

290 / 3
1986 / 3



თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

268

ISSN 0376 — 2367

ციბერნეტიკა • გამოყენებითი მათემატიკა
СИБЕРНЕТИКА • ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS • APPLIED MATHEMATICS



Издательство Тбилисского университета
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

TBILISI UNIVERSITY PRESS



თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINGS OF TBLISI UNIVERSITY

თბილისის
უნივერსიტეტი

ტ. 268 v.

კიბერნეტიკა. გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS, APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1986 TBLISI

Труды Тбилисского университета
т. 268



Кибернетика. Прикладная математика

Тбилиси 1986

Редакционная коллегия



Г.Л.Арсенишвили, Н.Н.Вахания, Р.В.Гамкrelidze,
Т.Г.Гачечилadze, Р.А.Кордзадзе, Р.П.Мегрелишвили
(секретарь), Г.В.Меладзе, В.В.Чавчанидзе (редактор)

საწიგაუცემო კოლეგია

ტ.არსენიშვილი, რ.ვახანიანი, ვ.ჩაჩანიანი,
ნ.ვახანიანი, რ.კორძაძე, რ.მეგრელიშვილი (დიპლომატი),
გ.მელაძე, ვ.ჭავჭავანიძე (წიგაუცემო)

Editorial board

G.Arsenishvili, V.Chavchanidze (editor),
T.Gachechiladze, R.Gamkrelidze, R.Kordzadze,
R.Megrelisvili (secretary), H.Meladze,
N.Vakhania

Издательство Тбилисского университета, 1986

© შიგრიის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1986

TBILISI UNIVERSITY PRESS, 1986



268, 1986

ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИЗУЧЕНИЮ ПАМЯТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ
МАТЕМАТИКЕ

Р.Л.Хомерики, К.Е.Гогичайшвили

18487
В последние годы практически во все отрасли науки интен-
сивно внедряются количественные методы, основанные на исполь-
зовании математического аппарата. Не составляют исключения и
такие науки, как педагогика и психология.

В практике научно-исследовательских разработок в указан-
ных областях науки наиболее эффективно и широко применяются
статистические методы обработки экспериментальных данных.

Как и во всякой экспериментальной науке, имеющей дело с
массовыми явлениями, в психологии и педагогике полученный экс-
периментальный материал систематизируется и обобщается с по-
мощью статистических методов. Такой подход к изучаемым явлени-
ям выявляет причинные зависимости и дает возможность делать
соответствующие выводы.

Исследователей часто интересует, как связаны между собой
две переменные в данной группе лиц. Например, имеют ли учени-
ки, научившиеся читать раньше других, тенденцию к более высо-
кой успеваемости в последующих классах и т.д.

В предлагаемой работе изучается связь между двумя типами

ბაქ. სსრ უ. მარტოვი
სსრ სსრ სსრ

умственных способностей при обучении математике

Пусть X - измерение склонности к запоминанию математических теорем, Y - измерение склонности к решению математических задач.

Для изучения связи между X и Y проводился эксперимент над 20 слушателями подготовительной группы в возрасте 18-20 лет. Им было предложено запомнить 15 теорем, которые неоднократно использовались на практических занятиях в последующем процессе обучения. С частотой 3-4 раза в месяц испытуемые подвергались письменным опросам. Знание определенной теоремы обозначалось через 1, а незнание - через 0. В таблице I приведен результат опроса одного испытуемого.

Таблица I

теор.	исп.														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Информация, приведенная в данной таблице, достаточна для



статистических исследований. Например, по данным таблицы можно определить среднее значение количества испытаний до первого запоминания, среднее значение количества незапоминаний в течение всего эксперимента и т.д. / 2 /.

В нашем эксперименте предпочтение было отдано оценке памяти по среднему числу незапоминаний. Эта оценка, поскольку количество теорем для каждого испытуемого одинаково, дает простое статистическое выражение и, как показал анализ, не уступает другим более сложным характеристикам с точки зрения математических зависимостей.

Таким образом, каждый i -ый индивид по X оценивался целочисленным баллом X_i , равным количеству незапоминаний до полного запоминания.

Параллельно с освоением теорем фиксировались показатели испытуемых на контрольных работах по решению задач, предусмотренных программой. Оценкой служило среднее число нерешенных задач, и, как отмечалось выше, оно практически было равно сумме оценок на контрольных работах при следующей системе баллов: отличная работа - 0 балла, хорошая - 1 балл, удовлетворительная - 2 балла, неудовлетворительная - 3 балла. Суммарная оценка для каждого i -го испытуемого - Y_i являлась характеристикой склонности к решению математических задач (см. таб.2).

Таблица 2

X_i	27	14	67	14	49	18	22	15	20	17	48	18	32	10	15	46	19	17	48	25
Y_i	6	3	8	4	9	6	3	1	6	2	5	5	7	5	5	8	6	5	6	3



Из таблицы 2 получаем два множества рангов, присвоенных 20 испытуемым по оклонности к запоминанию математических теорем X и оклонности к решению математических задач Y .

Применим коэффициент корреляции Спирмена:

$$r_s = \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)},$$

где x_i, y_i является разностью между рангами X и Y i -го испытуемого, а n - количество испытуемых.

Применяя поправки для связанных рангов $r_s = 0,65$ о уровне значеня, равным 0,01, можно заключить, что значение r_s овидетельствует о довольно сильной связи между X и Y .

Был проведен аналогичный эксперимент для обнаружения связи между запоминанием математических формул и решением математических задач. Ранговый коэффициент корреляции дал $r_s = 0,35$ о уровне значеня 0,05. Расхождение между значениями r_s по двум процессам может дать полезную информацию для педагогов.

Поступила 2.IX.1985

Кафедра примененя
математических методов

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Глаос, Дж. Стенли, Статистические методы в педагогике и психологии. -М.: Прогресс, 1976.
2. Р. Буш, Ф. Мостеллер. Стохастические модели обучаемости. -М.: ГИИМЛ, 1962.

რ. ხომერტიკი, კ. გოგიჩაიშვილი

მათემატიკის სწავლების პროცესში მახსოვრობის

სწავლების ექსპერიმენტული

რეზიუმე

შეჩვენი აღწერილია ექსპერიმენტი, რძილის მიზანი ადრიაჩი-
ნის კავშირი მახსოვრობასა და აზროვნებას შორის მათემატიკის სწა-
ვლების პროცესში, კავშირის დასადგენად გამოყენებულია კორელაციის
კოეფიციენტი.

R. Khomeriki, K. Gogichashvili

AN EXPERIMENTAL STUDY OF MEMORY IN THE PROCESS
OF LEARNING MATHEMATICS

Summary

The experiment designed to identify the relationship between
memory and thinking in the course of learning mathematics is descri-
bed. A correlation coefficient is used in establishing the relationship.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ბიბლიოტეკის შრომის ნიშნები რეზიუმის ორგენოზაციის სახელმძღვანელო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

კალიგრაფიული დაგეგმვის და მხატვრობის ამოცანის

ამოხსნის მეთოდი

პ. ა. ჯგერეძე

ბოლო რიგის განხორციელება ფრიაპ საჭირო გამოკვლევებში
ურთიერთობიანი ამოცანის ამოხსნის ეფექტური ხერხის პოვნისა
იმ შემთხვევაში, როდესაც უკანასკნელი ხასიათდება საკმაოდ
ბიბლიოტეკის ფუნქციონირების მატრიცით. მიღებული შედეგის მნიშ-
ვნიერობის ნაწილი დაკავშირებულია // ქსელური დაგეგმვის
მეთოდის გამოყენებასთან. ქსელური მეთოდი ნარეზობაგენს
ურთიერთობიანი ამოცანის სტრუქტურის ანალიზის მიქაფი ია-
რადს, რაც საშუალებას გვაძლევს დავამუშავოთ ხონსონის აღკ-
რების ოპტიმალური გამარტივებული რამტიკლება.

1, 2, 3/ შრომებში ჩამოთვლილია ყველა ძირითადი პირობა
და შეზღუდვები, რომელიც გააჩნია ასეთი სახის ამოცანებს.
ნათქვამთან რამტიკების აღვნიშნოთ შემდეგ: ამოცანის ყველა
საწყისი პირობა მოიცავს. T ფუნქციონირების მატრიცის სახით,
რომელიც ნარეზობაგენს მატრიცის ურთი შემთხვევას, როდესაც
სამუშაოთა შესრულების თანამიმდევრობა ურთიერთი ყველა
მანქანისათვის

მატრიცის გააჩნია ბომა (M x M) და შედეგად უდებენ-
ფუნქციონირების, რომელიც განსაზღვრავენ შესაბამის მანქანებზე
სამუშაოების შესასრულებლად საჭირო რიგის შუაღებებს. მან-
ქანების რამტიკის ხორციელება ისე, რომ j-ური რამტიკი
მიუკუთვნება მანქანას, რომელიც ფუნქციონირების მარტივობით



უნდა შეესრულებს რიგით j -ური მკვერცხისა. ყოველი მკვერცხი
 საბუნების საფორმის რიგის ხანგრძლივობა t_{ij} შეიძლება იყოს
 ნულისმიერი არაუარყოფითი რიცხვი. იმ შემთხვევაში, როდესაც
 $t_{ij} = 0$, ე.ი. როდესაც მკვერცხისა არ არის, ის ითვლება
 უარყოფითად. უკანასკნელი პირობა აუცილებელია, რადგან
 წინააღმდეგ შემთხვევაში ტექნოლოგიურ მანქანებზე მოცემული
 მკვერცხის არარსებობისას პანორამული მანქანებში სამუშაო
 შესრულების დასრულებულია. ამასთან უარყოფითი მკვერცხის
 განხორციელების დასასრულად ითვლება მისი დასაწყისი და
 არა წინა მკვერცხის რეალიზაციის დასასრული.

$S(i) = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ გარჩილის ქვეშ იგულისხმება პირ-
 ვული M ნატურალური რიცხვის გადამტვირთვა.

ნულისმიერი S გარჩილი გარდასახავს სანების
 $T' = [t'_{ij}]^S$ მატრიცას, სადაც S ახორციელებს T მატრი-
 ცის სტრიქონების გადანაცვლებას.

t_{ij} ელემენტთა მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი იძუ-
 ბარეობს ერთ სვეტში ან ერთ სტრიქონში, უნდა გვაქვს მატრიცა-
 ში $T[I]$. ცხარია $(n \times m)$ განზომილებიანი T მატრი-
 ცაში ყოველი გვაქვს შეიყვანს $(n+m-1)$ ელემენტს. ამასთან
 მატრიცის ნულისმიერი გვაქვს ხასიათდება დამოკიდებულებით

$$F_1(S) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=K_j-1}^{K_j} t_{ij} \quad (1)$$

სადაც $\{K\} = \{K_0, K_1, \dots, K_m\}$ - ნატურალური რიცხვთა
 მიმდევრობაა, რომლისთვისაც სამარტივიანია შემდეგი პირობები:

- 1/ $K_0 = 1$;
- 2/ $K_m = n$;
- 3/ $K_i \leq K_j$, ყოველი $i < j$.



աղաղակ: $n \times m$ ձևի T թվաբանական
մատրիցის յուրաքանչյուր շարժիչ $n \cdot \tilde{y}/m$
ստորագծով.

բանաբան: T մատրիցիս Z շարժիչի x ձևի մեծագույն
ընդհանուր ընդհանուր ընդհանուր $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր
ստորագծով.

$$Z_{\Sigma} = \sum_{j=1}^m z_j, \quad (6)$$

մատրիցիս Z ձևի մեծագույն ընդհանուր ընդհանուր

$$Z_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i, \quad (7)$$

(4), (6) և (7) թվաբանական ընդհանուր ընդհանուր
ընդհանուր, որի T մատրիցիսի n ընդհանուր j_m , որի
ստորագծով $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր

$$z_{j,m} \geq n \cdot \tilde{y}/m. \quad (8)$$

մատրիցիս Z ձևի մեծագույն ընդհանուր ընդհանուր
ստորագծով $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր $Z_{j,m}$ ստորագծով, որի
ընդհանուր $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր n ընդհանուր, որի
ստորագծով $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր

Մատրիցիսի մատրիցիսի $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր
ընդհանուր P_i ընդհանուր Q_j ընդհանուր
ստորագծով $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր
ստորագծով $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր $n \cdot \tilde{y}/m$ ընդհանուր



კოეფიციენტი სამუშაოთა P_i რაოდენობაზე და ტიპის m .

ჩამოთვლილ პირობებში განსაკუთრებულ აუცილებლობას იძენს არა მარტო ასეთი ამოცანების ამოხსნის შესტი მეთოდების გამოყენება, არამედ მისაბრუნებელი აღჭურვილობის ადრია. ეს აღჭურვილობა საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ ამოხსნის შემთხვევითი ახლოს ან მასთან გამჭვრედილი კი.

ამოცანების ამოხსნის მიხედვებით მეთოდების ცომილების განსაზღვრა მოიხმოს $F_1(s)$ ქვედა საზღვრის შესტი გამოთვალს.

ქვედა საზღვრის სიძიების შეფასება შეიძლება განხორციელდეს ტექნოლოგიური მაჭრიცის სვეტებიდან ან სჭრიქონებიდან გამომდინარე. რეჭრის უკვე ბენით ავრნიშნეთ, განიხილება შემთხვევა, როდესაც მაჭრიცის სჭრიქონების რიცხვი საკმაოდ ალმატება სვეტების რაოდენობას, ე.ი. $P_i \geq Q_j$. ამიტომ ქვედა საზღვრის რასაბეჭნად გამოვიყენებთ მაჭრიცის სვეტებს.

ავრნიშნოთ Z_{max} -ური მანქანის მასიმიზური რავირება. ის ტილია

$$Z_{max} = \max Z_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

ცხარია Z_{max} სიძიე პირველი მისაბრუნებელი მეთოდის მივიღოთ ამოცანის ამოხსნის ქვედა საზღვრის შეფასებამ, რომელიც ხასიატება T ტექნოლოგიური მაჭრიცით.

ქვედა საზღვრის უჭრე შესტი შეფასება შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ფრმულის საფუძველზე:

$$\tilde{z} = Z_{max} + \min_{l_1, l_2 = \overline{1, n}} \left(\sum_{j=1}^{j-1} t_{l_1 j} + \sum_{j=j+1}^m t_{l_2 j} \right), \quad l_1 \neq l_2 \quad (10)$$



სადაც $j_m - j$ ინდექსის მნიშვნელობაა, რომელიც შეესა-
 რამება $\xi_j = \xi_{max}$ სვეტს. უკანასკნელი შეფასება წარმოა-
 გენს უფრო გუსტს იმ შემთხვევაში, როდესაც T ფუნქცი-
 ლურ მატრიცაში არ არის სტრიქონები ელემენტთა განსხვავ-
 ბული რიცხით.

ეს ამოსახსნელი ამოცანის სპეციფიკა უშვებს მსგავსი
 სტრიქონების არსებობას მატრიცაში, მაშინ T სპეციფიკის
 შეფასება (10) რამოკლებულია იმ შემთხვევაში ჩაიხვედოს რა-
 მაკმაყოფილებად. ცხადია, ეს T მატრიცაში არსებობს სტრი-
 ქონები, რომლის ელემენტები მცირეა და ურთიერთად განიხილება
 სხვა T_1 ფუნქციონური მატრიცა, რომელიც ეს ელემენტები
 საერთო არ არის, მაშინ (10) რამოკლებულია განიხი-
 ლი იმ ξ -ის მნიშვნელობა T_1 მატრიცის საფუძველზე აღმოჩენ-
 ება T -ს შესაბამის მნიშვნელობაზე მცირე. ამავდროულად

$F_1(s)$ ფუნქციონალის T სპეციფიკის შეფასება T მ-
 ატრიცის საფუძველზე არ იქნება ნაკლები, ვიდრე T_1 მატრიცის საფუ-
 ძველზე. (10) ფორმულას აღნიშნული ნაკლები ფრთხილად არსებობს,
 რადგანაც ამოცანებში რიგი გომის ფუნქციონური მატრიცის სპეციფიკა ხშირად
 გააჩნია მიმდებარეობის მნიშვნელობა. მაგალითის სახით შეგვიძლია გან-
 ვიხილოთ ელემენტარული ნაწილის ფუნქციონური მატრიცები.

$F_1(s)$ ფუნქციონალის T სპეციფიკის შეფასების პასაჟის ფუნ-
 ცია (10) რამოკლებულია საფუძველზე რამოკლებულია აღიარებ-
 ბით, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვამყაროთ რა გამოტრი-
 ცით განსახილველი მატრიცის განსახილველი მცირე ელემენტები.

აღიარებების მიხედვით აღნიშნულს აქვს სახე:

I მიხედვით. (10) ფორმულის გამოყენებით გამოიხატება ξ სიდი-
 დე, რის შედეგადაც ნაკლები მნიშვნელობა მიიკვთვლება



12 ბიჯი. მიმდინარეობს აღჭრისთვის მუშაობის შეწყვეტა და
გემ-ის გაჩერება.

საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ \tilde{X} -ის მნიშვნელობის
გამოყენება მოცემული ამოცანის ამოხსნის აბსოლუტური ცრომი-
ლობის განსაზღვრისათვის მიზანშეწონილია. ამავდროულად მიუღ-
ბელი შედეგის მხოლოდ ფარობით ცრომილობის საპოვნელად სა-
ჭიროა მხოლოდ \tilde{X}_{max} -ის შეფასება.

მიღებულია 7.IX.1985

მათემატიკური მეთო-
დების გამოყენების კათედრა

18487

ლიტერატურა

1. Д.И.Голенко. Статистические методы сетевого планирования и управления. - М.:Наука,1969.
2. Д.И.Голенко. Статистические модели в управлении производством. - М.:Статистика, 1973.
3. В.С.Тапаев, В.В.Шкурба. Введение в теорию расписаний.- М.: Наука, 1975.

2. Труды, т.268.

ბიბ. სსრ კ. მარქსის
სახ. სახ. რეპლუბ.



Д.А.Эдиберидзе

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОДНОМАРШРУТНОЙ ЗАДАЧИ
КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Резюме

С применением методики сетевого планирования дается решение одномаршрутной задачи очередности в тех случаях, когда последняя характеризуется технологической матрицей достаточно большой размерности.

Составлен алгоритм уточнения оценки нижней границы длины критического пути при заданном расписании.

D.Ediberidze

DEVELOPMENT OF METHODS FOR SOLVING A SINGLE-
-ROUTE CALENDAR PLANNING PROBLEM

Summary

Using the network planning methods, a single-route priority problem is solved for cases in which the latter is characterized by a technological matrix of a fairly large dimension. An algorithm is compiled for the specification of the estimate of the lower limit of the critical pathway length at a given schedule.



საქართველოს
საბჭოთავო
სტალინის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მტკვრისაღნი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

М.Т. Цуцунава

В предлагаемой статье изучается система нелинейных интегральных уравнений, к которой сводятся краевые задачи типа Гурса для квазилинейных гиперболических систем (см., напр., /1,2/).

В статье приняты следующие обозначения:

- R - множество действительных чисел;
- R^n - n -мерное вещественное евклидово пространство;
- $R^{n \times n}$ - множество всех $n \times n$ матриц с действительными элементами;

$y = (y_i)_{i=1}^n \in R^n$ и $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n \in R^{n \times n}$ — n -мерный вектор-столбец и $n \times n$ матрица с элементами y_i ($i=1,2,\dots,n$), a_{ik} ($i,k=1,2,\dots,n$);

$$|y| = (|y_i|)_{i=1}^n, \quad |A| = (|a_{ik}|)_{i,k=1}^n,$$

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|, \quad \|A\| = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|,$$

E - единичная матрица;

A^{-1} - матрица, обратная матрице A ;



A^* - матрица, транспонированная матрице A
 μ_A - максимум модулей собственных значений матрицы $A \in R^{n \times n}$, т.е. спектральный радиус оператора, порожденного матрицей A .

Неравенства между векторами и матрицами понимаются покомпонентно, т.е. если $y = (y_i)_{i=1}^n$, $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^n$, $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ и $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})_{i,k=1}^n$, то

$$y \leq \bar{y} \iff y_i \leq \bar{y}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

и

$$A \leq \bar{A} \iff a_{ik} \leq \bar{a}_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Пусть $D \subset R^m$. Вектор-функцию $y: D \rightarrow R^n$ (или матричную функцию $A: D \rightarrow R^{n \times n}$) будем называть ограниченной, непрерывной, абсолютно непрерывной и т.д., если каждая её компонента является соответственно ограниченной, непрерывной, абсолютно непрерывной и т.д.

Если $y = (y_i)_{i=1}^n: D \rightarrow R^n$, то

$$\sup \{y(x): x \in D\} = (\sup \{y_i(x): x \in D\})_{i=1}^n.$$

$K([0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_m] \times D; R^n)$ —

множество вектор-функций $f: [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_m] \times D \rightarrow R^n$ таких, что



а) $f(x_1, \dots, x_m, \cdot): \mathcal{D} \rightarrow R^n$ непрерывна при любом

$x_i \in [0, a_i]$ ($i=1, \dots, m$);

б) $f(\cdot, \cdot, y): [0, a_1] \times \dots \times [0, a_m] \rightarrow R^n$ измерима

при любом $y \in \mathcal{D}$;

в) f ограничена на любом компакте, содержащемся в

$[0, a] \times [0, b] \times \mathcal{D}$.

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений

$$z(x, t) = \varphi(x, t) + \Phi(x)z(x, b_1) +$$

$$+ \int_{a_0}^x ds \int_{b_0}^t g_0(x, t, s, \tau, z(s, \tau), z(a_0, \tau), z(s, b_0)) d\tau +$$

$$+ \int_{a_0}^x g_1(x, t, s, z(s, t), z(s, b_0), z(s, b_2)) ds +$$

$$+ \int_{b_0}^t g_2(x, t, \tau, z(x, \tau), z(a_0, \tau)) d\tau,$$

(I)

где

$0 < a < +\infty$, $0 < b < +\infty$, $a_0 \in [0, a]$, $b_i \in [0, b]$ ($i=0, 1$),

$\varphi: [0, a] \times [0, b] \rightarrow R^p$ — измеримая ограниченная вектор-функция,

$\Phi: [0, a] \rightarrow R^{p \times p}$ — измеримая ограниченная матричная

функция,

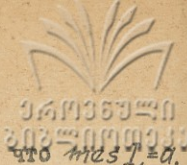
$$g_0 \in K([0, a] \times [0, b] \times [0, a] \times [0, b] \times R^{3p}; R^p),$$

$$g_1 \in K([0, a] \times [0, b] \times [0, a] \times R^{3p}; R^p),$$

$$g_2 \in K([0, a] \times [0, b] \times [0, b] \times R^{2p}; R^p).$$

Вектор-функция $z: [0, a] \times [0, b] \rightarrow R^p$ называется реше-

нием системы интегральных уравнений (I), если существует мно-



жества $I_1 \subset [0, a]$ и $I_2 \subset [0, b]$ такие, что $\text{mes } I_1 = a$, $\text{mes } I_2 = b$, $a_0 \in I_1$, $b_0 \in I_2$, $x(\cdot, t): [0, a] \rightarrow R^P$ измерима при любом $t \in I_2$, $x(x, \cdot): [0, b] \rightarrow R^P$ измерима при любом $x \in I_1$, и в каждой точке $I_1 \times I_2$ удовлетворяется (1).

Приведенная ниже теорема содержит признаки однозначной разрешимости системы (1). Для доказательства этой теоремы нам понадобится три вспомогательных предложения (леммы 1-3).

Первая из них касается ограниченности решения рассматриваемой системы при априорном допущении его существования.

Лемма 1. Пусть на множествах $([0, a] \times [0, b])^2 \times R^{3P}$, $[0, a] \times [0, b] \times [0, a] \times R^{2P}$ и $[0, a] \times [0, b] \times [0, b] \times R^{2P}$ соблюдаются неравенства

$$\|g_0(x, t, s, \tau, z_1, z_2, z_3)\| \leq l \left(1 + \sum_{i=1}^3 \|z_i\|\right), \quad (2)$$

$$\|g_1(x, t, s, z_1, z_2)\| \leq l \left(1 + \sum_{i=1}^2 \|z_i\|\right), \quad (3)$$

$$\|g_2(x, t, s, z_1, z_2)\| \leq l \left(1 + \sum_{i=1}^2 \|z_i\|\right), \quad (4)$$

$l = \text{const} > 0$. Тогда любое решение x системы интегральных уравнений (1) удовлетворяет условию

$$\forall \alpha i \max_{t \in [0, b]} \left(\forall \alpha i \max_{x \in [0, a]} \|x(x, t)\| \right) < +\infty. \quad (5)$$

Доказательство. В силу (2)-(4) из (1) имеем



$$\|z(x, t)\| \leq \ell_0 + \ell \left| \int_{a_0}^x \|z(x, t)\| ds \right| + \ell \left| \int_{b_0}^t \|z(x, \tau)\| d\tau \right|$$

при $x \in I_1, t \in I_2$, где $\text{mes } I_1 = a, \text{mes } I_2 = b$,

$$\begin{aligned} \ell_0 = & \sup \{ \|\varphi(x, t)\| : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b \} + \\ & \forall \text{ и } \max \{ \|\Lambda(x) z(x, b_0)\| : 0 \leq x \leq a \} + \\ & + \ell(a+b+ab) + \ell \int_0^a \int_0^b \|z(s, \tau)\| ds d\tau + \\ & + \ell(b+1) \int_0^a \|z(s, b_0)\| ds + \ell(a+1) \int_0^b \|z(a_0, \tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Принтегрировав это неравенство от b_0 до t ,
находим

$$\begin{aligned} V(x, t) & \leq \ell_0 + \ell \int_0^a \int_0^b \|z(s, \tau)\| ds d\tau + \ell \left| \int_{b_0}^t V(x, \tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq 2\ell_0 + \ell \left| \int_{b_0}^t V(x, \tau) d\tau \right| \quad \text{при } x \in I_1, t \in I_2, \end{aligned}$$

где

$$V(x, t) = \int_{b_0}^t \|z(x, \tau)\| d\tau.$$

Отсюда, в силу известной леммы Грануолла-Беллмана (/1/, стр.14), вытекает, что $V(x, t) \leq 2\ell_0 e^{b\ell}$ при $x \in I_1, t \in I_2$.

Исходя из этого неравенства, из (6) находим

$$\|z(x, t)\| \leq l_1 + l \int_{a_0}^x \|z(s, t)\| ds \quad \text{при } x \in I_1, t \in I_2,$$

где $l_1 = l_0 + 2l_0 e^{bl}$.

Отсюда, применяя снова лемму Гринауолла-Беллмана, получим

$$\|z(x, t)\| \leq l_1 e^{la} \quad \text{при } x \in I_1, t \in I_2.$$

Следовательно, обладает условие (5). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь систему интегральных уравнений, правая часть которых не содержит $z(x, b_1)$.

$$\begin{aligned} z(x, t) = & \tilde{\varphi}(x, t) + \int_0^x ds \int_0^t g_0(x, t, s, \tau, z(s, \tau), z(a_0, \tau), z(s, b_0)) d\tau + \\ & + \int_{a_0}^x \tilde{g}_1(x, t, s, z(s, t), z(s, b_0)) ds + \\ & + \int_0^t g_2(x, t, \tau, z(x, \tau), z(a_0, \tau)) d\tau, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi}: [0, a] \times [0, b] \rightarrow R^P$ - измеримая, ограниченная вектор-функция и

$$\tilde{g}_1 \in K([0, a] \times [0, b] \times R^{2P}; R^P).$$

Лемма 2. Пусть на множествах $([0, a] \times [0, b])^2 \times R^{3P}$, $[0, a] \times [0, b] \times [0, a] \times R^{2P}$ и $[0, a] \times [0, b] \times [0, b] \times R^{2P}$

обладают условия:

$$\begin{aligned} \|g_0(x, t, s, \tau, z_1, z_2, z_3) - g_0(x, t, s, \tau, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)\| & \leq \\ & \leq l \sum_{i=1}^3 \|z_i - \bar{z}_i\|, \end{aligned} \quad (8)$$



$$\|\tilde{g}_1(x, t, s, z_1, z_2) - \tilde{g}_1(x, t, s, \bar{z}_1, \bar{z}_2)\| \leq l \sum_{i=1}^2 \|z_i - \bar{z}_i\|$$

и

$$\|g_2(x, t, \tau, z_1, z_2) - g_2(x, t, \tau, \bar{z}_1, \bar{z}_2)\| \leq l \sum_{i=1}^2 \|z_i - \bar{z}_i\|, \quad (10)$$

где l - положительное число. Тогда система интегральных уравнений (7) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Полагая

$$l_0 = \sup \{ \|g_0(x, t, s, \tau, 0, 0, 0)\| + \|\tilde{g}_1(x, t, s, 0, 0)\| + \|g_2(x, t, \tau, 0, 0)\| : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t, \tau \leq b \},$$

в силу (8) - (10) будем иметь

$$\|g_0(x, t, s, \tau, z_1, z_2, z_3)\| \leq l_0 + l \sum_{i=1}^3 \|z_i\|, \quad (11)$$

$$\|\tilde{g}_1(x, t, s, z_1, z_2)\| \leq l_0 + l \sum_{i=1}^2 \|z_i\|,$$

$$\|g_2(x, t, \tau, z_1, z_2)\| \leq l_0 + l \sum_{i=1}^2 \|z_i\|.$$

Составим последовательность:

$$\zeta_0(x, t) = \tilde{\varphi}(x, t),$$

$$\zeta_k(x, t) = \tilde{\varphi}(x, t) + \int_{a_0}^T ds \int_{b_0}^t g_0(s, t, s, \tau, \zeta_{k-1}(s, \tau), \zeta_{k-1}(a_0, \tau), \zeta_{k-1}(s, b_0)) d\tau +$$

$$+ \int_{a_0}^T \tilde{g}_1(x, t, s, \zeta_{k-1}(s, t), \zeta_{k-1}(s, b_0)) ds +$$

$$+ \int_{t_0}^t g_2(x, t, \tau, \zeta_{k-1}(x, t), \zeta_{k-1}(a_0, \tau)) d\tau \quad (k=1, 2, \dots) \quad (12)$$

Легко видеть, что при любом натуральном K S_K является измеримой. С другой стороны, в силу (II)

$$\|S_1(x,t) - \varphi(x,t)\| \leq l^* \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b, \quad (I3)$$

где

$$l^* = (ab + a + b)l_0 + 2(ab + a + b)l \sup\{\|\tilde{\varphi}(x,t)\| : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\}.$$

Исходя из этого, по индукции докажем, что

$$\sup\{\|S_K(x,t)\| : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\} < +\infty \quad (I4)$$

($K=1, 2, \dots$)

Покажем теперь, что последовательность $(S_K)_{K=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на $[0, a] \times [0, b]$. В силу (I3) - (I4)

$$\eta_1 = \sup\{e^{-\mu l(|x-a_0|+|t-b_0|)} \|S_1(x,t) - S_0(x,t)\| : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\} \leq l^* \quad (I5)$$

и

$$\eta_K = \sup\{e^{-\mu l(|x-a_0|+|t-b_0|)} \|S_K(x,t) - S_{K-1}(x,t)\| : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\} < +\infty. \quad (I6)$$

С другой стороны, согласно (8) - (10) и (16) из (12) выходяим

$$\| \zeta_K(x, t) - \zeta_{K-1}(x, t) \| \leq 3\ell \left| \int_{a_0}^x ds \int_{b_0}^t e^{14\ell(s-a_0+|\tau-b_0|)} d\tau \right| \eta_{K-1} + \ell \left| \int_{a_0}^x e^{14\ell(s-a_0+|\tau-b_0|)} ds \right| \eta_{K-1} + 2\ell \left| \int_{b_0}^t e^{14\ell(x-a_0+|\tau-b_0|)} d\tau \right| \eta_{K-1} \leq \frac{1}{2} \ell e^{14\ell(1x-a_0+|1t-b_0|)} \eta_{K-1} \quad (K=2, 3, \dots),$$

и, следовательно,

$$\eta_K \leq \frac{1}{2} \eta_{K-1} \quad (K=2, 3, \dots).$$

Из этих неравенств, в силу (15), получим

$$\eta_K \leq \frac{\ell^*}{2^{K-1}} \quad (K=1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$\| \zeta_K(x, t) - \zeta_{K-1}(x, t) \| \leq \frac{\tilde{\ell}}{2^{K-1}}$$

при $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq b$ ($K=1, 2, \dots$),

где $\tilde{\ell} = e^{14\ell ab} \ell^*$.

Полученные оценки гарантируют равномерную сходимость на $[0, a] \times [0, b]$ последовательности $(\zeta_K)_{K=1}^{+\infty}$.

Очевидно, что вектор-функция

$$\tilde{z}(x, t) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \zeta_K(x, t)$$

является измеримой как и по x , так и по t

$$\sup\{\|z(x,t)\|: 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\} < +\infty.$$

Перейдя теперь к пределу в равенстве (12), когда $K \rightarrow +\infty$, получим, что z является решением системы интегральных уравнений (7).

Для завершения доказательства леммы нам остается показать, что система интегральных уравнений (7) имеет не более одного решения. В самом деле, пусть z и ζ - два произвольных решения этой системы. Тогда согласно лемме I найдутся множества $I_1 \subset [0, a]$, $I_2 \subset [0, b]$ такие, что $mes I_1 = a$, $mes I_2 = b$ и z и ζ ограничены на $I_1 \times I_2$. Полагая

$$\eta = \sup\{e^{-\mu \ell(1-x-a_0+|t-b_0|)} \|z(x,t) - \zeta(x,t)\| : x \in I_1, t \in I_2\},$$

в силу (8) - (10) из (7) находим

$$\|z(x,t) - \zeta(x,t)\| \leq \frac{1}{2} e^{\mu \ell(1-x-a_0+|t-b_0|)} \eta$$

при $x \in I_1, t \in I_2$.

Отсюда имеем

$$\eta \leq \frac{1}{2} \eta.$$

Следовательно, $\eta = 0$ и $z(x,t) \equiv \zeta(x,t)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $b \in [0, b]$, e_{μ} - неотрицательная постоянная $P \times P$ матрица, $\ell: [0, b] \rightarrow R^P$ и



$\zeta: [0, b] \rightarrow R^p$ - измеримые неотрицательные и ограниченные вектор-функции такие, что $l(s) \leq l(t)$ при $0 < (s - b_0) \text{sign}(t - b_0) \leq |t - b_0|$ и

$$\zeta(t) \leq l(t) + \left| e^{\int_{b_0}^t \zeta(\tau) d\tau} \right| \quad \text{при } t \in [0, b]. \quad (17)$$

Тогда

$$\zeta(t) \leq e^{e^{|t-b_0|}} l(t) \quad \text{при } t \in [0, b]. \quad (18)$$

Доказательство. Из (17) имеем

$$\zeta(t) \leq l(t) + e^{|t-b_0|} l(t) + e^{e^{|t-b_0|}} \left| \int_{b_0}^t (t-\tau)^{\zeta(\tau)} d\tau \right|$$

при $t \in [0, b]$.

Исходя из этого, по индукции докажем, что при любом натуральном K соблюдается неравенство

$$\zeta(t) \leq \left(\sum_{i=0}^K \frac{|t-b_0|^i}{i!} e^{e^i} \right) l(t) + \frac{1}{K!} e^{e^{K+1}} \left| \int_{b_0}^t (t-\tau)^K \zeta(\tau) d\tau \right| \leq e^{e^{|t-b_0|}} l(t) + \frac{1}{K!} e^{e^K} \left| \int_{b_0}^t (t-\tau)^K \zeta(\tau) d\tau \right| \quad (19)$$

при $t \in [0, b]$.

Однако,

$$\frac{1}{K!} \left\| e^{e^{K+1}} \int_{b_0}^t (t-\tau)^K \zeta(\tau) d\tau \right\| \leq \frac{e^{e^{K+1}}}{(K+1)!} l_2 \rightarrow 0$$

при $K \rightarrow +\infty$,

где

$$l_1 = \|y\| b, \quad l_2 = \sup \{ \|\xi(\tau)\| : \tau \in [0, b] \}.$$

Поэтому, перейдя к пределу в неравенстве (19), когда $K \rightarrow +\infty$, получим оценку (18).

Теорема. Пусть на множествах $([0, a] \times [0, b])^2 \times R^{3p}$,
 $[0, a] \times [0, b] \times [0, a] \times R^{3p}$, $[0, a] \times [0, b] \times [0, b] \times R^{2p}$

обладают условия

$$|g_0(x, t, s, \tau, z_1, z_2, z_3) - g_0(x, t, s, \tau, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)| \leq \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_{0i} |z_i - \bar{z}_i|, \quad (20)$$

$$|g_1(x, t, s, z_1, z_2, z_3) - g_1(x, t, s, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)| \leq \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_{1i} |z_i - \bar{z}_i|, \quad (21)$$

$$|g_2(x, t, \tau, z_1, z_2) - g_2(x, t, \tau, \bar{z}_1, \bar{z}_2)| \leq \sum_{i=1}^2 \mathcal{A}_{2i} |z_i - \bar{z}_i| \quad (22)$$

и

$$e^{(\mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22})|b_1 - b_0|} |\Phi(x)| \leq H, \quad (23)$$

где $\mathcal{A}_{0i}, \mathcal{A}_{1i}, \mathcal{A}_{2i}$ и H - неотрицательные постоянные $p \times p$ матрицы, причем

$$\chi_H < 1. \quad (24)$$

Тогда система интегральных уравнений (1) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Пусть $\xi_0(x, t) = \varphi(x, t)$.

Тогда согласно лемме 2 система интегральных уравнений



$$\begin{aligned} z(x,t) = & \varphi(x,t) + \varphi(x) \zeta_0(x, b_1) + \\ & + \int_{a_0}^x ds \int_{b_0}^t g_0(s, t, s, \tau, z(s, \tau), z(a_0, \tau), z(s, b_0)) d\tau + \\ & + \int_{a_0}^x g_1(x, t, s, z(s, t), z(s, b_0), \zeta_0(s, b_1)) ds + \\ & + \int_{b_0}^t g_2(x, t, \tau, z(x, \tau), z(a_0, \tau)) d\tau \end{aligned}$$

имеет единственное решение. Обозначим его через ζ_1 . Продолжая этот процесс, мы получим последовательность измеримых ограниченных вектор-функций

$$\begin{aligned} \zeta_0(x,t) = & \varphi(x,t), \quad \zeta_k(x,t) = \varphi(x,t) + \varphi(x) \zeta_{k-1}(x, b_1) + \\ & + \int_{a_0}^x ds \int_{b_0}^t g_0(x, t, s, \tau, \zeta_k(s, \tau), \zeta_k(a_0, \tau), \zeta_k(s, b_0)) d\tau + \\ & + \int_{a_0}^x g_1(x, t, s, \zeta_k(s, t), \zeta_k(s, b_0), \zeta_{k-1}(s, b_1)) ds + \\ & + \int_{b_0}^t g_2(x, t, \tau, \zeta_k(x, \tau), \zeta_k(a_0, \tau)) d\tau \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (25)$$

Докажем, что эта последовательность равномерно сходится и её предел является решением системы (1).

В силу (24) найдется положительное число ℓ , такое, что

$$\eta_A < 1, \quad (26)$$

где

$$A = \frac{1+b}{\ell} \alpha A_{21} b (A_{01} + A_{03} + A_{11} + A_{12}), \quad (27)$$

и

$$\chi_{H_1} < 1,$$

где

$$H_1 = (E - A)^{-1} \left(H + \frac{1}{\rho} e^{A_{21} b} A_{13} \right). \quad (29)$$

Согласно (20) - (22) из (25) вытекает, что при любом натуральном K на $[0, a] \times [0, b]$ соблюдается неравенство

$$\begin{aligned} & |\zeta_{K+1}(x, t) - \zeta_K(x, t)| \leq |\Phi(x)| |\zeta_K(x, b_1) - \zeta_K(x, b_0)| + \\ & \left| \int_{a_0}^x dt \int_{b_0}^t [A_{01} |\zeta_{K+1}(s, \tau) - \zeta_K(s, \tau)| + A_{02} |\zeta_{K+1}(a_0, \tau) - \zeta_K(a_0, \tau)| + \right. \\ & \left. + A_{03} |\zeta_{K+1}(s, b_0) - \zeta_K(s, b_0)|] ds \right| + \left| \int_{a_0}^x [A_{11} |\zeta_{K+1}(s, t) - \zeta_K(s, t)| + \right. \\ & \left. + A_{12} |\zeta_{K+1}(s, b_0) - \zeta_K(s, b_0)| + A_{13} |\zeta_K(s, b_1) - \zeta_{K-1}(s, b_1)|] ds \right| + \\ & \left| \int_{b_0}^t [A_{21} |\zeta_{K+1}(x, \tau) - \zeta_K(x, \tau)| + A_{22} |\zeta_{K+1}(a_0, \tau) - \zeta_K(a_0, \tau)|] d\tau \right|. \end{aligned}$$

Полагая

$$\eta_K(x, t) = \sup \{ |\zeta_{K+1}(x, s) - \zeta_K(x, s)| : 0 \leq (s - b_0) \operatorname{sign}(t - b_0) \leq |t - b_0| \},$$

из этого неравенства находим

$$\eta_K(x, t) \leq |\Phi(x)| \eta_K(x, b_1) + A_{13} \left| \int_{a_0}^x \eta_{K-1}(s, b_1) ds \right| +$$



$$\begin{aligned}
 & + b \left| \int_{a_0}^t [A_{01} \eta_{\kappa}(s, t) + A_{02} \eta_{\kappa}(a_0, t) + A_{03} \eta_{\kappa}(s, b_0)] ds \right| + \\
 & + \left| \int_{a_0}^x [A_{11} \eta_{\kappa}(s, t) + A_{12} \eta_{\kappa}(s, b_0)] ds \right| + \\
 & + \left| \int_{b_0}^t [A_{21} \eta_{\kappa}(x, \tau) + A_{22} \eta_{\kappa}(a_0, \tau)] d\tau \right| \\
 & \text{при } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq b \quad (\kappa = 1, 2, \dots). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\eta_{\kappa}(a_0, t) \leq |\Phi(a_0)| \eta_{\kappa-1}(a_0, b_1) + \left| \int_{b_0}^t (A_{21} + A_{22}) \eta_{\kappa}(a_0, \tau) d\tau \right|$$

при $0 \leq t \leq b$ ($\kappa = 1, 2, \dots$).

Отсюда согласно лемме 3 и неравенству (23) вытекает, что

$$\eta_{\kappa}(a_0, b_1) \leq H \eta_{\kappa-1}(a_0, b_1), \quad \eta_{\kappa}(a, b_1) \leq H^{\kappa} \eta_0(a_0, b_1),$$

$$\eta_{\kappa}(a_0, t) \leq e^{(A_{21} + A_{22})|t - b_0|} |\Phi(a_0)| \eta_{\kappa-1}(a_0, b_1) \quad \text{при } 0 \leq t \leq b,$$

и, следовательно,

$$\eta_{\kappa}(a_0, t) \leq \Phi_1 H^{\kappa-1} \eta_0(a_0, b_1) \quad \text{при } 0 \leq t \leq b \quad (\kappa = 1, 2, \dots),$$

где

$$\Phi_1 = e^{(A_{21} - A_{22})b} |\Phi(a_0)|.$$



Согласно этой оценке из (30) получим

$$\eta_{\kappa}(x, t) \leq |\Phi(x)| \eta_{\kappa-1}(x, b_1) + A_{13} \left| \int_{a_0}^x \eta_{\kappa-1}(s, b_1) ds \right| + \rho_{\kappa}(x, t) + \dots \quad (31)$$

$$+ A_{21} \left| \int_{b_0}^t \eta_{\kappa}(x, \tau) d\tau \right| \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b \quad (\kappa=1, 2, \dots),$$

где

$$\rho_{\kappa}(x, t) = b \left| \int_{a_0}^x [A_{01} \eta_{\kappa}(s, t) + A_{03} \eta_{\kappa}(s, b_0)] ds \right| + \dots \quad (32)$$

$$+ \left| \int_{a_0}^x [A_{11} \eta_{\kappa}(s, t) + A_{12} \eta_{\kappa}(s, b_0)] ds \right| + \Phi_2 H^{\kappa-1} \eta_0(a_0, b_1)$$

и

$$\Phi_2 = b(A_{01} + A_{22}) \Phi_1.$$

Учитывая, что компоненты вектора η_{κ} не убывают по t на $[b_0, b]$ и не возрастают на $[0, b_0]$ при любом фиксированном x и применяя опять лемму 3, из (31) находим

$$\eta_{\kappa}(x, t) \leq e^{A_{21}|t-b_0|} \left[|\Phi(x)| \eta_{\kappa-1}(x, b_0) + A_{13} \left| \int_{a_0}^x \eta_{\kappa-1}(s, b_1) ds \right| \right] + \dots \quad (33)$$

$$+ e^{A_{21}b} \rho_{\kappa}(x, t) \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b$$

($\kappa=1, 2, \dots$).

Полагая

$$\bar{\eta}_{\kappa}(t) = \sup \{ e^{-\epsilon|x-a_0|} \eta_{\kappa}(x, t) : 0 \leq x \leq a \},$$



согласно (23), (27), (32) и (33) будем иметь

$$P_{\kappa}(x,t) = \frac{b}{l}(A_{01} + A_{03})e^{l|x-a_0|} \bar{\eta}_{\kappa}(t) + \frac{1}{l}(A_{11} + A_{12})e^{l|x-a_0|} \bar{\eta}_{\kappa}(t) + \Phi_2 H^{\kappa-1} \bar{\eta}_0(b_1) \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b,$$

$$e^{-l|x-a_0|} \eta_{\kappa}(x,t) \leq e^{A_{21}|t-b_0|} [|\Phi(x)| + \frac{1}{l} A_{23}] \bar{\eta}_{\kappa-1}(b_1) + A \bar{\eta}_{\kappa}(t) + \Phi_2 H^{\kappa-1} \bar{\eta}_0(b_1) \quad \text{при } 0 \leq x \leq a,$$

$$\bar{\eta}_{\kappa}(b_1) \leq (H + \frac{1}{l} e^{A_{21}b} A_{13}) \bar{\eta}_{\kappa-1}(b_1) + A \bar{\eta}_{\kappa}(b_1) + \Phi_2 H^{\kappa-1} \bar{\eta}_0(b_1) \quad (\kappa=1,2,\dots) \quad (34)$$

$$\bar{\eta}_{\kappa}(t) \leq \Phi_3 \bar{\eta}_{\kappa-1}(b_1) + A \eta_{\kappa}(t) + \Phi_2 H^{\kappa-1} \bar{\eta}_0(b_1) \quad (35)$$

$$(\kappa=1,2,\dots),$$

где

$$\Phi_3 = e^{A_{21}b} \sup\{|\Phi(x)| : 0 \leq x \leq a\} + \frac{1}{l} e^{A_{21}b} A_{13}.$$

В силу (26), (28), (29) из (34) и (35) вытекают неравен-

ства

$$\bar{\eta}_{\kappa}(b_1) \leq H_1 \bar{\eta}_{\kappa-1}(b_1) + \Phi_4 H^{\kappa-1} \bar{\eta}_0(b_1) \quad (\kappa=1,2,\dots) \quad (36)$$



и

$$\bar{\eta}_k(t) \leq \Phi_5 \bar{\eta}_{k-1}(b_1) + \Phi_4 H^{k-1} \bar{\eta}_0(b_1) \quad (k=1, 2, \dots)$$

при $0 \leq t \leq b$, (37)

где

$$\Phi_j = (E - A)^{-1} \Phi_{j-2} \quad (j=4, 5).$$

Из (36) по индукции получаем

$$\bar{\eta}_k(b_1) \leq [H_1^k + \sum_{i=1}^k H_1^{k-i} \Phi_4 H^{i-1}] \bar{\eta}_0(b_1) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Поэтому из (37) будем иметь

$$\bar{\eta}_k(t) \leq \Phi_5 [H_1^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} H_1^{k-1-i} \Phi_4 H^{i-1}] \bar{\eta}_0(b_1) + \Phi_4 H^{k-1} \bar{\eta}_0(b_1)$$

при $0 \leq t \leq b$ ($k=2, 3, \dots$) (38).

Согласно (24) и (28) существуют числа $\gamma_0 > 0$ и $\delta_0 \in]0, 1[$ такие, что

$$\|H_1^k\| \leq \gamma_0 \delta_0^k, \quad \|H^k\| \leq \gamma_0 \delta_0^k \quad (k=1, 2, \dots).$$

В силу этих неравенств из (38) находим

$$\|\bar{\eta}_k(t)\| \leq \gamma_1 k \delta_0^{k-2} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq b. \quad (k=2, 3, \dots)$$

где

$$\gamma_1 = (\gamma_0 \delta_0 + \gamma_0^2 \|\Phi_4\| + \gamma_0 \delta_0 \|\Phi_4\|) \|\bar{\eta}_0(b_1)\|.$$



С другой стороны, поскольку $\delta_0 \in]0, 1[$, существует $\delta \in]0, 1[$ и натуральное число K_0 такие, что

$$\sqrt[k]{k} \delta_0 < \delta \quad \text{при} \quad (k = K_0, K_0 + 1, \dots).$$

Поэтому

$$\|\bar{\eta}_k(t)\| \leq \gamma e^{b\rho} \delta^k \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq b \quad (k = K_0, K_0 + 1, \dots),$$

где $\gamma = \gamma_1 \delta_0^{-2} e^{b\rho}$. Следовательно,

$$\|\zeta_{k+1}(x, t) - \zeta_k(x, t)\| \leq \gamma \delta^k$$

при $0 \leq x < a$, $0 \leq t \leq b$ ($k = K_0, K_0 + 1, \dots$).

Отсюда ясно, что последовательность $(\zeta_k)_{k=1}^{+\infty}$ является равномерно сходящейся. Перейдя теперь к пределу в (25), когда $k \rightarrow \infty$, легко убедиться, что

$$\zeta(x, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta_k(x, t)$$

является решением системы интегральных уравнений (I). Тем самым существование решения доказано. Остается доказать единственность.

Пусть ζ и ζ - произвольные решения системы интегральных уравнений (I), а ρ - положительное число, выбранное таким образом, чтобы соблюдались условия (26) и (2).

Согласно лемме I существуют множества $I_1 \subset [0, a]$ и $I_2 \subset [0, b]$ такие, что $a_i \in I_1$, $b_i \in I_2$ ($i = 1, 2$), $\text{mes} I_1 = a$,

мас I, ib

и ξ, ζ ограничены на I

гая

$$\eta(x, t) = \sup \{ |\xi(x, s) - \zeta(x, s)| : s \in I_2, 0 \leq (s - b_0) \operatorname{sign}(t - b_0) \leq |t - b_0| \},$$

в силу (20) - (22) из (I) получим

$$\begin{aligned} \eta(x, t) \leq & |\varphi(x)| \eta(x, b_1) + b \left| \int_{a_0}^x [\mathcal{A}_{01} \eta(s, t) + \mathcal{A}_{02} \eta(a_0, t) + \mathcal{A}_{03} \eta(s, b_0)] ds + \right. \\ & \left. + \left| \int_{a_0}^x [\mathcal{A}_{11} \eta(s, t) + \mathcal{A}_{12} \eta(s, b_0) + \mathcal{A}_{13} \eta(s, b_1)] ds \right| + \right. \\ & \left. + \left| \int_{b_0}^t [\mathcal{A}_{21} \eta(x, r) + \mathcal{A}_{22} \eta(a_0, r)] dr \right| \right. \text{ при } x \in I_1, t \in I_2 \end{aligned} \quad (39)$$

и

$$\eta(a_0, t) \leq |\varphi(a_0)| \eta(a_0, b_1) + \int_{b_0}^t (\mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22}) \eta(a_0, r) dr \quad t \in I_2. \quad (40)$$

Согласно лемме 3 и неравенству (23) из (40) находим

$$\eta(a_0, t) \leq e^{(\mathcal{A}_{23} + \mathcal{A}_{22})|t - b_0|} |\varphi(a_0)| \eta(a_0, b_1) \quad \text{при } t \in I_2$$

и

$$\eta(a_0, t_1) \leq H \eta(a_0, b_1).$$

Отсюда, в силу (24), вытекает, что

$$\eta(a_0, t) = 0 \quad \text{при } t \in I_2. \quad (41)$$

В силу неравенства (4I) и леммы 3, из (39) следует, что

$$\eta(x, t) \leq e^{A_{21}|t-b_0|} |\varphi(x)| \eta(x, b_1) + A_{13} \left| \int_{a_0}^x \eta(s, b_1) ds \right| +$$

$$+ (t+b) e^{A_{21}b} \int_{a_0}^x (A_{01} + A_{03} + A_{11} + A_{12}) \eta(s, t) ds \quad \text{при } x \in I_1, t \in I_2.$$

Введем функцию

$$\bar{\eta}(t) = \sup \left\{ e^{-\ell|x-a_0|} \eta(x, t) : x \in I_1 \right\}.$$

Тогда согласно (23) и (26) из последнего неравенства находим

$$\bar{\eta}(b_1) \leq \left(H + \frac{1}{\ell} e^{A_{21}b} A_{13} \right) \bar{\eta}(b_1) + A \bar{\eta}(b_1)$$

и

$$\bar{\eta}(t) \leq P_3 \bar{\eta}(b_1) + A \bar{\eta}(t) \quad \text{при } t \in I_2,$$

где P_3 - введенная выше постоянная $\rho \times \rho$ матрица. Из полученных оценок, в силу (26) и (28) вытекает, что $\bar{\eta}(t) = 0$ и, следовательно,

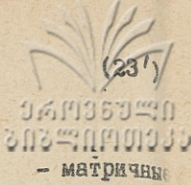
$$z(x, t) = \zeta(x, t).$$

Теорема доказана.

Замечание. Как видно из вышеприведенного доказательства теоремы, эта теорема справедлива, если условия (22) и (23) заменим условиями

$$|g_2(x, t, \tau, z_1, z_2) - g_2(x, t, \tau, \bar{z}_1, \bar{z}_2)| \leq \sum_{i=1}^2 A_{2i}(x, t, \tau) |z_i - \bar{z}_i|, \quad (22')$$

$$\sum_{i=1}^2 A_{2i}(x, t, \tau) \leq P, \quad e^{|\nu_1 - \nu_0| P} |\Phi(x)| \leq H,$$



где $A_{2i} : [0, a] \times [0, b] \times [0, b] \rightarrow R^{P \times P}$ ($i=1, 2$)

функции с неотрицательными измеримыми элементами, а P и H - постоянные неотрицательные $P \times P$ матрицы.

Следствие I. Пусть соблюдаются условия (20)-(22),

$$|\Phi(x)| \leq \Phi_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq a \quad (42)$$

и

$$\sqrt{M_0} e^{|\nu_1 - \nu_0| \sqrt{M_1}} < 1, \quad (43)$$

где A_{0i}, A_{1i}, A_{2i} и Φ_0 - неотрицательные $P \times P$ матрицы, а M_1 и M_2 - наибольшие собственные значения матриц

$$(A_{21} + A_{22})(A_{21} + A_{22})^* \quad \text{и} \quad \Phi_0 \Phi_0^*.$$

Тогда система интегральных уравнений (1) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Пусть η_A^* - норма линейного оператора, порожденная матрицей A . Тогда, как известно (13/, стр. 54),

$$\eta_A^* = \sqrt{M},$$

где M - наибольшее собственное значение матрицы AA^* .

Кроме того,

$$\eta_A \leq \eta_A^*, \quad \eta_{AB}^* \leq \eta_A^* \cdot \eta_B^*, \quad \eta_{eA}^* \leq e \eta_A^*.$$

В силу (42) соблюдается неравенство (23), где

$$H = e^{(A_{21} + A_{22})|b_1 - b_0|} \Phi_0.$$



Согласно вышесказанному

$$\chi_H \leq \chi_H^* \leq e^{|b_1 - b_0|} \chi_{A_{21} + A_{22}}^*, \quad \chi_{\Phi_0}^* = e^{|b_1 - b_0|} \sqrt{\mu} \sqrt{\mu}.$$

Отсюда, в силу (43), вытекает неравенство (24). Следовательно, соблюдаются все условия теоремы (I), что и доказывает справедливость следствия.

Следствие 2. Пусть соблюдаются условия (20) - (22) и (42) и существует положительное число ℓ , такое, что

$$\chi_{H_0} < 1,$$

где $H_0 = e^{\ell|b - b_0|} \Phi_0 + \frac{1}{\ell} (A_{21} + A_{22})$. Тогда система интегральных уравнений (1) имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Из (42) вытекает неравенство (23), где H - матрица, определенная равенством (44). Следствие будет доказано, если мы покажем, что H удовлетворяет условию (24).

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = E[(A_{21} + A_{22}) \text{sign}(t - b_0)] \zeta(t), \quad (46)$$

где $E \in [0, 1]$, и поставим для неё краевую задачу

$$\zeta(b_0) = \Phi_0 \zeta(b_1).$$

Пусть ζ - произвольное решение системы (46). Тогда, как известно (/4/, стр. 76),

$$\zeta(t) = e^{(\mu_{21} + \mu_{22})(t - b_0)} \zeta(t) \quad \text{при } t \in [0, b].$$

Подставив значение $\zeta(b_1)$ в (47), в силу (44) получим

$$(E - \varepsilon H) \zeta(b_0) = 0.$$

Отсюда ясно, что если $\mu_H \geq 1$, то при $\varepsilon = \frac{1}{\mu_H}$ задача (46), (47) имеет ненулевое решение. Следовательно, для доказательства (24) достаточно показать, что при любом $\varepsilon \in [0, 1]$ краевая задача (46), (47) имеет только нулевое решение.

Пусть ζ - решение задачи (46), (47). Тогда

$$|\zeta(t)| \leq \Phi_0 |\zeta(b_1)| + \left| \int_{b_0}^t (\mu_{21} + \mu_{22}) |\zeta(s)| ds \right|$$

при $0 \leq t \leq b$.

Полагая

$$\eta = \sup \left\{ e^{-\ell|t - b_0|} |\zeta(t)| : 0 \leq t \leq b \right\},$$

из нер. вышесказанного находим



$$|y(t)| \leq \Phi_0 e^{t|b_1-b_0|} \eta + \frac{1}{l} e^{t|t-b_0|} (A_{21} + A_{22}) \eta \leq e^{t|t-b_0|} H_0 \eta \quad \text{при } 0 \leq t \leq b$$

и $\eta \leq H_0 \eta$.

Отсюда, согласно (45) вытекает, что $\eta = 0$, т.е. задача (46), (47) имеет только нулевое решение. Следствие доказано.

Поступила 3.Х.1985

Институт систем управления
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Walter, Differential and integral inequalities, - Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1970
2. K. Deimling, A Caratheodory theory for systems of integral equations. Ann. di Matem. pura ed appl., 1970, v.86, p217-260.
3. С.Г. Крейн и др. Функциональный анализ. -М.: Наука, 1964.
4. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Мир, 1970.



Յ. ԸՅՐԵՄՆԱՅԱ

յրանաչափ ուղղանկյուն ժամացույցային յանոց սուսպենզիան

ԽՈՒՄԵՆ

ԿՐԹՈՒՄԵՆ

Բարձրագույն (1) կարգի ուղղանկյուն ժամացույցային սուսպենզիան
Բարձրագույն յանոցային սուսպենզիան յանոցային յանոցային.

M. Tsutsunava

ON ONE SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

Summary

Sufficient conditions are established for the unique solvability of a system of (1)-type integral equations.

268, 1986

О КОРРЕКЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЖАТОГО УРАВНЕНИЯ В
ИЗБЫТОЧНЫХ КЛАССАХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

Н. Д. Нанобашвили

В настоящей работе уточнены некоторые результаты, полученные в /1/, где были рассмотрены вопросы приведения системы из "m" количества уравнений к одному сжатому уравнению. При этом решения системы и сжатого уравнения должны быть взаимно однозначными.

Примечание: здесь следует еще раз /2/ подчеркнуть: в работе делается упор на то предположение, что понятие однозначности решения какой-либо формальной системы, в том числе математических схем и конструкций, связано с понятием избыточности — одним из фундаментальных понятий информатики.

Прибавление: попытка решить задачу в информационном контексте означает ввести определенную избыточность, т.е. использовать дополнительную информацию для уяснения возможностей получения однозначных решений. То же самое в математическом контексте может означать: применение новых подстановок, дополнительных уравнений, схем аппроксимации, формулирование новых теорем и условий и т.д.

Попытке показать, что такая концепция реализуема, и по-
является настоящая работа.

Пусть задана система из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m, \end{cases} \quad (1)$$

а также представление системы (1) в избыточном в $V_{J,n}$
классе

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = c'_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = c'_2, \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n = c'_m; \end{cases} \quad (2)$$

здесь $y_1 = v_{1y}, y_2 = v_{2y}, \dots$ и т.д. $y_n = v_{ny} / 1, 2/$.

Согласно (6) из /2/ систему (1) можно привести к следующему
сокращенному уравнению:

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = C \pmod{2^n}, \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} a_1 = v_{11} + 2v_{21} + 4v_{31} + \dots + 2^{n-1}v_{m1} \pmod{2^n} \\ a_2 = v_{12} + 2v_{22} + 4v_{32} + \dots + 2^{n-1}v_{m2} \pmod{2^n} \\ \dots \end{cases} \quad (4)$$



$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= v_{1n} + 2v_{2n} + 4v_{3n} + \dots + 2^{n-1}v_{nn} \pmod{2^n} \\ c &= c_1 + 2c_2 + 4c_3 + \dots + 2^{n-1}c_m \pmod{2^n} \end{aligned} \right.$$

В поле действительных чисел уравнение (3) является неопределенным уравнением, в то время как в избыточном классе представителей это же самое уравнение имеет однозначное решение. Однако, если не применять некоторых дополнительных процедур, то значения решений системы (2) и корни ожатого уравнения (3) в общем случае не будут совпадать. Исходя из этого, задача состоит в определении таких значений коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n уравнения (3), чтобы решения системы (3) и уравнения (2) совпадали.

Без существенного ограничения общности примем следующие допущения:

1. Ранг расширенной матрицы системы (1) равен рангу матрицы коэффициентов.
2. Коэффициенты системы уравнения (1) являются целыми положительными числами.
3. $m = n$.

Имеет место следующая

Теорема I. Сжатое уравнение (3)

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = c \pmod{2^n}$$

можно привести к уравнению

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = c_0 \pmod{2^n}, \tag{6}$$

где решения (6) совпадают с решениями системы (3), если коэффициенты уравнения (3) будут преобразованы по следующей схеме коррекции¹⁾:

$$A_1 = a_1 + \left[\frac{a_1}{\text{mod } m} \right]; \quad A_2 = a_2 + \left[\frac{a_2}{\text{mod } m} \right]$$

(7)

$$A_{n-1} = a_{n-1} + \left[\frac{a_{n-1}}{\text{mod } m} \right]; \quad A_n = a_n + \left[\frac{a_n}{\text{mod } m} \right].$$

Теорема доказывается в результате использования теоремы 3 и следствия 3 из /1/.

Пример: Рассмотрим пример 3 из /2/, где заданная система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases} \quad (8)$$

имеет решения

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3,$$

а в избыточном классе представителей система (8) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 00063 \pmod{8} \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 00005 \pmod{8} \\ y_1 + y_2 + 3y_3 = 00063 \pmod{5} \end{cases} \quad (9)$$

¹⁾ Квадратные скобки означают целую часть.



где согласно (14) из /I/

$$y_1 = v_1 = 1 \cdot 00001 = 00001 \pmod{8},$$

$$y_2 = 2v_2 = 2 \cdot 00011 = 00022 \pmod{8},$$

$$y_3 = 4 \cdot v_3 = 4 \cdot 00012 = 00040 \pmod{8},$$

$$C_0 = 00063 + 2 \cdot 00005 + 4 \cdot 00063 = 00061 \pmod{8}.$$

Далее, используя преобразование (4), получаем первичную форму скатого уравнения

$$7x_1 + 27x_2 + 43x_3 = 00061 \pmod{8}, \quad (10)$$

а в десятичном представлении

$$7x_1 + 23x_2 + 35x_3 = 49 \pmod{10}. \quad (11)$$

Решения системы (9) не удовлетворяют уравнению (10). Следовательно, (10) не является адекватной математической схемой исходной системы (8).

Примечание: Однако относительно коэффициентов уравнение (10) является отражением системы (9) с точностью до изоморфизма.

Для того, чтобы (10) и (11) совпадали соответственно с (9) и (8) с адекватной точностью, используем теорему 1. Согласно (7) имеем:

4. Труды, т. 268.



$$A_1 + 7 + \left[\frac{7}{\text{mod } m} \right] = 7 + \left[\frac{7}{8} \right] = 7 + 0 = 7$$

$$A_2 = 23 + \left[\frac{23}{8} \right] = 23 + 2 = 25,$$

$$A_3 = 35,$$

$$C_0 = 49.$$

Полученное после коррекции уравнение

$$7y_1 + 25y_2 + 35y_3 = 49 \quad (12)$$

является сжатой адекватной охемой системы (8). Покажем это.

Представляя (12) по mod 8 /3/, имеем:

$$7y_1 + y_2 + 3y_3 = 00061. \quad (13)$$

Уравнение (13) удовлетворяется, когда

$$y_1 = 0001; \quad y_2 = 00022; \quad y_3 = 00040,$$

чему соответствует

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Переставим в (3) местами первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

После коррекции сжатое уравнение примет вид:

$$7y_1 + 16y_2 + 39y_3 = 39 \pmod{10}$$



$$7y_1 + 0 \cdot y_2 + 7y_3 = 00047 \pmod{8},$$

чему соответствует $y_1 = 00001$; $y_2 = 00022$; $y_3 = 00040$;

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Переставим местами теперь первое, второе и третье уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

После коррекции имеем

$$7y_1 + 43y_2 + 9y_3 = 27 \pmod{10},$$

чему соответствует

$$7y_1 + 3y_2 + y_3 = 00025 \pmod{8},$$

откуда получаем

$$y_1 = 00001; \quad y_2 = 00022; \quad y_3 = 00040;$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Переставим далее первое и третье уравнения:



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

После коррекции имеем

$$7y_1 + 25y_2 + 9y_3 = 49 \pmod{10},$$

чему соответствует

$$7y_1 + y_2 + y_3 = 00061 \pmod{10},$$

откуда получаем

$$y_1 = 00001; \quad y_2 = 00022; \quad y_3 = 00040;$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Примечание: Рассмотренный пример подтверждает тот факт, что в результате перестановок уравнений решение системы не меняется. Однако меняются значения коэффициентов и свободного члена скатого уравнения. Эта особенность может оказать-ся весьма полезной при решении ряда прикладных задач.

Поступила 15.X.1985

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Н.Д.Нанобашвили. Об одном улучшенном варианте схемы ска-тия информации. Труды ТГУ, т.224, 1981.



2. Н.Д.Нанобашвили. К вопросу информационного подхода при решении линейных уравнений в избыточных классах представителей. Труды ТГУ, т.224, 1981.
3. А.А.Бухштаб. Теория чисел. М., 1966.

6. ნანობაშვილი

ჭარბ ჯანსაზღვრულ განტოლებებს კონკრეტულ
 კლასებში შესაბამის
 კოეფიციენტებს

განხილულია ნიშნული განტოლებათა სისტემის რაოდენობის საკმარისი
 ერთი მკვებელი განტოლებადიგე ნაწილობრივი ჯარბ ჯანსაზღვრული,
 ნაკლებობის განტოლების კონკრეტული კონკრეტული ფორმალური და-
 ება, რის საფუძველზედაც ჯარბ ჯანსაზღვრული ნაწილობრივი განტოლებ-
 ბა ცალსახად ასახავს ნიშნული განტოლებათა სისტემას.

Nanobashvili

ON THE CORRECTION OF THE COEFFICIENTS OF COMPRESSED
 EQUATIONS IN REDUNDANCY CLASSES

Summary

The question of reducing a system of linear equations to a single
 compressed equation in redundancy classes is discussed. Formal
 search for the correction of the coefficients of the equation is shown,
 on the basis of which an equation represented in redundancy classes
 uniquely reflects the system of linear equations.

268, 1986

КИБЕРНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ИССЛЕДОВАНИЯХ ФИЗИОЛОГИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ОРГАНИЗМА РАСТЕНИЯ

Г.Т. Мамулашвили

Упорядоченность физиолого-биохимических процессов во времени осуществляется на всех уровнях организма растения сложными механизмами регуляции, от которых в конечном счете зависит продуктивность и жизнестойкость растения. В этой связи, дополнив классические методы изучения живых организмов новыми подходами — методами кибернетического анализа, можно полнее раскрыть и точнее выразить закономерности физиологических процессов и явлений растительных организмов. В отличие от подходов классической биологии кибернетический подход основывается на изучении процессов организации сложных систем, обработки информации и целенаправленного управления живыми организмами. А это предусматривает применение новых методов исследований, общими для которых является моделирование механизмов регуляции и саморегуляции и действия обратных связей на основе точного количественного учета и математической формализации при эффективном использовании вычислительной техники [1]. На базе нормальной и патологической физиологии растений мы попытаемся представить возможный путь

кибернетического подхода - применение методов кибернетики в физиологии устойчивости с целью определения и возможного прогнозирования уровней устойчивости организма растения к условиям среды обитания.

Одной из проблем физиологии устойчивости растений является проблема диагностики, а построение диагностической системы (ДС), способной принимать решения, т.е. способной реализовать в определенной степени логический процесс мышления человека - важное звено данной проблемы. В соответствии с этим структуру ДС в исследованиях физиологии устойчивости растений можно представить как совокупность: методов регистрации информации (физиологические, биохимические, электрофизиологические, биофизические); объекта исследования - информация об объекте исследования; кибернетических методов обработки информации; диагноза; прогноза уровней устойчивости организма растения к условиям среды; логического оператора (критерий оценки эффективности диагностической системы - принятие решения); управления оборотом информации. Указанные функции, представленные на рисунке в виде блок-схемы, за исключением методов регистрации информации вполне можно реализовать на электронно-вычислительной машине (ЭВМ), позволяющей ускоренную обработку значительного объема информации экспериментальных исследований.

ДС должна быть предназначена для управления процессом диагноза, и строить ее следует, начиная со сбора информации об исследуемом объекте. При этом необходимо одновременно детально исследовать специфику действия экстремального фактора, вызываемых им напряжений в данных эколого-географических

условиях. В зависимости от анализа информации, ее обработки, ДС должна указывать на последовательность проведения исследований, пополняющих банк данных максимально информативными сведениями. Последовательность проведения информативных исследований определяется биологической особенностью и физиологическим состоянием объекта исследования, а также техническими возможностями сбора и обработки информации. Таким образом, диагностический процесс - это оценка всей информации о состоянии организма растения и управления процессом диагноза.

Числовые и графические характеристики различных классов уровней устойчивости организма растения к условиям ореды, подлежащие обработке методами кибернетики в процессе диагноза, часто недостаточны, а порой и несовершенны. Поэтому необходимо совершенствование наших знаний о механизмах разных видов устойчивости (термо-, соле-, -кислотоустойчивости) организма растения, методов сбора информации с целью улучшения данных, подлежащих обработке.

Фактор времени играет значительную роль в исследованиях устойчивости растений. В связи с этим оперативность ДС весьма существенна в процессе сбора и обработки информации. Оперативными экспресс-методами сбора информации, на наш взгляд, являются электрофизиологические и биофизические неповреждающие методы регистрации. Характерными особенностями предлагаемых методов сбора информации, несмотря на их вторичность представляются: возможность определения термо- и солеустойчивости путем регистрации разностей биоэлектрических потенциалов, импеданса - полного электрического сопротивления



(тканей, осевых и генеративных органов, листовой пластинки); определения водоснабжения - различных сторон водного режима (транспирации, скорости движения воды в стеблях и черешках листьев, суточных колебаниях их диаметров, вызываемых гидродинамическими реакциями); определения температуры органов и тканей, температуры и влагообеспечения почвы, тесно связанных как между собой (система почва - растение), так и с условиями окружающей среды - путем применения полупроводниковых датчиков регистрации температуры - ДТ, влажности - ДВ, движения жидкости - ДЖ, диаметра ДД, интенсивности дыхания - ДСО₂; определения элементов минерального питания путем потенциометрической регистрации отдельных ионов с помощью ионоселективных электродов в водно-органических средах без отбора проб - чувствительность ионоселективных электродов в водно-органических средах - 10⁻⁷ ион-л, что превышает точность многих агрохимических методов анализа по крайней мере на 1-2 порядка.

Приведенные методы обеспечивают: непрерывность и автоматичность регистрации изучаемых физиологических процессов, происходящих в одном организме в динамике, т.е. без нарушения целостности структуры - при сохранении жизнедеятельности организма растения /2,3/. Было бы ошибочным предполагать, что приведенные методы претендуют на исключительность исчисления информации. Необходимо всегда помнить о полигенности устойчивости организма растения, а в связи с этим - и о состоятельности тех или иных методов.

Синхронная информация, полученная в виде числовых выражений и графиков, легко поддается обработке на ЭВМ методами

ми биометрии /4/. Однако решение данной задачи представляется более эффективным на основе метода распознавания образов, рассматривающего совокупности различных вопросов - отбор и формирование признаков, оценку признаков, построение решающей функции, выделение образа с помощью ЭВМ /5/ и т.д. В связи с этим множество разнообразных образов, сущностей и явлений сложных процессов - многообразие видовых форм, диагностика водоснабжения органического и минерального питания, уровней термо-, соле- и кислотоустойчивости организма растения к условиям среды обитания на основе симптоматики нормальной и патологической физиологии растений можно формулировать в терминах распознавания образов. При этом поиск единого подхода к задачам, связанным с диагностикой и прогнозом патологических процессов в живом организме, в значительной степени должен определяться спецификой предмета исследования - организма растения, гарантирующей успешное решение задач физиологии устойчивости, агробиологии растений в целом. Методы распознавания образов, применяемые для описания объектов, и в случае наличия недостаточной информации или малоинформативных данных могут позволить определять принадлежность объектов и отношений новых реализаций к тому или иному классу устойчивости с более высокой степенью достоверности. Формализуемые методами распознавания образов физиологические и биохимические понятия и величины при решении поставленной задачи позволяют наиболее емко описать исходные данные и конечный результат жизнестойкости растения, что отразится в выделении наиболее существенных сторон организма растения при оценке целостной ситуации.



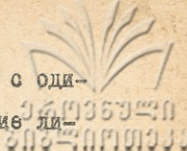
Исследования по физиологии устойчивости организма растения свидетельствуют о том, что для адекватной оценки уровня устойчивости растения как целостной системы, множественная реакция которой обуславливает анатомо-физиологические процессы, в ней происходящие, необходимо детальное исследование адаптации растения к экстремальным условиям среды обитания. Ибо при разной напряженности отдельных экстремальных факторов растение может испытывать несколько разных стрессов в зависимости от его состояния, характера тканей и видовой принадлежности. А это может быть следствием различных механизмов устойчивости не только отдельных видов, но и их тканей, органов и даже отдельных элементов клеточной структуры /6/. Поэтому говорить об абсолютном значении уровня устойчивости растений затруднительно. Однако существуют объективные основания для оценки уровней относительной устойчивости растения, что должно позволить соотносить различные видовые формы к определенным классам устойчивости /7-10/.

В этой связи определение и формализация информативных параметров, позволяющих дифференцировать растения по классам устойчивости - важный этап диагностической системы /8-10/. Из более чем сорока симптоматических параметров морозоустойчивости и виноградной лозы и citrusовых с учетом их биологических особенностей следует, что оценка структурной организации растения, на которую прежде всего влияют кратковременные, жесткие, типа ударов, воздействия, производятся при наличии информации о проницаемости цитоплазмы - электропроводности тканей, вязкости, эластичности, гидрофильности и других внутриклеточных изменениях. Оценка же основного обмена

организма растения, на функциональную организацию которого влияют медленно нарастающие длительные и перемежающиеся воздействия экстремального фактора, производится при наличии информации о превращениях пластических веществ и о других метаболических обращениях организма растения /9,10/.

Таким образом, устойчивость - сложное свойство организма растения, точную оценку которой может дать только комплексное исследование множества симптоматичных параметров, а равно и подбор необходимых экспериментальных методов их выявления в каждой конкретной ситуации.

Для установления границы между классами устойчивости, что является, собственно, целью диагностики, необходима определенная градация информативных параметров, имеющих количественное выражение (возраст, температура, содержание пластических веществ и т.д.). При этом не исключена возможность описания одного и того же класса устойчивости несколькими однотипными, нередко дублирующими друг друга параметрами, либо описание разных классов одними и теми же параметрами, т.е. в определенный момент времени определенные множества параметров разных классов могут пересекаться. В первом случае необходимо выделить наиболее постоянный и характерный параметр и ввести его в диагностическую систему, либо снизить число дублирующих параметров путем сведения их в признак - класс устойчивости. В данной ситуации важным условием является подробное перечисление всех родственных симптомов, составляющих данную группу. Во втором случае - уделить тщательное внимание методам сбора информации, зависящим от класса точности и надежности экспериментальной аппаратуры. Кроме



того, ряд параметров может встречаться приблизительно с одинаковой частотой при всех классах устойчивости, наличие или отсутствие которых зависит не от характера класса устойчивости, а от тяжести и стадии экстремального фактора, длительности и интенсивности его воздействия. Таким образом могут быть выделены две группы параметров - диагностические и прогностические, причем для распознавания классов устойчивости могут быть пригодны, в основном, первые /II/.

Следует отметить, что это всего лишь один из возможных методологических путей организации оценки информативных параметров. Этой же цели служат и методы распознавания образов, их новые реализации, позволяющие организацию информативных параметров произвольных ценностей /12/. В связи с этим мы предлагаем перечень возможных электрофизиологических и биофизических (информативных) параметров, способных характеризовать общее физиологическое состояние организма растения при сохранении целостной его структуры:

- 1 - разность биоэлектрических потенциалов,
- 2 - импеданс - полное электрическое сопротивление,
- 3 - транспирация,
- 4 - скорость движения воды в осевых органах,
- 5 - суточные колебания диаметров осевых органов,
- 6 - интенсивность дыхания различных органов,
- 7 - температура тканей и органов по ярусам,
- 8 - динамика содержания ионов элементов минерального питания при pH в корнеобитаемой среде.

Предлагаемых параметров значительно меньше, однако мы надеемся с их помощью получить те же конечные результаты,

что должно позволить уменьшить количество трудоемких экспериментальных исследований. Вместе с тем необходимо отдавать себе отчет в том, что преимущества могут иметь лишь те методы сбора информации, которые способны привести наиболее информативные сведения о контролируемой ситуации, несмотря на предпочтение, отдаваемое менее сложным исследованиям в машинной диагностике /II/.

Важнейший элемент диагностической системы - агробиологическая память - это опыт агробиологических исследований в данном классе устойчивости, учитывающий опыт предшествующих осенне-зимних периодов всего комплекса устойчивости, зависящего от почвенно-климатических факторов местности произрастания. Необходимо отметить, что отдельные составляющие комплекса устойчивости могут быть либо второстепенными, либо повторяться год от года, либо вовсе отсутствовать в различных районах нашей республики в зависимости от сложившихся условий экоклимата /8-10/. Таким образом, для разработки структуры памяти агробиологического опыта на первых порах необходимы исследования всех информативных параметров данного класса устойчивости на всех стадиях онтогенеза в конкретных условиях среды обитания растений с возможными исходами (параметрами), которыми можно будет пользоваться в процессе диагностики.

Содержание агробиологической памяти представляет собой систему чисел и графических характеристик конкретных значений параметров и классов устойчивости, которая включает в себя n параметров (P_1, P_2, \dots, P_n) , подавляющая часть которых имеет m (T_1, T_2, \dots, T_m) исходов в



зависимости от периодов онтогенеза и R классов устойчивости (C_1, C_2, \dots, C_R) . Для каждого исхода отдельно составляется таблица, состоящая из nR элементов, где каждому параметру P_i соответствует свой столбец, а каждому классу устойчивости C_j — своя строка. Таблица эта должна постоянно улучшаться как в отношении структуры (исключаются одни исследования и включаются другие в соответствии с их информативной ценностью, вычисляемой методами распознавания образов на основании предыдущего опыта), так и в отношении численных значений элементов (процесса обучения). Окончательный вариант таблицы, естественно для данного периода времени, — процесс последовательных приближений, основанный на использовании литературных сведений, архивных материалов и личного опыта специалиста /11, 12/.

Таким образом, на основании анализа литературных источников в пределах данной статьи мы попытались представить модель диагностической системы — методологическую и организационную основы информативных параметров, содержание памяти опыта агробиологических исследований, что должно дать возможность:

1. определять нормальные и патологические состояния и процессы, представляющие интерес в практической физиологии растений и агробиологии с целью реализации теоретического системного подхода в экспериментальных исследованиях;
2. совершенствовать процесс обучения, используя параметры и признаки изучаемых процессов в патологии для эффективного тренинга;
3. разработать программы, позволяющие реализовать на

ЭВМ корреляции между параметрами и уровнем устойчивости исследуемого объекта к условиям среды его обитания;

4. применение унифицированной диагностической системы, способной сделать более сравнимыми результаты разных исследователей, понизив при этом трудозатраты на их реализацию.

Таким образом, имея в арсенале исследований экопрео-методы по сбору и обработке информации о состоянии организма растения в онтогенезе, мы сможем определять и прогнозировать устойчивость растения к условиям среды его обитания, что должно являться предпосылкой возможности управления ростом и жизнестойкостью ведущих сельскохозяйственных культур.

Поступила 24.X.1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Б.Коган. Биологическая кибернетика. М., 1977.
2. "Вопросы экопериментальной биофизики и кибернетики растений". Сб. тр.АФИ, ВАСХНИЗ, Л., 24, 1969.
3. "Аналитическое приборостроение". Ионметрия. т.3, ч.П. Материалы Всесоюзного научно-технического совещания. Тб., 1975.
4. Н.Бейли. Статистические методы в биологии. М., 1962.
5. Сб.трудов ИК АН СССР, Тб., 1972.
6. Y.Levitt. Cellular Yngury and Resistance in fruzing organisms. Sapporo, v. 2, 51, 1967.
7. И.Н.Кондо. Устойчивость виноградного растения к морозам.



засухе и почвенному засолению. Кишинев, 1970.

8. А.Г.Мишуренко, В.А.Шерер, Л.Ф.Овчинников. Зимостойкость винограда, К., 1975.
9. К.С.Погосян. Физиологические особенности морозоустойчивости виноградного растения. Ер., 1975.
10. Т.С.Сулакадзе. Физиологические основы морозоустойчивости цитрусовых растений. Тб., 1967.
11. М.Л.Быховский, А.А.Вишневокий. Кибернетические системы в медицине. М., 1971.
12. Сб.трудов ИК АН ГССР "Теоретическая кибернетика". Тб., 1980, 25.

6. ბამულაშვილი

აბჯანთაშვილი ედიშელა ბუბუნაშვილი ინტენციონალური

ეტიმოლოგიური ბამულაშვილის აკრძალვა

რეზიუმე

ბამულაშვილი აბჯანთაშვილი ედიშელის (საბუნა ბამულაშვილის ედიშელის) ბამულაშვილის შვენიერებას მივუძღვით ინტენციონალური ეტიმოლოგიური ბამულაშვილის რეკონსტრუქციის სისტემის მიხედვით ბამულაშვილის საბუნა ბამულაშვილის ეტიმოლოგიური აკრძალვის საფუძველზე აღსანიშნავია ვლადიმერ ბამულაშვილის ეტიმოლოგიური აკრძალვის ბამულაშვილი ბამულაშვილი რეკონსტრუქციის სისტემის აკრძალვის.

5. Труды, т.268.



G. Mamulashvili

CYBERNETICAL APPROACH TO THE STUDY OF THE
PHYSIOLOGICAL RESISTANCE OF THE PLANT BODY

Summary

The feasibility of applying cybernetical methods (those of pattern recognition) in the simulation of a diagnostic system of physiological resistance of the plant body is demonstrated. Electrophysiological and biophysical characteristics-formalized by means of pattern recognition methods-constitute the parameters of the diagnostic system.

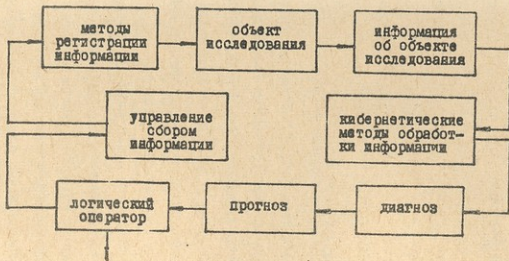


Рис. I.

268, 1986

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЧИСЛА ШАГОВ В ЦИКЛЕ ДЛЯ ОДНОГО
АЛГОРИТМА СЖАТИЯ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Н.Ш.Джикия

В современной науке и технике все большее значение приобретают вопросы использования методов сжатия информации /1/.

Если произвести обзор имеющихся схем сжатия, то увидим, что их большое число сводится к задачам интерполяции. В работах такого типа основные практические применения нашли т.н. адаптивные методы сжатия дискретной информации.

Кроме указанного, достаточно много работ по сжатию основывается на методе статистического или оптимального кодирования /1/. Этот метод можно применять, когда известна статистика сообщений, что одновременно и является его недостатком.

В последнее время значительные применения нашли методы сжатия, основывающиеся на использовании матриц /2/ , /3/. Недостатком этих методов является то, что в процессе восстановления результат не зависит от порядка слагаемых, а также все они дают возможность однократного сжатия.

Ниже рассмотрен математический метод, который позволяет образовывать некоммутативную схему сжатия, и, кроме того, дает



возможность реализовать циклическое ожатие /4/. Работа посвящена вопросам исследования и изучения некоторых оптимальных условий применения этой схемы.

Суть данного метода состоит в следующем:

Пусть даны два n -мерных линейных векторных пространства, одно B_{kn} , определенное на поле $GF(2)$, и другое G_{pn} , определенное над кольцом $R(4)$, где k и p - максимальные числа векторов пространств B_{kn} и G_{pn} , $R(4) = \{x \bmod 4, x \bmod 4, M_4\}$ и $M_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Выбор модуля определяется известными преимуществами четырехзначной системы /4/.

Пусть далее f - функция, которая отображает каждый b_{ij} элемент ($i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$) любого вектора $b_{kn} \in B_{kn}$ из множества $\{0, 1\}$ в множество M_4 , т.е. при отображении f векторы пространства B_{kn} преобразуются в векторы пространства V_{kn} , где $V_{kn} \subset G_{pn}$, чему соответствует следующая рекуррентная формула:

$$v_{11} = b_{11}$$
$$v_{ij} = \begin{cases} v_{ij-1} & \text{если } b_{ij} = 0 \\ v_{ij-1} + 1 & \text{если } b_{ij} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Отображение $f: B_{kn} \rightarrow V_{kn}$ является биекцией /5/.

Последовательность, полученная с помощью формулы (1), является монотонно неубывающей, а ее элементы удовлетворяют следующим условиям:

- для любых двух соседних элементов i -го вектора имеет место равенство: $v_{ij} = v_{ij-1}$ или $v_{ij} = v_{ij-1} + 1$;

- для краевых элементов двух соседних векторов имеет место равенство: $v_{in} = v_{i+1, n}$ или $v_{i+1, i} = v_{in} + 1$.

Из векторов пространства V_{kn} , с применением разных охем, получаем векторы нового пространства $S_{km} (m \leq \frac{n}{2})$, определенные над множеством M_n .

Рассмотренная схема сжатия позволяет применять несколько способов получения векторов \vec{S}_{km} , а именно, вектор \vec{v}_{kn} разбиваем на фрагменты, состоящие из $\frac{n}{l}$ элементов, где l является четным делителем n , например, для $n = 20$ получим фрагменты из 1, 2, 5 и 10 элементов. В общем случае количество применяемых способов зависит от n .

Обозначим оператор умножения на 2 по $\text{mod } 4$ через ρ . Тогда с его применением над вектором \vec{v}_{kn} получим новый вектор \vec{w}_{kn} , заданный над множеством $\{0, 2\}$. Элементами этого вектора являются:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } v_{ij} \text{ четное} \\ 2, & \text{если } v_{ij} \text{ нечетное} \end{cases} \quad (2)$$

Далее, оператор ρ применяем над элементами $i+1$ -го фрагмента вектора \vec{v}_{kn} и полученные значения элементов w_{ij} складываем со значениями соответствующих элементов i -го фрагмента вектора \vec{v}_{kn} . Обозначим полученные элементы через s_{ij} , тогда имеем:

$$s_{ij} = v_{ij} + w_{ij} \quad \text{или} \quad s_{ij} = v_{ij} + 2v_{i+1, j} \pmod{4} \quad (3)$$

Эти s_{ij} и составляют искомый вектор \vec{S}_{km} .

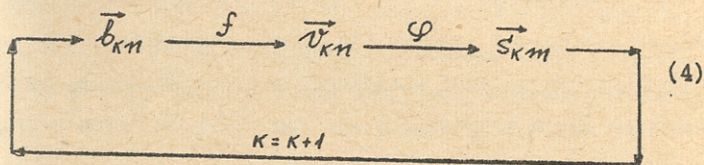
Если способ получения вектора \vec{S}_{km} из вектора \vec{v}_{kn} обозначим через φ , то получим следующую цепочку преобра-



зований:

$$f: \vec{b}_{kn} \rightarrow \vec{v}_{kn}; \quad \varphi: \vec{v}_{kn} \rightarrow \vec{s}_{km}.$$

Последовательность, составленная из элементов вектора \vec{s}_{km} , должна быть двухкомпонентной или монотонной. В противном случае, путем поэлементного двоичного представления, получаем новый вектор. \vec{b}_{kn} ($k=k+1$) и все процедуры повторяются заново, т.е. получим такой цикл преобразований:



Преобразования (4) проводятся до тех пор, пока элементы вектора \vec{s}_{km} не составят двухкомпонентную или монотонную последовательность.

Данная схема сжатия будет считаться реализованной, если для выбранного \vec{s}_{km} выполняется условие:

$$\sum_{i=0}^3 y_i < y, \quad (5)$$

где y - длина начального \vec{b}_{kn} вектора в битах, т.е. для его записи используется n битов;

y_0 - длина полученного \vec{s}_{km} вектора в битах, т.е. число битов, используемых для его записи, не больше чем $\frac{n}{2}$;

y_1 - двоичное число, обозначающее вид используемой схемы. Если число схем ≤ 4 , то для записи y_1 использу-



ется 2 бита;

Y_2 - двоичное число, обозначающее вид полученной последовательности. А именно, для двухкомпонентной $Y_2 \equiv 00$, для монотонной возрастающей $Y_2 \equiv 01$, для монотонно убывающей $Y_2 \equiv 10$ и для постоянной (однокомпонентной) $Y_2 \equiv 11$. Т.е. для записи используется 2 бита;

Y_3 - двоичное число, соответствующее количеству полных циклов (4), т.е. двоичная запись числа K . В общем случае Y_3 зависит от n , а именно, Y_3 должно быть таким, чтобы не нарушалось условие (5), иначе сжатие не имеет смысла. Например, если длина начального вектора 20 битов, то максимальная длина получаемого вектора будет 10 битов и для Y_3 получим ограничение

$$Y_3 < 20 - (10 + 2 + 2) = 6, \quad Y_3 < 6,$$

т.е. для записи Y_3 можно использовать 5 битов, а это значит, что допустимое число полных циклов равно 31 ($31_{10} = 11111_2$).

Если неравенство (5) допускает, то возможно продолжить процесс сжатия вектора \vec{S}_{km} , для чего его надо представить как новый начальный вектор, но уже длиной $\frac{n}{2}$.

Введем оператор

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k \\ 1, & \text{если } n = 2k-1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

Применяя оператор $g(n)$ над элементами вектора \vec{S}_{km} , получим новый вектор $\vec{b}_{k, \frac{n}{2}}$, и по преобразованию (4), учи-

тивная условие (5), получим двухкратное сжатие.

Для анализа возможных схем сжатия, в работе был рассмотрен случай, когда $n=20$, и проведено сжатие 200 различных векторов, с применением 4 схем сжатия для каждого.

В каждом случае были найдены числа шагов в цикле, для которых получали монотонную или двухкомпонентную последовательность. Частоты появления этих чисел даны в таблице I (числа шагов ≥ 32 принимались как недопустимые).

Для каждой схемы были вычислены статистические характеристики: среднее значение, среднеквадратичное значение и дисперсия, построены частотные гистограммы (рис. 1,2,3,4).

В результате были получены следующие значения (см. таблицу 2).

Проведенные исследования позволяют прийти к следующему заключению:

1. Минимальное среднее число шагов в цикле реализуется при $P=2$;

2. При $P=2$ наибольшая вероятность реализации монотонной или двухкомпонентной последовательности получается при числе шагов в диапазоне от 3 до 18.

Поступила 14.XI.1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Ольховский. Сжатие данных при телеметрии. 1973.
2. Н.Д.Нанобашвили. Сообщение АН ИССР, 83, № 2, 1976.
3. Н.Д.Нанобашвили, Н.Ш.Джикия. Тезисы докладов пятого Международного симпозиума по теории информации, ч.2,90,1979.



4. Н.Д.Нанобашвили. Труды ТГУ, серия прикладная математика и кибернетика. 224, № 3, 1981.

5. Ван-дер-Варден. Современная алгебра. 1978.

6. ჯიქია

ინფორმაციის შეკუმშვის რიცხვის ციკლის რიცხვის უზღობრობის შესახებ
ინფორმაციის კომპრესიის უზღობრობის ერთ სტადიის შესახებ
რეზიუმე

ინფორმაციის შეკუმშვის ერთ სტადიის მაგალითზე ციკლის რიცხვის უზღობრობის შესახებ ინფორმაციის კომპრესიის რიცხვის რიცხვის უზღობრობის შესახებ. სათანადო პრეგრესიული რეკონსტრუქციის, 20 მარტივი რიცხვი, კონკრეტული ვერტიკალური შეკუმშვისას მიღებული რიცხვის რიცხვის უზღობრობის ფუნქციის აღმავალი მუდმივი,

N. Jikia

ON THE NUMBER OF STEPS IN A CYCLE FOR A SCHEME
OF COMPRESSION OF DISCRETE INFORMATION

Summary

Using a scheme of compression of information, the most probable interval of the number of steps in a cycle is obtained.

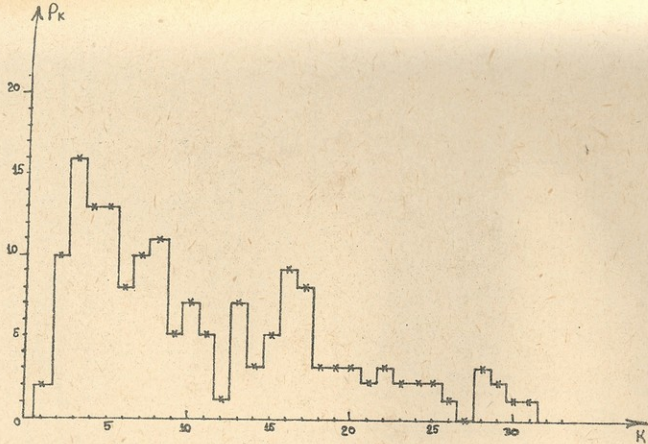
Таблица I

схема сжатия	число шагов															
		I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p=1$ «1+1»		2	10	16	13	13	8	10	11	5	7	5	1	7	3	5
$p=2$ «2+2»		2	21	7	16	15	12	10	10	7	10	4	2	6	7	3
$p=3$ «5+5»		3	13	10	11	11	8	9	12	8	4	5	10	5	11	4
$p=4$ «10+10»		4	9	12	8	8	10	4	8	13	11	13	5	4	6	4

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
9	8	3	3	3	2	3	2	2	2	1	0	3	2	1	1	39
9	6	5	5	2	2	2	6	4	3	1	3	0	0	0	1	19
3	4	7	5	3	2	3	3	5	3	0	2	2	2	1	1	30
6	5	6	0	2	2	5	5	3	2	3	3	3	2	2	3	31

Таблица 2

Схема схатя	Среднее значение	Ср. квадратичное значение	Дисперсия
$p=1$ «1+1»	10,65	168,86	7,44
$p=2$ «2+2»	10,39	160,39	7,23
$p=3$ «5+5»	11,34	185,46	7,53
$p=4$ «10+10»	12,31	214,93	7,96



ՔԱՇ. I.



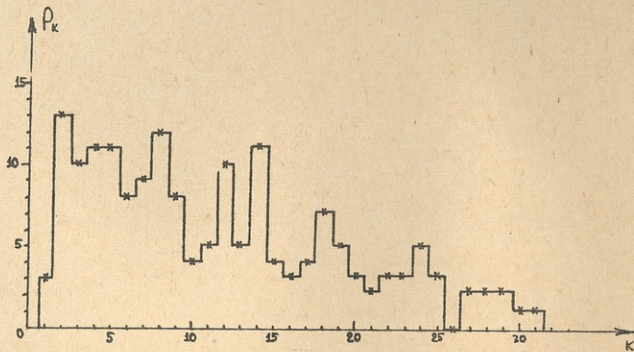


Рис. 3.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

ბილისის შრომის წითელი გზის ორჯინისადაც სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И СТРУКТУРИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.И. Шишигин, Н.Б. Лавренчук

Результаты исследований, относящихся в теории систем, показали, что эффективность систем в значительной мере зависит от степени их структуризации, направленной на упрощение модели системы, пренебрежение частностями при условии сохранения основных контуров системы. Следует принимать во внимание, что для практических целей очень редко возникает необходимость в детализированной модели системы, для описания которой требуется большой объем информации. К тому же желание пользоваться детализированной и очень точной моделью, системы, учитывающей все ее частности и "мелкие особенности", приводит к тому, что определенность вносят там, где её, по существу, нет. Причем, это наблюдается как при исследовании гуманистических систем, так и при моделировании и проектировании технических систем, в частности, робототехнических. "Искусственная определенность" нередко приводит к ошибкам и неверным заключениям, относящимся к исследуемому объекту. Таким образом, приходим к выводу, что в силу нечеткости (зашумленности) реальных объектов необходимо разрабатывать

6. Труды, т.268.

методы описания, которые учитывают "фактор неопределенности" (например, нечеткие множества) и предлагают формы описания объектов, наиболее адекватные реальным объектам. Следует заметить, что моделирование и структуризация сложных систем являются важными проблемами не только для общей теории систем, но и для целого ряда концепций, появившихся под названиями "обучающихся", "адаптивных", "самоорганизующихся", "робототехнических" и других систем /1-7/.

В данной работе рассматривается один из возможных подходов к моделированию и структуризации динамической системы с большим числом параметров, основанный на концепции "неопределенности" в форме нечетких множеств.

Кортежи входных и выходных переменных, а также состояния динамической системы являются точками евклидова пространства.

Исследуется зависимость выходной величины $\vec{y}(t)$ (точка $\vec{y} \in E_s$) и вектора состояния $\vec{x}(t)$ (точка $\vec{x} \in E_n$) в момент времени t от вектора состояния $\vec{x}(t_0)$ в момент времени t_0 при условии воздействия на входы системы одного и того же семейства входных величин $x^1(\tau), \dots, x^r(\tau)$ ($t_0 \leq \tau < t$), т.е. при условии, что точка $\vec{x} = (x^1, \dots, x^r)$ описывает одну и ту же траекторию в пространстве E_n в течение промежутка времени $t_0 \leq \tau < t$.

Переменные величины динамической системы связаны уравнениями $\dot{\vec{x}}(t) = F(\vec{x}(t_0), \vec{x}(\tau))$, $\dot{\vec{y}}(t) = G(\vec{x}(t_0), \vec{x}(\tau))$, где F - оператор переходов, а G - оператор выходов. При исследовании динамической системы каждому прообразу $G^{-1}(c)$ и $F^{-1}(c)$



(C - адрес элементарного "кубика" адресной структуры, либо множества значений выходного вектора, либо множества значений вектора состояния) по некоторому правилу ставится в соответствие нечеткое множество $f-G^{-1}(f-F^{-1}(c))$. Такой подход позволяет приписывать динамической системе S "нечеткий двойник" $f-S$, удобный для получения необходимой и достаточной информации о предпочтительных значениях координат вектора состояния $\vec{x}(t_0)$, определяющих нахождение точки $F(\vec{x}(t_0))$ в заданной области пространства E_n и точки $G(\vec{x}(t_0))$ в заданной области пространства E_S . Причем вся необходимая и достаточная информация о динамической системе записывается в форме оценочных матриц, которые состоят только из элементов трех видов: "1", "0", "-1".

Элементы "1" и "-1" оценочной матрицы показывают, что значения координат вектора состояния $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ с весовым коэффициентом "1" появляются "достаточно часто", а значения координат вектора состояния с весовым коэффициентом "-1" — "очень редко" при условии, что точка $F(\vec{x})$ находится в заданной области n -мерного евклидова пространства E_n , либо точка $G(\vec{x})$ находится в заданной области S -мерного евклидова пространства E_S .

1. Основные уравнения динамической системы /8/. Понятие динамической системы, в зависимости от постановки задачи и практических требований, может приобретать более широкое или более узкое значение. В первую очередь для описания динамической системы должны быть заданы множества значений входных и выходных величин и переменного состояния:



- 1) множество \mathcal{X} значений входной величины x^k (входной алфавит величины x^k);
- 2) множество \mathcal{Y}_k значений выходной величины y^k ($k=1, S$) (выходной алфавит величины y^k);
- 3) множество \mathcal{Z}_k значений переменной состояния z_k ($k=1, n$) (алфавит состояний переменной z^k).

Далее, следует ввести множество входных слов $\{x\}$, которое представляет собой множество кортежей длины n , а именно:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_n,$$

множество выходных слов $\{y\}$, т.е. множество кортежей длины S :

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_S) \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \dots \times \mathcal{Y}_S$$

и множество состояний $\{z\}$:

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2 \times \dots \times \mathcal{Z}_n.$$

Входные величины в качестве причины определяют изменение во времени всех переменных системы и, в частности, всех выходных величин.

Связь между переменными динамической системы записывается посредством основных уравнений динамической системы:



$$\begin{cases} \dot{x}_\mu(t) = F_\mu[\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0); x^1(\tau), \dots, x^r(\tau)] \\ \qquad \qquad \qquad (\mu = \overline{1, n}), \\ \dot{y}^k(t) = G_k[\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0); x^1(\tau), \dots, x^r(\tau)] \\ \qquad \qquad \qquad (\kappa = \overline{1, s}) \end{cases} \quad (I)$$

($t_0 \leq \tau < t$), где F и G обозначают специальные операторы с соответствующими областями определений и значений.

Из основных уравнений динамической системы (I) следует, что переменные состояния $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n$ задаются таким образом, что выполняется следующее: для всех моментов времени t_0 и $t > t_0$ при произвольном характере изменения входных величин $x^y(\tau)$ ($y = \overline{1, r}$) на интервале $t_0 \leq \tau < t$ $\dot{x}^\mu(t)$ ($\mu = \overline{1, n}$) и $y^k(t)$ ($\kappa = \overline{1, s}$) являются функциями $x^y(\tau)$ ($y = \overline{1, r}$), $\dot{x}^\mu(t_0)$ ($\mu = \overline{1, n}$) (и только функциями этих величин).

Особый интерес представляют собой динамические системы, в которых кортежи входных и выходных величин, а также кортежи состояний являются точками алгебраических пространств, наделенных топологическими структурами. В задачах прикладного характера наиболее часто обращаются к динамическим системам, в которых кортежи переменных являются точками евклидовых пространств.

Основной задачей теории систем является вскрытие зависимостей между переменными динамической системы (достаточно широкого значения в практическом смысле) в наиболее общем виде, не зависящем от привлечения специальных свойств системы, связанных с её реализацией (элементная база, структура взаимосвязей отдельных элементов и т.д.).



2. Адресная структура областей значений переменных

личия динамической системы. Положим, что множество выходных олов D (либо множество векторов состояния) представляет собой область, принадлежащую m -параллелепипеду W евклидова m -мерного пространства E_m , а именно:

$$D \subset W = \{(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) \in E_m \mid a_j' \leq a_j \leq a_j'', j = \overline{1, m}\}.$$

Вначале рассмотрим адресную структуру, определенную на отрезке $[a_j', a_j'']$ j -й координатной оси ($j = \overline{1, m}$). Для определения "адресов" точек на отрезке $[a_j', a_j'']$ можно задать бинарное дерево T подотрезков этого отрезка. С этой целью разделим отрезок $[a_j', a_j'']$ пополам, затем каждую половину также разделим пополам и т.д. Бинарной последовательности $(c) = c_1 c_2 \dots c_N$, где $c_\alpha \in \{0, 1\}$, $\alpha = \overline{1, N}$, поставим в соответствие отрезок $\Delta_c = (d_c, d_c^r)$, принадлежащий бинарному дереву подотрезков T , а именно:

$$(c) \xrightarrow{f_j} [d_c, d_c^r] = \Delta_c,$$

где

$$d_c = a_j' + l_j \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha 2^{-\alpha},$$

$$d_c^r = d_c - l_j \cdot 2^{-N}, \quad l_j = a_j'' - a_j'.$$

В силу того, что отображение f_j ($j = \overline{1, m}$) является инъективным отображением множества всех бинарных последовательностей длины N $\mathcal{N}\{(c)\} = \{c_1, \dots, c_N\}$ в множество элементов бинарного дерева T подотрезков отрезка $[a_j', a_j'']$. бинарную последовательность $(c) = c_1 c_2 \dots c_N$ можно рассмат-



ривать в качестве кода подотрезка, а именно:

$$(c) \xleftarrow{f_j} [d_c, d_c^x] = \Delta_c,$$

$$d_c = a_j' + l_j \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \cdot 2^{-\alpha}, \quad d_c^x = d_c + l_j \cdot 2^{-N}, \quad l_j = a_j^2 - a_j'.$$

Имеем бинарную последовательность $(c) = c_1 c_2 \dots c_k$.

Выпишем подпоследовательности $(c^1), (c^2), \dots, (c^m)$ последовательности (c) , составленные, соответственно, из элементов с номерами, дающими при делении на m в остатке $1, 2, \dots, m-1$ и делящимися на m (с номерами, сравнимыми с $1, 2, \dots, m-1, 0$ по модулю m). Бинарной последовательности $(c) = c_1 c_2 \dots c_k$ поставим в соответствие область (m -параллелепипед) $(\Delta_{c^1}, \dots, \Delta_{c^m}) = \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_j \in \Delta_{c^j}\}$ посредством следующего отображения f , а именно:

$$f \equiv \{f_j\}_{j=\overline{1, m}},$$

$$(c) \xrightarrow{f} (\Delta_{c^1}, \Delta_{c^2}, \dots, \Delta_{c^m}) = \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_j \in \Delta_{c^j}, j = \overline{1, m}\},$$

$$f_j : (c^j) \longrightarrow \Delta_{c^j}, j = \overline{1, m}.$$

Множество всех бинарных последовательностей $\mathcal{B} = \{(c)\}$ длиной k назовем адресной структурой ранга k области значений переменной динамической системы (выходного вектора, вектора состояния). Область (m -параллелепипед)

$$(\Delta_{c^1}, \Delta_{c^2}, \dots, \Delta_{c^m}) = \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_j \in \Delta_{c^j}\} (j = \overline{1, m})$$

будем называть элементарным "кубиком" (элементарной ячей-

кой) области значений переменной динамической системы, а соответствующую этой области бинарную последовательность (c) кодом элементарного "кубика" (элементарной ячейки), либо атомарным адресом. Нетрудно указать (вычислить) атомарный адрес для любой точки $(a_1, \dots, a_m) \in W$.

Пусть $a_j^1 < a_j < a_j^2$, тогда

$$c_\alpha^j \left(\alpha = 1, 2, \dots, \left[\frac{K}{m} \right] + \left[\frac{2 \text{нас}(K, m)}{\text{нас}(K, m) + j} \right] \right)$$

вычисляются посредством рекуррентных соотношений:

$$c_\alpha^j = [2\xi_\alpha^j], \quad \xi_{\alpha+1}^j = 2\xi_\alpha^j - c_\alpha^j, \dots, \xi_2^j = 2\xi_1^j - c_1^j,$$

$$c_1^j = \left[\frac{2(a_j - a_j^1)}{l_j} \right], \quad l_j = a_j^2 - a_j^1, \quad \xi_1^j = \frac{a_j - a_j^1}{l_j},$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, K_j, \quad K_j = \left[\frac{K}{m} \right] + 2 \frac{\text{нас}(K, m)}{\text{нас}(K, m) + j}.$$

На основе последовательностей $(c^1), (c^2), \dots, (c^m)$ строится атомарный адрес точки $(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) \in W$, а именно:

$$(c) = c_1^1 c_1^2 \dots c_1^m c_2^1 c_2^2 \dots c_2^m \dots c_{K_m}^m.$$

Зададим метрику на множестве атомарных адресов $B = \{(c)\}$.

Пусть $(g), (h) \in B$ и



$$(g) = g_1^1 g_2^2 \dots g_1^m g_2^1 g_2^2 \dots g_2^m \dots g_{km}^m,$$

$$(h) = h_1^1 h_2^2 \dots h_1^m h_2^1 \dots h_2^m \dots h_{km}^m.$$

Тогда определим $\rho\{(g), (h)\} \triangleq \left(\sum_{j=1}^m ((g^j)^2 - (h^j)^2)^{1/2} \right)$, где

$$(g^j) = g_1^j \dots g_{k_j}^j, \quad (h^j) = h_1^j h_2^j \dots h_{k_j}^j$$

мыслятся как числа в двоичном представлении.

Примечание. Символ $[x]$ означает наибольшее целое число $\leq x$. $\text{res}(k, m)$ обозначает остаток при делении k на m .

При моделировании динамической системы рассмотрим структурные особенности области значений состояния динамической системы. Исследуем зависимость вектора состояния $\vec{x}(t)$ и выходной величины $\vec{y}(t)$ (точка $\vec{y}(t) \in E_s$) в момент времени t от вектора состояния $\vec{x}(t_0)$ в момент времени t_0 при условии воздействия на входы системы одного и того же семейства входных величин $x^1(\tau), \dots, x^r(\tau)$ ($t_0 \leq \tau < t$), т.е. при условии, что точка $\vec{x} = (x_1, \dots, x^n)$ описывает одну и ту же траекторию в пространстве E_n в течение промежутка времени $t_0 \leq \tau < t$.

Фактически, исследуемым объектом является отображение $\Phi: D \rightarrow E_m$, источником которого является область D , принадлежащая n -параллелепипеду евклидова n -мерного пространства E_n . $D \subset U = \{ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mid x_i^1 \leq x_i \leq x_i^2, i = \overline{1, n} \}$.

Положим, что отображение Φ непрерывно вплоть до границы и образ $\Phi(D)$ принадлежит m -параллелепипеду W , а именно:



$$W = \{(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) \in E_n, |a_j^1 \leq a_j \leq a_j^2, j = \overline{1, m}\}$$

Положим, что область D имеет положительную лебегову меру $\mu(D) > 0$ и дано семейство функций $\{l_i(z_i)\}_{i=\overline{1, n}}$, $-\infty < z_i < +\infty$, представляющее собой семейство "сечений" по гиперплоскостям, перпендикулярным к координатным осям. Функция $l_i(z_i)$, $-\infty < z_i < +\infty$, представляет собой меру (в пространстве размерности $n-1$) сечения области D гиперплоскостью, проходящей через точку $(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)$ перпендикулярно оси z_i . Положим, что $l_i^* = \sup l_i(z_i)$.

Семейство функций $\{l_i(z_i)\}_{i=\overline{1, n}}$, $-\infty < z_i < +\infty$, порождает семейство функций $\{A_i(z_i)\}_{i=\overline{1, n}}$, $A_i(z_i) = \frac{l_i(z_i)}{l_i^*}$, которое будем называть семейством нормированных "сечений".

Пусть область D евклидова n -мерного пространства E_n характеризуется семейством нормированных "сечений"

$$\left. \begin{aligned} & \{A_i(z_i)\}_{i=\overline{1, n}}, \\ \text{причем: } & A_i(z_i) = 0, \text{ если} \\ & z_i \notin [z_i^1, z_i^2]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Возникает задача "восстановления" области D , зная её семейство нормированных "сечений" (2). Для решения этой задачи применим концепцию "нечеткости", а именно, введем



нечеткое подмножество $f-D$ универсального множества \mathcal{U} (n -параллелепипед евклидова n -мерного пространства E_n) с функцией принадлежности

$$P(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n \lambda(x_i), \quad \text{где } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}, \quad (3)$$

которая ставит в соответствие каждому элементу $\vec{x} \in \mathcal{U}$ число $P(\vec{x})$ из отрезка $[0, 1]$, характеризующее степень принадлежности элемента \vec{x} подмножеству $f-D$. В дальнейшем потребуется следующее понятие. Пусть сегменты $[x_i^1, x_i^2]$, $i = \overline{1, n}$, разбиваются на отрезки длиной Δx_i , $i = \overline{1, n}$,

$$\delta_{n_i}(x_i) = \{x_i \mid n_i \Delta x_i \leq x_i < (n_i + 1) \Delta x_i\}, \quad n_i = \overline{0, N_i},$$

$$N_i = \left[\frac{x_i^2 - x_i^1}{\Delta x_i} \right] - 1.$$

Определение. Среднюю локальную вероятность того, что случайная точка $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, равномерно распределенная в n -параллелепипеде $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \delta_{n_i}, i = \overline{1, n}\}$, принадлежит нечеткой области $f-D$, определим как математическое ожидание случайной величины $\xi = P(\xi)$, где

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(x_i), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad P = E \xi.$$

Следует заметить, что качественной особенностью нечеткого подмножества $f-D$ n -мерного пространства E_n явля-

есть группирование его точек, преимущественно на пересечении гиперплоскостей, перпендикулярных к осям x_i , $i=1, n$, которым соответствуют большие значения функций семейства нормированных "сечений" (2).

Пусть $\mathcal{X}_n = \{D\}$ - класс компактных множеств $D \subset E_n$, каждое из которых представимо в виде замыкания открытого множества $D = [R]$, где R - открытое множество и $\mu(R) > 0$ ($\mu(R)$ - лебегова мера множества R). Положим, что каждое множество $D \in \mathcal{X}_n$ однозначно определяется семейством нормированных "сечений" (2), т.е. выполняется условие

$$(\forall D \in \mathcal{X}_n) (\forall D' \in \mathcal{X}_n) \{ \lambda_i(x_i) = \lambda'_i(x_i), i = \overline{1, n} \} \implies D = D',$$

где $\{ \lambda_i(x_i) \}_{i = \overline{1, n}}$ - семейство нормированных "сечений" области D , и $\{ \lambda'_i(x_i) \}_{i = \overline{1, n}}$ - семейство нормированных "сечений" области D' . Иначе говоря, две области $D, D' \in \mathcal{X}_n$, имеющие одинаковые семейства нормированных "сечений", равны между собой.

Примеры. Очевидно, что область $D_1 = \{(x, y) / a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$ двумерного евклидова пространства E_2 принадлежит классу \mathcal{X}_2 , т.е. область D_1 однозначно определяется своими нормированными функциями "сечений":

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [a_1, a_2], \\ 0, & \text{если } x \notin [a_1, a_2]; \end{cases}$$



$$A_2(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in [b_1, b_2], \\ 0, & \text{если } y \notin [b_1, b_2]. \end{cases}$$

Менее очевидно, что область $D_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq R\}$

двумерного евклидова пространства E_2 принадлежит классу \mathcal{X}_2 , т.е. область D_2 однозначно определяется своими нормированными функциями "сечений":

$$A_1(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}, & \text{если } |x| \leq R, \\ 0, & \text{если } |x| > R; \end{cases}$$

$$A_2(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}, & \text{если } |y| \leq R, \\ 0, & \text{если } |y| > R. \end{cases}$$

Введем обозначения. Пусть S - "сечение" области D гиперплоскостью, проходящей через точку $(0, \dots, 0, \bar{x}_i, 0, \dots, 0)$ перпендикулярно к оси \bar{x}_i , а S' - "сечение" области D гиперплоскостью, проходящей через точку $(0, \dots, 0, \bar{x}'_i, 0, \dots, 0)$ перпендикулярно к оси \bar{x}_i .

Нетрудно убедиться, что если $D \in \mathcal{X}_n$, то выполняется следующее свойство:

$$l_i(\bar{x}_i) \geq l'_i(\bar{x}'_i) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{если точка } (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}'_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) \in S' \\ \text{то точка } (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) \in S \end{array} \right\} (4)$$

Качественно это свойство означает, что точки области D группируются преимущественно на пересечении гиперплоскостей, перпендикулярных к осям \bar{x}_i , $i = \overline{1, n}$, которым соответ-

ствуют большие значения функций семейства "сечений".

Пусть Q - множество n -мерного евклидова пространства E_n , имеющее положительную лебегову меру $\mu(Q)$. При-
чем $[Q] \in \mathcal{F}_n$ и семейства нормированных "сечений" для Q
и $[Q]$ одинаковы, т.е. выполняется условие $\lambda_i(x_i) = \lambda'_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$,
где $\{\lambda_i(x_i)\}_{i=\overline{1, n}}$ - семейство нормированных "сечений"

для Q и $\{\lambda'_i(x_i)\}_{i=\overline{1, n}}$ - семейство нормированных "се-
чений" для $[Q]$. Обозначим через $\Psi_n = \{Q\}$ класс множеств
 n - мерного евклидова пространства E_n , удовлетворяющих
вышеуказанному свойству. Очевидно, что $\mathcal{F}_n \subset \Psi_n$ и свойст-
во (4) выполняется для всех точек множества Q , за ис-
ключением подмножества точек, имеющих нулевую меру.

Теперь перейдем к обоснованию тезиса о том, что нечеткое
подмножество $f-D$ с функцией принадлежности (3) имеет в из-
вестном смысле в качестве своей "модели" класс множеств Ψ_n
о семейством нормированных "сечений" (2).

Воспользуемся результатом моделирования n -мерной слу-
чайной точки с независимыми координатами, каждая из которых
разыгрывается по закону равномерного распределения с плот-
ностью

$$P_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{x_i^2 - x_i^1}, & \text{если } x_i \in [x_i^1, x_i^2], \\ 0, & \text{если } x_i \notin [x_i^1, x_i^2]. \end{cases}$$

Введем обозначения. Пусть M - число случайных точек
в n - параллелепипеде U , $M[D]$ - число случайных



точек, попавших в область D , а $m_i^{[D]}(n_i)$, $i=\overline{1, n}$, — число точек, попавших в область D , i -ая компонента которых принадлежит $\delta_{n_i}(\bar{x}_i)$, $i=\overline{1, n}$,

$$m_i^*[D] = \max_{n_i = \overline{0, N_i}} m_i^{[D]}(n_i), \quad \sum_{n_i=0}^{N_i} m_i^{[D]}(n_i) = M[D], \quad i=\overline{1, n}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих предложений.

Предложение I. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M' , что как только число случайных точек M , разыгранных в n -параллелепипеде U , $M > M'$,

то

$$\left| \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[Q]}(n_i)}{m_i^*[Q]} - \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[D]}(n_i)}{m_i^*[D]} \right| < \varepsilon.$$

Теорема I. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и M' , что как только $\Delta \bar{x}_i < \delta$ и $M > M'$, то средняя локальная вероятность $P = E \xi$ того, что случайная точка $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, равномерно распределенная в n -параллелепипеде $\Delta = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) | \bar{x}_i \in \delta_{n_i}, i=\overline{1, n}\}$, попадет в нечеткую область $f-D$, удовлетворяет следующему неравенству:

$$\left| P - \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[Q]}(n_i)}{m_i^*[Q]} \right| < \varepsilon.$$

Приведем схему доказательства теоремы 1. Положим, что множества $Q \in \mathcal{V}_n$ и $D \in \mathcal{X}_n ([Q]=D)$ имеют семейства функций "сечений" $\{l_i(z_i)\}_{i=1}^n$, которые принимают максимальные значения в точках $\{z_i^*\}_{i=1, \overline{n}}$, $l_i(z_i^*) = l_i^*$ ($i=1, \overline{n}$), и существуют следующие интегралы (интегралы Римана)

$$\int_{n_i \Delta z_i}^{(n_i+1)\Delta z_i} \frac{l_i(z_i)}{l_i^*} dz_i \quad (i=1, \overline{n}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} P = E\xi &= \int_{(\Delta)} \prod_{i=1}^n l_i / z_i \prod_{i=1}^n P_i(z_i) dz_1, \dots, dz_n = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \Delta z_i} \prod_{i=1}^n \int_{n_i \Delta z_i}^{(n_i+1)\Delta z_i} \frac{l_i(z_i)}{l_i^*} dz_i = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{l_i^* \Delta z_i} \int_{n_i \Delta z_i}^{(n_i+1)\Delta z_i} l_i(z_i) dz_i = \prod_{i=1}^n \frac{V_i(n_i)}{l_i^* \Delta z_i}, \end{aligned}$$

где $V_i(n_i)$ - объем подобласти области D , заключенной между гиперплоскостями, проходящими через точки $n_i \Delta z_i$ и $(n_i+1)\Delta z_i$ оси z_i перпендикулярно к этой оси. Следует заметить, что при достаточно малых отрезках Δz_i ($i=1, \overline{n}$) $\frac{V_i(n_i)}{l_i^* \Delta z_i}$ как угодно близко приближаются к $V_i(n_i)$

($i = \overline{1, n}$) для интервалов $\delta_{m_i}(z_i)$ ($i = \overline{1, n}$) содержащих z_i^* ($i = \overline{1, n}$), $z_i^* \in \delta_{m_i}$.

далее воспользуемся результатом моделирования n -мерной случайной точки и неравенством

$$\left| P - \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[Q]}(n_i)}{m_i^*[Q]} \right| < \left| P - \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[D]}(n_i)}{m_i^*[D]} \right| + \left| \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[D]}(n_i)}{m_i^*[D]} - \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{[Q]}(n_i)}{m_i^*[Q]} \right|.$$

Перейдем к построению интегральных оценок для динамической системы.

Продолжим исследование отображения $\Phi: D \rightarrow E_m$. Положим, что на m -параллелепипеде W задана адресная структура $\mathcal{B} = \{(\sigma)\}$ ранга K и $D[(\sigma)] \in \mathcal{U}$ для любого адреса (σ) ($D[(\sigma)]$ - полный прообраз подмножества точек, принадлежащих элементарному "кубику" с адресом (σ)); следует напомнить, что элементарные "кубики" образованы разбиением m -параллелепипеда W плоскостями, параллельными координатным плоскостям m -мерного евклидова пространства E_m . Отображение $\Phi: D \rightarrow E_m$, удовлетворяющее этому условию, а именно $(\forall (\sigma) \in \mathcal{B}) (D[(\sigma)] \in \mathcal{U}_m)$ назовем "правильно сгруппированным" отображением $\Phi: D \rightarrow E_m$ с адресной структурой \mathcal{B} ранга K его образа. Отображение $\Phi: D \rightarrow E_m$, правильно сгруппированное независимо от

7. Труды, т.268.

ранга адресной структуры \mathcal{B} его образа $\Phi(\mathcal{D}) \subset W$ правильно сгруппированное для адресной структуры \mathcal{B} любого ранга K , назовем абсолютно правильно сгруппированным отображением.

Приведем схему выявления предпочтительных значений по каждой координате n -мерного пространства E_n и построения интегральных оценок при описании отображения $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow E_m$. В основе этой схемы положен следующий процесс моделирования. На i -м этапе моделирования устанавливается распределение точек $a = \Phi(x)$ по элементарным "кубикам" адресной структуры \mathcal{B} ранга K m -параллелепипеда W .

С этой целью:

а) разыгрывается вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ как случайный вектор, равномерно распределенный в n -параллелепипеде \mathcal{U} , т.е. по закону равномерного распределения с плотностью

$$P_{\tilde{x}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \prod_{i=1}^n P_i(\tilde{x}_i)$$

$$\text{где } P_i(\tilde{x}_i) = \begin{cases} \frac{1}{x_i^2 - x_i^1}, & \text{если } \tilde{x}_i \in [x_i^1, x_i^2], \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_i \notin [x_i^1, x_i^2]; \end{cases}$$

б) проверяются условия связей, т.е. ограничения, накладываемые на точки, принадлежащие области \mathcal{D} ;

в) вычисляются адреса элементарных "кубиков" m -параллелепипеда W , в которые попадают точки с координатами

$$a = (a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) = \Phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n).$$



На II-м этапе формируются доминирующие значения компонент вектора состояния $\bar{z} = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$ для каждого атомарного адреса $(C) = C_1 C_2 \dots C_k$ (для каждого "кубика" с адресом (C)). Для этого сегменты $[z_i^1, z_i^2]$, $i = \overline{1, n}$, разбиваются на отрезки длиной Δz_i ,

$$\delta_{n_i}(z_i) = \{z_i \mid n_i \Delta z_i \leq z_i < (n_i + 1) \Delta z_i\},$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad N_i = \left\lfloor \frac{z_i^2 - z_i^1}{\Delta z_i} \right\rfloor - 1.$$

Положим, что $N_i = N_0$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $D[(C)]$ - прообраз множества всех точек m -параллелепипеда W , имеющих атомарный адрес (C) . Причем $D[(C)] \in \Psi_n$. Пусть

M_C - число случайных точек, попавших в область $D[(C)]$,
 $m_i^C(n_i)$ - число случайных точек, попавших в область $D[(C)]$,
 i -я компонента которых принадлежит $\delta_{n_i}(z_i)$, $n_i = \overline{0, N_i}$,
 $i = \overline{1, n}$,

$$m_i^*(C) = \max_{n_i = \overline{0, N_i}} m_i^C(n_i),$$

$$\sum_{n_i=0}^{N_i} m_i^C(n_i) = M_C, \quad \sum_{(C) \in B} M_C = M_D.$$

Существенными считаются те значения компонент z_i

($i = \overline{1, n}$) вектора состояния $\bar{z} = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$, принадлежащие отрезкам $\delta_{n_i}(z_i)$, $n_i = \overline{0, N_i}$,

($i = \overline{1, n}$), для которых $m_i^C(n_i) > \beta m_i^*(C)$ и

$$m_i^c(n_i) < (1-\beta) m_i^*(c), \quad i = \overline{1, n},$$

где β - пороговая величина ($\frac{1}{2} < \beta < 1$). В соответствии с этим, для каждого атомарного адреса (c) имеем оценочную $N_0 \times n$ -матрицу $A(c) = (a_{ki})$, $k = \overline{0, N_0}$, $i = \overline{1, n}$, в которой

$$a_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_i^c(k) > \beta m_i^*(c), \\ -1, & \text{если } m_i^c(k) < (1-\beta) m_i^*(c), \\ 0, & \text{если } (1-\beta) m_i^*(c) < m_i^c(k) < \beta m_i^*(c). \end{cases}$$

Элементы оценочной матрицы $A(c) = (a_{ki})$, $k = \overline{0, N_0}$, $i = \overline{1, n}$, отличные от 0, определяют доминирующие значения компонент вектора состояния $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)$ при заданной пороговой величине β ($\frac{1}{2} < \beta < 1$). Элементы "1" и "-1" оценочной матрицы $A(c)$ показывают, что значения компонент вектора $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ с весовым коэффициентом "1" появляются "достаточно часто", а значения компонент вектора \bar{x} с весовым коэффициентом "-1" - "очень редко" при условии, что точка $\Phi(\bar{x})$ находится в элементарном "кубике" с адресом (c).

Множество оценочных матриц $\text{Con}(\mathcal{B}) = \{A(c) | c \in \mathcal{B}\}$ по всем атомарным адресам назовем "концептом" отображения $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow E_m$ с адресной структурой \mathcal{B} его образа.

Сформулируем фундаментальную теорему для правильно сгруппированного отображения $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow E_m$ с адресной структурой \mathcal{B} его образа $\Phi(\mathcal{D}) \subset W$.

Теорема 2. Пусть дано правильно сгруппированное отображение $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow E_m$ с адресной структурой \mathcal{B} его образа $\Phi(\mathcal{D}) \subset W$.

Тогда для любого β ($\frac{1}{2} < \beta < 1$) найдутся такие δ и M' , что, как только $\Delta z_i < \delta$ и $M > M'$, средняя локальная вероятность $P\{\xi \in \mathcal{D}(c)\} = P\{\Phi(\xi) \in (\Delta_{c_1}, \dots, \Delta_{c_m})\}$ того, что случайная точка $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, равномерно распределенная в n -параллелепипеде $\Delta = \{z_1, \dots, z_n \mid z_i \in \delta_{n_i}\}$, который имеет \mathcal{A}_1 отрезков δ_{n_i} с весами 1 и \mathcal{A}_0 отрезков с весами 0, соответствующими оценочной матрице $A(c) = (a_{ki}), k = \overline{0, N_0}, i = \overline{1, n}$ ($\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0 = n$) с весами, которые приписываются отрезкам при помощи оценочной матрицы $A(c)$, попадет в область $\mathcal{D}(c)$, $\Phi(\xi)$ принадлежит элементарному "кубику" с адресом (c) ,

$\Phi(\xi) \in (\Delta_{c_1}, \dots, \Delta_{c_m})$ и удовлетворяет неравенству

$$P > (1 - \beta)^{\mathcal{A}_0} \beta^{\mathcal{A}_1}.$$

Теорема 2 доказывается на основании теоремы 1 и того факта, что n -параллелепипед $\Delta = \{z_1, \dots, z_n \mid z_i \in \delta_{n_i}, i = \overline{1, n}\}$ имеет \mathcal{A}_1 интервалов с весами 1 и \mathcal{A}_0 интервалов с весами 0, соответствующими оценочной матрице $A(c) = (a_{ki}), k = \overline{0, N_0}, i = \overline{1, n}$; следовательно, выполняются \mathcal{A}_1 неравенств

$$\frac{m_{i,j}^c(n_{i,j})}{m_{i,j}^*(c)} > \beta, \quad j = 1, 2, \dots, \mathcal{A}_1,$$



и λ_0 неравенств

$$\frac{m_{ij}^c(n_{ij})}{m_{ij}^*(c)} > (1-\beta), \quad j = \lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_0+\lambda_1,$$

$$(\lambda_0+\lambda_1) = n.$$

Теперь напомним основную задачу данной работы: исследовать зависимость вектора состояния $\vec{x}(t)$ и выходной величины $\vec{y}(t)$ (точка $\vec{y}(t) \in E_S$) в момент времени t от вектора состояния $\vec{x}(t_0)$ в момент времени t_0 при условии воздействия на входы системы одного и того же семейства входных величин $x^1(\tau), \dots, x^r(\tau)$ ($t_0 \leq \tau < t$), т.е. при условии, что точка $x = (x^1, \dots, x^r)$ описывает одну и ту же траекторию в пространстве E_r в течение промежутка времени $t_0 \leq \tau < t$.

При такой постановке задачи зависимость вектора состояния $\vec{x}(t)$ от вектора состояния $\vec{x}(t_0)$ определяется отображением $F: D \rightarrow E_n$, а зависимость выходной величины $\vec{y}(t)$ (точка $\vec{y} \in E_S$) от вектора состояния $\vec{x}(t_0)$ определяется отображением $G: D \rightarrow E_S$ (F - оператор переходов, а G - оператор выходов) ($E_n \supset D$ - множество состояний динамической системы).

Применим схему выявления предпочтительных значений по каждой координате n -мерного пространства $E_n \supset D$ и построим оценочные матрицы для отображения $F: D \rightarrow E_n$ и $G(D) \rightarrow E_S$.

В результате для отображений F и G получим "концепты", т.е. множества оценочных матриц по всем атомарным ад-

ресам "кубиков" адресных структур образов $F(D) \subset E_n$ и $G(D) \subset E_S$.

Оценочные матрицы "концептов" позволяют судить о поведении динамической системы, а именно: элементы "1" и "-1" оценочной матрицы $H(C)$ показывают, что значения координат вектора состояния $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ с весовым коэффициентом "1" появляются "достаточно часто", а значения координат вектора состояния с весовым коэффициентом "-1" - "очень редко" при условии, что точка $F(\bar{x})$ находится в элементарном "кубике" с адресом (C) n - параллелепипеда евклидова пространства E_n , либо точка $G(\bar{x})$ находится в элементарном "кубике" с адресом (C) S - параллелепипеда евклидова пространства E_S .

Поступила 18.XI.1985

Институт систем
управления АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Д.Месарович. Основания общей теории систем. Общая теория систем. -М.: Мир, 1966.
2. Р.Калман, П.Фалб, М.Арбиб. Очерки по математической теории систем. -М.: Мир, 1971.
3. А.Г.Ивахненко, Ю.П.Зайченко, В.Д.Димитров. Принятие решений на основе самоорганизации. -М.: Советское радио, 1976.
4. Н.Б.Лавренчук, В.В.Чавчандзе, М.И.Шишигин. О психологическом обеспечении систем. Тезисы докладов III Всесоюзного научно-практического семинара по психологическому обеспечению АСУ. Москва, 1985.
5. В.Г.Срагович. Теория адаптивных систем. -М.:Наука, 1976.



6. Интегральные роботы, вып. I. Сб. статей, перевод под ред. Г.Е.Поздняка. - Мир, 1973, вып.2, 1975.
7. М.И.Шишигин, Н.Б.Лавренчук. Метод вероятностно-статистического моделирования и структуризации динамической системы. Тезисы докл. конф. "Эффективность, качество и надежность орг.ем "человек-техника", часть II, Москва, 1984.
8. Г.Вуиш. Теория систем. - Сов. радио, 1978.
9. М.И.Шишигин, В.В.Чавчанидзе. Об одном подходе к построению алгоритмов управления манипуляционными роботами. -Труды У Международной конференции по программируемым системам для автоматизации проектирования и технологических процессов в производстве, Л., 1982.
10. V.V.Chavchanidze. Towards the General Theory of Conceptual Systems, Kybernetics, vol. 3, N1, 1974, pp. 17-25.

მ. შიშიგინი, ნ. ლავრენჩუკი

ინტეგრალური სისტემების მართვისათვის და სტრუქტურალიზაციის

პრობლემ-სტატისტიკური მეთოდები

რეზიუმე

შეიქმნა მეთოდი, რომელიც განაზოგნობს სისტემის ენაზე აღწერის განსაკუთრებულ "იზიერებს". მეთოდი საშუალებას იძლევა გამოავლინოს, პარამეტრების რამდენი მნიშვნელობები უძველესი უპირატესობა. მეთოდის საშუალებით შესაძლებელია პარამეტრების შემოასრულებელი მარტივების შედგენა, რამდენიმე საფორმა მინიჭებულა კომპლექსური რასაინფორმაციის მარტივების სისტემისა და სისტემის აღიარებისა და მარტივების ამსახველი მარტივებისა და მარტივების რასაინფორმაციისა.



M. Shishigin, N. Lavrenchuk,

A METHOD OF PROBABILITY-STATISTICAL SIMULATION
AND STRUCTURIZATION OF A DYNAMIC SYSTEM

Summary

A new method is proposed that permits to introduce integral estimations for the description of a certain representation.

The method is based on the "indetermination" concept in the form of fuzzy sets and is applicable in the description of the robot's working environment and control algorithms.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
 государственного университета
 თბილისის შტატის უნივერსიტეტის შრომების წიგნი
 უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТОКСИКОКИНЕТИКИ КОМПЛЕКСА
 ПРЕПАРАТОВ

В.И.Вашакидзе, И.С.Гвинерия, Г.В.Меладзе, С.А.Размадзе

I⁰. Серьезная озабоченность по поводу проблем экологии является сравнительно новым феноменом в современном обществе. Хотя определенное беспокойство по поводу проблем окружающей среды существует давно, но только в последние десятилетия, в результате научного прогресса, а также технических и социальных изменений, возникли новые проблемы, а проблемы, существовавшие ранее, предстали в совершенно новом свете. В настоящее время уже признано, что многие формы деятельности человека, в своей совокупности, влекут за собой опасные, и, возможно, необратимые последствия.

Следовательно, возникает настоятельная необходимость установить закономерности взаимодействия организма со средой, определить безвредные уровни воздействия факторов среды с целью создания гигиенических условий труда, изыскать чувствительные методы ранней диагностики и эффективные комплексы для лечения.

В этой связи одним из необходимых звеньев исследования

является изучение закономерностей токсикокинетики химических соединений при их воздействии на организм. Как известно, гигиеническое нормирование химически вредных веществ в настоящее время основано, прежде всего, на их экспериментальном изучении с учетом различных эффектов воздействия на организм (гонадотропное, эмбриотропное, мутагенное, тератогенное, канцерогенное и др.). Это требует длительных (до нескольких лет) экспериментов и обработки большого количества экспериментальных данных. Поэтому возникла необходимость поиска удовлетворительного математического представления экспериментов, т.е. необходимость создания математической модели. Это позволит свести исследование "нематематического" объекта к решению математической задачи, открывая тем самым возможность использования для его изучения хорошо разработанного математического аппарата в сочетании с ЭВМ. Математическая модель дает возможность провести некий новый тип эксперимента - вычислительный эксперимент.

Как указывал акад. А.А.Самарский /1/, технологический цикл вычислительного эксперимента можно условно разбить на несколько этапов:

1. Построение математической модели изучаемого явления или объекта;
2. Разработка вычислительного алгоритма решения задачи;
3. Реализация алгоритма в виде программы для ЭВМ;
4. Проведение расчетов на ЭВМ;
5. Обработка, анализ и интерпретация результатов расчетов, сопоставление с реальным экспериментом и, в случае необходимости, уточнение или пересмотр математической модели,



то есть возвращение к первому этапу и повторение цикла вычислительного эксперимента.

Следует особо подчеркнуть, что все основные этапы тесно связаны между собой и служат одной цели — получению с необходимой точностью адекватного количественного описания изучаемого явления или процесса.

Сама структура вычислительного эксперимента показывает, что это — отличный научно-производственный процесс, в котором участвует большой коллектив специалистов различного профиля — от теоретиков и экспериментаторов до программистов и инженеров-электронщиков.

Настоящая статья в основном посвящается исходному пункту вычислительного эксперимента — построению одного варианта математической модели комплексной токсикокинетики. Математические модели токсикокинетики позволяют нам за короткий срок прогнозировать характер взаимодействия ядов, определить их метаболитов и скорость элиминации. Эти данные являются важными для определения степени токсичности и опасности химических веществ, применяемых в народном хозяйстве. Они способствуют совершенствованию принципов прогнозирования отдаленных последствий их воздействия на организм. Эти данные помогут нам разработать эффективные методы ранней диагностики, лечения и профилактики профессиональных заболеваний.

Следовательно, изучение токсикокинетики ядов с помощью математического моделирования при их изолированном и совместном воздействии на организм является важным направлением в токсикологии.

2⁰. В данной работе рассматриваются все четыре основных

процесса, происходящих при распределении веществ в организ-
ме: всасывание, метаболизм, попарное воздействие друг на дру-
га и выделение /2,3/. Через X_i , $i=\overline{1,n}$, обозначим веществ-
ва, которые участвуют в этих процессах. Пусть каждое из этих
веществ в отдельности образует m_i - камерную систему в ор-
ганизме /2/. Обозначим через $X_i^p = X_i^p(t)$, $i=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$,
концентрацию вещества X_i в камере p в момент времени
 t . Здесь и дальше в обозначениях нижние индексы соответст-
вуют определенным веществам, а верхние - камерам этих ве-
ществ. Обозначим через $M_i = M_i(t)$ концентрацию метаболи-
та вещества X_i , а через $X_{i,j} = X_{i,j}(t)$ - концентрацию
продукта воздействия веществ X_i и X_j , $i,j=\overline{1,n}$, $i < j$.
Будем считать процессы всасывания, перехода из одной камеры
в другую и выделения кинетическими процессами первого поряд-
ка /2,3/. Это значит, что скорость перехода вещества из ка-
меры p в камеру q пропорциональна концентрации этого ве-
щества в камере p . Всасывание препарата и его выделение
во внесистемную область можно рассматривать, соответственно,
как переход из нулевой камеры в первую и из первой в нулевую.
Процессы метаболизма будем считать кинетическими процессами
второго порядка. Это значит, что превращение вещества X_i в
его метаболит происходит со скоростью $\frac{a_i X_i^1}{b_i + X_i^1}$, где a_i
и b_i - коэффициенты уравнения Михаэлиса-Ментен для ве-
щества X_i , $i=\overline{1,n}$ /2,3/. В этих выражениях верхний
индекс $p = 1$ указывает, что метаболизм может происходить
только в первой, тестовой камере. Воздействия двух веществ
друг на друга будем считать химической реакцией второго по-

рядка /2,4/. Отметим, что для большинства веществ эти допущения являются вполне естественными /2-4/.

Общая схема распределения веществ в организме приведена на рис. I.

В этой схеме использованы следующие обозначения:

$K_i^{01}, i = \overline{1, n}$, - коэффициенты всасывания вещества X_i ;
 $K_i^{10}, i = \overline{1, n}$, - коэффициенты выделения вещества X_i ;
 $K_i^{1p}, K_i^{p1}, i = \overline{1, n}, p = \overline{2, m_i}$, - коэффициенты перехода вещества X_i

из первой камеры в p -тую камеру и обратно;

α_i и $\beta_i, i = \overline{1, n}$, - параметры метаболизма вещества X_i (коэффициенты уравнения Михаэлиса-Ментен для вещества X_i);

$\mu_i, i = \overline{1, n}$, - коэффициенты выделения метаболита вещества X_i ;

$\ell_{ij} = \ell_{ji}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ - коэффициенты взаимодействия веществ X_i и X_j ;

$\gamma_{ij}, i, j = \overline{1, n}, i < j$, - коэффициент выделения продукта взаимодействия веществ X_i и X_j .

Как видно из схемы на рис. I, первые камеры для рассматриваемых веществ играют особую роль при их распределении в организме. Это тестовые камеры, которые в большинстве случаев представляют собой кровь. Только через нее распределяется вещество по другим камерам.

Математическая модель распределения в организме веществ представляется в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_i^1}{dt} = K_i^{01} X_i^0 + \sum_{q=2}^{m_i} K_i^{q1} X_i^q - K_i^{10} X_i^1 - \sum_{q=2}^{m_i} K_i^{1q} X_i^1 \frac{a_i X_i^1}{b_i + X_i^1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n l_{ij} X_i^1 X_j^1,$$

 $i = \overline{1, n},$

$$\frac{dX_i^p}{dt} = K_i^{1p} X_i^1 - K_i^{p1} X_i^p, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{2, m_i},$$

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{a_i X_i^1}{b_i + X_i^1} - \mu_i M_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (I)$$

$$\frac{dX_{ij}}{dt} = l_{ij} X_i X_j - \nu_{ij} X_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i < j.$$

Начальные условия для системы (I) будут иметь вид:

$$X_i^0(0) = x_{i,0}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$X_i^p(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{2, m_i}, \quad (2)$$

$$M_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$X_{i,j}(0) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i < j,$$

где $x_{i,0}$ ($i = \overline{1, n}$) - начальная концентрация вещества X_i .

Итак, мы получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту задачу можно использовать для изучения кинетики конкретных веществ. Для этого, в первую очередь, необходимо определить значение всех коэффициентов в системе (I) на основе соответствующих экспериментов, что является достаточно сложной, самостоятельной задачей, от

решения которой во многом зависит эффективность использования математического моделирования в комплексной токсикокинетике. Отметим также, что наряду с аналитическими методами, для исследования и решения задачи (1)-(2) можно пользоваться численными методами /5,6/.

3°. Исследуем задачу (1)-(2). Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением случая одной области обмена, в которую однократно вводятся два вещества - A и B . Обозначим через $A(t)$ и $B(t)$ количества этих веществ в организме в момент времени t . Предположим, что процессом всасывания можно пренебречь и что эти вещества метаболизму не подвергаются. Будем учитывать только взаимное воздействие этих двух веществ, вследствие чего в области обмена получается новое вещество, количество которого в момент времени t обозначим через $C(t)$. Вещества A , B и C постепенно выделяются во внесистемную область. В указанных предположениях задача (1)-(2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -K_1 A - l_1 AB, \\ \frac{dB}{dt} = -K_2 B - l_2 AB, \\ \frac{dC}{dt} = -K_3 C + (l_1 + l_2) AB \end{cases} \quad (3)$$

$$A(0) = A_0, \quad B(0) = B_0, \quad C(0) = 0, \quad (4)$$

где $K_1 = K_1^{10}$, $K_2 = K_2^{10}$, $K_3 = \nu_{12}$, $A_0 = T_{1,0}$, $B_0 = T_{2,0}$. Что касается коэффициентов l_1 и l_2 , то их нельзя считать равными, как это следовало бы из (1). Дело в том, что система уравнений (1) написана относительно концентрации веществ, а



система (3) - относительно количества веществ в организме. Третье уравнение легко можно получить на основании закона сохранения массы.

Первые два уравнения системы (3) не содержат функции $C(t)$ и поэтому составляют независимую систему

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\kappa_1 A - l_1 AB, \\ \frac{dB}{dt} = -\kappa_2 B - l_2 AB. \end{cases} \quad (5)$$

Существование и единственность решения системы (5) легко следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение системы (5) при разных значениях коэффициентов κ_1, κ_2, l_1 и l_2 приводится в [7]. Проведем выкладки, аналогичные [7], в случае отрицательных коэффициентов.

Из системы уравнений (5) имеем

$$l_2 \frac{dA}{dt} - l_1 \frac{dB}{dt} = -\kappa_1 l_2 A + \kappa_2 l_1 B \quad (6)$$

и

$$\kappa_2 \frac{d \ln A}{dt} - \kappa_1 \frac{d \ln B}{dt} = \kappa_1 l_2 A - \kappa_2 l_1 B. \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) простыми преобразованиями можно получить



$$l_2 \frac{dA}{dt} + \kappa_2 \frac{d \ln A}{dt} - l_1 \frac{dB}{dt} - \kappa_1 \frac{d \ln B}{dt} = 0,$$

$$l_2 A + \kappa_2 \ln A - l_1 B - \kappa_1 \ln B = \ln \delta,$$

где $\delta = \text{const} > 0$. Тогда мы можем написать

$$A^{\kappa_2} e^{l_2 A} = \delta B^{\kappa_1} e^{l_1 B}. \quad (8)$$

При фиксированных значениях κ_1 , l_1 , κ_2 и l_2 постоянная δ однозначно определяется из начальных условий (4).

Рассмотрим плоскость (A, B) и исследуем на этой плоскости кривую (8). Для этого на двух взаимоперпендикулярных прямых рассмотрим оси Ox , Oy , OA и OB (см. рис. 2 и 3). Для дальнейших целей удобно рассматривать кривые

$$y = A^{\kappa_2} e^{l_2 A} \quad \text{и} \quad x = B^{\kappa_1} e^{l_1 B}, \quad (9)$$

графики которых построены соответственно во втором и четвертом квадрантах. В первом квадранте построим график функции $y = \delta x$. На этой прямой выбираем любую точку, которая соответствует определенному значению переменной $t: x^* = x(t^*)$, $y^* = \delta x^*$. Через точку (x^*, y^*) проведем прямые, параллельные координатным осям, до пересечения кривых, задаваемых при помощи соотношений (9). Через полученные точки опять про-

ведем прямые, параллельные координатным осям, которые будут пересекаться в третьем квадранте. Меняя значение t^* , т.е. меняя точки (x^*, y^*) на прямой $y = \delta x$, в третьем квадранте получим график искомой кривой (8). Каждой паре (A_0, B_0) из начальных условий соответствует определенная кривая. Исследуя систему уравнений (5), можно показать, что при $t \rightarrow \infty$ имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0. \quad (10)$$

Это утверждение соответствует тому факту, что при любом подборе констант $\kappa_1, \kappa_2, \ell_1, \ell_2$, а также начальных значений A_0 и B_0 , количество веществ A и B в организме уменьшается и при $t \rightarrow \infty$ это количество стремится к нулю. Из этого, в частности, следует, что все кривые, построенные в третьем квадранте, будут стремиться к началу координат.

На рис. 2 представлены случаи, когда вещества A и B имеют одинаковые коэффициенты $\ell_1 = \ell_2 = 0,1$, но у них разные коэффициенты выделения $\kappa_1 = 0,1; \kappa_2 = 0,5$. А это означает, что из организма вещество B выделяется быстрее, чем вещество A . Кривая I соответствует случаю $A_0 > B_0$. Кривые II, III и IV соответствуют случаям, когда $A_0 < B_0$. Для них в какой-то момент времени $t = \bar{t}$ будем иметь $A(\bar{t}) = B(\bar{t})$, а для $t > \bar{t}$ в организме преобладает вещество A .

На рис. 3 представлены случаи, когда $\kappa_1 = \kappa_2 = 0,1$, $\ell_1 = 0,05, \ell_2 = 0,1$. Это означает, что за счет химичес-



кой реакции вещество B расходуется быстрее, чем вещество

A . Кривая I соответствует случаю, когда $A_0 < B_0$, а кривые II, III - случаям, когда $A_0 > B_0$.

Приведенные выше рассуждения представляют собой достаточно эффективный качественный анализ динамики количества веществ

A и B в организме. Что касается определения значения функции $A(t)$ и $B(t)$ для разных промежутков времени t , то для этой цели нужно использовать численные методы (см. /5,6/).

Теперь рассмотрим третье уравнение системы (3):

$$\frac{dC}{dt} = -k_2 C + (l_1 + l_2) AB. \quad (11)$$

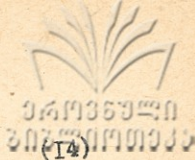
Будем считать, что функции $A(t)$ и $B(t)$ уже определены из системы (5). Тогда решение уравнения (11) можно представить в виде

$$C(t) = (l_1 + l_2) e^{-k_2 t} \int_0^t AB e^{k_2 \tau} d\tau. \quad (12)$$

Отметим, что если функции $A(t)$ и $B(t)$ мы определили численно, то для нахождения значения функции $C(t)$ в узловых точках можно использовать квадратурные формулы (5).

Исследуем функцию $C(t)$. Для этого вычислим производные этой функции

$$C'(t) = (l_1 + l_2) \left(AB - k_2 e^{-k_2 t} \int_0^t AB e^{k_2 \tau} d\tau \right), \quad (13)$$



$$C''(t) = (\rho_1 + \rho_2) [(AB)' - \kappa_3 C'(t)].$$

Исследуя выражения (12)-(14), можно заключить, что

$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$, $C'(t) > 0$ при $t \in (0, t_*)$, где t_* определяется из следующего уравнения $C'(t_*) = 0$:

$$A(t_*)B(t_*) = \kappa_3 e^{-\kappa_3 t_*} \int_0^{t_*} A(\tau)B(\tau) e^{\kappa_3 \tau} d\tau. \quad (15)$$

Легко можно также доказать, что $C''(t_*) < 0$. А это значит, что в точке t_* функция $C(t)$ достигает своего максимума. Можно также показать, что t_* — единственная точка экстремума. Действительно, пусть \hat{t} является точкой локального минимума, тогда в этой точке должны выполняться соотношения $C'(\hat{t}) = 0$, $C''(\hat{t}) \geq 0$, но из (14) следует, что это невозможно. Функция $C(t)$ в промежутке $(0, \infty)$ имеет только одну точку локального максимума. Действительно, в противном случае, из-за непрерывности функций $C(t)$, между этими двумя точками должна лежать точка локального минимума, а это, как мы убедились, невозможно.

На основе проведенного анализа можно построить график функции $C(t)$ (см. рис. 4).

Поступила 22.XI.1985

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ



ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Самарский. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Вестник АН СССР, 1979, 5, с.38-49.
2. В.Н.Соловьев, А.А.Фирсов, В.А.Филов. Фармакокинетика, М., "Медицина", 1980.
3. Е.Пиотровски. Использование кинетики метаболизма и выведения токсических веществ в решении проблем промышленной токсикологии, М., "Медицина", 1976.
4. А.И.Бродский. Физическая химия, т.1, М.-Л., ОНТИ-Госхимиздат, 1934.
5. А.А.Самарский. Введение в численные методы. М., "Наука", 1982.
6. Дж.Холл, Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1979.
7. В.Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование, М., "Наука", 1976.

Յ.Յաճարժ, Ո.Քոչնդրոս, Յ.Եղլաժ, Կ.Կաճաժ
 ՀՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԱՆՔՆԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

ԾԱՆԵԾ

ԿՅՑՈՒՄ

Ժամանակը թափանցումը նույնպես չհարկավորում է միայնակ աշխատանքի կատարումը։ Ժամանակն անցնում է նույնպես մեկուսի, ժամանակը, միջամտությունն և չհամաձայնեցված շրջանակներում շրջանակներում։ Միևնույն ժամանակում միայն թափանցումը չի կարողանում հղանալ հարկավորումը և չի կարողանում հղանալ հարկավորումը։

V. Vashakidze, I. Gvineria, H. Meladze, S. Razmadze

ON THE MODELLING OF THE TOXICITY KINETICS OF A

PREPARATION COMPLEX

Summary

The simultaneous action of several substances on the human organism is considered. The processes of uptake, excretion, metabolism and interaction of substances are taken into account. The corresponding mathematical model constitutes a Cauchy problem for a nonlinear system of ordinary differential equations.

УДК 615.001.01
615.001.01.01

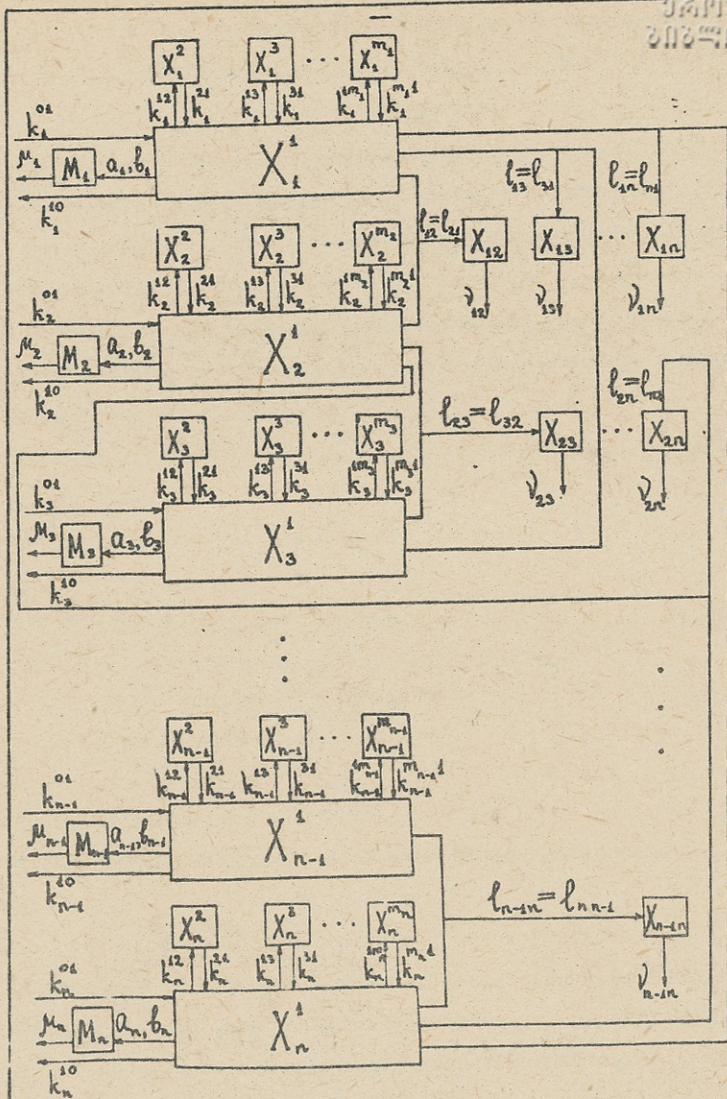


Рис. I. Общая схема распределения комплекса химических веществ в организме.

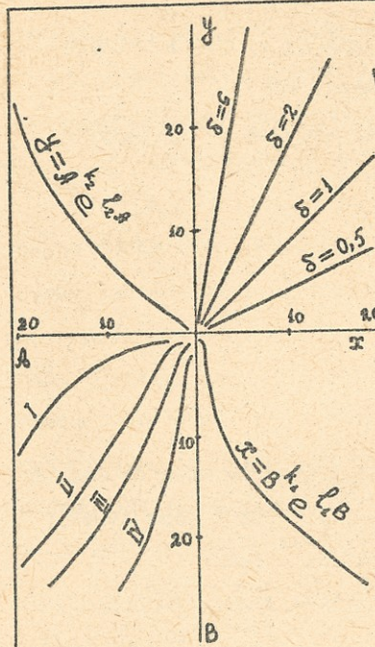


Рис. 2. Кинетика комбинации двух химических веществ в случае одной области обмена

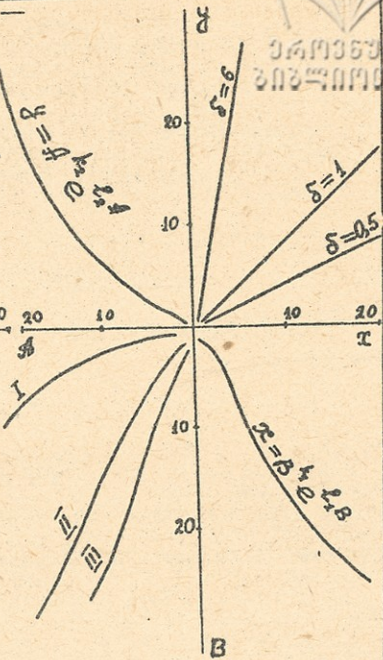


Рис. 3. Кинетика комбинации двух химических веществ в случае одной области обмена

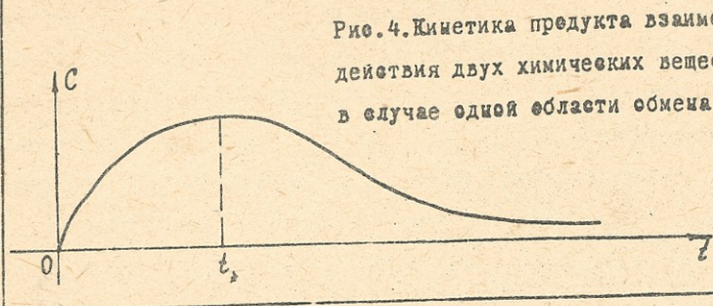


Рис. 4. Кинетика продукта взаимодействия двух химических веществ в случае одной области обмена.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მფლობელთა სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ДЕЛОВАЯ ИГРА "ТЕМП"

З.И.Кочладзе

В работах /1,2/ было определено понятие концептуальной деловой игры и показан ряд преимуществ такой игры перед "обычными" деловыми (управленческими) играми.

В настоящей работе рассматривается пример конструирования концептуальной деловой игры под названием "ТЕМП", которая может быть использована для обучения регулированию темпов продажи и выпуска готовой продукции в производственно-сбытовой системе. В основу игры положена упрощенная модель производственно-сбытовой системы, описанной в работе /3/. Схематично эта система представлена на рисунке I. В работе /3/ присутствует еще и третье, промежуточное звено - оптовая торговля. Все процессы, протекающие в данной системе, в работе /3/ описываются разностными уравнениями с несколькими десятками переменных, что существенно усложняет восприятие модели и затрудняет ее использование для создания игры. Применение принципов концептуального системного анализа /4,5/ позволяет описать ту же модель более компактно и, что самое главное, выделить переменные, определяющие поведение системы автома-



тически, без вмешательства человека.

Согласно теории концептуального системного анализа были проведены машинные эксперименты с системой при разных начальных входах для получения частных реализаций (траекторий) /5/ системы. При этом считалось, что вход системы (требования покупателей) является случайным входом с нормально распределенными параметрами. Теперь, имея такие траектории, мы должны были бы провести их оценку и вычислить концепт-модель системы. Однако, поскольку в нашем случае правила решения записаны в виде уравнений и не меняются, естественно, все траектории должны быть оценены одинаково (положительно). Это означает, что описанный и действующий в системе механизм принятия решения является правильным и в нашей игре мы хотим обучить игрока именно этому механизму. А точнее - мы хотим, чтобы игрок принимал такие решения, которые приводят к результатам, аналогичным получаемым при применении механизмов решения, описанных в работе /3/.

После оценки, применив метод формирования вероятностных концептов /6/, вычислили концепт поведения производственно-обывтовой системы. Заметим, что в данном случае мы удовлетворились концептом первого уровня, т.е. грубым, описывающим самые общие характеристики системы. Бифункционал /5/ поведения системы имеет вид:

$$\varphi = A_4 \cdot \check{A}_1 \cdot \check{A}_2 \cdot \check{A}_3 \cdot \check{A}_5 \cdot \check{A}_6 \cdot \check{A}_7 \cdot \check{A}_8 \cdot \check{A}_9 \cdot \check{A}_{10} \cdot \check{A}_{11} \cdot \check{A}_{12} \cdot \check{A}_{13} \cdot \check{A}_{14} \cdot \check{A}_{15} \cdot \check{A}_{16}$$

где $A_4(UOR)$ - заказы, не выполненные розницей;
 $A_2(SSR)$ - розничная отгрузка;



- A_3 (SSR) - поставки, получаемые розницей;
- A_4 (IAR) - запас в розничном звене;
- A_5 (CPR) - заказы в розничном звене на стадии оформления;
- A_6 (PMR) - выданные розничным звеном заказы, находящиеся в почтовых каналах;
- A_7 (MTR) - товары в пути к розничному звену;
- A_8 (PSR) - выданные розничным звеном заказы на закупку товаров, полученные производством;
- A_9 (UOF) - заказы, не выполненные производством;
- A_{10} (RRF) - заказы, получаемые производством;
- A_{11} (SSF) - поставки, осуществляемые с заводского склада;
- A_{12} (IAF) - запас на заводском складе;
- A_{13} (SRF) - поставки товаров на заводской склад;
- A_{14} (CPF) - заказы в процессе оформления на производстве;
- A_{15} (OPF) - заказы в процессе выполнения на заводе;
- A_{16} (MOF) - производственные заказы заводу

(в окобках указаны обозначения, принятые в работе /3/).

Полученный бифункционал указывает, что для поддержания производственно-объёмной системы на должном уровне, т.е. для удовлетворительного функционирования системы, решающим фактором является количество готовой продукции в розничном звене IAR. Запас всегда должен оставаться постоянным в пределах одного процента начального значения. Все остальные параметры могут принимать любые допустимые значения и поэтому являются несущественными. Отметим, что такое зак-

лучение присутствует и в описании системы, предложенной в работе /3/, в неявной форме.

Опишем теперь игру, которая была построена на основе этой модели. Игра ведется с применением ЭВМ. Перед началом игры каждый игрок получает схему производственно-обывовой системы, схему описания процессов, протекающих в этой системе (рис.2), а также инструкцию для ведения игры. Инструкция приблизительно такова:

"Перед Вами схема производственно-обывовой системы, еди-ноличным управляющим которой являетесь Вы. Система состоит из двух подсистем: розничное звено и производство, где про-изводят товар одного названия. Входом системы являются тре-бования покупателей, а выходом товары, отгружаемые потребите-лю. Розничное звено состоит из магазина, где получают требо-вания от покупателей и оформляют производству заказы на гото-вую продукцию, и склада, где получают готовую продукцию и отгружают товары покупателю.

Производство состоит из завода, где выпускают продукцию и получают заказы от склада, и самого склада, где получают товары с завода и заказы от розничного звена и отгружают то-вары розничному звену. Ваша цель управлять системой таким об-разом, чтобы система функционировала успешно, т.е. чтобы все-гда могла удовлетворять заказы потребителей (RRR), поступа-ющие на вход системы. Количество этих заказов на каждую не-делю определяет и выдает на экран дисплея ЭВМ.

Вы можете управлять системой с помощью установления уро-ня четырех параметров (на схеме эти параметры обозначены вопросительными знаками). Другими словами, Вы должны принять



следующие четыре решения:

1. Решение о количестве отгружаемого потребителю товара.
2. Решение о количестве заказов, посылаемых производству.
3. Решение о количестве готовой продукции, отгружаемой розничному звену.
4. Решение о темпе выпуска готовой продукции.

Ваши решения Вы должны ввести в ЭВМ. Помните, что эти решения определяют поведение системы на последующую неделю и, естественно, не могут быть сразу реализованы, для этого требуется некоторое время. Динамика протекания процессов в системе имеет следующий вид (см. рис.2):

Розничное звено. В розничное звено поступают заказы от потребителей (RRR). Здесь же накаплиются невыполненные заказы (UOR). Количество этих заказов в некоторый момент времени t_1 равно

$$UOR(t_1) = UOR(t_0) + RRR(t_0; t_1) - SSR(t_0; t_1).$$

С другой стороны, в розничном звене имеется склад готовой продукции, откуда происходит отгрузка продукции потребителю. Количество готовой продукции на этом складе равно

$$IAR(t_2) = IAR(t_1) + SRR(t_1; t_2) - SSR(t_0; t_1).$$

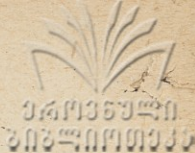
В этом уравнении SSR берется на одну неделю раньше, чем

SRR , потому, что выполнение заказа после принятия решения о его выполнении требует некоторого времени. Это время называется запаздыванием выполнения заказов (DHR), $DHR = 1$ неделе. Грубо говоря, если в начале этой недели (момент t_0) Вы приняли решение установить какой-нибудь темп отгрузки, то реально этот темп будет установлен со следующей недели (интервал времени $(t_1; t_2)$). Здесь используется так называемое запаздывание первого порядка, когда темп мгновенно меняется с учетом времени запаздывания. Графически такое запаздывание показано на рис. 3. Помните, что темп отгрузки товаров потребителям может меняться от нуля до количества готовой продукции на складе розничной торговли в данный момент:

$$0 \leq SSR \leq IAR.$$

В розничном звене Вы должны принять еще одно решение - решение о темпе закупок готовой продукции. Здесь действует следующий механизм: принимается решение о темпе закупок (PDR), затем это решение оформляется в виде заказов (на это уходит некоторое время DCR ; $DCR = 3$ неделям), далее эти заказы почтой отправляются на производство. На это также уходит некоторое время DMR ($DMR = 0,5$ недели), после чего эти заказы становятся входом подсистемы "производство" (RRF).

В отличие от вышеописанного запаздывания первого порядка, запаздывания в звене оформления заказов и их пересылки по почтовым каналам являются запаздываниями третьего порядка. Общий вид уравнений, описывающих такое запаздывание, следующий:



$$R1(t_1; t_2) = \frac{LEV1(t_2)}{DEB/3},$$

$$LEV1(t_1) = LEV1(t_0) + IN(t_0; t_1) - R1(t_0; t_1),$$

$$R2(t_1; t_2) = \frac{LEV2(t_2)}{DEB/3},$$

$$LEV2(t_1) = LEV2(t_0) + R1(t_0; t_1) - R2(t_0; t_1),$$

$$R3(t_1; t_2) = \frac{LEV3(t_2)}{DEB/3},$$

$$LEV3(t_1) = LEV(t_0) + R_2(t_0; t_1) - OUT(t_1; t_2),$$

$$LEV(t_1) = LEV1(t_1) + LEV2(t_2) + LEV3(t_3),$$

где LEV - уровень, находящийся в запаздывании; IN - темп входящего потока; OUT - темп исходящего потока; DEB - постоянная запаздывания; $R1, R2, LEV1, LEV2, LEV3$ - вспомогательные переменные.

Запаздывание третьего порядка графически изображено на рис. 4.

Производственное звено. Так же, как и в подсистеме "розничное звено", здесь входом являются требования (RRF), получаемые, однако, уже от розничного звена. В подсистеме "производство" так же накапливаются невыполненные заказы (UOF). Количество этих заказов равно:

$$UOF(t_1) = UOF(t_0) + RRF(t_0; t_1) - SSF(t_0; t_1).$$

И в этой подсистеме происходит отгрузка готовой продукции и имеется склад готовой продукции с некоторым запасом продукции:

$$IAF(t_2) = IAF(t_1) + SRF(t_1; t_2) - SSF(t_0; t_1).$$

Здесь SSF так же берется на одну неделю раньше, чем SRF , потому что до выполнения заказа после принятия решения о его выполнении проходит некоторое время DHF ($DHF = 1$ неделе). Запаздывание DHF является запаздыванием первого порядка. Отметим, что темп отгрузки товаров со склада меняется от нуля до полного количества готовой продукции на складе производства в данный момент:

$$0 \leq SSF \leq RRF.$$

Отгрузка со склада производства в розничном звене происходит с некоторым запаздыванием DTR . $DTR = 1$ неделе и является запаздыванием третьего порядка.

И, наконец, в подсистеме "производство" происходит принятие решения о темпе выпуска готовой продукции (MDF). Это решение с некоторым запаздыванием DCF ($DCF = 1$ неделе) оформляется в виде заказов заводу. Запаздывание - третьего порядка. Решение о темпе производства может меняться от нуля до максимальной мощности производства ABF ($ABF = 1200$ единиц в неделю):

$$0 \leq MDF \leq ABF.$$



Для достижения желаемого темпа выпуска готовой продукции требуется время. Запоздывание DPF ($DPF = 6$ неделям) - третьего порядка.

Состояние системы в каждый момент времени будет отображаться на дисплее ЭВМ. Ваши решения будут оцениваться следующим образом: за каждое правильное решение Вы получите одно очко, а за каждое неправильное - минус одно очко. Правильным считается решение, если количество готовой продукции на складе розничного звена остается в пределах 1% исходного уровня, т.е.

$$7200 \leq IAR \leq 8800.$$

Ваша цель - получить максимальную оценку за некоторый определенный отрезок времени функционирования системы".

Игра "ТЭМИ" реализована в виде программы на языке "БЕЙСИК".

Поступила 29.XI.1985

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. З.Ю.Кочладзе, В.В.Чавчанидзе. Сообщения АН ГССР, т.66, № 2, 1973.
2. З.Ю.Кочладзе. Вопросы создания концептуальных деловых игр, Материалы IV МОКИИ (Тбилиси, 3-8 сентября 1975г.), Тбилиси, 1976.
3. Дж.Форрестер. Основы кибернетики предприятия. М., "Прогресс", 1971.
4. В.В.Чавчанидзе. Сообщение АН ГССР, т.63, №1, 1971.
5. В.В.Чавчанидзе. Сообщения АН ГССР, т.61, №1, 1971.

6. З.Ю.Кочладзе. Решение задачи прогнозирования сложных производственных процессов методами искусственного интеллекта, Материалы IY МОКИИ (Тбилиси, 3-8 сентября 1975 г.), Тбилиси, 1976.

8. უჩილაძე

კონცეპტუალური სატრენინგო თამაში "ტემპი"

რეზიუმე

ნაშრომში განიხილება კონცეპტუალური სატრენინგო თამაშების უჩილაძის მატარებელი - კონცეპტუალური სატრენინგო თამაში "ტემპი". აღწერილია თამაშის მიზანი და შექმნილია მისი პრაქტიკული უზრუნველყოფა.

Z.Kochladze

CONCEPTUAL BUSINESS GAME "TEMP"

Summary

Some problems of the organization of conceptual business games and their material realization are considered. The conceptual business game "Temp" is described.

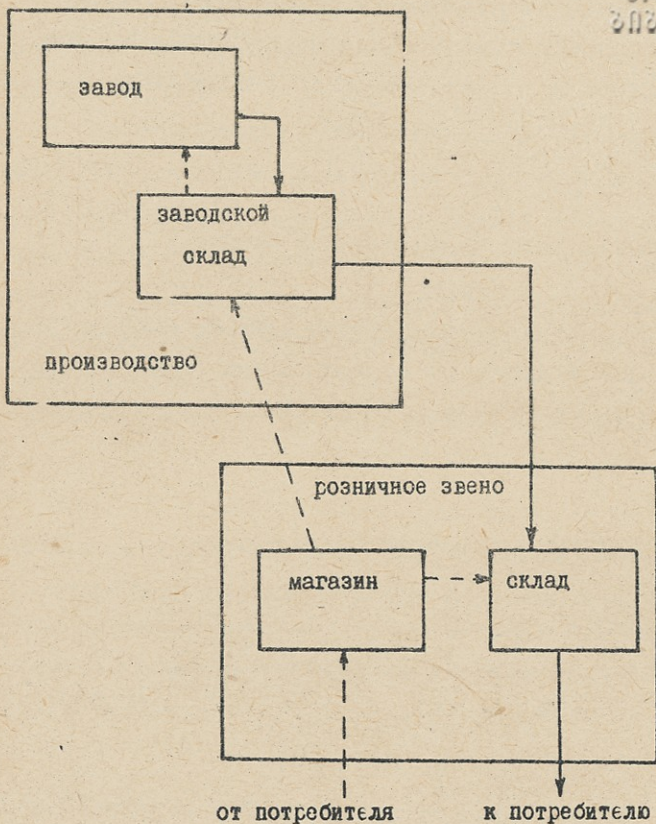
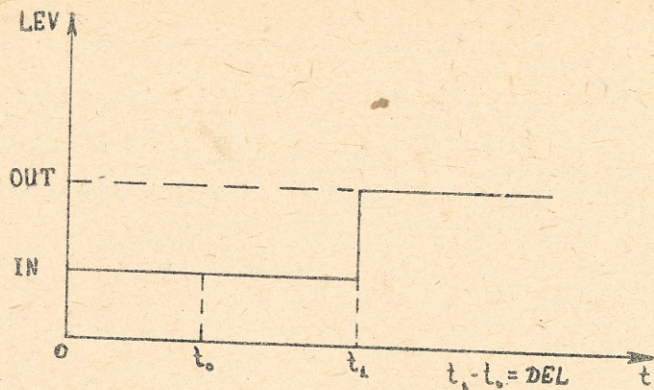
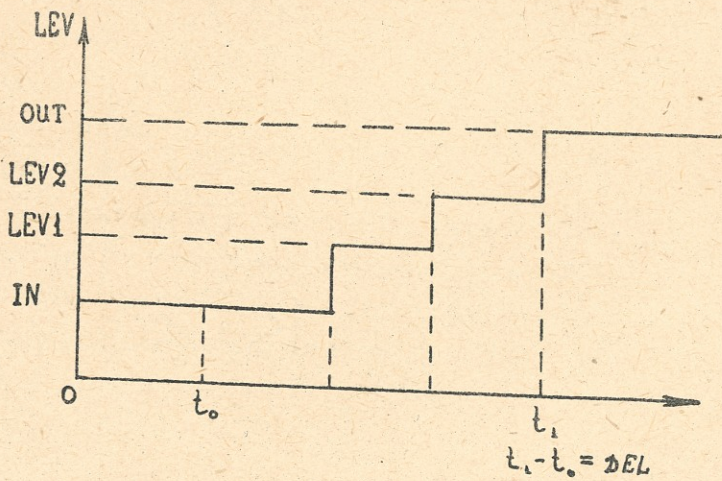


Схема производственно-бытовой системы.



Запаздывание первого порядка



Запаздывание третьего порядка

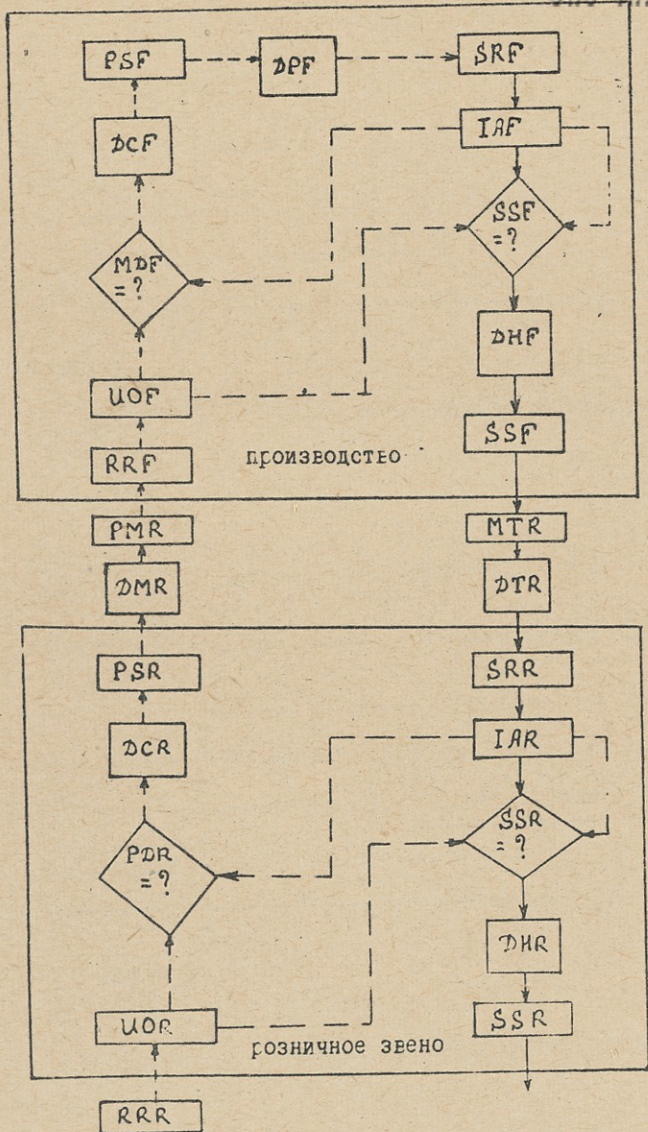


Схема динамики процессов, протекающих в системе

268, 1986

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛЕКСИЧЕСКИХ
ЕДИНИЦ В ГРУЗИНСКОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОМ ТЕКСТЕ
ПО ФИЗИКЕ

Т.Г.Кокочашвили, Т.П.Цилосани, Г.Ш.Беришвили

Одной из актуальных проблем лингвостатистики является выявление законов распределения лексических единиц в текстах, что дает нам возможность судить о статистических закономерностях языка в целом.

Нами впервые была предпринята попытка выявить эмпирические законы распределения для лексических единиц грузинских текстов по физике. для обработки данных на ЭВМ были взяты следующие тексты: И.Ш.Вашакидзе, В.И.Мамасахлиш, Г.А.Чилашвили "Квантовая механика", М.М.Мирианшвили "Молекулярная физика", общий объем в 160 000 словоупотреблений. Работа выполнялась на мини-ЭВМ "Реалитэ - 2000". Операционная система - Реалитэ, версия - 2000-1. Программа написана на языке *Basic*.

Из созданного нами ЧС /1/ было выбрано 400 словоформ из разных зон. Было исследовано подчинение этих словоформ следующим пяти (в дальнейшем мы собираемся по возможности расширить круг применяемых распределений) теоретическим законам



распределений: закону Пуассона, закону Гаусса (нормальное распределение), логнормальному распределению, биномиальному распределению, распределению Чебанова-Фукса.

При машинной обработке данных использованы следующие обозначения:

N_K^α - количество серий некоторой длины K , которым представлена совокупность текста с объемом α .

F_i' - абсолютная частота, с которой обследуемая единица встретила в некотором количестве серий $m_{F_i'}$ (для непрерывных распределений соответствующая частота обозначалась через F_i'').

$m_{F_i'}$ - абсолютная частота, количество внутрисерийных оборотов, в которых обследуемая единица встретила с частотой F_i' (для непрерывных распределений имел $m_{F_i''}$).

С методикой обработки данных подробно можно ознакомиться в статье Т.Г.Кокочашвили, А.И.Чхенкели "О выявлении эмпирических законов распределения лексических единиц в текстах о помощью ЭВМ", опубликованной в предыдущем номере данного сборника.

Рассмотренные нами распределения были записаны в следующем виде:

1. Номинальное распределение

$$P_{F_i''} = \frac{\Delta F_i''}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(F_i'' - a)^2}{2\sigma^2}},$$

где математическое ожидание $a = \frac{\sum_i F_i'' m_{F_i''}}{N_K^\alpha}$;

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (F_i'' - a)^2 m_{F_i''}}{N_K^\alpha}}$$

2. Логарифмически нормальное распределение

$$P_{F_i''}' = \frac{\Delta F_i''}{\sigma' F_i'' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln F_i'' - a')^2}{2(\sigma')^2}},$$

где

$$a' = \frac{\sum_i m_{F_i''} \ln F_i''}{N_K^\alpha}; \quad \sigma' = \sqrt{\frac{\sum_i (\ln F_i'' - a')^2 m_{F_i''}}{N_K^\alpha}}$$

3. Распределение Пуассона

$$P_{F_i'} = \frac{a^{F_i'}}{F_i'!} e^{-a},$$

где

$$a = \frac{\sum_i F_i' m_{F_i'}}{N_K^\alpha}$$

4. Распределение Чебанова-Фукса (сдвинутое на единицу распределение Пуассона)

$$P_{F_i'} = \frac{(a-1)^{F_i'-1}}{(F_i'-1)!} e^{-(a-1)}$$

5. Биномиальное распределение



$$P_{F'_i} = \binom{K}{F'_i} \left(\frac{a}{K}\right)^{F'_i} \left(1 - \frac{a}{K}\right)^{K-F'_i},$$

где

$$a = \frac{\sum_i F'_i m_{F'_i}}{N_K^\alpha}.$$

Для сравнения эмпирических и теоретических рядов распределений был применен критерий согласия χ^2 . Выражение для χ^2 имеет следующий вид:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(m_{F'_i} - N_K^\alpha P_{F'_i})^2}{N_K^\alpha P_{F'_i}}$$

(для непрерывных распределений частота F'_i заменяется соответственно на F''_i).

Соответствие проверялось по трем уровням значимости - 0,01; 0,05; 0,1.

Полученные результаты отражены на рис. 1-5.

Поступила 2.XII.1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Отчет сектора "Статистика речи" Проблемной лаборатории физической кибернетики ТГУ - "Частотный словарь грузинского языка (физика - квантовая механика, молекулярная физика)", 1984 г.



მ. კოკოჩაშვილი, თ. წილოსანი, გ. ბერიშვილი

ლექსიკალური ერთეულების განაწილების კანონების შესახებ

საერთაშორისო-მეცნიერებადნობის ფიზიკის ფილიალში.

რეზიუმე

ჩვენს მიერ შეგვირჩეული სიხშირითი ლექსიკონის სხვადასხვა ნაწილები ამოწმებულია 400 სიტყვაზე, რმა და ჩატარებულია მათი ემპირიული განაწილებების შედარება ხუთ თეორიულ კანონთან. შედეგები ასახულია მიგრაციის კონსტრუქციებში.

სამუშაო შესრულებულია ბინი ეცმ "რეალიტი"-ზე.

T.Kokochashvili, T.Tsilosani, G.Berishvili

STUDY OF THE DISTRIBUTION LAWS OF LEXICAL UNITS
IN GEORGIAN SCIENTIFIC AND TECHNICAL TEXTS IN PHYSICS

Summary

The authors have selected 400 word forms from different parts of the frequency vocabulary compiled by them.

The empirical laws of distribution of the selected words have been compared with five theoretical laws of distribution.

The results are shown on a histogram. Use was made of the mini computer "Realité".

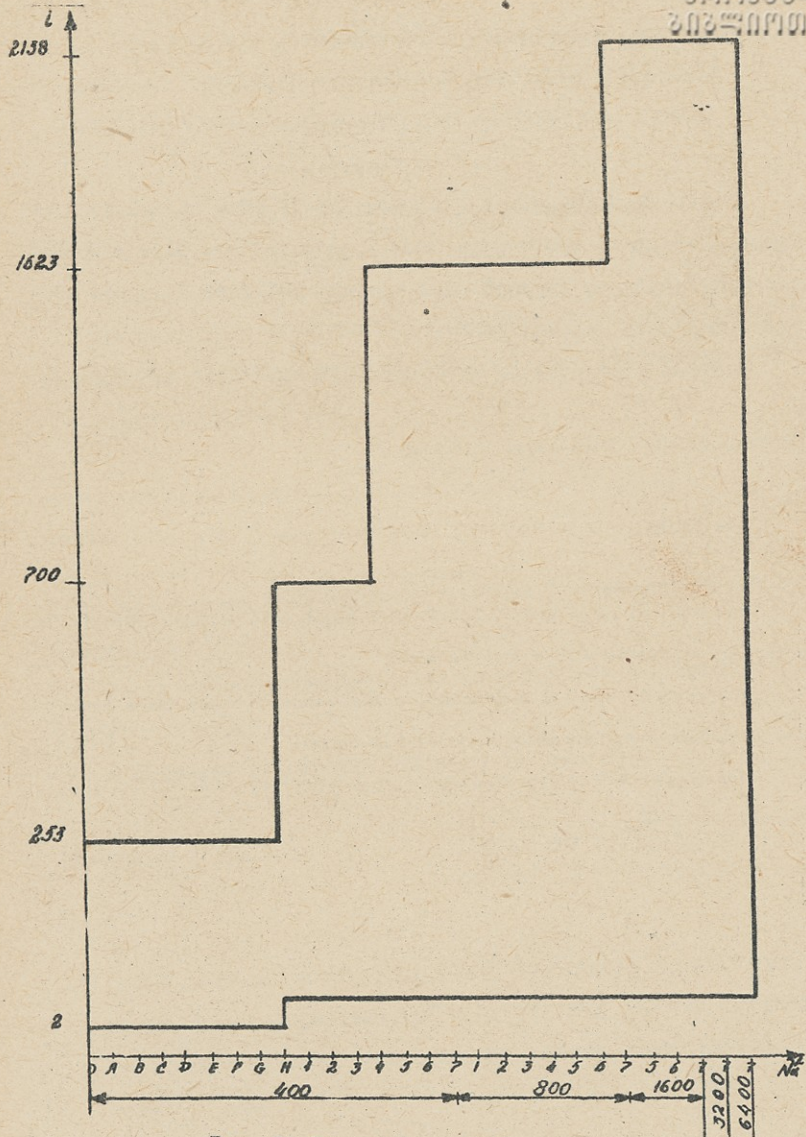


Рис. I Распределение Пуассона.

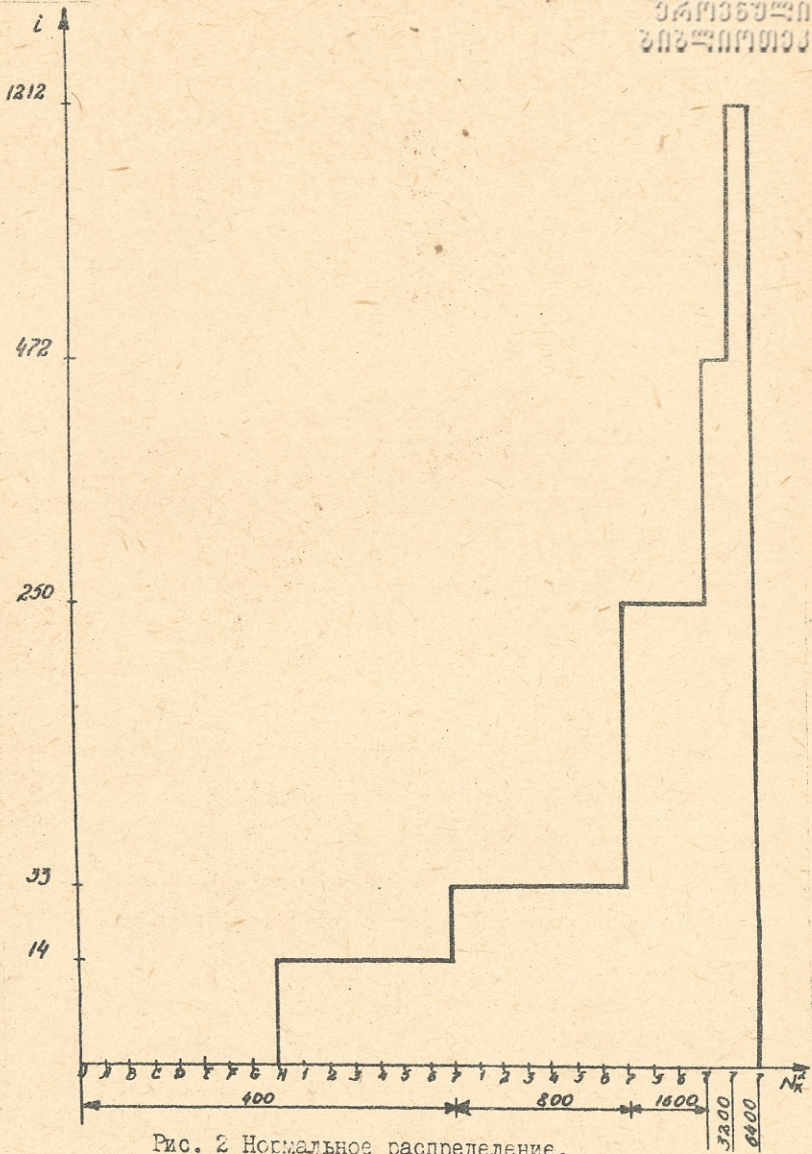


Рис. 2 Нормальное распределение.



Рис. 3 Логнормальное распределение.

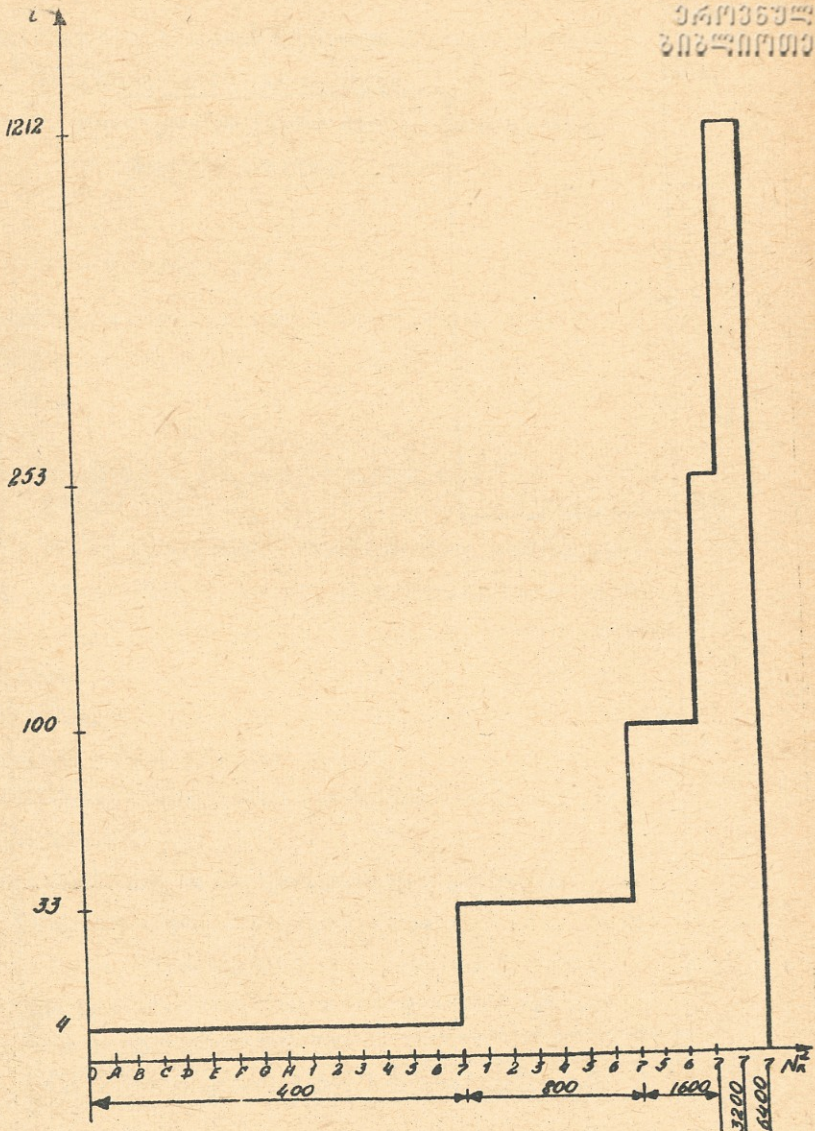


Fig. 4 Распределение Чебанова - Гукса.

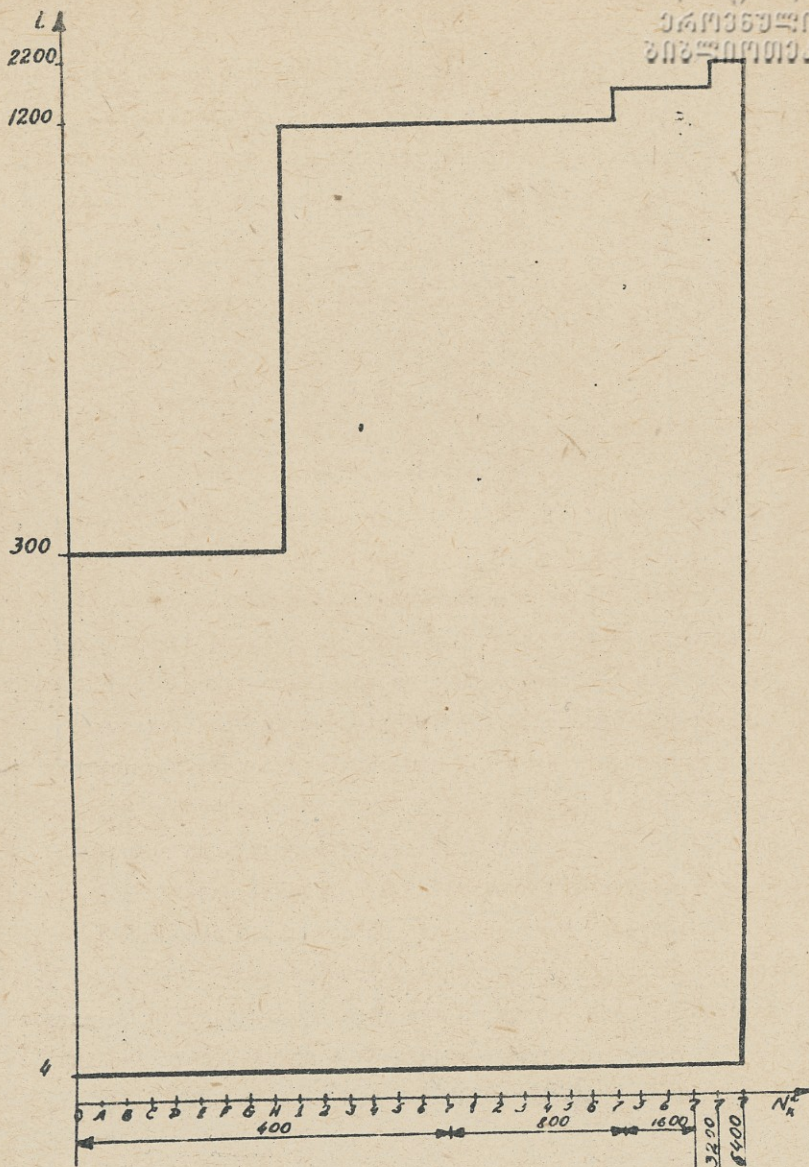


Рис. 5. Биномиальное распределение



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შტატის წითელი მუშათა წითელი ჯიშის
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

ЧАСТОТНЫЙ СЛОВАРЬ ГРУЗИНСКОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ
ЛЕКСИКИ (ФИЗИКА-КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ
ФИЗИКА)

Т.Г.Кокочашвили, Т.П.Цицосани, Г.Ш.Бершвили

Наша работа представляет первую попытку составления частотного словаря (ЧС) грузиноязычных научно-технических текстов.

В настоящей статье приведены результаты статистического обследования грузиноязычных текстов по физике (И.Ш.Вашакидзе, В.И.Мамасахлисов, Г.А.Чилашвили - "Квантовая механика", М.М.Мирианашвили - "Молекулярная физика").

Общий объем обследованного материала составляет 160 000 словоупотреблений.

При составлении ЧС мы придерживались следующих правил:

1. Самостоятельной словоформой считали любую последовательность букв, ограниченную двумя соседними пробелами.
 2. Общепринятые сокращения рассматривались как одна словоформа и обозначались символом \mathcal{X} .
 3. Все формулы рассматривались как одна словоформа и обозначались символом \mathcal{F} .
 4. Все числа, написанные цифрами, рассматривались как одно.
- Ю. Труды, т.268.

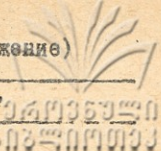
на словоформа и обозначались символом S .

Нами получены частотные, алфавитно-частотные, ранг-частотные списки частотного словаря. Ввиду ограниченного объема, ниже приводится частотный список словоформ с абсолютной частотой $F \geq 62$ (табл.1) и распределение количества словоформ при $F < 62$ (табл.2),

Работа выполнена с помощью мини ЭВМ "Реалитэ" - 2 000. Операционная система - Реалитэ, версия 2 000 - А1. Программа написана на языке *Basic*.

Таблица I

Ранг λ	Словоформы	Абсолютная частота F
1. \bar{z}		13645
2. $\rho\lambda$		4233
3. \bar{x}		3005
4. $\bar{m}\bar{m}\bar{m}$		2804
5. $\lambda\bar{m}$		1472
6. $\bar{m}\bar{m}$		1103
7. $\bar{m}\bar{m}$		963
8. $\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}$		891
9. $\lambda\bar{m}$		872
10. $\lambda\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}$		861
11. $\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}$		839
12. $\lambda\bar{m}\bar{m}\bar{m}$		811
13. $\bar{m}\bar{m}\bar{m}\bar{m}$		758



№	სლოვოფორმე	გვერდი
14.	იქნება	725
15.	შეძახვევაში	724
16.	შეიძება	657
17.	ჩვენ	647
18.	გვექნება	645
19.	კი	627
20.	ს	604
21.	რომელიც	583
22-23.	მხოლოდ, სარაც	573
24.	როცა	542
25.	უნდა	536
26.	ერთი	526
27.	აქვს	511
28.	ფუნქცია	499
29.	ორის	497
30.	რადგან	455
31.	სითხის	452
32.	ან	440
33.	მეორე	439
34.	შეგვიძლია	421
35.	განყოფილება	419
36.	ენერგია	408
37.	იგი	406
38.	შორის	395
39.	კანდიდატი	388
40.	ისინი	375

№	Словоформы	F
41-42	„ენერჯის, თანახმა“	371
43	„ხელო“	368
44	„მეგობრ“	367
45	„ფაღვარი“	364
46	„თქო“	353
47	„მეგობრო“	352
48	„საკუთარი“	349
49	„ვაგის“	348
50	„უფრო“	344
51	„ცხადია“	333
52	„ვიწინიან“	331
53	„მეტყვითარებაში“	327
54	„წარმოადგენს“	326
55	„ტანჯილებს“	323
56	„სხვადასხვა“	318
57	„წინილაკის“	303
58	„მატარილი“	302
59	„იმი“	298
60	„ფლოია“	296
61	„იფოს“	292
62	„ისე“	286
63	„სახე“	285
64	„უქნება“	282
65	„პირველი“	274
66	„მაგრამ“	273

(продолжение)



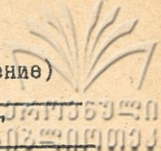
ქართული

წიგნობა

X	Словоформы	
67	ახლა	269
68	მგარი	268
69-70	მნიშვნელობა, ნივთი	267
71	სხვეულის	265
72	ფეხა	264
73	ფოტო	260
74	აგომის	258
75	მრედიგერის	254
76-78	მომენვის, სხვა, ფორმულა	248
79	მარტლაც	245
80	ფეხეწაფურის	244
81	წაფ	243
82	ქვანფური	239
83	წნევის	234
84	ამგვარად	232
85-86	მცირე, როგორც	231
87-90	არა, მაშასადამე, რიცხვი, სრული	230
91	სამშაღო	227
92-93	განფიქვბას, ქვანფური	224
94	გოაქვს	218
95-96	როზის, ფორმულის	215
97	საჭირთა	213
98-99	სისფრის, უწოდებენ	211
100	უწოდება	206
101-102	მათი, ფუნქციის	203
103-104	აბგვილი, ძალიან	202



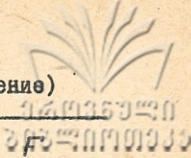
№	Словоформы	F
105.	ბიბლიკონი	201
106.	ასევე	200
107.	ბიბლიკონი	199
108-109.	ვხედავთ, სპირიტუალურად	198
110.	სპირიტუალური	194
111.	რთმეობა	193
112.	ვიპოვით	190
113-114.	განხილვის, სპირიტუალური	188
115.	ერს	187
116.	ვიპოვით	184
117.	მიხედვით	183
118-119.	ასე, რამდენიმე	182
120-121.	ფორმული, ფუნქციონირებს	180
122.	გამო	179
123.	ბიბლიკონი	177
124.	ბიბლიკონი	175
125.	ხედავთ	174
126.	ბიბლიკონი	173
127-128.	საკრებელი, გვიჩვენებს	172
129.	გადასვლა	171
130.	ბიბლიკონი	166
131.	გადასვლა	164
132-133.	ნაწილაკთა, პირთა	161
134-136.	ვერეფორმის, იგივე, შესაბამისი	160
137.	სადაც	159



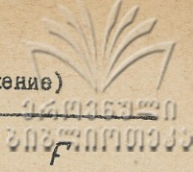
№	Словоформы	საქართველოს ენციკლოპედია
138-139	„რიდი“ ფემინაფორა	157
140-141	„რომელსაც, სიჩქარე“	156
142	„სამშობლებით“	155
143-144	„აღვნიშნით, ღერძის“	154
145-146	„იმპერსის, ფუნქციები“	153
147-148	„დავნიშნით, მომენტი“	152
149	„მეცნიერება“	151
150-152	„აქედან, გარდა, მიღებული“	150
153-154	„განისაზღვრება, შედეგად“	149
155-156	„ვთქვათ, სახით“	147
157	„მეორე“	145
158-159	„ამასთან, იცო“	144
160-161	„ერთის, მიმართ“	143
162	„მათ“	142
163-164	„მნიშვნელობები, ნულის“	140
165-168	„აპრილად, ერთჯერად, ვეღვი, თავისუფალი“	139
169	„ვიცით“	137
170-171	„გარეშე, ფაზის“	136
172	„დავუშვათ“	135
173-176	„მაგნიფიკატი, ნივთიერების, სიდიდე, ნონანონონობის“	133
177-178	„კომპლექსივით, მაგნიფიკატი“	132
179-181	„ნიშნავს, სიტყვა, ფიზიკური“	130
182-186	„გამოვიყენოთ, მნიშვნელობას, მოღვაწის, ფუნქციების, ხშირად“	129
187-188	„გვაძლევს, ისეთი“	127



№	Словоформы	F
189-192	ვაზი, მას, მთელი, მოცულობა	126
193-194	აზისთვის, ნაწილაკების	125
195	არჩან	124
196-197	ის, მუბივი	123
198	ნებისმიერი	121
199	მეფია	120
200-202	აგრეთვე, რაიმე, ვადლის	118
203	იძველები	117
204-205	მეჯანიკოს, წვენი	116
206-207	გეგამირის, სიძივის	115
208-210	რამოკრებულა, წერტილი, წინა	114
211	მეტყველებს	113
212	წარმოებულა	111
213	სინათლის	110
214-216	ველის, მოცულობის, ყოველი	109
217-218	ორბივალური, ფორმულაში	108
219-221	საიდანაც, სიმეფის, მემეფების	107
222-223	სახეს, ფორმულას	106
224-227	არამდე, სამი, ურთიერთმეფების, ძალა	105
228-230	ნაწილაკი, სასაზღვრო, სრულიად	104
231-235	გემოთ, იმას, იცვლება, მიმართულებით, ენის	103
236	ქვი	101
237	აღბაობა, გაპასვლა, განყოფილებაში, კანონი, კრევი, ნაწილი	100
243-246	ავიღობ, არც, სავრთ, სახეობობ	99



№	Словоформы	
247-251.	ბიძეებს, მყარ, მხრივ, ორბუჯის, სისხვება	98
252-253.	აქვთ, ორ	97
254.	სპექტრის	96
255-257.	გუსყარ, შეესაბამება, შემთხვევა	95
258-262.	გამოვარკნილთ, უწყვეტი, შემოვიღოთ, ცნობილია წარმოვიგინოთ	94
263-264.	ანალოგიურად, კლასიკური	93
265-267.	პირობებში, რთვითა, წერტილი	91
268-272.	არსებობს, აღარ, გაგებინს, დინების, სიმკვრივის 90	
273-280.	აღბათობის, ასეთ, გამოსახლება, ენერჯიას ისინი, კონფიკური, სიჩქარის, შედეგი	89
281-283.	აფთმების, გამოხატავს, იმყოფება	88
284-285.	პირველ, უკანასკნელი	87
286.	ფაღურნი	86
287-290.	გაფანტვის, იწვევს, ნაძილაკები, ჩანს.	85
291-292.	რიცხვის, სამუალებას	84
293-295.	მოძრაობა, სხეული, შევიფანოთ	83
296-299.	ამის, მყოფი, სიხობს, შიგნით	82
300-302.	გერაპირზე, ბიზნის, სპინის	81
303-307.	აშკარაა, ელექტრონი, იზრდება, მაჭრივის, სიმკვ- რივე.	80
308-311.	ბივილოთ, ნახაგზე, სწორზე, ცვილიება	79
312.	ნაკლებია	78
313-318.	ბგერის, ბრწყინი, იშავე, კუთრი, ბილეკლი, საბოლოო	77



№	Словофორმები	
319-322	ბენის, ნორმირების, რემედიუმ, ნეონი	76
323-328	ასევე, ელემენტი, ზვით, იმის, მოღვაწეობა, სუფთა	75
329-332	გაფართოების, კლასიკური, საკუთარი, უკვე	74
333-338	ამონახსნი, აღვნიშნავთ, ზვსსებები, მომდინგ- ში, მოქმედებს, ხასიათდება	73
339-341	გამოწვეული, გარკვეული, მპერაფორს	72
342-347	აბისა, გრძელ, მის, მცირეა, სიდიდეები, სპინი	71
348-353	ამოხსნა, მხვედველობაში, პირობას, პრეტესი, საკმაოდ, შედეგებიანიად	70
354-357	ბავის, ისევე, მოქმედი, ფრამპერაფორმატი	69
358-364	თეორიის, მოღვაწეები, მოცულობის, რამდენადაც, საბოლოო, სიდიდეს, კუთრებს,	68
365-371	მხვედარი, ისევე, კრძალ, მარტოვი, რა, სიხვედში, გრადუების, შეუძლებელია, ძალიანი	67
374-382	აქ, ახალი, მაგნიტა, მუფი, რეგულარული, ურთიერ- ქმედება, შესაძლებელია, ჩასმა, ძალიან.	66
383-388	გამომდინარეობს, განყოფილებანი, ერთიანი, მოცინი, კანონის, სხვედების	65
389-393	პრეტესიის, ჭაღრა, ჭარბობითი, შედარებითი, ხსნარის.	64
394-397	გამოსა' უღების, ინფორმაცი, მარჯვენა მსვინ- ლაფორის	63
398-402	აღვსიშნება, იმისა, მით, ორივე, რთული	62

Распределение количества словоформ при
абсолютной частоте $F < 62$

Таблица 2



Ранг γ	Кол-во n	Абс. частота F	γ	n	F
403-406	4	61	831-855	25	30
407-414	8	60	856-882	27	29
415-426	12	59	883-914	32	28
427-439	13	58	915-946	32	27
440-448	9	57	947-981	35	26
449-455	7	56	982-1020	39	25
456-468	13	55	1021-1052	32	24
469-475	7	54	1053-1089	37	23
476-483	8	53	1090-1134	45	22
484-495	12	52	1135-1187	53	21
496-502	7	51	1188-1242	55	20
503-512	10	50	1243-1301	59	19
513-525	13	49	1302-1355	54	18
526-538	13	48	1356-1404	49	17
539-554	16	47	1405-1495	91	16
555-570	16	46	1496-1584	89	15
571-581	11	45	1585-1655	71	14
582-590	9	44	1656-1746	91	13
591-609	19	43	1747-1846	100	12
610-624	15	42	1847-1986	140	11
625-641	17	41	1987-2138	152	10
642-659	18	40	2139-2331	183	9
660-672	13	39	2322-2547	226	8
673-687	15	38	2548-2817	270	7
688-705	18	37	2818-3143	326	6
706-720	15	36	3144-3530	387	5
721-740	20	35	3531-4132	602	4
741-764	24	34	4133-5051	919	3
765-790	26	33	5052-6704	1653	2
791-807	17	32	6705-11618	4913	1
808-830	23	31			

Поступила 4.XII.1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики



268, 1986

КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПРИЗНАКОВ НА БАЗЕ НЕТРАДИЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР КЛАСТЕРИЗАЦИИ

А.В.Корнеева

Интенсивное развитие кластерного анализа привело к разработке разнообразных процедур кластеризации данных, в частности, процедур, включающих эвристические моменты, которые можно противопоставить традиционным агломеративным и дивизионным методам кластеризации /1/. Если последние в процессе организации кластеров используют только один прием (слияние или разбиение), то процедуры, включающие эвристические моменты, позволяют для образования требуемого числа кластеров осуществлять как слияние, так и разбиение промежуточных кластеров /2,3/. Выбор конкретного приема на каждом шаге процедуры определяется параметрами, характеризующими текущую ситуацию. Тем самым процессу поиска решения придается определенная направленность, что снижает затрачиваемое на него время.

В литературе в основном описываются эвристические программы, реализующие кластеризацию объектов /2,3/. Очевидно, что при анализе эмпирических данных, представленных многомерными описаниями объектов, значительную роль должны играть и процедуры кластеризации признаков, т.к. с их помощью ока-



зывается возможным снизить размерность описаний.

Для кластеризации признаков разработан комплекс программ *CLUST*, включающий три программы: *CLUST1*, *CLUST2* и *CLUST3*, предназначенные соответственно для кластеризации количественных признаков, бинарных признаков и признаков, характеризующихся качественными градациями. Программы базируются на понятии связи между кластерами, которая определяется с помощью коэффициента корреляции в программе *CLUST1*, тетракорического показателя связи в программе *CLUST2* и поликорического показателя связи в программе *CLUST3*. В основе программ лежит алгоритм, позволяющий в ходе итеративной процедуры на каждом шаге принимать решение об осуществлении слияния или разбиения образованных кластеров, опирающееся на параметры, характеризующие сложившуюся ситуацию. С помощью этого алгоритма решается задача разбиения множества признаков на K кластеров.

K является задаваемым параметром процесса. Однако, в силу того, что процедура носит эвристический характер, ее результатом может оказаться образование не K , но близкого к K числа кластеров. Если имеет место подобный результат, то его причиной являются ограничения, налагаемые параметрами процесса на возможность слияния или разбиения.

Процесс кластеризации для всех трех программ определяется следующими параметрами:

- K - необходимое число кластеров,
- θ_N - минимально допустимое число элементов в кластере,
- P - доля элементов кластера, связь с которыми опре-



делает элемент, используемый для формирования новых кластеров при разбиении;

θ_c - пороговое значение связи, превышение которого допускает возможность слияния кластеров,

R - максимально допустимое число пар сливаемых кластеров,

L - число исходных кластеров,

N_k - число элементов в исходном кластере K ($K = 1, \dots, L$),

S - число элементов, вводимых в исходные кластеры,

n_s - номер элемента, вводимого в исходный кластер ($s = 1, \dots, S$),

I - максимально допустимое число итераций.

Программа *CLUST1* осуществляет кластеризацию количественных признаков, ей отвечает процедура, базирующаяся на понятии корреляции. Она включает следующие шаги.

1. Приведение параметров в стандартной форме задания.

Исходная матрица данных заменяется матрицей центрированных и нормированных величин.

2. Вычисление корреляционной матрицы.

Для каждой пары признаков M и M_i вычисляется коэффициент корреляции r_{M, M_i} .

3. Задание исходных кластеров.

Формируются исходные кластеры, число и состав которых определяются параметрами L, N_k ($K = 1, \dots, L$), S, n_s ($s = 1, \dots, S$).

4. Разнесение признаков по кластерам.

Признаки, подлежащие кластеризации, разносятся по создан-



ным кластерам на основе коэффициента ассоциации между признаком и кластером.

Коэффициент ассоциации между признаком M и кластером K определяется следующим образом:

$$AS(K) = \frac{\sum_{M=1}^{N_K} r_{M,K}^2}{N_K},$$

где $r_{M,K}$ - коэффициент корреляции между признаками M и M_1 , а N_K - число элементов в кластере K .

Признак вносится в кластер, которому отвечает максимальное значение $AS(K)$ ($K = 1, \dots, L$).

5. Поиск и фиксация ликвидируемых кластеров.

Поскольку в результате разнесения признаков по созданным кластерам могут образоваться пустые кластеры или кластеры, содержащие недостаточное количество элементов, необходимо выявить такие кластеры как подлежащие уничтожению и перераспределить содержащиеся в них признаки.

Выявление ликвидируемых кластеров осуществляется на основе сравнения числа элементов в кластере с параметром θ_N .

6. Разнесение признаков из ликвидируемых кластеров.

Признаки, содержащиеся в ликвидируемых кластерах, разносятся по сохранившимся кластерам на основе коэффициента ассоциации между признаком и кластером.

7. Вычисление средней ассоциации между признаками кластера.

Для каждого кластера вычисляется средняя ассоциация:

$$As_{cp.}(K) = \frac{2 \sum_{\substack{M1 \neq M2 \\ M1 > M2}} \sum_{M1, M2} x^2}{N_K(N_K - 1)}$$



8. Вычисление обобщенной средней ассоциации.

Вычисляется обобщенная средняя ассоциация, соответствующая полученному разбиению признаков на кластеры:

$$As_{об.} = \frac{\sum_K N_K As_{cp.}(K)}{N}$$

где N - число признаков, подлежащих кластеризации.

9. Принятие решения о разбиении или слиянии кластеров.

Поскольку необходимо выработать K кластеров, для текущего цикла итерации принимается решение о разбиении, если $b \leq \frac{K}{2}$ (т.е. количество имеющихся кластеров явно недостаточно), и принимается решение о слиянии, если $b > 2K$ (т.е. количество имеющихся кластеров явно избыточно).

В случае, когда $\frac{K}{2} < b < 2K$, условно, если цикл итерации нечетный, предпринимается попытка разбиения и, если цикл итерации четный, предпринимается попытка слияния.

Если принято решение о разбиении, то следует перейти к выполнению шага 10, если же принято решение о слиянии, - к выполнению шага 12. Если цикл итерации последний, то, не осуществляя ни разбиения, ни слияния, необходимо перейти к выполнению шага 16.

II. Труды, т.268.



10. Проверка на разбиение.

Разбиение целесообразно лишь в том случае, когда средняя ассоциация между признаками кластера не превосходит обобщенную среднюю ассоциацию. Поэтому проверяется условие:

$$As_{ap}(K) < As_{ob}.$$

В то же время разбиение возможно лишь в том случае, если кластер содержит достаточное количество признаков (в результате разбиения не должны создаваться кластеры с числом элементов меньшим θ_N), поэтому проверяется условие:

$$N_K > 2(\theta_N + 1).$$

Если разбиение невозможно, то необходимо перейти к шагу 12 в целях осуществления попытки слияния.

11. Разбиение.

Если расщепляется кластер, содержащий больше двух элементов, то необходимо определить правило разбиения признаков на две группы.

Разбиение осуществляется следующим образом.

В соответствии с параметром P (доля элементов кластера) отбираются признаки, наиболее сильно коррелирующие с рассматриваемым.

Тот элемент, которому отвечает наибольшая корреляция с наименее связанным из отобранных для него элементов, используется для организации новых кластеров. При разбиении образуются два кластера: в один входят выделенный признак и наиболее сильно коррелирующие с ним признаки, в другой — остальные признаки кластера.

Если осуществлено разбиение, следует перейти к шагу 15.

12. Определение ассоциации между кластерами.

Ассоциация между двумя кластерами определяется следующим

образом:

$$H_s(k, l) = \frac{\sum_{M=1}^{N_k} \sum_{M'=1}^{N_l} \chi_{M, M'}^2}{N_k N_l}$$

13. Проверка на слияние.

Допустимо слияние пар кластеров, для которых ассоциация превышает порог, определяемый параметром θ_c . Если таких пар нет, то следует перейти к шагу 15.

14. Слияние.

Устанавливается число пар сливаемых кластеров. Оно не должно превышать параметр R . Новый кластер формируется дополнением состава первого из сливаемых кластеров составом второго.

15. Проверка результатов настоящего цикла на совпадение с результатами предыдущих циклов.

Сопоставляются число и состав кластеров, полученных в рассматриваемом цикле, с числом и составом кластеров, полученных в предыдущем цикле. Если имеет место совпадение результатов в трех последовательных циклах, то осуществляется переход к шагу 16. Если совпадение с результатом предыдущего цикла не имеет места, то осуществляется возврат к шагу 4. Если имеет место совпадение с результатом предыдущего цикла, но нет совпадения с результатом ему предшествующего цикла, то факт совпадения фиксируется и осуществляется возврат к шагу 4.

Необходимость проверки результатов настоящего цикла на



совпадение с результатами не только предыдущего, но и предшествующего последнему циклу определяется тем, что может возникнуть ситуация, когда совпадение результатов двух последовательных циклов нестабильно. Оно может быть нарушено применением в следующем цикле действия, противоположного тому, которое было осуществлено в настоящем цикле (разбиение может нарушить результат, данный с тем, и наоборот).

16. Завершение процедуры.

Процедура завершена в том случае, когда ситуация стабилизировалась и дальнейшее слияние или разделение невозможно, или если осуществлено число итераций, определяемое параметром I .

Программа *CLUST2* осуществляет кластеризацию бинарных признаков, ей отвечает процедура, базирующаяся на понятии тетрахорического показателя связи $/4/$. Тетрахорический показатель связи между признаками M и M_1 определяется следующим образом:

$$r_{M, M_1} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

где a - число объектов, у которых есть признаки M и M_1 ,
 b - число объектов, у которых есть признак M и нет признака M_1 ,
 c - число объектов, у которых нет признака M и есть признак M_1 ,
 d - число объектов, у которых нет признаков M и M_1 .

Процедура кластеризации, отвечающая программе *CLUST2*, отличается от вышеописанной процедуры кластеризации, отвечающей программе *CLUST1*, отсутствием шага I и тем, что



на шаге 2 происходит вычисление матрицы тетрахорических показателей связи. В остальном эти процедуры имеют идентичные структуры.

Программа *CLUST3* осуществляет кластеризацию признаков, характеризуемых качественными градациями. Ей отвечает процедура, базирующаяся на понятии полихорического показателя связи /4/. Полихорический показатель связи между признаками M и MI определяется следующим образом:

$$\kappa_{MI, M} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{(g_1 - 1)(g_2 - 1)}}$$

где φ^2 - коэффициент контингенции, g_1 - число градаций для признака M , g_2 - число градаций для признака MI .

Коэффициент контингенции:

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^{g_1} \frac{\sum_{j=1}^{g_2} \frac{f_{ij}^2}{n_{.j}}}{n_{.i}} - 1,$$

где f - частоты ячеек корреляционной решетки, $n_{.j}$ - частоты ряда признака M по столбцам, $n_{.i}$ - частоты ряда признака MI по строкам.

Процедура кластеризации, отвечающая программе *CLUST3*, отличается от вышеописанной процедуры кластеризации, отвечающей программе *CLUST1*, отсутствием шага 1 и тем, что на шаге 2 происходит вычисление матрицы полихорических показателей связи. В остальном эти процедуры имеют идентичные структуры.



Программы *CLUST1*, *CLUST2* и *CLUST3* среди других параметров кластеризации содержат параметр θ_c - пороговое значение связи, превышение которого позволяет оливать кластеры. Для того чтобы иметь некоторые априорные основания для задания этого параметра кластеризации, целесообразно использовать корреляционную матрицу, матрицу тетраэрических показателей связи или матрицу полихорических показателей связи, отвечающую входным данным. Эти матрицы рассчитываются и печатаются соответственно вспомогательными программами *КОРРЕЛЯЦИЯ*, *АССОЦИАЦИЯ* и *ПОЛИХОР*.

Программы, входящие в комплекс *CLUST*, написаны на языке фортран-IV и реализованы на машине ЕС-1033.

Поступила 6. XII. 1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Айвазян, З.И. Бежаева, О.В. Староверов. Классификация многомерных наблюдений. М., "Статистика", 1974.
2. Б. Дюран, П. Оделл. Кластерный анализ. М., "Статистика", 1977.
3. Дж. Ту, Р. Гонсалес. Принципы распознавания образов. М., "Мир", 1978.
4. Н.А. Шлохьянский. Биометрия. Издательство Московского университета, 1970.



ა. კორნეევა

ნიშნ-მონაცემთა კლასიფიკაციის ანალიზი კლასიფიკაციის

კლასიფიკაციის პროცედურების დაფუძნებით

რეზიუმე

აღწერილია პროგრამათა კომპლექსი, რომელიც განკუთვნილია რაკლასიფიკაციის, ბინარული და ისეთი ნიშნ-მონაცემთა კლასიფიკაციის-სახეის, რომლებიც ხასიათდებიან რაკლასიფიკაციის გრაფიკული.

პროგრამებს საფუძვლად უდევს უკონსტრუქციული მიმდინარეობის შედეგ-ული ალგორითმი, რომლის საფუძვლადაც ხდება ამონახსნის საფუძვლად მიმდინარეობის ძებნა.

A. Korneeva

CLUSTER ANALYSIS OF ATTRIBUTES BASED ON
NON-TRADITIONAL CLUSTERIZATION PROCEDURES

Summary

A set of programs is described meant for clusterization of quantitative attributes, binary attributes and attributes characterized by qualitative gradations. The programs are based on an algorithm including heuristical elements, which makes the search of decision goaloriented.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნის ორდენის მფარველობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

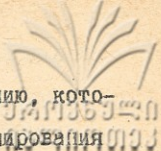
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ
КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

А.В.Корнеева, К.М.Лванозов, Н.В.Пиотровская

Поскольку функционирование интеллектуальной исполнитель-
ной системы определяется организацией ее решающей подсисте-
мы, одним из острейших вопросов был и остается вопрос пред-
ставления знаний в последней /1/. Знания, используемые сис-
темой, имеют сложную структуру, определяемую их разноцелевым
назначением /1/. Но как обязательный компонент выделяются т.н.
абстрактные знания, т.е. знания о проблемной среде, которыми
система пользуется в процессе решения задачи, но на которые
она при этом не воздействует (в отличие, например, от модели
внешнего мира).

Отсутствие универсальных методов представления знаний
привело к утверждению принципа синергизма, т.е. совмещения
различных средств представления при решении одной задачи /2/.

Одним из полезных видов представления знаний в случае
проблемных сред, допускающих описание объектов в системе
"признак-значение" /3/, может явиться понятийное, или концеп-
туальное, представление.



Работы Э.Б.Ханта /3/ положили начало направлению, которое получило название "моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине". Исследования в рамках этого направления вызвали как позитивные, так и критические оценки. Сущность последних сводится к тому, что понятие, представляемое дизъюнктивно-конъюнктивной комбинацией признаков, находится на уровне эмпирической абстракции /4/. Это является непреложным фактом, которым, однако, и определяется перспективность применения понятий в прикладных аспектах, поскольку концепт может служить формульно-логическим определением класса объектов, допускающих описание в системе "признак-значение".

Возможность четкого и компактного определения классов объектов позволяет воспользоваться для решения задачи выражения, накопления и корректировки знаний, которыми располагает интеллектуальная исполнительная система, концептуальным представлением. Последнее может использоваться в первую очередь как форма выражения абстрактных знаний.

Для обеспечения интеллектуальных исполнительных систем концептуальным представлением абстрактных знаний разработаны специальные комплексы программ. В соответствии с назначением их можно разбить на три группы: предназначенные для формирования описательных концептов, предназначенные для формирования разделительных концептов и предназначенные для кластерного анализа данных.

Причина разработки именно таких комплексов заключается в следующем.

Методы формирования понятий можно разбить на две группы

в зависимости от характера вырабатываемого концепта: предназначенные для получения описательных понятий и предназначенные для получения разделительных понятий. Формализм методов первой группы таков, что при выработке концепта обрабатываются только описания объектов, относящихся к рассматриваемому классу. Вследствие этого понятие отображает ту общность, которая присуща объектам этого класса. Формализм методов второй группы таков, что при выработке концепта обрабатываются как описания объектов, относящихся к рассматриваемому классу, так и описания объектов, относящихся к альтернативному классу. Вследствие этого понятие отображает ту специфику, которая позволяет дифференцировать объекты обоих классов.

В процессе решения задач интеллектуальная исполнительная система может использовать как описательные, так и разделительные концепты. Необходимо подчеркнуть, что применение разделительных концептов без предварительного использования описательных концептов необоснованно, поскольку указание на возможность отнесения данного объекта к данному классу содержит именно описательный концепт в форме некоторого сочетания функций состояния признаков, отвечающего определенной импликанте понятия /5,6/. Специфические же сочетания значений признаков, которые содержат разделительные концепты, могут использоваться для дифференциации классов лишь в том случае, если есть достаточные основания относить объект к этим классам.

Несмотря на осуществление различных методов формирования понятий /7/, всем им присуща как обязательный этап процедура минимизации дизъюнктивной совершенной нормальной фор-

мы (ДСНФ). Это налагает существенные ограничения на размерность векторов, которыми описываются объекты /8/.

Ввиду этого обстоятельства представляется целесообразным использовать кластерный анализ как процедуру, предваряющую формирование понятий.

Предварительный кластерный анализ данных, на базе которых формируется понятие, может дать эффект двойного рода. С одной стороны, кластеризация объектов позволяет получить группы сходных объектов (кластеры). Если процедуру формирования понятия осуществлять на объектах, вошедших в один кластер, то должна выделиться значительная группа общих признаков, что упрощает минимизацию ДСНФ. С другой стороны, кластеризация признаков позволяет путем рационального отбора последних снизить размерность векторов, описывающих объекты, и тем самым повысить эффективность процедуры минимизации ДСНФ.

Вышеотмеченные обстоятельства и определили структуру программного обеспечения для концептуального представления знаний в случае проблемных сред, допускающих описание объектов в системе "признак-значение".

Для реализации концептуального представления знаний разработаны следующие комплексы программ:

1. Комплекс программ формирования описательных концептов.

Описательный концепт представляет собой формульно-логическое определение некоторого класса объектов, описываемых в фиксированной системе "признак-значение" /3/, и может использоваться в целях распознавания.



УДК 62-50

302.001.003.0

Комплексо содержит пять программ: *CONF1* , *CONF11* , *CONF2* , *CONF22* , *CONF3* . Программы, включенные в комплекс, осуществляют выработку концептов на основе фильтрационного метода формирования понятий /6,9/.

Программы различаются своей организацией в зависимости от принципа отбора признаков, фигурирующих в понятии и от характера обрабатываемых данных (качественные и количественные).

С помощью программ *CONF1* и *CONF11* вырабатываются т.н. детерминированные концепты. Формирование детерминированных концептов осуществляется в предположении, что в вырабатываемом понятии могут фигурировать все показатели, включенные в исходную признаковую систему. При этом не учитываются частотные оценки признаков. Для формирования детерминированных концептов на базе качественных признаков предназначена программа *CONF1* , на базе количественных признаков - программа *CONF11* .

С помощью программ *CONF2* и *CONF22* вырабатываются т.н. вероятностные концепты. Формирование вероятностных концептов осуществляется в предположении, что вырабатываемое понятие имеет иерархическую структуру. При этом учитываются частотные оценки признаков: на I ступени понятия фигурируют признаки с наибольшей частотой встречи, на II ступени понятия - признаки с меньшей частотой встречи и т.д. Для формирования вероятностных концептов на базе качественных признаков предназначена программа *CONF2* , на базе количественных признаков - программа *CONF22* .

С помощью программы *CONF3* вырабатываются т.н. раз-

мытые концепты. Формирование размытых концептов осуществляется в предположении, что при описании объектов, используемых для выработки понятия, может иметь место нечеткая выраженность качественных признаков. Выраженность признаков характеризуется функцией принадлежности /10/.

Программы, входящие в комплекс, используют общий набор подпрограмм.

Процедура формирования понятия выявляет характерные для рассматриваемого класса объектов сочетания функций состояния признаков /5, 9/. Эти сочетания представлены импликантами понятия.

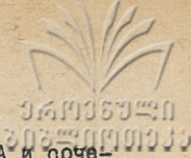
Применение программ формирования концептов возможно при условии обязательной предварительной разработки системы "признак-значение", в рамках которой вырабатывается понятие.

2. Комплекс программ формирования разделительных концептов.

Разделимый концепт представляет собой формульно-логическое выражение, являющееся правилом, позволяющим установить, относится ли объект, описываемый в фиксированной системе "признак-значение", к денотату рассматриваемого наименования /3/.

Комплекс включает две программы: *TREE* и *TREES*. Программа *TREE* осуществляет выработку концептов на основе процедуры, предложенной Э.Хантом /3/, программа *TREES* - на основе процедуры, являющейся модификацией последней (устраняется асимметрия, характерная для алгоритма Э.Ханта).

Процедура выработки разделительного концепта позволяет получить дерево понятия. С помощью последнего могут быть выявлены и представлены формульно-логическими выражениями со-



четания значений признаков, специфичные для класса А и сочетания значений признаков, специфичные для альтернативного ему класса В (в условиях сопоставления именно этих двух классов). На основе этих сочетаний осуществима дифференциация объектов.

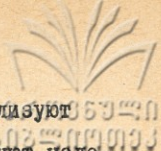
Предварительная разработка системы "признак-значение", в рамках которой вырабатывается разделительное понятие, является обязательным условием применения.

3. Комплексы программ кластеризации объектов на основе агломеративных иерархических процедур.

Этот комплекс включает две группы программ. Первая из них содержит шесть программ: *CENTRE*, *GRAV*, *WARD*, *NDIST*, *AVLINK*, *FDIST*. Эти программы реализуют кластерный анализ количественных данных на основе различных агломеративных иерархических процедур /II/.

Программа *CENTRE* осуществляет кластеризацию объектов на основе центроидного метода, программа *GRAV* - на основе метода групповых средних, программа *WARD* - на основе метода минимального приращения внутригрупповой суммы квадратов, программа *NDIST* - на основе метода одной связи, программа *AVLINK* - на основе метода средней связи, программа *FDIST* - на основе метода полной связи. Эти программы реализуют алгоритм последовательной кластеризации и используют целевые функции, базирующиеся на понятии расстояния.

Вторая группа программ предназначена для решения задачи кластеризации объектов, описываемых бинарными векторами. Эта группа состоит из трех программ: *NDIST1*, *AVLINK1* и *FDIST1*, являющихся аналогами программ *NDIST*,



AVLINK и *FDIST* . Эти программы также реализуют алгоритм последовательной кластеризации, но используют целевые функции, базирующиеся на понятии ассоциации.

4. Комплексо программ кластеризации объектов на основе метода *K* внутригрупповых средних.

Этот комплекс включает две программы: *CENCLUS* и *CENCLUS1* . Программа *CENCLUS* осуществляет кластеризацию объектов, описываемых количественными векторами, на основе метода *K* внутригрупповых средних /12/. Программа *CENCLUS1* осуществляет кластеризацию объектов, описываемых бинарными векторами, на основе алгоритма, функционально аналогичного методу *K* внутригрупповых средних, но базирующегося не на понятии расстояния, а на понятии ассоциации.

5. Комплексо программ кластеризации объектов на основе метода Ушарта.

Этот комплекс включает две программы: *WISHART* и *WISHART1* . Программа *WISHART1* осуществляет кластеризацию объектов, описываемых количественными векторами, на основе метода Ушарта /13/. Программа *WISHART1* осуществляет кластеризацию объектов, описываемых бинарными векторами, в основе этой программы - аналог метода Ушарта, разработанный для бинарных данных.

6. Комплексо программ кластеризации объектов на основе алгоритма, включающего эвристические моменты.

Этот комплекс включает две программы: *BALL* и *BALL1* . Программа *BALL* реализует кластерный анализ количественных данных, программа *BALL1* - кластерный анализ бинарных данных.

В основе программы *BALB* лежит процедура *ISO-DATA* предложенная Г.Х.Боллом и Д.Дж.Холлом /11,12/, в основе программы *BALB1* - аналог этой процедуры, разработанный для кластеризации объектов, описываемых бинарными векторами.

Особенностью этих программ является применение эвристических приемов, встроенных в схему итерации, которыми в зависимости от цели и текущих параметров процесса определяется реализация слияния или разбиения кластеров в ходе процедуры.

7. Комплекс программ кластеризации признаков на основе алгоритма последовательной кластеризации.

Программы кластеризации признаков осуществляют группировку признаков по степени их связи.

Связь между признаком и группой признаков и связь между двумя группами признаков определяются в случае количественных признаков на основе коэффициента корреляции, в случае бинарных признаков - на основе тетракорического показателя связи /14/, в случае признаков, характеризуемых качественными градациями - на основе поликорического показателя связи /14/.

Комплекс включает три программы: *CLUS*, *CLUS1* и *CLUS2*, которые реализуют соответственно кластеризацию количественных признаков, бинарных признаков и признаков, характеризуемых качественными градациями на основе алгоритма последовательной кластеризации /11/.

8. Комплекс программ кластеризации признаков на основе алгоритма, аналогичного методу *K* внутригрупповых средних.

Комплекс включает две программы: *PRIZ* и *PRIZ1*. Программа *PRIZ* осуществляет кластеризацию количественных

признаков, программа *PRIZI* - кластеризацию бинарных признаков. В основе программ лежит алгоритм, разработанный для кластеризации признаков по аналогии с методом *K* внутригрупповых средних для кластеризации объектов /12/.

9. Комплекс программ кластеризации признаков на основе алгоритма, включающего эвристические моменты.

Комплекс включает три программы: *CLUST1*, *CLUST2*, и *CLUST3*, которые осуществляют соответственно кластеризацию количественных признаков, бинарных признаков и признаков, характеризуемых качественными градациями.

В основе программ лежит алгоритм, позволяющий в ходе итеративной процедуры на каждом шаге принимать решение об осуществлении слияния или разбиения образованных кластеров, опирающееся на параметры, характеризующие сложившуюся ситуацию.

С помощью этого алгоритма решается задача разбиения множества признаков на *K* кластеров.

K является задаваемым параметром процесса. Однако, в силу того, что процедура носит эвристический характер, ее результатом может оказаться образование не *K*, но близкого к *K* числа кластеров. Если имеет место подобный результат, то его причиной являются ограничения, налагаемые параметрами процесса на возможность слияния или разбиения.

Выше были названы четыре комплекса программ кластеризации объектов и три комплекса программ кластеризации признаков. Включение всех этих комплексов в программное обеспечение концептуальных систем представления знаний обусловлено принципиальным различием методов, лежащих в их основе. Кон-
12. Труды, т.268.



кретный выбор той или другой программы кластеризации определяется априорными соображениями, связанными со спецификой глобально решаемой задачи.

Вышеописанные комплексы программ формирования понятий и кластеризации данных создают программное обеспечение для концептуального представления абстрактных знаний в случае проблемных сред, допускающих описание объектов в системе "признак-значение". Программы написаны на языке фортран-IV и реализованы на машине ЕС-1033.

Поступила 17.XII.1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.В.Попов, Г.Р.Фирдман. Алгоритмические основы интеллектуальных роботов и искусственного интеллекта. М., "Наука", 1976.
2. Д.Б.Ленат. Программное обеспечение систем искусственного интеллекта. В мире науки. Ноябрь, 11, 1984.
3. Э.Хант, Дж.Марин, Ф.Стоун. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине. М., "Мир", 1970.
4. Ю.В.Орфеев. Возможности моделирования образного и понятийного мышления на ЭВМ. Сб.: Интеллект человека и программы ЭВМ. М., "Наука", 1979.
5. В.В.Чавчангдзе. Аналитическое решение задачи формирования понятий и распознавания образов. Сообщения АН СССР, т.65, № 1, 1971.

6. А.В.Корнеева. Искусственный интеллект и теоретические проблемы медицинской кибернетики. Труды Института кибернетики, АН ГССР, т.1, Тбилиси, 1977.
7. В.П.Гладун, Н.Д.Ващенко. Методы формирования понятий на ЦВМ. Кибернетика, № 2, 1975.
8. Д.А.Поспелов. Логические методы анализа и синтеза схем. М., "Энергия", 1974.
9. В.В.Чавчанидзе, А.В.Корнеева. Аналитический фильтрационный метод формирования понятий. Сообщения АН ГССР, т.65, № 3, 1972.
10. Л.Заде. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., "Мир", 1976.
11. Б.Дюран, П.Оделл. Кластерный анализ. М., "Статистика", 1977.
12. Дж.Ту, Р.Гонсалес. Принципы распознавания образов. М., "Мир", 1978.
13. С.А.Айвазян, З.И.Бежаева, О.В.Староверов. Классификация многомерных наблюдений. М., "Статистика", 1974.
14. Н.А.Плохинский. Биометрия. Изд.Московского университета, 1970.



ა. კორნეევა, კ. დიანოპოლი, ნ. პიოტროვიკი

პროგრამული უზრუნველყოფის მართვაშემაჯობა ცენტრის ნარკოპოლი

არცვაპოვალური სისტემატიკის

რეგულირება

ინტელექტუალური შემსრულებელი სისტემების აბსტრაქტული ცოდნის არცვაპოვალური ნარკოპოლი უზრუნველსაყოფად შემსრულებელი პროგრამისა არცვაპოვალური აღწერილობის ცნებებისა და განმარტებელი ცნებების ფორმირებისა.

ამ არცვაპოვალური პროგრამების ეფექტური გამოყენებისათვის, მშენებლის მრავალგანმარტებელი აღწერის შემსრულებელში, მიმართულია არცვაპოვალური ანალიზის გამოყენება, რეგულირება პროცედურისა ცნების ფორმირების წინა ეტაპზე.

მონაცემთა არცვაპოვალური ანალიზის განსახარტებელი შემსრულებელი პროგრამისა არცვაპოვალური მშენებლის არცვაპოვალური განმარტებისა და მონაცემებისა არცვაპოვალური განმარტებისათვის.

გამოხსენებელი პროგრამისა არცვაპოვალური, რეგულირება გამოყენებისა ცნების ფორმირებისა და მონაცემთა არცვაპოვალური განმარტებისათვის, იქვე პროგრამული უზრუნველყოფის აბსტრაქტული ცოდნის არცვაპოვალური ნარკოპოლისათვის ისევე პროგრამული განმარტების შემსრულებელში, სპეციალური აღწერა "ნიშან-ნიშნულირება" სისტემაში.

A. Korneeva, K. Lianozov, N. Piotrovzkaya

ON DEVELOPING SOFTWARE FOR CONCEPTUAL
SYSTEMS OF KNOWLEDGE REPRESENTATION

Summary

To provide abstract knowledge conceptual representation for intellectual executive systems the authors have developed a set of programs meant for descriptive notion formation, and a set of programs meant for disjunctive notion formation. Cluster analysis is suggested, as a procedure preceding notion formation since it allows to use these sets effectively for multidimensional object description. To perform cluster analysis of data sets of programs for object clusterization and sets of programs for attribute clusterization were developed. The sets of programs for notion formation and data clusterization form the software for abstract knowledge conceptual representation in the case of problem domains where it is allowed to describe objects in the "attribute-value" system.





268, 1986

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ИНФОРМАЦИОННОЙ СТАТИСТИКИ

Н.В.Бокучава

§ 1. Информационный критерий достаточности статистики и
оценка параметров.

Пусть $Y = T(x)$ — статистика, т.е. $T(x)$ является
функцией с областью определения X и областью значений Y .
Тогда, следуя Кульбаку / 1 /, для вероятностных мер
 $dP(x)$ и $dP(y)$ справедливо неравенство

$$J(1:2, X) \geq J(1:2, Y), \quad (1)$$

где $J(1:2, X)$ и $J(1:2, Y)$ — кульбаковские и информационные
меры на множествах X и Y .

Статистика, удовлетворяющая условию равенства в (1), на-
зывается достаточной статистикой.

Условием достаточности статистики $Y = T(x)$ для
распределений экспоненциального типа

$$f^*(x) = f_1(x) = I^{-1}(\beta) f_2(x) \exp(\beta T(x)), \quad (2)$$

где $f_i(x)$, $i=1,2$, - вероятности или плотности вероятности, соответствующие гипотезам H_i , $i=1,2$, является

$$J(1:2, X) = J(1:2, Y) = J(*2), \quad (3)$$

где

$$J(*2) = \beta \langle T(x) \rangle^* - \ln \xi(\beta), \quad (4)$$

$$\xi(\beta) = \int f_2(x) \exp(\beta T(x)) dx, \quad (5)$$

$$\langle T(x) \rangle^* = \int f^*(x) T(x) dx = \frac{d}{d\beta} \ln \xi(\beta). \quad (6)$$

Условие (6) является условием максимальной правдоподобности параметра β . Если к тому же для (6)

$$\langle T(x) \rangle = \langle T(x) \rangle^*, \quad (7)$$

где

$$\langle T(x) \rangle = \int f_1(x) T(x) dx, \quad (8)$$

то параметры β будут еще и несмещенными.

Проиллюстрируем изложенное на конкретных примерах.

Пример I. (Биномиальное распределение).

Пусть \mathcal{X} - пространство случайных выборок O_n объема n независимых наблюдений из случайной величины, принимающей два значения: успех или неуспех; $Y = T(x) = x$ - число успехов в n наблюдениях, а P_i , $q_i = 1 - P_i$, $i=1,2$, - вероятности успеха или неуспеха, соответствующие гипотезам

268, 1986

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ИНФОРМАЦИОННОЙ СТАТИСТИКИ

Н.В.Бокучава

§ 1. Информационный критерий достаточности статистики и
оценка параметров.

Пусть $Y = T(x)$ - статистика, т.е. $T(x)$ является
функцией с областью определения X и областью значений Y .
Тогда, следуя Кульбаку / 1 /, для вероятностных мер
 $dP(x)$ и $dP(y)$ справедливо неравенство

$$J(1:2, X) \geq J(1:2, Y), \quad (1)$$

где $J(1:2, X)$ и $J(1:2, Y)$ - кульбаковские информаци-
онные меры на множествах X и Y .

Статистика, удовлетворяющая условию равенства в (1), на-
зывается достаточной статистикой.

Условием достаточности статистика $Y = T(x)$ для
распределений экспоненциального типа

$$f^*(x) = f_1(x) = Z^{-1}(\beta) f_2(x) \exp(\beta T(x)), \quad (2)$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{J}{Jx} \sum_{x=0}^n x^x \binom{n}{x} p_1^x q_1^{n-x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{J}{Jx} (p_1 x + q_1)^n = n p_1,
 \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned}
 J(1:2, x) &= n p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + n \ln \frac{q_1}{q_2} - n p_1 \ln \frac{q_1}{q_2} = \\
 &= n \left(p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + q_1 \ln \frac{q_1}{q_2} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 J(1:2, y) &= \sum_{y=0}^n q_1(y) \ln \frac{q_1(y)}{q_2(y)} = \\
 &= n \left(p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + q_1 \ln \frac{q_1}{q_2} \right),
 \end{aligned}$$

т.е. $J(1:2, x) = J(1:2, y)$ и статистика $T(x) = x$ действительно достаточна.

Покажем, что статистика $T(x) = x$ является достаточной и для распределений экспоненциального типа (2). Для этого покажем, что $J(1:2, x) = J(x, 2)$.

$$\tilde{f}(\beta) = \sum_{x=0}^n f_2(x) \exp(\beta T(x)) =$$



$$= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (P_2 \exp(\beta))^x q_2^{n-x} =$$

$$= (P_2 \exp(\beta) + q_2)^n,$$

$$\langle T(x) \rangle^* = \frac{d}{d\beta} \ln \zeta(\beta) = \frac{d}{d\beta} \ln (P_2 \exp(\beta) + q_2)^n =$$

$$= \frac{n P_2 \exp(\beta)}{P_2 \exp(\beta) + q_2}.$$

Так как в нашем примере $T(x) = x$ и

$$\langle T(x) \rangle = \langle x \rangle = \sum_{x=0}^n x f_1(x) = n p_1, \quad \text{то из условия}$$

$$\langle T(x) \rangle = \langle T(x) \rangle^* \text{ следует } n p_1 = \frac{n P_2 \exp(\beta)}{P_2 \exp(\beta) + q_2},$$

откуда находим правдоподобную оценку параметра β

$$\exp(\beta) = \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} \quad \text{и} \quad \beta = \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1}.$$

Подставим полученное значение для β в (4):

$$J(*2) = n p_1 \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} - \ln \left(P_2 \cdot \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} + q_2 \right)^n =$$

$$- n p_1 \ln \frac{P_1}{P_2} + n p_1 \ln \frac{q_2}{q_1} - n \ln \left(q_2 \frac{P_1 + q_1}{q_1} \right) =$$



$$= n p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + n \ln \frac{q_2}{q_1} \cdot (p_1 - 1) =$$

$$= n p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + n q_1 \ln \frac{q_1}{q_2} =$$

$$= J(1:2, X) = J(1:2, Y),$$

Ч. т. д.

Пример 2.

Пусть \mathcal{T} - пространство случайных выборок O_n объема n независимых наблюдений из нормальных популяций

$$\mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \quad i=1, 2, \quad \text{а} \quad Y = T(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Исходя из условия рассматриваемого примера функции распределения на множествах \mathcal{X} и \mathcal{Y} для гипотез $H_j, j=1, 2,$ и выборки объема n соответственно будут иметь следующий вид:

$$f_j(x) = (\sigma_j \sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right),$$

$$g_j(y) = (\sigma_j \sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{ny}{2\sigma_j^2}\right).$$

Следовательно:

$$J(1:2, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \ln \frac{\sigma_2^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_i x_i^2\right)}{\sigma_1^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_i x_i^2\right)} dx =$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \left(n \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_i x_i^2 + \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_i x_i^2 \right) dx$$

$$= \frac{n}{2} \left(\ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - 1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right),$$

$$J(1:2, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1(y) \ln \frac{\sigma_2^n \exp\left(-\frac{ny}{2\sigma_1^2}\right)}{\sigma_1^n \exp\left(-\frac{ny}{2\sigma_2^2}\right)} dy =$$

$$= n \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{n}{2\sigma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1(y) y dy + \frac{n}{2\sigma_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1(y) y dy =$$

$$= \frac{n}{2} \left(\ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - 1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right),$$

т.е. $J(1:2, X) = J(1:2, Y)$ и статистика $T(x) = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2$ достаточна. Покажем, что эта статистика достаточна и для распределений типа (2), т.е. докажем, что $J(1:2, X) = J(1:2, Y) = J(*2)$.

Для этого найдем сперва максимально правдоподобную оценку параметра β в распределении (2), исходя из условия несмещенности $\langle T(x) \rangle = \langle T(x) \rangle^*$.

$$\langle T(x) \rangle = \int_x T(x) f_1(x) dx =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i \int_{x_i} x_i^2 f_1(x_i) dx_i = \frac{1}{n} \sum_i \sigma_1^2 = \sigma_1^2, \tag{9}$$

$$\langle T(x) \rangle^* = \frac{d}{d\beta} \ln \tilde{z}(\beta).$$

Т.к.

$$\begin{aligned}
 z(\beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) \exp(\beta T(x)) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_2 \sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_i x_i^2\right) \exp\left(\frac{\beta}{n} \sum_i x_i^2\right) dx = \\
 &= (\sigma_2 \sqrt{2\pi})^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_i x_i^2 \left(1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}\right)\right] dx = \\
 &= (\sigma_2 \sqrt{2\pi})^{-n} \prod_i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{x_i^2}{2\sigma_2^2} \left(1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}\right)\right] dx_i = \\
 &= (\sigma_2 \sqrt{2\pi})^{-n} \prod_i \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{x_i^2}{2\sigma_2^2} \left(1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}\right)\right] dx_i = \\
 &= (\sigma_2 \sqrt{2\pi})^{-n} \left(\sqrt{\frac{2\pi\sigma_2^2}{1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}}}\right)^n = \\
 &= \left(1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}\right)^{-n/2} \quad , \text{ то}
 \end{aligned}$$

$$\langle T(x) \rangle^* = \frac{d}{d\beta} \ln \left(1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}\right)^{-n/2} = \frac{\sigma_2^2}{1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}} \quad (10)$$

Подставляя соотношения (9) и (10) в условие

$\langle T(x) \rangle = \langle T(x) \rangle^*$, получим

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_2^2}{1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{n}},$$

откуда для значения максимально правдоподобной оценки β имеем

$$\beta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right).$$

Вычислим теперь $J(*2)$, используя соотношение (4)

$$\begin{aligned} J(*2) &= \beta \langle T(x) \rangle^* - \ln \tilde{z}(\beta) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sigma_1^2 - \ln \left(1 - \frac{2\beta\sigma_2^2}{\pi} \right)^{-n/2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - 1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right), \end{aligned}$$

что в точности совпадает со значениями $J(1:2, x)$ и $J(1:2, y)$, т.е. статистика $\frac{1}{n} \sum_i x_i^2$ является действительно несмещенной и достаточной статистикой, а

$\beta = \frac{\pi}{2} (\sigma_2^{-2} - \sigma_1^{-2})$ максимально правдоподобной оценкой параметра β в распределении (2).

Пример 3.

Пусть \mathcal{T} - пространство случайных выборок O_n объема n независимых наблюдений из пуассоновских популяций с параметрами β_j , $j=1,2$, и $Y = T(x) = \sum_i x_i$.

Исходя из условия рассматриваемого примера функции рас-

пределения на множествах X и Y для гипотез H_j , $j = 1, 2$, и выборки объема n соответственно будут иметь вид:

$$f_j(x) = \frac{(n\beta_j)^x \exp(-n\beta_j)}{x!},$$

$$f_j(y) = \frac{(n\beta_j)^y \exp(-n\beta_j)}{y!}.$$


Следовательно,

$$\begin{aligned} J(1:2, x) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x) \ln \frac{(n\beta_1)^x \exp(-n\beta_1)}{(n\beta_2)^x \exp(-n\beta_2)} = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x) \left(x \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} - n\beta_1 + n\beta_2 \right) = \\ &= n\beta_1 \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} + n(\beta_2 - \beta_1) \quad *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \sum_{x=0}^{\infty} x f_1(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{(n\beta_1)^x \exp(-n\beta_1)}{x!} = \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} n\beta_1 \frac{(n\beta_1)^{x-1} \exp(-n\beta_1)}{(x-1)!} = n\beta_1. \end{aligned}$$

Т.к. наблюдения независимы, то $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \prod_i f(x_i)$,

$$\sum_{x(x \neq x_i)} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_i).$$



$$\begin{aligned}
 J(1:2, y) &= \sum_{y=0}^{\infty} g_i(y) \ln \frac{(n\beta_1)^y \exp(-n\beta_1)}{(n\beta_2)^y \exp(-n\beta_2)} = \\
 &= \sum_{y=0}^{\infty} g_i(y) \left(y \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} + n(\beta_2 - \beta_1) \right) = \\
 &= n\beta_1 \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} + n(\beta_2 - \beta_1)
 \end{aligned}$$

Так как $J(1:2, X) = J(1:2, Y)$, то заключаем, что

$T(X) = \sum_{i=1}^n x_i$ является достаточной статистикой для пуассоновских популяций.

Покажем теперь, что эта статистика достаточная и несмещенная для распределений типа (2), т.е. покажем, что $J(1:2, X) = J(*2)$. Для этого, исходя из условия несмещенности (7), найдем сперва максимально правдоподобную оценку параметра β в распределении (2).

$$\begin{aligned}
 \hat{t}(\beta) &= \sum_x f_2(x) \exp(\beta T(x)) = \\
 &= \sum_x f_2(x) \exp(\beta \sum_i x_i) = \\
 &= \prod_i \sum_{x_i} f_2(x_i) \exp(\beta x_i) =
 \end{aligned}$$

$$= \prod_i \sum_{x_i} \frac{\beta_2^{x_i} \exp(-\beta_2)}{x_i!} \exp(\beta x_i) =$$

(II)

$$= \prod_i \exp(-\beta_2) \sum_{x_i} \frac{(\beta_2 \exp(\beta))^{x_i}}{x_i!} = \exp(-n\beta_2 + n\beta_2 \exp(\beta)),$$

$$\langle T(x) \rangle^* = \frac{d}{d\beta} \ln \xi(\beta) = n\beta_2 \exp(\beta),$$

$$\langle T(x) \rangle = \sum_x T(x) f_1(x) = \sum_x f_1(x) \sum_{i=1}^n x_i = n\beta_1$$

и из $\langle T(x) \rangle^* = \langle T(x) \rangle$ следует

$$\beta_1 = \beta_2 \exp(\beta), \quad \beta = \ln \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Учитывая последнее соотношение из (11), получаем

$$\xi(\beta) = \exp(-n\beta_2 + n\beta_1),$$

а из (4)

$$J(*2) = n\beta_1 \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} -$$

$$-n(\beta_1 - \beta_2) = J(1:2, \pi), \quad \text{ч.т.д.}$$

§ 2. Проверка гипотез.

Пусть \mathcal{X} - пространство выборок Q_n объема n не-

зависимых наблюдений и $Y=T(x)$ статистика достаточна для семейства экспоненциального типа (2).

Предположим, что пространство \mathcal{X} разбито на непересекающиеся множества E_1 и E_2 , т.е. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $\mathcal{X} = E_1 \cup E_2$.

Допустим, что проверочная процедура заключается в том, что если выборка $x \in E_1$, мы принимаем гипотезу H_1 (отвергаем H_2), и если выборка $x \in E_2$, принимаем нулевую гипотезу H_2 (отвергаем H_1).

Проверяя нулевую гипотезу H_2 против альтернативной гипотезы H_1 , будем отвергать H_2 в том случае, когда $|I|$ вероятность

$$P\{[J(*H_2) - J(*H_1)] \geq C/n_1\} \leq \alpha,$$

где α - ошибка первого рода,

$$J(*H_1) = \int f^*(x) \ln \frac{f^*(x)}{f_1(x)} dx,$$

$$J(*H_2) = \int f^*(x) \ln \frac{f^*(x)}{f_2(x)} dx.$$

Путем соответствующего выбора константы C , на которую величина $J(*H_2)$ должна превосходить $J(*H_1)$, для того чтобы гипотеза H_2 была опровергнута, можно регулировать величину ошибки первого рода.

Для нахождения минимального значения константы C , позволяющей однозначно определить принадлежность популяции к нулевой или альтернативной гипотезе в критической области,

будем исходить из соотношения

$$[J(*H_2) - J(*H_1)] \geq 0,$$



которое с учетом (2) примет следующий вид:

$$\ln \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq 0, \tag{13}$$

причем, при знаке ≥ 0 будем отвергать нулевую гипотезу H_2 ; а при знаке < 0 принимать H_2 .

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 4. Предположим, что у нас есть наблюдение x , которое является выборкой из n независимых наблюдений O_n , и мы хотим проверить нулевую гипотезу H_2 о том, что наблюдение принадлежит популяции с биномиальным распределением P_2 и $q_2 = 1 - P_2$ при альтернативной гипотезе H_1 с биномиальным распределением P_1 и $q_1 = 1 - P_1$ при статистике $Y = T(x) = x$, являющейся числом наблюдаемых успехов в выборке O_n .

Исходя из условия рассматриваемого примера, биномиальные распределения, соответствующие гипотезам H_i , $i = 1, 2$, будут иметь вид:

$$f_i(x) = \binom{n}{x} P_i^x q_i^{n-x},$$

для которых соотношение (13) примет следующий вид:



$$\ln \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \ln \left[\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^x \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^{n-x} \right] =$$

$$= \left(x \ln \frac{P_1 q_1}{P_2 q_2} + n \ln \frac{q_1}{q_2} \right) \geq 0,$$

откуда, вводя обозначение $\hat{p} = \frac{x}{n}$, являющееся экспериментальным распределением (частотой), получим:

$$\hat{p} \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} \geq \ln \frac{q_2}{q_1}. \quad (14)$$

Из (14) следует:

1)
$$c = \ln \frac{q_2}{q_1};$$

2) отвергаем нулевую гипотезу H_2 , если

$$\hat{p} \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} \geq \ln \frac{q_2}{q_1},$$

которая:

а) при $P_1 > P_2$ ($q_2 < q_1$) принимает следующий вид:

$$\hat{p} \geq \frac{\ln \frac{q_2}{q_1}}{\ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1}} \quad (\text{т.к. в этом случае } \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} > 0),$$

б) при $P_1 < P_2$ ($q_2 > q_1$)



$$\hat{P} \leq \frac{\ln \frac{q_2}{q_1}}{\ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1}} \quad (\text{т.к. } \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} < 0)$$

3) принимаем нулевую гипотезу H_0 , если

$$\hat{P} \ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1} < \ln \frac{q_2}{q_1},$$

которая при

a) $P_1 > P_2$ ($q_2 > q_1$) принимает вид

$$\hat{P} < \frac{\ln \frac{q_2}{q_1}}{\ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1}},$$

d) а при $P_1 < P_2$ ($q_2 < q_1$) -

$$\hat{P} > \frac{\ln \frac{q_2}{q_1}}{\ln \frac{P_1 q_2}{P_2 q_1}}.$$

Пример 5.

Пусть \mathcal{X} - пространство случайных выборок O_n объема n независимых наблюдений из нормальных популяций $N(0, \sigma_i^2)$

для гипотез H_i , $i=1, 2$, а статистика $Y = T(\mathcal{X}) =$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Исходя из условий рассматриваемого примера, нормальные распределения соответствующие гипотезам H_i , $i=1, 2$, на множестве \mathcal{X} будут иметь следующий вид:



$$f_1(x) = (\sigma_1 \sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{j=1}^n x_j^2\right)$$

для которых

$$\begin{aligned} \ln \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \ln \left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^n \exp\left(\frac{1}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{j=1}^n x_j^2 \right] = \\ &= \left[n \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{1}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{j=1}^n x_j^2 \right] \geq 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 2n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

и

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 \geq \frac{2n\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad (15)$$

Из (15) следует:

$$1) \quad c = \frac{2n\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2},$$

2) отвергаем нулевую гипотезу H_2 , если $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, т.к.



тогда $\sum_{j=1}^n x_j^2 \geq C$ и

3) принимаем нулевую гипотезу H_2 , если $G_1^2 < G_2^2$, т.к.

тогда $\sum_{j=1}^n x_j^2 < C$.

Аналогичные расчеты могут быть проведены и для других функций распределения.

Поступила 23.XII.1985

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

I. С.Кульбак. Теория информации и статистика, М., "Мир",
1979.

ბ.ბოკუჩავა

ინფორმაციის სტატისტიკის თეორიის საკონსტრუქციო
კვლევი

დაძველები განხილულია სტატისტიკის საკონსტრუქციო, პარამეტრების
შეფასებისა და კონსტრუქციის შედეგების ინფორმაციული კრიტერიუმების
შესახებ,

N.Bokuchava

ON SOME PROBLEMS OF INFORMATIONAL STATISTICS

Summary

The problem is discussed of applying informational criteria for
stating the completeness of statistics for evaluation of parameters and
testing hypotheses.

268, 1986

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
С НЕКЛАССИЧЕСКИМ НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

А.Ш.Шапатава, Э.Н.Хведелидзе

Рассматривается вопрос единственности решения параболического уравнения с нелинейными нелокальными краевыми условиями. Аналогичные краевые условия для уравнений эллиптического типа были рассмотрены в работе /4/. Для доказательства единственности применяется методика работы /3/.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset R^2$, а S - граница области Ω . Обозначим через \mathcal{G} часть границы S . Пусть $\mathcal{G}^{(i)}$ ($i=0,1,\dots,n$) диффеоморфные $y^{(i)} = H_i(x)$ образы \mathcal{G} , лежащие в области Ω ($y^{(i)} \in \mathcal{G}^{(i)}, x \in \mathcal{G}$), причем если $\mathcal{G}^{(i)}$ пересекается с S , то не касательны к ней. Рассмотрим также область $Q = \Omega \times (0, T]$ в пространстве точек (x, t) , $x \in \Omega$, $0 < t \leq T$, с границей $S_T = S \times (0, T]$. Введем обозначения: $\mathcal{G}_T^{(i)} = \mathcal{G}^{(i)} \times (0, T]$ ($i=0,1,\dots,n$), $\mathcal{G}_T = \mathcal{G} \times (0, T]$, Π_2 - прямоугольник со сторонами (a_α, b_α) , $\alpha=1,2$, где a_α, b_α , $\alpha=1,2$, - заданные числа.

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с равномерно эллиптическим оператором второго порядка с достаточно гладкими, определенными на Q , коэффициентами. Поставим следующую задачу: найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x, t) \cdot u = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S_T - \mathcal{E}_T, \quad (2)$$

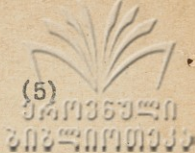
$$u(x, t) = F(u(y^{(0)}, t)) + g(x, t), \quad (3)$$

$$(x, t) \in \mathcal{E}_T, \quad (y^{(0)}, t) \in \mathcal{E}_T^{(0)},$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где $f(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $g(x, t)$, $u_0(x)$, $\alpha(x, t)$ — заданные непрерывные функции определенные, соответственно на Q , $S_T - \mathcal{E}_T$, \mathcal{E}_T , Ω , $S_T - \mathcal{E}_T$, $\alpha(x, t) > 0$ для любого $(x, t) \in S_T - \mathcal{E}_T$, а $F(u)$ — нелинейная, дифференцируемая по u функция, удовлетворяющая в области своего определения условию



$$|F'_u(u)| \leq q = \text{const},$$

кроме этого предполагаем, что условия (2) и (3) согласованы.

Введем скалярное произведение и норму (см. /3/):

$$(u(x), v(x))_{\xi_1^{(i)}} = \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(i)}} \int_{\xi_1^{(i)}}^{b_1} \left\{ \int_{a_1}^{x_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} u(\bar{x}_1, x_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times v(\bar{x}_1, x_2) dx_2 \right\} d\bar{x}_1 \right\} dx_1, \quad (6)$$

$$\|u(x)\|_{\xi_1^{(i)}} = \sqrt{(u(x), u(x))_{\xi_1^{(i)}}}, \quad (7)$$

$$u(x), v(x) \in L^2(\Omega).$$

Индексом $\xi_1^{(i)}$ подчеркнута зависимость введенных соотношений от $\xi_1^{(i)}$. Предполагаем, что $a_1 < \xi_1^{(i)} < b_1$. Для простоты изложения \mathcal{G} и $\mathcal{G}^{(i)}$ определим так:

$$\mathcal{G} = \left\{ x \mid x = (b_1, x_2), x_2 \in (a_2, b_2) \right\},$$

$$\mathcal{G}^{(i)} = \left\{ x \mid x = (\xi_1^{(i)}, x_2), x_2 \in (a_2, b_2) \right\}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Если для q из (5)



$$q \leq 1,$$

то задача (I)-(4) в классе $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_T)$ может иметь не более одного решения.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 - два решения задачи (I)-(4), тогда их разность $u = u_1 - u_2$, удовлетворяет требованиям следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b u \quad \text{в } Q, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad \text{в } S_T - G_T, \tag{10}$$

$$u(x, t) = F'_u(\bar{u}) u(y^{(0)}, t), \quad (x, t) \in G_T, \quad (y^{(0)}, t) \in G_T^{(0)}, \tag{11}$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{12}$$

где \bar{u} находится между значениями u_1 и u_2 . Для простоты, доказательство проведем для $b = \Delta$.

Пользуясь формулой Грина, имеем

$$\begin{aligned}
 (\Delta u, v)_{S_1^{(0)}} = & -(\nabla u, \nabla v)_{S_1^{(0)}} + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{S_1^{(0)}} \int_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n} v d\bar{x}_1 dy + \\
 & + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{S_1^{(0)}} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx_2 \right\} dx_1, \tag{13}
 \end{aligned}$$

где S_{x_1} - граничная поверхность прямоугольника $(a_1, x_1) \times$
 $\times (a_2, b_2)$, за исключением поверхности $\{x = (x_1, x_2),$
 $x_2 \in (a_2, b_2)\}$. dy - элемент этой поверхности. Умножим
 скалярно уравнение (9) на v и примем во внимание (13), по-
 лучим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\xi_1^{(0)}} + (\nabla u, \nabla v)_{\xi_1^{(0)}} = & - \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{\xi_1^{(0)}}^{b_1} \int_{S_{x_1}} \alpha u v d\bar{x}_1 dy + \\ & + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{\xi_1^{(0)}}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx_2 \right\} dx_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Вместо v подставим $u = u_1 - u_2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right)_{\xi_1^{(0)}} + \|\nabla u\|_{\xi_1^{(0)}}^2 + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{\xi_1^{(0)}}^{b_1} \int_{S_{x_1}} \alpha u^2 d\bar{x}_1 dy = \\ = \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{\xi_1^{(0)}}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} u dx_2 \right\} dx_1. \end{aligned}$$

После преобразования правой части, принимая во внимание (11)
 и (8), имеем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)_{\xi_1^{(0)}} + \|\nabla u\|_{\xi_1^{(0)}}^2 + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(0)}} \int_{\xi_1^{(0)}}^{b_1} \int_{S_{x_1}} \alpha u^2 dx_1 dy =$$

$$= \frac{1}{2(b_1 - \xi_1^{(0)})} \int_{a_2}^{b_2} [u^2(b_1, x_2, t) - u^2(\xi_1^{(0)}, x_2, t)] dx_2 \leq 0.$$

Итак, получили, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)_{\xi_1^{(0)}} \leq 0. \quad (15)$$

Интегрируя это неравенство по t от 0 до t и принимая во внимание (12), получим, что $u(x, t) \equiv 0$, что и доказывает теорему.

Аналогичным образом можно доказать единственность следующей обобщенной нелокальной задачи: найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), начальному условию (4) и следующему нелокальному условию:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F_i(u(y^{(i)}, t)) + g(x, t), \quad (3')$$

$$(x, t) \in G_T, \quad (y^{(i)}, t) \in G_T^{(i)},$$

где α_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) - параметры, для которых

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 \leq \frac{1}{n}, \quad (16)$$

а $F_i(u)$ - нелинейные, дифференцируемые по u функции, удовлетворяющие в областях своего определения условиям

$$\left| F'_{iu}(u) \right| \equiv \left| \frac{dF_i(u)}{du} \right| \leq q_i = \text{const}, \quad (17)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Если для q_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, из (17)

$$q = \max_{0 \leq i \leq n-1} q_i \leq 1, \quad (18)$$

то задача (1), (2), (3'), (4), (16), в классе $C(\bar{\Pi}_2) \cap C^2(\Omega_T)$ может иметь не более одного решения.

Доказательство. Заметим, что разность u двух решений u_1 и u_2 удовлетворяет (9), (10), (12) и следующему граничному условию:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F'_{iu}(\bar{u}) u(y^{(i)}, t), \quad (11')$$

$$(x, t) \in \mathcal{E}_T, \quad (y^{(i)}, t) \in \mathcal{E}_T^{(i)}.$$

Рассуждая аналогичным образом, что и при доказательстве теоремы I, получим, что



$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right)_{\xi_1^{(i)}} + \|\nabla u\|_{\xi_1^{(i)}}^2 + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(i)}} \int_{\xi_1^{(i)}}^{b_1} \int_{S_{x_1}} \alpha u^2 d\bar{x}_1 d\gamma = \\ & = \frac{1}{2(b_1 - \xi_1^{(i)})} \int_{a_2}^{b_2} [u^2(b_1, x_2, t) - u^2(\xi_1^{(i)}, x_2, t)] dx_2. \end{aligned}$$

Умножим последнее выражение на $2(b_1 - \xi_1^{(i)})$ и просуммируем по i , $i=0, 1, \dots, n-1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} 2(b_1 - \xi_1^{(i)}) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right)_{\xi_1^{(i)}} + \|\nabla u\|_{\xi_1^{(i)}}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{b_1 - \xi_1^{(i)}} \int_{\xi_1^{(i)}}^{b_1} \int_{S_{x_1}} \alpha u^2 d\bar{x}_1 d\gamma \right] = \tag{19} \\ & = \int_{a_2}^{b_2} \left[nu^2(b_1, x_2, t) - \sum_{i=0}^{n-1} u^2(\xi_1^{(i)}, x_2, t) \right] dx_2. \end{aligned}$$

Напомним, что $(b_1, x_2, t) \in \mathcal{G}_T$, $(\xi_1^{(i)}, x_2, t) \in \mathcal{G}_T^{(i)}$. Тогда подставляя в правую часть (19) значение $u(x, t)$ из (II') и принимая во внимание условия (16) и (18) для подынтегрального выражения в правой части равенства (19), получим оценку

$$nu^2(b_1, x_2, t) - \sum_{i=0}^{n-1} u^2(\xi_1^{(i)}, x_2, t) =$$



$$= n \left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F'_{1u}(\bar{u}) u(\xi_1^{(i)}, x_2, t) \right]^2 - \sum_{i=0}^{n-1} u^2(\xi_1^{(i)}, x_2, t) \leq$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} u^2(\xi_1^{(i)}, x_2, t) - \sum_{i=0}^{n-1} u^2(\xi_1^{(i)}, x_2, t) \leq 0.$$

Заканчивая рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что $u(x, t) \equiv 0$, и тем самым теорема 2 доказана.

Поступила 27.XII.1985

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В.Бицадзе, А.А.Самарский. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. ДАН СССР, 1969, 185, 4, 739-740.
2. Д.Г.Гордезиани. Об одном методе решения краевой задачи Бицадзе-Самарского. Семинар ИПМ ТГУ, Аннот. докл. 1970, 2, 39-40.
3. Д.Г.Гордезиани. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. ТГУ, Тбилиси, 1981.
4. А.Ш.Шапатава. О приближенном решении одной нелинейной нелокальной краевой задачи. Труды ИПМ им. И.Н.Векуа, ТГУ, Тбилиси, 1985, 15, 308-315.

ა. შაპათავა, ე. ხვედელიძე



ეროვნული აკადემიის სასაბჭოო განყოფილება
თბილისი

რეზიუმე

ნაშრომში განიხილება ერთი არაკლასიკური არაწრფივი სასაბ-
ლონო ამოცანის ამოხსნის უნიკუზის საკითხი პარაბოლური ტიპის
ტანვითვისათვის.

A. Shapatava, E. Khvedelidze

ON THE SOLUTION OF ONE NONCLASSICAL,
NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM
OF A PARABOLIC EQUATION

Summary

The uniqueness of the solution of a parabolic equation with nonlinear
nonlocal boundary conditions is considered.

268, 1986

К ПРОБЛЕМЕ ИЗМЕРЕНИЯ УСТАНОВКИ В ПСИХОЛОГИИ
УСТАНОВКИ

Ю.В.Филипашвили

Современный этап научно-технического прогресса предъявляет повышенные требования к человеческому фактору, особенно его психологическому складу. Становится жизненной необходимостью создание научно обоснованной системы профотбора, профориентации, профадаптации. А это в свою очередь ведет к необходимости разработки дифференциально-психологических проблем, принципов и методов теории измерения, методов психологической диагностики.

Для учета человеческого фактора очень важно своевременное определение профессиональной пригодности человека к тем или иным видам трудовой или другой деятельности. Для этого необходимо выявление и измерение таких психофизических свойств, которые не только дают возможность классифицировать людей, но и прогнозировать их деятельность в будущем. Как явствует из исследований, посвященных общепсихологическим и дифференциально-психологическим проблемам теории установки, одним из таких свойств может быть динамич-

ность-статичность установки - целостно-личностного состояния-модификации личности.

Как известно, для изучения закономерностей формирования и функционирования установки автор психологической теории установки Д.Н.Узнадзе и его последователи разработали и применили множество вариантов т.н. метода фиксированной установки /6/. Однако при применении этих классических вариантов с психодиагностической целью, с учетом требований теории измерения в психологии, не всегда удается обеспечить объективность измерения различных проявлений установки (в том числе и динамичности-статичности) с точки зрения контроля и управления субъективными и объективными факторами, определяющими специфику установки, а также выявление надежности метода.

На базе одного из вариантов теста Бурдона /10/ был разработан такой вариант метода фиксированной установки, который соответствовал бы классической модели метода фиксированной установки (КММФУ) и в то же время был лишен вышеотмеченных недостатков и соответствовал бы требованиям теории измерения.

Тест состоит из 2550 квадратов восьми разновидностей, расположенных на 30 строках. В течение определенного времени, отведенного на каждую строку и тестирования в целом, испытуемый должен последовательно реагировать на три определенных квадрата одним способом, на пять других - иным способом. Результаты тестирования оцениваются по количеству (перечеркнутых квадратов) и качеству (допущенных ошибок - реагирования несоответствующим способом) выполненной работы.

Мы внесли существенное изменение в инструкцию и процедуру тестирования отмеченным тестом, придав ему (как мы предполагаем) черты КММФУ. До начала тестирования испытуемый предупреждается, что после истечения определенного времени тестирования (экспериментатор знает это время, а испытуемый не знает) он получит указание в виде слова "наоборот", после чего он должен выполнять тестовое задание противоположным способом: на те квадраты, на которые он до этого реагировал перечеркиванием вертикальными черточками, должен реагировать перечеркиванием горизонтальными черточками, и наоборот, на те квадраты, на которые он реагировал перечеркиванием горизонтальными линиями, должен реагировать перечеркиванием вертикальными линиями. В соответствии с КММФУ в первой части тестирования вы вырабатываем и фиксируем у испытуемых установку выполнять задание одним способом ("установочная часть"), во второй части ("критическая часть") - противоположным способом.

Для доказательства аналогичности процедуры тестирования, модифицированной нами, и КММФУ можно привести следующие данные и соображения:

- 1) соотношение между количеством квадратов, требующих разного реагирования, выражается 1:2,5, что соответствует в классической модели соотношению "маленький-большой";
- 2) установочной части тестирования отводится 15 строк теста соответственно 15-кратному предъявлению установочных объектов;
- 3) результаты тестирования показали, что в критической части, по сравнению с установочной частью, количество и качество выполнения тестового задания ухудшается. Причем, если



в установочной части соотношение ошибок, допущенных при реагировании на три и на пять разных квадратов, равно в среднем 2:1, то в критической части оно равно 1:1,5, что соответствует явлению контраста в классических опытах по выработке и смене фиксированной установки;

4) при выполнении тестового задания важную роль играют темп психомоторной активности, дизъюнктивное время реакции и ряд качеств внимания (концентрация, распределение, переключение). О сходстве предложенной нами процедуры тестирования с помощью теста Бурдона с КММУ свидетельствуют результаты тех исследований, где выявлены статистически значимые взаимоотношения между временем реакции выбора и установкой /2/, вниманием и установкой /4/, а также раннее и последующие соображения Д.Н.Узнадзе по поводу сущности внимания /5/.

Однако предложенный нами вариант метода фиксированной установки характеризуется и целым рядом особенностей, о которых речь пойдет ниже.

Все эксперименты по выявлению надежности предложенного нами варианта метода фиксированной установки, а также закономерности формирования и смены установок проводились групповым способом над студентами различных факультетов Тбилисского университета. На каждую строку теста испытуемым давалось 12 секунд. Следовательно, установочная и критическая части тестирования продолжались по 3 минуты каждая. Резкое уменьшение времени тестирования по сравнению с обычным применением этого варианта теста Бурдона (на каждую строку 50 секунд) было вызвано необходимостью, во-первых, уменьшения действия фактора утомления, во-вторых, лучшего наблюдения, контроля и регистрации процесса перехода (смены) от од-

ного способа действия на другой (от одной установки на другую). У испытуемых с динамической установкой смена установки могла произойти уже в первой строке, если бы на ее выполнение было отведено много времени.

С целью выявления надежности предложенного варианта метода фиксированной установки мы подвергли двукратному тестированию с интервалом 1,5 года группу испытуемых в составе 25 человек. Надежность, как показатель сходства результатов повторных измерений, и, следовательно, объективности метода мы выразили с помощью коэффициента ранговой корреляции (по Спирмену). Выбор этого коэффициента был не случаен (надежность, как известно, можно выразить различными способами). Мы ведь искали такие проявления человеческой психики, которые имели бы не только классификационную, но и прогностическую функцию. А такими могут быть те качества, которые менее подвластны изменению во времени, влиянию различных факторов среды, т.е. носят диспозиционный характер. Мы хотели выяснить, имеет ли динамичность-статичность установки такое свойство, носит ли различие между индивидами по этому признаку относительно стабильный характер. Ранговая корреляция является показателем именно этого.

Ранжировку испытуемых произвели по количеству перечеркнутых квадратов, по количеству ошибок, по Коэффициенту производительности (по Уипплу) и по Индексу Элиава /см.1/. Так как примененный нами вариант теста Бурдона отличается от тех его вариантов, на основе результатов которых были разработаны Коэффициент производительности и Индекс Элиава, мы внесли определенные изменения в формулы, выявляющие эти

величины.

Из 20 показателей, полученных в результате сравнения данных двухкратного обследования, 15 оказались статистически значимыми, следовательно, показателем надежности (объективности) примененного метода. Эти же результаты свидетельствуют о сравнительной стабильности разницы между испытуемыми по измеряемым проявлениям.

К экспериментам по выявлению общей закономерности формирования, действия и смены установок было привлечено 212 испытуемых. Для построчного анализа данных пригодными оказались результаты 203 испытуемых. Наиболее общими являются следующие результаты:

1. В установочной части тестирования в среднем количество перечеркнутых квадратов равно 150, количество ошибок - 6,55, Коэффициент производительности - 143,45, Индекс Эллава - 91,45; в критической же части эти же величины соответственно равны 100, 10,48, 89,52, 80,13;

2. Из 6,55 ошибок, допущенных испытуемыми в установочной части тестирования, 4,28 приходится на те три разновидности квадратов, общее количество которых в тесте было 2,5 раза меньше, чем общее количество других пяти разновидностей квадратов. В критической же части тестирования ошибки соответственно равны 4,07 и 6,41. Т.е. увеличение количества ошибок происходит за счет неправильного реагирования на многоугольные квадраты;

3. Как в установочной, так и в критической частях тестирования по мере продвижения в выполнении тестового задания количество перечеркнутых квадратов увеличивается. Коэффици-



ент корреляции между рангами строк и рангами тех же строк по количеству перечеркнутых квадратов равен 0,59, $P < 0,05$ (без учета первой строки от равен 0,70 $P < 0,01$) в установочной части, а в критической части - 0,86, $P < 0,01$ (без учета последней строки - 0,92). Количество ошибок в установочной части увеличивается незначительно ($\chi_o = 0,30, P > 0,05$), а в критической - значительно ($\chi_o = 0,63, P < 0,01$). Производительность увеличивается значительно как в установочной ($\chi_o = 0,50, P < 0,05$), так и в критической частях тестирования ($\chi_o = 0,85, P < 0,01$). Что же касается Индекса Элиава, то статистически значительного отношения ни в установочной, ни в критической части между рангами строк и рангами по этому показателю не обнаружено (см. таблицу).

4. В общем показатели в установочной части коррелируют с показателями в критической части тестирования. Т.е. испытуемые, имеющие высокие или низкие показатели по вышеизмеряемым проявлениям в установочной части, имеют такие же показатели в критической части.

Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что закономерность формирования установки в первой части (в "установочной") тестирования идентична закономерности формирования установки во второй части (в "критической"), что также говорит об аналогии между КММУ и предложенным нами вариантом метода фиксированной установки.

Как мы упомянули выше, предложенный нами вариант метода фиксированной установки, по нашему мнению, имеет ряд преимуществ по сравнению с КММУ.

Существенной особенностью предложенного варианта является



ся то, что различные проявления и свойства установки изменяются не количеством или величиной иллюзорных восприятий, а соотношением или разницей в количестве перечеркнутых квадратов и допущенных ошибок (или обеими вместе) между установочной и критической частями тестирования.¹

Кроме того, весь процесс формирования одной установки и смены ее другой можно контролировать и регистрировать, описать и выразить количественно в различных условиях тестирования и эксперимента; полученные данные легко проверить, так как метод характеризуется высокой конспекцией. Т.е. личность экспериментатора, как возможный фактор субъективности, мало влияет на результаты тестирования; испытания можно проводить как индивидуально, так и групповым способом, что немаловажно при проведении массовых экспериментов или обследований.

Особо следует указать на такое обстоятельство. Большинство общепсихологических и дифференциально-психологических закономерностей установки были выявлены, если можно так выразиться, на уровне перцептивной активности, из-за чего у некоторых исследователей оправедливо возникло сомнение в соответствии общей теории установки и ее экспериментальной

1. Предложенный вариант метода фиксированной установки больше всех схож с теми вариантами, которые применялись в исследованиях Н.Элиава и З.Ходжава.

основы (см., напр., /8/). Несомненно, перцептивная активность, как и любое психическое проявление человека, является репрезентантом типологических особенностей, психологического и социально-психологического "склада" личности, но она, очевидно, имеет и свои специфические особенности, которые не всегда оправедливо распространять на все психические проявления. В предложенном нами варианте метода фиксированной установки в процессе формирования и смены установки принимают участие темп психо motorной активности, концентрация и переключение внимания, воля, эмоции, в определенной мере и память, вероятностное прогнозирование, так что в процессе выполнения тестового задания испытуемый целиком и полностью поглощен работой. Поэтому предложенный нами вариант глубже охватывает личность человека и, как нам кажется, больше соответствует как общей, так и дифференциально-психологической теории установки.

Как и любой метод, предложенный нами вариант метода фиксированной установки имеет ряд недостатков. Прежде всего следует указать на методические недостатки, свидетельством которых являются данные, полученные в результате выполнения тестового задания в первой и последней строках как в установочной, так и в критической части тестирования. Очевидно, часть испытуемых не соблюдала инструкцию, контроль за точное выполнение которой не всегда удавался экспериментатору.

Если синтезировать соображения ряда авторов (Раискуп, 1966; Ржичан, Госковец, Штикар, 1965; Гизели, 1966 и др. /II/), то примененный нами вариант теста Бурдона является средством измерения способности концентрировать внимание, точности перцеп-



ции и психомоторного темпа, а также показателем трудооспособности человека и изменения эффективности труда во времени. Результаты нашего исследования свидетельствуют о необходимости пересмотра целесообразности применения Коэффициента производительности (по Уипплу) и Индекса Элиава в качестве величин, объединяющих показатели психомоторного темпа и способности концентрировать внимание, т.е. количество и качество выполненной тестовой работы. При определении производительности большее значение ("вес") придается психомоторному темпу, а Индекса Элиава - концентрации и другим качествам внимания. При безошибочном выполнении тестового задания по этим показателям невозможно дифференцировать людей, выполнивших большой объем работы, от тех, кто действует медленно и, следовательно, выполняет меньшую работу. То же самое можно сказать и об определении величины динамичности установки, так как соотношение или разница между результатами тестирования в установочной и критической частях всегда будут одинаковыми (равными единице или нулю), несмотря на разницу в количестве выполняемой работы.

Выходом из такого положения нам представляется:

- 1) или поиск и создание другой единицы измерения как темпа психомоторной активности и качества внимания, так и динамичности-статичности установки,
- 2) или коррекция результатов отдельных испытуемых на основе тех данных, которые были получены при обследовании всей популяции,
- 3) или определение динамичности-статичности установки

в отдельности у испытуемых с высоким темпом психомоторной активности и низким темпом такой активности, как это предложено при обработке результатов, полученных этим вариантом теста Бурдона при обычном тестировании (см. /II/).

Поступила 8.1.1986

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Я.Ахобадзе, Г.Н.Кечхуашвили, Дж.Ш.Квавилашвили. Практикум по психологии. Изд-во Тбилисского университета, 1975 (на груз. языке). 268 стр.
2. О.А.Берекашвили. Время реакции выбора и установки. Автореферат диссертации..., Тбилиси, 1969.
3. П.Хэролд Бергольд. Отбор, в книге: "Экспериментальная психология", т. II (Редактор-составитель С.С.Стивекнс), ИД, Москва, 1963, стр. 879-916.
4. Ж.И.Непаридзе. К вопросу взаимоотношения между вниманием и установкой. Автореферат диссертации... Тбилиси, 1968.
5. Д.Н.Узнадзе. К проблеме сущности внимания, "Психология", т. IУ, изд-во АН СССР, Тбилиси, 1947 (на груз. языке), стр. 139-157.
6. Д.Н.Узнадзе. Экспериментальные основы психологии установки, изд-во АН СССР, Тбилиси, 1961, 210 стр.
7. Д.Н.Узнадзе. Труды, т. III-IУ, изд-во АН СССР, Тбилиси, 1964, (на груз. языке), 638 стр.
8. Ш.Н.Чхартишвили. Некоторые спорные проблемы психологии установки, "Мецниереба", 1971 г., 274 стр.



Средние показатели количества перечеркнутых квадратов, количества ошибок, Коэффициентов производительности (по Уипплу) и производительности по Индексу Элиава по строкам теста. Первые 15 строк - "установочные", вторые - "критические". N = 203.

№ строка в тесте	Количество перечеркнутых квадратов	Количество ошибок	Производительность по Уипплу	Производительность по Индексу Элиава
I.	10,188	0,389	9,799	92,50
2.	9,005	0,310	8,695	93,23
3.	8,921	0,468	8,453	89,78
4.	9,699	0,350	9,345	92,91
5.	10,025	0,483	9,542	90,59
6.	9,832	0,458	9,374	90,90
7.	9,985	0,527	9,458	89,72
8.	9,616	0,512	9,104	89,63
9.	10,177	0,394	9,783	92,40
10.	10,212	0,399	9,813	92,35
II.	10,424	0,414	10,010	92,21
12.	10,655	0,428	10,227	92,12
13.	9,527	0,527	9,000	89,24
14.	11,217	0,424	10,793	92,58
15.	10,315	0,468	9,847	91,13
16.	5,054	0,547	4,507	79,52
17.	5,399	0,650	4,749	77,37
18.	5,768	0,714	5,054	76,77
19.	6,389	0,734	5,655	78,34
20.	6,197	0,591	5,606	81,83
21.	6,222	0,699	5,523	78,79
22.	5,453	0,680	4,773	76,61
23.	6,433	0,650	5,783	80,81
24.	7,113	0,660	6,453	82,90
25.	7,113	0,754	7,359	79,92
26.	7,310	0,694	6,616	81,91
27.	7,497	0,660	6,837	83,16
28.	7,837	0,773	7,064	81,24
29.	7,438	0,778	6,660	80,17
30.	6,694	0,896	5,798	75,02

286, 1986

К РАЗРЕШЕНИЮ КОЛЛИЗИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
МЕТОДА АССОЦИАТИВНОЙ АДРЕСАЦИИ

Р.П. Мегрелишвили, И.Р. Ключко

В работе /1/ рассматривается алгоритм организации и функционирования диалоговой системы с использованием метода прямой адресации /2,3/.

В диалоговых системах общения с ЭВМ на естественном языке актуальной является задача идентификации слов языка со словами машинного словаря, организуемого в памяти машины.

Решение задачи идентификации связано с организацией машинного словаря и, естественно, с поиском слов в словаре, т.е. с построением алгоритма управления словарем.

Метод прямой (ассоциативной) адресации заключается в применении некоторого оператора, идентифицирующего заданное слово естественного языка с определенным числом, которое может являться номером блока (или номером выделенной для записи слова машинного словаря области) памяти ЭВМ, как, например, в /4/.

Алгоритм, приведенный в /1/, обеспечивает высокое быст-

родействие системы, однако, его недостатком является малое значение коэффициента заполнения памяти машины /3/.

В настоящей работе рассматривается отличный от /1/ подход к построению диалоговой системы с более оптимальным уровнем заполнения памяти ЭВМ.

Пусть \mathcal{A} означает множество букв алфавита; $\mathcal{M} = \bigcup_{\ell=1}^{K_0} \mathcal{M}_\ell$, как и в /1/, есть заданное множество всех слов, \mathcal{M}_ℓ - множество слов, составленное из ℓ -буквенных сочетаний. И пусть ℓ -буквенное слово $\alpha \in \mathcal{M}_0$ записано в виде двоичного вектора, т.е.

$$\alpha = (\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(1)}, \dots, \beta_{K_0}^{(K_0-1)}) \in V_n, \quad (1)$$

где V_n - n -мерное векторное пространство над $GF(2)$;

$$\beta^{(j)}(x) = \beta(x) x^{im}, \quad \text{если } j < \ell; \quad \beta^{(j)}(x) = 0,$$

если $j \geq \ell$; $\beta(x) = \beta^{(0)}(x)$ - эквивалентная запись

буквы. $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{m-1})$ в виде многочлена, $n = mK_0$,

m - число двоичных знаков в двоичной записи $\beta \in \mathcal{A}$

(здесь предполагается, что существует некоторое преобразование, ставящее во взаимно однозначное соответствие каждой букве алфавита некоторое двоичное число).

Пусть далее, $V(\alpha) \subset V_n$ - множество слов $\alpha \in \mathcal{M}$, записанных в виде (1), и

$$S = \alpha H_1^T, \quad (2)$$

где f_1 - матрица $(r_1 \times n)$ ранга r_1 (H_1^T - транспони-



рованная матрица H_1), а

$$H_1 = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_{K_0} \\ \varepsilon_1^0 & \varepsilon_1^1 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_c^0 & \varepsilon_c^1 & \dots & \varepsilon_c^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

I - единичная матрица порядка m , $\varepsilon_j^i = (\varepsilon_{j,0}^{(i)}, \dots, \varepsilon_{j,m-1}^{(i)})$
 $(i=0, \dots, n-1; j=1, \dots, c)$ - вектор-столбец размерности m , представляющий собой двоичную запись i -того элемента мультипликативной группы поля Галуа $GF(q)$, т.е. ε_j^i - различные степени примитивного элемента поля $GF(q)$, образованного, соответственно, примитивным многочленом $P_j(x)$ ($j=1, \dots, c$).

Соотношением (2) слово $\alpha \in V(\alpha)$ отождествляется с Γ -размерным вектором S_1 и, соответственно, с элементом факторгруппы V_n/V' ($V' \subset V_n$ - нулевое пространство пространства строк H_1), т.е. α отождествляется с некоторым двоичным числом S_1 .

Рассматривается случай ассоциативной адресации, когда матрица H_1 используется в качестве функции расстановки f . В работе [3], например, функция расстановки определяется в виде

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) \bmod N_c, \quad (4)$$

где $f(\alpha) \in \{0, 1, \dots, N_c-1\}$.



Очевидно также, что соотношение (2) допускает коллизии и что коэффициент заполнения словаря

$$\eta = \frac{\pi}{N_0}, \quad (5)$$

где π - число включенных элементов, т.е. $\pi = N(\mathcal{M})$ (заметьте, что для матрицы H_1 число $N_0 = 2^{\Gamma_1}$).

Пусть $V_j(\alpha) \subset V_n$ ($j = 1, \dots, t$, где $t > 0$ - некоторое число, зависящее от \mathcal{M} и H_1) - множество тех слов α_j ($i = 1, \dots, \gamma_j$), для которых

$$\alpha_{j,i} H_1^T = S_{1,j} \quad (6)$$

Тогда

$$N(V_j(\alpha)) = \gamma_j \quad (7)$$

определяет число включений, приводящих к коллизии в смежном классе, соответствующем $S_{1,j}$ ($j = 0, \dots, 2^{\Gamma_1} - 1$).

Разрешение коллизии, в отличие от методов, рассмотренных в /3/, которые требуют, вообще говоря, большого числа операций при реализации функции вторичной расстановки, возможно введением дополнительной матрицы H_2 .

Иначе говоря, устранить коллизию возможно, рассматривая факторгруппу V_n/V , где $V \subset V_n$ - нулевое пространство пространства строк матрицы

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}; \quad (8)$$

здесь H_2 - матрица ($\Gamma_2 \times \pi$), построенная по алгоритму /5/.

Очевидно, что условие (или, что то же самое, функция) расстановки без коллизии принимает вид

$$S = \alpha H^T. \quad (9)$$

Следует заметить, что полученная таким образом система хотя и не решает проблему включения, но зато (как это показывает приведенный пример), дает возможность избегать трудностей, которые связаны с применением матрицы /5/ в качестве основной функции размещения /6/.

Как легко видеть, это объясняется тем, что для построения H_2 используется не все исходное множество $V(\alpha)$, а лишь незначительная его часть в виде некоторых подмножеств $V_j(\alpha)$, заданных условием (6).

Пусть $S(\alpha)$ - множество векторов S размерности $r = r_1 + r_2$, полученных согласно (9), для которого

$$\eta = \frac{N(S(\alpha))}{2^r}. \quad (10)$$

Упорядочив $S(\alpha)$, например, по возрастанию чисел $s \in S(\alpha)$, можно получить систему с коэффициентом заполнения примерно равным 1, к которой при функционировании возможно применение дихотомического поиска /3/.

Данный алгоритм был исследован программным путем на примере множества l - буквенных слов M , для которого $l \leq 5$, $N(M) = 700$. Рассмотрена матрица (3) с параметрами:

$$n=25, m=5, c=2, P_1(x) = 1+x^3+x^5, P_2(x) = 1+x+x^2+x^4+x^5$$

$(P_1(x), P_2(x))$ - примитивные многочлены с корнями

$\epsilon_1, \epsilon_2 \in GF(2^5)$, т.е. каждая буква записывается в ви-

де двоичного вектора размерности $m=5$, а длина слов $\alpha \in V(\alpha)$ составляет $n=25$. Матрица H_1 имеет

вид

$$H_1 = \begin{pmatrix} 10000 & 10000 & 10000 & 10000 & 10000 \\ 01000 & 01000 & 01000 & 01000 & 01000 \\ 00100 & 00100 & 00100 & 00100 & 00100 \\ 00010 & 00010 & 00010 & 00010 & 00010 \\ 00001 & 00001 & 00001 & 00001 & 00001 \\ 10000 & 10010 & 11001 & 11110 & 00110 \\ 01000 & 01001 & 01100 & 11111 & 00011 \\ 00100 & 10110 & 01111 & 10001 & 10111 \\ 00010 & 01011 & 00111 & 11000 & 11011 \\ 00001 & 00101 & 10011 & 11100 & 01101 \\ 10000 & 11100 & 11011 & 11101 & 00010 \\ 01000 & 10010 & 10110 & 00011 & 10011 \\ 00100 & 10101 & 10000 & 11100 & 11101 \\ 00010 & 01010 & 11000 & 01110 & 01101 \\ 00001 & 11001 & 10111 & 11010 & 00100 \end{pmatrix} \quad (II)$$

Для матрицы H_1 , в соответствии с (6), получаются всего четыре включения, создающих коллизии, причем каждому $S_{1,j}$ (где $j=1, \dots, 4$) соответствуют всего два слова $\alpha_{j,i} \in V(\alpha)$ из одного и того же смежного класса факторгруппы V_n/V' , где $n=25$, $V' \subset V_n$ - нулевое пространство пространства строк матрицы (II).

Имеются следующие пс. множества: $V_1(\alpha) = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}\}$;
 $V_2(\alpha) = \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$; $V_3(\alpha) = \{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$; $V_4(\alpha) = \{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$.



Двоичные записи $\alpha_{j,i}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= (10010\ 011000111101010), \\ \alpha_{1,2} &= (00100011111000100001), \\ \alpha_{2,1} &= (0101100001100011001100001), \\ \alpha_{2,2} &= (00101101001100100001), \\ \alpha_{3,1} &= (11001010010110001111), \\ \alpha_{3,2} &= (01101101000101100001), \\ \alpha_{4,1} &= (1001001011011110011), \\ \alpha_{4,2} &= (01110001100001001111). \end{aligned}$$

Подмножества $V_j(\alpha)$ соответствуют следующим парным словам из словаря M : $M_1(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}) = \{\text{слой, гора}\}$;

$$M_2(\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}) = \{\text{карта, душа}\}; \quad M_3(\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}) =$$

$$= \{\text{пило, мука}\}; \quad M_4(\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}) = \{\text{скот, небо}\}.$$

Применив алгоритм /5/ для разрешения коллизии в отдельных подмножествах $V_j(\alpha)$ получим матрицу H (8), где

$$H_2 = [10000000000000000000000001]$$

(здесь размерность S_2 равна 1 ($r_2=1$), поэтому $r=16$).

Дихотомический поиск для $S(\alpha)$ занимает примерно

$K = \log N(S(\alpha))$, шагов, т.е. $K = 10$ при оптимальном заполнении памяти машины.

При более эффективном подборе H_1 и H_2 , размерность S в соотношении (9) для данного множества M ($N(M) = 700$) могла быть и меньше, однако задача оптимизации матриц H в задаче /1/ в настоящей работе не ставилась, поэтому она не рассматривалась и при программной реализации алгоритма.



Необходимость в решении указанной задачи может возникнуть при больших $N(M)$ и связана с возможными трудностями обработки $S(\alpha)$ в оперативной памяти ЭВМ.

В заключение следует отметить, что реализация на ЭВМ алгоритма в целом обеспечивает высокое быстродействие, что особенно важно для построения систем, работающих в реальном масштабе времени.

Поступила 12.1.1986

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.П. Мегрелишвили, З.И. Мунджишвили. Об одном алгоритме организации словарей в диалоговых системах. Труды конференции по проблемам построения проблемно-ориентированных диалоговых систем. Тбилиси. 1985.
2. Д.Кнут. Искусство программирования, т.3. Сортировка и поиск. М., 1978.
3. Б.Мейер, К.Бодуэн. Методы программирования. М., 1982.
4. Э.В.Бауэр. Организация и ведение словаря в интерактивном режиме. Труды конференции по проблемам построения проблемно-ориентированных диалоговых систем. Тбилиси, 1985.
5. Р.Р.Варшамов. Математические методы повышения надежности реальных систем связи. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1964.
6. Р.П. Мегрелишвили, З.И. Мунджишвили, В.А. Тогонидзе. К задаче исправления ошибок в системах общения с ЭВМ на естественном языке. Труды ТГУ, кибернетика и прикладная математика, т.251, 1984.



ჩ. მეგრელიშვილი, ი. კლოჩკო

სპრავაზიის ასოციაციური მეთოდის დაბრუნებისას არჩევითი

დაბრუნების მეთოდი

რეზიუმე

განხილულია ეცმ-მან ბუნებრივ ენაზე ურთიერთობის რეალურ სინთეზებში არჩევითი დაბრუნების ამოცანა ასოციაციური სპრავაზიის და ძებნის ბინარული მეთოდის გამოყენების შემთხვევისათვის.

R. Megrelishvili, I. Klochko

ON THE COLLISION RESOLVING USING THE ASSOCIATION ADDRESSING METHOD

Summary

The paper deals with the problem of collision resolution by recourse to association addressing and the binary search method in natural language dialogic systems of intercourse with a digital computer.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის ორდენის წითელი რქობის მტრებთან საბრძოლო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

О ФОРМАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ И ПЛОСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ
УРАВНЕНИЯМИ В ИЗБЫТОЧНЫХ КЛАССАХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

Н.Д.Нанобашвили

С понятием формализации в чанной работе связана попытка представления некоторых графов и изображений уравнениями в избыточных классах представителей (ИКП).

Введем и уточним некоторые определения, свойства и обозначения.

1. При формализации подразумевается, что члены рассматриваемого уравнения некоммутативны относительно операции суммирования по модулю $\text{mod } m / 1/$. Это свойство представляется важным, т.к. обуславливает возможность установления порядка при построении упорядоченных графов или сетей. Все остальные свойства и особенности решений уравнений в ИКП остаются такими же, как и в $/1,2/$.

2. Степень \mathcal{I}^n не выражает обычно принятой операции примитивного итеративного умножения одинаковых объектов.

В дальнейшем, если это не будет специально оговорено, степень \mathcal{I}^n будет означать n - кратное применение некоторого оператора \mathcal{P} над переменной \mathcal{I} . При этом под

x может подразумеваться вектор или матрица, отдельный столбец или строка матрицы, последовательность состояний матрицы переходов и т.д.

Примечание: такой подход не является исключением для данной работы. Из алгебраической теории кодирования /3,4/ хорошо известен метод представления циклических кодов в виде полиномов, в которых через x обозначена фиктивная переменная, а степень x^n указывает позицию символа.

Пример № 1. В нижеприведенной матрице под x подразумевается вектор-столбец, а сама матрица отображает схему преобразования этой переменной x .

Матрица I.

	2	2	3	0	1	3	1	0	0	1	0	1	1	1
1	3	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	0	1
1	0	1	1	1	2	2	3	0	1	3	1	0	0	1
2	2	3	0	1	3	1	0	0	1	0	1	1	1	2
x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	

Здесь каждый последующий вектор-столбец (размера 3) образуется в результате поэлементного суммирования с последним элементом предшествующего вектора. Период цикла схемы преобразования $T=14$. Исходным вектором считается вектор, элементы которого образуют монотонную последовательность /1/. Такое состояние вектора обозначается переменной x в первой степени.

Определение 1. Последовательность преобразований перемен-

ной x , пробежавшей n циклов от начального до некоторого замыкающего конечного состояния, называется основной схемой преобразования степени x^n .

В предыдущем примере приведенная схема преобразования характеризуется максимальной степенью x^{14} , где переменной x соответствует начальное состояние вектор-столбца, равное

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Определение 2. Упрощенная адекватная схема, повторяющая некоторые существенные признаки схемы преобразований, называется ее следом.

Пример № 2. Если умножить матрицу 1 из примера № 1 на число "2" по $\text{mod } 4$, получим матрицу, где каждый столбец будет двухкомпонентным вектором, состоящим из нулей и двоек (рис.2).

Матрица 2.

2	2	2	0	0	2	0	2	2	2	0	0	2	0	2
2	0	2	2	2	0	0	2	0	2	2	2	0	0	2
0	0	2	0	2	2	2	0	0	2	0	2	2	2	0

Свойство А. В матрице 2 число "2" отображает нечетное, а ноль - четное число, расположенное соответственно на матрице 1. Наличие такой закономерности (т.е. "чет-нечет") позволяет из матрицы 2 однозначно восстановить исходную матрицу 1. Это свойство матрицы 2 с точки зрения восстановления можно считать существенным. Следовательно, матрицу 2 можно считать следом матрицы 1.

Определение 3. Если след на нулевом шаге цикла отображает с точностью до изоморфизма основную схему преобразования, то такой след будем называть следом первой степени (\mathcal{X}).

Рассмотренные в /1,2/ уравнения первой степени в ИКП характеризовались следами первой степени. В результате однозначно определялись решения уравнений, представляющие монотонные числовые последовательности.

Определение 4. Простыми или элементарными будем называть графы и сети, если они могут быть представлены уравнениями первой степени в ИКП.

Согласно определению 4 простые графы или сети должны обладать следующими свойствами.

Γ^0 . Смежные пары вершин на дуге частично упорядочены.

Примечание: согласно /1/ решением уравнений первой степени в ИКП являются неубывающие монотонные последовательности

$$V_{j,i} = v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{ji}, \dots, v_{jn}, \quad (1)$$

$i = \overline{1, n}.$

Считая любую $v_{j,i}$ -тую компоненту вершиной графа, будем иметь

$$v_{j,i} \geq v_{j,i+1}. \quad (2)$$

Однако (2) не исключает наличия строгой частичной упорядоченности

$$v_{j,i} > v_{j,i+1}, \quad (3)$$

хотя при этом нет особой необходимости слишком тщательно различать понятия частичной или строгой упорядоченности. Единственное различие между соответствующими графами состоит в том, что на первом есть петля, а на втором нет.

2°. Сети или графы, представленные в ИКП уравнениями первой степени, являются ориентированными.

Пример № 3. Пусть в ИКП задано уравнение

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 360321 \pmod{8},$$

решениями которого являются:

$$x_1 = 122345; \quad x_2 = 246024; \quad x_3 = 404000.$$

В классе монотонных последовательностей $\{V_{j,i}\}$ решениями этого уравнения будут

$$v_1 = x_1 = 122345; \quad v_2 = \frac{x_2}{2} = 123456; \quad v_3 = \frac{x_3}{4} = 123444.$$

На основе этих двух решений в классах $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$ строятся два отдельных графа (рис. 1 и 2).

Коэффициенты перед переменными в данном случае означают номера вершин, откуда берут начало подграфы, определяемые соответствующими переменными. Так, например, член уравнения $3x_2$ означает, что подграф, соответствующий x_2 берет начало из вершины с номером 3.

Каждый подграф в обоих классах характеризуется следующими свойствами.



3°. Подграфы являются ориентированными.

4°. Подграфы являются непрерывными.

Для того чтобы указать, в каком классе решений, в $\{x_i\}$ или $\{V_i\}$, строятся графы, можно это предварительно оговорить определенным образом. Однако к этому вопросу можно подойти шире и указать возможность т.н. смешанного решения. Смешанные решения позволяют формализовать более широкий класс направленных графов.

А для того, чтобы указать, в каких классах требуется получить решение, в правой части уравнений в скобках можно приписать соответствующие метки. Так, например, для уравнения

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 360321 \quad (4v_1; v_2; 2v_3)$$

в правой части указано, что первоначально следует получить решение в классе $\{v_i\}$, а затем эти решения соответственно умножить на (4,1,2), и только после этого строить граф. Такой подход позволяет формализовать не только достаточно сложные конфигурации направленных графов, но зачастую и не совсем удобные для аналитического описания плоские изображения.

Пример 4. На рис.4 изображена плоская фигура, напоминающая маску человеческого лица, с соответствующими разрезами глаз, рта и носа. Здесь следует отметить, что для ее примитивного изображения можно использовать 35 точек, для чего необходимо 78 чисел в системе координат типа XOY .

Однако это же самое изображение можно представить более компактно следующими двумя уравнениями в ИКП:



$$\frac{1}{3}x_1 + 5x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 460206401274151 \quad (v_1, v_2, v_3),$$

$$\frac{3}{5}x_4 + \frac{7}{5}x_5 + \frac{7}{2}x_6 = 44402135.$$

Здесь коэффициенты выражают начальные координаты для x_1 ; x_2 ; x_3 и .д. Так, например, коэффициент $\frac{5}{3}$ соответствует координатам точки (3,5), откуда берет начало последовательность x_3 .

Примечание: Переменные x_1, \dots, x_6 отображают отдельные кривые или части контуров изображения.

В данном примере x_1 соответствует контуру AB , образованному последовательностью точек $v_1 = 111123455561$, x_2 соответствует контуру CB , образованному точками $v_2 = 12345666666666$. Знак минус перед коэффициентом переменной x_3 означает обратное направление последовательности $v_3 = 123456$. Говоря иначе, контур $CA \rightarrow x_3$ является зеркальным отражением положительного направления последовательности v_3 относительно оси OT .

В примере переменные x_1, x_2, x_3 охватывают внешний контур $ABCA$ плоского изображения на рис.4. Решения второго уравнения $v_4 = 111$; $v_5 = 1234$ и $v_6 = 11122333$ соответственно отображают линии контуров "рта", "носа" и "глаз". При этом для второго уравнения решение v_4, v_5, v_6 корректируется в классе $(0, 0, 4)$, т.е. имеем $x_6 = 4v_6 = 4 \cdot (11122333) = 44400444 \pmod{8}$.

Здесь цифры "00" соответствуют разрыву между линиями контура "глаз".

Примечание: Целесообразность выбора решений в отдельных классах определяется конкретными задачами и вопросами их практического применения. Укажем некоторые из возможных вариантов.

а) Если задача заключается в аппроксимации или представлении непрерывных кривых с разрывами первого рода (в том числе диаграмм, графиков и т.д.), то решения целесообразно искать в классе $\{V_{j,i}\}$.

б) Для кривых с разрывами второго рода решения целесообразно искать одновременно в классах $\{v_{j,i}; x_{j,i}\}$.

в) Если задача состоит в представлении вида уравнения, отображенного на дисплее и телевизионном изображении с разрывами обоих видов, то решения уравнений целесообразней представить в классе $\{x_{j,i}\}$.

Однако в вопросе выбора решений не может существовать достаточно сильных ограничений, что подтверждается примером № 4.

Рассмотрим теперь вопрос формализации непростых, т.е. неэлементарных графов.

Определение: Графы или сети являются непростыми, если степень их следа $n > 1$.

Из этого определения вытекает, что непростые графы или сети должны описываться уравнениями n -ой степени, $n > 1$:

На основе свойства А, а также теоретических предпосылок из /I/ вытекает следующее

Свойство В. Если x_1 и т.д. x_n являются конечными монотонными последовательностями, то тогда имеет место следующее соотношение:



$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^k = \\ = (a_1 x_1)^k + (a_2 x_2)^k + \dots + (a_n x_n)^k; \pmod{m},$$

где $k \neq 0$ и k - целое положительное число, а

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = m,$$

где m - модуль.

Пример 5. Рассмотрим уравнение 4-го порядка:

$$7x_1^4 + x_2 - 7x_3 = 222423145. \quad (1)$$

Примечание: уравнение (1) является нормализованным, т.е. отсчет последовательности производится слева от первого, отличного от нуля числа.

Умножим (1) на $\frac{\text{mod}}{2} = 4$, получим $7x_1 = 000004404$.
Т.к. уравнение нормализовано, получим $x_1 = 4404$.

Поскольку, x_1 является следом, то используя оператор обратного хода, осуществим преобразование x_1 справа налево по схеме

$$4x_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 4 & 0 & 4 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Здесь $4x_1 = 4044$.

откуда $v_1 = x_1 = 1233$.

Основная схема преобразования будет иметь следующий вид:

$$v_1 = x_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 3 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array}$$

где $x^2 = 4614$; $x^3 = 0673$; $x^4 = 3103$.

Графы, отображающие изменение значений x , x^2 , x^3 и x^4 , представлены на рис.3.

Примечание. Если ввести фактор времени, то все четыре графа можно рассмотреть как динамику изменения переменной x в течение четырех тактов.

Переменные x_2 и x_3 определяются обычным образом и равны

$$x_2 = 2v_2 = 444044400,$$

откуда $v_2 = 111233344$,

и $x_3 = 2v_3 = 0000404440$,

откуда $v_3 = 123334$

Пример № 6. В литературе с точки зрения наглядности довольно часто рассматривается представленный на рис.5 ориентированный граф.

В работе /5,6/ основным и, вероятно, единственным аппаратом для аналитического описания этого графа используется матричное представление, имеющее следующую конструкцию:

16. Труды, т.268.



$$S \begin{pmatrix} (s,x) & (s,y) & (x,y) & (y,x) & (x,t) & (y,t) \\ I & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & I & -I & I & 0 \\ 0 & -I & -I & I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & -I \end{pmatrix}$$

По предположению авторов /5/ в этой матрице инциденции "узлы-дуги" заключена вся информация о структуре данной сети.

Однако, даже если не учитывать неуклюжесть и громоздкость такого матричного представления, матрицы инциденции дают в основном поверхностную, "статическую" информацию описательного характера, что в большинстве случаев не имеет большой цены и практической пользы. Иначе говоря, при решении прикладных задач зачастую гораздо важнее иметь информацию о последовательности маршрутов и циклов, т.е. знать динамику движения на графе.

Представим теперь этот граф уравнениями в ИКП. Предварительно буквенные обозначения вершин заменим цифровыми:

$$s \rightarrow 0; \quad x \rightarrow 2; \quad y \rightarrow 1; \quad t \rightarrow 3.$$

Соответствующее уравнение в ИКП пишется по двум маршрутам:

$$v_2 = 0123 \quad \text{и} \quad v_1^4 = 0213 \quad . \quad \text{Если обход начать с маршрута}$$

$v_2 = 0123$, тогда уравнение графа будет иметь вид:

$$2x_1^4 + x_2 = 0101 \pmod{4}.$$

Решение. $2x_2 = 0202, \quad v_2 = 0123$, поскольку опера



получается решение

$$v_1 = \tau_2 = 0123,$$

то считается, что движение по графу началось с маршрута

$$v_2 = 0123.$$

Далее имеем

$$2x_1^4 = 0101 - \tau_2 = 0101 - 0123 = 0022.$$

Зная конечное состояние столбца-следа $2x_1^4 = 0022$, находим его исходное состояние по следующей схеме преобразования следа "справа-налево":

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 \leftarrow & 0 \leftarrow & 0 \leftarrow & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline & & & \end{array}$$

$$\tau_1 \leftarrow x_1^2 \leftarrow x_1^3 \leftarrow x_1^4$$

где $\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow x_1 = 2v_1$, откуда $v_2 = 1112$

Проверка: по следу оставим основную схему преобразования для переменной τ_1 в классе $\{v_1\}$

$$v_1 = \begin{array}{cccc} \hline 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 \rightarrow & 0 \rightarrow & 0 \rightarrow & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}$$

откуда получается, что

$$v_1^4 = 0213$$

Примечание: Если обход графа начинается с маршрута $v_1^4 = 0213$, то тогда уравнение графа (рис.5) примет следую-



щий вид:

$$x_1^4 + 2x_2 = 0011 \pmod{4}.$$

Эта способность изменять значения коэффициентов и свободно-го члена, в зависимости от направления маршрута или исходной точки движения, является полезной особенностью при моделировании соответствующих объектов и процессов уравнениями в ИКП.

Формализация графов возможна также уравнениями, представленными только в первой степени. Очевидно, что реализация такой возможности должна быть компромиссной. Это выражается в необходимости увеличения размерностей векторов, а также в увеличении числового значения модуля.

Пусть задано уравнение в ИКП:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n = A \pmod{2^n},$$

где переменные y_1, y_2, \dots, y_n являются числовыми функциями, представленными в ИКП. Если принять

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_1^{(1)} + 4x_1^{(2)} + \dots + 2^{n-1} \cdot x_1^{(n)} \pmod{2^n} \\ y_2 &= 2(x_2 + 2x_2^{(1)} + 4x_2^{(2)} + \dots + 2^{n-1} x_2^{(n)}) \pmod{2^n} \\ \dots & \\ y_n &= \frac{\text{mod } m}{2^n} (x_n + 2x_n^{(1)} + 4x_n^{(2)} + \dots + 2^{n-1} x_n^{(n)}) \pmod{2^n} \end{aligned} \quad (2)$$



то тогда переменные y_1, y_2, \dots, y_n , согласно (12) из [27], будут выражать левую часть соответствующего сжатого уравнения.

Имеет место следующая

Теорема: схему программы можно представить уравнениями в ИКП.

Известно [7], что любую схему программы можно построить в виде граф-схемы. С другой стороны, уравнениями в ИКП можно представить направленные граф-схемы, что и доказывает теорему.

Добавление: Одним из интересных вопросов оптимизации уравнений в ИКП является замена переменных y_1, y_2, \dots, y_n одним неизвестным со степенью. Очевидно, что тогда уравнения в ИКП будут преобразованы в одно полиномиальное уравнение.

Поступила 21.1.1986

Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Д.Нанобашвили. Об одном улучшенном варианте схемы сжатия информации, Труды ТГУ, 224, 1981.
2. Н.Д.Нанобашвили. К вопросу информационного подхода при решении линейных уравнений в избыточных классах представителей. Труды ТГУ, 224, 1981.
3. Э.Берлекэмп. Алгебраическая теория кодирования, М., 1975.
4. Г.Биргкоф. Современная прикладная алгебра, М., 1976.
5. Л.Форд, Д.Фалкерсон. Потоки в сетях, М., 1966.
6. К.Берж. Теория графов и ее применение, М., 1962.
7. Р.Каут. Искусство программирования, М., 1976.



მ. ნანობაშვილი

გოგონათი ძრავებისა და ბრწყინი გამოსახულებათა მათემატიკური
ფორმალიზაციის ნარკვევები

რეზიუმე

განხილულია აღებრული ფიგურის განფორმების მიმართული გრაფი-
კისა და ბრწყინი გამოსახულებათა ფორმალიზაციის ფარგლებში.

განხილული განფორმების არაკომუტაციური არიან ნებისა და
აბრუნების სვალსამართლის. ეს სვალსა საშუალებას იძლევა ამონახ-
სებებზე მიღებული იქნას მონესრისებრი რიცხვითა მანძილურობები.

შესაძლებელია მიმართული გრაფები გამოსახულები იქნან აღებ-
რული ფიგურის განფორმების, რამდენაე კომუტაციურობისა და სვალსუფალი
ნების მნიშვნელობები რამდენაე გრაფის მნიშვნის მარკვე-
ბზე და მნიშვნის რამდენის სახის ნების.

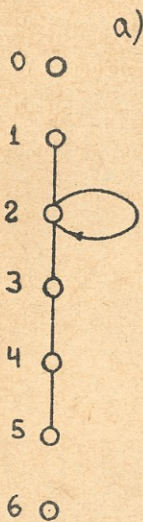
ნანობაშვილი განხილული ფორმალიზაციის მეთოდი საშუალებას იძლე-
ვა გამოვლინო მანქანაში შესაფარე რიცხვითა მანძილურობები, აღ-
გონისობები და პრეკრამების სტრუქტურა სვალსამართლები ნარკვევების
იქნას აღებრული ფიგურის კომპლექსი სახეში ნარკვევების განფორ-
მების.

N. Nanobashvili

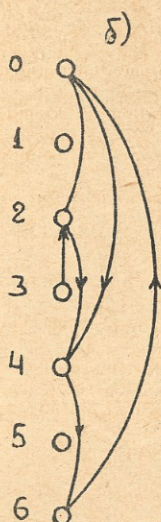
ON THE FORMALIZATION OF SOME GRAPHS AND FLAT
IMAGES PICTURES BY EQUATIONS IN REDUNDENCY
CLASSES OF REPRESENTATIVES

Summary

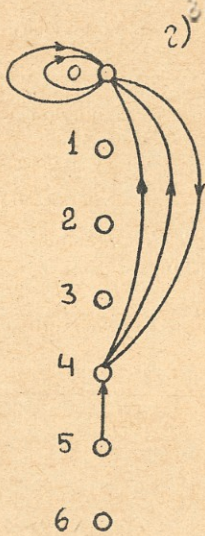
Representative graphs and images in the form of algebraic
equations are considered.



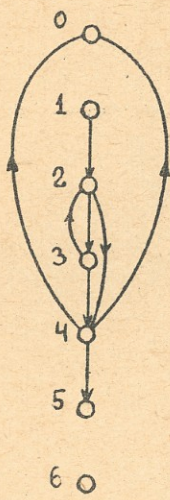
$$X_1 = 122345$$



$$X_2 = 24604$$

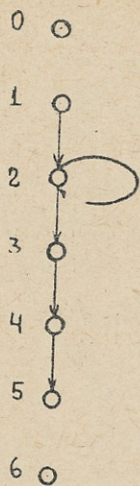


$$X_3 = 404000$$

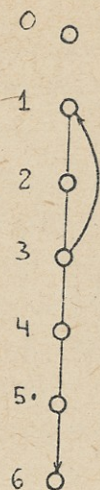


$$X_1 + 3X_2 + 5X_3 = D$$

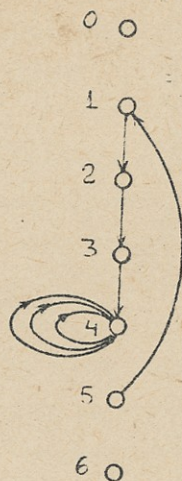
Рис. I.



$U_1 = 122345$



$U_2 = 123456$



$U_3 = 123444$

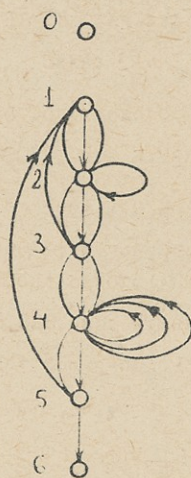


Рис. 2.

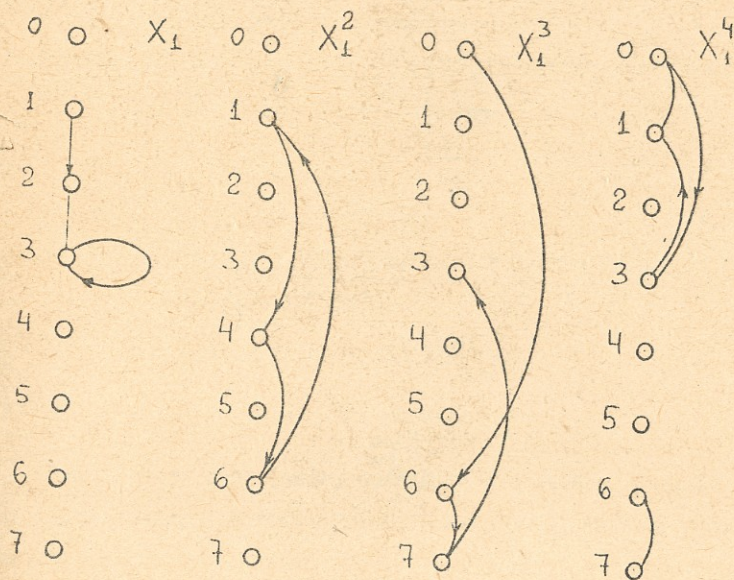


Рис. 3.



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ՑԻՒՄԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ՄԱՏԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆ
ՍԵՄԻՆԱՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆ

$$\frac{1}{3}X_1 + 5X_2 - \frac{5}{3}X_3 = D_1$$

$$\frac{3}{5}X_4 + \frac{7}{5}X_5 + \frac{7}{2}X_6 = D_2$$

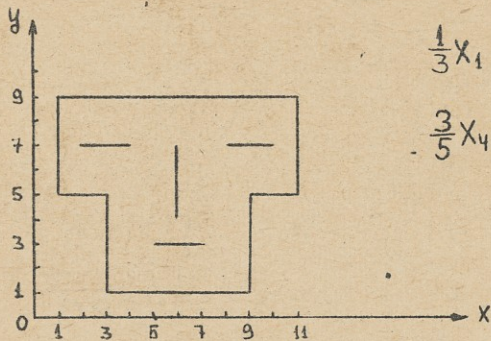


Рис. 4.

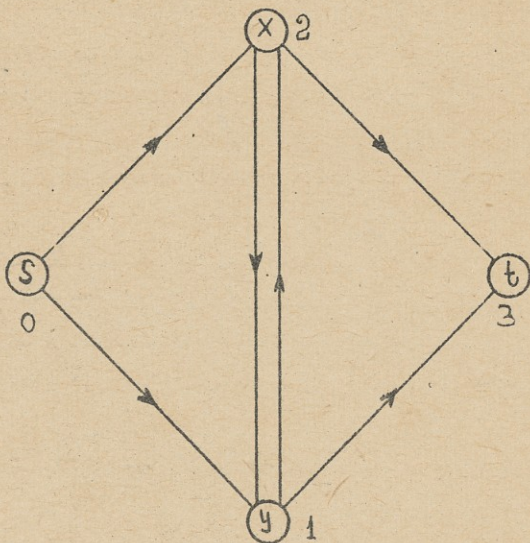


Рис. 5.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის მხრობის ნიშნის ორდენის მფრებლისა და სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

268, 1986

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ
СИСТЕМЫ НИР ВУЗА

(на примере Тбилисгосуниверситета)

Т.Г.Николаишвили, Р.У.Хаиндрава

Деятельность вуза развивается в пяти основных направле-
ниях, представляющих собой сравнительно независимые комплек-
сы функционально-организационного характера:

- подготовка высококвалифицированных специалистов для
народного хозяйства (учебный комплекс);
- научные исследования и научно-конструкторские работы
и их внедрение в народное хозяйство (научный комплекс);
- подготовка научных кадров высшей квалификации посред-
ством аспирантуры и системы соискателей (комплекс аспиран-
туры);
- переподготовка и повышение квалификации специалистов
(комплекс повышения квалификации);
- обеспечение деятельности вуза (обеспечивающий компле-
кс).

Указанные комплексы находятся в тесной организационной,
функциональной и информационной связи (рис.1).

Специфика вуза, как социально-экономической системы со сложной организацией и многоаспектной деятельностью, поставила ряд проблем организации и управления деятельностью ее различных подразделений /1/.

Как и в других областях народного хозяйства, так и в области управления вузом существенное повышение качества и эффективности ее функционирования может быть достигнуто путем создания автоматизированной системы управления (АСУ), основной задачей которой является оперативное информационное обеспечение руководства и других органов управления.

Одной из основных подсистем АСУ вуза является автоматизированная информационная система НИР, предназначенная для оперативного управления процессом планирования, выполнения, учета и контроля НИР и основанная на автоматизированной переработке соответствующей информации.

Нами было проведено предварительное обследование существующей системы управления и информационной системы научно-исследовательской части Тбилисского государственного университета (НИЧ ТГУ).

В результате обследования были выявлены следующие характеристики.

I Система НИР ТГУ является сложной системой. Научные работы ведутся на 138 кафедрах, в 2-х НИИ, 24 проблемных, научно-исследовательских и отраслевых лабораториях, 4-х СКБ. В научных исследованиях занято свыше 3000 сотрудников, аспирантов и студентов, из них около 150 докторов и 760 кандидатов наук. По данным на 1986 год в ТГУ выполняются 65 хозяйственных и 472 государственных НИР - фундаментального, при-

кового и прикладного характера. Значительная часть научных работ ведется по координационным направлениям ГКНТ, Минвуза и Академий наук СССР и ССРС.

Общий объем НИР на 1985 г. составил 7 млн. руб. Экономический эффект от внедрения НИР в народное хозяйство в 1981-1985 г. составил 28 млн. руб.

2. В системе НИР выделяется 6 основных (крупных) функций управления, соответствующих следующим функциональным подсистемам: планирование, регулирование, учет, контроль, анализ, прогнозирование. В каждой из подсистем выделяется несколько комплексов задач, требующих выработки одной или нескольких отчетных форм.

В организационном плане целесообразно выделение следующих подсистем: "хоздоговорные НИР", "госбюджетные НИР", "научные кадры", "патентно-лицензионные работы", "научно-техническая информация", "издательская деятельность", "аспирантура", "НИРС".

3. Основными потребителями информации о ходе выполнения НИР являются: в рамках ТГУ - ректорат, аппарат НИЧ, научные советы, деканаты, партийные, профсоюзные и комсомольские организации; вне ТГУ - Минвуз, ГКНТ и Академия Наук СССР, ЦСУ СССР, партийные, профсоюзные и комсомольские организации СССР и г.Тбилиси.

4. Подсистема "Управление НИР ТГУ" характеризуется большой информационной интегрированностью с другими подсистемами (комплексами) ТГУ.

5. Большая часть информации (первичных документов) комплекса НИР - нестандартизированная, что затрудняет их обра-

ботку и вызывает дублирование реквизитов. В системе используется более 70 документов: плановых, отчетных, оперативных. Средний объем документа более 25-ти реквизитов (подсистема "хоздоговорные и госбюджетные НИР"). Большинство реквизитов имеет нечисловое значение. В процессе обработки информации преобладают невычислительные процедуры обработки (упорядочение, группировка, выборка).

6. Информационная система комплекса НИР предусматривает обработку как стандартных задач (получения стандартных выходных форм), так и нестандартных, формирование ответов по различным, заранее не предусмотренным запросам. Основными потребителями информационной системы являются конечные пользователи (непрограммисты).

7. Основная часть хранимой в подсистеме информации является условно постоянной. Массивы данных не имеют функциональной и алгоритмической направленности. Их можно рассматривать как ресурсы коллективного пользования.

8. Пользователи информации о НИР ТГУ имеют разные профили. Часто существенно отличаются запросы пользователей одного профиля. Большинство запросов требует диалогового режима с полной документацией выходных результатов.

Информационное обеспечение действующей в настоящее время системы управления НИР ТГУ имеет существенные недостатки, затрудняющие процесс принятия управленческих решений. Прежде всего следует отметить практическую невозможность решения нестандартных информационных задач и получения оперативных данных. Затруднен процесс получения выходных документов в различных разрезах и формах. Часто происходит дублирование

работ по обработке и хранению информации. Указанные недостатки в конечном счете затрудняют процесс управления НИР и снижают эффективность оперативных воздействий.

Устранение вышеуказанных недостатков процесса управления системой НИР возможно лишь созданием автоматизированной информационной системы (АИС). Перед разработкой любой АИС необходимо выяснение функций, назначения, типа, класса и определение границ будущей системы. В настоящее время в специальной литературе принято несколько толкований определения сущности АИС /2/. По нашему мнению, наиболее приемлемым определением АИС НИР ТГУ является ее определение как системы типа автоматизированного банка данных (АБД), существующего в рамках АСУ ТГУ. При создании систем типа АБД центральное место занимают вопросы проектирования баз данных и выбора систем управления базами данных (СУБД).

АИС НИР ТГУ должна проектироваться как независимая система, реализующая задачи в пределах управления процессом НИР, с одной стороны, и как локальная система, имеющая тесные информационные взаимосвязи с другими подсистемами АСУ ТГУ, - с другой стороны. Соблюдение указанных требований обуславливает особый подход к процессу создания БД системы.

От рационализации процесса проектирования БД существенно зависит эффективность АИС в целом. Современная концепция проектирования БД основывается на применении существующих промышленно-эксплуатируемых СУБД. В настоящее время еще не определена единая методика проектирования БД. Анализ существующих подходов /3,4,5/ создания БД с учетом конкретных особенностей системы НИР ТГУ позволяют представить процесс



проектирования на определенном уровне формализации. Под формализацией процесса проектирования здесь подразумевается прежде всего разбиение процесса на основные этапы и работы и установление между ними функциональных связей и связей следования. На рис. 2 показана граф-схема процесса проектирования БД, отражающая процесс создания БД АИС НИР ТГУ. Здесь цифрами обозначены:

- 1 - Определение предметной области;
- 2 - Процесс анализа данных;
- 3 - Требования, предъявленные к данным;
- 4 - Выделение регулярных (стандартных) задач;
- 5 - Выделение нерегулярных (нестандартных) задач;
- 6 - Процесс разработки интерфейса пользователей;
- 7 - Формы ввода-вывода;
- 8 - Процесс анализа функций управления;
- 9 - Общая абстрактная модель БД;
- 10 - Процесс обоснования информационно-логической модели;
- 11 - Уточненная информационно-логическая модель;
- 12 - Оценка совокупности данных;
- 13 - Функциональные абстрактные подмодели данных;
- 14 - Процесс выбора СУБД;
- 15 - Технические условия, предъявленные СУБД;
- 16 - Процесс разработки прикладных программ;
- 17 - Условия и ограничения, накладываемые на подсистемы конкретной СУБД;
- 18 - Процесс проектирования подсистем на логическом уровне;
- 19 - Процесс проектирования БД на логическом уровне;
- 20 - Использование методов доступа к данным;



- 21 - Описание схемы и подсхем на языке СУБД;
- 22 - Процесс проектирования физической модели БД;
- 23 - Технические условия, учитываемые при проектировании физической модели БД;
- 24 - Имитация работы базы на реальных данных;
- 25 - Оценка параметров физической модели;
- 26 - Уточненная физическая модель данных.

Процесс проектирования БД является длительным и трудоемким процессом. В этом процессе выделяется этап разработки логической структуры БД. Логическая структура БД отражает структуру базы с точки зрения внешних пользователей. Разработка и установление оптимальной логической структуры БД способствует упрощению процесса общения пользователей с БД, уменьшению времени доступа к данным и, тем самым, улучшению ряда характеристик будущей АИС.

С целью выявления основных предпосылок для создания логической модели БД АИС НИР было проведено предварительно параметрическое описание предметной области. Это описание включает: перечень входных и выходных документов, их реквизитный состав, форматы реквизитов, объемы информации, частоты возникновения входных и выходных показателей, алгоритмические связи показателей, удельные веса регламентированных и случайных запросов, режимы связи пользователей с БД.

Выявилось, что существование многочисленных, в том числе и транзитных функциональных связей между реквизитами, затрудняет процесс выделения основных информационных объектов предметной области. К тому же эти связи имеют различный характер для двух основных типов задач предметной области.



Для регламентированных задач — формирования стандартных отчетов — функциональные связи отражаются на сравнительно низком уровне информационных единиц. Здесь преобладают транзитные двойные и тройные связи. Для случайных задач типа "запрос-ответ" функциональные связи отражаются в основном на уровне показателей. Удельный вес транзитных связей сравнительно мал.

При таких условиях процесс построения концептуальной и затем логической модели БД необходимо провести в два этапа: отдельно для регламентированных и случайных задач. При этом концептуальная модель регламентированных задач легче всего составляется по методике, предложенной Ш.Атре /4/ и предусматривающей доведение отношений к третьей нормальной форме еще до составления концептуальной схемы. Концептуальную же модель БД для случайных задач достаточно просто сконструировать методом, предложенным В.В.Бойко и В.М.Савинковым /5/. Окончательная информационная модель БД получается путем стыковки полученных концептуальных моделей и последующей ее несложной обработки.

В результате анализа инфологической модели устанавливается структура отображения информационных связей предметной области в одну из "классических" структур: иерархическую, реляционную или сетевую. В дальнейшем происходит выбор и обоснование конкретной СУБД.

Единой, общепринятой методики выбора СУБД для будущей АИС в настоящее время не существует. Для этой цели, с некоторой доработкой, можно успешно применять известные методы параметрического описания общих пакетов прикладных программ.



Нами был модифицирован один из таких методов и применен для выбора конкретной СУБД. В результате предварительного анализа выяснилось, что наиболее приемлемым для АИС НИР ТТУ является СУБД ИНЭС, которая имеет возможность обработки больших массивов данных, как для информационно-логических, так и вычислительных задач.

Поступила 30.1.1986

Проблемная лаборатория
физической кибернетики и
кафедра организации механизированной обработки экономической информации

ЛИТЕРАТУРА

1. Структура управления научной деятельности в вузах. Обзор. Серия "Управление, экономика и прогнозирование высшей школы". М., НИИВШ, 1977.
2. С.А.Жуйков. О проектировании баз данных АСУ. В кн.: Проблемные вопросы конструирования АСУ. М., МЭШ, 32-42, 1980.
3. Т.Тиори, Дж.Фрай. Проектирование структур баз данных. Кн.1, М., Мир, 1985.
4. Ш.А. [?]. Структурный подход к организации баз данных. М.; Финансы и статистика, 1983.
5. В.В.Бойко, В.М.Савинков. Проектирование информационной базы автоматизированной системы на основе СУБД. М., Финансы и статистика, 1982.



თ. ნიკოლაიშვილი, რ. ხაინდრავა

უმაჯაღესი საჩუქის ავტომატიზაცია საინფორმაციო

სისტემის შექმნის საკითხები

რეზიუმე

მსუ სამეცნიერო-კვლევითი ნაწილის მასალები ანალიზის შედეგად დატვირთული სამეცნიერო-კვლევითი სადოკუმენტო მარტვის ინფორმაციული უზრუნველყოფის ნაკლებანეშანი. მათი აღმოფხვრა შესაძლებელია მხოლოდ ავტომატიზებული საინფორმაციო სისტემების (ასს) გამოყენებით. მსუ სამეცნიერო-კვლევითი დოკუმენტო მარტვის ასს უნდა დაეყრდნოს ინფორმირებული ინფორმაცია ბაზას. ამჟამად არ არის ჩამოყალიბებული ინფორმაცია ბაზის დაპროექტების ურთიანი ფუნქციონირება. მსუ სამეცნიერო კვლევების სფეროს თავისებურებათა გათვალისწინებით შეიმუშავებულია ინფორმაცია ბაზის დაპროექტების პროცესის სრულყოფის გზები.

T.Nikolaishvili, R.Khaindrava

TOWARDS THE CREATION OF AN AUTOMATED INFORMATION SYSTEM AT A HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTIONS

Summary

An analysis of the materials of the Scientific Research Department of Tbilisi State University (TSU) has revealed shortcomings in the information provision management of research work. The situation can be corrected only through the use of automated information systems (AIS). The AIS of the management of research work at the TSU should be based on an integrated data bank. At present there is no unitary technology of designing a data bank. Taking into account the specificity of scientific research at the TSU, ways are suggested for perfecting the process of data bank designing.

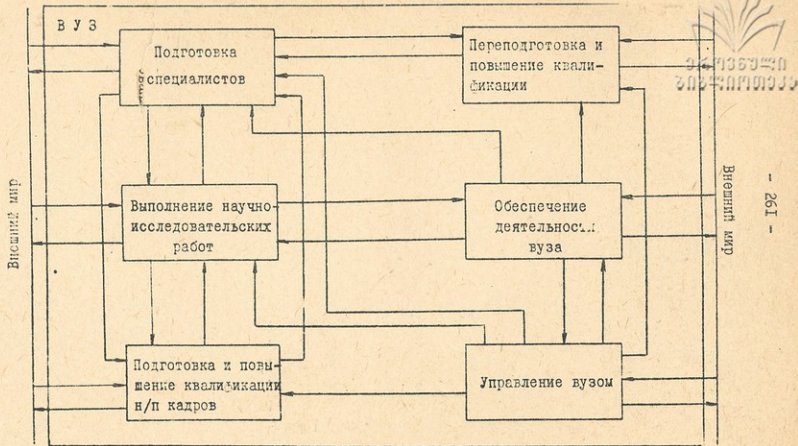


Рис. I. Модель взаимодействия основных комплексов вуза

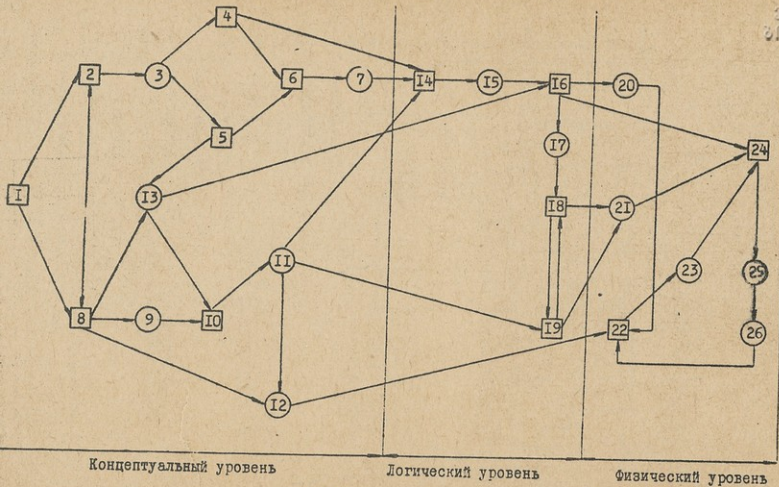


Рис.2. Процесс проектирования БД



1. Р.Л.Хомерики, К.Е.Гогичайшвили. Эксперимент по изучению памяти при обучении математике.....	5
2. Д.А.Эдиберидзе. Разработка методов решения одно-маршрутной задачи календарного планирования.....	18
3. М.Т.Цуцунава. Об одной системе нелинейных интегральных уравнений.....	19
4. Н.Д.Нанобашвили. О коррекции коэффициентов сжатого уравнения в избыточных классах представителей.....	45
5. Г.Г.Мамулашвили. Кибернетический подход в исследованиях физиологии устойчивости организма растения..	54
6. Н.Ш.Джикия. Об исследовании числа шагов в цикле для одного алгоритма сжатия дискретной информации.....	68
7. М.И.Шпишгин, Н.Б.Лавренчук. Метод вероятностно-статистического моделирования и структуризации динамической системы.....	81
8. В.И.Вашакидзе, И.С.Гвинерия, Г.В.Меладзе, С.А.Размадзе. О моделировании токсикокинетики комплекса препаратов.....	106
9. З.И.Кочладзе. Концептуальная деловая игра "ТЕМП"...	122
10. Т.Г.Кокочашвили, Т.П.Цалосани, Г.Ш.Бершвили. Исследование законов распределения лексических единиц в грузинском научно-техническом тексте по физике.....	135
11. Т.Г. Кокочашвили, Т.П.Цалосани, Г.Ш.Бершвили. Частотный словарь грузинской научно-технической лексики (физика - квантовая механика, молекулярная физика).....	145



12. А.В.Корнеева. Кластерный анализ признаков на базе нетрадиционных процедур кластеризации.....	157
13. А.В.Корнеева, К.М.Лианозов, Н.В.Пiotровская. Разработка программного обеспечения для концептуальных систем представления знаний.....	168
14. Н.В.Бокучава. О некоторых вопросах информационной статистики.....	182
15. А.Ш.Лапачава, Э.Н.Хведелидзе. Об одной задаче для уравнений параболического типа с неклассическим нелинейным краевым условием.....	200
16. Ю.В.Филипашвили. К проблеме измерения установки в психологии установки.....	210
17. Р.П.Мегрелишвили, И.Р.Ключко. К разрешению коллизии при использовании метода ассоциативной адресации.....	223
18. Н.Л.Нанобашвили. О формализации некоторых графов и плоских изображений уравнениями в избыточных классах представителей.....	232
19. Т.Г.Николаишвили, Р.У.Хаиндрава. Вопросы построения автоматизированной информационной системы НИР ВУЗА (на примере Тбилгосуниверситета).....	251

მ ი ნ ა ა რ ს ი



რახობეზი, კოტეჯიანი მშენებელი. მათემატიკის სწავლების მეთოდ-
 ცესში მუხსიერების შესწავლის ექსპერიმენტი 9

9. ვედიბერიძე. კარენიარული დატვირთვის ერთმარტრუთიანი ამო-
 ცანის ამოხსნის მეთოდი 10

3. მ. მუხრანაძე. არაბრფივი ინტეგრალურ განყოფილება ერთი სის-
 ფრის შესახებ 44

4. ნ. ნანობაძე. ფარბ კლასებში შეკრბმული განყოფილების კო-
 ფიციენტთა კორექციის შესახებ 53

5. გ. მამულაძე. კობრნეფიკული მიტომა მცენარის მრგანიბ-
 მის ფიზიოლოგიური განბლეების კვლევაში 65

6. ნ. აქოია. ციკლი ბიჯების რიცხვის გამოკვლევის შესახებ
 ინსტრუქტიული ინფორმაციის შეკრბმვის ერთი სუენისათვის . . . 74

7. შ. შიბინი, ნ. ლავრენკო. ბინამიკური სისფრის მიოეიორბი-
 სა და სფრუქტურიბაციის აღბათრ-სფაფისფიკური მეთოდი . . 104

8. ვ. ვამაკიძე, ი. ბენინი, კ. მელაძე, ს. რამბაძე. პრეპარა-
 ფების კოლექციის ფიქსირფიკაციის მიოეიორბის შესახებ 118

9. ბ. ბერიძე. კონტრფუალური საფრეი თამაში "ფრეი" . . . 131

10. ფ. კობიაძე, მ. ნილოსანი, ბ. ბერიძე. ლექსიკური
 ერთელების განბნილების კანონების შესწავლა ქარბული
 საბეზნიერო-ფრეიკური ფრეიფრისათვის ფიზიკაში . . . 139

11. ფ. კობიაძე, მ. ნილოსანი, ბ. ბერიძე. ქარბული სა-
 ბეზნიერო-ფრეიკური ლექსიკის სიბირიბი ლექსიკური (ფი-
 ბიკა-ფრეიფრეი ბეფანიკა, მიოეიორბი ფიზიკა) . . . 156

12. ა. კონიევა. ნიშანი-ფრისებბა კლასფრეიკული ანალიბი კლას-
 ფრეიბაციის არაფრეიბიკური პრეფერბბა ბაბბე 167

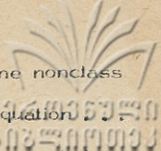


13. ა. კორნეევა, კ. დიანობიძე, ნ. ანთროპოვსკაია. პრეზენტაციის
უზრუნველყოფის შედეგად ცოცხლის წარმოქმნის კონცეპტ-
პროგრამის სინთეზის საფუძვლის 209
14. ნ. ბოკუჩავა. ინფორმაციული სფეროს განვითარების საკითხ-
ების შესახებ 221
15. ა. შაფარაძე, ვ. ხვეციანიძე. ურთიერთსადასრულებელი პრინციპ-
ების საფუძველზე ავტომატური სისტემების განვითარების
კონცეპტის 209
16. ნ. ბოკუჩავა. განვითარების კონცეპტის პრეზენტაციის განვითარების
ფორმების შესახებ 221
17. რ. მელიქიძე, ნ. ბოკუჩავა. ავტომატური სისტემების განვითარების
კონცეპტის შესახებ 231
18. ნ. ბოკუჩავა. განვითარების კონცეპტის განვითარების
სახეობების შესახებ 246
19. ნ. ბოკუჩავა, რ. ბოკუჩავა, უსტინოვი სერგეი ალექსანდრის
განვითარების კონცეპტის შესახებ 260

C O N T E N T S



1. R. Khomeriki, K. Gogichaishvili, An experimental study of memory in the process of learning mathematics	9
2. D. Ediberidze, Development of methods for solving a single-route calendar planning problem	18
3. M. Tsutsunava, On one system of nonlinear integral equation	44
4. N. Nanobashvili, On the correction of the coefficients on compressed equations in redundancy classes	53
5. G. Mamulashvili, Cybernetical approach to the study of the physiological resistans of the plant body	66
6. N. Jikia, On the number of steps in a cycle for a scheme of compression of discrete information	74
7. M. Shishigin, N.Lavrenchuk, A method of probability - statistical simulation and structurisation of a dynamic system	105
8. V. Vashakidze, I.Gvineria, H.Meladze, S.Razmadze, On the modelling of the toxicity kinetics of a preparation complex	119
9. Z. Kochladze, Conceptual business game "Temp".	131
10.T.Kokochashvili, T.Tsilosani, G.Berishvili, Study of the distribution laws of lexical units in Georgian scientific and technical texts in physics	139
11. T.Kokochashvili, T.Tsilosani, G.Berishvili, Frequency vocabulary of the Georgian scientific and technical lexicon (physics: quantitative mechanics and molecular physics)	156
12. A.Korneeva, Cluster analysis of attributes based on non-traditional clusterization procedures	167
13. A.Korneeva, K.Lionozov, N.Piotrovskaya, On developing software for conceptual systems of knowledge representation	181
14. N.Bokuchava, On some problems of informational statistics	199



- 15. A.Shapatava, E.Khvedelidze, On the solution of one nonclass nonlocal boundary value problem of a parabolic equation
- 16. L.Pilipashvili, The problem of measuring set in the psychology set
- 17. R.Megrelishvili, L.Klochko, On the collision resolving using the association addressing method
- 18. N.Nanobashvili, On the formulization of some graphs and flat images pictures by equations in redundancy classes of representatives
- 19. T.Nikolaishvili, R.Khaindrava, Towards the creation of an e lected information system at higher educational institutions . .

Редактор издательства Л.Абуашвили

Подписано в печать 28.XII.86

УЭ 07067 Бумага 60x84

Усл.печ.л. 16,75 Уч.изд.л. 10,08

Тираж 300 Заказ 192 Цена I р.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, 14

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14

Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, 1.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.



ქართული
ნაციონალური
ბიბლიოთეკა