. (6;0), (0;-4). **11.6.** 1) $a=-2$; 2) $a=\pm3$; 3) $a=1$ და $a=\frac{5}{3}$. **11.7.** ა) $a=2$; ბ) $a=-3$. **11.8.** 1) (2;2); 2) (-2;3); 3) (3;-5); 4) (-1;1). **11.9.** $A(2;-1)$, $B(5;-5)$, $C(2;-4)$. **11.10.** 1) $3x-y-2=0$; 2) $4x+4y-3=0$; 3) $2x-y=0$; 4) $y+3=0$. **11.11.** 1) $k=5$, $b=3$; 2) $k=-\frac{2}{3}$, $b=2$; 3) $k=0$, $b=3$; 4) $k=-\frac{3}{2}$, $b=0$. **11.12.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{8}=1$; 3) $\frac{x}{4,5}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{0,2}+\frac{y}{0,5}=1$. **11.13.** 1) 12; 2) 7. **11.14.** 1) $2x-3y+5=0$; 2) $x+3=0$; 3) $y+1=0$; 4) $6x-5y+10=0$. **11.15.** 1) $x-y+2=0$; 2) $3x-y-3=0$; 3) $x-3=0$; 4) $5x-2y=0$. **11.16.** 1) $x+y-1=0$; 2) $x-2=0$; 3) $x-2y=0$; 4) $y-1=0$. **11.17.** 1) 7; 2) $-\frac{3}{2}$. **11.18.** (3;-1). **11.19.** (4;-5). **11.20.** $x-16y+13=0$ (AB); $4x+5y-6=0$ (AC); $5x-y-22=0$ (BC). **11.21.** $x+2y-3=0$ (AC); $2x-y-6=0$ (BD). **11.22.** $7x-2y-49=0$ (AN); $x-3=0$ (BM); $x-3y+4=0$ (CP). **11.23.** 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-2=0$. **11.24.** $x-5=0$. **11.25.** $3x-2y+19=0$. **11.26.** 1) პარალელურია; 2) არაპარალელურია; 3) არაპარალელურია; 4) პარალელურია; 5) პარალელურია; 6) არაპარალელურია. **11.27.** 1) პერპენდიკულარულია; 2) არ არიან პერპენდიკულარული; 3) არ არიან პერპენდიკულარული; 4) პერპენდიკულარულია; 5) პერპენ-დიკულარულია; 6) პერპენდიკულარულია. **11.28.** 1) $x-2y+4=0$; 2) $3x+y-4=0$; 3) $2x+3y-7=0$; 4) $3x+4y+26=0$; 5) $x+1=0$; 6) $y-3=0$. **11.29.** 1) $x+3y-8=0$; 2) $2x-y-8=0$; 3) $x+y-4=0$; 4) $6x+y-11=0$; 5) $y-5=0$; 6) $6x-1=0$. **11.30.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) arctg8; 7) $\arccos\frac{24}{25}$; 8) $\arccos\frac{7}{\sqrt{65}}$. **11.31.** 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{3}{2}$; 6) $\sqrt{5}$. **11.32.** 13. **11.33.** 1) $\frac{11}{2}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{22}{5}$. **11.34.** 40. **11.35.** $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$. **11.36.** 45°; 45°; 90°. **11.37.** $x-3=0$, $y-4=0$. **11.38.** $2x-y+1=0$. **11.39.** 60°; 60°; 60°. **11.40.** $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$. **11.41.** $x-3=0$, $x+y-3=0$, $y=0$. **11.42.** $\frac{10}{\sqrt{13}}$.

§12

12.1. M_1 და M_4 წერტილები მდებარეობენ სიბრტყეზე, ხოლო M_2 და M_3 წერტილები არ მდებარეობენ. **12.2.** $a=5$, $b=-3$, $c=10$. **12.3.** (6;0;0), (0;-12;0), (0;0;8). **12.4.** 1) $2x+4y+5z-7=0$; 2) $5x-y+4z=0$. **12.5.** $7x-2y+2z=0$. **12.6.** 1) $9x-5y-3z-2=0$; 2) $5x-y-4z-51=0$. **12.7.** $7x-4y+2z+41=0$. **12.8.** 1) პარალელურია; 2) პარალელურია; 3) არ

არის პარალელური; 4) პარალელურია. **12.9.** 1) $a=-4,5$; $b=6$; 2) $a=-4$; $b=6$. **12.10.** 1) პერპენდიკულარულია; 2) არ არის პერპენდიკულარული; 3) პერპენდიკულარულია; 4) არ არის პერპენდიკულარული. **12.11.** 1) $a=-26$; 2) $a=2$ და $a=3$. **12.12.** $3x+2y-z=0$. **12.13.** $4x-y+3z-21=0$. **12.14.** 1) $z+5=0$; 2) $y-4=0$; 3) $x+2=0$. **12.15.** 1) $a=3$; 2) $a=1$, $a=4$; 3) $a=6$; 4) $a=0$. **12.16.** 1) $y+4z=0$; 2) $x-2z=0$; 3) $4x-y=0$. **12.17.** 1) $5x-3y+z-2=0$; 2) $2x-y-1=0$. **12.18.** 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) $\arccos\frac{4}{21}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **12.19.** 1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{30}+\frac{z}{-10}=1$; 3) $\frac{x}{10}+\frac{y}{4}+\frac{z}{20}=1$; 4) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-\frac{8}{3}}+\frac{z}{\frac{8}{5}}=1$. **12.20.** 4. **12.21.** 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) $\frac{18}{\sqrt{38}}$. **12.22.** 1. **12.23.** 1) 2; 2) 4.

§13

13.1. 1) $\begin{cases}x+2y+1=0\\5y+z+10=0,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+2y-6=0\\y+3z+9=0,\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+y+1=0\\2y+3z+5=0,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y-1=0\\y+2z+5=0.\end{cases}$ **13.2.** 1) $\begin{cases}x=-t-4\\y=2t+3\\z=5t,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=-2\\y=-3t\\z=t+4.\end{cases}$ **13.3.** 1) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-3}$; 2) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{1}$.
13.4. 1) $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$; 2) $\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$. **13.5.** 1) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{0}$; 2) $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$; 3) $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$. **13.6.** 1) $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}$; 2) $\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-3}$; 3) $\begin{cases}x=2t-4\\y=-t+1\\z=3t-2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=2\\y=-t\\z=5t-1.\end{cases}$
13.7. 1) პარალელურია; 2) პარალელურია. **13.8.** 1) პერპენდიკულარულია; 2) არ არიან პერპენდიკულარული. **13.9.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$. **13.10.** 1) $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$; 2) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$. **13.11.** 1) არ მდებარეობს; 2) მდებარეობს. **13.12.** 1) (0;3;2), $\left(\frac{3}{5};0;\frac{4}{5}\right)$, (1;-2;0); 2)

$(0;2;-3)$, $(3;0;-1)$, $\left(\frac{9}{2};-1;0\right)$; 3) $\left(0;\frac{3}{2};-6\right)$, $(3;0;-12)$, $(-3;3;0)$; 4) $(0;-6;-6)$, $(3;0;12)$, $(1;-4;0)$. **13.13.** 7. **13.14.** 52. **13.15.** $\begin{cases} x = 6t+1 \\ y = -6t-3 \\ z = 3t+2. \end{cases}$ **13.16.** $\begin{cases} x = 6t-5 \\ y = -8t+3 \\ z = 4t-3. \end{cases}$ **13.17.** 1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{6}$; 2) $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{0}$. **13.18.** $B=12$, $C=-3$. **13.19.** 1) $\arcsin\frac{1}{10}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **13.20.** 1) არაპარალელურია; 2) პარალელურია. **13.21.** 1) $m=4$; 2) $m=-12$. **13.22.** 1) $(1;-4;1)$; 2) $(9;1;2)$.

§14

14.1. 1) $x^2+y^2=4$; 2) $(x+3)^2+(y-1)^2=16$. **14.2.** 1) $x^2+(y-2)^2=10$; 2) $(x+2)^2+(y-1)^2=37$. **14.3.** 1) $C(2;-3)$, $R=4$; 2) $C(3;0)$, $R=2$; 3) $C(0;-2)$, $R=4$; 4) $C\left(-\frac{5}{2};4\right)$, $R=1$. **14.4.** 1) $(x-1)^2+(y-3)^2=5$; 2) $(x-2)^2+(y+1)^2=20$. **14.5.** 1) $x^2+y^2=52$; 2) $(x+2)^2+(y-1)^2=10$. **14.6.** 1) მდებარეობს წრეწირზე; 2) მდებარეობს წრეწირის შიგნით; 3) მდებარეობს წრეწირის გარეთ; 4) მდებარეობს წრეწირის შიგნით.

§15

15.1. 1) $a=5$, $b=4$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, $e=\frac{3}{5}$, $x=\pm\frac{25}{3}$; 2) $a=3$, $b=1$, $F_1\left(-2\sqrt{2};0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{2};0\right)$, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $x=\pm\frac{9\sqrt{2}}{4}$; 3) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$, $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 4) $a=3$, $b=4$, $F_1(0;-\sqrt{7})$, $F_2(0;\sqrt{7})$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $y=\pm\frac{16\sqrt{7}}{7}$. **15.2.** 1) $\left(2\sqrt{3};-\frac{3}{2}\right)$ და $\left(2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$. **15.3.** $\left(\frac{10}{3};\sqrt{5}\right)$ და $\left(-\frac{10}{3};\sqrt{5}\right)$. **15.4.** 1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$; 3) $\frac{x^2}{125}+\frac{y^2}{25}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{15}=1$; 5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; 6) $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{64}=1$; 7) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 8)

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$; 9) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$; 10) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$, $\frac{x^2}{180}+\frac{y^2}{36}=1$; 11) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1$; 12) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$; 13) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$. **15.5.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}=1$; 2) $x^2+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{53}=1$; 4) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{64}=1$; 5) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$; 6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$; 7) $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{81}=1$; 8) $\frac{x^2}{63}+\frac{y^2}{144}=1$; 9) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$; 10) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{64}=1$. **15.6.** 1) 20; 2) 32. **15.7.** *A* და *E* მდებარეობენ ელიფსზე. *C* და *D* მის შიგნით, ხოლო *B* და *F* მის გარეთ. **15.8.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$ ელიფსის ზედა ნახევარს; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფსის ქვედა ნახევარს.

§16

16.1. 1) $a=12$, $b=5$, $F_1(-13;0)$, $F_2(13;0)$, $e=\frac{13}{12}$, $y=\pm\frac{5}{12}x$, $x=\pm\frac{144}{13}$; 2) $a=1$, $b=2$, $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, $e=\sqrt{5}$, $y=\pm 2x$, $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$; 3) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{3}$, $F_1\left(-\frac{5}{12};0\right)$, $F_2\left(\frac{5}{12};0\right)$, $e=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{3}{20}$; 4) $a=8$, $b=6$, $F_1(0;-10)$, $F_2(0;10)$, $e=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$, $y=\pm 3{,}6$. **16.2.** $(-4;1)$, $(-4;-1)$. **16.3.** $\left(-4;\sqrt{2}\right)$ და $\left(4;\sqrt{2}\right)$. **16.4.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$; 5) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{17}=1$; 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 7) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$; 8) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{40}=1$; 9) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$; 10) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$; 11) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{300}=1$; 12) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; 13) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}=1$; 14) $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{6}=1$; 15) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$. **16.5.** 1)

$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=-1$; 2) $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{55}-\frac{y^2}{9}=-1$; 4) $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{36}=-1$; 5) $\frac{x^2}{56}-\frac{y^2}{25}=-1$; 6) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=-1$; 7) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=-1$; 8) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{80}=-1$; 9) $\frac{x^2}{192}-\frac{y^2}{64}=-1$; 10) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=-1$; 11) $\frac{x^2}{15}-y^2=-1$; 12) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 13) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{25}=-1$; 14) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=-1$; 15) $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{12}=-1$. **16.6.** 1) 84; 2) 6. **16.7.** 1) 60; 2) 8. **16.8.** 9. **16.9.** 5; 11. **16.10.** 1) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ ჰიპერბოლის ნაწილს მოთავსებულს ქვედა ნახევარსიბრტყეში; 2) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{54}=1$ ჰიპერბოლის ნაწილს მოთავსებულს ზედა ნახევარსიბრტყეში. **16.11.** $x^2-y^2=8$. **16.12.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{200}=1$. **16.13.** $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{18}=1$.

§17

17.1. (3;-6), (3;6). **17.2.** (1;2). **17.3.** 1) $y^2=12x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-20y$. **17.4.** $y^2=16x$, 2) $y^2=-28x$; 3) $x^2=40y$; 4) $x^2=-24y$. **17.5.** 1) $y^2=16x$; 2) $y^2=-32x$; 3) $x^2=12y$; 4) $x^2=-4y$. **17.6.** 1) $y^2=32x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $x^2=\frac{1}{4}y$; 4) $x^2=-20y$. **17.7.** 1) $y^2=x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული ზედა ნახევარსიბრტყეში; 2) $y^2=x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული ქვედა ნახევარსიბრტყეში; 3) $y^2=-x$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული ქვედა ნახევარსიბრტყეში; 4) $x^2=y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარცხენა ნახევარსიბრტყეში; 5) $x^2=y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში; 6) $x^2=-y$ პარაბოლის ნაწილი მოთავსებული მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში; **17.8.** 1) $F(8;0)$, $x+8=0$; 2) $F(-3;0)$, $x-3=0$; 3) $F(0;1)$, $y+1=0$; 4) $F(0;-10)$, $y-10=0$. **17.9.** 1) $3x+4y-27=0$; 2) $4x+3y+4=0$; 3) $5x-12y+27=0$; 4) $3x+4y+5=0$. **17.10.** 1) 9; 2) 8. **17.11.** 1) 10; 2) 7.

§18

18.1. 1) $x^2+y^2+z^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+7)^2=16$. **18.2.** 1) $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=26$; 2) $(x+1)^2+(y-7)^2+(z+2)^2=176$. **18.3.** 1) $(x+1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=14$; 2) $(x-1)^2+y^2+(z-5)^2=9$. **18.4.** 1) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$; 2) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$. **18.5.** $(x-7)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. **18.6.** $C(7;-3;1)$, $R=5$; 2) $C(-5;0;8)$, $R=9$; 3) $C(-2;-3;5)$, $R=1$; 4) $C(-4;3;0)$, $R=5$. **18.7.** მდებარეობს სფეროს

შიგნით. 2) მდებარეობს სფეროზე. 3) მდებარეობს სფეროს გარეთ. **18.8.** 1) იკვეთებიან; 2) არ იკვეთებიან; 3) ეხებიან; 4) იკვეთებიან. **18.9.** 1) იკვეთებიან; 2) ეხებიან; 3) არ იკვეთებიან. **18.10.** $9x-6y+2z-79=0$. **18.11.** (-1;-2;4). **18.12.** 1) ელიფსოიდი; 2) ჰიპერბოლური ცილინდრი; 3) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი; 4) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი; 5) ელიფსური ცილინდრი; 6) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი; 7) ელიფსური პარაბოლოიდი; 8) პარაბოლური ცილინდრი; 9) მეორე რიგის კონუსი. **18.13.** 3; 2; (4;3;0), (4;-3;0), (4;0;2), (4;0;-2). **18.14.** 5; 4; (5;0;2); (-5;0;2). **18.15.** 8; 6; (8;0;-1), (-8;0;-1), (0;6;-1), (0;-6;-1). **18.16.** 3; 2; (3;0;2), (-3;0;2); (0;2;2), (0;-2;2). **18.17.** 10; 6; (4;10;0), (4;-10;0). **18.18.** 6; 4; (6;0;2), (-6;0;2), (0;4;2), (0;-4;2). **18.19.** (0;4;1). **18.20.** 1) ჰიპერბოლა; (-6;0;1), (6;0;1); 2) ჰიპერბოლა; (0;-12;-6), (0;12;-6); 3) პარაბოლა; (0;-12;-6); 4) პარაბოლა; (6;0;1). **18.21.** პარაბოლა. **18.22.** $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
18.23. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. **18.24.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

§19

19.1. 1) $x_n=2n$; 2) $x_n=2n+1$; 3) $x_n=3n-1$; 4) $x_n=n^2$; 5) $x_n=\frac{1}{n}$; 6) $x_n=\frac{n}{n+1}$; 7) $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$; 8) $x_n=n^2+1$. **19.2.** 1) 7,4,1; 2) –5;-10;-20; 3) $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$; 4) 3, $\frac{1}{3}$, 3. **19.3.** 1) მონოტონურია; 2) არ არის; 3) მონოტონურია; 4) არ არის; 5) მონოტონურია; 6) არ არის; 7) არ არის; 8) არ არის. **19.4.** 1) შემოსაზღვრულია ქვემოდან; 2) შემოსაზღვრულია; 3) არ არის შემოსაზღვრული; 4) შემოსაზღვრულია; 5) შემოსაზღვრულია; 6) შემოსაზღვრულია. **19.7.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) –7; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) 4; 5) $-\frac{5}{2}$; 6) -1. **19.8.** 1) 1; 2) –3; 3) -3; 4) –4. **19.9.** 1) 0; 2) 0; 3) $-\infty$; 4) $+\infty$. **19.10.** 1) –2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 0; 4) $+\infty$. **19.11.** 1) 1; 2) 1,8; 3) $-\frac{7}{4}$; 4) –3. **19.12.** 1) 0; 2) 0; 3) $-\infty$; 4) $+\infty$. **19.13.** 1) 1; 2) 6; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **19.14.** 1) –4; 2) –4; 3) 1,8; 4) $\frac{2}{5}$. **19.15.** 1) 1; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 5; 4) 1. **19.16.** 1) 1; 2) –1; 3) 4; 4) 1. **19.17.** 1) 1; 2) –5;

3) $\frac{1}{4}$;4) 12. **19.18.** 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{3}{2}$. **19.19.** 1) 0; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) $+\infty$. **19.20.** 1) e^3; 2) e^{-3}; 3) e^{-15}; 4) $e^{\frac{7}{3}}$. **19.21.** 1) e^3; 2) $e^{\frac{4}{3}}$; 3) e^4; 4) e^{-2}.

§20

20.1. $f(0)=3$, $f(-1)=4$, $f(3)=24$. **20.2.** $g(1)=-5$, $g(-3)=-\frac{3}{7}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1$. **20.3.** $\varphi(3)=-3$, $\varphi(-700)=0$, $\varphi(1,1)=-22$. **20.4.** $F(0)=\frac{7}{3}$; $F(-3)=\frac{1}{81}$; $F(4)=30$. **20.5.** $f(0)=3$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$, $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$. **20.6.** $f(-2)=9$, $f(-3)=-26$, $f(1)=\frac{1}{3}$. **20.7.** 1) $x<1$, $x>1$; 2) $x<2,5$, $x>2,5$; 3) $x<-3$, $-3<x<3$, $x>3$; 4) $x<-4$, $-4<x<3$, $x>3$; 5) $x\geq4$; 6) $x\leq3$; 7) $0\leq x\leq1$; 8) $2<x\leq5$; 9) $x\leq1$; $x\geq3$; 10) $x<1$; $x>3$; 11) $x<-\frac{1}{3}$, $x\geq2$; 12) $x<-3$; $x>-\frac{2}{3}$; 13) $1<x\leq2$; $3\leq x<4$; 14) $1\leq x<2$; $3\leq x<4$; 15) $0<x<1$; $x\geq10$; 16) $1\leq x\leq4$; 17) $-4\leq x\leq4$; 18) $1\leq x\leq3$; 19) $0\leq x\leq1$; 20) $-\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$. **20.8.** 1) $E(y)=[-5;10]$; 2) $E(y)=[-12;3]$; 3) $E(y)=[3;15]$; 4) $E(y)=[-11;-7]$. **20.9.** 1) ლუწია; 2) კენტია; 3) ლუწია; 4) კენტია; 5) ლუწია; 6) არც ლუწია, არც კენტი; 7) ლუწია; 8) ლუწია; 9) არც ლუწია, არც კენტი; 10) კენტია; 11) ლუწია; 12) კენტია; 13) კენტია; 14) კენტია. **20.12.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) π; 4) π. **20.13.** $y=0,5x-1,5$, $x\in[0;5]$. **20.14.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$. **20.17.** 1) $y=\sin^2x$; 2) $y=\sqrt{tg^2x+1}$; 3) $y=\text{arctg}\sqrt{\lg x}$; 4) $y=\sqrt{1+\lg^2(\sin x)}$. **20.18.** 1) $y=u^5$, $u=3x+1$; 2) $y=5^u$, $u=\sin x$; 3) $y=\lg u$, $u=\text{tg}v$, $v=5x$; 4) $y=\sqrt{u}$, $u=x^2$; 5) $y=\lg u$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{x}$; 6) $y=\arccos u$; $u=2^v$, $v=-x^3$.

§21

21.4. 1) 7; 2) 17; 3) $\frac{5}{2}$; 4) -1. **21.5.** 1) $+\infty$; 2) $-\infty$; 3) $+\infty$; 4) $-\infty$. **21.6.** 1) 0; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$. **21.7.** 1) $+\infty$; 2) 0; 3) 0; 4) $+\infty$. **21.8.** 1) 0; 2) 0; 3) $+\infty$;

4) $-\infty$; 5) $-\infty$; 6) $+\infty$. **21.9.** 1) 0; 2) ∞; 3) 0; 4) 0. **21.10.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) -2; 4) $\frac{1}{4}$. **21.11.** 1) 3; 2) 1; 3) 4,5; 4) $-1{,}5$. **21.12.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) 5; 4) $-\frac{1}{5}$. **21.13.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $-\frac{7}{9}$; 4) $-\frac{3}{2}$. **21.14.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) -2; 3) 4; 4) $-\frac{5}{3}$. **21.15.** 1) 3; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) -2; 4) -4. **21.16.** 1) 1; 2) 10,5; 3) 0; 4) 5. **21.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -4; 3) 108; 4) $\frac{1}{4}$. **21.18.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -32; 4) $-0{,}25$. **21.19.** 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **21.20.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) -2. **21.21.** 1) 3; 2) 1,5; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{5}{4}$. **21.22.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **21.23.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) 1. **21.24.** 1) 2; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{m}{n}$; 4) 1. **21.25.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 15. **21.26.** 1) 4; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{4}{3}$. **21.27.** 1) $\frac{9}{5}$; 2) 54; 3) 4; 4) 2. **21.28.** 1) 7; 2) 5; 3) 1; 4) 2; 5) 6; 6) $\frac{1}{2}$. **21.29.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{6}{25}$; 3) 24; 4) $-\frac{1}{2}$. **21.30.** 1) $\cos a$; 2) $-\sin a$; 3) $\frac{1}{\cos^2 a}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 a}$. **21.31.** 1) e^3; 2) e^{-4}; 3) e^2; 4) e^3. **21.32.** 1) e^3; 2) e^4; 3) $e^{-\frac{2}{3}}$; 4) e^6. **21.33.** 1) e^4; 2) e; 3) e^4; 4) e^5. **21.34.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 2; 4) $-\frac{5}{7}$. **21.35.** 1) -2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **21.36.** 1) $\ln\sqrt{3}$; 2) $\frac{3}{2}\ln 2$; 3) $-\frac{1}{3}\ln 5$; 4) $-2\ln 7$. **21.37.** 1) 3; 2) $\frac{3}{4}$; 3) -2; 4) 0. **21.38.** 1) $\frac{2}{\ln 3}$; 2) $-\frac{\ln 2}{2}$; 3) $\frac{\ln 5}{3}$; 4) $-\frac{3\ln 3}{2}$. **21.39.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\ln 3$; 4) $\frac{2}{\ln 2}$. **21.40.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}\ln 3$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{4}{\ln 5}$. **21.41.** 1) 1; 2) 2; 3) $\ln 75$; 4) $\ln\frac{2}{5}$.

§22

22.2. 1) $f(1)=2$; 2) $f(-1)=-\frac{3}{2}$; 3) $f(0)=1$; 4) $f(0)=-1$; 5) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, 6) $f(0)=\frac{1}{2}$. **22.4.** 1) $x=0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $y(0)=1$; 2) $x=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, $y(0)=0$; 3) $x=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, $y(0)=0$; 4) $x=-1$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, $y(-1)=1$; 5) $x=1$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $y(1)=0$; 6) უწყვეტია; 7) უწყვეტია; 8) უწყვეტია; 9) $x=0$ არის ასაცილებელი წყვეტის წერტილი; 10) $x=\pm1$ წერტილებში აქვს პირველი გვარის წყვეტა, $y(-1)=0$, $y(1)=3$. **22.5.** 1) $a=\frac{1}{2}$; 2) $a=1$; 3) $a=\frac{3}{2}$; 4) $a=3$; 5) $a=4$; 6) $a=0$. **22.6.** 1) $a=4$, $b=-4$; 2) $a=3$; $b=2$; 3) $a=-1$; $b=1$; 4) $a=1$, $b=0$.

§23

23.1. 1) $\Delta y=0{,}21$; 2) $\Delta y=1$; 3) $\Delta y=-8$; 4) $\Delta y=-0{,}5$. **23.2.** 1) $\Delta y=a\Delta x$; 2) $\Delta y=2ax\Delta x+b\Delta x+a(\Delta x)^2$; 3) $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)$; 4) $\Delta y=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$; 5) $\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$; 6) $\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$. **23.3.** 1) $\frac{4}{19}$; 2) -6. **23.4.** 1) -3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) $9\ln3$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) -3. **23.5.** 1) $f'_-(-2)=-1$, $f'_+(-2)=1$, 2) $f'_-(1)=-2$, $f'_+(1)=2$; 3) $f'_+(0)=+\infty$; $f'_-(0)=-\infty$; 4) $f'_+(0)=+\infty$, $f'_-(0)=-\infty$. **23.6.** 1) 3; 2) $2x-2$; 3) $2x-5$; 4) $1-6x^2+2x$. **23.7.** 1) $-2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+2x$; 3) $7x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{2}{3}}+3$; 4) $x^{-\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{2}}$ **23.8.** 1) $\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{9}{x^4}-\frac{8}{x^5}$; 3) $-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}$; 4) $-\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}$. **23.9.** 1) $-\frac{3}{x^{5/2}}+\frac{4}{x^{7/3}}-\frac{1}{x^{6/5}}$; 2) $-\frac{5}{x^{8/3}}+\frac{1}{x^{3/2}}-\frac{1}{x^3}$; 3) $-\frac{5}{x^{7/2}}+\frac{3}{x^{7/4}}+\frac{1}{x^{6/5}}$; 4) $-\frac{9}{x^4}-\frac{1}{6x^{5/6}}+\frac{4}{5x^{7/5}}-1$ **23.10.** 1) $9x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}$; 2)

$20x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{6}{x^4}+1$; 3) $-\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+4x$; 4) $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

23.11. 1) $3\cos x+4\sin x$; 2) $\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}+2\cos x$; 3) $2-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $-\frac{1}{1+x^2}-2$. **23.12.** 1) $2\cos x-3\sin x-1$; 2) $\frac{5}{1+x^2}-4x$; 3) $\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}$. **23.13.** 1) $2x\ln x+x$; 2) $e^x(\cos x-\sin x)$; 3) $\frac{3^x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,3^x\ln 3$; 4) $(2x-4)\arccos x-\frac{x^2-4x+1}{\sqrt{1-x^2}}$. **23.14.** 1) $2e^x-3\cdot 5^x\ln 5$; 2) $7^x\ln 7-3e^x$; 3) $\frac{5}{x}-2e^x$; 4) $\frac{3}{x\ln 3}+5e^x$. **23.15.** 1) $5^x\left(\operatorname{arctg}x\cdot\ln 5+\frac{1}{1+x^2}\right)$; 2) $\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}$; 3) $e^x\arcsin x+\frac{1+e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $2x\operatorname{arctg}x-1-2\sin x-2x\cos x$. **23.16.** 1) $-\frac{11}{(2x-3)^2}$; 2) $\frac{4-2x-2x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$; 4) $-\frac{10x}{\left(x^2+1\right)^2}$. **23.17.** 1) $\frac{1-x\ln 5}{5^x}$; 2) $\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}$; 3) $\frac{2x\ln x-x}{(\ln x+1)^2}$; 4) $\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$. **23.18.** 1) $\frac{2}{1+\sin 2x}$; 2) $\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{\cos^2 x(\cos x-2\sin x)^2}$; 3) $\frac{1-2x\operatorname{arctg}x}{\left(1+x^2\right)^2}$; 4) $-\frac{\ln x}{x^2}$. **23.19.** 1) $-\frac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$; 2) $\frac{2\cdot 15^x(\ln 5-\ln 3)}{\left(3^x-5^x\right)^2}$; 3) $-\frac{4}{x(\ln x-2)^2}$; 4) $\frac{\log_3\frac{e}{x}+\log_2\frac{e}{x}}{x^2}$. **23.20.** 1) 20; 2) 2; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $-\frac{5}{6}$. **23.21.** 1) 2; 2) 1; 3) $18\ln 3$; 4) $\frac{2(5+\ln 3)}{\ln 3}$. **23.22.** 1) 1; 2) -4; 3) 1; 4) e. **23.23.** 1) $10x(x^2-1)^4$; 2) $-\frac{3\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}$; 3) $4(6x+5)(3x^2+5x-1)^3$; 4) $6x^3(5x-8)(x^5-2x^4)^5$. **23.24.** 1) $\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$;

2) $\frac{1-3x}{\sqrt{4+2x-3x^2}}$; 3) $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(7-2x)^2}}$; 4) $\frac{6}{5\sqrt[5]{(2x+1)^2}}$. **23.25.** 1) $3\cos 3x$; 2) $\frac{2}{\cos^2(2x-5)}$; 3) $-\frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$; 4) $-\frac{3}{9+x^2}$. **23.26.** 1) $4e^{4x-1}$; 2) $-2x5^{1-x^2}\ln 5$; 3) $\frac{3x^2}{x^3-4}$; 4) $\frac{2x+1}{(x^2+x)\ln 6}$. **23.27.** 1) $\sin 2x$; 2) $-3\cos^2 x\sin x$; 2) $\frac{2arctgx}{1+x^2}$; 4) $-\frac{5ctg^4 x}{\sin^2 x}$. **23.28.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 2) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; 3) $\frac{4^{\sqrt{x}}\ln 4}{2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$. **23.29.** 1) $ctgx$; 2) $-\sin x\cdot 3^{\cos x}\ln 3$; 3) $\frac{4^x\ln 4}{1+4^{2x}}$; 4) $\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

23.30. 1) $\frac{5^{\arcsin x}\cdot\ln 5}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\frac{2}{\sin 2x\cdot\ln 3}$; 3) $-\frac{\sin\ln x}{x}$; 4) $-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. **23.31.** 1) $\frac{3\sin^2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; 2) $-12\cos^3 3x\sin 3x$; 3) $\frac{10xtg^4 x^2}{\cos^2 x^2}$; 4) $\frac{15\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$.

23.32. 1) $2\sin(4x+10)$; 2) $\frac{2x+1}{2\sqrt{tg(x^2+x)}\cos^2(x^2+x)}$; 3) $-3\cos^2 x\sin x\cdot 2^{\cos^3 x}\ln 2$; 4) $\frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}$. **23.33.** 1) $\frac{3arctg^2\sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}}$; 2) $\frac{4^{\sin x}\ln 4}{3\sqrt[3]{4^{2\sin x}}}$; 3) $\frac{3^{\cos x}\cdot\sin x\ln 3}{\sin^2 3^{\cos x}}$; 4) $-\frac{2\arccos(\log_3 x)}{x\sqrt{1-\log_3^2 x}\ln 3}$. **23.34.** 1) $\frac{-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x}}$; 2) $\frac{2\lg(x-\cos x)(1+\sin x)}{(x-\cos x)\ln 10}$; 3) $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$; 4) $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$. **23.35.** 1) $(2x+3)e^{x^2+3x-2}\cdot\cos(e^{x^2+3x-2})$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$; 3) $70ctg7x\cdot\ln^9\sin 7x$; 4) $\frac{21\arcsin^6(\ln^3 x)\cdot\ln^2 x}{x\sqrt{1-\ln^6 x}}$. **23.36.** 1) $-\frac{15\cos 5x}{\sin^4 5x}$; 2) $\frac{15tgx}{\ln^6\cos x}$; 3) $-\frac{35\cdot 2^{-x}\ln 2}{\cos^2 2^{-x}tg^8 2^{-x}}$;

4) $\dfrac{4\cdot 3^{1/x}\ln 3}{3x^2 ctg3^{1/x}\cdot\sqrt[3]{ctg3^{1/x}}\cdot\sin^2 3^{1/x}}$. **23.37.** 1) $\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\sin 4x+4\sin\frac{x}{3}\cos 4x$; 2) $-e^{-x^3}(3x^2\cos 10x+10\sin 10x)$; 3) $2^{\frac{1}{x}}\dfrac{\ln x}{x}\left(2-\dfrac{\ln 2\cdot\ln x}{x}\right)$; 4) $3^{x^3+2x}\times$ $\times\left(\left(3x^2+2\right)\ln 3\arcsin x^4+\dfrac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}\right)$. **23.38.** 1) $-\dfrac{3\sin 2x\cdot\sin 3x+2\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 2x}$; 2) $\dfrac{\cos^2 x-\ln(\sin x)}{\sin^2 x}$; 3) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}}$; 4) $-\dfrac{5\sin 10x\sin 6x-6\cos 6x\cos^2 5x}{\sin^2 6x}$.

23.39. 1) $x^x(\ln x+1)$; 2) $x^{x^2}(2\ln x+1)x$; 3) $(\ln x)^x\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 4) $x^{\ln x}\dfrac{2\ln x}{x}$.

23.40. 1) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$; 2) $(\sin x)^{-2\sin^2\frac{x}{2}}(\mathrm{ctg}^2x-\ln\sin x)$; 3) $2(x+1)^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$; 4) $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$. **23.41.** 1) 5; 2) 1; 3) $\frac{4}{5}\ln 2$; 4) 6π; 5) 1; 6) 0,5. **23.42.** 1) $3(x^2-2x)dx$; 2) $(2\cos x+3\sin x)dx$; 3) $\dfrac{4dx}{\sin^2 x}$; 4) $3x^2e^{x^3-1}dx$. **23.43.** 1) $5\cos 5x dx$; 2) $-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$; 3) $\dfrac{dx}{1-\sin x}$; 4) $x\left(4\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)dx$. **23.44.** 1) $\dfrac{3x\sqrt{x}+4}{2x}dx$; 2) $\dfrac{2\ln 5}{\sin 2x}\cdot 5^{\ln tgx}dx$; 3) $2^{\frac{1}{\cos x}}\ln 2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 4) $\dfrac{2x\cos x-\left(1-x^2\right)\sin x}{\left(1-x^2\right)^2}dx$. **23.45.** 1) 0,3; 2) -1; 3) 0,02; 4) 0,2. **23.46.** 1) 1,002; 2) 0,5151; 3) 0,485; 4) 0,835. **23.47.** 1) 0,2; 2) 1,2; 3) –0,1; 4) 1,004.

§24

24.1. 1) $6x-8$; 2) $96x-18$; 3) $120x-18$; 4) $2(3x-6x^2+1)$. **24.2.** 1) $4e^{-2x}$; 2) $49\cdot 3^{7x}\ln^2 3$; 3) $2\cos 2x$; 4) $-\dfrac{4}{(2x-3)^2}$. **24.3.** 1) $-\dfrac{1}{x^2}$; 2) $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\mathrm{arctg}x$; 3) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 4) $\dfrac{6}{x}$. **24.4.** 1) 12; 2) 30; 3) –25; 4) –24. **24.5.** 1) 17; 2) 12; 3)

$\frac{e^2}{32}$; 4) $\frac{4}{e}$. **24.6.** 1) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; 2) $a^n\sin\left(ax+\frac{\pi n}{2}\right)$; 3) $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$; 4) $a^x(\ln a)^n$. **24.7.** 1) $e^x(x+n)$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{6(n-4)!}{x^{n-3}}$, $n\geq4$; 3) $(\ln2)^{n-1}2^{x-1}(n+(x-1)\ln2)$; 4) $x\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+n\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **24.8.** 1) $12x(3x-2)dx^2$; 2) $\frac{2dx^2}{x^2}$; 3) $-25\cos5x dx^2$; 4) $(5^x\ln^2 5-2e^x)dx^2$. **24.9.** 1) $(x^2-3x+1)e^{-x}dx^2$; 2) $\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$; 3) $-e^{-x}(x^2-6x+6)dx^3$; 4) $\frac{384dx^4}{(2-x)^5}$. **24.10.** 1) $-16dx^2$; 2) $1500dx^3$; 3) $5dx^2$; 4) $\frac{15}{2}dx^2$.

§25

25.1. 1) $\frac{3}{2}t^2$; 2) $\frac{3t^2-1}{2t}$; 3) $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; 4) 2. **25.2.** 1) $\frac{1-tgt}{1+tgt}$; 2) -1; 3) $\frac{t}{2}$; 4) $\frac{t-1}{1+t}$. **25.3.** 1) 1; 2) -1; 3) 1; 4) 1. **25.4.** 1) $-\frac{2}{9t^4}$; 2) $-\frac{1}{\sin^3 t}$; 3) $0{,}5\cdot e^{-8t}$; 4) $4t^2$. **25.5.** 1) -2; 2) -1. **25.6.** 1) $\frac{p}{y}$; 2) $-\frac{b^2x}{a^2y}$; 3) $\frac{x+y}{x-y}$; 4) $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$. **25.7.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $-\frac{1}{e}$; 3) -1; 4) $-e^2$.

§26

26.1. 60. **26.2.** 1. **26.3.** (1;1), (-1;-1). **26.4.** (3;6). **26.5.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{25}{16}\right)$. **26.6.** (0;1). **26.7.** (0;20), (1;15), (-2;-12). **26.8.** (0;1). **26.9.** (0;2). **26.10.** (0;-1) და (4;3). **26.11.** (-1;-1) და (1;3). **26.12.** (1;-3). **26.13.** (2;3). **26.14.** 1) $x-4y+4=0$; $4x+y-18=0$; 2) $y-5=0$, $x+2=0$; 3) $4x-y-6=0$; $x+4y-10=0$; 4) $4x-y+6=0$; $x+4y-58=0$. **26.15.** 1) $x-1=0$, $y=0$; 2) $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$; 3) $6x+2y-\pi=0$, $2x-6y+3\pi=0$; 4) $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. **26.16.** 104. **26.17.** 3;0;-9. **26.18.** 1) $t_1=0$, $t_2=8$; 2) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$. **26.19.** $181{,}5\cdot10^3$ ერგი. **26.20.** 900 ჯ. **26.21.** $\frac{15}{16}$ წმ; 14 მ.

26.22. 13 რად/წმ. **26.23.** 4π რად/წმ. **26.24.** $\frac{1}{3}$ მ/წმ. **26.25.** 6. **26.26.** 92 კმ/სთ^2. **26.27.** 18. **26.28.** 12 მ/წმ^2. **26.29.** 54 ნ. **26.30.** 8 ნ.

§27

27.1. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $-4{,}25$. **27.2.** 1) 1; 2) 1; 3) $3\ln 3$; 4) $\frac{1}{2}$. **27.3.** 1) $-\frac{3}{2}$; 2) $-0{,}5$; 3) $1/\sqrt{6}$; 4) $2/3\sqrt[6]{a}$. **27.4.** 1) 0; 2) $\frac{1}{\ln\frac{5}{2}}$; 3) $\ln\frac{12}{49}$; 4) $\ln\frac{15}{4}$.

27.5. 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{a^2}{2}$; 4) $-\frac{1}{8}$. **27.6.** 1) 0; 2) 0; 3) ∞; 4) $+\infty$. **27.7.** 1) -1; 2) 2; 3) 0; 4) 3. **27.8.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **27.9.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **27.10.** 1) $\frac{8}{\pi}$; 2) 0; 3) a; 4) $+\infty$. **27.11.** 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$. **27.12.** 1) e; 2) e; 3) 1; 4) e^{-1}. **27.13.** 1) 1; 2) 1; 3) e^3; 4) 1. **27.14.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 1.

§28

28.1. 1) ზრდადია $]2;+\infty[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty;2[$ შუალედში; 2) ზრდადია $]-\infty;4[$ შუალედში, კლებადია $]4;+\infty[$ შუალედში; 3) ზრდადია $]-\infty;0[$ და $]2;+\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]0;2[$ შუალედში; 4) ზრდადია $]-2;2[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty;-2[$ და $]2;+\infty[$ შუალედებში. **28.2.** 1) ზრდადია $]-\infty;-1[$ და $]2;+\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]-1;2[$ შუალედში; 2) ზრდადია $]-\infty;-1[$ და $]3;+\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]-1;3[$ შუალედში; 3) ზრდადია $]-\infty;+\infty[$ შუალედში; 4) კლებადია $]-\infty;+\infty[$ შუალედში. **28.3.** 1) კლებადია $]-\infty;-1[$ და $]0;1[$ შუალედებში, ზრდადია $]-1;0[$ და $]1;+\infty[$ შუალედებში; 2) კლებადია $]-\infty;+\infty[$ შუალედში; 3) ზრდადია $[0;+\infty[$ შუალედში; 4) ზრდადია $]-\infty;+\infty[$ შუალედში. **28.4.** 1) ზრდადია $]-\infty;1[$ და $]3;+\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]1;3[$ შუალედში; 2) კლებადია $]-\infty;0[$ და $]6;12[$ შუალედებში, ზრდადია $]0;6[$ და $]12;+\infty[$ შუალედებში; 3) კლებადია $]-\infty;-1[$ და $]1;+\infty[$ შუალედებში, ზრდადია $]-1;1[$ შუალედში; 4) ზრდადია $]-\infty;-1[$ და $]0;1[$ შუალედებში, კლებადია $]-1;0[$ და $]1;+\infty[$ შუალედებში. **28.5.** 1) ზრდადია $]-\infty;0[$ შუალედში, კლებადია $]0;+\infty[$ შუალედში; 2) კლებადია $]-\infty;0[$ და $]2;+\infty[$ შუა-

ლედში, ზრდადია $]0;2[$-ში. 3) ზრდადია $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ შუალედში, კლე-ბადია $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ შუალედში; 4) ზრდადია $]0;1[$ შუალედში, კლებადია $]1;2[$ შუალედში. **28.6.** 1) $y_{min}=-7$; 2) $y_{min}=-4{,}5$; 3) $y_{max}=10$; 4) $y_{max}=10$. **28.7.** 1) $y_{max}=17$, $y_{min}=-15$; 2) $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(1)=-1$; 3) $y_{max}=y(-1)=17$, $y_{min}=y(3)=-47$; 4) $y_{max}=\frac{7}{3}$, $y_{min}=1$. **28.8.** 1) $y_{max}=2$, $y_{min}=\frac{17}{12}$, $y_{min}=-\frac{37}{4}$; 2) $y_{min}=0$, $y_{max}=1$; 3) $y_{max}=y(0)=12$, $y_{min}=y(\pm 2)=-4$; 4) $y_{max}=\frac{1}{4}$, $y_{min}=0$. **28.9.** 1) $y_{min}=y(1)=-1$; 2) $y_{min}=y(-5)=0$, $y_{min}=y(1)=-216$; $y_{max}=y\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{189}{16}$; 3) $y_{min}=y(3)=2$, $y_{max}=y(-3)=-2$; 4) $y_{min}=y(2)=12$, $y_{max}=y(-2)=-12$. **28.10.** 1) ექსტრემუმი არა აქვს; 2) $y_{max}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-4$; 3) $y_{max}=y(0)=-2$; $y_{min}=y(2)=2$; 4) $y_{min}=y(-2)=-\frac{1}{4}$; $y_{max}=y(2)=\frac{1}{4}$. **28.11.** 1) $y_{max}=2$, $y_{min}=-2$; 2) $y_{max}=-4$, $y_{min}=4$; 3) $y_{min}=0$, $y_{max}=2$; 4) $y_{max}=-24$. **28.12.** 1) $y_{min}=y(-1)=-\frac{1}{e}$; 2) $y_{min}=y(0)=0$, $y_{max}=y(2)=\frac{4}{e^2}$; 3) $y_{min}=y(1)=e$; 4) $y_{min}=y\left(-\ln\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

28.13. 1) $y_{min}=y(0)=0$; 2) $y_{min}=y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$; 3) $y_{max}=y\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$, $y_{min}=y(1)=0$; 4) ექსტრემუმი არა აქვს. **28.14.** 1) –1; 3; 2) –1; 3; 3) $-11\frac{1}{4}$; 9. 4) 4; 67. **28.15.** 1) –44; $14\frac{1}{3}$; 2) 0; 17; 3) –8; 4; 4) $-\frac{7}{60}$; 1. **28.16.** 1) 0; 1; 2) 2; $\frac{26}{5}$; 3) 1; 3; 4) 6; 10. **28.17.** 1) 5,5-ln4; 2) 0; e^2; 3) 0; 8; 4) $1-\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **28.18.** 16. **28.19.** –0,5. **28.20.** 0,5. **28.21.** 64. **28.22.** 81. **28.23.** 12. **28.24.** 18. **28.25.** 5 და 5. **28.26.** 2. **28.27.** 1. **28.28.** ტოლგვერდას. **28.29.** 90. **28.30.** 4 და 8. **28.31.** –2. **28.32.** $\frac{ah}{2}$. **28.33.** 56. **28.34.** $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$.

28.35. $\alpha=60°$. **28.36.** $\frac{a}{4+\pi}$. **28.37.** 45. **28.38.** 27. **28.39.** 3. **28.40.** 10 სმ.

28.41. πa^3. **28.42.** 6 სმ. **28.43.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. **28.44.** $1:\sqrt{2}$. **28.45.** $\sqrt[3]{4V}$

§29

29.1. 1) ყველგან ჩაზნექილია; 2) ყველგან ამოზნექილია; 3) ამოზნექილია $]-\infty;0[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]0;+\infty[$ შუალედში, (0;0) გადაღუნვის წერტილია; 4) ამოზნექილია $]1;+\infty[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]-\infty;1[$ შუალედში, (1;2) გადაღუნვის წერტილია. **29.2.** ამოზნექილია $\left]-\infty;\frac{5}{3}\right[$ შუალედში, ჩაზნექილია $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $\left(\frac{5}{3};-\frac{250}{27}\right)$; 2) ამოზნექილია $]-\infty;2[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]2;+\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია (2;12); 3) ჩაზნექილია $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ და $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ შუალედებში, ამოზნექილია $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{2};-\frac{17}{8}\right)$ და $\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{8}\right)$; 4) ამოზნექილია $]-\infty;1[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]1;+\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია (1;-1). **29.3.** 1) ჩაზნექილია $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ შუალედში, ჩაზნექილია $\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ და $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right[$ შუალედებში. გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$; 2) ამოზნექილობის შუალედებია $]-\infty;-1[$ და $]1;+\infty[$, ჩაზნექილობის შუალედია $]-1;1[$ გადაღუნვის წერტილები არა აქვს; 3) ჩაზნექილია $]-\infty;-6[$ და $]0;6[$ შუალედებში, ამოზნექილია $]-6;0[$ და $]6;+\infty[$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილებია $\left(-6;-\frac{9}{2}\right)$, (0;0) და $\left(6;\frac{9}{2}\right)$; 4) ამოზნექილია $]-\infty;-2-\sqrt{3}[$ და $]-2+\sqrt{3};1[$ შუალედებში, ჩაზნექილია $]-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}[$ და $]1;+\infty[$

შუალედებში, გადაღუნვის წერტილის აბსცისებია $-2\pm\sqrt{3}$ **29.4.** 1) ჩაზნექილია $\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ და $\left]\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$ შუალედებში, ამოზნექილია $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ შუალედში. გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) ამოზნექილია $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ შუალედში, ჩაზნექილია $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ და $]0;+\infty[$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილია $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{e^2}\right)$; 3) ამოზნექილია $]-\infty;-1[$ და $]1;+\infty[$ შუალედებში, ჩაზნექილია $]-1;1[$ შუალედში. გადაღუნვის წერტილებია $(-1;\ln 2)$ და $(1;\ln 2)$; 4) ამოზნექილია $]-\infty;0[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]0;+\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილები არა აქვს. **29.5.** 1) $x=0$, $y=0$; 2) $x=2$, $y=0$; 3) $x=1$, $x=3$, $y=0$; 4) $y=0$. **29.6.** 1) $x=\pm 2$, $y=1$; 2) $y=x$; 3) $y=\pm x$; 4) $y=x-\frac{1}{3}$.

§31

31.1. $B=x+2y$. **31.2.** $S=\frac{1}{4}x\sqrt{4y^2-x^2}$. **31.3.** $r=\frac{x^2}{2x+y}$. **31.4.** $s=\frac{x+y}{2}\sqrt{xy}$ **31.5.** $v=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{c^2-r^2}$ **31.6.** $s=(x+y+z)h$. **31.7.** $f\left(\sqrt{3};1\right)=0$, $f\left(2;\sqrt{2}\right)=-2$. **31.8.** -1. **31.9.** 16. **31.10.** $f(0;1)=0$, $f\left(-1;\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{5}$, $f\left(\frac{1}{x},-y\right)=-\frac{2xy}{1+x^2y^2}$. **31.16.** 1) $x+y=h$ ($h\in R$) პარალელური წრფეები; 2) $x^2+y^2=h^2$ კონცენტრული წრეწირები; 3) $xy=h$ ჰიპერბოლები; 4) პირველ და მესამე მეოთხედში მოთავსებული $xy=h^2$ ჰიპერბოლები. **31.17.** 1) $y=hx^2$ პარაბოლები წვეროს გარეშე; 2) $x^2-y^2=h$ ტოლფერდა ჰიპებოლები; 3) $hx^2+2hy^2=1$ ($h>0$) ელიფსები; 4) წრეწირები, რომლებიც ორდინატთა ღერძს ეხებიან სათავეში გარდა შეხების წერტილისა და ორდინატთა ღერძის გარდა. **31.18.** 1) 3; 2) $-0{,}5$; 3) 1; 4) -1. **31.19.** 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) -3. **31.20.** 1) 2; 2) 0,5; 3) 1; 4) 2. **31.21.** 1) 1; 2) 0; 3) -8; 4) $\frac{2}{\pi}$. **31.22.** 1) e^3; 2) 1; 3) 1; 4) e^a. **31.23.** 1) 1; 2)

0; 3) e; 4) 1. **31.24.** 1) უწყვეტია; 2) წყვეტილია; 3) უწყვეტია; 4) წყვეტილია. **31.25.** 1) (0;0); 2) (0;0); 3) $y=2x$ წრფის წერტილები; 4) $y=2x^2$ პარაბოლის წერტილები. **31.26.** 1) $x^2+y^2=1$ წრეწირის წერტილები; 2) საკოორდინატო ღერძების წერტილები; 3) $y=-x$ წრფისა და $x=y^2$ პარაბოლის წერტილები; 4) $x^2+y^2=1$ წრეწირისა და $x^2-y^2=1$ ჰიპერბოლის წერტილები.

§32

32.1. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=6x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=8y$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=6y$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=9x^2+1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-4y-1$. **32.2.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=15x^2y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5x^3$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-3x^2y^2$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=3y^3+3x^2y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=9xy^2+x^3$.

32.3. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x^2+8xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y+4x^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-3y+2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2-3x$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^3-3y^2+4x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2-6xy-2y$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^2-6x^2y+2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=6x^2y-2x^3-3$.

32.4. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt{y}-\frac{2\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{2\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{4\sqrt[4]{x^3}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt[4]{x}-\sqrt{\frac{x}{y}}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt[3]{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}-\sqrt[3]{x}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[5]{y}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5\sqrt[5]{y^4}}-\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$. **32.5.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^5}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{5x^2}{y^6}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+\frac{3x^2}{y^4}$. **32.6.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{12y}{(2x-3y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{12x}{(2x-3y)^2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. **32.7.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(x^2-y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\cos(x^2-y)$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{y}{\sin^2(xy)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{x}{\sin^2(xy)}$; 5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$; 6) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$. **32.8.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3y\sin^2 xy\cdot\cos xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x\sin^2 xy\cos xy$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2tg\frac{x}{y^2}}{y^2\cos^2\frac{x}{y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-4x\,tg\frac{x}{y^2}}{y^3\cos\frac{x}{y^2}}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{|x+y|\cdot\sqrt{x^2+2xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{|x+y|\sqrt{x^2+2xy}}$. **32.9.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$ 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=(y^2-1)(2x+1)(x^2+x)^{y^2-2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y(x^2+x)^{y^2-1}\times\ln(x^2+x)$. **32.10.** 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$; 3) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$; 4) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot z^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot z^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy\cdot z^{xy-1}$. **32.11.** 1) $f'_x(3;2)=56$, $f'_y(3;2)=42$; 2) $f'_x(1;-1)=4$, $f'_y(1;-1)=-7$; 3) $f'_x(1;2)=e(2e^4-1)$, $f'_y(1;2)=4e^5$; 4) $f'_x(3;1)=\frac{3}{4}$, $f'_y(3;1)=-\frac{1}{4}$; 5) $f'_x(1;2;0)=1$, $f'_y(1;2;0)=\frac{1}{2}$,

$f'_z(1;2;0)=\frac{1}{2}$; 6) $f'_x\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)=f'_y\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)=0$, $f'_z\left(0;0;\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **32.13.** 1) $dz=(3x^2-y^3)dx+(x^3-3xy^2)dy$; 2) $dz=(2y^3-3x^2y^2)dx+(6xy^2-2x^3y)dy$; 3) $dz=\frac{2}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$; 4) $dz=-\sin(xy-y^2)(ydx+(x-2y)dy)$. **32.14.** 1) $dz=\frac{1}{x+y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)$; 2) $dz=\frac{y}{x^2\cos^2\frac{y^2}{x}}(2xdy-ydx)$; 3) $dz=0$; 4) $dz=\frac{1}{y^2}tg\frac{x}{y}(xdy-ydx)$. **32.15.** 1) $du=\frac{\left(x^2+y^2\right)dz-2z\left(xdx+ydy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 2) $du=\frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(ydx+xdy-\frac{2xy}{z}dz\right)$; 3) $du=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\times$

$\times\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)zdx+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)xzdy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz\right]$;

4) $du=e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 zdx+2y\sin^2 zdy+\sin 2zdz)$. **32.16.** 1) $df(1;1)=3dx-3dy$; 2) $df(2;1)=2dx+14dy$; 3) $df(1;1)=dx-2dy$; 4) $df(1;2)=9(4dx+dy)$; 5) $df(1;1;1)=dx-$ $-dy$; 6) $df(3;4;5)=\frac{1}{25}(5dz-3dx-4dy)$. **32.17.** 1) $\Delta f=36$, $df=28{,}5$; 2) $\Delta f=\frac{1}{14}$, $df=0{,}075$; 3) $\Delta f=\frac{1}{2}$, $df=\frac{\pi}{6}$; 4) $\Delta f=0$, $df=-\frac{1}{2}$. **32.18.** 1) 5,08; 2) 2,95; 3) 8,29; 4) 0,788. **32.19.** $\frac{dz}{dt}=e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t}-6t+3\right)$. **32.20.** $\frac{dz}{dt}=$ $=e^{2t}(4e^{2t}+2\sin^2 t+\sin 2t)$. **32.21.** $\frac{dz}{dt}=x^y\left(\frac{y}{xt}+\ln x\cos t\right)$. **32.22.** $\frac{dz}{dt}=$ $=3\cos^2(3x^2+y)\sin(3x^2+y)\left(\frac{1}{t^2}-12t^3\right)$. **32.23.** $\frac{du}{dt}=2t\ln t+tgt+\frac{\left(t^2+1\right)tgt}{t}+$ $+\frac{\left(t^2+1\right)\ln t}{\cos^2 t}$. **32.24.** $\frac{du}{dt}=\frac{2xe^t}{x^2+y+z}+\frac{2\cos 2t}{x^2+y+z}+\frac{2arctgt}{\left(1+t^2\right)\left(x^2+y+z\right)}$.

32.25. $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x+e^y\left(x^2+1\right)}{e^x+e^y}$. **32.26.** $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x\left(x+1\right)}{1+x^2e^{2x}}$. **32.27.**

$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\left(\frac{ux}{y}-\frac{v\ln y}{u^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=2x\left(\frac{\ln y}{u}+\frac{xv}{y}\right)$. **32.28.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$. **32.29.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{2v}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+\frac{2v}{x+y}$. **32.30.** $\frac{\partial z}{\partial t}=$ $=e^{x-2y}(\cos t-6t^2)$, $\frac{\partial z}{\partial \tau}=-4\tau e^{x-2y}$.

§33

33.1. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3y^3-6xy^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^5y-20x^3y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=15x^2y^2(x^2-y^2)$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=10y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=30x^2y-12y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=30xy^2$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6x-2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-6y$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+12xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-18xy-6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2-9y^2$. **33.2.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{(2x+y^2)^{3/2}}$. **33.3.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)}^3}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y\cdot(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\cdot\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\ln x\cdot\ln y+1}{xy}e^{\ln x\cdot\ln y}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(xy-2)e^{-xy}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$; 5) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}$; 6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$. **33.4.** 1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{y(x-z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$; 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1 + z\ln\frac{x}{y}\right)$; 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}\cdot(2x+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(z + y\ln x)u}{xz^2}$.

33.5. 1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x^2y\cos xy - 2x\sin xy$; 2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4y\left(3x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$; 3) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}$; 4) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1+xy)e^{xy}\cos z$. **33.6.** $f''_{x^2}(3;2)=36$, $f''_{y^2}(3;2)=6$, $f''_{xy}(3;2)=31$. **33.7.** $f'''_{x^3}(0;1)=0$, $f'''_{y^3}(0;1)=0$, $f'''_{x^2y}(0;1)=2$, $f'''_{xy^2}(0;1)=0$.

§34

34.1. 1) $2x-4y-z-5=0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$; 2) $8x-8y-z=0$, $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$; 3) $x+y-z-1=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$; 4) $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$. **34.2.** 1) $17x+11y+5z=60$, $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$; 2) $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$; 3) $x+ez-2=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\pi}{0} = \frac{z-1/e}{e}$; 4) $z+a=0$, $\begin{cases} x = a, \\ y = a. \end{cases}$ **34.3.** 1) $x+2y+3z-14=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$; 2) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - R=0$, $\frac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - R\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{z-R}{0}$; 3) $2x+3y+6z=18$, $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{6}$; 4) $x+11y+5z-18=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$. **34.4.** $4x+y+2z-78=0$. **34.5.** $x+4y+6z=\pm 21$. **34.6.** $(1;\pm1;0)$ წერტილებზე გავლებული მხები სიბრტყეები პარალელურია Oxz სიბრტყის; $(0;0;0)$ და $(2;0;0)$ წერტილებზე გავლებული მხები სიბრტყეები კი პარალელურია Oyz სიბრტყის; ზედაპირზე არ არის წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები სიბრტყე პარალელური იქნება Oxy სიბრტყის. **34.7.** $2x+y-z-2=0$. **34.8.** $\frac{x-2}{1} = \frac{3y-10}{9} = \frac{z+4}{4}$. **34.9.** $x-2y-3z=3$.

§35

35.1. 1) $Z_{min}=Z(-1;2)=0$; 2) სტაციონარული წერტილია $(-1;2)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია; 3) $Z_{min}=Z(0;3)=-9$; 4) $Z_{max}=Z(1;0)=1$; 5) ექსტრემუმი არ გააჩნია; 6) $Z_{min}(-2;1)=-4$. **35.2.** 1) $Z_{min}=Z(1;1)=-1$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია; 2) $Z_{max}=Z(-1;-1)=1$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია; 3) $Z_{max}=-36$; 4) $Z_{min}(1;1)=-2{,}5$; 5) სტაციონარული წერტილია $\left(2;-\frac{2}{3}\right)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია; 6) $Z_{min}=Z(1;1)=-28$, $Z_{max}=Z(-3;-1)=28$, $(0;2)$ და $(-2;-2)$ სტაციონარული წერტილებია. **35.3.** 1) $Z_{max}=Z\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}$; 2) $Z_{min}=Z(0;0)=0$, $\left(-\frac{5}{3};0\right)$, $(1;4)$ $(1;-4)$ სტაციონარული წერტილებია;3) $Z_{min}=Z(-1;-1)=$ $=-2$, $Z_{min}=Z(1;1)=-2$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია; 4) $Z_{min}=Z\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)=Z\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)=-8$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია. **35.4.** 1) $Z_{max}=Z(2;3)=108$; 2) $Z_{max}=Z(3;2)=108$; 3) სტაციონარული წერტილია $(0;0)$, ექსტრემუმი არა აქვს; 4) სტაციონარული წერტილია $(0;0)$, ექსტრემუმი არა აქვს; 5) ექსტრემუმი არა აქვს; 6) $Z_{min}(1;1)=-0{,}5$. **35.5.** 1) $Z_{min}=Z(5;2)=30$; 2) $Z_{min}=Z(4;2)=6$; 3) $Z_{min}=Z(1;1)=3$; 4) $Z_{max}=Z(-1;-1)=-1$; 5) $Z_{min}=Z(-2;0)=-\frac{2}{e}$; 6) $Z_{max}=$ $=Z(-4;-2)=\frac{8}{e^2}$, $(0;0)$ სტაციონარული წერტილია. **35.6.** 1) $Z_{min}=Z(1;2)=$ $=7-10\ln 2$; 2) $Z_{min}=Z(1;3)=10-18\ln 3$; 3) $Z_{max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $Z_{max}=$ $=Z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. **35.7.** $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$. **35.8.** $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$. **35.9.** $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}$ **35.10.** კუბი, რომლის წიბოს სიგრძეა $\sqrt[3]{v}$ **35.11.** კუბი. **35.12.** კუბი.

§36

36.1. 1) $\frac{1}{4}x^4+C$; 2) $-\frac{1}{7}x^7+C$; 3) x^3+C; 4) $\frac{1}{2}x^8+C$. **36.2.** 1) $C-\frac{1}{2x^2}$; 2) $C-\frac{1}{4x^4}$; 3) $\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+C$; 4) $\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+C$. **36.3.** 1) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$; 2) $\frac{5\sqrt[5]{x^7}}{7}+C$; 3)

$\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}+C$; 4) $3\sqrt[3]{x}+C$. **36.4.** 1) $C-\frac{1}{x^3}$; 2) $C-\frac{2}{x}$; 3) $3x^{\frac{5}{3}}+C$; 4) $20x^{\frac{1}{4}}+C$. **36.5.** 1) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x+C$; 2) $\frac{x^6}{2}-x^4+x^2-2x+C$; 3) $\frac{5}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-8x+C$; 4) $x^4-5x^3+7x^2-3x+C$. **36.6.** 1) $-\frac{1}{2x^2}-2\ln|x|+x+C$; 2) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}+\ln|x|-2x+C$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}-x+C$; 4) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+$ $+C$. **36.7.** 1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-3x^2\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$; 2) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-5x\sqrt[5]{x^2}+4x\sqrt[4]{x}-\frac{1}{2}x^2+$ $+x+C$; 3) $5\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt[4]{x}+C$; 4) $5\sqrt[5]{x^4}-7\sqrt[7]{x^4}+\frac{1}{x^2}+x+C$. **36.8.** 1) $\frac{1}{3}x^3+3x-\frac{2}{x}+C$; 2) $3\ln|x|-x+\frac{x^3}{3}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}-2x-3\ln|x|+\frac{4}{x}+C$; 4) $4{,}5x^2+6x+$ $+\ln|x|+C$. **36.9.** 1) x^6+3e^x+C; 2) $2e^x-\frac{3^x}{\ln 3}+C$; 3) $x^7+\frac{5^x}{\ln 5}+4e^x+C$; 4) $2e^x-\frac{3^x}{\ln 3}+2\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$. **36.10.** 1) $-3\cos x--2\sin x+x+C$; 2) $3\sin x—2\cos x+C$; 3) $-2\mathrm{ctg}x-3\mathrm{tg}x+C$; 4) $2\mathrm{tg}x-5\mathrm{ctg}x+C$. **36.11.** 1) $\mathrm{arctg}x-2\arcsin x+C$; 2) $2\mathrm{arctg}x-$ $-3\arcsin x+C$; 3) $\mathrm{tg}x-2\arcsin x+3e^x+C$; 4) $\frac{5^x}{\ln 5}-\ln|x|+2\mathrm{arctg}x+C$. **36.12.** 1) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$; 3) $\mathrm{tg}x-x+C$; 4) $-\mathrm{ctg}x-x+C$. **36.13.** 1) $\ln|x|+$ $+2\mathrm{arctg}x+C$; 2) $\ln|x|-2\mathrm{arctg}x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\mathrm{arctg}x+C$; 4) $-\frac{2}{x}+\mathrm{arctg}x+C$. **36.14.** 1) $e^x-\ln|x|+C$; 2) $\frac{2^x-2^{-x}}{\ln 2}+C$; 3) $4\mathrm{tg}x+x+C$; 4) $C-\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$. **36.15.** 1) $\frac{(3x+1)^5}{15}+C$; 2) $-\frac{(2-x)^6}{6}+C$; 3) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-2x)^4}+C$; 4) $\frac{7}{36}\sqrt[7]{(3x-2)^{12}}+C$. **36.16.** 1) $\frac{1}{10(4-5x)^2}+C$; 2) $-\frac{1}{2(2x+1)}+C$; 3) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x}+C$; 4) $\frac{5}{4}\sqrt[5]{(2x-1)^2}+$ $+C$. **36.17.** 1) $\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C$; 2) $-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+C$; 3) $\frac{2}{3}\ln|3x+1|+\frac{3}{5}\ln|5x-1|+C$; 4) $3\ln|x-3|-2\ln|2x+1|+C$. **36.18.** 1) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$; 2) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$; 3) $-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+$

$+C$; 4) $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+2)+C$; 5) $5\sin\frac{x}{5}+C$; 6) $-2\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+C$. **36.19.** 1) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x+C$; 2) $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+C$; 3) $C-5\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{5}x-4\right)$; 4) $C+\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+1)$. **36.20.** 1) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; 2) $-\frac{a^{-x}}{\ln a}+C$; 3) $\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}+C$; 4) $-\frac{a^{2x}}{2\ln a}-\frac{a^{-2x}}{2\ln a}+C$. **36.21.** 1) $x-2\ln|x+4|+C$; 2) $x-6\ln|x+3|+C$; 3) $x+\ln|2x-1|+C$; 4) $x-\frac{5}{3}\ln|3x+1|+C$. **36.22.** 1) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\ln|2x-1|+C$; 2) $\frac{1}{9}\ln|1-3x|-\frac{2}{3}x+C$; 3) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\ln|2x+1|+C$; 4) $C-x-\frac{13}{3}\ln|3x+2|$. **36.23.** 1) $\frac{x^2}{2}+3x-7\ln|x+3|+C$; 2) $x^2+x+\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$; 3) $C-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{8}-\frac{1}{8}x-\frac{17}{16}\ln|1-2x|$;4) $\frac{x^3}{3}-3x^2+12x-23\ln|x+2|+C$.**36.24.**1) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln|x-1|+C$; 2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2-8x+17\ln|x+2|+C$; 3) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$; 4) $C-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|1-x|$. **36.25.** 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right|+C$; 3) $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}x+2\sqrt{3}}\right|+C$; 4) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{7}}{2x-\sqrt{7}}\right|+C$. **36.26.** 1) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$; 4) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+$ $+C$. **36.27.** 1) $\arcsin\frac{x}{2}+C$; 2) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 3) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{5x}{3}+C$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{3}x}{3}+C$. **36.28.** 1) $x-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 2) $C-3x-\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$; 3) $\frac{x^3}{3}+4x+4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 4) $C-\frac{x^3}{3}-3x-\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$. **36.29.** 1) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{3}+C$; 2) $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)+C$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2}+C$; 4)

$\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x-1}{\sqrt{5}}+C$. **36.30.** 1) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{2x-2}{2x+1}\right|+C$; 2) $-\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|+C$; 3) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{3}}+C$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+3}{3}+C$.

§37

37.1. 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 2) $-\frac{1}{10}\ln|4-5x^2|+C$; 3) $\frac{1}{3}\ln|x^3+3|+C$; 4) $\frac{1}{12}\ln(3x^4+2)+C$. **37.2.** 1) $\frac{1}{40}(1+x^5)^8+C$; 2) $-\frac{1}{30}(9-2x^3)^5+C$; 3) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{\left(x^2+2\right)^6}+C$; 4) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4}+C$; 5) $C-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}$; 6) $\frac{1}{6}\sqrt[5]{\left(x^5+1\right)^6}+C$. **37.3.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4}+C$; 2) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}+C$; 3) $-\frac{2}{9}\sqrt{2-3x^3}+C$; 4) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C$. **37.4.** 1) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+2)+C$; 2) $\frac{1}{9}\sin(3x^3-1)+C$; 3) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$; 4) $\frac{3^{-2x^2}}{4\ln 2}+C$. **37.5.** 1) $\frac{1}{4}\sin^4x+C$; 2) $\frac{1}{\cos^3 x}+C$; 3) $e^{\sin x}+C$; 4) $\frac{3^{-\cos x}}{\ln 3}+C$. **37.6.** 1) $\frac{1}{4}\ln^4x+C$; 2) $\ln|\ln|x||+C$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$; 4) $C-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-\ln x)^2}$. **37.7.** 1) $\frac{1}{4\cos^2 2x}+C$; 2) $C-\frac{1}{9}\cos^3 3x$; 3) $\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C$; 4) $-2\ln|\cos x|+C$. **37.8.** 1) $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}+C$; 2) $\frac{1}{2e^{1/x^2}}+C$; 3) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 4) $\frac{3\cdot 2^{\sqrt[3]{x}}}{\ln 2}+C$.

37.9. 1) $\ln(e^x+3)+C$; 2) $\frac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln 3}+C$; 3) $\frac{1}{\ln 2}\cdot\operatorname{arctg}2^x+C$; 4) $\frac{1}{\ln 3}\cdot\arcsin\frac{3^x}{2}+C$. **37.10.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}+C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; 3) $\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\arcsin x}+C$; 4) $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. **37.11.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$; 2) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{\sqrt{2}}+C$; 3) $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$;

4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4}+C$. **37.12.** 1) $\ln(x^2-3x+8)+C$; 2) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$; 3) $\frac{1}{2}e^{x^4-2x}+C$; 4) $\frac{5^{x-\frac{1}{x}}}{\ln 5}+C$. **37.13.** 1) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$; 2) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+$ $+C$; 3) $\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|+C$; 4) $\ln\left|\sin x+\sqrt{\sin^2 x+5}\right|+C$. **37.14.** 1) $\frac{2}{5}(x-2)\times$ $\times\sqrt{(3+x)^3}+C$; 2) $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$; 3) $\frac{2}{15}(x+4)(3x-23)\sqrt{x+4}+$ $+C$; 4) $\frac{2}{15}(x-1)(3x+22)\sqrt{x-1}+C$. **37.15.** 1) $\frac{2}{35}\sqrt{x-1}\,(5x^3+6x^2+8x+6)+C$; 2) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; 3) $2\left(\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C$; 4) $2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+$ $+C$. **37.16.** 1) $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C$; 2) $2\left(\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)+C$; 3) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$; 4) $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{4/3}+C$.

§38

38.1. 1) xe^x-e^x+C; 2) $-(x+1)e^{-x}+C$; 3) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; 4) $\frac{e^{2x}}{4}(6x-11)+C$; 5) $\frac{3x-4}{9}e^{3x}+C$; 6) $(x\cdot\ln 2+2\ln 2-1)\cdot\frac{2^x}{\ln^2 2}+C$. **38.2.** 1) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 2) $x\sin x+\cos x+C$; 3) $C-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)$; 4) $3x\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+C$; 5) $\frac{1}{2}[(2x+5)\sin 2x+\cos 2x]+C$; 6) $\frac{3x-1}{4}\cos 4x-\frac{3}{16}\sin 4x+C$. **38.3.** 1) $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|+C$; 2) $\ln|\sin x|-x\,\mathrm{ctg}\,x+C$; 3) $-\frac{x+1}{2}\mathrm{ctg}\,2x+\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C$; 4) $\frac{2x-1}{3}\mathrm{tg}\,3x+\frac{2}{9}\ln|\cos 3x|+C$. **38.4.** 1) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$; 2) $\frac{x^6}{36}(6\ln x-1)+C$; 3) $C-$

$-\frac{\ln x+1}{x}$; 4) $C-\frac{2\ln x+1}{4x^2}$. **38.5.** 1) $\left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{3x^2}{4}-2x+C$; 2) $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$; 3) $x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}x+C$; 4) $\frac{x^3+1}{3}\times$ $\times\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$. **38.6.** 1) $\frac{-x+\left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}x}{2}+C$; 2) $x\mathrm{arctg}x-$ $-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 3) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 4) $2\sqrt{x+1}\,x\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. **38.7.** 1) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$; 2) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$; 3) $x(\ln^2x-2\ln x+2)+C$; 4) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$. **38.8.** 1) $-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+2)+C$; 2) $-\frac{1}{x}(\ln^3x+3\ln^2x+6\ln x+6)+C$; 3) $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$; 4) $\frac{x^4-1}{4}\times$ $\times\mathrm{arctg}x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$. **38.9.** 1) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x+C$; 2) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C$; 3) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$; 4) $\frac{x\left(2x^2+a^2\right)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\times$ $\times\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$.

§39

39.1. 1) $\frac{1}{2-x}+C$; 2) $\mathrm{arctg}(x+1)+C$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x+1)+C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{31}}\mathrm{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$. **39.2.** 1) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$; 2) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$; 3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C$; 4) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{1-3x}\right|+C$. **39.3.** 1) $\frac{2}{\sqrt{11}}\mathrm{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{11}}+C$; 2) $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$; 3) $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$; 4) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. **39.4.** 1) $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$; 2) $\arcsin(x-1)+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$; 4) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+$ $+C$. **39.5.** 1) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$; 2) $\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C$; 3)

$\frac{1}{3}\ln\left(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)+C$; 4) $\ln\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C$. **39.6.** 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$; 3) $\frac{3}{8}\left[\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]$; 4) $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\times$ $\times\ln(5x^2+6x+18)+C$. **39.7.** 1) $\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$; 2) $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$; 3) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\times$ $\times\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$; 4) $-3\sqrt{6x-x^2-8}+13\arcsin(x-3)+C$.

§40

40.1. 1) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; 3) $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$; 4) $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. **40.2.** 1) $\frac{1}{12}\ln\frac{\left|(x-1)(x+3)^3\right|}{(x+2)^4}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3(x-2)^2}{(x+1)^5}\right|+$ $+C$; 3) $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$; 4) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C$. **40.3.** 1) $\ln\frac{(x-2)^2}{\left|(x+2)^5\right|}+C$; 2) $\ln\frac{\left|(x-2)^3\right|}{(x+3)^2}+C$; 3) $\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+4\ln|x-7|+C$. **40.4.** 1) $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$; 2) $\ln\frac{\left|x(x+3)^3\right|}{(x-3)^2}+C$; 3) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$; 4) $\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$.

40.5. 1) $\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3|+C$; 2) $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}-\ln|x1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|C$; 3) $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 4) $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$. **40.6.** 1) $\ln|x|-\ln|x-$

$1|-\frac{1}{x-1}+C$; 2) $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$; 3) $-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$; 4) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-3)}{x}\right|+C$. **40.7.** 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+$ $+C$; 2) $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$; 3) $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$; 4) $-\frac{1}{2x}-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{(x-2)(x+1)^{44}}{x^{45}}\right|+C$. **40.8.** 1) $\ln\frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2+1}}+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$; 3) $\frac{1}{4}\ln|(x-1)^3(x+1)|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 4) $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **40.9.** 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+$ $+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$; 4) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **40.10.** 1) $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln|x+1|-\frac{1}{4}(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$; 2) $-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\times$ $\times\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 4) $\frac{1}{3(1-x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{9}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **40.11.** 1) $\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\operatorname{arctg}x+C$; 2) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+$ $+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 4) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$. **40.12.** 1) $\frac{x-1}{4(1+x^2)}+\frac{1}{8}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2}$;

2) $2\ln|x+1|+\dfrac{x+2}{2\left(x^2+x+1\right)}+\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+C$; 3) $-\dfrac{3x^2+2}{2x\left(x^2+1\right)}-\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 4) $\dfrac{3x^2-x}{4(x-1)\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$.

§41

41.1. 1) $2\sqrt{x-1}\left[\dfrac{(x-1)^3}{7}+\dfrac{3(x-1)^2}{5}+x\right]+C$; 2) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$; 3) $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$; 4) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x}}{2}+C$. **41.2.** 1) $2\sqrt{x}-x-\ln(2\sqrt{x}+1)+C$; 2) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$; 3) $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2}}+C$; 4) $-2\times$ $\times\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$. **41.3.** 1) $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$; 2) $\dfrac{4}{45}(x-2)(5x+8)\times$ $\times\sqrt[4]{x-2}+C$; 3) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; 4) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+$ $+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$. **41.4.** 1) $\ln\left|1+3\sqrt[3]{x}\right|+C$; 2) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+$ $+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2t}{t^3-1}+C$, $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$; 3) $\ln\left|\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$; 4) $\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|+C$. **41.5.** 1) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\times$ $\times\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$; 2) $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^2}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+C$; 3) $\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-$ $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|1+\sqrt[3]{x}\right|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; 4) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+$ $+C$. **41.6.** 1) $6\left[\dfrac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\dfrac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\dfrac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\dfrac{1}{6}(x+1)+\right.$

$+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\Big]+C$; 2) $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$; 3) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C$; 4) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **41.7.** 1) $4t-2t^2-4\ln|t+1|+C$, $t=\sqrt[4]{5-x}$; 2) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$; 3) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$; 4) $\frac{3t}{t^2+1}+3\text{arctg}t+C$, $t=\sqrt[6]{x}$

§42

42.1. 1) $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C$; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 3) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}x-\frac{1}{2}\cos x+C$; 4) $-\frac{1}{8}\cos(4x+1)-\frac{1}{4}\cos(2x+3)+C$. **42.2.** 1) $-\frac{1}{50}\times\sin 25x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$; 2) $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$; 3) $\frac{15}{22}\left(11\sin\frac{x}{15}-\sin\frac{11x}{15}\right)$; 4) $\frac{1}{4}\sin(2x+15)-\frac{1}{16}\sin(8x+1)+C$. **42.3.** 1) $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C$; 2) $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$; 3) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 4) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\times\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$. **42.4.** 1) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$; 2) $C-\frac{1}{7}\cos^7 x$; 3) $C-\frac{1}{4}\cos^4 x$; 4) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$. **42.5.** 1) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$; 2) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$; 3) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$; 4) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 5) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 6) $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$. **42.6.** 1) $-\frac{1}{\sin x}+C$; 2) $\frac{1}{\cos x}+C$; 3) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}++C$; 4) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$; 5) $\cos x+\frac{2}{\cos x}+C$; 6) $\frac{1}{2}\text{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. **42.7.** 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}-\sin x+C$; 2) $\cos x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\sin x-$

$-\frac{1}{3}\sin^3x+C$; 4) $\frac{1}{3}\cos^3x+\cos x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$. **42.8.** 1) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 2) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 3) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 4) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 5) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 6) $\frac{1}{16}(x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$. **42.9.** 1) $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1}{tg\frac{x}{2}+1}\right|+C$; 2) $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-tg\frac{x}{2}}\right|+C$; 4) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C$; 5) $\frac{2}{3}arctg\left(\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C$; 6) $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{4tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}\right)+C$.

42.10. 1) x-tg$\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{\cos x}$-tg$x+C$; 3) $\sqrt{2}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}-3+\sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2}-3-\sqrt{5}}\right|+C$. **42.11.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$; 2) $2\text{tg}\frac{x}{2}-$ $-\text{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\text{tg}^3\frac{x}{2}+C$; 3) $\ln|\cos x-\sin x|+C$; 4) $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{3}\right)+$ $+C$. **42.12.** 1) $C-\frac{1}{e^x+1}$; 2) e^x-$\ln(1+e^x)+C$; 3) $\frac{1}{e^x+1}+\ln(e^x+1)+C$; 4) arctg$e^x+C$. **42.13.** 1) $C-\frac{1}{e^x-1}$; 2) $\frac{1}{2}arctg\frac{e^x-3}{2}+C$; 3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x-1}\right|+C$.

§43

43.1. 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 16. **43.2.** 1) $\frac{14}{3}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) 4; 4) $-\frac{3}{8}$. **43.3.** 1) ln2; 2) 2; 3) 1; 4) e^3-1. **43.4.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{45}{4}$. **43.5.** 1) $-10\frac{2}{3}$; 2) 27;

3) 26; 4) 4. **43.6.** 1) $\frac{\ln 3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 4) $\frac{3}{2}\pi$. **43.7.** 1) 68; 2) 2; 3) $\frac{3\sqrt{3}-2}{8}$; 4) $e-\frac{5}{3}$. **43.8.** 2) π; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) 1-ln2; 4) 2-ln5. **43.9.** 1) $\frac{e^4-1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 5,25. **43.10.** 1) $\frac{1}{2}$ ln2; 2) $\frac{5\pi^2}{288}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) 1. **43.11.** 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) ln2; 3) $\frac{1}{2}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$; 4) sin1. **43.12.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 4-2ln3; 3) 7-2ln2; 4) 2-ln2. **43.13.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$ ln2. **43.14.** 1) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; 2) $\frac{8191}{26}$; 3) $-\frac{468}{7}$; 4) 4,5. **43.15.** 1) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 10+ln3; 3) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **43.16.** 1) 1; 2) $1-\frac{2}{e}$; 3) $\frac{\pi}{2}-1$; 4) $\frac{4\sqrt{2}+2\pi-\pi\sqrt{2}}{32}$; 5) $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$; 6) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\ln 2$. **43.17.** 1) 1; 2) $2\ln 2-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$; 4) $\frac{e-2}{e}$. **43.18.** 1) e^{-2}; 2) 4π; 3) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **43.19.** 1) 1; 2) $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\pi^3-6\pi$. **43.20.** 1) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$; 2) $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$; 3) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$; 4) $\frac{1}{27}(5e^3-2)$.

§44

44.1. 1) 1; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) $\frac{\pi}{4}$. **44.2.** 1) $\frac{1}{3e^3}$; 2) $\frac{1}{\ln 2}$ ან $\log_2 e$; 3) $\frac{1}{k}$, როცა $k>0$; განშლადია, როცა $k\leq 0$; 4) $\log_7 e$. **44.3.** 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$. **44.4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია. **44.5.** 1) განშლადია; 2) $\frac{\pi^2}{8}$; 3) $\frac{2}{3}$ ln2; 4) π. **44.6.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **44.7.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) კრებადია; 5) განშლადია; 6) განშლადია. **44.8.** 1)-4) კრებადია, როცა $\alpha>1$, განშლადია, როცა $\alpha\leq 1$. **44.9.** 1) 2; 2) 1,5; 3) გან-

შლადია; 4) განშლადია. **44.10.** 1) განშლადია; 2) π; 3) განშლადია; 4) 6. **44.11.** 1) 1; 2) განშლადია; 3) 2; 4) განშლადია; 5) განშლადია; 6) განშლადია. **44.12.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია. **44.13.** 1) კრებადია; 2) კრებადია, როცა $\alpha<3$; განშლადია, როცა $\alpha\geq 3$; 3) კრებადია; 4) კრებადია.

§45

45.1. 1) 4; 2) 6; 3) 8; 4) 16. **45.2.** 1) $-\frac{128}{3}$; 2) 20; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) 6. **45.3.** 1) 4ln3; 2) 5; 3) $1-\frac{1}{e}$; 4) 6. **45.4.** 1) 2; 2) 2; 3) 2; 4) 1. **45.5.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) 32; 3) $\frac{32}{3}$; 4) 36. **45.6.** 1) $5\frac{1}{6}$; 2) $\frac{91}{54}$; 3) 24; 4) 36. **45.7.** 1) 18; 2) 1,6; 3) 8; 4) $\frac{4}{3}$. **45.8.** 1) $20\frac{5}{6}$; 2) 4,5; 3) 1; 4) $\frac{4}{3}$. **45.9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 9; 4) 9. **45.10.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{32\sqrt{6}}{3}$. **45.11.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 12-5ln5; 4) 17,5-6ln6; 5) 2,25; 6) 3. **45.12.** 1) πr^2; 2) 20π, 3) $3\pi a^2$; 4) $\frac{3}{8}\pi ab$; 5) $\frac{3\pi}{8ab}(a^2-b^2)^2$; 6) $6\pi a^2$. **45.13.** 1) $\frac{14}{9}$; 2) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$; 4) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **45.14.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) $4+\frac{1}{4}\ln 3$; 3) $4\sqrt{2}+\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; 4) $2\left(1+\ln\frac{3}{2}\right)$. **45.15.** 1) $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 2) 3+ln2; 3) ln3; 4) $\frac{1}{2}\ln 3$. **45.16.** 1) $17\frac{1}{3}$; 2) 7; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) 12. **45.17.** 1) $6a$; 2) $6a$; 3) $8a$; 4) $2\pi^2 a$; 5) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 6) $\sqrt{2}\,(e-1)$. **45.18.** 1) 117π, 2) 63π, 3) 6π, 4) $34\frac{1}{3}\pi$. **45.19.** 1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{128}{7}\pi$, 3) 32π, 4) 75π. **45.20.** 1) 12π, 2) 20π, 3) $\frac{e^2-1}{2}\pi$, 4) $\frac{6}{\ln 2}\pi$. **45.21.** 1) $\frac{83}{15}\pi$, 2) $13\frac{8}{15}\pi$, 3) $\frac{\pi^2}{2}$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$. **45.22.** 1) $\frac{16}{15}\pi$, 2) $\frac{163}{14}\pi$, 3) $\frac{16}{15}\pi$, 4) $2\frac{2}{15}\pi$. **45.23.** 1) $\frac{272}{15}\pi$, 2) $\frac{3}{10}\pi$, 3) $\frac{5}{6}\pi$, 4) 8π, 5) $\frac{138}{5}\pi$, 6) 4π.

§46

46.1. 244 ჯ. **46.2.** 140 ჯ. **46.3.** 126,3 ჯ. **46.4.** 27 ჯ. **46.5.** 32 ჯ. **46.6.** 108 ჯ. **46.7.** 122,5 ჯ. **46.8.** 78,4 ჯ. **46.9.** a=18. **46.10.** a=20. **46.11.** 7000 ჯ. **46.12.** 5 წმ. **46.13.** 0,1 ჯ. **46.14.** 24 ჯ. **46.15.** 5,4 ჯ. **46.16.** 0,2 ჯ. **46.17.** 0,029 ჯ. **46.18.** 0,09 ჯ. **46.19.** 49,05 ჯ. **46.20.** 35 ჯ. **46.21.** 1) 0,125 ჯ. **46.22.** 0,024 კგ.მ. **46.23.** $e_0e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. **46.24.** 1) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\ln 4;\frac{3}{4}\right)$. **46.25.** 1) $x_c=y_c=\frac{9}{20}$; 2) $x_c=\frac{5a}{7}$, $y_c=\frac{5a}{16}$; 3) $x_c=\frac{\pi}{2}$, $y_c=\frac{\pi}{8}$; 4) $x_c=\frac{\pi^2+12\pi-12}{3(\pi+4)}$, $y_c=\frac{5}{6}a(\pi+4)$.

§47

47.1. 1) Oxy სიბრტყე; 2) $y\neq 0$; 3) Oxy სიბრტყე; 4) $y\neq x$. **47.2.** $\{(x,y)$: $-\infty<x<+\infty$, $-1<y<1\}$; 2) $y<x$; 3) $y<x^2$; 4) $y\neq\frac{2n+1}{2}\pi$, $n\in Z$. **47.4.** 1) $y^2-x^2=2xyy'$; 2) $y-2xy'=0$; 3) $3y^2-x^2=2xyy'$; 4) $x^2+y'^2=1$. **47.5.** 1) $y=x^3-x+C$; 2) $y=x^2-x^3+C$; 3) $y=\frac{1}{2}e^{2x}+e^{-x}+C$; 4) $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **47.6.** 1) $x^2-y^3=C$; 2) $y=\ln(C+e^x)$; 3) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}C-x^{3/2}\right)^2}$; 4) $y=\arcsin(\sin x-C)$. **47.7.** 1) $y=e^{e^x+C}$; 2) $s=C\cdot\cos t$; 3) $y=c(x-1)$; 4) $y=\operatorname{tg}(\sqrt{x}+C)$. **47.8.** 1) $C^2x-0,5C^2-0,5$; 2) $y=\sqrt{C^2x^2+C^2-1}$; 3) $\ln^2y=2(xe^x-e^x-C)$; 4) $\ln y=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. **47.9.** 1) $y=\frac{x^3}{3}-e^x+3$; 2) $y=1-\ln|\cos x|$; 3) $y^2=x^2+12$; 4) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$; 5) $y=\sqrt{x^2+1}$; 6) $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=2\sqrt{2}$. **47.10.** 1) $y=Cx$; 2) $y=\frac{c}{x^2}$; 3) $y=x(1-Cx)$; 4) $y=\frac{C}{t-1}$. **47.11.** 1) $y=e^{C-x^2}$; 2) $x+y=C(1-xy)$; 3) $y^3+y-x^2=C$; 4) $y=\ln(0,5e^{2x}-C)$.

47.12. 1) $y=\frac{C}{x+1}-1$; 2) $y=C-\frac{1}{\sin x}$; 3) $y=e^{x+C}-1$; 4) $y=C\sin x$. **47.13.** 1) $e^x+e^{-y}=C$; 2) $x^2(1+y^2)=C$; 3) $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1}$; 4) $y=C(x+1)e^{-x}$; $x=-1$. **47.14.** 1) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$; 2) $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$ $x=\pm 1$; 3) $cy=\sqrt{1+e^{2x}}$ 4) $\sqrt{1+x^2}\,e^{\operatorname{arctg} y}=C$. **47.15.** 1) $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C$, $y=1$; 2) $y=\sin[C+$

$+\ln(1+x^2)]$; 3) $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=C$; 4) $x^2y=Ce^y$. **47.16.** 1) $y=\dfrac{x}{2x-1}$; 2) $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\arcsin x\right)$; 3) $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}\right)$; 4) $y=2-3\cos x$. **47.17.** 1) $y(\ln|1-x^2|+1)=1$; 2) $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=1$; 3) $y=2\sin^2 x-\dfrac{1}{2}$; 4) $3\sqrt{2+y^2}+\mathrm{arctg}\,x=6$.

47.18. 1) $y=x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$; 2) $y=x\ln(Cx^2)$; 3) $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$; 4) $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$

47.19. 1) $x+y=Cx^2$, $x=0$; 2) $y=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x}{2}$; 3) $\ln|y|+\dfrac{x}{y}=C$; 4) $xe^{y/x}=C$. **47.20.** 1) $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$; 2) $\cos\dfrac{y}{x}=Cx^2$; 3) $y^2+2xy-x^2=C$; 4) $y-2x=Cx^2(y+x)$. **47.21.** 1) $x=Ce^{\frac{x}{y}}$, $y=0$; 2) $x(y-C)=Cy$, $y=0$; 3) $y^2=x^2(C^2x^2-1)$, $y=0$; 4) $y=-\dfrac{\ln Cx+1}{\ln Cx}$, $y=0$. **47.22.** 1) $y=x^3-x$; 2) $y=x\ln x+x$; 3) $y=x(3\ln x-1)$; 4) $\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}=\ln x+1$. **47.23.** 1) $x\ln x=2\sqrt{xy}$; 2) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\ln x=0$; 3) $y^3=y^2-x^2$; 4) $y=xe^{-\frac{x}{2}}$ **47.24.** 1) $y=Cx+x^2$; 2) $y=Cx^2+x^4$; 3) $y=x^3C-x^2$; 4) $y=x\left(C-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **47.25.** 1) $y=e^x(C+x)$; 2) $y=e^{-x^2}\left(C+\dfrac{x^2}{2}\right)$; 3) $y=Ce^{x^2/2}-e^{-x}$; 4) $y=e^x(C+\ln|x|)$. **47.26.** 1) $y=C\sin x-\cos x$; 2) $y=\sin x+C\cdot\cos x$; 3) $y=(C+x^2)(x+5)^2$; 4) $y=e^{2x^3}(C+x^2)$. **47.27.** 1) $y=(x+C)(1+x^2)$; 2) $y=Ce^{x^4}-e^{-4x}$; 3) $y=x(C+\ln^2 x)$; 4) $y=1+(2x+1)(C+\ln|2x+1|)$; 5) $y=Ce^{-2x}+2x-1$; 6) $y=Ce^{-x}+\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. **47.28.** 1) $y=\dfrac{8}{x^2}+x$; 2) $s=2t^2+\dfrac{1}{t}$; 3) $y=\dfrac{x}{\cos x}$; 4) $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. **47.29.** 1) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$; 2) $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$; 3) $y=e^{2x}-e^x+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$; 4) $y=e^{-x^2}+1$. **47.30.** 1) $y(e^x+Ce^{2x})=1$, $y=0$; 2) $y^3=1+Ce^{-x}$; 3) $y=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2$; 4) $y=x\sqrt{2x+C}$. **47.31.** 1) $y(x+C)=\dfrac{1}{\cos x}$;

2) $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$; 3) $y=\frac{1}{4}\cos^2x(C-\ln\cos x)^2$; 4) $y^2=(x-1)^2(C+2x)$. **47.32.** 1) $y^2=\frac{x^2+2}{x^2}$; 2) $y=(e^{-\sin x}+1)^2$; 3) $y=\frac{2e^{-x^3}}{1-x}$; 4) $y^2\cos x=1$. **47.33.** 1) $x^2+xy+y^2=$ $=C$; 2) $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C$; 3) $x^3+2xy-3y=C$; 4) $5x^2y-8xy+x+3y=C$. **47.34.** 1) $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$; 2) $x^4+2x^2y^2+y^4=C$; 3) $x^3+3x^2y^2+y^4=C$; 4) x^2+x^3y- $-y^3=C$. **47.35.** 1) $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; 2) $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; 3) $x+\frac{x^3}{2}+\frac{5}{y}=C$; 4) $4x^2+y^2=Cx$. **47.36.** 1) $y=x$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=1$; 3) $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=\ln\frac{\pi^2}{2}$; 4) $\frac{x^2}{2}+ye^{x/y}=2$.

§48

48.1. $y=x^2-3x+5$. **48.2.** $y=\frac{1}{3}x^3$. **48.3.** $y=\frac{1}{4}x^2+C$. **48.4.** 45 მ. **48.5.** $s=t^3+t^2+4$. **48.6.** $s=0{,}05t^2+15$. **48.7.** $s=e^{0{,}5t}$. **48.8.** $s=5\cdot 2^{t-1}$. **48.9.** $x(t)=10e^{0.2t\cdot\ln 3}$. **48.10.** $x(t)=100\cdot 2^{t/3}$. **48.11.** $R=R_0e^{-\frac{t\ln 2}{1600}}$ **48.12.** $10\sqrt{2}$ კგ. **48.13.** $T=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}$ **48.14.** 35,6°. **48.15.** 1) 56°; 2) 4 სთ 11 წთ. **48.16.** $v=1{,}28$ კმ/სთ. **48.17.** 0,467 კმ/წმ. **48.18.** $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$, სადაც $a=\frac{k_1}{2m}$, $b=\frac{2km}{k_1^2}$. **48.19.** $\omega=100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ ბრ/წთ.

§49

49.1. 1) ყველა x, y, y'-ებისათვის; 2) $y'<x^2$; 3) $y'>0$; 4) $v>0$. **49.3.** 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოკიდებელია; 4) წრფივად დამოკიდებელია. **49.4.** 1) წრფივად დამოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოკიდებელია; 4) წრფივად დამოკიდებელია. **49.5.** 1) $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$; 2) $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2$; 3) $y=\frac{x^4}{12}-e^{-x}+$ $+C_1x+C_2$; 4) $y=-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$. **49.6.** 1) $y=x\ln|x|+C_1x+C_2$; 2) $y=$

$=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$; 3) $y=C_1x+C_2-\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|$; 4) $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)-x\ln\sqrt{1+x^2}+$ $+C_2$. **49.7.** 1) $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 2) $y=\frac{x^4}{24}-\sin x+C_1x^2+C_2x+C$; 3) $y=\frac{x^4}{24}-e^x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; 4) $y=\frac{x^3}{6}-\cos x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; 5) $y=-\frac{x}{2}\ln^2x+$ $+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; 6) $y=\frac{1}{12}x^4\ln x-\frac{13}{144}x^4+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$. **49.8.** 1) $y=C_1x^2+C_2$; 2) $y=\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, როცა $C_1>0$; $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$, როცა $C_1<0$; $y=C-\frac{1}{x}$; 3) $C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2$, $2y=x^2+C$, $y=C$; 4) $y=C_2-$ $-C_1\cos x$. **49.9.** 1) $y=C_1e^{x^2}+C_2$; 2) $y=C_1(x\ln x-x)+C_2$; 3) $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+$ $+C_2$, $y=\frac{1}{2}ex^2+C$; 4) $y=\frac{1}{C_1}xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x}+C_2$; 5) $y=\frac{C_1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+C_2$; 6) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{C_1}{3}x^3-\frac{C_1+1}{2}x^2+C_2$. **49.10.** 1) $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$; 2) $y=C_1x^3+$ $+C_2x^3+C_3$; 3) $y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$; 4) $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+$ $+C_2x+C_3$. **49.11.** 1) $y=3\ln x-2x^2-6x+6$; 2) $y=1-\cos 2x$; 3) $y=-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x+1$; 4) $y=(x-2)e^x+x+3$. **49.12.** 1) $y=\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=x^3+3x$; 3) $y=\frac{1}{2}x^2$; 4) $y=\frac{1}{2}x^2$. **49.13.** 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$; 3) $y=C_1e^{0.5x}+C_2e^{2x}$; 4) $y=C_1x+C_2e^{-\frac{7}{2}x}$ **49.14.** 1) $y=C_1+C_2e^{-3x}$; 2) $y=C_1+C_2e^{2.5x}$; 3) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$; 4) $y=C_1e^{-\frac{5}{3}x}+$ $+C_2e^{\frac{5}{3}x}$ **49.15.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{1.5x}$. **49.16.** 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; 2) $y=C_1\cos 7x+C_2\sin 7x$; 3) $y=C_1\cos\frac{3}{2}x+C_2\sin\frac{3}{2}x$; 4) $y=C_1\cos 0{,}8x+C_2\sin 0{,}8x$. **49.17.** 1) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+$ $+C_2\sin 2x)$; 2) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 3) $y=e^{-x}(C_1\cos 1{,}5x+C_2\sin 1{,}5x)$; 4) $y=e^{\frac{5}{3}x}(C_1\cos\frac{2}{3}x+C_2\sin\frac{2}{3}x)$. **49.18.** 1) $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{3x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+$

$+C_3e^{2x}$; 3) $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x$; 4) $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$. **49.19.** 1) $y=C_1e^{2x}+e^{-x}\times$ $\times(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x)$; 2) $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$; 3) $y=e^x(C_1+C_2x+$ $+C_3x^2)$; 4) $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}$. **49.20.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{4x}+(C_3+C_4x)e^{-4x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$; 3) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$; 4) $y=(C_1+$ $+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{3x}$. **49.21.** 1) $y=4e^x+e^{4x}$; 2) $y=1$; 3) $y=(7-3x)e^{x-2}$; 4) $y=2e^{5x}(1-2x)$; 5) $y=\cos 2x+\sin 2x$; 6) $y=e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)$. **49.22.** 1) $y=1+\cos x$; 2) $y=e^x$; 3) $y=e^x+\cos x-2$; 4) $y=\sin 2x$. **49.23.** 1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}-1$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}-2$; 3) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x+1$; 4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x-2$. **49.24.** 1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-3(x^2+x+1{,}5)$; 2) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+2x^2-1$; 3) $y=(C_1+$ $+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$; 4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x^3-2x+1$. **49.25.** 1) $y=$ $=C_1+C_2e^{3x}-2x$; 2) $y=C_1+C_2e^{-1{,}5x}+2x$; 3) $y=C_1+C_2e^{-8x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{8}$; 4) $y=C_1+C_2e^{\frac{x}{7}}-$ $-x^2-98x$; 5) $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$; 6) $y=C_1+C_2e^{-0{,}5x}+x^3-x^2$. **49.26.** 1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{5}e^{4x}$; 2) $y=C_1e^x+\left(C_2-\frac{x}{2}\right)e^{-x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)\times$ $\times e^{2x}$; 4) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$. **49.27.** 1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}-4{,}5\cdot xe^{-3x}$; 2) $y=C_1x+C_2e^{-2x}+$ $+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+4x^2e^{-2x}$; 4) $y=(C_1+C_2x+x^3)e^x$. **49.28.** 1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x$; 2) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\sin x-\cos x$; 3) $y=$ $=C_1+C_2e^{-2x}+\left(\frac{7}{50}-\frac{x}{20}\right)\sin x-\left(\frac{x}{10}+\frac{1}{50}\right)\cos x$; 4) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(0{,}1x-0{,}12)\times$ $\times\cos x-(0{,}3x+0{,}34)\sin x$. **49.29.** 1) $y=C_1+C_2e^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x$; 2) $y=C_1+C_2e^{-2x}+$ $+\frac{1}{5}(6\sin x-2\cos x)e^x$; 3) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+x\cos x+x^2\sin x$; 4) $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$. **49.30.** 1) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-$ $-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$; 3) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}+xe^x+e^{-x}$; 4) $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+$ $+e^{-x}-4\cos 2x+\sin 2x$. **49.31.** 1) $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$; 2) $y=C_1e^{3x}+$

$+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$; 3) $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x+x^2+4x+\frac{x^2}{2}e^x$; 4) $y=$ $=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x+\frac{x^4}{24}-e^{-x}$. **49.32.** 1) $y=2xe^x$-sh$x$; 2) $y=e^x(0{,}16\times$ $\times\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$; 3) $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$; 4) $y=\frac{4x+1}{8}\times$ $\times e^{2x}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. **49.33.** 1) $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}$; 2) $y=e^x-e^{-x}+x^2$; 3) $y=e^x+x^3$; 4) $y=$ $=2xe^x$.

§50

50.1. $s=s_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$. **50.2.** $s=t^3-2t^2+t$. **50.3.** $s=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+\frac{2t}{3}+\frac{37}{12}\right)$. **50.4.** $s=vt-\frac{9t^2}{2}$. **50.5.** $y=y_0+100t-490{,}5t^2$, $t\approx 0{,}1$ წმ. **50.6.** $y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$. **50.7.** $y=2{,}5e^x-0{,}5e^{3x}$. **50.8.** 10 წმ, 50ln2 მ. **50.9.** $S=\frac{m}{k}\ln ch\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. **50.10.** $x=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$. **50.11.** $s=b\cos pt$.

§51

51.1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{11}{18}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{23}{81}$. **51.2.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{11}{18}$; 3) 7,5; 4) $\frac{1}{2}$.
51.3. 1) არა; 2) არა; 3) არა; 4) კი; 5) არა; 6) არა. **51.4.** 1) კი; 2) არა; 3) კი; 4) არა; 5) არა; 6) კი. **51.5.** 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **51.6.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **51.7.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) განშლადია; 4) კრებადია. **51.8.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **51.9.** 1) განშლადია; 2) კრებადია; 3) განშლადია; 4) კრებადია. **51.10.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **51.11.** 1) განშლადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **51.12.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **51.13.** 1) განშლადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **51.14.** 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **51.15.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **51.16.** 1) პირობით კრებადია; 2) პირობით კრებადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია. **51.17.** 1) განშლადია; 2) აბსოლუტურად კრებადია; 3) პირობით კრებადია; 4) აბსოლუტურად კრებადია. **51.19.** 1) პირობით კრებადია; 2) აბსოლუტურად კრება-

დია; 3) პირობით კრებადია; 4) აბსოლუტურად კრებადია; 5) პირობით კრებადია; 6) აბსოლუტურად კრებადია.

§52

52.1. $R=1$, $[-1;1[$; 2) $R=1$, $[-1;1]$; 3) $R=1$, $]-1;1]$; 4) $R=3$, $]-3;3[$. **52.2.** 1) $R=1$, $]-1;1[$; 2) $R=2$, $]-2;2[$; 3) $R=1$, $]-1;1]$; 4) $R=1$, $[-1;1]$. **52.3.** 1) $R=1$, $]-1;1]$; 2) $R=0$; 3) $R=2$, $]-2;2[$; 4) $R=\frac{1}{2}$, $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$. **52.4.** 1) $]-1;1[$, $\frac{1}{(1-x)^2}$; 2) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $-\ln(1-2x)$; 3) $]-3;3[$, $\frac{9}{(x+3)^2}$; 4) $[-1;1]$, $(1-x)\ln(1-x)+x$; 5) $]-2;2[$, $\frac{16}{(2-x)^3}$; 6) $]-1;1[$, $\frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}$. **52.5.** $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln\frac{5}{4}$; 4) 6. **52.6.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n$, $]-\infty;+\infty[$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$, $]-\infty;+\infty[$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$, $]-\infty;+\infty[$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{4n-2}}{(2n-1)!}$, $]-\infty;+\infty[$. **52.7.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}$, $]-\infty;+\infty[$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}$, $]-\infty;+\infty[$; 3) $2\sum_{n=0}^{\infty}3^n\cdot x^{2n}$, $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $]-1;1[$. **52.8.** 1) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n$, $[0;2]$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$, $]0;2]$; 3) $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$, $]-4;0[$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n$, $]-3;-1[$.

ლათინური ანბანი

A, *a* – ა
B, *b* – ბე
C, *c* – ცე
D, *d* – დე
E, *e* – ე
F, *f* – ეფ
G, *g* – ჟე
H, *h* – ჰაშ
I, *i* – ი
J, *j* – ჟი
K, *k* – კა
L, *l* – ელ
M, *m* – ემ
N, *n* – ენ
O, *o* – ო
P, *p* – პე
Q, *q* – ქუ
R, *r* – ერ
S, *s* – ეს
T, *t* – ტე
U, *u* – უ
V, *v* – ვე
W, *w* – დუბლ-ვე
X, *x* – იქს
Y, *y* – იგრეკ
Z, *z* – ზეტ

ბერძნული ანბანი

Α, α – ალფა
Β, β – ბეტა
Γ, γ – გამა
Δ, δ – დელტა
Ε, ε – ეფსილონ
Ζ, ς – ძეტა
Η, η – ეტა
Θ, ϑ – თეტა
Ι, ι – იოტა
Κ, κ – კაპა
Λ, λ – ლამბდა
Μ, μ – მიუ
Ν, ν – ნიუ
Ξ, ξ – ქსი
Ο, o – ომიკრონი
Π, π – პი
Ρ, ρ – რო
Σ, σ – სიგმა
Τ, τ – ტაუ
Φ, ϕ – ფი
Χ, χ – ხი
Υ, υ – იფსილონ
Ψ, ψ – ფსი
Ω, ω – ომეგა

ს ა რ ჩ ე ვ ი

წინასიტყვაობა 3

მათემატიკის საგანი 5

I თავი. ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვები 7

§1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე. ლოგიკის სიმბოლოები 7

§2. ნამდვილი რიცხვები. რიცხვითი ღერძი. რიცხვთა შუალედები 10

§3. ნამდვილი რიცხვის მოდული (აბსოლუტური სიდიდე) და მისი თვისებები 12

§4. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები 13

§5. რიცხვითი სიმრავლის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი 14

§6. კოორდინატთა სისტემები 16

§7. კომპლექსური რიცხვები 20

II თავი. წრფივი ალგებრის ელემენტები 27

§1. მატრიცები და დეტერმინანტები 27

§2. წრფივ განტოლებათა სისტემები 39

III თავი. ვექტორთა ალგებრის ელემენტები 43

§1. ვექტორები 43

§2. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე 46

§3. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. დეკარტის მართკუთხა ბაზისი 49

§4. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი 53

§5. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი 57

§6. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი 59

§7. ვექტორული და შერეული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინტებით. სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა 61

§8. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება 62

IV თავი. წრფე და სიბრტყე 66

§1. წირისა და ზედაპირის განტოლებები 66

§2. წრფე სიბრტყეზე 69

§3. სიბრტყის განტოლებები 77

§4. წრფე სივრცეში 82

§5. ზოგიერთი ამოცანა წრფესა და სიბრტყეზე სივრცეში 86

V თავი. მეორე რიგის წირები და ზედაპირები 88

§1. ელიფსი 89

§2. ჰიპერბოლა 93

§3. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები 99

§4. პარაბოლა 100
§5. მეორე რიგის წირები, როგორც კონუსური კვეთები 102
§6. მეორე რიგის ზედაპირები 104

VI თავი. მიმდევრობები 109

§1. მიმდევრობის ცნება 109
§2. მიმდევრობის ზღვარი 111
§3. ზოგიერთი თეორემა მიმდევრობის ზღვრის შესახებ 113
§4. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები 116
§5. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი 117
§6. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა 118

VII თავი. ფუნქცია და მისი ზღვარი 119

§1. ფუნქცია. განსაზღვრის არე. მნიშვნელობათა სიმრავლე. შექცეული ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი 119
§2. ფუნქციის მოცემის ხერხები 121
§3. ზრდადი და კლებადი, შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები 124
§4. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციები 126
§5. ფუნქციის ზღვარი 127
§6. თეორემები ფუნქციის ზღვრის შესახებ 130
§7. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები 132
§8. ორი შესანიშნავი ზღვარი 133

VIII თავი. უწყვეტი ფუნქციები 135

§1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში 135
§2. ფუნქციის წყვეტის წერტილები და მათი კლასიფიკაცია 137
§3. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები 139
§4. ზოგიერთი ზღვრის გამოთვლა 142
§5. უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შედარება. o და O სიმბოლოები 143

IX თავი. წარმოებული და დიფერენციალი 148

§1. ფუნქციის წარმოებული 148
§2. კავშირი წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის 151
§3. ჯამის, ნამრავლის და ფარდობის წარმოებული 152
§4. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები 153
§5. რთული ფუნქციის წარმოებული 155

§6. უმარტივეს ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი 157
§7. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული. ხარისხოვანმაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული 157
§8. ფუნქციის დიფერენციალი 158
§9. მაღალი რიგის წარმოებული 160
§10. პარამეტრულად და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის გაწარმოება 161
§11. მაღალი რიგის დიფერენციალები და მათი კავშირი წარმოებულებთან 163
§12. წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება გეომეტრიასა და მექანიკაში 164
§13. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები 167
§14. განუსაზღვრელობათა გახსნა. ლოპიტალის წესი 171
§15. ტეილორის ფორმულა და მისი ზოგიერთი გამოყენება 174
§16. ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით 176

X ᲗᲐᲕᲘ. ᲛᲠᲐᲕᲐᲚᲘ ᲪᲕᲚᲐᲓᲘᲡ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲘᲡ ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠᲘ ᲐᲦᲠᲘᲪᲮᲕᲐ 192

§1. მრავალი ცვლადის ფუნქცია, ზღვარი და უწყვეტობა 192
§2. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი 200
§3. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი 204
§4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები 206
§5. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი 207
§6. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი 209

XI ᲗᲐᲕᲘ. ᲒᲐᲜᲣᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲔᲚᲘ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲐᲚᲘ 211

§1. პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი 211
§2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები 213
§3. ძირითად განუსაზღვრელ ინტეგრალთა ცხრილი 214
§4. ზოგიერთი მაგალითი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე 215
§5. ცვლადის გარდაქმნის ხერხი 216
§6. კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი ინტეგრალი 218
§7. ნაწილობითი ინტეგრება 219
§8. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 221
§9. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 224
§10. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის

ინტეგრება 226

XII ᲗᲐᲕᲘ. ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲣᲚᲘ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲐᲚᲘ 228

§1. მრუდწირული ტრაპეცია და მისი ფართობი 228
§2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება 230
§3. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი და თვისებები 230
§4. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში 232
§5. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის 233
§6. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციის ინტეგრება 234
§7. არასაკუთრივი ინტეგრალები 235
§8. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიაში 239
§9. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ფიზიკაში 246

XIII ᲗᲐᲕᲘ. ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠᲘ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲔᲑᲘ 248

§1. ამოცანები, რომელთაც მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ცნებამდე 248
§2. ძირითადი ცნებები 251
§3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება 252
§4. დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით 254
§5. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით 255
§6. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება 257
§7. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება 259
§8. ბერნულის განტოლება 260
§9. განტოლება სრულ დიფერენციალებში 261
§10. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები 263
§11. განტოლებები, რომლებიც ამოიხსნებიან რიგის დაწევით 264
§12. წრფივი ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი განტოლებები 267
§13. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებები 269

XIV ᲗᲐᲕᲘ. ᲠᲘᲪᲮᲕᲗᲐ ᲛᲬᲙᲠᲘᲕᲘ 280

§1. ნამდვილ რიცხვთა მწკრივი. კრებადობა და განშლადობა 280
§2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა. კრებადი მწკრივის ძირითადი თვისებები 282
§3. დადებითი მწკრივები. კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. მწკრივთა შედარების ნიშნები 283
§4. დადებით მწკრივთა კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნები 286

§5. დადებით მწკრივთა კრებადობის კოშის ინტეგრალური ნიშანი 288
§6. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი. ლეიბნიცის თეორემა 289
§7. აბსოლუტურად და პირობით კრებადი მწკრივები 291
§8. პირობით და აბსოლუტურად კრებად მწკრივთა თვისებები 292

XV თავი. ხარისხოვანი მწკრივები 294

§1. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალი და კრებადობის რადიუსი 294
§2. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოთვლა 296
§3. ხარისხოვანი მწკრივების ზოგიერთი თვისება 297
§4. ფუნქციის გაშლა ხარისხოვან მწკრივად. ტეილორისა და მაკლორენის მწკრივი და მათი გამოყენება 300

ამოცანათა კრებული
წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

§1. სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები 304
§2. მოქმედებანი ერთწევრებზე და მრავალწევრებზე. მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა 305
§3. კოორდინატთა სისტემები 307
§4. კომპლექსური რიცხვები 309
§5. მატრიცები და დეტერმინანტები 311
§6. წრფივ განტოლებათა სისტემები 315
§7. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. ვექტორის კოორდინატები 316
§8. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი 318
§9. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი 321
§10. ვექტორების ზოგიერთი გამოყენება 323
§11. წრფე სიბრტყეზე 324
§12. სიბრტყე 328
§13. წრფე სივრცეში. წრფე და სიბრტყე 330
§14. წრეწირი 333
§15. ელიფსი 334
§16. ჰიპერბოლა 336
§17. პარაბოლა 339
§18. მეორე რიგის ზედაპირები 340

ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური

აღრიცხვა

§19. მიმდევრობა და მისი ზღვარი 343
§20. ფუნქცია 346
§21. ფუნქციის ზღვარი 349
§22. ფუნქციის უწყვეტობა 354
§23. წარმოებული და დიფერენციალი 356
§24. მაღალი რიგის წარმოებული და დიფერენციალი 360
§25. პარამეტრული და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებული 361
§26. წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება გეომეტრიასა და მექანიკაში 363
§27. ლოპიტალის წესი 365
§28. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა, ექსტრემუმი, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა 367
§29. ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა, გადაღუნვის წერტილი, ასიმპტოტები 371
§30. ფუნქციის გრაფიკის აგება 371

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§31. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა 372
§32. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი. რთული ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი 375
§33. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები 378
§34. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი 380
§35. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი 380

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

§36. უშუალო ინტეგრება 382
§37. ჩასმის ხერხი 384
§38. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი 386
§39. კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი ინტეგრალები 387
§40. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 388
§41. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება 390
§42. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება 391

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

§43. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა 392
§44. არასაკუთრივი ინტეგრალები 395
§45. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება

გეომეტრიაში ... 396
§46. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ფიზიკაში 399

ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠᲘ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲔᲑᲘ

§47. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები ... 401
§48. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენებაზე ... 406
§49. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები 409
§50. ამოცანები მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენებაზე 412

ᲛᲬᲙᲠᲘᲕᲔᲑᲘ

§51. რიცხვთა მწკრივები ... 415
§52. ხარისხოვანი მწკრივები 417

ᲞᲐᲡᲣᲮᲔᲑᲘ 419

ᲚᲐᲗᲘᲜᲣᲠᲘ ᲓᲐ ᲑᲔᲠᲫᲜᲣᲚᲘ ᲐᲜᲑᲐᲜᲘ 467

იბეჭდება ავტორთა მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 05.11.2008. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.11.2008. ქაღალდის ზომა 60×84 1/16.
პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 29,75
ტირაჟი 300 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant
scripta manent