თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
288

ISSN 0376—2637

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია
МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ
MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

26

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1989

Издательство Тбилисского университета

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

Tbilisi University Press

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

ტ.288v.

მათემატიკა, მექანიკა, ასტრონომია

MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

თბილისი 1989 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 288

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1989

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
Т. 288, 1989

УДК 511.4

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПРЯМОЙ СУММОЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ВИДА $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

Г.А.Ломадзе

Пусть $r(n,F_k)$ обозначает число представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_k = x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\dots+x_{2k-1}^2+x_{2k-1}x_{2k}+x_{2k}^2,$$

т.е. прямой суммой k бинарных квадратичных форм вида

$$F_1 = x_1^2+x_1x_2+x_2^2.$$

Формулы для арифметической функции $r(n,F_k)$ при $2 \le k \le 17$ нами получены в работе /1/. В предлагаемой статье, являющейся непосредственным продолжением работы /1/, выводятся формулы для $r(n,F_k)$ при $k = 18$, 19 и 20. В дальнейшем мы всюду будем ссылаться на хорошо известные результаты Э.Гекке /2/, сформулированные в работе /1/, а также пользоваться принятыми там обозначениями.

1. Известно (см.напр., /3/, с.167), что

$$r(n,F_1) = r(2^\alpha u,F_1) = \begin{cases} 6\sum\limits_{d|u}\left(\frac{d}{3}\right) & \text{при } 2|\alpha, \\ 0 & \text{при } 2\nmid\alpha. \end{cases}$$

Вычислив по этой формуле значения $r(n,F_1)$ при $n=1,2,3,4$ и 5, получим разложение

$$\vartheta(\tau,F_1) = 1+6z+6z^3+6z^4+0z^5+\dots,$$

откуда в свою очередь следуют разложения:

$$\vartheta(\tau, F_6) = 1 + 36z + 540z^2 + 4356z^3 + 20556z^4 + 60696z^5 + \cdots, \qquad (1)$$

$$\vartheta(\tau, F_7) = 1 + 42z + 756z^2 + 7602z^3 + 46914z^4 + 187488z^5 + \cdots, \qquad (2)$$

$$\vartheta(\tau, F_8) = 1 + 48z + 1008z^2 + 12144z^3 + 92784z^4 + 473760z^5 + \cdots, \qquad (3)$$

$$\vartheta(\tau, F_9) = 1 + 54z + 1296z^2 + 18198z^3 + 165942z^4 + 1036800z^5 + \cdots, \qquad (4)$$

$$\vartheta(\tau, F_{10}) = 1 + 60z + 1620z^2 + 25980z^3 + 275460z^4 + 2040552z^5 + \cdots, \qquad (5)$$

$$\vartheta(\tau, F_{11}) = 1 + 66z + 1980z^2 + 35706z^3 + 431706z^4 + 3703392z^5 + \cdots, \qquad (6)$$

$$\vartheta(\tau, F_{12}) = 1 + 72z + 2376z^2 + 47592z^3 + 646344z^4 + 6305904z^5 + \cdots, \qquad (7)$$

$$\vartheta(\tau, F_{13}) = 1 + 78z + 2808z^2 + 61854z^3 + 932334z^4 + 10198656z^5 + \cdots, \qquad (8)$$

$$\vartheta(\tau, F_{14}) = 1 + 84z + 3276z^2 + 78708z^3 + 1303932z^4 + 15809976z^5 + \cdots, \qquad (9)$$

$$\vartheta(\tau, F_{15}) = 1 + 90z + 3780z^2 + 98370z^3 + 1776690z^4 + 23653728z^5 + \cdots, \qquad (10)$$

$$\vartheta(\tau, F_{16}) = 1 + 96z + 4320z^2 + 121056z^3 + 2367456z^4 + 34337088z^5 + \cdots, \qquad (11)$$

$$\vartheta(\tau, F_{17}) = 1 + 102z + 4896z^2 + 146982z^3 + 3094374z^4 + 48568320z^5 + \cdots, \qquad (12)$$

$$\vartheta(\tau, F_{18}) = 1 + 108z + 5508z^2 + 176364z^3 + 3916884z^4 + 67164552z^5 + \cdots, \qquad (13)$$

$$\vartheta(\tau, F_{19}) = 1 + 114z + 6156z^2 + 209418z^3 + 5035722z^4 + 91059552z^5 + \cdots, \qquad (14)$$

$$\vartheta(\tau, F_{20}) = 1 + 120z + 6840z^2 + 246360z^3 + 6292920z^4 + 121311504z^5 + \cdots \qquad (15)$$

Известно (/1/ (2.19), (2.20)), что квадратичная форма F_k при $2|k$ является квадратичной формой типа $(-k, 3, 1)$ и что ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau, F_k) = 1 + (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\rho_k\left(3^{\frac{k}{2}} + (-1)^{\frac{k}{2}}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_{k-1}(n) z^n + (-1)^{\frac{k}{2}} 3^{\frac{k}{2}} \sigma_{k-1}(n) z^{3n} \right), \qquad (16)$$

а при $2 \nmid k$ форма F_k является квадратичной формой типа $(-k, 3, \chi)$, $\chi(d) = \left(\frac{d}{3}\right)$ при $d > 0$ и ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau,F_k)=1+\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{A_k(3)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{\frac{k-1}{2}}\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^{k-1}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\sum_{d\mid n}\left(\frac{d}{3}\right)d^{k-1}\right)z^{n}. \qquad (17)$$

Вычислив величины ρ_k по формуле (I.5) из /I/, получим:

$$\rho_{18}=\frac{43867}{36\cdot 798}, \quad \rho_{20}=\frac{174611}{40\cdot 330}; \qquad (18)$$

вычислив же $A_{19}(3)$ по формуле на с.827 работы /2/, получим:

$$A_{19}(3)=-\frac{8806171927}{3}. \qquad (19)$$

Известно (см.напр., /I/, лемма 3), что однородные полиномы степени $2m$ от $2(k-2m)$ переменных

$$\varphi_{2m}^{(k-2m)}=x_1^{2m}+\sum_{h=1}^{m}(-1)^{h}\frac{(k-h-2)!\,(2m)!}{(k-2)!\,(2m-2h)!\,h!\,3^{h}}F_{k-2m}^{h}\,x_1^{2m-2h} \qquad (20)$$

являются шаровыми функциями порядка $2m$ относительно квадратичной формы F_{k-2m} $\left(m=1,2,\ldots,\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)$.

2. Лемма. Уравнение $F_k=n$

I) при $n=1$ имеет 4 решения с $x_1=\pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1=0$;

2) при $n=2$ имеет $24(k-1)$ решений с $x_1=\pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1=0$;

3) при $n=3$ имеет 2 решения с $x_1=\pm 2$ и $72(k-1)(k-2)+4$ решений с $x_1=\pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1=0$;

4) при $n=4$ имеет $4(3k-2)$ решений с $x_1=\pm 2$ и $48(k-1)(3(k-2)(k-3)+1)$ решений с $x_1=\pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1=0$;

5) при $n=5$ имеет $(6k-7)^2-1$ решений с $x_1=\pm 2$ и $24(k-1)(9(k-2)(k-3)(k-4)+9(k-2)+1)$ решений с $x_1=\pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1=0$.

Доказательство. При $n=1,2,3,4$ утверждаемое доказано в лемме 5 из /I/. В нижеследующей таблице выписаны все решения уравнения $F_k = 5$, за исключением решений с $x_1 = 0$, ибо значение таких решений в дальнейшем не понадобится. Подсчитав по этим таблицам число соответствующих решений, так же, как и в /I/, получим утверждаемое.

$n = 5$

Вид решений	Число решений
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 2$ или $x_2 = 0,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \le 2k),\ x_i = 0$	$2 \cdot 4(2k-2)$
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 2$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \le k),$ $x_i = 0$	$2 \cdot 4(k-1)$
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 1,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \le k),$ $x_l = \pm 1\ (2 < l \le 2k;\ l \ne 2h-1, 2h),\ x_i = 0$	$8(k-1)(2k-4)$
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 1,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \le k),$ $x_{2l-1} = \pm 1,\ x_{2l} = \mp 1\ (1 < l \le k,\ l \ne h),\ x_i = 0$	$8C_{k-1}^2$
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 1,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \le 2k),\ x_l = \pm 1\ (2 < l \le 2k;$ $l \ne h,\ h-(-1)^h),\ x_i = 0$	$8(C_{2k-2}^2 - (k-1))$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 2,\ x_{2h} = \mp 2\ (1 < h \le k),$ $x_i = 0$	$2 \cdot 4(k-1)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_h = \pm 2\ (2 < h \le 2k),\ x_i = 0$	$2 \cdot 4(2k-2)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 2,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \le k),$ $x_l = \pm 1\ (2 < l \le 2k;\ l \ne 2h-1, 2h),\ x_i = 0$	$2 \cdot 8(k-1)(2k-4)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 2\ (1 < h \le k),$ $x_l = \pm 1\ (2 < l \le 2k;\ l \ne 2h-1, 2h),\ x_i = 0$	$2 \cdot 8(k-1)(2k-4)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 2,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \le k),$ $x_{2l-1} = \pm 1,\ x_{2l} = \mp 1\ (1 < l \le k,\ l \ne h),\ x_i = 0$	$2 \cdot 8(k-1)(k-2)$

$n = 5$ (продолжение)

Вид решений	Число решений
$x_1=\pm1, x_2=\mp1$ или $x_2=0, x_{2h-1}=\pm1, x_{2h}=\mp2\,(1<h\le k)$, $x_{2l-1}=\pm1, x_{2l}=\mp1\,(1<l\le k, l\ne h), x_i=0$	$2\cdot 8(k-1)(k-2)$
$x_1=\pm1, x_2=\mp2, x_{2h-1}=\pm1, x_{2h}=\mp1\,(1<h\le k)$, $x_l=\pm1\,(2<l\le 2k;\ l\ne 2h-1,2h),\ x_i=0$	$8(k-1)(2k-4)$
$x_1=\pm1, x_2=\mp2, x_h=\pm1\,(2<h\le 2k)$, $x_l=\pm1\,(2<l\le 2k;\ l\ne h, h-(-1)^h),\ x_i=0$	$8(C^2_{2k-2}-(k-1))$
$x_1=\pm1, x_2=\mp2, x_{2h-1}=\pm1, x_{2h}=\mp1\,(1<h\le k)$, $x_{2l-1}=\pm1, x_{2l}=\mp1\,(1<l\le k, l\ne h), x_i=0$	$8C^2_{k-1}$
$x_1=x_2=\pm1, x_{2h-1}=\pm1, x_{2h}=\mp1\,(1<h\le k)$, $x_{2l-1}=\pm1, x_{2l}=\mp1\,(1<l\le k, l\ne h), x_i=0$	$8C^2_{k-1}$
$x_1=x_2=\pm1, x_h=\pm1\,(2<h\le 2k), x_l=\mp1\,(2<l\le 2k;$ $l\ne h, h-(-1)^h),\ x_i=0$	$8(C^2_{2k-2}-(k-1))$
$x_1=x_2=\pm1, x_{2h-1}=\pm1, x_{2h}=\mp1\,(1<h\le k)$, $x_l=\pm1\,(2<l\le 2k;\ l\ne h, h-(-1)^h),\ x_i=0$	$8(k-1)(2k-4)$
$x_1=\pm1, x_2=\mp1$ или $x_2=0, x_{2h-1}=x_{2h}=\pm1\,(1<h\le k)$; $x_l=\pm1\,(2<l\le 2k;\ l\ne 2h-1,2h),\ x_i=0$	$2\cdot 8(k-1)(2k-4)$
$x_1=\pm1, x_2=\mp1$ или $x_2=0, x_{2h-1}=\pm1, x_{2h}=\mp1\,(1<h\le k)$, $x_{2l-1}=x_{2l}=\pm1\,(1<l\le k, l\ne h), x_i=0$	$2\cdot 8(k-1)(k-2)$
$x_1=\pm1, x_2=\mp1$ или $x_2=0, x_{2h-1}=\pm1$, $x_{2h}=\mp1\,(1<h\le k)$, $x_{2l-1}=\pm1, x_{2l}=\mp1\,(1<l\le k, l\ne h), x_{2s-1}=\pm1$, $x_{2s}=\mp1\,(1<s\le k;\ s\ne h,l)$, $x_{2t-1}=\pm1, x_{2t}=\mp1\,(1<t\le k;\ t\ne h,l,s),\ x_i=0$	$2\cdot 32C^4_{k-1}$

$n = 5$ (продолжение)

Вид решений	Число решений
$x_1=\pm1,\ x_2=\mp1$ или $x_2=0,\ x_{2h-1}=\pm1,\ x_{2h}=\mp1\ (1<h\le k)$, $x_{2l-1}=\pm1,\ x_{2l}=\mp1\ (1<l\le k,\ l\ne h)$, $x_{2s-1}=\pm1,\ x_{2s}=\mp1\ (1<s\le k;\ s\ne h,l)$, $x_t=\pm1\ (2<t\le 2k;\ t\ne 2h-1,2h,2l-1,2l,2s,2s-1)$, $x_i=0$	$2\cdot 32C'^{3}_{k-1}(2k-8)$
$x_1=\pm1,\ x_2=\pm1$ или $x_2=0,\ x_{2h-1}=\pm1,\ x_{2h}=\mp1\ (1<h\le k)$, $x_{2l-1}=\pm1,\ x_{2l}=\mp1\ (1<l\le k,\ l\ne h)$, $x_s=\pm1\ (2<s\le 2k;\ s\ne 2h-1,$ $2h,2l-1,2l)$, $x_t=\pm1\ (2<t\le 2k;\ t\ne 2h-1,2h,2l-1,2l,s,$ $s-(-1)^s)$, $x_i=0$	$2\cdot 32C'^{2}_{k-1}(C'^{2}_{2k-6}-(k-3)$
$x_1=\pm1,\ x_2=\mp1$ или $x_2=0,\ x_{2h-1}=\pm1,\ x_{2h}=\mp1\ (1<h\le k)$, $x_l=\pm1\ (2<l\le 2k;\ l\ne 2h-1,2h)$, $x_s=\pm1\ (2<s\le 2k;$ $s\ne 2h-1,2h,l,l-(-1)^l)$, $x_t=\pm1\ (2<t\le 2k;\ t\ne 2h-1,2h,$ $l,l-(-1)^l,s,s-(-1)^s)$, $x_i=0$	$2\cdot 32(k-1)\times$ $\times\left(C'^{3}_{2k-4}-(k-2)(2k-6)\right)$
$x_1=\pm1,\ x_2=\mp1$ или $x_2=0,\ x_h=\pm1\ (2<h\le 2k)$, $x_l=\pm1\ (2<l\le 2k;\ l\ne h,h-(-1)^h)$, $x_s=\pm1\ (2<s\le 2k;\ s\ne h,h-(-1)^h,l,l-(-1)^l)$, $x_t=\pm1\ (2<t\le 2k;\ t\ne h,h-(-1)^h,l,l-(-1)^l,s,s-(-1)^s)$, $x_i=0$	$32\{C'^{4}_{2k-2}-(C'^{2}_{2k-4}+$ $+C'^{2}_{2k-4}-1+\dots+C'^{2}_{2k}$ $-(k-2))\}$.

3. Теорема I. Система обобщенных кратных тета-рядов

$$\vartheta(\tau, F_{14}, \varphi_4^{(14)}) = \frac{1}{180}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{F_{14}=n}180x_1^4-45nx_1^2+n^2\right)z^n, \qquad (21)$$

$$\vartheta\left(\tau, F_{12}\, \varphi_6^{(12)}\right) = \frac{1}{7\cdot 216} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_{12}=n} 1512\, x_1^6 - \tag{22}$$
$$- 945\, n x_1^4 + 126\, n^2 x_1^2 - 2n^3 \Big) z^n,$$

$$\vartheta\left(\tau, F_{10}, \varphi_8^{(10)}\right) = \frac{1}{13\cdot 162} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_{10}=n} 2106\, x_1^8 - \tag{23}$$
$$- 2457\, n x_1^6 + 819\, n^2 x_1^4 - 78\, n^3 x_1^2 + n^4 \Big) z^n,$$

$$\vartheta\left(\tau, F_8, \varphi_{10}^{(8)}\right) = \frac{1}{8424} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_8=n} 8424\, x_1^{10} - 15795\, n x_1^8 + \tag{24}$$
$$+ 9828\, n^2 x_1^6 - 2340\, n^3 x_1^4 + 180\, n^4 x_1^2 - 2n^5 \Big) z^n,$$

$$\vartheta\left(\tau, F_6, \varphi_{12}^{(6)}\right) = \frac{1}{13\cdot 972} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_6=n} 12636\, x_1^{12} - 34749\, n x_1^{10} + \tag{25}$$
$$+ 34749\, n^2 x_1^8 - 15444\, n^3 x_4^6 + 2970\, n^4 x_1^4 - 198\, n^5 x_1^2 + 2n^6 \Big) z^n$$

является базисом пространства $S_{18}(3,1)$.

<u>Доказательство</u>. Из (20) при $k = 18$ и $m = 2$ следует, что

$$\varphi_4^{(14)} = x_1^4 - \frac{1}{4} F_{14}\, x_1^2 + \frac{1}{180} F_{14}^2 .$$

Так как F_{14} является квадратичной формой типа (-14,3,1), а $\varphi_4^{(14)}$ - относящейся к ней шаровой функцией четвертого порядка, то, согласно лемме 2 из /1/, тэта-ряд (21) будет параболической формой типа (-18,3,1). Согласно лемме, уравнение $F_{14} = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ оно имеет 312 решений с $x_1 = \pm 1$, в остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ оно имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 11236 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 4$ оно имеет 160 решений с $x_1 = \pm 2$ и 247728 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 5$ оно имеет 5928 решений с $x_1 = \pm 2$ и 3740568 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Следовательно, принимая во внимание, что коэффициенты при z, z^2, z^3, z^4 и z^5 в разложении (9) равны 84,3276,78708,I303932 и I5809976 соответственно, из (2I) получаем:

$$\vartheta(\tau, F_{14}, \varphi_4^{(14)}) = \frac{1}{180}\Big\{\big((180-45)4+84\big)z+\big((180-45\cdot 2)312+4\cdot 3276\big)z^2+$$
$$+\big((180\cdot 16-45\cdot 3\cdot 4)2+(180-45\cdot 3)11236+9\cdot 78708\big)z^3+$$
$$+\big((180\cdot 16-45\cdot 4\cdot 4)160+(180-45\cdot 4)247728+16\cdot 1303932\big)z^4+$$
$$+\big((180\cdot 16-45\cdot 5\cdot 4)5928+(180-45\cdot 5)3740568+25\cdot 15809976\big)z^5+\cdots\Big\}=$$
$$=\frac{52}{15}z+\frac{1144}{5}z^2+\frac{33852}{5}z^3+\frac{1767376}{15}z^4+1325896z^5+\cdots \tag{26}$$

Из (20) при $k = 18$ и $m = 3$ следует, что

$$\varphi_6^{(12)} = x_1^6 - \frac{5}{8}F_{12}x_1^4 + \frac{1}{12}F_{12}^2 x_1^2 - \frac{1}{2728}F_{12}^3.$$

F_{12} является квадратичной формой типа (–I2,3,I), а $\varphi_6^{(12)}$ – относящейся к ней шаровой функцией шестого порядка. Поэтому, согласно лемме 2 из /I/, тэта-ряд (22) будет параболической формой типа (–I8,3,I). В силу леммы, уравнение $F_{12} = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ оно имеет 264 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ оно имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 7924 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 4$ оно имеет I36 решений с $x_1 = \pm 2$ и I43088 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 5$ оно имеет 4224 решения с $x_1 = \pm 2$ и I734744 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Коэффициенты при z, z^2, z^3, z^4, z^5 в разложении (7) равны 72,2376,47592,646344 и 6305904 соответственно. Следовательно, так же, как и выше, после простых выкладок из (22) получим:

$$\vartheta\left(\tau, F_{12}, \varphi_6^{(12)}\right) = \frac{73}{42}z - \frac{22}{7}z^2 - \frac{36627}{14}z^3 - \tag{27}$$

$$- \frac{1566088}{21}z^4 - \frac{21432345}{21}z^5 + \ldots$$

Из (20) при $k = 18$ и $m = 4$ следует, что

$$\varphi_8^{(10)} = x_1^8 - \frac{7}{6}F_{10}x_1^6 + \frac{7}{18}F_{10}^2x_1^4 - \frac{1}{27}F_{10}^3x_1^2 + \frac{1}{26\cdot 81}F_{10}^4.$$

Так как F_{10} является квадратичной формой типа (-10,3,1), а $\varphi_8^{(10)}$ – относящейся к ней шаровой функцией восьмого порядка, то, согласно лемме 2 из /1/, тэта-ряд (23) будет параболической формой типа (-18,3,1). Согласно лемме, уравнение $F_{10} = n$ при $n=1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ оно имеет 216 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ оно имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 5188 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 4$ оно имеет 112 решений с $x_1 = \pm 2$ и 73008 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 5$ оно имеет 2808 решений с $x_1 = \pm 2$ и 668952 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Коэффициенты при z, z^2, z^3, z^4 и z^5 в разложении (5) равны 60, 1620, 25980, 275460 и 2040552 соответственно. В силу сказанного, из (23) следует:

$$\vartheta\left(\tau, F_{10}, \varphi_8^{(10)}\right) = \frac{10}{13}z - \frac{48}{13}z^2 + \frac{15174}{13}z^3 + \frac{680080}{13}z^4 + \tag{28}$$

$$+ \frac{10846380}{13}z^5 + \ldots$$

Из (20) при $k = 18$ и $m = 5$ следует, что

$$\varphi_{10}^{(8)} = x_1^{10} - \frac{15}{8}F_8x_1^8 + \frac{7}{6}F_8^2x_1^6 - \frac{5}{18}F_8^3x_1^4 + \frac{5}{18\cdot 13}F_8^4x_1^2 - \frac{1}{81\cdot 52}F_8^5.$$

F_8 является квадратичной формой типа (-8,3,I), а $\varphi_{10}^{(8)}$ - относящейся к ней шаровой функцией десятого порядка. Ввиду этого, согласно лемме 2 из /I/, тэта-ряд (24) будет параболической формой типа (-I8,3,I). В силу леммы, уравнение $F_8 = n$ при $n = I$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ оно имеет I68 решений с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ оно имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 3028 решений с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 4$ оно имеет 88 решений с $x_1 = \pm 2$ и 30576 решений с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 5$ оно имеет I680 решений с $x_1 = \pm 2$ и I90680 решений с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Так как коэффициенты при z, z^2, z^3, z^4 и z^5 в разложении (3) равны 48,I008,I2I44,92784 и 473760 соответственно, из (24) получим:

$$\vartheta(\tau, F_8, \varphi_{10}^{(8)}) = \frac{7}{2\cdot 27} z - \frac{14}{9} z^2 - \frac{189}{2} z^3 - \frac{639688}{27} z^4 - \frac{4325125}{9} z^5 + \ldots \qquad (29)$$

Из (20) при $k = 18$ и $m = 6$ следует, что

$$\varphi_{12}^{(6)} = x_1^{12} - \frac{11}{4} F_6 x_1^{10} + \frac{11}{4} F_6^2 x_1^8 - \frac{11}{9} F_6^3 x_1^6 + \frac{55}{2\cdot 9\cdot 13} F_6^4 x_1^4 - \frac{11}{2\cdot 27} F_6^5 x_1^2 + \frac{1}{2\cdot 243\cdot 13} F_6^6 .$$

Так как F_6 является квадратичной формой типа (-6,3,I), а $\varphi_{12}^{(6)}$ - относящейся к ней шаровой функцией двенадцатого порядка, то, согласно лемме 2 из /I/, тэта-ряд (25) будет параболической формой типа (-I8,3,I). Согласно лемме, уравнение $F_6 = n$ при $n = I$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ оно имеет I20 решений с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ оно имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и I444 решения с $x_1 = \pm I$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 4$ оно имеет 64 решения с $x_1 = \pm 2$ и 8880 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 5$ оно имеет 840 решений с $x_1 = \pm 2$ и 30360 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Далее, коэффициенты при z, z^2, z^3, z^4 и z^5 в разложении (1) равны 36, 540, 4356, 20556 и 60696 соответственно. Следовательно, из (25) получаем:

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_{12}^{(6)}) = -\frac{2}{27\cdot 13}z + \frac{380}{9\cdot 13}z^2 + \frac{5676}{13}z^3 + \frac{4113568}{27\cdot 13}z^4 + \frac{20961700}{9\cdot 13}z^5 + \cdots \tag{30}$$

Система тэта-рядов (21) – (25) линейно независима, ибо определитель 5-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов, отличен от нуля. Таким образом, получаем утверждаемое, ибо известно (/2/, теоремы 5, 6 и 10), что $\dim S_{18}(3,1) = 5$.

В дальнейшем положим

$$\sigma_k^*(n) = \begin{cases} \sigma_k(n) & \text{при } 3 \nmid n, \\ \sigma_k(n) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} 3^{\frac{k+1}{2}} \sigma_k\left(\frac{n}{3}\right) & \text{при } 3 \mid n; \end{cases}$$

$$\rho_k^*(n) = 3^{k/2} \sum_{\delta d = n} \left(\frac{\delta}{3}\right) d^k + (-1)^{k/2} \sum_{d \mid n} \left(\frac{d}{3}\right) d^k.$$

Теорема 2.

$$r(n, F_{18}) = \frac{14364}{13\cdot 757\cdot 43867}\sigma_{17}^*(n) + \frac{2923833371463}{2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13^2\cdot 757\cdot 43867}\sum_{F_{14}=n}\left(180x_1^4 - 45nx_1^2 + n^2\right) + \frac{1715425344}{5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 757\cdot 43867}\sum_{F_{12}=n}\left(1512x_1^6 - 945nx_1^4 + 126n^2x_1^2 - 2n^3\right) + \frac{176313216}{7^2\cdot 13\cdot 757\cdot 43867}\sum_{F_{10}=n}\left(2106x_1^8 - 2457nx_1^6 + 819n^2x_1^4 - 78n^3x_1^2 + n^4\right) + \frac{142560}{13\cdot 757\cdot 43867}\sum_{F_6=n}\left(12636x_1^{12} - 34749nx_1^{10} + 34749n^2x_1^8 - 1544n^3x_1^6 + 2970n^4x_1^4 - 198n^5x_1^2 + 2n^6\right)$$

Доказательство. Форма F_{18} является примитивной квадратичной формой типа (-18,3,1). Ввиду этого, согласно (16) и (18), ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau,F_{18})=1+\frac{36\cdot 399}{13\cdot 757\cdot 43867}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_{17}(n)z^{n}-19683\sigma_{17}(n)z^{3n}\right)=$$

$$=1+\frac{36\cdot 399}{13\cdot 757\cdot 43867}z+\frac{36\cdot 399\cdot 131073}{13\cdot 757\cdot 43867}z^{2}+\frac{36\cdot 399\cdot 129120481}{13\cdot 757\cdot 43867}z^{3}+$$

$$+\frac{36\cdot 399\cdot 17180000257}{13\cdot 757\cdot 43867}z^{4}+\frac{36\cdot 399\cdot 762939453126}{13\cdot 757\cdot 43867}z^{5}+\cdots \qquad (31)$$

Согласно лемме 1 из /1/, разность $\vartheta(\tau,F_{18})-E(\tau,F_{18})$ является параболической формой типа (-18,3,1). Следовательно, в силу теоремы 1 существуют числа c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 такие, что

$$\vartheta(\tau,F_{18})-E(\tau,F_{18})=c_1\vartheta(\tau,F_{14},\varphi_4^{(14)})+c_2\vartheta(\tau,F_{12},\varphi_6^{(12)})+$$

$$+c_3\vartheta(\tau,F_{10},\varphi_8^{(10)})+c_4\vartheta(\tau,F_8,\varphi_{10}^{(8)})+c_5\vartheta(\tau,F_6,\varphi_{12}^{(6)}).$$

Приравняв коэффициенты при z, z^2, z^3, z^4 и z^5 в обеих частях этого равенства и приняв во внимание разложения (13), (3... и (26)-(30), получим:

$$c_1=\frac{29238333711463\cdot 18}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13^2\cdot 757\cdot 43867},\quad c_2=-\frac{1715425344\cdot 216}{5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 757\cdot 43867},$$

$$c_3=\frac{176373216\cdot 162}{7^2\cdot 757\cdot 43867},\quad c_4=0,\quad c_5=\frac{142560\cdot 972}{757\cdot 43867}.$$

Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau, F_{18}) = E(\tau, F_{18}) + \frac{2923833371463\cdot 18}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13^2\cdot 757\cdot 43867}\vartheta(\tau, F_{14}, \varphi_4^{(14)}) +$$

$$+\frac{1715425344\cdot 216}{5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 757\cdot 43867}\vartheta(\tau, F_{12}\, \varphi_6^{(12)}) +$$

$$+\frac{176373216\cdot 162}{7^2\cdot 757\cdot 43867}\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_8^{(10)}) + \frac{142560\cdot 972}{757\cdot 43867}\vartheta(\tau, F_6 . \varphi_{12}^{(6)}).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (I.I0) из /I/, (3I) и (2I)-(25), получаем утверждаемое.

Аналогично доказываются и следующие четыре теоремы.

<u>Теорема 3</u>. Система обобщенных кратных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau, F_{15}, \varphi_4^{(15)}) = \frac{1}{204}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{F_{15}=n} 204x_1^4 - 48nx_1^2 + n^2\Bigr)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_{13}, \varphi_6^{(13)}) = \frac{1}{1836}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{F_{13}=n} 1836x_1^6 - 1080nx_1^4 + 135n^2x_1^2 - 2n^3\Bigr)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_8^{(11)}) = \frac{1}{2754}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{F_{11}=n} 2754x_1^8 - 3024nx_1^6 + 945n^2x_1^4 + 84n^3x_1^2 + n^4\Bigr)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_9, \varphi_{10}^{(9)}) = \frac{1}{11934}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{F_9=n} 11934x_1^{10} - 21060nx_1^8 + 12285n^2x_1^6 -$$

$$- 2730n^3x_1^4 + 195n^4x_1^2 - 2n^5\Bigr)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_{12}^{(7)}) = \frac{1}{214812}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{F_7=n} 214812x_1^{12} - 555984nx_1^{10} +$$

$$+521235n^2x_1^8-216216n^3x_1^6+38610n^4x_1^4-2376n^5x_1^2+22n^6)z^n$$

является базисом пространства $S_{19}(3,\chi)$.

Теорема 4.

$$r(n,F_{19})=\frac{3}{7\cdot 19\cdot 7691\cdot 8609}\rho^*_{18}(n)+\frac{372527456257796}{5\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 17\cdot 19\cdot 7691\cdot 8609}\sum_{F_{15}=n}204x_1^4-$$

$$-48nx_1^2+n^2+\frac{872815664976}{5\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 19\cdot 7691\cdot 8609}\sum_{F_{13}=n}1836x_1^6-1080nx_1^4+135n^2x_1^2-2n^3+$$

$$+\frac{820164075216}{5^2\cdot 7^3\cdot 11\cdot 19\cdot 7691\cdot 8609}\sum_{F_{11}=n}2754x_1^8-3024nx_1^6+945n^2x_1^4-84n^3x_1^2+n^4+$$

$$+\frac{29\,305\,152}{7^3\cdot 19\cdot 7691\cdot 8609}\sum_{F_9=n}11934x_1^{10}-21060nx_1^8+12285n^2x_1^6-2730n^3x_1^4+$$

$$+195n^4x_1^2-2n^5+\frac{29305152}{7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 7691\cdot 8609}\sum_{F_7=n}214812x_1^{12}-555984nx_1^{10}+$$

$$+521235n^2x_1^8-216216n^3x_1^6+38610n^4x_1^4-2376n^5x_1^2+22n^6.$$

Теорема 5. Система обобщенных кратных тета-рядов

$$\vartheta(\tau,F_{16},\varphi_4^{(16)})=\frac{1}{459}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{16}=n}459x_1^4-102nx_1^2+2n^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,F_{14},\varphi_6^{(14)})=\frac{1}{5508}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{14}=n}5508x_1^6-3060nx_1^4+360n^2x_1^2-5n^3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,F_{12},\varphi_8^{(12)})=\frac{1}{24786}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{F_{12}=n}24786x_1^8-25704nx_1^6+7560n^2x_1^4-630n^3x_1^2$$

$$+7n^4\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_{10}^{(10)}) = \frac{1}{8262}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{10}=n} 8262x_1^{10} - 13770nx_1^{8} + 7560n^2x_1^{6} -$$

$$- 1575n^3x_1^4 + 105n^4x_1^2 - n^5\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_8, \varphi_{12}^{(8)}) = \frac{1}{322218}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_8=n} 322218x_1^{12} - 787644nx_1^{10} +$$

$$+ 694980n^2x_1^8 - 270270n^3x_1^6 + 45045n^4x^4 - 2574n^5x_1^2 + 22n^6\Big)z^n$$

являются базисом пространства $S_{20}(3,1)$.

Теорема 6. $r(n, F_{20}) = \frac{1}{283\cdot 617\cdot 1181}\,\sigma^*_{19}(n) +$

$$+ \frac{24328331854136}{3^2\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 283\cdot 617\cdot 1181}\sum_{F_{16}=n} 459x_1^4 - 102nx_1^2 + 2n^2 +$$

$$+ \frac{200733315360}{7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 283\cdot 617\cdot 1181}\sum_{F_{14}=n} 5508x_1^6 - 3060nx_1^4 + 360n^2x_1^2 - 5n^3 +$$

$$+ \frac{7044334068}{7^3\cdot 11^2\cdot 283\cdot 617\cdot 1181}\sum_{F_{12}=n} 24786x_1^8 - 25704nx_1^6 + 7560n^2x_1^4 - 630n^3x_1^2 + 7n^4 +$$

$$+ \frac{4936896}{7^2\cdot 283\cdot 617\cdot 1181}\sum_{F_{10}=n} 8262x_1^{10} - 13770nx_1^8 + 7560n^2x_1^6 -$$

$$- 1575n^3x_1^4 + 105n^4x_1^2 - n^5 +$$

$$+ \frac{2011392}{7^2\cdot 11\cdot 283\cdot 617\cdot 1181}\sum_{F_8=n} 322218x_1^{12} - 787644nx_1^{10} +$$

$$+694980n^2x_1^8-270270n^3x_1^6+45045n^4x_1^4-2574n^5x_1^2+22n.$$

Поступила 28.IX.1988

Кафедра
алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

I. Г.А.Ломадзе. Acta Arith., 1989, v.54.

2. E.Hecke. Mathematische Werke. Zweite Auflage. Göttingen, 1970.

3. Л.Е.Диксон. Введение в теорию чисел. Обработанный перевод с английского А.З.Вальфиша. Тбилиси, 1941.

გ. ლომაძე

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ სახის კვადრატული ფორმების პირდაპირი ჯამით რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია ფორმულები $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ სახის ბინარული კვადრატული ფორმის K შესაკრების პირდაპირი ჯამით ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის, როცა $K=18, 19$ და 20.

G.Lomadze

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS BY A DIRECT SUM OF QUADRATIC FORMS OF THE KIND $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

Summary

Formulae are obtained for the number of represenlations of positive integers by a direct sum of k binary quadratic forms of the kind $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ when k=18,19 and 20.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

288, 1988

УДК 517.562-511.46

К РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ ТЕРНАРНЫХ ТЭТА-РЯДОВ

К.Ш.Шавгулидзе

1. Пусть

$$Q=Q(x_1, x_2, \ldots x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n} b_{ij}\, x_i x_j$$

- положительная квадратичная форма от n переменных с целыми коэффициентами b_{ij}. Этой форме сопоставим симметрическую матрицу A порядка n с элементами $a_{ii}=2b_{ii}$ и $a_{ij}=a_{ji}=b_{ij}$ при $i<j$. Пусть X - матрица-столбец переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и X' - ее транспонированная, тогда

$$Q(X)=\frac{1}{2}X'AX.$$

Далее, пусть A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в $|A|=D=\det A$, а a^*_{ij} - элемент матрицы A^{-1}.

Однородный полином ν-той степени с комплексными коэффициентами $P(X)=P(x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{1\le i,\, j\le n} a^*_{ij}\left(\partial^2 P/\partial x_i \partial x_j\right)=0, \qquad (1)$$

называется шаровой функцией ν-го порядка относительно ква ратичной формы $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а

$$\vartheta(\tau; P, Q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^n} P(n) e^{2\pi i Q(n)\tau} \tag{2}$$

-соответствующим обобщенным n-кратным тэта-рядом.

Пусть $\mathcal{P}(\nu, Q)$ обозначает векторное пространство шаровых функций ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(X)$. Тогда, как показано в /I/ (с.850),

$$\dim \mathcal{P}(\nu, Q) = \frac{(\nu+n-3)!}{(n-2)!\,\nu!}(n+2\nu-2).$$

Наконец, пусть

$$T(\nu, Q) = \{\vartheta(\tau, P, Q) \mid P \in \mathcal{P}(\nu, Q)\}.$$

Целая матрица U порядка n называется автоморфизмом формы $Q(X)$ от n переменных, если удовлетворяется условие

$$U' A U = A. \tag{3}$$

Лемма I (/2/, с.37). Пусть $Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - положительная тернарная квадратичная форма, $P(X) \in \mathcal{P}(\nu, Q)$ и пусть G - множество всех целых автоморфизмов квадратичной формы $Q(X)$. Если $\sum_{i=1}^{t} P(U_i X) = 0$ для некоторого множества $\{U_i\}_{i=1}^{t} \subseteq G$, то $\vartheta(\tau, P, Q) = 0$.

Лемма 2 (/I/, с.853). Среди однородных квадратных полиномов от n переменных

$$\varphi_{ij} = x_i x_j - \frac{A_{ij}}{nD} 2Q(X) \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

ратичной формы $Q(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, а

$$\vartheta(\tau; P, Q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} P(n) e^{2\pi i Q(n)\tau} \qquad (2)$$

-соответствующим обобщенным r-кратным тэта-рядом.

Пусть $\mathcal{P}(\nu, Q)$ обозначает векторное пространство шаровых функций ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(X)$. Тогда, как показано в /I/ (с.850),

$$\dim \mathcal{P}(\nu, Q) = \frac{(\nu + r - 3)!}{(r-2)!\,\nu!}(r + 2\nu - 2).$$

Наконец, пусть

$$T(\nu, Q) = \{\vartheta(\tau, P, Q) \,/\, P \in \mathcal{P}(\nu, Q)\}.$$

Целая матрица U порядка r называется автоморфизмом формы $Q(X)$ от r переменных, если удовлетворяется условие

$$U' A U = A. \qquad (3)$$

<u>Лемма I</u> (/2/, с.37). Пусть $Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ - положительная тернарная квадратичная форма, $P(X) \in \mathcal{P}(\nu, Q)$ и пусть G - множество всех целых автоморфизмов квадратичной формы $Q(X)$. Если $\sum_{i=1}^{t} P(U_i X) = 0$ для некоторого множества $\{U_i\}_{i=1}^{t} \subseteq G$, то $\vartheta(\tau, P, Q) = 0$.

<u>Лемма 2</u> (/I/, с.853). Среди однородных квадратных полиномов от r переменных

$$\varphi_{ij} = x_i x_j - \frac{A_{ij}}{rD} 2Q(X) \quad (i, j = 1, \ldots, r) \qquad (4)$$

имеется точно $\frac{r(r+1)}{2}-1$ линейно независимых, образующих базис пространства шаровых функций второго порядка относительно квадратичной формы $Q(X)$.

<u>Лемма 3</u> (/3/, с.533). Среди однородных полиномов четвертой степени от r переменных

$$\varphi_{ijk\ell}=x_i x_j x_k x_\ell-\frac{1}{(r+4)D}\left(A_{ij}x_k x_\ell+A_{ik}x_j x_\ell+A_{i\ell}x_j x_k+\right.$$
$$+A_{jk}x_i x_\ell+A_{j\ell}x_i x_k+A_{k\ell}x_i x_j)\cdot 2Q+\frac{1}{(r+2)(r+4)D^2}(A_{ij}A_{k\ell}+ \qquad (5)$$
$$\left.+A_{ik}A_{j\ell}+A_{i\ell}A_{jk}\right)(2Q)^2 \quad (i,j,k,\ell=1,2,\ldots,r)$$

имеется точно $\frac{1}{24}r(r^2-1)(r+6)$ линейно независимых, образующих базис пространства шаровых функций четвертого порядка.

Ф.Гудинг /2/ вычислил размерность векторного пространства тэта-рядов (2) в том случае, когда P – шаровая функция относительно положительной приведенной бинарной квадратичной формы Q.

В настоящей работе установлены верхние границы размерности, а в ряде случаев и сама размерность пространств обобщенных тэта-рядов с шаровыми функциями относительно некоторых положительных приведенных тернарных квадратичных форм.

2. Пусть

$$P(X)=P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{k}a_{ki}\,x_1^{\nu-k}x_2^{k-i}x_3^{i} \qquad (6)$$

–шаровая функция ν-го порядка относительно положительной тернарной квадратичной формы $Q(x_1,x_2,x_3)$. Следовательно, согласно (1), выполняется условие:

$$\frac{A_{11}}{|A|}\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}+2\frac{A_{12}}{|A|}\frac{\partial^2 P}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{A_{13}}{|A|}\frac{\partial^2 P}{\partial x_1\partial x_3}+$$
$$+\frac{A_{22}}{|A|}\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}+2\frac{A_{23}}{|A|}\frac{\partial^2 P}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{A_{33}}{|A|}\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2}=0. \qquad (7)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} (\nu-k)(\nu-k-1) a_{ki} x_1^{\nu-k-2} x_2^{k-i} x_3^{i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} (\nu-k)(\nu-k+1) a_{k-1,i} x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)(k-i+1) a_{k+1,i} x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)(i+2) a_{k+1,i+2} x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} (\nu-k)(k-i) a_{ki} x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_3} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} (\nu-k)(i+1) a_{k,i+1} x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_3} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)(i+1) a_{k+1,i+1} x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i},$$

то условие (7) принимает вид:

$$\frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} \Big(A_{11} (\nu-k+1)(\nu-k) a_{k-1,i} + 2A_{12} (\nu-k)(k-i) a_{ki} +$$

$$+ 2A_{13} (\nu-k)(i+1) a_{k,i+1} + A_{22} (k-i)(k-i+1) a_{k+1,i} +$$

$$+ 2A_{23} (k-i)(i+1) a_{k+1,i+1} + A_{33} (i+1)(i+2) a_{k+1,i+2} \Big) x_1^{\nu-k-1} x_2^{k-i-1} x_3^{i} = 0.$$

Таким образом, для $0 \leqslant i < k \leqslant \nu - 1$ получаем:

$$A_{11}(\nu-k+1)(\nu-k)a_{k-1,i} + 2A_{12}(\nu-k)(k-i)a_{ki} +$$

$$+2A_{13}(\nu-k)(i+1)a_{k,i+1} + A_{22}(k-i)(k-i+1)a_{k+1,i} +$$

$$+2A_{23}(k-i)(i+1)a_{k+1,i+1} + A_{33}(i+1)(i+2)a_{k+1,i+2} = 0. \qquad (8)$$

Пусть $L = [a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{\nu\nu}]$ – вектор-столбец, где a_{ki} $(0 \leqslant i \leqslant k \leqslant \nu)$ – коэффициенты полинома (6).

Условия (8) в матричной форме можно записать так:

$$S \cdot L = 0, \qquad (9)$$

где матрица S, элементы которой определяются из условий (8), имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} A_{11}(\nu-1)\nu & 2A_{12}(\nu-1) & 2A_{13}(\nu-1) & 2A_{22} & 2A_{23} & 2A_{33} & \cdots 0 & 0 \\ 0 & A_{11}(\nu-2)(\nu-1) & 0 & 4A_{12}(\nu-2) & 2A_{13}(\nu-2) & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}(\nu-1)(\nu-2) & 0 & 2A_{12}(\nu-2) & 2A_{13}(\nu-2) & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{11}(\nu-3)(\nu-2) & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 2A_{23}(\nu-1) & A_{33}(\nu \end{array} \right.$$

Покажем, что матрица S является $\binom{\nu}{2} \times \binom{\nu+2}{2}$ матрицей. Действительно, число строк матрицы S равно числу условий (8), т.е. числу пар (i, k), для которых $0 \leqslant i < k \leqslant \nu - 1$. Следовательно, число строк равно

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{i=0}^{k-1} 1 = \sum_{k=1}^{\nu-1} k = (1 + \cdots + (\nu-1)) = \frac{(\nu-1)\nu}{2} = \binom{\nu}{2}.$$

Число столбцов матрицы S равно числу коэффициентов a_{ik} полинома (6), т.е. числу пар (i, k), для которых $0 \le i \le k \le \nu$. Следовательно, число столбцов равно

$$\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{k} 1 = \sum_{k=0}^{\nu}(k+1) = 1+2+\dots+(\nu+1) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \binom{\nu+2}{2}.$$

Разобьем матрицу S на две матрицы S_1 и S_2; S_1 – левая квадратная невырожденная $\binom{\nu}{2} \times \binom{\nu}{2}$ матрица, состоящая из первых $\binom{\nu}{2}$ столбцов матрицы S; S_2 – правая $\binom{\nu}{2} \times (2\nu+1)$ матрица, состоящая из последних $(2\nu+1)$ столбцов матрицы S.

Аналогично разбиваем матрицу b на две матрицы b_1 и b_2. b_1 – $\binom{\nu}{2} \times 1$ матрица, состоящая из верхних $\binom{\nu}{2}$ элементов матрицы b; b_2 – $(2\nu+1) \times 1$ матрица, состоящая из нижних $2\nu+1$ элементов матрицы b. В новых обозначениях матричное равенство (9) принимает вид:

$$S_1 b_1 + S_2 b_2 = 0,$$

т.е.

$$b_1 = -S_1^{-1} S_2 b_2. \tag{10}$$

Из этого равенства следует, что матрица b_1 выражается через матрицу b_2, т.е. первые $\binom{\nu}{2}$ элементов матрицы b можно выразить через ее остальные $(2\nu+1)$ элементов. Но так как матрица состоит из коэффициентов шарового полинома $P(T)$, то его первые $\binom{\nu}{2}$ коэффициентов можно выразить через последние $(2\nu+1)$ коэффициентов.

Покажем, что полиномы[1]

$$\begin{aligned} &P_1(a_{00}^{(1)}, a_{10}^{(1)}, \dots, a_{\nu-2,\nu-2}^{(1)}, 1, 0, 0, \dots, 0),\\ &P_2(a_{00}^{(2)}, a_{10}^{(2)}, \dots, a_{\nu-2,\nu-2}^{(2)}, 0, 1, 0, \dots, 0),\\ &\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \end{aligned} \tag{11}$$

[1] $P_i(a_{00}^{(i)}, a_{10}^{(i)}, \dots, a_{\nu-2,\nu-2}^{(i)}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ обозначает полином вида (6), с коэффициентами, указанными в скобке.

$$P_{2\nu+1}\left(a_{00}^{(2\nu+1)}, a_{10}^{(2\nu+1)}, \ldots, a_{\nu-1,\nu-2}^{(2\nu+1)}, 0, 0, 0, \ldots, 1\right),$$

где первые $\binom{\nu}{2}$ коэффициентов от a_{00} до $a_{\nu-2,\nu-2}$ вычисляются при помощи остальных коэффициентов по формуле (I0), составляют базис пространства $\mathcal{P}(\nu,Q)$.

Действительно, эти полиномы являются шаровыми функциями относительно квадратичной формы $Q(X)$, так как выполняется условие (I0), т.е. условие (I). Они линейно независимы и их всего $(2\nu+1)$, а выше было сказано, что размерность пространства $\mathcal{P}(\nu,Q)$ равна $2\nu+1$.

3. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q_1 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2,$$

где $0 < b_{11} < b_{22} < b_{33}$.

Построим целые автоморфизмы U квадратичной формы Q_1. Согласно определению (3), нетрудно проверить, что целыми автоморфизмами квадратичной формы Q_1 будут:

$$U = \begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_3 \end{bmatrix} \quad (\ell_i = \pm 1;\ i = 1,2,3) \qquad (I2)$$

и только они. Из этих 9 автоморфизмов в дальнейшем будем пользоваться лишь следующими:

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (I3)$$

ибо, как это легко проверить, остальные являются произведениями этих последних.

Рассмотрим всевозможные полиномы $P_h(U_j X)$ $(h = 1,2,\ldots,(2\nu+1)$, где $P_h \in \mathcal{P}(\nu, Q_1)$ – базисные шаровые функции ν-го порядка относительно квадратичной формы Q_1, а $U_j \in G$ – целые автоморфизмы той же квадратичной формы Q_1.

Из (6) и (I3) следует, что

$$P_h(U_1 x) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} a_{ki}^{(h)} (-x_1)^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} (-1)^k a_{ki}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i},$$

$$P_h(U_2 x) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} a_{ki}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} (-x_3)^{i} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_{ki}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i}.$$

Далее, имеем

$$P_h(x) + P_h(U_1 x) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} (1+(-1)^k) a_{ki}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i},$$

$$P_h(x) + P_h(U_2 x) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} (1+(-1)^i) a_{ki}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i}.$$

Выясним, для каких P_h имеет место хоть одно из равенств

$$P_h(x) + P_h(U_1 x) = 0, \tag{I4}$$

$$P_h(x) + P_h(U_2 x) = 0. \tag{I5}$$

Равенство (I4) будет иметь место тогда и только тогда, когда коэффициенты

$$(1+(-1)^k)\, a_{ki}^{(h)} = 0 \tag{I6}$$

для всех k, i. Учитывая строение базиса пространства шаровых функций (II), достаточно показать справедливость (I6) для последних $2\nu+1$ коэффициентов от $a_{\nu-1 0}^{(h)}$ до $a_{\nu\nu}^{(h)}$, т.е. когда $k=\nu-1, \nu$; $i=0,1,\dots,k$. Эти последние коэффициенты $a_{ki}^{(h)}$ все равны нулю, кроме одного, равного единице. Пусть $a_{ki}^{(h)}=1$ для некоторой пары k, i, причем $\nu-1 \le k \le \nu$, $0 \le i \le k$; тогда если k – нечетное, то $(1+(-1)^k)\, a_{ki}^{(h)} = 0$, т.е. P_h удовлетворяет равенству (I4), если среди последних $2\nu+1$ коэффициентов индекс k коэффициента, равного единице, – нечетное число. Аналогичным рассуждением следует, что P_h удовлетворяетряет равенству (I5), если среди последних $2\nu+1$ коэффициентов индекс i коэффициента, равного единице, – нечетное число.

Подсчитаем, сколько имеется полиномов P_k, удовлетворяющих хоть одному из равенств (I4) или (I5), т.е. следует подсчитать, сколько имеется коэффициентов a_{ki} с $\nu-1\leq k\leq\nu$, $0\leq i\leq k$ хоть один индекс которых нечетное число. Имеем следующие случаи:

а) Если $2\nmid k$, то $k=\nu+1$. Общее количество коэффициентов с $k=\nu-1$ равно $\sum\limits_{i=0}^{\nu-1} 1=\nu$.

б) Если $2|k$, но $2\nmid i$, тогда $k=\nu$, $0\leq i\leq\nu$, $2\nmid i$. Общее количество коэффициентов с такими индексами равно

$$\sum_{\substack{i=0\\2\nmid i}}^{\nu} 1=\frac{\nu}{2}.$$

Таким образом, всего имеется

$$\nu+\frac{\nu}{2}$$

полиномов P_n, удовлетворяющих хоть одному из равенств (I4) или (I5). Но для таких полиномов, согласно лемме I,

$$\vartheta(\tau, P_n, Q_1)=0.$$

Итак, мы показали, что среди $2\nu+1$ тета-рядов, соответствующих линейно независимым шаровым функциям, $\nu+\frac{\nu}{2}$ будут нулевыми. Следовательно, максимальное число линейно независимых тета-рядов, т.е.

$$\dim T(\nu, Q_1)\leq 2\nu+1-\nu-\frac{\nu}{2}=\frac{\nu}{2}+1. \tag{I7}$$

Аналогично, для квадратичных форм

$$Q_2=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2),$$

$$Q_3=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+b_{12}x_1x_2,$$

$$Q_4 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{13} x_1 x_3 ,$$

$$Q_5 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{23} x_2 x_3 ,$$

$$Q_6 = b_{11} x_1^2 + b_{22} (x_2^2 + x_3^2) + b_{12} x_1 x_2 ,$$

$$Q_7 = b_{11} x_1^2 + b_{22} (x_2^2 + x_3^2) + b_{13} x_1 x_3 ,$$

$$Q_8 = b_{11} x_1^2 + b_{22} (x_2^2 + x_3^2) + b_{12} (x_1 x_2 + x_1 x_3) ,$$

$$Q_9 = b_{11} x_1^2 + b_{22} (x_2^2 + x_3^2) + b_{12} (x_1 x_2 + x_1 x_3) + b_{23} x_2 x_3 ,$$

$$Q_{10} = b_{11} x_1^2 + b_{22} (x_2^2 + x_3^2) + b_{23} x_2 x_3 ,$$

где $0 < |b_{12}| < b_{11} < b_{12} < b_{22} < b_{33}$, $|b_{13}| < b_{11}$, $|b_{23}| < b_{22}$, построив соответствующие целые автоморфизмы и для каждой квадратичной формы Q рассмотрев всевозможные полиномы $P_h(U_j X)$ $(h = 1, 2, \ldots, (2\nu+1))$, где $P_h \in \mathcal{P}(\nu, Q)$ – базисные шаровые функции ν-го порядка относительно квадратичной формы Q, а $U_j \in G$ –целые автоморфизмы той же квадратичной формы Q, исследуем множества $\{\vartheta(\tau, P_h(U_j X), Q(X)\}_{h,j}$. Из этих множеств отбрасывая нулевые тета-ряды, а затем из оставшихся сохраняя лишь те, через которые линейно выражаются остальные, получаем, что

$$\dim T(\nu, Q_2) \leq \frac{\nu}{4} + 1 \qquad \text{при} \quad \nu \equiv 0 \pmod 4,$$

$$\dim T(\nu, Q_2) \leq \frac{\nu+2}{2} \qquad \text{при} \quad \nu \equiv 2 \pmod 4,$$

$$\dim T(\nu, Q_3), \dim T(\nu, Q_4), \ldots, \dim T(\nu, Q_9) \leq \nu + 1,$$

$$\dim T(\nu, Q_{10}) \leq \frac{\nu}{2} + 1.$$

4. Из (17) при $\nu = 2$ и $\nu = 4$ следует, что $\dim T(2, Q_1) \leq 2$ и $\dim T(4, Q_1) \leq 3$ соответственно. Теперь покажем, что $\dim T(2, Q_1) = 2$ и $\dim T(4, Q_1) = 3$.

Для квадратичной формы Q_1 имеем:

$$D = 8b_{11}b_{22}b_{33},\ A_{11} = 4b_{22}b_{33},\ A_{22} = 4b_{11}b_{33},\ A_{33} = 4b_{11}b_{22}.$$

Следовательно, согласно (4) и (5)

$$\varphi_{11} = x_1^2 - \frac{1}{3b_{11}}Q_1, \tag{18}$$

$$\varphi_{22} = x_2^2 - \frac{1}{3b_{22}}Q_1, \tag{19}$$

$$\varphi_{1111} = x_1^4 - \frac{6}{7b_{11}}x_1^2Q_1 + \frac{3}{35b_{11}^2}Q_1^2, \tag{20}$$

$$\varphi_{2222} = x_2^4 - \frac{6}{7b_{22}}x_2^2Q_1 + \frac{3}{35b_{22}^2}Q_1^2, \tag{21}$$

$$\varphi_{3333} = x_3^4 - \frac{6}{7b_{33}}x_3^2Q_1 + \frac{3}{35b_{33}^2}Q_1^2. \tag{22}$$

Уравнение

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = n \tag{23}$$

1) при $n = b_{11}$ имеет 2 решения:

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = 0;$$

2) при $n = b_{22}$,

а) если $b_{22} \neq b_{11}h^2$, имеет 2 решения:

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = \pm 1;$$

б) если $b_{22} = b_{11}h^2$, имеет 4 решения:

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = \pm 1,$$
$$x_1 = \pm h, \quad x_2 = x_3 = 0;$$

3) при $n = b_{33}$,

а) если $b_{33} \neq b_{11}l^2$, $b_{33} \neq b_{22}q^2$ и $b_{33} \neq b_{11}u^2 + b_{22}v^2$, имеет 2 решен

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \pm 1;$$

б) если $b_{33} = b_{11}l^2$, но $b_{33} \neq b_{22}q^2$ и $b_{33} \neq b_{11}u^2 + b_{22}v^2$, имее 4 решения:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$
$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = 0;$$

в) если $b_{33} = b_{22}q^2$, но $b_{33} \neq b_{11}l^2$, $b_{33} \neq b_{11}u^2 + b_{22}v^2$. имеет 4 решения

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_3=0,\ x_2=\pm q;$$

г) если $b_{33}=b_{11}l^2$, $b_{33}=b_{22}q^2$, но $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2$, имеет 6 решений:

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm l,\ x_2=x_3=0,$$
$$x_1=x_3=0,\ x_2=\pm q;$$

д) если $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, но $b_{33}\neq b_{11}l^2$, $b_{33}\neq b_{22}q^2$, имеет 6 решений:

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\pm v,\ x_3=0,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\mp v,\ x_3=0;$$

е) если $b_{33}=b_{11}l^2$, $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, но $b_{33}\neq b_{22}q^2$, имеет 8 решений:

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm l,\ x_2=x_3=0,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\pm v,\ x_3=0,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\mp v,\ x_3=0;$$

ж) если $b_{33}=b_{22}q^2$ и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, но $b_{33}\neq b_{11}l^2$, имеет 8 решений:

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_3=0,\ x_2=\pm q,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\pm v,\ x_3=0,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\mp v,\ x_3=0;$$

з) если $b_{33}=b_{11}l^2$, $b_{33}=b_{22}q^2$ и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, имеет 10 решений:

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_3=0,\ x_2=\pm q,$$
$$x_1=\pm l,\ x_2=x_3=0,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\pm v,\ x_3=0,$$
$$x_1=\pm u,\ x_2=\mp v,\ x_3=0.$$

Проделывая простые вычисления, при помощи этих решений, согласно (18) и (19), в том случае, когда $b_{22}\neq b_{11}h^2$, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1^2-\frac{1}{3b_{11}}Q_1\Big)z^n=\frac{4}{3}z^{b_{11}}+\ldots+\Big(-\frac{2b_{22}}{3b_{11}}\Big)z^{b_{22}}+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_2^2-\frac{1}{3b_{22}}Q_1\Big)z^n=\Big(-\frac{2b_{11}}{3b_{22}}\Big)z^{b_{11}}+\ldots+\frac{4}{3}z^{b_{22}}+\ldots.$$

Эти обобщенные тернарные тета-ряды линейно независимы, так как определитель второго порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов при $z^{b_{11}}$ и $z^{b_{22}}$, отличен от нуля.

Аналогично, в том случае, когда $b_{22}=b_{11}h^2$, получим:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1^2-\frac{1}{3b_{11}}Q_1\Big)z^n=\frac{4}{3}z^{b_{11}}+\ldots+\frac{2}{3}h^2z^{b_{22}}+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_2^2-\frac{1}{3b_{22}}Q_1\Big)z^n=-\frac{2}{3h^2}z^{b_{11}}+\ldots+\frac{2}{3}z^{b_{22}}+\ldots.$$

Эти обобщенные тернарные тета-ряды так же, как и выше, линейно независимы. Выше же было оказано, что $\dim T(2,Q_1)\leq 2$; следовательно, $\dim T(2,Q_1)=2$.

Таким образом, доказана

<u>Теорема I.</u> $\dim T(2,Q_1)=2$ и система обобщенных тернарных тета-рядов $\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)$ является базисом пространства $T(2,Q_1)$.

Проделывая простые вычисления, при помощи решений уравнения (23), согласно (20)-(22), в том случае, когда $b_{22}\neq b_{11}h^2$, $b_{33}\neq b_{11}l^2$, $b_{33}\neq b_{22}q^2$ и $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2$, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1^4-\frac{6}{7b_{11}}x_1^2Q_1+\frac{3}{35b_{11}^2}Q_1^2\Big)z^n=$$
$$=\frac{16}{35}z^{b_{11}}+\ldots+\frac{6b_{11}^2}{35b_{11}^2}z^{b_{12}}+\ldots+\frac{6b_{33}^2}{35b_{11}^2}z^{b_{33}}$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_2^4-\frac{6}{7b_{22}}x_2^2Q_1+\frac{3}{35b_{22}^2}Q_1^2\Big)z^n=$$
$$=\frac{6b_{11}^2}{35b_{22}^2}z^{b_{11}}+\ldots+\frac{16}{35}z^{b_{22}}+\ldots+\frac{6b_{33}^2}{35b_{22}^2}z^{b_{33}}+\ldots$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{3333},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n} x_3^4-\frac{6}{7b_{33}}x_3^2Q_1+\frac{3}{35b_{33}^2}Q_1^2\Big)z^n=$$

$$=\frac{6b_{11}^2}{35b_{33}^2}z^{b_{11}}+\dots+\frac{6b_{22}^2}{35b_{33}^2}z^{b_{22}}+\dots+\frac{16}{35}z^{b_{33}}+\dots$$

Эти обобщенные тернарные тета-ряды линейно независимы, так как определитель 3-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов при $z^{b_{11}}$, $z^{b_{22}}$, $z^{b_{33}}$ отличен от нуля.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что и в остальных случаях тета-ряды $\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_1)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_1)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{3333},Q_1)$ линейно независимы. Выше же было сказано, что $\dim T(4,Q_1)\leqslant 3$; следовательно, $\dim T(4,Q_1)=3$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. $\dim T(4,Q_1)=3$ и система обобщенных тернарных тета-рядов $\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_1)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_1)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{3333},Q_1)$ является базисом пространства $T(4,Q_1)$.

Таким же путем доказываются и следующие теоремы:

Теорема 3. Пусть

$$Q_2=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2),$$

где $0<b_{11}<b_{22}$. Тогда $\dim T(2,Q_2)=1$ и обобщенный тернарный тета-ряд

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_1^2-\frac{1}{3b_{11}}Q_2\Big)z^n$$

является базисом пространства $T(2,Q_2)$, а $\dim T(4,Q_2)=2$ и система обобщенных тернарных тета-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_1^4-\frac{6}{7b_{11}}x_1^2Q_2+\frac{3}{35b_{11}^2}Q_2^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{Q_2=n}x_2^4-\frac{6}{7b_{22}}x_2^2Q_2+\frac{3}{35b_{22}^2}Q_2^2\Big)z^n$$

является базисом пространства $T(4,Q_2)$.

Теорема 4. Пусть $Q_3=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+b_{12}x_1x_2$, где $0<|b_{12}|<b_{11}<b_{22}<b_{33}$. Тогда $\dim T(2,Q_3)=3$ и система обобщенных тернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1^2-\frac{4b_{22}}{3(4b_{11}b_{22}-b_{12}^2)}Q_3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_2^2-\frac{4b_{11}}{3(4b_{11}b_{22}-b_{12}^2)}Q_3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_3^2-\frac{Q_3}{3b_{33}}\Big)z^n$$

является базисом пространства $T(2,Q_3)$.

Теорема 5. Пусть $Q_{10}=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{23}x_2x_3$,

где $0<|b_{23}|<b_{22}$, $b_{11}<b_{22}$. Тогда $\dim T(2,Q_{10})=2$ и система обобщенных тернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_{10})=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}x_1^2-\frac{1}{3b_{11}}Q_{10}\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_{10})=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}x_2^2-\frac{4b_{22}}{3(4b_{22}^2-b_{23}^2)}Q_{10}\Big)z^n$$

является базисом пространства $T(2,Q_{10})$.

Поступила 17.XI.1988

Кафедра
алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. E.Hecke. Mathematische Werke. Göttingen, 1970.

2. F.Gooding. J. Number Theory, 9, 1977, 36-47.

3. Г.А.Ломадзе. Сообщения АН ГССР, 69, № 3, 1973, 533-536.

ქ. შავგულიძე

განზოგადებულ სამჯერად თეტა-მწკრივთა სივრცეების განზომილებისათვის

რეზიუმე

განხილულია ზოგიერთი დადებითი დაყვანილი სამცვლადიანი კვადრატული ფორმა, დადგენილია ამ კვადრატული ფორმების მიმართ განზოგადებულ სამჯერად თეტა-მწკრივთა სივრცეების განზომილების ზედა საზღვარი და რიგ შემთხვევაში თვით განზომილება.

K. Shavgulidze

TO WARD THE DIMENSION OF SPACES OF GENERALIZED TERNARY THETA-SERIES

Summary

Some positive reduced ternary quadratic forms are considered. The upper bound of the dimension, and in a number of cases the dimension itself of spaces of generalized ternary theta-series with respect to the quadratic forms in question is established.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

288, 1989

УДК 517.564-511.46

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ КВАТЕРНАРНЫХ ТЭТА-РЯДОВ. II

К.Ш.Шавгулидзе

Настоящее второе сообщение является непосредственным продолжением первого /I/ и в нем сохраняются все прежние обозначения. Здесь вычисляется размерность пространств обобщенных тэта-рядов с шаровыми функциями четвертого порядка относительно некоторых приведенных положительных кватернарных квадратичных форм.

Известно, что (/2/, с.533) среди однородных полиномов четвертой степени от n переменных

$$\varphi_{ijkl} = x_i x_j x_k x_l - \frac{1}{(n+4)D}\left(A_{ij} x_k x_l + A_{ik} x_j x_l + A_{il} x_j x_k + A_{jk} x_i x_l + A_{jl} x_i x_k + A_{kl} x_i x_j\right)\cdot 2Q(x) + \frac{1}{(n+2)(n+4)D^2}\left(A_{ij} A_{kl} + A_{ik} A_{jl} + A_{il} A_{jk}\right)\left(2Q(x)\right)^2 \quad (i,j,k,l=1,2,\dots,n) \tag{I}$$

имеется точно $\frac{1}{24}n(n^2-1)(n+6)$ линейно независимых, образующих базис пространства шаровых функций четвертого порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$Q_2 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2),$$

где $0 < b_{11} < b_{22} < b_{33}$. Мы показали (/3/, с.51), что $\dim M(2,Q$

$\le \left(\frac{\nu}{4}+1\right)^2$ при $\nu \equiv 0 \pmod 4$; отсюда при $\nu=4$ следует, что $\dim \mathcal{M}(4,Q_2)\le 4$. Теперь покажем, что $\dim \mathcal{M}(4,Q_2)=4$.

Для квадратичной формы Q_2 имеем: $D=16b_{11}b_{22}b_{33}^2$, $A_{11}=8b_{22}b_{33}^2$, $A_{22}=8b_{11}b_{33}^2$, $A_{33}=A_{44}=8b_{11}b_{22}b_{33}$, $A_{ij}=0$ при $i\ne j$. Следовательно, согласно (I),

$$\varphi_{1111}=x_1^4-\frac{3}{4b_{11}}Q_2x_1^2+\frac{1}{16b_{11}^2}Q_2^2, \tag{2}$$

$$\varphi_{2222}=x_2^4-\frac{3}{4b_{22}}Q_2x_2^2+\frac{1}{16b_{22}^2}Q_2^2, \tag{3}$$

$$\varphi_{3333}=x_3^4-\frac{3}{4b_{33}}Q_2x_3^2+\frac{1}{16b_{33}^2}Q_2^2, \tag{4}$$

$$\varphi_{1122}=x_1^2x_2^2-\frac{1}{8b_{11}}x_2^2Q_2-\frac{1}{8b_{22}}x_1^2Q_2+\frac{1}{6\cdot 8\cdot b_{11}b_{22}}Q_2^2. \tag{5}$$

Уравнение

$$b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}(x_3^2+x_4^2)=n$$

1) при $n=b_{11}$ имеет 2 решения:

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=x_3=x_4=0;$$

2) при $n=b_{22}$,

а) если $b_{22}\ne b_{11}m^2$, имеет 2 решения:

$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm 1;$$

б) если $b_{22}=b_{11}m^2$, имеет 4 решения:

$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm 1,$$
$$x_1=\pm m,\quad x_2=x_3=x_4=0;$$

3) при $n=b_{33}$,

а) если $b_{33}\ne b_{11}l^2$, $b_{33}\ne b_{22}q^2$ и $b_{33}\ne b_{11}u^2+b_{22}v^2$, имеет 4 решения*:

$$x_1=x_2=x_3=0,\quad x_4=\pm 1,$$
$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1;$$

б) если $b_{33}=b_{11}l^2$, но $b_{33}\ne b_{22}q^2$ и $b_{33}\ne b_{11}u^2+b_{12}v^2$, имеет 6 решений:

---

* Здесь и ниже m, l, q, u, v, s – целые числа.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1,$$
$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$
$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

в) если $b_{33} = b_{22} q^2$, но $b_{33} \neq b_{11} l^2$ и $b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2$, имеет 6 решений:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1,$$
$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$
$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm q;$$

г) если $b_{33} = b_{11} l^2$ и $b_{33} = b_{22} q^2$, но $b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2$, имеет 8 решений:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1,$$
$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$
$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$
$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm q;$$

д) если $b_{33} = b_{11} u^2 + b_{22} v^2$, но $b_{33} \neq b_{11} l^2$ и $b_{33} \neq b_{22} q^2$, имеет 8 решений:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1,$$
$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$
$$x_1 = \pm u, \quad x_2 = \pm v, \quad x_3 = x_4 = 0,$$
$$x_1 = \pm u, \quad x_2 = \mp v, \quad x_3 = x_4 = 0;$$

е) если $b_{33} = b_{11} l^2$ и $b_{33} = b_{11} u^2 + b_{22} v^2$, но $b_{33} \neq b_{22} q^2$, имеет 10 решений:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1,$$
$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$
$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$
$$x_1 = \pm u, \quad x_2 = \pm v, \quad x_3 = x_4 = 0,$$
$$x_1 = \pm u, \quad x_2 = \mp v, \quad x_3 = x_4 = 0;$$

ж) если $b_{33}=b_{22}q^2$ и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, но $b_{33}\neq b_{11}\ell^2$, имеет 10 решений:

$$x_1=x_2=x_3=0,\quad x_4=\pm 1,$$
$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm q,$$
$$x_1=\pm u,\quad x_2=\pm v,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm u,\quad x_2=\mp v,\quad x_3=x_4=0;$$

з) если $b_{33}=b_{11}\ell^2$, $b_{33}=b_{22}q^2$ и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, имеет 12 решений:

$$x_1=x_2=x_3=0,\quad x_4=\pm 1,$$
$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm\ell,\quad x_2=x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm q,$$
$$x_1=\pm u,\quad x_2=\pm v,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm u,\quad x_2=\mp v,\quad x_3=x_4=0;$$

4) при $n=b_{11}+b_{22}$,

а) если $b_{11}+b_{22}\neq b_{11}s^2$ и $b_{11}+b_{22}\neq b_{33}$, имеет 4 решения:

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=\mp 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_2=\pm 1,\quad x_3=x_4=0;$$

б) если $b_{11}+b_{22}=b_{11}s^2$, но $b_{11}+b_{22}\neq b_{33}$, имеет 6 решений:

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=\mp 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_2=\pm 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm s,\quad x_2=x_3=x_4=0;$$

в) если $b_{11}+b_{22}\neq b_{11}s^2$ и $b_{11}+b_{22}=b_{33}$, имеет 8 решений:

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=\mp 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_2=\pm 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_2=x_3=0,\quad x_4=\pm 1;$$

г) если $b_{11}+b_{22}=b_{11}s^2$ и $b_{11}+b_{22}=b_{33}$, имеет 10 решений:

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=\mp 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_2=\pm 1,\quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm s,\quad x_2=x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_2=x_3=0,\quad x_4=\pm 1.$$

Проделывая простые вычисления, при помощи этих решений, согласно (2)-(5), в том случае, когда $b_{22}\neq b_{11}m^2$, $b_{33}\neq b_{11}l^2$, $b_{33}\neq b_{22}q^2$, $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2$, $b_{11}+b_{22}\neq b_{11}s^2$, $b_{11}+b_{22}\neq b_{33}$, получаем разложения:

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_2)&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_1^4-\frac{3}{4b_{11}}Q_2x_1^2+\frac{1}{16b_{11}^2}Q_2^2\Big)z^n=\\&=\frac{5}{8}z^{b_{11}}+\dots+\frac{b_{22}^2}{8b_{11}^2}z^{b_{22}}+\dots+\frac{b_{33}^2}{4b_{11}^2}z^{b_{33}}+\dots+\\&+\Big(4-\frac{3(b_{11}+b_{22})}{b_{11}}+\frac{(b_{11}+b_{22})^2}{4b_{11}^2}\Big)z^{b_{11}+b_{22}}+\dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_2)&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_2^4-\frac{3}{4b_{22}}Q_2x_2^2+\frac{1}{16b_{22}^2}Q_2^2\Big)z^n=\\&=\frac{b_{11}^2}{8b_{22}^2}z^{b_{11}}+\dots+\frac{5}{8}z^{b_{22}}+\dots+\frac{b_{33}^2}{4b_{22}^2}z^{b_{33}}+\dots+\\&+\Big(4-\frac{3(b_{11}+b_{22})}{b_{22}}+\frac{(b_{11}+b_{22})^2}{4b_{22}^2}\Big)z^{b_{11}+b_{22}}+\dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau,\varphi_{3333},Q_2)&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_3^4-\frac{3}{4b_{33}}Q_2x_3^2+\frac{1}{16b_{33}^2}Q_2^2\Big)z^n=\\&=\frac{b_{11}^2}{8b_{33}^2}z^{b_{11}}+\dots+\frac{b_{22}^2}{8b_{33}^2}z^{b_{22}}+\dots+\frac{5}{8}z^{b_{33}}+\dots+\\&+\frac{(b_{11}+b_{22})^2}{4b_{33}}z^{b_{11}+b_{22}}+\dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau,\varphi_{1122},Q_2)&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_1^2x_2^2-\frac{1}{8b_{11}}Q_2x_2^2-\frac{1}{8b_{22}}Q_2x_1^2+\\&+\frac{1}{48b_{11}b_{22}}Q_2^2\Big)z^n=\frac{-5b_{11}}{24b_{22}}z^{b_{11}}+\dots+\Big(-\frac{5b_{22}}{24b_{11}}\Big)z^{b_{22}}+\dots+\\&+\frac{b_{33}^2}{12b_{11}b_{22}}z^{b_{33}}+\dots+\Big(4-\frac{b_{11}+b_{22}}{2b_{11}}-\frac{b_{11}+b_{22}}{2b_{22}}+\frac{(b_{11}+b_{22})^2}{12b_{11}b_{22}}\Big)z^{b_{11}+b_{22}}\end{aligned}$$

эти обобщенные кватернарные тэта-ряды линейно независимы, так как определитель 4-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов при $z^{b_{11}}$, $z^{b_{22}}$, $z^{b_{33}}$ и $z^{b_{11}+b_{22}}$, отличен от нуля.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что и в остальных случаях эти тэта-ряды линейно независимы. Выше же было сказано, что $\dim T(4,Q_2)\leq 4$. Следовательно, $\dim T(4,Q_2)=4$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. $\dim T(4,Q_2)=4$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов $\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_2)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_2)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{3333},Q_2)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{1122},Q_2)$ является базисом пространства $T(4,Q_2)$.

Таким же путем доказываются и следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть

$$Q_3=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{44}x_4^2,$$

где $0<b_{11}<b_{22}<b_{44}$. Тогда $\dim T(4,Q_3)=4$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1^4-\frac{3}{4b_{11}}Q_3x_1^2+\frac{1}{16b_{11}^2}Q_3^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{2222},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_2^4-\frac{3}{4b_{22}}Q_3x_2^2+\frac{1}{16b_{22}^2}Q_3^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{4444},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_4^4-\frac{3}{4b_{44}}Q_3x_4^2+\frac{1}{16b_{44}^2}Q_3^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{1122},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1^2x_2^2-\frac{1}{8b_{11}}Q_3x_2^2-\frac{1}{8b_{22}}Q_3x_1^2+\frac{1}{48b_{11}b_{22}}Q_3^2\Big)z^n$$

является базисом пространства $T(4,Q_3)$.

Теорема 3. Пусть

$$Q_4=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2),$$

где $0<b_{11}<b_{22}$. Тогда $\dim T(4,Q_4)=2$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{1111},Q_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_4=n}x_1^4-\frac{3}{4b_{11}}Q_4x_1^2+\frac{1}{16b_{11}^2}Q_4^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, \varphi_{2222}, Q_4) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q_4 = n} x_4^2 - \frac{3}{4b_{22}} Q_4 x_2^2 + \frac{1}{16 b_{22}^2} Q_4^2 \Big) z^n$$

является базисом пространства $T(4, Q_4)$.

Поступила 17.XI.1988

Кафедра
алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. К.Ш.Шавгулидзе. Труды ТГУ. Математика. Механика. Астрономия, 278, 1988, 25–45.
2. Г.А.Ломадзе. Сообщения АН ГССР, 69, № 3, 1973, 533–536.
3. К.Ш.Шавгулидзе. Труды ТГУ, Математика. Механика. Астрономия, 264, 1986, 42–56.

ქ. შავგულიძე

განზოგადებულ ოთხარა თეტა-ფუნქციათა სივრცეების განზომილების შესახებ. II.

რეზიუმე

აგებულია ზოგიერთი დაყვანილი დადებითი ოთხცვლადიანი კვადრატული ფორმის მიმართ მეოთხე რიგის ზირთვიულ ფუნქციებიანი განზოგადებული თეტა-მწკრივების სივრცეთა ბაზისები და დადგენილია ამ სივრცეების განზომილება.

K. Shavgulidze

ON THE DIMENSION OF SPACES OF GENERALIZED QUATERNARY THETA-SERIES. II

Summary

The bases of the spaces of generalized theta-series with spherical functions of fourth order with respect to some reduced positive quaternary quadratic forms are constructed and the dimension of these spaces is established.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

288, 1989

УДК 511+512

О ЧИСЛЕ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ. II

Н.Д.Качахидзе

Пусть $a_p(n)$ обозначает число неприводимых представлений симметрической группы S_n над полем простой характеристики p. В /1/ получены явные точные формулы для $a_p(n)$ при $p=3,5$ и 7. В /2/ несколько иным путём – при помощи известных базисов некоторых пространств параболических форм – получены формулы для $a_p(n)$ при $p=7,11$ и 13.

В п.2 настоящей работы построен базис пространства параболических форм веса 8 относительно группы $\Gamma_0(17)$ и с квадратичным характером $\chi(d)=\left(\frac{d}{17}\right)$, состоящий из обобщенных кватернарных тэта-рядов с шаровыми функциями, а в п.3 при помощи построенного базиса получена явная точная формула для $a_{17}(n)$.

1.1. Пусть

$$Q(x)=Q(x_1,\ldots,x_f)=\sum_{1\le r\le s\le f} b_{rs}x_r x_s$$

– положительная квадратичная форма от f (f – четное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs}, D – определитель квадратичной формы

$$2Q(x)=\sum_{r,s=1}^{f} a_{rs}x_r x_s \quad (a_{rr}=2b_{rr};\ a_{rs}=a_{sr}=b_{rs},\ r<s);$$

A_{rs} - алгебраические дополнения элементов a_{rs} в D;

Δ - дискриминант квадратичной формы $Q(x)$, т.е. $\Delta=(-1)^{f/2}D$; δ =н.о.д. $\left(\frac{A_{rr}}{2}, A_{rs}\right)$ $(r,s=1,2,\ldots,f)$; $N=\frac{D}{\delta}$ - ступень квадратичной формы $Q(x)$; $\chi(d)$ - характер квадратичной формы $Q(x)$ который при $N=p>2$ будет квадратичным характером по $mod\ p$, т.е. $\chi(d)=\left(\frac{d}{p}\right)$. В дальнейшем будем говорить, что $Q(x)$ является квадратичной формой веса $\frac{f}{2}$, ступени N и с характером χ . Пусть, наконец, $P_\nu(x)=P_\nu(x_1,\ldots,x_f)$ - шаровая функция ν -го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Для удобства ссылок сформулируем в виде лемм следующие известные результаты.

Лемма I (/3/, с.846). При заданных f и N существует лишь конечное число дискриминантов квадратичных форм. Они являются делителями числа N^f .

Лемма 2 (/3/, с.855). Пусть $Q(x)$ - квадратичная форма веса $\frac{f}{2}$, ступени N и с характером χ , а $P_\nu(x)$ - относящаяся к ней шаровая функция ν -го порядка. Тогда при $\nu>0$ обобщенный f -кратный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau,Q(x),P_\nu(x))=\sum_{x\in\mathbb{Z}^f} P_\nu(x)z^{Q(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{Q(x)=n} P_\nu(x)\right)z^n \qquad (I)$$

будет параболической формой веса $\frac{f}{2}+\nu$ относительно группы $\Gamma_0(N)$ и с характером χ . Здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $z=e^{2\pi i\tau}$, причем $\Im m\,\tau>0$.

Лемма 3 (/4/, с.65,66). Однородные полиномы ν -той степени от f переменных

$$\varphi^{1)}_{r\dots r} = x_r^{\nu} + \sum_{h=1}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^h \frac{\left(\frac{f}{2}+\nu-h-2\right)!}{\left(\frac{f}{2}+\nu-2\right)!} \left(\frac{Q(x)}{D}\right)^h G_h \tag{2}$$

$$(r=1,2,\dots,f),$$

где

$$G_h = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-2h+1)}{h!} \left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^h x_r^{\nu-2h}$$

и

$$\varphi_{r\dots rst} = x_r^{\nu-2} x_s x_t + \sum_{h=1}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^h \frac{\left(\frac{f}{2}+\nu-h-2\right)!}{\left(\frac{f}{2}+\nu-2\right)!} \left(\frac{Q(x)}{D}\right)^h G_h \tag{3}$$

$$(r,s,t=1,2,\dots,f),$$

где

$$G_1 = (\nu-2)(\nu-3)\frac{A_{rr}}{2} x_r^{\nu-4} x_s x_t + (\nu-2)(A_{rs}x_t + A_{rt}x_s)x_r^{\nu-3} + A_{st}x_r^{\nu-2},$$

$$G_h = \frac{(\nu-2)\cdots(\nu-2h-1)}{h!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^h x_r^{\nu-2h-2} x_s x_t +$$

$$+ \frac{(\nu-2)\cdots(\nu-2h)}{(h-1)!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^{h-1}(A_{rs}x_t + A_{rt}x_s)x_r^{\nu-2h-1} +$$

$$+ \frac{(\nu-2)\cdots(\nu-2h+1)}{(h-2)!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^{h-2} A_{rs}A_{rt}x_r^{\nu-2h} +$$

$$+ \frac{(\nu-2)\cdots(\nu-2h+1)}{(h-1)!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^{h-1} A_{st}x_r^{\nu-2h} \quad \text{при } h \geq 2,$$

являются шаровыми функциями ν-того порядка относительно п[олож]ительной квадратичной формы $Q(x)$.

I.2. Пусть, как обычно, $S_k(p,\chi)$ обозначает пространство параболических форм веса k относительно группы $\Gamma_0(p)$ с квадратичным характером $\chi=\chi(d)=\left(\frac{d}{p}\right)$; $\eta(\tau)$ и $\mathcal{L}(k,\chi)$ соответственно обозначают η-функцию Дедекинда и $\mathcal{L}$-функцию [Ди]рихле. Известно (см.напр., /I/), что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z^{pn})^p}{1-z^n}$$

и

$$\frac{\eta^p(p\tau)}{\eta(\tau)} = z^{\frac{p^2-1}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) z^n .$$

---

1) Здесь и всюду в дальнейшем полиномы φ сопровождаются индексами.

Лемма 4 (/I/, с.78). При $p>3$ разность

$$\frac{\eta^p(p\tau)}{\eta(\tau)}-\frac{1}{N_p}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{\frac{p-3}{2},\chi}(n)z^n,$$

где

$$\sigma_{\frac{p-3}{2},\chi}(n)=\sum_{d_1d_2=n}\chi(d_1)d_2^{\frac{p-3}{2}}$$ (5)

и

$$N_p=(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}p^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p-3}{2}\right)!\,L\left(\frac{p-1}{2},\chi\right),$$

принадлежит пространству $S_{\frac{p-1}{2}}(p,\chi)$.

В(/I/, с.79) показано, что

$$N_{17}=59\,901\,794.$$ (6)

Также известно (/2/, с.899), что

$$\dim S_8(17,\chi)=10.$$ (7)

2. Ввиду того, что мы собираемся искать параболические формы веса 8, ступени I7 и с характером χ в виде обобщенных кватернарных тета-рядов, то мы всюду будем брать $f=4$ и $\nu=6$.

Согласно лемме I, дискриминанты квадратичных форм веса 2, ступени I7 и с характером χ надо искать среди делителей числа 17^4. В (/5/, с.146) показано, что существует лишь одна приведенная кватернарная квадратичная форма дискриминанта I7, а именно

$$Q=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2+x_1x_2+x_1x_4+x_3x_4.$$

Нетрудно проверить, что квадратичная форма

$$Q^*=7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2+3x_4^2-7x_1x_2+2x_1x_3-4x_1x_4-x_2x_3+2x_2x_4-3x_3x_4$$

является присоединенной формой к квадратичной форме Q.

Квадратичные формы Q и Q^* являются квадратичными формами веса 2, ступени I7 и с характером $\chi(d)=\left(\frac{d}{17}\right)$, ибо для форм Q и Q^* соответственно имеем: $\Delta = D = 17$, $A_{11} = 14$, $A_{22} = 12$, $A_{33} = 10$, $A_{44} = 6$, $A_{12} = -7$, $A_{13} = A_{24} = 2$, $A_{14} = -4$, $A_{23} = -1$, $A_{34} = -3$, т.е. $\delta = 1$, $N = 17$ и $\Delta^* = D^* = 17^3$, $A^*_{11} = A^*_{22} = 2\cdot 17^2$, $A^*_{33} = 2$ $A^*_{44} = 4\cdot 17^2$, $A^*_{13} = A^*_{23} = A^*_{24} = 0$, $A^*_{14} = A^*_{12} = A^*_{34} = 17^2$, т.е. $\delta^* = 17^2$, $N^* = 17$.

Следовательно, согласно (2) и (3),

$$\varphi_{1\ldots1} = x_1^6 - \frac{35}{17}Qx_1^4 + \frac{294}{17^2}Q^2x_1^2 - \frac{343}{17^3}Q^3,$$

$$\varphi_{2\ldots2} = x_2^6 - \frac{30}{17}Qx_2^4 + \frac{216}{17^2}Q^2x_2^2 - \frac{216}{17^3}Q^3,$$

$$\varphi_{3\ldots3} = x_3^6 - \frac{25}{17}Qx_3^4 + \frac{150}{17^2}Q^2x_3^2 - \frac{125}{17^3}Q^3,$$

$$\varphi_{4\ldots4} = x_4^6 - \frac{15}{17}Qx_4^4 + \frac{54}{17^2}Q^2x_4^2 - \frac{27}{17^3}Q^3,$$

$$\varphi_{4\ldots433} = x_3^2x_4^4 - \frac{Q}{3\cdot17}(18x_3^2x_4^2 - x_4^4 - 6x_3x_4^3) +$$
$$+ \frac{6Q^2}{5\cdot17^2}(3x_3^2 + 13x_4^2 - 12x_3x_4) - \frac{72}{5\cdot17^3}Q^3;$$

$$\varphi^*_{1\ldots1} = x_1^6 - \frac{5}{17}Q^*x_1^4 + \frac{6}{17^2}Q^{*2}x_1^2 - \frac{1}{17^3}Q^{*3},$$

$$\varphi^*_{3\ldots3} = x_3^6 - \frac{5}{17}Q^*x_3^4 + \frac{6}{17^2}Q^{*2}x_3^2 - \frac{1}{17^3}Q^{*3},$$

$$\varphi^*_{4\ldots4} = x_4^6 - \frac{10}{17}Q^*x_4^4 + \frac{24}{17^2}Q^{*2}x_4^2 - \frac{8}{17^3}Q^{*3},$$

$$\varphi^*_{1\ldots133} = x_1^4x_3^2 - \frac{Q^*}{3\cdot17}(6x_1^2x_3^2 + x_1^4) + \frac{Q^{*2}}{5\cdot17^2}(2x_3^2 + 4x_1^2) - \frac{Q^{*3}}{5\cdot17^3},$$

$$\varphi^*_{1\ldots123} = x_1^4x_2x_3 - \frac{Q^*}{3\cdot17}(6x_1^2x_2x_3 + 2x_1^4) + \frac{Q^{*2}}{5\cdot17^2}(2x_2x_3 + 4x_1x_3)$$

Легко проверить, что уравнение $Q = n$

1) при $n = 1$ имеет 8 решений:

$(\pm1,0,0,0)$, $(0,\pm1,0,0)$, $(0,0,\pm1,0)$, $(\pm1,\mp1,0,0)$;

2) при $n = 2$ имеет 24 решения:

$(0,0,0,\pm1)$, $(0,0,\pm1,\mp1)$, $(\pm1,0,0,\mp1)$, $(\pm1,\mp1,\pm1,0)$,
$(0,\pm1,\pm1,0)$, $(\pm1,0,\pm1,0)$, $(\pm1,\mp1,0,\mp1)$, $(\pm1,\mp1,\mp1,0)$,
$(0,\pm1,\mp1,0)$, $(\pm1,0,\mp1,0)$, $(\pm1,0,\pm1,\mp1)$, $(\pm1,\mp1,\pm1,\mp1)$;

3) при $n=3$ имеет I8 решений:

$$(0,\pm1,0,\pm1),\ (0,\mp1,\pm1,\mp1),\ (\pm2,\mp1,0,0),$$
$$(0,\pm1,0,\mp1),\ (\pm1,\pm1,0,0),\ (\pm2,\mp1,0,\mp1),$$
$$(0,\pm1,\pm1,\mp1),\ (\pm1,\mp2,0,0),\ (\pm2,\mp1,\pm1,\mp1);$$

4) при $n=4$ имеет 56 решений:

$$(\pm2,0,0,0),\ (0,0,\pm1,\pm1),\ (\pm1,\mp1,0,\pm1),\ (\pm1,\pm1,\pm1,\mp1),$$
$$(0,\pm2,0,0),\ (\pm1,\pm1,\pm1,0),\ (\pm1,0,\mp1,\pm1),\ (\pm1,\mp1,\mp1,\pm1),$$
$$(0,0,\pm2,0),\ (\pm1,\pm1,\mp1,0),\ (\pm1,0,\mp1,\mp1),\ (\pm2,0,0,\mp1),$$
$$(\pm1,0,0,\pm1),\ (\pm1,\pm1,0,\mp1),\ (\pm1,\mp1,\mp1,\mp1),\ (0,0,\pm2,\mp1),$$
$$(\pm2,\mp1,\mp1,0),\ (\pm1,\mp1,\pm2,\mp1),\ (\pm2,0,\pm1,\mp1),\ (\pm2,\mp2,0,\mp1),$$
$$(\pm2,\mp1,\pm1,0),\ (\pm1,\mp2,\pm1,\mp1),\ (\pm2,\mp2,0,0),\ (\pm2,\mp2,\pm1,\mp1),$$
$$(\pm1,\mp2,\pm1,0),\ (\pm1,\mp2,\mp1,0),\ (\pm1,0,\pm2,\mp1),\ (\pm1,\mp2,0,\mp1);$$

5) при $n=5$ имеет 36 решений:

$$(0,\pm1,\pm2,0),\ (0,\pm1,\pm1,\pm1),\ (\pm1,\mp1,\pm2,0),\ (\pm2,0,\pm1,0),$$
$$(0,\pm1,\mp2,0),\ (0,\mp1,\pm1,\pm1),\ (\pm1,\mp1,\mp2,0),\ (\pm2,0,\mp1,0),$$
$$(0,\pm2,\pm1,0),\ (0,\pm1,\pm2,\mp1),\ (\pm1,0,\pm2,0),\ (\pm2,\mp1,\mp1,\mp1),$$
$$(0,\pm2,\mp1,0),\ (0,\mp1,\pm2,\mp1),\ (\pm1,0,\mp2,0),\ (\pm2,\mp1,\pm2,\mp1),$$
$$(\pm2,\mp2,\pm1,0),\ (\pm2,\mp2,\mp1,0);$$

6) при $n=6$ имеет 54 решения:

$$(\pm1,0,\pm1,\pm1),\ (0,\pm2,\pm1,\mp1),\ (\pm1,\mp2,\mp1,\mp1),\ (\pm2,\mp2,\pm2,\mp1),$$
$$(\pm1,\pm1,0,\pm1),\ (0,\mp2,\pm1,\mp1),\ (\pm1,\mp2,\mp1,\pm1),\ (\pm3,\mp1,0,\mp1),$$

$(\pm1,\pm1,\mp1,\pm1)$, $(\pm1,0,\pm1,\mp2)$, $(\pm1,\mp1,\pm1,\mp2)$, $(\pm3,\mp2,0,\mp1)$,

$(\pm1,\mp1,\pm1,\pm1)$, $(\pm1,\mp2,0,\pm1)$, $(\pm2,0,\mp1,\mp1)$, $(\pm3,\mp1,\pm1,\mp1)$,

$(\pm1,\pm1,\mp1,\mp1)$, $(\pm1,0,\mp2,\pm1)$, $(\pm2,0,\pm2,\mp1)$, $(\pm3,\mp2,\pm1,\mp1)$,

$(0,\pm2,0,\pm1)$, $(\pm1,\pm1,\pm2,\mp1)$, $(\pm2,\mp2,\mp1,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,\pm2,\mp1)$,

$(0,\pm2,0,\mp1)$, $(\pm1,\mp1,\mp2,\pm1)$, $(\pm2,\mp1,\pm1,\mp2)$;

7) при $n=7$ имеет 54 решения:

$(0,0,\pm1,\mp2)$, $(\pm1,0,\pm2,\mp2)$, $(\pm1,\pm1,\mp2,0)$, $(\pm1,\mp1,\pm2,\mp2)$,

$(\pm1,0,0,\mp2)$, $(\pm1,\pm1,\pm2,0)$, $(\pm1,\mp1,0,\mp2)$, $(\pm1,\pm2,0,0)$,

$(\pm1,\mp2,\pm2,0)$, $(\pm2,\pm1,0,\mp1)$, $(\pm2,\mp1,\mp2,0)$, $(\pm2,\mp3,0,\mp1)$,

$(\pm1,\mp2,\mp2,0)$, $(\mp2,\pm1,0,\mp1)$, $(\pm2,\mp1,0,\mp2)$, $(\pm2,\mp3,\pm1,\mp1)$,

$(\pm1,\mp3,0,0)$, $(\pm2,\pm1,\pm1,\mp1)$, $(\pm2,\mp1,\pm2,\mp2)$, $(\pm3,\mp1,0,0)$,

$(\pm2,0,\pm1,\mp2)$, $(\mp2,\pm1,\pm1,\mp1)$, $(\pm2,\mp2,\pm1,\mp2)$, $(\pm3,\mp2,0,0)$,

$(\pm2,\pm1,0,0)$, $(\pm2,\mp1,\pm2,0)$, $(\pm2,\mp3,0,0)$;

8) при $n=8$ имеет 120 решений:

$(0,0,\pm2,\pm1)$, $(\pm1,\mp1,\mp2,\mp1)$, $(\pm2,0,\pm2,0)$, $(\pm2,\mp3,\mp1,0)$,

$(0,0,\pm3,\mp1)$, $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$, $(\pm2,0,\mp2,0)$, $(\pm3,0,0,\mp1)$,

$(0,0,0,\pm2)$, $(\pm1,\pm1,\pm1,\mp2)$, $(\pm2,0,0,\pm1)$, $(\pm3,0,\pm1,\mp1)$,

$(0,0,\pm2,\mp2)$, $(\pm1,\mp1,\pm3,\mp1)$, $(\pm2,0,\mp1,\pm1)$, $(\pm3,\mp1,\pm1,0)$,

$(0,\pm1,\pm1,\mp2)$, $(\pm1,\pm2,\pm1,0)$, $(\pm2,0,0,\mp2)$, $(\pm3,\mp1,\mp1,0)$,

$(0,\mp1,\pm1,\mp2)$, $(\pm1,\pm2,\mp1,0)$, $(\pm2,0,\pm2,\mp2)$, $(\pm3,\mp1,\mp1,\mp1)$,

$(0,\pm2,\pm2,0)$, $(\pm1,\pm2,0,\mp1)$, $(\pm2,\pm1,\pm1,0)$, $(\pm3,\mp1,\pm2,\mp1)$,

$(0,\mp2,\pm2,0)$, $(\pm1,\pm2,\pm1,\mp1)$, $(\pm2,\pm1,\mp1,0)$, $(\pm3,\mp1,\pm1,\mp2)$,

$(0,\pm2,\pm2,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,\pm1,\pm1)$, $(\pm2,\mp2,\pm2,0)$, $(\pm3,\mp2,\pm1,0)$,

$(0,\mp2,\pm2,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,\mp2,\pm1)$, $(\pm2,\mp2,\mp2,0)$, $(\pm3,\mp2,\mp1,0)$,

$(0,\pm2,\pm1,\pm1)$, $(\pm1,\mp2,\pm1,\mp2)$, $(\pm2,\mp2,0,\pm1)$, $(\pm3,\mp2,\mp1,\mp1)$,

$(0,\mp2,\pm1,\pm1)$, $(\pm1,\mp3,\pm1,0)$, $(\pm2,\mp2,\mp1,\pm1)$, $(\pm3,\mp2,\pm2,\mp1)$,

$(\pm1,0,\pm3,\mp1)$, $(\pm1,\mp3,\mp1,0)$, $(\pm2,\mp2,0,\mp2)$, $(\pm3,\mp2,\pm1,\mp2)$,

$(\pm1,0,\mp2,\mp1)$, $(\pm1,\mp3,0,\mp1)$, $(\pm2,\mp2,\pm2,\mp2)$, $(\pm3,\mp3,0,\mp1)$,

$(\pm1,\pm1,\mp2,\pm1)$, $(\pm1,\mp3,\pm1,\mp1)$, $(\pm2,\mp3,\pm1,0)$, $(\pm3,\mp3,\pm1,\mp1)$;

9) при $n=9$ имеет 56 решений:

$(0,0,\pm3,0)$, $(0,\pm1,\pm2,\mp2)$, $(\pm2,\pm1,\mp1,\mp1)$, $(\pm2,\mp3,\pm2,\mp1)$,
$(0,\pm1,\pm2,\pm1)$, $(0,\mp1,\pm2,\mp2)$, $(\pm2,\pm1,\pm2,\mp1)$, $(\pm3,0,0,0)$,
$(0,\mp1,\pm2,\pm1)$, $(0,\pm3,0,0)$, $(\pm2,\mp1,\pm3,\mp1)$, $(\pm3,\mp3,0,0)$,
$(0,\pm1,0,\pm2)$, $(\pm1,\pm1,0,\mp2)$, $(\pm2,\mp1,\pm1,\pm1)$, $(\pm3,\mp1,0,\mp2)$,
$(0,\mp1,0,\pm2)$, $(\pm1,\pm1,\pm2,\mp2)$, $(\pm2,\mp1,\mp2,\pm1)$, $(\pm3,\mp1,\pm2,\mp2)$,
$(0,\pm1,\pm3,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,0,\mp2)$, $(\pm2,\mp1,\mp2,\mp1)$, $(\pm3,\mp2,0,\mp2)$,
$(0,\mp1,\pm3,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,\pm2,\mp2)$, $(\pm2,\mp3,\mp1,\mp1)$, $(\pm3,\mp2,\pm2,\mp2)$,

10) при $n=10$ имеет 108 решений:

$(0,\pm1,\pm3,0)$, $(\pm1,\mp1,\pm3,0)$, $(\pm1,\mp3,\mp1,\pm1)$, $(\pm2,\mp3,\pm1,\mp2)$,
$(0,\mp1,\pm3,0)$, $(\pm1,\mp1,\mp3,0)$, $(\pm1,\mp3,\pm1,\mp1)$, $(\pm3,0,\pm1,0)$,
$(0,\pm3,\pm1,0)$, $(\pm1,\mp1,\pm2,\pm1)$, $(\pm1,\mp3,\pm2,\mp1)$, $(\pm3,0,\mp1,0)$,
$(0,\mp3,\pm1,0)$, $(\pm1,\mp1,\mp3,\pm1)$, $(\pm2,0,\mp2,\pm1)$, $(\pm3,0,\pm2,\mp1)$,
$(\pm1,0,\pm3,0)$, $(\pm1,\mp1,\mp1,\pm2)$, $(\pm2,0,\mp2,\mp1)$, $(\pm3,0,\mp1,\mp1)$,
$(\pm1,0,\mp3,0)$, $(\pm1,\mp1,\mp1,\mp2)$, $(\pm2,0,\pm3,\mp1)$, $(\pm3,0,\pm1,\mp2)$,
$(\pm1,0,\mp3,\pm1)$, $(\pm1,\mp1,\pm3,\mp2)$, $(\pm2,0,\pm1,\pm1)$, $(\pm3,\mp3,\pm1,0)$,
$(\pm1,0,\pm2,\pm1)$, $(\pm1,\pm2,\mp1,\mp1)$, $(\pm2,\pm1,\pm1,\mp2)$, $(\pm3,\mp3,\mp1,0)$,
$(\pm1,0,\mp1,\pm2)$, $(\pm1,\pm2,\pm2,\mp1)$, $(\pm2,\mp1,\pm3,\mp2)$, $(\pm3,\mp3,\pm2,\mp1)$,
$(\pm1,0,\mp1,\mp2)$, $(\pm1,\pm2,0,\pm1)$, $(\pm2,\mp1,\mp1,\mp2)$, $(\pm3,\mp3,\mp1,\mp1)$,
$(\pm1,0,\pm3,\mp2)$, $(\pm1,\pm2,\mp1,\pm1)$, $(\pm2,\mp2,\mp2,\pm1)$, $(\pm3,\mp3,\pm1,\mp2)$,
$(\pm1,\pm1,\pm3,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,\pm3,\mp1)$, $(\pm2,\mp2,\mp2,\mp1)$, $(\pm4,\mp2,0,\mp1)$,
$(\pm1,\pm1,\mp2,\mp1)$, $(\pm1,\mp2,\mp2,\mp1)$, $(\pm2,\mp2,\pm3,\mp1)$, $(\pm4,\mp2,\pm1,\mp1)$,
$(\pm1,\mp3,0,\pm1)$, $(\pm2,\mp2,\pm1,\pm1)$.

Нетрудно проверить, что уравнение $Q^{*}=n$

1) при $n=1$, 2, 4, 8 и 9 решений не имеет;

2) при $n=3$ имеет 2 решения:

$(0,0,0,\pm1)$;

3) при $n=5$ имеет 4 решения:

$$(0,0,\pm1,0),\ (0,0,\pm1,\pm1);$$

4) при $n=6$ имеет 6 решений:

$$(0,\pm1,0,0),\ (\pm1,\pm1,0,0),(\pm1,0,0,\pm1);$$

5) при $n=7$ имеет 6 решений:

$$(\pm1,0,0,0),\ (0,\pm1,0,\mp1),\ (\pm1,\pm1,0,\pm1);$$

6) при $n=10$ имеет 12 решений:

$$(0,\pm1,\pm1,0),\ (\pm1,0,\mp1,0),(\pm1,\pm1,\mp1,0),$$

$$(0,\pm1,\mp1,\mp1),\ (\pm1,0,\pm1,\pm1),\ (\pm1,\mp1,\pm1,\pm1).$$

Взяв в (I) полиномы φ и φ^* вместо $\mathcal{P}_\nu(x)$ и проделав простые вычисления при помощи выписанных решений уравнений $Q=n$ и $Q^*=n$, получим разложения:

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{1\ldots1})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}4913x_1^6-10115nx_1^4+4998n^2x_1^2-343n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{3560}{17^3}z+\frac{8944}{17^3}z^2-\frac{35458}{17^3}z^3-\frac{46736}{17^3}z^4-\frac{848812}{17^3}z^5+\frac{2386828}{17^3}z^6+$$
$$+\frac{1941594}{17^3}z^7-\frac{5355040}{17^3}z^8-\frac{5601912}{17^3}z^9+\frac{7263576}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (8)$$

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{2\ldots2})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}4913x_2^6-8670nx_2^4+3672n^2x_2^2-216n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{2068}{17^3}z-\frac{14340}{17^3}z^2+\frac{147168}{17^3}z^3-\frac{281484}{17^3}z^4-\frac{484}{17^3}z^5-\frac{556604}{17^3}z^6+$$
$$+\frac{2386828}{17^3}z^7-\frac{293716}{17^3}z^8+\frac{807076}{17^3}z^9-\frac{9103420}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (9)$$

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{3\ldots3})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}4913x_3^6-7225nx_3^4+2550n^2x_3^2-125n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{524}{17^3}z-\frac{12066}{17^3}z^2-\frac{23622}{17^3}z^3-\frac{178246}{17^3}z^4-\frac{131040}{17^3}z^5-\frac{726}{17^3}z^6-$$
$$-\frac{1273118}{17^3}z^7+\frac{2677794}{17^3}z^8-\frac{430788}{17^3}z^9+\frac{520002}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (10)$$

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\ldots4})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}4913x_4^6-4335nx_4^4+918n^2x_4^2-27n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{216}{17^3}z-\frac{6204}{17^3}z^2-\frac{11082}{17^3}z^3-\frac{15372}{17^3}z^4-\frac{47244}{17^3}z^5+\frac{441504}{17^3}z^6-$$
$$-\frac{[illegible]}{17^3}z^7-\frac{50340}{17^3}z^8-\frac{433176}{17^3}z^9-\frac{1452}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (11)$$

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\ldots433})=\frac{1}{15\cdot17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}73695x_3^2x_4^4-1445n(18x_3^2x_4^2-6x_3x_4^3)+$$
$$+306n^2(3x_3^2+13x_4^2-12x_3x_4)-216n^3\Big)z^n=$$
$$=\frac{36}{5\cdot17^3}z+\frac{121462}{5\cdot17^3}z^2+\frac{147486}{5\cdot17^3}z^3+\frac{598242}{5\cdot17^3}z^4+\frac{324550}{5\cdot17^3}z^5+\frac{3343416}{5\cdot17^3}z^6+$$
$$+\frac{10171370}{5\cdot17^3}z^7+\frac{13998574}{5\cdot17^3}z^8+\frac{14783376}{5\cdot17^3}z^9+\frac{20757310}{5\cdot17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (12)$$

$$\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{1\ldots1})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q^*=n}4913x_1^6-1445nx_1^4+102n^2x_1^2-n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{54}{17^3}z^3-\frac{500}{17^3}z^5-\frac{1636}{17^3}z^6-\frac{2874}{17^3}z^7-\frac{6696}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (13)$$

$$\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{3\ldots3})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q^*=n}4913x_1^6-1445nx_1^4+102n^2x_1^2-n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{64}{17^3}z^3+\frac{452}{17^3}z^5-\frac{1296}{17^3}z^6-\frac{2068}{17^3}z^7-\frac{4044}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (14)$$

$$\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{4\ldots4})=\frac{1}{17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q^*=n}4913x_4^6-2890nx_4^4+408n^2x_4^2-8n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{602}{17^3}z^3-\frac{2674}{17^3}z^5-\frac{5846}{17^3}z^6+\frac{2236}{17^3}z^7+\frac{4878}{17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (15)$$

$$\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{1\ldots133})=\frac{1}{15\cdot17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q^*=n}73695x_1^4x_3^2-1445n(6x_1^2x^2+x_1^4)+$$
$$+51n^2(4x_1^2+2x_3^2)-3n^3\Big)z^n=$$
$$=-\frac{54}{5\cdot17^3}z^3+\frac{2900}{5\cdot17^3}z^5-\frac{3064}{5\cdot17^3}z^6-\frac{6650}{15\cdot17^3}z^7+\frac{24960}{15\cdot17^3}z^{10}+\ldots, \qquad (16)$$

$$\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{1\ldots123})=\frac{1}{15\cdot17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q^*=n}4335x_1^4x_2x_3-85n(6x_1^2x_2x_3+2x_1^4)+$$
$$+3n^2(2x_2x_3+4x_1x_3)\Big)z^n=$$
$$=-\frac{48}{3\cdot17}z^6-\frac{56}{3\cdot17}z^7-\frac{160}{3\cdot17}z^{10}+\ldots \qquad (17)$$

Согласно лемме 2, эти 10 обобщенных кватернарных тэта-рядов являются параболическими формами веса 8 относительно группы $\Gamma_0(17)$ и с характером $\chi(d)=\left(\frac{d}{17}\right)$. Они линейно независимы, ибо определитель десятого порядка, элементами которого являются их коэффициенты, отличен от нуля. Таким образом, согласно (7) доказана

Теорема. Система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{1\ldots1}),\ \vartheta(\tau,Q,\varphi_{2\ldots2}),\ \vartheta(\tau,Q,\varphi_{3\ldots3}),\ \vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\ldots4}),$$
$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\ldots433}),\ \vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{1\ldots1}),\ \vartheta(\tau,Q^*,\varphi_{3\ldots3}),\ \vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{4\ldots4}),$$
$$\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{1\ldots133}),\ \vartheta(\tau,Q^*,\varphi_{1\ldots123})$$

является базисом пространства $S_8(17,\chi)$.

3. Из (4) и (5) при $p=17$ соответственно следует, что

$$\frac{\eta^{17}(17\tau)}{\eta(\tau)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{17}(n)z^{n+12}=a_{17}(0)z^{12}+\ldots \tag{18}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^*_{7,\chi}(n)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{d_1d_2=n}\Bigl(\frac{d_1}{17}\Bigr)d_2^7\Bigr)z^n=$$
$$=z+129z^2+2186z^3+16513z^4+78124z^5+281994z^6+$$
$$+823542z^7+2113665z^8+4780783z^9+10077996z^{10}+\ldots \tag{19}$$

Согласно (6) и лемме 4 при $p=17$ разность

$$\frac{\eta^{17}(17\tau)}{\eta(\tau)}-\frac{1}{59\,901\,794}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{7,\chi}(n)z^n$$

принадлежит пространству $S_8(17,\chi)$. Следовательно, согласно доказанной выше теореме, существуют числа $c_1,c_2,\ldots,c_{10}$ такие, что

$$\frac{\eta^{17}(17\tau)}{\eta(\tau)}-\frac{1}{59\,901\,794}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{7,\chi}(n)z^n=c_1\vartheta(\tau,Q,\varphi_{1\ldots1})+$$
$$+c_2\vartheta(\tau,Q,\varphi_{2\ldots2})+c_3\vartheta(\tau,Q,\varphi_{3\ldots3})+c_4\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\ldots4})+c_5\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\ldots433})+$$
$$+c_6\vartheta(\tau,Q^*,\varphi_{1\ldots1})+c_7\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{3\ldots3})+c_8\vartheta(\tau,Q^*,\varphi_{4\ldots4})+c_9\vartheta(\tau,Q^*,\varphi^*_{1\ldots133})+$$
$$+c_{10}\vartheta(\tau,Q^*,\varphi_{1\ldots123}). \tag{20}$$

Приравнивая коэффициенты при $z,z^2,\ldots,z^{10}$ в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (8)-(19), получаем систему линейных уравнений относительно $c_1,c_2,\ldots,c_{10}$.

Составив для ЭВМ программу вычисления определителей и решив полученную систему уравнений по правилу Крамера, получим

$$c_1=\frac{17\cdot 202\,082\,779\,771\,087\,755}{2^8\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},\quad c_2=\frac{17\cdot 56\,139\,087\,478\,105\,821}{2^7\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921}$$

$$c_3=\frac{17\cdot 198\,706\,017\,316\,146\,253}{2^7\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},\quad c_4=-\frac{17\cdot 16\,208\,271\,964\,009\,921\,963}{2^8\cdot 3\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},$$

$$c_5=-\frac{85\cdot 29\,960\,167\,876\,389\,911}{2^5\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},$$

$$c_6=-\frac{2\,444\,337\,697\,731\,641\,450\,375\,655\,371}{2^6\cdot 17\cdot 17\,921\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},$$

$$c_7=\frac{485\,179\,094\,630\,525\,350\,797\,079\,157}{2\cdot 3\cdot 17\cdot 17\,921\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},$$

$$c_8=-\frac{4\,359\,308\,402\,617\,301\,684\,109\,795}{2^3\cdot 17\cdot 17\,921\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},$$

$$c_9=-\frac{5\cdot 494\,361\,018\,573\,623\,174\,674\,987\,497}{2^3\cdot 3\cdot 17\cdot 17\,921\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921},$$

$$c_{10}=\frac{126\,722\,630\,598\,621\,697\,816\,911\,784\,033}{2^5\cdot 3\cdot 17^3\cdot 17\,921\cdot 29\,950\,897\cdot 40\,084\,744\,850\,921}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{n+12} в обеих частях тождества (20) и принимая во внимание (8)-(19) и значения чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ получаем:

$$a_{17}(n)=\frac{1}{59\,901\,794}\left\{\sum_{d_1 d_2=n+12}\left(\frac{d_1}{17}\right)d_2^7+\right.$$

$$+\frac{202\,082\,779\,771\,087\,755}{2^7\cdot 17^2\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_1^6-10115(n+12)x_1^4+4998(n+12)^2x_1^2-343(n+12)^3\right)+$$

$$+\frac{56\,139\,087\,478\,105\,821}{2^6\cdot 17^2\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_2^6-8670(n+12)x_2^4+3672(n+12)^2x_2^2-216(n+12)^3\right)+$$

$$+\frac{198\,706\,017\,316\,146\,253}{2^6\cdot 17^2\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_3^6-7225(n+12)x_3^4+2550(n+12)^2x_3^2-125(n+12)^3\right)-$$

$$-\frac{16\,208\,271\,964\,009\,921\,963}{3\cdot 2^7\cdot 17^2\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_4^6-4335(n+12)x_4^4+918(n+12)^2x_4^2-27(n+12)^3\right)-$$

$$-\frac{29\,960\,167\,876\,389\,911}{2^4\cdot 17^2\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q=n+12}\left(73695x_3^2x_4^4-1445(n+12)\left(18x_3^2x_4^2-x_4^4-6x_3x_4^3\right)+\right.$$

$$\left.+306(n+12)^2\left(3x_3^2+13x_4^2-12x_3x_4\right)-216(n+12)^3\right)-$$

$$+\frac{2\,414\,337\,897\,731\,641\,460\,375\,656\,371}{2^5\cdot 17^4\cdot 17\,921\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q^4=n+12}\left(4913x_1^6-1445(n+12)x_1^4+102(n+12)^2x_1^2-(n+12)\ldots\right.$$

$$+\frac{485\,113\,094\,630\,525\,350\,737\,079\,157}{3\cdot 17^4\cdot 17\,921\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q^4=n+12}\left(4913x_3^6-1445(n+12)x_3^4+102(n+12)^2x_3^2-(n+12)\ldots\right.$$

$$-\frac{4\,359\,308\,402\,617\,391\,634\,109\,795}{2\cdot 17^4\cdot 17\,921\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q^4=n+12}\left(4913x_4^6-2890(n+12)x_4^4+408(n+12)^2x_4^2-(n+12)\ldots\right.$$

$$-\frac{494\,361\,048\,572\,623\,474\,674\,987\,497}{2^2\cdot 3^2\cdot 17^4\cdot 17\,921\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q^4=n+12}\Big(73695x_1^4x_3^2-1445(n+12)(6x_1^2x_3^2+x_1^4)+$$
$$+51(n+12)^2(2x_3^2+4x_1^2)-3(n+12)^3\Big)-$$

$$-\frac{126\,742\,630\,598\,631\,687\,816\,911\,784\,033}{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17^5\cdot 17\,921\cdot 40\,084\,744\,850\,921}\sum_{Q^4=n+12}\Big(4335x_1^4x_2x_3-85(n+12)(6x_1^2x_2x_3\ldots$$
$$+3(n+12)^2(2x_2x_3+4x_1x_3)\Big)\Big\}.$$

Поступила 28.IX.1988

Кафедра
алгебры и геомет[рии]

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Клячко. Записки научн.семин. ЛОМИ, 1982, т.116, 74–85.
2. Н.Д.Качахидзе. Труды ТГУ, 1986, т.264, 31–41.
3. E.Hecke. Matematische Werke. Göttingen, 1970.
4. Т.А.Ломадзе. Труды Тбилисского матем.ин-та им.А.М.Размадзе АН ГССР, 1977, т.57, 63–81.
5. K.Germann. In:Studien zur Theorie der quadratischen Formen, Basel und Stuttgart, 1968, 128–155.

ნ. კაჭახიძე

სიმეტრიული ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების რიცხვის შესახებ. II

რეზიუმე

მიღებულია ცხადი ზუსტი ფორმულა მარტივი p მახასიათებლიანი ველის მიმართ სიმეტრიული ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენათა რიცხვისათვის, როცა $p=17$.

N.Kachakhidze

ON THE NUMBER OF IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF A SYMMETRIC GROUP.II

Summary

Explicit exact formulae for the number of irreducible representations of a symmetric group over a field of the prime characteristic p are obtained when $p=17$.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

288, 1989

УДК 519.713

О ТРЕУГОЛЬНОМ УМНОЖЕНИИ БИАВТОМАТОВ

М.И.Гобечия

Пусть A и B – линейные пространства над некоторым полем K и Γ – полугруппа. Линейный полугрупповой биавтомат над K – это тройка $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, для которой определены представления $\circ: A\times\Gamma\to A$, $*: A\times\Gamma\to B$, $\circ: B\times\Gamma\to B$. При этом отображения $a\to a\circ\gamma$, $a\to a*\gamma$, $b\to b\circ\gamma$ $(a\in A,\ b\in B)$ для любого $\gamma\in\Gamma$ являются гомоморфизмами. Кроме этого, выполняются соотношения:

$$a\circ\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2,\quad a*\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)*\gamma_2+(a*\gamma_1)\circ\gamma_2,$$

$$b\circ\gamma_1\gamma_2=(b\circ\gamma_1)\circ\gamma_2\ (\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma).$$

A называется пространством состояний, B – пространством внешних состояний – выходных сигналов, Γ – полугруппой входных сигналов.

Пусть $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ и $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$ – два биавтомата. Гомоморфизм $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3):\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ – это тройка гомоморфизмов: $\mu_1: A\to A'$, $\mu_2:\Gamma\to\Gamma'$, $\mu_3: B\to B'$, для которых выполнены условия согласованности с операциями биавтомата:

1. $(a\circ\gamma)^{\mu_1}=a^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2}$,
2. $(a*\gamma)^{\mu_3}=a^{\mu_1}*\gamma^{\mu_2}$,
3. $(b\circ\gamma)^{\mu_3}=b^{\mu_3}\circ\gamma^{\mu_2}$

$(\gamma\in\Gamma,\ a\in A,\ b\in B)$.

Отдельно можно рассматривать гомоморфизмы по состояниям, по входным и выходным сигналам. Гомоморфизм по состояниям действует тождественно на входные и выходные сигналы. Определения остальных двух аналогичны.

Естественно говорить о категории биавтоматов над данным полем K, где роли морфизмов будут исполнять гомоморфизмы. Можно определить также её подкатегории, связанные с гомоморфизмами по состояниям, входным и выходным сигналам.

$\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$ является подавтоматом биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, если A' и B' – K – подпространства в A и B соответственно, а Γ' – подполугруппа в Γ. Кроме этого, для любых $a\in A'$, $b\in B'$, $\gamma\in\Gamma'$ имеем $a\circ\gamma\in A'$, $a*\gamma\in B'$ и $b\circ\gamma\in B'$.

Конгруэнция биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ – это тройка $\rho=(A',\tau,B')$, в которой A' и B' являются K – подпространствами в A и B соответственно, инвариантными относительно действия полугруппы Γ в A и B, удовлетворяющими условию: для любых $a\in A'$ и $\gamma\in\Gamma$ имеем $a*\gamma\in B'$. При этом, τ – конгруэнция в Γ и для любых $a\in A$, $b\in B$ и $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ из $\gamma_1\tau\gamma_2$ следует $a\circ\gamma_1-a\circ\gamma_2\in A'$, $a*\gamma_1-a*\gamma_2\in B'$, $b\circ\gamma_1-b\circ\gamma_2\in B'$. Так получаем фактор-автомат $\mathfrak{A}/\rho=(A/A',\Gamma/\tau,B/B')$.

Ядро гомоморфизма биавтоматов можно определить покомпонентно. Тривиальная проверка показывает, что оно является конгруэнцией биавтомата, поэтому рассматривая фактор-автомат по нему, мы приходим к теореме гомоморфизмов. Покомпонентно можно определить и декартово произведение биавтоматов. Легко проверить справедливость теоремы Ремака.

Биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ называется точным, если из равенств $a\circ\gamma_1=a\circ\gamma_2$, $a*\gamma_1=a*\gamma_2$ и $b\circ\gamma_1=b\circ\gamma_2$ при всяких $a\in A$, $b\in B$ следует $\gamma_1=\gamma_2$ $(\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma)$.

всегда можно перейти к точному фактор-автомату.

Пусть $\mathfrak{A}_1=(A_1,\Sigma_1,B_1)$ и $\mathfrak{A}_2=(A_2,\Sigma_2,B_2)$ - некоторые биавтоматы. Возьмем $\Phi_1=Hom(A_2,A_1)$, $\Psi=Hom(A_2,B_1)$ и $\Phi_2=Hom(B_2,B_1)$. Здесь Φ_1, Ψ и Φ_2 рассматриваются как абелевы группы-модули над $\mathbb{Z}$; Σ_1 действует в Φ_1, Φ_2 и Ψ справа по правилам: $a(\varphi_1\circ\sigma_1)=a\varphi_1\circ\sigma_1$, $b(\varphi_2\circ\sigma_1)=b\varphi_2\circ\sigma_1$, $a(\psi\circ\sigma_1)=a\psi\circ\sigma_1$. Полугруппа Σ_2 действует в Φ_1, Φ_2 и Ψ слева: $a(\sigma_2\circ\varphi_1)=(a\circ\sigma_2)\varphi_1$, $b(\sigma_2\circ\varphi_2)=(b\circ\sigma_2)\varphi_2$, $a(\sigma_2\circ\psi)=(a\circ\sigma_2)\psi$.

Кроме этого, определены элементы $\varphi_1*\sigma_1\in\Psi$ и $\sigma_2*\varphi_2\in\Psi$, действующие по правилам: $a(\varphi_1*\sigma_1)=a\varphi_1*\sigma_1$, $a(\sigma_2*\varphi_2)=(a*\sigma_2)\varphi_2$ $(a\in A_2,\ b\in B_2,\ \sigma_1\in\Sigma_1,\ \sigma_2\in\Sigma_2,\ \varphi_1\in\Phi_1,\ \varphi_2\in\Phi_2,\ \psi\in\Psi)$.

Возьмем декартово произведение $\Gamma=\Sigma_1\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Sigma_2$.

Через α, d_1, δ, d_2 и β обозначим соответствующие проектирования. Пусть $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$. Введем в Γ умножение, полагая:

$$\alpha(\gamma_1\gamma_2)=\alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2),\quad d_1(\gamma_1\gamma_2)=d_1(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2).$$

$$\delta(\gamma_1\gamma_2)=\delta(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)\circ\delta(\gamma_2)+d_1(\gamma_1)*\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)*d_2(\gamma_2),$$

$$d_2(\gamma_1\gamma_2)=d_2(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)\circ d_2(\gamma_2),\quad \beta(\gamma_1\gamma_2)=\beta(\gamma_1)\beta(\gamma_2).$$

Легко проверить, что такое умножение определяет на Γ полугруппу.

Возьмем тройку $\mathfrak{A}_1\nabla\mathfrak{A}_2=(A_1\oplus A_2,\Gamma,B_1\oplus B_2)$.

Для любых $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$, $\gamma\in\Gamma$ положим:

$$(a_1+a_2)\circ\gamma=a_1\circ\alpha(\gamma)+a_2d_1(\gamma)+a_2\circ\beta(\gamma),$$

$$(a_1+a_2)*\gamma=a_1*\alpha(\gamma)+a_2\delta(\gamma)+a_2*\beta(\gamma),$$

$$(b_1+b_2)\circ\gamma=b_1\circ\alpha(\gamma)+b_2d_2(\gamma)+b_2*\beta(\gamma).$$

$\mathfrak{A}_1\nabla\mathfrak{A}_2$ является биавтоматом. Его называют треугольным произведением $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Пусть $\mathfrak{X}$ - произвольный абстрактный класс биавтоматов

Тогда:

$S\mathfrak{F}$ – класс всех подавтоматов биавтоматов из $\mathfrak{F}$;

$Q\mathfrak{F}$ – класс всех гомоморфных образов биавтоматов из $\mathfrak{F}$;

$C\mathfrak{F}$ – класс всех биавтоматов, являющихся декартовыми произведениями биавтоматов из $\mathfrak{F}$;

$V\mathfrak{F}$ – класс всех биавтоматов, для которых некоторый гомоморфный образ по входным сигналам содержится в $\mathfrak{F}$.

Класс биавтоматов над полем K называется многообразием, если он замкнут относительно операторов V, Q, S, C. Оператор замыкания до многообразия обозначается через Var .

Произведение двух многообразий $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ определяется следующим правилом: $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)\in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, если в $\mathfrak{F}_1$ найдется подавтомат $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma,B')\subset\mathfrak{A}$ с $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'=(A/A',\Gamma,B/B')\in\mathfrak{F}_2$. Относительно этой операции многообразия составляют полугруппу. Из определения произведения следует, что для любого нетривиального многообразия Θ включение $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$ влечет $\mathfrak{F}_1\Theta\subseteq\mathfrak{F}_2\Theta$.

Данная работа посвящена изучению некоторых свойств треугольного произведения биавтоматов. Особое внимание уделено функторным свойствам треугольного умножения, которые оказываются весьма полезными для приложений.

Пусть Θ_1 и Θ_2 – некоторые классы биавтоматов над K. Тогда через $\Theta_1\nabla\Theta_2$ обозначим класс, состоящий из всевозможных треугольных произведений биавтоматов из Θ_1 на биавтоматы из Θ_2 .

<u>Предложение I</u>. Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – два многообразия биавтоматов и $\mathfrak{A}_1\in\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{A}_2\in\mathfrak{F}_2$ – некоторые биавтоматы в них, то $\mathfrak{A}_1\nabla\mathfrak{A}_2\in\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$.

<u>Доказательство</u>. В $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)=(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)$,

где $\mathfrak{A}_1=(A_1,\Sigma_1,B_1)\in\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{A}_2=(A_2,\Sigma_2,B_2)\in\mathfrak{X}_2$, но V - замкнутости лежащий в $\mathfrak{X}_1$. Действительно, из $a_1\in A_1$, $b_1\in B_1$ и $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\varphi,\varphi_2,\sigma_2)\in\Gamma$ следует $a_1\circ\gamma=a_1\circ\sigma_1$, $a_1*\gamma=a_1*\sigma_1$, $b_1\circ\gamma=b_1\circ\sigma_1$. найдется подавтомат (A_1,Γ,B_1)

Возьмем фактор-автомат $(A/A_1,\Gamma,B/B_1)$. Существует эпиморфизм по входным сигналам: $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3):(A/A_1,\Gamma,B/B_1)\to(A_2,\Sigma_2,B_2)$.

Здесь A/A_1 изоморфен A_2, B/B_1 изоморфен B_2 и $\mu_2:\Gamma\longrightarrow\Sigma_2$ - проектирование. Следовательно, $(A/A_1,\Gamma,B/B_2)\in$ Отсюда заключаем, что $(A,\Gamma,B)\in\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$.

<u>Предложение 2</u>. Из точности биавтоматов $\mathfrak{A}_1=(A_1,\Sigma_1,B_1)$ и $\mathfrak{A}_2=(A_2,\Sigma_2,B_2)$ следует точность их треугольного произведения $(A,\Gamma,B)=\mathfrak{A}_1\nabla\mathfrak{A}_2$.

<u>Доказательство</u>. Допустим противоположное. Тогда в Γ найдутся γ' и γ'' такие, что $\gamma'\neq\gamma''$, но $a\circ\gamma'=a\circ\gamma''$, $a*\gamma'=a*\gamma''$ и $b\circ\gamma'=b\circ\gamma''$, для любых $a\in A$, $b\in B$.

Если $\gamma'=(\sigma_1',\varphi_1',\varphi',\varphi_2',\sigma_2')$ и $\gamma''=(\sigma_1'',\varphi_1'',\varphi'',\varphi_2'',\sigma_2'')$, $a=a_1+a_2$ с $a_1\in A_1$ и $a_2\in A_2$, $b=b_1+b_2$, где $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$, то $a\circ\gamma'=a_1\circ\sigma_1'+a_2\varphi_1'+a_2\circ\sigma_2'$, $a\circ\gamma''=a_1\circ\sigma_1''+a_2\varphi_1''+a_2\circ\sigma_2''$,

$a*\gamma'=a_1*\sigma_1'+a_2\varphi'+a_2*\sigma_2'$, $a*\gamma''=a_1*\sigma_1''+a_2\varphi''+a_2*\sigma_2''$,

$b\circ\gamma'=b_1\circ\sigma_1'+b_2\varphi_2'+b_2\circ\sigma_2'$, $b\circ\gamma''=b_1\circ\sigma_1''+b_2\varphi_2''+b_2\circ\sigma_2''$

Отсюда очевидно, что сомножители должны быть неточными. Это противоречит условию. Следовательно, (A,Γ,B) - точный биавтомат.

<u>Теорема I</u>. Пусть $(A,\Gamma,B)=(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)$ и (A',Γ,B') - подавтомат в (A,Γ,B), причем $A_1\subset A'$ и $B_1\subset B'$. Тогда существует эпиморфизм по входным сигналам:

$(A',\Gamma,B')\quad(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2\cap A',\Sigma_2,B_2\cap B')$.

<u>Доказательство</u>. $A=A_1\oplus A_2$, $\Gamma=\Sigma_1\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Sigma_2$, $B=B_1\oplus B_2$. Введем обозначения $A_2\cap A'=A_2'$, $B_2\cap B'=B_2'$, $\Phi_1'=Hom(A_2',A_1)$, $\Psi'=Hom(A_2',B_1)$, $\Phi_2'=Hom(B_2',B_1)$. Так как $A_1\subset A'$ и $B_1\subset B'$, то $A'=A_1\oplus A_2'$ и $B'=B_1\oplus B_2'$.

Пусть $\Gamma'=\Sigma_1\times\Phi_1'\times\Psi'\times\Phi_2'\times\Sigma_2$, тогда $(A',\Gamma',B')=$ $=(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2',\Sigma_2,B_2')$.

Теперь построим гомоморфизм по входным сигналам:

$$\mu:(A',\Gamma,B')\longrightarrow(A',\Gamma',B').$$

Пусть $\varphi_1\in Hom(A_2,A_1)$, тогда ему соответствует $\varphi_1^{\mu_1}\in\Phi_1'=Hom(A_2',A_1)$, являющийся ограничением φ_1 на A_2'. Таким образом, получим отображение $\mu_1:\Phi_1\longrightarrow\Phi_1'$.

Возьмем $\varphi\in Hom(A_2,B_1)$. Сопоставим ему $\varphi^{\mu_2}\in Hom(A_2',B_1)$, ограничение φ' на A_2'. Получим $\mu_2:\Psi\longrightarrow\Psi'$.

Пусть $\varphi_2\in Hom(B_2,B_1)$; $\varphi_2^{\mu_3}\in Hom(B_2',B_1)$ является ограничением φ_2 на B_2'. Получим отображение $\mu_3:\Phi_2\longrightarrow\Phi_2'$.

Рассмотрим также тождественные отображения $\varepsilon_{\Sigma_1}:\Sigma_1\longrightarrow\Sigma_1$ и $\varepsilon_{\Sigma_2}:\Sigma_2\longrightarrow\Sigma_2$.

Склеив $\varepsilon_{\Sigma_1},\mu_1,\mu_2,\mu_3,\varepsilon_{\Sigma_2}$, приходим к гомоморфизму полугрупп $\mu:\Gamma\longrightarrow\Gamma'$.

Действительно, возьмем $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\varphi,\varphi_2,\sigma_2)\in\Gamma$, $\gamma^\mu=(\sigma_1,\varphi_1^{\mu_1},\varphi^{\mu_2},\varphi_2^{\mu_3},\sigma_2)\in\Gamma'$. Ясно, что μ – сюрьекция.

Пусть $\gamma'=(\sigma_1',\varphi_1',\varphi',\varphi_2',\sigma_2')$ и $\gamma''=(\sigma_1'',\varphi_1'',\varphi'',\varphi_2'',\sigma_2'')$ – любые два элемента в Γ. Проверим, что $(\gamma'\gamma'')^\mu=(\gamma')^\mu(\gamma'')^\mu$.

$(\gamma'\gamma'')^\mu=(\sigma_1'\sigma_1'',(\varphi_1'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1'')^{\mu_1},(\sigma_2'\circ\varphi''+\varphi_1'*\sigma_1''+\varphi'\circ\sigma_1''+\sigma_1'*\varphi_2'')^{\mu_2},$
$(\varphi_2'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2'')^{\mu_3},\sigma_2'\sigma_2'')$.

$(\gamma')^\mu(\gamma'')^\mu=(\sigma_1'\sigma_1'',\varphi_1'^{\mu_1}\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1''^{\mu_1},\sigma_2'\circ\varphi''^{\mu_2}+\varphi_2'^{\mu_3}*\sigma_1''+$
$+\varphi'^{\mu_2}\circ\sigma_1''+\sigma_2'*\varphi_2''^{\mu_3},\ \varphi_2'^{\mu_3}\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2''^{\mu_3},\sigma_2'\sigma_2'')$.

Для любого $a_2\in A_2'$ имеем $a_2(\varphi_1'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1'')^{\mu_1}=$

$=a_2(\varphi_1'\circ\sigma_1'')+a_2(\sigma_1'\circ\varphi_1'')=a_2\varphi_1'\circ\sigma_1''+(a_2\circ\sigma_2')\varphi_1''.$

$a_2(\varphi_1'^{\mu_1}\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1''^{\mu_1})=a_2(\varphi_1'^{\mu_1}\circ\sigma_1'')+a_2(\sigma_2'\circ\varphi_1''^{\mu_1})=$

$=a_2\varphi_1'^{\mu_1}\circ\sigma_1''+(a_2\circ\sigma_2')\varphi_1''^{\mu_1}=a_2\varphi_1'\circ\sigma_1''+(a_2\circ\sigma_2')\varphi_1''.$

Для любого $b_2\in B_2'$ имеем $b_2(\varphi_2'\circ\sigma_1''+\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2'')^{\mu_3}=$

$=b_2(\varphi_2'\circ\sigma_1'')+b_2(\sigma_2'\circ\varphi_2'')=b_2\varphi_2'\circ\sigma_1''+(b_2\circ\sigma_2')\varphi_2''.$

$b_2(\varphi_2'^{\mu_3}\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2''^{\mu_3})=b_2(\varphi_2'^{\mu_3}\circ\sigma_1'')+b_2(\sigma_2'\circ\varphi_2''^{\mu_3})=$

$=b_2\varphi_2'^{\mu_3}\circ\sigma_1''+(b_2\circ\sigma_2')\varphi_2''^{\mu_3}=b_2\varphi_2'\circ\sigma_1''+(b_2\circ\sigma_2')\varphi_2''.$

Для любого $a_2\in A_2'$ имеем $a_2(\sigma_2'\circ\varphi''+\varphi_1'*\sigma_1''+\varphi'\circ\sigma_1''+\sigma_2'*\varphi_2'')^{\mu_2}=$

$=a_2(\sigma_2'\circ\varphi'')+a_2(\varphi_1'*\sigma_1'')+a_2(\varphi'\circ\sigma_2'')+a_2(\sigma_2'*\varphi_2'')=(a_2\circ\sigma_2')\varphi''+$

$+a_2\varphi_1'*\sigma_1''+(a_2*\sigma_2')\varphi_2''+a_2\varphi'\circ\sigma_1''.$

$a_2(\sigma_2'\circ\varphi''^{\mu_2}+\varphi_1'^{\mu_1}*\sigma_1''+\varphi'^{\mu_2}\circ\sigma_1''+\sigma_2'*\varphi_2''^{\mu_3})=a_2(\sigma_2'\circ\varphi''^{\mu_2})+$

$+a_2(\varphi_1'^{\mu_1}*\sigma_1'')+a_2(\varphi'^{\mu_2}\circ\sigma_1'')+(\sigma_2'*\varphi_2''^{\mu_3})=(a_2\circ\sigma_2')\varphi''+$

$+a_2\varphi_1'*\sigma_1''+a_2\varphi'\circ\sigma_1''+(a_2*\sigma_2')\varphi_2''.$

Следовательно, μ является эпиморфизмом полугруппы Γ на

Проверим, что μ вместе с тождественными гомоморфиз

ми определяет эпиморфизм: $\bar\mu:(A',\Gamma,B')\to(A',\Gamma',B')$.

Для любого $a\in A'$ имеем $a^{\bar\mu}=a$, здесь $a=a_1+a_2$, где $a_1\in A_1$ и $a_2\in A_2'$. Для любого $b\in B'$ имеем $b^{\bar\mu}=b$, где $b=b_1+b_2$ с $b_1\in B_1$ и $b_2\in B_2'$. По определению получ

Возьмем $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\varphi,\varphi_2,\sigma)$.

$(a\circ\gamma)^{\bar\mu}=a\circ\gamma=a_1\circ\sigma_1+a_2\varphi_1+a_2\circ\sigma_2.$

$a\circ\gamma^{\mu}=a_1\circ\sigma_1+a_2\varphi_1^{\mu_1}+a_2\circ\sigma_2=a_1\circ\sigma_1+a_2\varphi_1+a_2\circ\sigma_2.$

$(a*\gamma)^{\bar\mu}=a*\gamma=a_1*\sigma_1+a_2\varphi+a_2*\sigma_2.$

$a*\gamma^{\mu}=a_1*\sigma_1+a_2\varphi^{\mu_2}+a_2*\sigma_2=a_1*\sigma_1+a_2\varphi+a_2*\sigma_2.$

$(b\circ\gamma)^{\bar\mu}=b\circ\gamma=b_1\circ\sigma_1+b_2\varphi_2+b_2\circ\sigma_2.$

$b\circ\gamma^{\mu}=b_1\circ\sigma_1+b_2\varphi_2^{\mu_3}+b_2\circ\sigma_2=b_1\circ\sigma_1+b_2\varphi_2+b_2\circ\sigma_2.$

Отсюда $(a\circ\gamma)^{\bar\mu}=a^{\bar\mu}\circ\gamma^{\bar\mu}$, $(b\circ\gamma)^{\bar\mu}=b^{\bar\mu}\circ\gamma^{\bar\mu}$, $(a*\gamma)^{\bar\mu}=a^{\bar\mu}*\gamma^{\bar\mu}$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\vartheta:(A_1,\Sigma_1,B_1)\to(A_1',\Sigma_1',B_1')$ – гомоморфизм биавтоматов и (A_2,Σ_2,B_2) – некоторый биавтомат. Тогда существует гомоморфизм:

$$\mu:(A_1,\Sigma_1,B_1)\triangledown(A_2,\Sigma_2,B_2)\to(A_1',\Sigma_1',B_1')\triangledown(A_2,\Sigma_2,B_2),$$

тождественный на втором сомножителе. При этом, если ϑ – мономорфизм (эпиморфизм), то и μ – мономорфизм (эпиморфизм).

<u>Доказательство.</u> Пусть $(A,\Gamma,B)=(A_1,\Sigma_1,B_1)\triangledown(A_2,\Sigma_2,B_2)$ и $(A',\Gamma',B')=(A_1',\Sigma_1',B_1')\triangledown(A_2,\Sigma_2,B_2)$.

Здесь $A=A_1\oplus A_2$, $B=B_1\oplus B_2$, $\Gamma=\Sigma_1\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Sigma_2$,
$\Gamma'=\Sigma_1'\times\Phi_1'\times\Psi'\times\Phi_2'\times\Sigma_2'$, $A'=A_1'\oplus A_2$, $B'=B_1'\oplus B_2$.

Положим: $(a_1+a_2)^{\mu_1}=a_1^{\vartheta}+a_2$ для любых $a_1\in A_1$ и $a_2\in A_2$, $(b_1+b_2)^{\mu_3}=b_1^{\vartheta}+b_2$ для любых $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$.

$\mu:\vartheta:\Sigma_1\to\Sigma_1'$; $\mu=\varepsilon:\Sigma_2\to\Sigma_2$ – тождественное отображение.

$\Phi_1=Hom(A_2,A_1)$, $\Phi_1'=Hom(A_2,A_1')$. Для любого $\varphi_1\in\Phi_1$ имеем $a_2\varphi_1^{\mu_{21}}=(a_2\varphi_1)^{\vartheta}$.

$\Phi_2=Hom(B_2,B_1)$, $\Phi_2'=Hom(B_2,B_1')$. Для любого $\varphi_2\in\Phi_2$ имеем $b_2\varphi_2^{\mu_{22}}=(b_2\varphi_2)^{\vartheta}$.

$\Psi=Hom(A_2,B_1)$, $\Psi'=Hom(A_2,B_1')$. Для любого $\psi\in\Psi$ имеем $a_2\psi^{\mu_{23}}=(a_2\psi)^{\vartheta}$.

Теперь μ_2 получим склеив ϑ, μ_{21}, μ_{22}, μ_{23}, ε.

Аналогично предыдущему проверяется, что μ_2 – гомоморфизм полугруппы Γ на Γ'.

Проверим, что $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ составляет гомоморфизм биавтоматов.

Для любых $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $\gamma\in\Gamma$, где $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\psi,\varphi_2,\sigma_2)$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$ имеем:

$$[(a_1+a_2)\circ\gamma]^{\mu_1}=(a_1\circ\sigma_1+a_2\varphi_1+a_2\circ\sigma_2)^{\mu_1}=(a_1\circ\sigma_1+a_2\varphi_1)^{\mu_1}+a_2\circ\sigma_2=a_1^{\vartheta}\circ\sigma_1^{\vartheta}+a_2\varphi_1^{\mu_2}+a_1\circ\sigma_2;$$

$$(a_1+a_2)^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2}=(a_1^{\vartheta}+a_2)\circ(\sigma_1^{\vartheta},\varphi_1^{\mu_2},\psi^{\mu_2},\varphi_2^{\mu_2},\sigma_2)=a_1^{\vartheta}\circ\sigma_1^{\vartheta}+a_2\varphi_1^{\mu_2}+a_2\circ\sigma_2.$$

Таким образом, $[(a_1+a_2)\circ\gamma]^{\mu_1}=(a_1+a_2)^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2}$.

Сравним $[(a_1+a_2)*\gamma]^{\mu_3}=(a_1*\sigma_1+a_2\varphi+a*\sigma_2)^{\mu_3}=$

$=(a_1*\sigma_1+a_2\varphi)^{\mu_3}+a_2*\sigma_2=a_1^{\nu}*\sigma_1^{\nu}+a_2\varphi^{\mu_2}+a_2*\sigma_2.$

$(a_1+a_2)^{\mu_1}*\sigma^{\mu_2}=(a_1^{\nu}+a_2)*(\sigma_1^{\nu},\varphi_1^{\mu_2},\varphi^{\mu_2},\varphi_2^{\mu_2},\sigma_2)=$

$=a_1^{\nu}*\sigma_1^{\nu}+a_2\varphi^{\mu_2}+a_2*\sigma_2.$

Следовательно, $[(a_1+a_2)*\gamma]^{\mu_3}=(a_1+a_2)^{\mu_1}*\gamma^{\mu_2}$.

Рассмотрим $[(b_1+b_2)\circ\gamma]^{\mu_3}=(b_1\circ\sigma_1+b_2\varphi_2+b_2\circ\sigma_2)^{\mu_3}=$

$=(b_1\circ\sigma_1+b_2\varphi_2)^{\mu_3}+b_2\circ\sigma_2=b_1^{\nu}\circ\sigma_1^{\nu}+b_2\varphi_2^{\mu_2}+b_2\circ\sigma_2.$

$(b_1+b_2)^{\mu_3}\circ\gamma^{\mu_2}=(b_1^{\nu}+b_2)\circ(\sigma_1^{\nu},\varphi_1^{\mu_2},\varphi^{\mu_2},\varphi_2^{\mu_1},\sigma_2)=$

$=b_1^{\nu}\circ\sigma_1^{\nu}+b_2\varphi_2^{\mu_2}+b_2\circ\sigma_2.$

Таким образом, $[(b_1+b_2)\circ\gamma]^{\mu_3}=(b_1+b_2)^{\mu_3}\circ\gamma^{\mu_2}$.

Мы получили гомоморфизм биавтоматов $(A,\Gamma,B)\to(A',\Gamma',B')$, тождественный на (A_2,Σ_2,B_2).

Теперь, если ν – мономорфизм (эпиморфизм), то μ определяется мономорфизмами (эпиморфизмами) μ_1,μ_2,μ_3, поэтому также является мономорфизмом (эпиморфизмом).

<u>Теорема 3</u>. Пусть $(A,\Sigma,B)=\prod_\alpha(A_\alpha,\Sigma_\alpha,B_\alpha)$, $\alpha\in I$, и (G,Σ',H) – произвольный биавтомат. Тогда существует вложение:

$$(A,\Sigma,B)\nabla(G,\Sigma',H)\longrightarrow\prod_\alpha[(A_\alpha,\Sigma_\alpha,B_\alpha)\nabla(G,\Sigma',H)].$$

<u>Доказательство</u>. $(A,\Sigma,B)=(\prod_\alpha A_\alpha,\prod_\alpha\Sigma_\alpha,\prod_\alpha B_\alpha)$, $\alpha\in I$, тогда

$$(A,\Sigma,B)\nabla(G,\Sigma',H)=(\prod_\alpha A_\alpha\oplus G,\Gamma,\prod_\alpha B_\alpha\oplus H),$$

где $\Gamma=\prod\Sigma_\alpha\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Sigma'$, $\Phi_1=Hom(G,\prod_\alpha A_\alpha)$,

$\Psi=Hom(G,\prod_\alpha B_\alpha)$, $\Phi_2=Hom(H,\prod_\alpha B_\alpha)$.

$$(A_\alpha,\Sigma_\alpha,B_\alpha)\nabla(G,\Sigma',H)=(A_\alpha\oplus G,\Gamma_\alpha,B_\alpha\oplus H),$$

где

$\Gamma_\alpha=\Sigma_\alpha\times\Phi_{1\alpha}\times\Psi_{2\alpha}\times\Sigma'$, $\Phi_{1\alpha}=Hom(G,A_\alpha)$,

$\Psi_\alpha=Hom(G,B_\alpha)$, $\Phi_{2\alpha}=Hom(H,B_\alpha)$.

$\prod_\alpha[(A_\alpha,\Sigma_\alpha,B_\alpha)\nabla(G,\Sigma',H)]=(\prod_\alpha(A_\alpha\oplus G),\prod_\alpha\Gamma_\alpha,\prod_\alpha(B_\alpha\oplus H)).$

Определим отображения:

$\mu_1 : \prod_\alpha A \oplus G \to \prod_\alpha (A_\alpha \oplus G)$

$\mu_2 : \prod_\alpha \Sigma_\alpha \times \Phi_1 \times \Psi \times \Phi_2 \times \Sigma' \to \prod_\alpha \Sigma_\alpha \times \prod_\alpha \Phi_{1\alpha} \times \prod_\alpha \Psi_\alpha \times \prod_\alpha \Phi_{2\alpha} \times \prod_\alpha \Sigma'$,

$\mu_3 : \prod_\alpha B_\alpha \oplus H \to \prod_\alpha (B_\alpha \oplus H)$, такие, что $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ составит мономорфизм биавтоматов.

Возьмем $\bar{a} \in \prod_\alpha A_\alpha$, $g \in G$. Определим: $(\bar{a}+g)^{\mu_1}(\alpha) = \bar{a}(\alpha)+g$ для любых $\alpha \in I$.

Если $\bar{b} \in \prod_\alpha B_\alpha$, $h \in H$, то $(\bar{b}+h)^{\mu_3}(\alpha) = \bar{b}(\alpha)+h$ для любых $\alpha \in I$.

Пусть $\bar{\sigma} \in \prod_\alpha \Sigma_\alpha$, $\bar{\sigma}^{\mu_{21}}(\alpha) = \bar{\sigma}(\alpha)$. Если $\varphi_1 \in Hom(G, \prod_\alpha A_\alpha)$, то для любого $g \in G$ и любого $\alpha \in I$ $g[\varphi_1^{\mu_{22}}(\alpha)] = (g\varphi_1)(\alpha)$. Пусть $\psi \in Hom(G, \prod_\alpha B_\alpha)$, тогда для любого $g \in G$ имеем $g[\psi^{\mu_{23}}(\alpha)] = (g\psi)(\alpha)$.

Возьмем $\varphi_2 \in Hom(H, \prod_\alpha B_\alpha)$, тогда для любого $h \in H$ имеем $h[\varphi_2^{\mu_{24}}(\alpha)] = (h\varphi_2)(\alpha)$.

Если $\sigma' \in (\Sigma')^I$, то $\sigma'^{\mu_{25}}(\alpha) = \sigma'$, $\alpha \in I$.

Склеим $\mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}$ в одно отображение $\mu_2 : \Gamma \to \Gamma_1 = \prod_\alpha \Gamma_\alpha$. Проверим, что μ_2 является инъективным гомоморфизмом полугрупп. Проверим сначала, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, то $(\gamma_1\gamma_2)^{\mu_2} = \gamma_1^{\mu_2}\gamma_2^{\mu_2}$.

Пусть $\gamma_1 = (\sigma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \sigma_2')$, $\gamma_2 = (\sigma_1'', \varphi_1'', \psi'', \varphi_2'', \sigma_2'')$,
Тогда $(\gamma_1\gamma_2)^{\mu_2} = (\sigma_1'\sigma_1'', \varphi_1' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_1'', \sigma_2' \circ \psi_1' * \sigma_1'' + \psi' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' * \varphi_2'', \varphi_2' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_2'', \sigma_2'\sigma_2'')^{\mu_2} = ((\sigma_1'\sigma_1'')^{\mu_{21}} (\varphi_1' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_1'')^{\mu_{22}}, \sigma_2' \circ \psi'' + \varphi_1' * \sigma_1'' + \psi' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_2'')^{\mu_{23}}, (\varphi_2' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_2'')^{\mu_{24}}, (\sigma_2'\sigma_2'')^{\mu_{25}})$.

$\gamma_1^{\mu_2}\gamma_2^{\mu_2} = (\sigma_2'^{\mu_{21}} \sigma_1''^{\mu_{21}}, \varphi_2'^{\mu_{22}} \circ \sigma_1''^{\mu_{21}} + \sigma_2'^{\mu_{25}} \circ \varphi_1''^{\mu_{22}}, \sigma_2'^{\mu_{25}} \circ \psi''^{\mu_{23}} + \varphi_2'^{\mu_{22}} * \sigma_1''^{\mu_{21}} + \psi'^{\mu_{23}} \circ \sigma_1''^{\mu_{21}} + \sigma_2'^{\mu_{25}} * \varphi_2''^{\mu_{24}}, \varphi_2'^{\mu_{24}} \circ \sigma_1''^{\mu_{21}} + \sigma_2'^{\mu_{25}} \circ \varphi_2''^{\mu_{24}}, \sigma_2'^{\mu_{25}} \sigma_2''^{\mu_{25}})$.

Проследим равенство этих элементов покомпонентно.

$$(\sigma_1'\sigma_1'')^{\mu_{21}}(a)=(\sigma_1'\sigma_1''(a)=(\sigma_1'^{\mu_{21}}\sigma_1''^{\mu_{21}})(a).$$

Пусть $g\in G$.

$$g[(\varphi_1'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1'')^{\mu_{22}}(a)]=[g(\varphi_1'\circ\sigma_2''+\sigma_2'\circ\varphi_1'')](a)=$$
$$=(g\varphi_1'\circ\sigma_2''(a)+[(g\circ\sigma_2')\varphi_1''](a).$$

$$[g(\varphi_1'^{\mu_{22}}\circ\sigma_1''^{\mu_{21}}+\sigma_2'^{\mu_{25}}\circ\varphi_1''^{\mu_{23}})](a)=(g\varphi_1'^{\mu_{22}}\circ\sigma_1''^{\mu_{21}})(a)+$$
$$+(g\circ\sigma_2'^{\mu_{25}})\varphi_1''^{\mu_{23}}(a)=g\varphi_1'^{\mu_{22}}(a)\circ\sigma_1''(a)+[(g\circ\sigma_2')\varphi_2''](a)=$$
$$=(g\varphi_1'\circ\sigma_1'')(a)+[(g\circ\sigma_2')\varphi_1''](a).$$

$$g(\sigma_2'\circ\psi''+\varphi_1'*\sigma_1''+\psi'\circ\sigma_1''+\sigma_2'*\varphi_2'')^{\mu_{23}}(a)=g(\sigma_2'\circ\psi''+\varphi_1'*\sigma_1''+$$
$$+\psi'\circ\sigma_1''+\sigma_2'*\varphi_2'')(a)=(g\circ\sigma_2')\psi''(a)+(g\varphi_1'*\sigma_1'')(a)+$$
$$+(g\psi'\circ\sigma_2'')(a)+(g*\sigma_2')\varphi_2''(a).$$

$$g(\sigma_2'^{\mu_{25}}\circ\psi''^{\mu_{23}}+\varphi_1'^{\mu_{22}}*\sigma''^{\mu_{21}}+\psi'^{\mu_{23}}\circ\sigma_1''^{\mu_{21}}+\sigma_2'^{\mu_{25}}*\varphi_2''^{\mu_{24}})(a)=$$
$$=(g\circ\sigma_2')\psi''^{\mu_{23}}(a)+(g\varphi_1'^{\mu_{22}}*\sigma_1'')(a)+(g\psi'^{\mu_{23}}\circ\sigma_1'')(a)+$$
$$+(g*\sigma_2')\varphi_2''^{\mu_{24}}(a)=(g\circ\sigma_2')\psi''(a)+(g\varphi_1'*\sigma_1'')(a)+(g\psi'\circ\sigma_2'')(a)+$$
$$+(g*\sigma_2')\varphi_2''(a).$$

Пусть $h\in H$, тогда

$$h[(\varphi_2'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2'')^{\mu_{24}}(a)]=h(\varphi_2'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2'')(a)=$$
$$=(h\varphi_2'\circ\sigma_1'')(a)+(h\circ\sigma_2')\varphi_2''(a).$$

$$h(\varphi_2'^{\mu_{24}}\circ\sigma_1''^{\mu_{21}}+\sigma_2'^{\mu_{25}}\circ\varphi_2''^{\mu_{24}})=(h\varphi_2'^{\mu_{24}}\circ\sigma_1'')(a)+$$
$$+(h\circ\sigma_2')\varphi_2''^{\mu_{24}}(a)=h(\varphi_2'\circ\sigma_1'')(a)+(h\circ\sigma_2')\varphi_2''(a).$$

$$(\sigma_2'\sigma_2'')^{\mu_{25}}(a)=\sigma_2'\sigma_2''=(\sigma_2'^{\mu_{25}}\sigma_2''^{\mu_{25}})(a).$$

Ясно, что μ_2 – мономорфизм, так как ядро тривиально.

Возьмем $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, где

$$\mu:(\prod_\alpha A_\alpha\otimes G,\Gamma,\prod_\alpha B_\alpha\otimes H)\longrightarrow(\prod_\alpha(A_\alpha\otimes G),\Gamma_1,\prod_\alpha(B_\alpha\otimes H)).$$

Проверим, что μ – инъективный гомоморфизм биавтоматов.

Ясно, что μ_1, μ_2 и μ_3 – мономорфизмы.

Пусть $\bar{a} \in \prod_\alpha A_\alpha$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$, $\gamma = (\sigma_1, \varphi_1, \varphi, \varphi_2, \sigma_2)$, $\bar{b} \in \prod_\alpha B_\alpha$, $h \in H$. Тогда:

$$[(\bar{a}+g)\circ\gamma]^{\mu_1}(\alpha) = (\bar{a}\circ\sigma_1 + g\varphi_1 + g\circ\sigma_2)^{\mu_1}(\alpha) = (\bar{a}\circ\sigma_1 + g\varphi_1)(\alpha) + g\circ\sigma_2 =$$
$$= \bar{a}(\alpha)\circ\sigma_1(\alpha) + g\varphi_1^{\mu_2}(\alpha) + g\circ\sigma_2 .$$

$$[(\bar{a}+g)^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2}](\alpha) = [(\bar{a}(\alpha)+g)\circ(\sigma_1, \varphi_1^{\mu_{21}}, \varphi^{\mu_{22}}, \varphi_2^{\mu_{23}}, \sigma_2)](\alpha) =$$
$$= \bar{a}(\alpha)\circ\sigma_1(\alpha) + g\varphi_1^{\mu_2}(\alpha) + g\circ\sigma_2 .$$

$$[(\bar{a}+g)*\gamma]^{\mu_3}(\alpha) = (\bar{a}*\sigma_1 + g\varphi + g*\sigma_2)^{\mu_3}(\alpha) = (\bar{a}*\sigma_1 + g\varphi)(\alpha) + g*\sigma_2 =$$
$$= \bar{a}(\alpha)*\sigma_1(\alpha) + g\varphi^{\mu_2}(\alpha) + g*\sigma_2 .$$

$$[(\bar{a}+g)^{\mu_1}*\gamma^{\mu_2}](\alpha) = [(\bar{a}(\alpha)+g)*(\sigma_1, \varphi_1^{\mu_{21}}, \varphi^{\mu_{22}}, \varphi_2^{\mu_{23}}, \sigma_2)(\alpha) =$$
$$= \bar{a}(\alpha)*\sigma_1(\alpha) + g\varphi^{\mu_2}(\alpha) + g*\sigma_2 .$$

$$[(\bar{b}+h)\circ\gamma]^{\mu_3}(\alpha) = (\bar{b}\circ\sigma_1 + h\varphi_2 + h\circ\sigma_2)^{\mu_3}(\alpha) = (\bar{b}\circ\sigma_1 + h\varphi_2)(\alpha) +$$
$$+ h\circ\sigma_2 = b(\alpha)\circ\sigma_1(\alpha) + h\varphi_2^{\mu_2}(\alpha) + h\circ\sigma_2 .$$

Следовательно, μ – мономорфизм биавтоматов.

<u>Следствие</u>. Если I – некоторое множество и (A_1, Σ_1, B_1) и (A_2, Σ_2, B_2) – биавтоматы, то существует вложение:

$$(A_1, \Sigma_1, B_1)^I \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2) \longrightarrow [(A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)]^I .$$

<u>Теорема 4</u>. Пусть (A_1, Σ_1, B_1) и (A_2, Σ_2, B_2) – биавтоматы и I – некоторое множество. Тогда существует вложение:

$$\mu : (A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)^I \longrightarrow [(A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)]^I .$$

<u>Доказательство</u>. Если Γ – полугруппа входных сигналов в биавтомате $(A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)^I$, то

$$\Gamma = \Sigma_1 \times Hom(A_2^I, A_1) \times Hom(A_2^I, B_1) \times Hom(B_2^I, B_1) \times \Sigma_2^I .$$

Полугруппа входных сигналов биавтомата $(A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)$ равна $\Sigma = \Sigma_1 \times Hom(A_2, A_1) \times Hom(A_2, B_1) \times Hom(B_2, B_1) \times \Sigma_2$.

Необходимо определить отображения

$$\mu_1 : A_1 \oplus A_2^I \longrightarrow A_1 \oplus A_2^I ;$$
$$\mu_2 : \Gamma \longrightarrow \Sigma^I ;$$
$$\mu_3 : B_1 \oplus B_2^I \longrightarrow (B_1 \oplus B)^I ,$$

Если $a\in A_1$, $\bar a\in A_2^I$, $b\in B_1$ и $\bar b\in B_2^I$, то полагаем:

$[(a+\bar a)^{\mu_2}](\alpha)=a+\bar a(\alpha)$, $[(b+\bar b)^{\mu_2}](\alpha)=b+\bar b(\alpha)$

для любого $\alpha\in I$.

Если $\sigma_1\in\Sigma_1$, $\bar\sigma_2\in\Sigma_2^I$, то полагаем:

$(\sigma_1^{\mu_2})(\alpha)=\sigma_1$, $(\bar\sigma_2^{\mu_2})(\alpha)=\bar\sigma_2(\alpha)$.

Пусть $\varphi_1\in Hom(A_2^I,A_1)$, $\varphi\in Hom(A_2^I,B_1)$, $\varphi_2\in Hom(B_2^I,B_1)$. Для любых $a_2\in A_2$ и $b_2\in B_2$ возьмем постоянные функции $\bar a\in A_2^I$ и $\bar b\in B_2^I$, для которых $\bar a(\alpha)=a_2$ и $\bar b(\alpha)=b_2$ для любого $\alpha\in I$.

Возьмем $\bar a^{\varphi_1}=[\bar a(\alpha)]^{(\varphi_1\mu_2)(\alpha)}$, $\bar a^{\varphi}=[\bar a(\alpha)]^{(\varphi\mu_2)(\alpha)}$, $\bar b^{\varphi_2}=[\bar b(\alpha)]^{\varphi_2\mu_2(\alpha)}$

Проверим, что μ_2 определяет гомоморфизм полугрупп Γ.

Пусть $\gamma_1\gamma_2\in\Gamma$, $\gamma_1=(\sigma_1',\varphi_1',\varphi',\varphi_2',\sigma_2')$,

$\gamma_2=(\sigma_1'',\varphi_1'',\varphi'',\varphi_2'',\sigma_2'')$,

$(\gamma_1\gamma_2)^{\mu_2}=(\sigma_1',\sigma_2'',\varphi_1'\circ\sigma_2''+\sigma_2'\circ\varphi_1'',\sigma_2'\circ\varphi''+\varphi_1'*\sigma_2''+\varphi'\circ\sigma_2''+$

$+\sigma_2'*\varphi_2'',\varphi_2'\circ\sigma_2''+\sigma_2'\circ\varphi_2'',\sigma_2'\sigma_2'')^{\mu_2}$.

Сравним этот элемент с $\gamma_1^{\mu_2}\gamma_2^{\mu_2}$ покомпонентно.

$(\sigma_1'\sigma_1'')^{\mu_2}(\alpha)=\sigma_1'\sigma_1''=\sigma_2'^{\mu_2}(\alpha)$, $\sigma_1''^{\mu_2}(\alpha)=\sigma_1'^{\mu_2}\sigma_1''^{\mu_2}$, $\alpha\in I$.

$\bar a(\alpha)[(\varphi_1'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1'')^{\mu_2}(\alpha)]=\bar a(\varphi_1'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_1'')=$

$=\bar a(\varphi_1'\circ\sigma_1'')+\bar a(\sigma_2'\circ\varphi_1'')=\bar a\varphi_1'\circ\sigma_1''+(\bar a\circ\sigma_2')\varphi_1''=$

$=\bar a(\alpha)^{\varphi_1'\mu_2(\alpha)}\circ\sigma_1''^{\mu_2}(\alpha)+[\bar a(\alpha)]^{\sigma_2'\mu_2(\alpha)\circ\varphi_1''\mu_2(\alpha)}=$

$=\bar a(\alpha)[(\varphi_1'^{\mu_2}\circ\sigma_1''^{\mu_2}+\sigma_2'^{\mu_2}\circ\varphi_1''^{\mu_2})(\alpha)]$.

$\bar a(\alpha)[(\sigma_2'\circ\varphi''+\varphi_1'*\sigma_2''+\varphi'\circ\sigma_2''+\sigma_2'*\varphi_2'')^{\mu_2}(\alpha)]=$

$=(\bar a\circ\sigma_2')\varphi''+\bar a\varphi'\circ\sigma_2''+\bar a\varphi_1'*\sigma_1''+(\bar a*\sigma_2')\varphi_2''=$

$=\bar a(\alpha)[(\sigma_2'^{\mu_2}\circ\varphi''^{\mu_2}+\varphi_2'^{\mu_2}*\sigma_1''^{\mu_2}+\varphi'^{\mu_2}\circ\sigma_1''^{\mu_2}+\sigma_2'^{\mu_2}\circ\varphi_1''^{\mu_2})(\alpha)$

$\bar b(\alpha)[(\varphi_2'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2'')^{\mu_2}(\alpha)]=\bar b(\varphi_2'\circ\sigma_1''+\sigma_2'\circ\varphi_2'')=\bar b(\varphi_2'\circ\sigma_1'')+$

$+\bar b(\sigma_2'\circ\varphi_2'')=\bar b\varphi_2'\circ\sigma_1''+(\bar b\circ\sigma_2')\varphi_2''=\bar b(\alpha)[(\varphi_2'^{\mu_2}\circ\sigma_1''^{\mu_2}+\sigma_2'^{\mu_2}\circ\varphi_2''^{\mu_2})$

$(\sigma_2'\sigma_2'')^{\mu_2}(\alpha)=(\sigma_2'\sigma_2'')(\alpha)=\sigma_2'(\alpha)\sigma_2''(\alpha)=\sigma_2'^{\mu_2}(\alpha)\sigma_2''^{\mu_2}(\alpha)=$

$=(\sigma_2'^{\mu_2}\sigma_2''^{\mu_2})(\alpha)$.

Следовательно, μ_2 – гомоморфизм полугрупп, при этом, с тривиальным ядром.

Проверим, что $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ составляет мономорфизм биавтоматов.

Ясно, что μ_1 и μ_3 – инъективные отображения.

Проверим согласованность μ с операциями биавтомата.

Для любых $a \in A_1$, $\bar{a} \in A_2^I$, $b \in B_1$, $\bar{b} \in B_2^I$, $\gamma \in \Gamma$, где $\gamma = (\sigma_1, \varphi_1, \varphi, \varphi_2, \sigma_2)$, получим:

$[(a+\bar{a})\circ\gamma]^{\mu_1}(\alpha) = (a\circ\sigma_1 + \bar{a}\varphi_1 + \bar{a}\circ\sigma_2)^{\mu_1}(\alpha) = a\circ\sigma_1 + (\bar{a}\varphi_1)(\alpha) +$
$+ (a\circ\sigma_2)(\alpha) = [(a+\bar{a})^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2}](\alpha).$

$[(a+\bar{a})*\gamma]^{\mu_3}(\alpha) = (a*\sigma_1 + \bar{a}\varphi + \bar{a}*\sigma_2)^{\mu_3}(\alpha) = a*\sigma_1 + (\bar{a}\varphi)(\alpha) +$
$+ (a*\sigma_2)(\alpha) = [(a+\bar{a})^{\mu_1} * \gamma^{\mu_2}](\alpha).$

$[(b+\bar{b})\circ\gamma]^{\mu_3}(\alpha) = (b\circ\sigma_1 + b\varphi_2 + \bar{b}\circ\sigma_2)^{\mu_3}(\alpha) = b\circ\sigma_1 + (\bar{b}\varphi_2)(\alpha) +$
$(\bar{b}\circ\sigma_2)(\alpha) = [(b+\bar{b})^{\mu_3}\circ\gamma^{\mu_2}](\alpha).$

Таким образом, μ согласован с операциями биавтомата, следовательно, μ – мономорфизм.

<u>Теорема 5</u>. Если (A_1', Σ_1', B_1') и (A_2', Σ_2', B_2') – подавтоматы в биавтоматах (A_1, Σ_1, B_1) и (A_2, Σ_2, B_2) соответственно, то треугольное произведение $(A_1', \Sigma_1', B_1') \triangledown (A_2', \Sigma_2', B_2')$ принадлежит $Var[(A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)]$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(A, \Gamma, B) = (A_1, \Sigma_1, B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2, B_2)$. Отображения $\Sigma_1' \to \Sigma_1$, $\Sigma_2' \to \Sigma_2$ являются мономорфизмами. Они индуцируют мономорфизм биавтоматов по входным сигналам:

$$\mu : (A_1, \Sigma_1', B_1) \triangledown (A_2, \Sigma_2', B_2) \longrightarrow (A, \Gamma, B).$$

Здесь $\Gamma = \Sigma_1 \times \Phi_1 \times \Psi \times \Phi_2 \times \Sigma_2$. Обозначим через Γ' полугруппу $\Sigma_1' \times \Phi_1 \times \Psi \times \Phi_2 \times \Sigma_2'$. Возьмем $G_1 = A_1 \oplus A_2'$ и $G_2 = B_1 \oplus B_2'$. Ясно, что $G_1 \cap A_2 = A_2'$ и $G_2 \cap B_2 = B_2'$. Проверим, что (G_1, Γ', G_2) составляет биавтомат.

Для любых $g_1 \in G_1$, где $g_1 = a_1 + a_2'$, $\gamma \in \Gamma$, $g_2 \in G_2$, где $g_2 = b_1 + b_2'$, имеем:

$$g_1 \circ \gamma' = (a_1 + a_2') \circ \gamma' = (a_1 + a_2') \circ (\sigma_1', \varphi_1, \varphi, \varphi_2, \sigma_2') =$$
$$= a_1 \circ \sigma_1' + a_2' + \varphi_1 + a_2' \circ \sigma_2' \in A_1 \oplus A_2' = G_1.$$
$$g_1 * \gamma' = (a_1 + a_2') * \gamma' = (a_1 + a_2') * (\sigma_1', \varphi_1, \varphi, \varphi_2, \sigma_2') =$$
$$= a_1 * \sigma_1' + a_2' \varphi + a_2' * \sigma_2' \in B_1 \oplus B_2 = G_2.$$
$$g_2 \circ \gamma' = (b_1 + b_2') \circ \gamma' = (b_1 + b_2') \circ (\sigma_1', \varphi_1, \varphi, \varphi_2, \sigma_2) =$$
$$= b_1 \circ \sigma_1' + b_2' \varphi_2 + b_2' \circ \sigma_2' \in B_1 \oplus B_2' = G_2.$$

По теореме I существует эпиморфизм по входным сигналам:

$$(G_1, \Gamma', G_2) \twoheadrightarrow (A_1, \Sigma_1', B_1) \nabla (A_2', \Sigma_2', B_2').$$

Через Γ'' обозначим полугруппу входных сигналов в треугольном произведении $(A_1, \Sigma_1', B_1) \nabla (A_2', \Sigma_2', B_2')$.

Проверим, что (A', Γ'', B') составляет биавтомат.

Для любых $a \in A_1'$, $\gamma \in \Gamma$, $b \in B_1'$, $a \circ \gamma = a \circ \sigma_1'$, где $\sigma_1' \in \Sigma_1'$, $a * \gamma = a * \sigma_1'$, $b \circ \gamma = b \circ \sigma_2'$, где $\sigma_2' \in \Sigma_2'$.

Рассмотрим биавтомат $(A_1', \Sigma_1', B_1') \nabla (A_2', \Sigma_2', B_2')$.

Возьмем $\Phi_1' = \{\varphi_1 \in \Phi_1 / Im\, \varphi_1 \subset A_1'\}$, $\Phi_2' = \{\varphi_2 \in \Phi / Im\, \varphi_2 \subset B_1'\}$, $\varphi' = \{\varphi \in \varphi / Im\, \varphi \subset B_1'\}$. Получаем изоморфизмы:

$$Hom(A_2', A_1') \to \Phi_1', \quad Hom(A_2', B_1') \to \varphi', \quad Hom(B_2', B_1') \to \Phi_2',$$

которые индуцируют изоморфизм биавтоматов:

$$(A_1', \Sigma_1', B_1') \nabla (A_2', \Sigma_2', B_2') \to (A_1' \oplus A_2', \Sigma_1' \times \Phi_1' \times \varphi' \times \Phi_2' \times \Sigma_2', B_1' \oplus B_2'),$$

но последний биавтомат является подавтоматом в (G_1, Γ', G_2), отсюда имеем инъективный гомоморфизм:

$$(A_2', \Sigma_1', B_1') \nabla (A_2', \Sigma_2', B_2') \to (G_1, \Gamma', G_2).$$

Последний биавтомат является подавтоматом в $(A_1 \oplus A_2', \Gamma, B_1 \oplus B_2')$, который в свою очередь является подавтоматом в (A, Γ, B) из $Var[(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (A_2, \Sigma_2, B_2)]$.

Следовательно, $(A_1', \Sigma_1', B_1') \nabla (A_2', \Sigma_2', B_2') \in Var[(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (A_2, \Sigma_2, B_2)]$

Теорема 6. Если $(A, \Gamma, B) = (A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (A_2, \Sigma_2, B_2)$ – треугольное произведение биавтоматов и (A', Σ', B') – подавтомат в (A_2, Σ_2, B_2), то существует эпиморфизм по входным сигналам:

$$(A_1 \oplus A_2', \Gamma, B_1 \oplus B_2') \twoheadrightarrow (A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (A', \Sigma_2, B').$$

Доказательство. Полугруппа

$$\Gamma = \Sigma_1 \times Hom(A_2, A_1) \times Hom(A_2, B_1) \times Hom(B_2, B_1) \times \Sigma_2 .$$

Обозначим через Γ' полугруппу входных сигналов треугольного произведения $(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (A', \Sigma_2, B')$,

тогда $\Gamma' = \Sigma_1 \times Hom(A', A_1) \times Hom(A', B_1) \times Hom(B', B_1) \times \Sigma_2$.

Для каждого $\varphi_1 \in Hom(A_2, A_1)$ через φ_1^* обозначим его ограничение на $A' \subset A_2$. Аналогично, для $\psi \in Hom(A_2, B_1)$ возьмем $\psi^* \in Hom(B_2, B_1)$ и для $\varphi_2 \in Hom(B_2, B_1)$ соответственно, $\varphi_2^* \in Hom(B', B_1)$. Пусть $\gamma = (\sigma_1, \varphi_1, \psi, \varphi_2, \sigma_2) \in \Gamma$. Сопоставим ему $\gamma^* = (\sigma_1, \varphi_1^*, \psi^*, \varphi_2^*, \sigma_2) \in \Gamma'$. Это соответствие определяет эпиморфизм Γ на Γ'. Действительно, если $\gamma_1 = (\sigma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \sigma_2')$ соответствует $\gamma_1^* = (\sigma_1', \varphi_1'^*, \psi'^*, \varphi_2'^*, \sigma_2')$ и $\gamma_2 = (\sigma_1'', \varphi_1'', \psi'', \varphi_2'', \sigma_2'')$ соответствует $\gamma_2^* = (\sigma_1'', \varphi_1''^*, \psi''^*, \varphi_2''^*, \sigma_2'')$, то $(\gamma_1 \gamma_2)^* =$

$$= (\sigma_1' \sigma_1'', \varphi_1' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_1'', \varphi_1' * \sigma_1'' + \sigma_2' * \varphi_2'' + \sigma_2' \circ \psi'' + \psi' \circ \sigma_1'', \varphi_2' \circ \sigma_1'' + \\ + \sigma_2' \circ \varphi_2'', \sigma_2' \sigma_2'')^* = (\sigma_1' \sigma_1'', \varphi_1'^* \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \varphi_1''^*, \varphi_1'^* * \sigma_1'' + \sigma_2' * \varphi_2''^* + \sigma_2' \circ \psi''^* + \\ + \psi'^* \circ \sigma_1'', \varphi_2'^* \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_2''^*, \sigma_2' \sigma_2'') = \gamma_1^* \gamma_2^* .$$

Следовательно, подгруппа Γ гомоморфно отображается на полугруппу Γ'.

Пусть $\gamma' = (\sigma_1, \varphi_1', \psi', \varphi_2', \sigma_2) \in \Gamma$. Доопределяя $\varphi_1' \in Hom(A', A_1)$ до $\varphi_1 \in Hom(A_2, A_1)$, $\psi' \in Hom(A', B_1)$ до $\psi \in Hom(A_2, B_1)$ и $\varphi_2' \in Hom(B', B_1)$ до $\varphi_2 \in Hom(B_2, B_1)$, получим $\gamma = (\sigma_1, \varphi_1, \psi, \varphi_2, \sigma_2) \in \Gamma$, для которого $\gamma^* = \gamma'$.

Отсюда следует, что Γ отображается на всю Γ.

Определим отображение $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ из $(A_1\oplus A', \Gamma, B_1\oplus B')$ на $(A_1\oplus A', \Gamma', B_1\oplus B')$ следующим правилам: μ_1 и μ_3 – тождественные отображения, а μ_2 каждому $\gamma\in\Gamma$ сопоставляет $\gamma^*\in\Gamma'$.

Пусть $a\in A_1$, $a'\in A'$, $b\in B_1$, $b'\in B'$, $\gamma\in\Gamma$ и $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\varphi,\varphi_2,\sigma_2)$. Если $\gamma^{\mu_2}=\gamma^*=(\sigma_1,\varphi_1^*,\varphi^*,\varphi_2^*,\sigma_2)$, то

$$[(a+a')\circ\gamma]^{\mu_3}=(a+a')\circ\gamma=a\circ\sigma_1+a'\varphi_2+a'\circ\sigma_2=(a+a')^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2};$$

$$[(a+a')*\gamma]^{\mu_3}=(a+a')*\gamma=a*\sigma_1+a'\varphi+a'*\sigma_2=(a+a')^{\mu_1}*\gamma^{\mu_2};$$

$$[(b+b')\circ\gamma]^{\mu_3}=(b+b')\circ\gamma=b\circ\sigma_1+b'\varphi_2+b'\circ\sigma_2=(b+b')^{\mu_3}\circ\gamma^{\mu_2}.$$

Следовательно, μ согласован с операциями биавтомата и является эпиморфизмом.

Теорема 7. Если $(A,\Gamma,B)=(A_1,\Sigma_1,B_1)\triangledown(A_2,\Sigma_2,B_2)$ и A' и B_2' – K – подпространства в A_1 и B_2 соответственно, где $A'\circ\Sigma_1\subset A'$ и $B_2'\circ\Sigma_2\subset B_2'$, то существует эпиморфизм по входным сигналам:

$$(A',\Gamma,B_1\oplus B_2')\longrightarrow(A',\Sigma_1,B_1)\triangledown(0,\Sigma_2,B_2').$$

Доказательство. Пусть $(A',\Sigma_1,B_1)\triangledown(0,\Sigma_2,B_2')=(A',\Gamma',B_1\oplus B_2')$, где $\Gamma'=\Sigma_1\times Hom(0,A')\times Hom(0,B_1)\times Hom(B_2',B_1)\times\Sigma_2$.

Каждому $\gamma\in\Gamma$, где $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\varphi,\varphi_2,\sigma_2)$ сопоставим $\gamma^*=(\sigma_1,0,0,0,\varphi_2^*,\sigma_2)\in\Gamma'$ с $\varphi_2'\in Hom(B_2',B_1)$ – ограничением $\varphi_2\in Hom(B_2,B_1)$ на B_2'.

Аналогично предыдущему можно проверить, что сопоставление $\gamma\longrightarrow\gamma^*$ определяет эпиморфизм полугруппы Γ на Γ', который может быть продолжен до эпиморфизма по входным сигналам между биавтоматами $(A',\Gamma,B_1\oplus B_2')$ и $(A,\Gamma,B_1\oplus B_2')$.

Поступила 5.IV.1988

Грузинский институт субтропического хозяйства

ЛИТЕРАТУРА

1. У.Э.Кальмайд. Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр. - Усп.мат.наук, 1977, т.32, № 4, с.253-254.
2. Б.И.Плоткин. Многообразия представлений групп. Усп.мат.наук, 1977, т.32, № 5, с.3-68.
3. G.Birkhoff, J.D.Lipson, Heterogeneous algebras. - J.comb. theory, 1970, vol. 8, N1, p.115-133

მ. გობეჩია

ბიავტომატთა სამკუთხა ნამრავლის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია ბიავტომატთა სამკუთხა ნამრავლის კონსტრუქცია, შესწავლილია მისი ზოგიერთი თვისება.

M.Gobechia

ON THE TRIANGULAR PRODUCT OF BIAUTOMATA

Summary

The construction on the triangular product of biautomata is considered. Some of its properties have been studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
288, 1989

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Л.Г.Доборджгинидзе

При создании или сборки различных упругих механических конструкций в них возникают начальные или остаточные напряжения, которые иногда оказывают существенное влияние на возникающие основные эксплуатационные напряжения. Это обстоятельство предопределяет актуальность и целесообразность исследования контактных задач с начальными напряжениями. Первые и основополагающие работы в этом направлении в классической (линеаризованной) постановке принадлежат А.Н.Гузю . В его работах /I-4/ дана постановка и эффективное решение этих задач в рамках линеаризованной теории упругости, при больших (конечных) однородных начальных деформациях. Принимается, что возникающие контактные напряжения значительно меньше заданных начальных напряжений. Это допущение дает возможность использовать для описания полученных дополнительных напряжений определяющие соотношения линеаризованной теории упругости. Следует отметить, что указанный выше подход не имеет смысла в точках смены граничных условий, в частности, в сингулярных точках, так как в этих местах поле напряжений имеет (интегрируемую) особенность. Так что полученное решение (как и решение соответствующей линейной задачи без начальных напряжений) в окрестностях указанных точек не имеет физического смысла и, следовательно, является несправедливым. Но, с другой стороны, характер распределения напряжений как раз в этих местах играет решающую роль в теории прочности и долговечности контактирующих конструкций.

В данной работе предлагается новый подход к решению этих задач, свободного от отмеченного выше недостатка. Ниже рассматривается плоская контактная задача без трения в нелинейной постановке для полуплоскости из нелинейно-упругого материала гармонического типа /5/. Даются эффективные (иногда точные) решения рассматриваемых задач. Доказано, что в концевых точках контактной области дополнительные контактные напряжения не имеют особенностей. Это дает возможность получить глобальное решение поставленных контактных задач с начальными напряжениями.

§ I. Постановка задачи. Основные соотношения нелинейной теории упругости для полуплоскости с начальными напряжениями

Предположим, что рассматриваемая упругая среда из нелинейно-упругого материала гармонического типа занимает полуплоскость с начальными напряжениями. Это начальное напряженное состояние будем считать однородным.

Декартовы (лагранжевы) координаты естественного (начально-натурального) состояния и начального деформированного состояния обозначим через x_i и $\tilde{x}_i$, соответственно. Согласно принятым предположениям

$$\tilde{x}_i = \alpha_i x_i \qquad (i=1,2,3), \tag{I.I}$$

где α_i суть постоянные (коэффициенты удлинения).

Ниже мы рассмотрим случай плоской деформации указанной области, считая при этом, что начальное состояние определяется также в рамках плоской деформации. Тогда будем иметь

$$\tilde{x}=\alpha x,\ \tilde{y}=\beta y,\ \tilde{z}=z\quad (\alpha=const\neq 0,\ \beta=const\neq 0). \tag{I.2}$$

Предположим теперь, что в принятых обозначениях рассматриваемая упругая среда в натуральном (недеформированном) состоянии занимает нижнюю полуплоскость S плоскости комплексной переменной $z=x+iy$, а в начальном деформированном – нижнюю полуплоскость $\tilde{S}$ плоскости переменной $\tilde{z}=\tilde{x}+i\tilde{y}$. В дальнейшем все величины, связанные с начальным деформированным состоянием, обозначим тильдой ($\sim$) над соответствующей буквой.

Обозначим границу S через L, а границу $\tilde{S}$ –через $\tilde{L}$ и предположим, что $\tilde{L}=\tilde{L}_1+\tilde{L}_2$. Кроме того, $\tilde{L}_1$ представляет собой совокупность конечного числа отрезков $\tilde{L}_1=[\tilde{a}_1\tilde{b}_1]+\dots+[\tilde{a}_n b_n]$, вдоль которых без трения действуют жесткие профили заданной формы, а остальная часть границы $\tilde{L}_2$ свобода от внешних воздействий. При этом, проходя ось $\tilde{o}\tilde{x}$ в положительном направлении, мы встречаем концы контактной линии в последовательности $\tilde{a}_1,\tilde{b}_1,\dots,\tilde{a}_n,\tilde{b}_n$. Напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют.

Можно одновременно рассмотреть два варианта сформулированной задачи. В первом варианте рассмотрим случай, когда штампы под действием приложенных сил могут совершать поступательное вертикальное перемещение независимо друг от друга (не связанные штампы). Во втором варианте штампы жестко связаны между собой. В этом случае дополнительно задается вектор ний вектор действующих на систему профилей внешних сил, а во втором – компоненты этого вектора для каждого штампа в отдельности.

В обоих случаях граничные условия задачи будут иметь вид /6/

$$\tilde{X}_y = 0 \quad \text{на } \tilde{L}, \quad \tilde{Y}_y = 0 \quad \text{на } \tilde{L}_2, \quad \tilde{v} = f(\tilde{x}) + c(\tilde{x}) \quad \text{на } \tilde{L}_1, \tag{I.3}$$

где $\tilde{Y}_y, \tilde{X}_x, \tilde{X}_y$ – компоненты тензора напряжений Коши, $\tilde{u}, \tilde{v}$ –составляющие вектора упругих смещений, $c(\tilde{x})$ – кусочно-постоянная функция, определенная по правилу: $c(\tilde{x}) = c = const$ в случае связанных штампов и $c(\tilde{x}) = c_k = const$ при $\tilde{x} \in [a_k, b_k]$ в случае не связанных штампов. Будем считать, что функция $f(\tilde{x})$ имеет производную $f'(\tilde{x})$, принадлежащую классу Гельдера $H(\tilde{L}_1)$.

Введем в рассмотрение комплексную переменную

$$z_1 = \tilde{x} + ik\tilde{y}, \tag{I.4}$$

где $k = \alpha/\beta$. Тогда, согласно (I.2), будем иметь

$$z_1 = \alpha z. \tag{I.5}$$

Учитывая это преобразование в формулах (I.2) – (I.5) работы /7/, получим комплексное представление полей напряжений, деформаций и смещений для полуплоскости с начальными напряжениями через две аналитические в рассматриваемой области S_1 функции $\varphi(z_1)$, $\psi(z_1)$ одного комплексного аргумента $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}$:

$$\tilde{X}_x + \tilde{Y}_y + 4\mu = \frac{(\lambda+2\mu)\tilde{q}\,\Omega(\tilde{q})}{|\alpha|\sqrt{\mathfrak{I}}}, \quad \tilde{Y}_y - \tilde{X}_x - 2i\tilde{X}_y = -\frac{4(\lambda+2\mu)\Omega(\tilde{q})}{|\alpha|\sqrt{\mathfrak{I}}\;\bar{q}} \frac{\partial z^*}{\partial z_1} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}_1}, \tag{I.6}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z_1} = \frac{\mu\alpha}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z_1) + \frac{\lambda+\mu}{\alpha(\lambda+2\mu)}\frac{\varphi'(z_1)}{\overline{\varphi'(z_1)}}, \quad \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi(z_1)\overline{\varphi''(z_1)}}{\alpha\overline{\varphi'^2(z_1)}} - \overline{\psi(z_1)} \tag{I.7}$$

$$\tilde{u} + i\tilde{v} = \frac{\mu\alpha}{\lambda+2\mu}\int \varphi'^2(z_1)\,dz_1 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z_1)}{\alpha\overline{\varphi'(z_1)}} + \overline{\psi(z_1)}\right] - z_1. \tag{I.8}$$

где z^0 — координата точки в конечном деформированном состоянии: $z^0 = z_1 + \tilde{u} + i\tilde{v}$,

$$\tilde{q} = 2\left|\frac{\partial z^0}{\partial z_1}\right|, \quad \Omega(\tilde{q}) = |\alpha|\tilde{q} - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}, \quad \sqrt{J} = \frac{\partial z^0}{\partial z_1}\frac{\partial \bar{z}^0}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial z^0}{\partial \bar{z}_1}\frac{\partial \bar{z}^0}{\partial z_1}, \tag{I.9}$$

λ, μ — упругие постоянные Ламе.

К этим соотношениям следует также присоединить формулу, получаемую из (I.8) дифференцированием по $\tilde{t}$

$$\tilde{u}' + i\tilde{v}' = \frac{\mu\alpha}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z_1) + \frac{\lambda+\mu}{\alpha(\lambda+2\mu)}\frac{\overline{\varphi'(z_1)}}{\varphi'(z_1)} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[-\frac{\overline{\varphi(z_1)}\varphi''(z_1)}{\alpha\varphi'^2(z_1)} + \overline{\psi'(z_1)}\right] - 1. \tag{I.10}$$

При больших $|z_1|$ функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_1)$ будут иметь представления

$$\varphi(z_1) = -\frac{(\lambda+2\mu)(X+iY)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}(\ln z_1 - \ln\alpha) + \frac{z_1}{\alpha} + O(1) + const,$$

$$\psi(z_1) = \frac{(\lambda+2\mu)(X-iY)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{2\alpha\varphi'(z_1)} - 1\right)(\ln z_1 - \ln\alpha) + O(1) + const, \tag{I.11}$$

где X, Y — компоненты главного вектора всех внешних усилий, приложенных к границе области.

Кроме того /11/,

$$\varphi'(z_1) \neq 0 \quad \text{везде в } \bar{S}_1 . \tag{I.12}$$

Таковы основные комплексные представления для нелинейно-упругой полуплоскости из материала гармонического типа с начальными напряжениями.

§ 2. Сведение задачи к функциональному уравнению

Перейдем к решению сформулированной граничной задачи. Согласно теореме о механической аналогии /11/, из первого соотношения условия (I.3) следует

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_{\tau} \quad \text{на} \quad \tilde{L} . \tag{2.1}$$

Но тогда, согласно только что отмеченного соотношения и из второй формулы (I.6), следует

$$\overline{\varphi(\tilde{x})}\,\varphi''(\tilde{x})-\alpha\,\varphi'^{2}(\tilde{x})\,\varphi'(\tilde{x})=0 \qquad \text{на } \tilde{L}. \qquad (2.2)$$

С учетом (2.2) из первого сотношения (I.6) на основании (I.7) и (2.I) получим

$$\tilde{Y}_y=N(\tilde{x})=\frac{4\mu(\lambda+\mu)\left[\alpha^2|\varphi'^2(\tilde{x})|-1\right]}{\lambda+\mu+\alpha^2\mu\,|\varphi'^2(\tilde{x})|} \qquad \text{на } \tilde{L}. \qquad (2.3)$$

Из этой формулы с учетом (I.3) будем иметь

$$|\varphi'(\tilde{x})|=\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\alpha^2\mu}\,\frac{2\mu+N(\tilde{x})}{2(\lambda+\mu)-N(\tilde{x})}}=f_1(\tilde{x}) \ \text{ на } \tilde{L}_1,\quad |\varphi'(\tilde{x})|=\frac{1}{|\alpha|} \ \text{ на } \tilde{L}_2, \qquad (2.4)$$

где $f_1(\tilde{x})$ – неизвестная пока функция на $\tilde{L}_1$. Считая временно эту функцию известной, для определения функции $\varphi'(x_1)$ в области S_1 мы получим граничную задачу по условиям (2.4).

Для решения этой задачи введем в рассмотрение новую аналитическую в области S_1 функцию $\Omega(x_1)$ по формуле

$$\Omega(x_1)=\ln(\alpha\varphi'(x_1)) \qquad (2.5)$$

и зафиксируем тот ее однозначный элемент, для которого (согласно (I.II))

$$\Omega(\infty)=0. \qquad (2.6)$$

Для полученной таким образом голоморфной функции оставим прежнее обозначение. Тогда для определения функции $\Omega(x_1)$ в области S_1 будем иметь следующие граничные условия:

$$\mathrm{Re}\,\Omega(\tilde{x})=F(\tilde{x}) \ \text{ на } \tilde{L}_1,\quad \mathrm{Re}\,\Omega(\tilde{x})=0 \ \text{ на } \tilde{L}_2, \qquad (2.7)$$

где

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{2\mu + N(\tilde{x})}{2(\lambda+\mu) - N(\tilde{x})} \right) - \tag{2.8}$$

неизвестная пока функция на $\tilde{L}_1$. Будем считать, что $F(\tilde{x}) \in H(\tilde{L}_1)$.

Считая $F(\tilde{x})$ временно известной, для определения $\Omega(z_1)$ в области S_1 мы получили видоизмененную задачу Дирихле. С учетом (2.6) эта задача имеет следующее решение /8/:

$$\Omega(z_1) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\tilde{L}_1} \frac{F(\tilde{x})\,d\tilde{x}}{\tilde{x} - z_1} \qquad \text{при } z_1 \in S_1. \tag{2.9}$$

Отсюда согласно (2.5) определяем функцию $\varphi'(z_1)$ в виде

$$\varphi'(z_1) = \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\tilde{L}_1} \frac{F(\tilde{x})\,d\tilde{x}}{\tilde{x} - z_1} \right] \qquad \text{при } z_1 \in S_1. \tag{2.10}$$

Найдем граничные значения этой функции на $\tilde{L}_1$ из S_1. Согласно известному соотношению Сохоцкого-Племеля будем иметь /8/

$$\varphi'(\tilde{x}_0) = \frac{1}{\alpha} \left(\exp F(\tilde{x}_0) \right) \left[\exp\left(-\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\tilde{L}_1} \frac{F(\tilde{x})\,d\tilde{x}}{\tilde{x} - \tilde{x}_0} \right) \right] \qquad \text{при } \tilde{x}, \tilde{x}_0 \in \tilde{L}_1. \tag{2.11}$$

Теперь нам осталось удовлетворить последнему соотношению условия (I.3). С этой целью продифференцируем это равенство по $\tilde{x}$. Тогда, с учетом (I.10) и (2.2), его можно предстaвить в виде

$$\left[\alpha^2 \mu \left| \varphi'^2(\tilde{x}) \right| + \lambda + \mu \right] \operatorname{Im} \varphi'^2(\tilde{x}) = \alpha(\lambda + 2\mu) f'(\tilde{x}) \left| \varphi'^2(\tilde{x}) \right| \qquad \text{на } \tilde{L}_1. \tag{2.12}$$

Внесем сюда выражение (2.II). Тогда после элементарных вычислений получим

$$\left[\lambda + \mu + \mu \exp(2F(\tilde{x}_0)) \right] \sin\left[\frac{2}{\pi} \int\limits_{\tilde{L}_1} \frac{F(\tilde{x})\,d\tilde{x}}{\tilde{x} - \tilde{x}_0} \right] = \alpha(\lambda + 2\mu) f'(\tilde{x}_0) \qquad \text{на } \tilde{L}_1. \tag{2.13}$$

Следовательно, для определения функции $F(\tilde{x})$ на $\tilde{L}_1$ мы получили (существенно) нелинейное функциональное (интегральное) уравнение. Его можно представить в следующем эквивалентном виде

$$\int\limits_{\tilde{L}_1} \frac{F(\tilde{x})d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}_0} = \frac{\pi}{2} \arcsin\left[\frac{\alpha(\lambda+2\mu)f'(\tilde{x}_0)}{\lambda+\mu+\mu\exp(2F(\tilde{x}_0))}\right]. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) – основное соотношение нашей задачи. Вопросу разрешимости (2.14), в общем случае, будет посвящена отдельная работа. Пока, ниже, рассмотрим некоторые специальные (но интересные с точки зрения приложений) случаи, когда можно определить точное и эффективное (приближенное) решение этого уравнения в указанном классе функций.

После определения $F(\tilde{x})$ из (2.14) контактные напряжения можно вычислить из (2.8) по формуле

$$N(\tilde{x}) = \frac{2\mu\left[\exp(2F(\tilde{x}_0))-1\right]}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp(2F(\tilde{x}_0))}. \qquad (2.15)$$

Комплексный потенциал $\varphi(z_1)$ находим после этого из (2.10), а другую искомую функцию $\psi(z_1)$ определяем из (2.2) после известных операций и соотношений (1.11) в виде

$$\psi'(z_1) = \frac{(\lambda+2\mu)(x-iy)}{4\pi\mu\alpha(\lambda+\mu)}\left[\frac{\varphi''(z_1)\ln(\alpha z_1)}{\varphi'^2(z_1)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi''(\tilde{x})\ln(\alpha\tilde{x})d\tilde{x}}{\varphi'^2(\tilde{x})(\tilde{x}-z_1)}\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{L}\frac{\overline{\varphi(\tilde{x})}\varphi''(\tilde{x})d\tilde{x}}{\varphi'^2(\tilde{x})(\tilde{x}-z_1)} \qquad (2.16)$$

при $z_1 \in S_1$.

§ 3. Жесткие профили с прямолинейными горизонтальными основаниями

Рассмотрим случай, когда $f'(\tilde{x})=0$, т.е. когда штампы имеют прямолинейное, горизонтальное относительно оси $0\tilde{x}$ основание.

В указанном случае уравнение (2.14) будет иметь вид

$$\int_{L_1} \frac{F(\tilde{x})d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}_0} = 0, \tag{3.1}$$

т.е. переходит в линейное однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение первого рода. Мы ищем решение класса h_0 (решение, не ограниченное в концевых точках линии интегрирования) этого уравнения. Этому классу соответствует индекс $\varkappa = n$, а само решение имеет вид /8/

$$F(\tilde{x}) = \frac{c_1 \tilde{x}^{n-1} + c_2 \tilde{x}^{n-2} + \ldots + c_n}{\sqrt{(\tilde{x}-a_1)(\tilde{x}-\tilde{b}_1)\cdots(\tilde{x}-\tilde{a}_n)(\tilde{x}-\tilde{b}_n)}}, \tag{3.2}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные пока постоянные, которые должны быть определены из дополнительных условий задачи. После этого из (2.8), (2.10), (2.16), (1.6) – (1.10) определяем все основные искомые характеристики задачи.

Рассмотрим случай одного штампа ($n=1$), прижатого силой ($0; N_0$) к участку $[\tilde{a}\tilde{b}]$ границы полупространства (в рассматриваемом случае оба отмеченные выше варианта совпадают).

Рассуждениями, совершенно идентичными приведенным в /7/, с использованием соотношений (1.11), (2.8), (2.10), (3.2) получим на $[\tilde{a}\tilde{b}]$

$$F(\tilde{x}) = \frac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{a})(\tilde{b}-\tilde{x})}}. \tag{3.3}$$

Отсюда, с использованием (2.8), находим точную формулу для определения контактного давления $N(\tilde{x})$ на $[\tilde{a}\tilde{b}]$ в виде

$$N(\tilde{x}) = \frac{2\mu\left[\exp\left(\dfrac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{a})(\tilde{b}-\tilde{x})}}\right)-1\right]}{1+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left[\dfrac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{a})(\tilde{b}-\tilde{x})}}\right]}. \tag{3.4}$$

Как видно из этой формулы, влияние начальных напряжений на возникшие (основные) контактные напряжения существенно. Этот факт можно использовать в различных практических целях.

Формула (3.4) примечательна тем, что дает распределение нормальных контактных напряжений под штампом без особенностей, включая концевые точки контактной области. Действительно, как легко заметить из (3.4),

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{a}(\tilde{b})} N(\tilde{x}) = 2(\lambda+\mu), \tag{3.5}$$

т.е. напряжения в окрестности концевых точек штампа получают достаточно большие, но все таки конечные значения. Это свидетельствует об образовании пластических зон в указанных местах, что и подтверждено экспериментально. Кроме того, значения $N(\tilde{x})$ на $[\tilde{a}\tilde{b}]$ существенно зависят от упругих свойств материала. Напомним, что по линейной классической теории эти напряжения не зависят от упругих постоянных и, кроме того, они в концевых точках контактной области имеют сингулярность порядка I/2, что, конечно, не может соответствовать действительности.

Рассмотрим теперь случай двух штампов, жестко связанных между собой и находящихся на одной высоте. Предположим, что на указанную систему действует внешняя сила ($0; N_0$).

Положим ($\tilde{a}_1=-\tilde{b}$, $\tilde{b}_1=-\tilde{a}$, $\tilde{a}_2=\tilde{a}$, $\tilde{b}_2=\tilde{b}$). Тогда рассуждениями, совершенно аналогичными приведенным в работе /7/, получим решение уравнения (3.I) в виде

$$F(\tilde{x}) = \frac{\pm\alpha(\lambda+2\mu)N_0\tilde{x}}{4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}} \quad \text{при } a<|\tilde{x}|<b, \tag{3.6}$$

где знак плюс берется если $\tilde{x}>0$, а знак минус – при $\tilde{x}<0$.

Из (2.8), (3.6) определяем значения нормального контактного напряжения в виде (при $\tilde{a}<|\tilde{x}|<\tilde{b}$)

$$N(\tilde{x})=\frac{2\mu\{\exp[\pm\alpha(\lambda+2\mu)N_0\tilde{x}/2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}]-1\}}{1+(\mu/\lambda+\mu)\exp[\pm\alpha(\lambda+2\mu)N_0\tilde{x}/2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}]}. \quad (3.7)$$

В случае же равновесия двух штампов, когда штампы могут перемещаться в перпендикулярном границе направлении независимо друг от друга, дополнительно задаются величины равнодействующих N_1 и N_2. Тогда, после некоторых вычислений и приведений, получим решение уравнения (3.I) в виде (решение класса h_0)

$$F(\tilde{x})=\frac{\pm\alpha(\lambda+2\mu)\left[(\pi\tilde{b}/2K(k))(N_1-N_2)-(N_1+N_2)\tilde{x}\right]}{4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}} \quad (3.8)$$

при $\tilde{a}<|\tilde{x}|<\tilde{b}$,

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода /9/

$$K(k)=\tilde{b}\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\frac{d\tilde{x}}{\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}},\quad k=\sqrt{1-\tilde{a}^2/\tilde{b}^2}. \quad (3.9)$$

Следовательно, из сравнения (2.8) и (3.8) находим формулу для определения контактного давления под штампом в виде ($\tilde{a}<|\tilde{x}|$

$$N(\tilde{x})=\frac{2\mu\exp\left[\pm\frac{\alpha(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\pi\tilde{b}/2K(k))(N_1-N_2)-(N_1+N_2)\tilde{x}}{\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}}\right]-1}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left[\pm\frac{\alpha(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\pi\tilde{b}/2K(k))(N_1-N_2)-(N_1+N_2)\tilde{x}}{\sqrt{(\tilde{x}^2-\tilde{a}^2)(\tilde{b}^2-\tilde{x}^2)}}\right]} \quad (3.10)$$

где, как и в (3.7), знаки перед радикалами выбираются так же, как и в (3.6).

§ 4. Некоторые соображения, упрощающие структуру уравнения (2.I4)

Основное уравнение (2.I4) имеет существенно нелинейную структуру. В предыдущем пункте был рассмотрен случай $f'(\tilde{x})=0$, когда удается найти точное решение этого уравнения указанного там класса. Но в общем случае (для любого допустимого $f(\tilde{x})$), по всей вероятности, возможно только приближенное решение этого уравнения. На пути реализации этой цели существуют два подхода: либо линеаризовать (2.I4) и найти точное решение полученного уравнения, либо не корректировать его и искать приближенное решение (требуемого класса) каким-либо способом (например, указанным в монография /I0/). Мы выбираем первый путь и на основании приемлемых физических допущений линеаризуем основное уравнение относительно функции $F(\tilde{x})$ (заметим, что относительно $N(\tilde{x})$ оно опять остается нелинейным). Так что линеаризацию производим относительно унифицированной функции $F(\tilde{x})$.

Мы совершим это на основании широко распространенного в таких задачах допущения. А именно, будем считать, что основные контактные нормальные напряжения, возникающие за счет действий жестких профилей (напоминаем, что по условию на контактной области касательные напряжения отсутствуют) значительно меньше начальных напряжений. Значит мы полагаем, что

$$|N(\tilde{x})| \ll |N(x)|, \text{ где } x\in L_1,\ \tilde{x}\in\tilde{L}_1. \qquad (4.I)$$

Это предположение на основании (2.8) и структуры правой части (2.I4) дает возможность с достаточно высокой (приемлемой) степенью точности заменить уравнение (2.I4) следующим линейным сингулярным характеристическим интегральным уравнением

$$\frac{1}{\pi}\int_{\tilde{L}_1}\frac{F(\tilde{x})d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}_0}=\frac{\alpha f'(\tilde{x}_0)}{2}. \qquad (4.2)$$

Погрешность этой замены (вернее замены правой части (2.I4) на $\pi\alpha f'(\tilde{x})/2$) зависит от условия (4.I) и в реальных ситуациях действительно очень мала. Например, при $\lambda=\mu$, $N(\tilde{x})=0{,}01\mu$ она не превосходит 0,3%, а при $N(\tilde{x})=0{,}001\mu$ составляет всего лишь 0,03%. Причем в указанном примере приводятся повышенные значения начальных напряжений.

Вернемся к уравнению (4.2). Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений общее решение класса h_0 этого уравнения при $\varkappa>0$ дается формулой

$$F(\tilde{x}_0)=-\frac{\alpha X^+(\tilde{x}_0)}{\pi}\int_{\tilde{L}_1}\frac{f'(\tilde{x})d\tilde{x}}{X^+(\tilde{x})(\tilde{x}-\tilde{x}_0)}+X^+(\tilde{x}_0)P_{n-1}(\tilde{x}_0), \qquad (4.3)$$

где $X(\tilde{z}_1)$ – каноническая функция указанного класса h_0

$$X(\tilde{z}_1)=\prod_{k=1}^{n}(\tilde{z}_1-\tilde{a}_k)^{-1/2}(\tilde{z}_1-\tilde{b}_k)^{-1/2}, \qquad (4.4)$$

ведущая при больших $|\tilde{z}_1|$ согласно представлению

$$X(\tilde{z}_1)=\tilde{z}_1^{-n}+k_{-n-1}\tilde{z}_1^{-n-1}+\dots, \qquad (4.5)$$

а $X^+(\tilde{x})$ обозначает граничное значение этой функции на левой стороне линии $\tilde{L}$. $P_{n-1}(\tilde{x}_0)$ – произвольный полином степени не выше $n-1$ (при $\varkappa=0$. $P_{n-1}(\tilde{x}_0)=0$).

При $\varkappa<0$ ($\varkappa=-n$) единственное решение класса $h(\tilde{a}_1,\tilde{b}_1,\dots,\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)$ дается формулой

$$F(\tilde{x}_0) = -\frac{\alpha}{\pi X^+(\tilde{x}_0)} \int_{\tilde{L}_1} \frac{X^+(\tilde{x})d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}_0}, \qquad (4.6)$$

только при соблюдении следующих условий разрешимости

$$\int_{\tilde{L}_1} \tilde{x}^k X^+(\tilde{x})d\tilde{x} = 0 \quad (k=0,1,\ldots,n-1) . \qquad (4.7)$$

В данном случае концы линии $\tilde{L}_1$ заранее не известны и должны быть определены из условия (4.7), а также дополнительных условий задачи.

Учитывая поведение интеграла типа Коши в окрестности концов линий интегрирования, на основании (2.15), (4.3), (4.6) заключаем, что в первом случае (задачи с угловыми точками) нормальное контактное напряжение будет ограниченным, а во втором - обращаться в нуль (задача при отсутствии угловых точек) в указанных точках.

§ 5. Штамп с прямолинейным наклонным основанием

Рассмотрим случай, когда на штамп с прямолинейным наклонным основанием действуют силы, главный вектор которых имеет интенсивность N_0. Главный момент этих сил обозначим через M, а угол, который основание штампа образует с положительным направлением оси $o\tilde{x}$, -через ω. Таким образом, имеем.

$$f(\tilde{x}) = \omega\tilde{x}. \qquad (5.1)$$

Будем считать (без ограничения общности), что контактная область представляет собой участок $[-\tilde{a};\tilde{a}]$ границы полуплоскости.

Решение класса h_0 этого уравнения согласно (4.3) имеет вид

$$F(\tilde{x}_0) = -\frac{\omega\alpha}{\pi\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_0^2}} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \frac{\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}\,d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}_0} + \frac{C}{\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_0^2}}, \qquad (5.2)$$

где c -произвольная пока действительная постоянная, а под $\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}$ понимается граничное значение, принимаемое функцией $\sqrt{\tilde{a}^2-z_1^2}$ на верхней стороне оси $o\tilde{x}$. Кроме того, при достаточно больших $|z_1|$

$$\sqrt{\tilde{a}^2-z_1^2}=-iz_1+\frac{i\tilde{a}^2}{2z_1}+\dots \tag{5.3}$$

С учетом (5.3) легко убеждаемся в справедливости формулы

$$\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}\,d\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{x}_0}=\pi\tilde{x}_0. \tag{5.4}$$

Тогда (5.2) примет вид

$$F(\tilde{x})=-\frac{\omega\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}+\frac{c}{\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}. \tag{5.5}$$

Для определения постоянной c проинтегрируем равенство (5.5) от $-\tilde{a}$ до $\tilde{a}$. Получим

$$\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}F(\tilde{x})\,d\tilde{x}=c\pi. \tag{5.6}$$

Обратимся теперь к формуле (2.10) и проследим за ее асимптотическим поведением при достаточно больших $|z_1|$. Тогда, с учетом (1.11) и (5.6), получим

$$c=\frac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}. \tag{5.7}$$

Следовательно, окончательное решение уравнения (4.2) указанного класса имеет вид

$$F(\tilde{x})=-\frac{\alpha\omega\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}+\frac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{4\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}} \tag{5.8}$$

при $\tilde{x}\in[-\tilde{a};\tilde{a}]$.

Отсюда на основании (2.15) находим, наконец, формулу для определения значений контактного давления под штампом (при $\tilde{x}\in[-\tilde{a};\tilde{a}]$)

$$N(\tilde{x})=\frac{2\mu\left[\exp\left(-\frac{\alpha\omega\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}+\frac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}\right)-1\right]}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left(-\frac{\alpha\omega\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}+\frac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{2\pi\mu(\lambda+\mu)\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}\right)}. \tag{5.9}$$

Эта формула, в отличие от своего линейного аналога, содержит упругие постоянные материала и, что особенно примечательно, дает для $N(\tilde{x})$ конечные значения в угловых точках. Влияние начальных напряжений на распределение контактных реакций под штампом, как видно, значительно. Только в окрестности концов $-\tilde{a}, \tilde{a}$ значения $N(\tilde{x})$ не зависят от начальных напряжений.

Для того, чтобы решение (5.9) было физически возможным должно быть, как легко убедиться, соблюдено условие

$$N_0 \geqslant \frac{2\pi\mu(\lambda+\mu)\omega\tilde{a}}{\lambda+2\mu}. \tag{5.10}$$

Главный момент внешних сил, удерживающий штамп в данном положении, можно вычислить по формуле

$$M=-\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\tilde{x}N(\tilde{x})d\tilde{x}, \tag{5.11}$$

куда следует подставить значения, даваемые формулой (5.9).

При $\omega=0$ получим решение предыдущего пункта.

§ 6. Штамп с закругленным основанием

Рассмотрим теперь штамп с закругленным основанием, т.е. будем считать, что определенная на отрезке $[-\tilde{a};\tilde{a}]$ функция $f(\tilde{x})$ имеет вид

$$f(\tilde{x})=\frac{\tilde{x}^2}{2R}. \tag{6.1}$$

Подставляя это значение в правую часть (4.6) и вспоминая, что в данном случае

$$X(\tilde{x})=\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}, \tag{6.2}$$

после некоторых вычислений получим

$$F(\tilde{x})=\frac{\alpha\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}{2\pi R}. \tag{6.3}$$

Условие разрешимости (4.7), очевидно, выполняется автоматически.

Заметим, что в решении (6.3) участвует известная пока постоянная $\tilde{a}$. Для ее определения проинтегрируем равенство (6.3) от $-\tilde{a}$ до $\tilde{a}$ и полученное выражение (согласно (2.I0)) сравним с коэффициентом при z_1^{-1} в представлении (I.II). Тогда, как легко убедиться, получим

$$\tilde{a}=\sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)RN_0}{\pi\mu(\lambda+\mu)}}. \tag{6.4}$$

Формулой (6.4) определяется полудлина участка контакта.

После этого из сравнения (2.I5) и (6.3) получим формулу для определения нормального контактного давления под штампом в виде

$$N(\tilde{x})=\frac{2\mu\left[\exp\left(\frac{\alpha\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}{\pi R}\right)-1\right]}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left(\frac{\alpha\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}^2}}{\pi R}\right)}. \tag{6.5}$$

Эта формула по сравнению с линейным аналогом примечательна тем, что учитывает упругие свойства материала. Как видно из (6.5)

$$\lim_{\tilde{x}\to\pm\tilde{a}} N(\tilde{x})=0. \tag{6.6}$$

В заключение отметим, что во всех рассматриваемых случаях распределение нормальных реакционных напряжений на контактной области существенно зависит от начальных напряжений.

§ 7. Решение задачи оптимизации

Как известно, исследование распределения контактных напряжений под штампом на области соприкасания – основная задача теории контактных взаимодействий. Указанное распределение, в свою очередь, существенно зависит от формы основания штампа. В связи с этим интересно исследовать, в условиях отмеченных в предидущих параграфах начальных напряжений, возможно ли определить такую форму основания жесткого профиля, для которой (в условиях отсутствия трения) нормальные контактные напряжения принимали бы везде одно и то же постоянное значение.

Пусть штамп с произвольным пока плоским основанием силой $(0; N_0)$ прижимается к участку $[\tilde{a}\tilde{b}]$ границы полуплоскости. Тогда граничные условия задачи будут иметь вид

$$\tilde{X}_y=0 \text{ на } \tilde{L}, \qquad \tilde{Y}_y=0 \text{ на } \tilde{L}_2, \qquad \begin{matrix} N(\tilde{x})=6, \\ v=f(\tilde{x})+const \end{matrix} \quad \text{на } \tilde{L}_1, \qquad (7.I)$$

где 6 -неизвестная пока постоянная, $f(\tilde{x})$ – заданная на $\tilde{L}_1$, тоже неизвестная действительная функция, производная которой принадлежит классу Гельдера на $\tilde{L}_1$.

С учетом (2.4) и на основании (7.I) для определения голоморфной в S_1 функции $\varphi'(z_1)$ имеем граничные условия

$$|\varphi'(\tilde{x})|=\sqrt{\frac{1+\mu}{\alpha^2\mu}\cdot\frac{2\mu+6}{2(1+\mu)-6}} \text{ на } \tilde{L}_1, \quad |\varphi'(\tilde{x})|=\frac{1}{|\alpha|} \text{ на } \tilde{L}_2. \quad (7.2)$$

Решение этой задачи, как это следует из (2.10), дается формулой

$$\varphi'(z_1)=\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{F_0}{\pi i}\ln\frac{z_1-\tilde{b}}{z_1-\tilde{a}}\right), \tag{7.3}$$

где

$$F_0=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\frac{2\mu-\sigma}{2(\lambda+\mu)+\sigma}\right). \tag{7.4}$$

Под $\ln[(z_1-\tilde{b})/(z_1-\tilde{a})]$ подразумевается ветвь, для которой

$$\lim_{z_1\to\infty}\left[z_1\ln\frac{z_1-\tilde{b}}{z_1-\tilde{a}}\right]=\tilde{b}-\tilde{a}. \tag{7.5}$$

Из сравнения (1.11) и (7.5) находим

$$\frac{(\tilde{a}-\tilde{b})F_0}{\alpha\pi}=-\frac{(\lambda+2\mu)N_0}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}. \tag{7.6}$$

Из этого равенства, согласно (7.4), получим

$$\sigma=\frac{2\mu\left[\exp\left(\dfrac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{2\mu(\lambda+\mu)(\tilde{b}-\tilde{a})}\right)-1\right]}{1+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left(\dfrac{\alpha(\lambda+2\mu)N_0}{2\mu(\lambda+\mu)(\tilde{b}-\tilde{a})}\right)}. \tag{7.7}$$

Подставляя это значение в правую часть (7.4), а найденное при этом значение F_0 – в формулу (7.3), найдем значение функции $\varphi'(z_1)$. После этого, другую искомую функцию $\psi(z_1)$ определим из (2.16) известным способом.

Осталось определить неизвестную пока действительную функцию $f(x)$ на $[\tilde{a}\tilde{b}]$, характеризующую форму основания штампа. С этой целью из (7.3) найдем граничное значение функции $\varphi'(z_1)$ на $[\tilde{a}\tilde{b}]$ и полученное выражение внесем в граничное условие

(2.12). Тогда поле некоторых вычислений получим

$$f'(\tilde{x})=\frac{\mu\delta^2+1+\mu}{\alpha(1+2\mu)}\sin\left(\frac{2F_0}{\pi}\ln\frac{\tilde{b}-\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{a}}\right), \tag{7.8}$$

где

$$\delta=\sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\frac{2\mu+\sigma}{2(1+\mu)-\sigma}}. \tag{7.9}$$

Из (7.8) после интегрирования получим

$$f(\tilde{x})=\frac{-2(1+\mu)}{\alpha[2(1+\mu)-\sigma]}\int\sin\left[\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\frac{2\mu+\sigma}{2(1+\mu)-\sigma}\right)\cdot\ln\frac{\tilde{b}-\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{a}}\right]d\tilde{x}+C, \tag{7.10}$$

где C – произвольная действительная постоянная. Для ее определения поставим условие

$$f(\tilde{a})=f(\tilde{b})=\beta, \tag{7.11}$$

где β – действительная постоянная.

Следовательно, при наличии формы основания в виде (7.10) нормальное контактное напряжение будет принимать на контактной области одно и то же постоянное значение, определяемое соотношением (7.7).

Поступила 29.I.1988

Тбилисский
математический институт
им.А.М.Размадзе АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н.Гузь. Доклады АН УССР, т.6, 1980, с.48–52.
2. А.Н.Гузь. Доклады АН УССР, т.7, 1980, с.42–45.
3. А.Н.Гузь. Прикладная механика, т.16, № 5, 1980, с.72–83.
4. А.Н.Гузь. Прикладная механика, т.16, № 8, 1980, с.48–58.

5. F.John. Communications on pure and applied mathematics., 13, №2, 1960, p. 239-296.

6. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.,1966.

7. Л.Г.Добордогинидзе. Известия АН СССР, МТТ, № 4, 1987, с.96-100.

8. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

9. И.Я.Штаерман. Контактная задача теории упругости. М.-Л., 1949.

10. П.Бенерджи, Р.Баттерфилд. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.,1984.

ლ. დობორჯგინიძე

დრეკადობის არაწრფივი თეორიის ზოგიერთი ბრტყელი საკონტაქტო ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის საზღვრის დაზიანებით

რეზიუმე

ხახუნის ძალების გათვალისწინების გარეშე განხილულია წრფივი საკონტაქტო ამოცანა ჰარმონიული ტიპის არაწრფივად დრეკადი მასალის ბრტყელი ნახევარსიბრტყისათვის საზღვრის დაზიანებით. მიღებულია დასმული ამოცანების ეფექტური (ზოგჯერ ზუსტი) ამოხსნები, დამტკიცებულია, რომ საკონტაქტო არის ბოლო წერტილების მახლობლობაში დამაგრებით საკონტაქტო ძაბვებს არა აქვთ განსაკუთრებულობანი, ეს ფაქტი განხილული ამოცანების ლოკალური ამოხსნების მიღების შესაძლებლობას იძლევა.

L.Doborjginidze

SOME PLANE CONTACT PROBLEMS OF THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY FOR A HALF-PLANE WITH INITIAL STRESSES

Summary

The plane contact friction-free problem is investigated in the nonlinear statement for a half-plane of nonlinear elastic harmonic type material with initial stresses. For the problems under consideration effective (sometimes exact) solutions are given. It is proved that additional contact stresses have no singularities at the end points of the contact region. This makes possible to obtain global solutions of the problems under consideration.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

288, 1989

УДК 539.3.

ЗАДАЧА ОБ УСИЛЕНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗОМ

М.Т.Гомартели

Рассматривается бесконечная пластинка малой h толщины, заполняющая всю плоскость комплексной переменной $z=x+iy$ и составленная из двух различных по упругим свойствам материалов. Пусть одно из составляющих тел имеет упругие характеристики $\mu_1, \varkappa_1$ и занимает верхнюю полуплоскость S^+, а другое тело с характеристиками $\mu_2, \varkappa_2$ – нижнюю полуплоскость S^-. Предположим, что эти полуплоскости спаяны между собой вдоль части действительной оси вне отрезка (-I; I), который представляет собой разрез; мы его обозначим через l, а границу полного контакта – через L. К берегам разреза приложены заданные нормальные усилия

$$\sigma_y^+(x)=\sigma_y^-(x)=P(x), \quad x\in l, \tag{I}$$

где $P(x)$ –абсолютно непрерывная функция на l, а

$$\sigma_y^+(x)=\lim_{z\to x+i0}\sigma_y(z), \quad \sigma_y^-(x)=\lim_{z\to x-i0}\sigma_y(z), \quad x\in l.$$

Предположим далее, что рассматриваемая кусочно-однородная среда усилена двумя перпендикулярными к действительной оси стрингерами, приклепанными к пластинке в точках $z_1^1=-a+iR$, $z_2^1=-a-iR$ первый и $z_1^2=a+iR$, $z_2^2=a-iR$ – второй соответственно.

В дальнейшем, как и в работе /3/, будем находиться в пределах следующих допущений:

1.Силы трения между пластинкой и стрингером отсутствуют.

2.Эффектом эксцентричного прикрепления стрингера относительно срединной плоскости пластинки можно пренебречь.

3.В пластинке имеет место плоское напряжение состояние,а заклепки моделируются круглыми жесткими включениями.

4. Стрингер работает только на растяжение-сжатие, причем ослабление его за счет постановки заклепок не учитывается.

Примем, что к заклепкам внешние силы не приложены, а на бесконечности напряжение и вращение отсутствуют.

Напряженное состояние в S^+ и S^- характеризуется комплексными потенциалами $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ соответственно, которые имеют вид:

$$\begin{cases}\Phi_1(z)=\Phi_{01}(z)+X_1(z),\\ \Psi_1(z)=\Psi_{01}(z)+\Omega_1(z),\end{cases}\qquad z\in S^+, \tag{2}$$

$$\begin{cases}\Phi_2(z)=\Phi_{02}(z)+X_2(z),\\ \Psi_2(z)=\Psi_{02}(z)+\Omega_2(z),\end{cases}\qquad z\in S^-, \tag{3}$$

где $\Phi_{01}(z)$, $\Psi_{01}(z)$, $X_2(z)$, $\Omega_2(z)$ голоморфны в S^-, $\Phi_{02}(z)$, $\Psi_{02}(z)$, $X_1(z)$, $\Omega_1(z)$ голоморфны в S^+, из них функции $X_1(z)$, $\Omega_1(z)$, $X_2(z)$, $\Omega_2(z)$ подлежат определению, а для функций $\Phi_{01}(z)$, $\Psi_{01}(z)$, $\Phi_{02}(z)$, $\Psi_{02}(z)$ известны следующие представления:

$$\begin{cases}\Phi_{01}(z)=\dfrac{iN}{2\pi(1+æ_1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\dfrac{1}{z-z_1^k},\\ \Psi_{01}(z)=\dfrac{iN}{2\pi(1+æ_1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left[\dfrac{æ_1}{z-z_1^k}+\dfrac{\bar z_1^k}{(z-z_1^k)^2}+\dfrac{2R^2}{(z-z_1^k)^3}\right],\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \Phi_{02}(z) = \dfrac{-iN}{2\pi(1+\varkappa_2)} \sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{1}{z-z_2^k}, \\ \Psi_{02}(z) = \dfrac{-iN}{2\pi(1+\varkappa_2)} \sum\limits_{k=1}^{2} \left[\dfrac{\varkappa_2}{z-z_2^k} + \dfrac{\bar{z}_2^k}{(z-z_2^k)^2} + \dfrac{2r^2}{(z-z_2^k)^3} \right], \end{cases} \tag{5}$$

$$\Phi_{0k}(z) = \frac{d\varphi_{0k}(z)}{dz}, \quad \Psi_{0k}(z) = \frac{d\psi_{0k}(z)}{dz}, \quad k = 1, 2,$$

где N -неизвестная сила взаимодействия стрингера и пластинки, r -радиус заклепок.

Рассмотрим сначала верхнюю полуплоскость. На действительной оси имеем следующее граничное условие:

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = \Phi_{01}(x) + X_1(x) + \overline{\Phi_{01}(x)} + \overline{X_1(x)} + \\ + x\overline{\Phi'_{01}(x)} + x\overline{X'_1(x)} + \overline{\Psi_{01}(x)} + \overline{\Omega_1(x)}, \tag{6}$$

откуда, действуя интегралом типа Коши, получаем:

$$X_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_y(t) - i\tau_{xy}(t)}{t-z}\,dt - \overline{\Phi_{01}(\bar z)} - z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)} - \\ - \overline{\Psi_{01}(\bar z)}. \tag{7}$$

Аналогично, из сопряженного к (6) граничного условия имеем

$$\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\tau_{xy}(t)}{t-z}\,dt - \frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_y(t) - i\tau_{xy}(t)}{(t-z)^2}\,dt + \\ + \overline{\Psi_{01}(\bar z)} + 3z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)} + z^2\overline{\Phi''_{01}(\bar z)} + z\overline{\Psi'_{01}(\bar z)}. \tag{8}$$

Таким образом, функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ принимают вид

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_y(t) - i\tau_{xy}(t)}{t-z}\,dt + \Phi_{01}(z) - z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)} - \\ - \overline{\Phi_{01}(\bar z)} - \overline{\Psi_{01}(\bar z)}, \tag{9}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\tau_{xy}(t)}{t-z}\,dt - \frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_y(t) - i\tau_{xy}(t)}{(t-z)^2}\,dt + \\ + \Psi_{01}(z) + \overline{\Psi_{01}(\bar z)} + 3z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)} + z^2\overline{\Phi''_{01}(\bar z)} + z\overline{\Psi'_{01}(\bar z)}. \tag{10}$$

Интегрируя (9) и (10) по z, получаем

$$\Phi_1(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]\ln(t-z)\,dt+\Phi_{01}(z)-$$
$$-z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)}-\overline{\Psi_{01}(\bar z)}+const, \tag{11}$$

$$\Psi_1(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)+$$
$$+i\tau_{xy}(t)]\ln(t-z)\,dt+\Psi_{01}(z)+z\overline{\Psi'_{01}(\bar z)}+z^2\overline{\Phi''_{01}(\bar z)}+ \tag{12}$$
$$+z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)}-\overline{\Phi_{01}(\bar z)}+const.$$

Для нахождения комплексных перемещений (11) и (12) подставим в формулу

$$2\mu_k h W_k(z)=\varkappa_k\Phi_k(z)-z\overline{\Phi'_k(z)}-\overline{\Psi_k(z)}, \quad k=1,2,$$

после чего будем иметь

$$2\mu_1 h W_1(z)=\varkappa_1\Phi_{01}(z)-\varkappa_1 z\overline{\Phi'_{01}(\bar z)}-\varkappa_1\overline{\Psi_{01}(\bar z)}-z\overline{\Phi'_{01}(z)}-$$
$$-\overline{\Psi_{01}(z)}+\Phi_{01}(\bar z)+(z-\bar z)\left(\Phi'_{01}(\bar z)+\bar z\Phi''_{01}(\bar z)+\Psi'_{01}(\bar z)\right)-$$
$$-\frac{\varkappa_1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]\ln(t-z)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]\ln(t-\bar z)\,dt-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t-z}{t-\bar z}[\sigma_y(t)+i\tau_{xy}(t)]\,dt+2\mu_1 c, \quad c=const. \tag{13}$$

Перейдем теперь к рассмотрению нижней полуплоскости. Исходя из граничного условия на действительной оси

$$\sigma_y(x)-i\tau_{xy}(x)=\Phi_{02}(x)+X_2(x)+\overline{\Phi_{02}(x)}+\overline{X_2(x)}+$$
$$+x\overline{\Phi'_{02}(x)}+x\overline{X'_2(x)}+\overline{\Psi_{02}(x)}+\overline{\Omega_2(x)}, \tag{14}$$

аналогично, как и для верхней полуплоскости, находим, что

$$\Phi_2(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)}{t-z}dt+\Phi_{02}(z)-\overline{\Phi_{02}(\bar z)}-$$
$$-z\overline{\Phi'_{02}(\bar z)}-\overline{\Psi_{02}(\bar z)}, \tag{15}$$

$$\Psi_2(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i\tau_{xy}(t)}{t-z}dt+\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)}{(t-z)^2}dt+\Psi_{02}(z)+$$
$$+\overline{\Psi_{02}(\bar z)}+3z\overline{\Phi'_{02}(\bar z)}+z^2\overline{\Phi''_{02}(\bar z)}+z\overline{\Psi'_{02}(\bar z)}, \tag{16}$$

$$\varphi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]\ln(t-z)dt+\varphi_{02}(z)- \qquad (17)$$
$$-z\overline{\varphi'_{02}(\bar z)}-\overline{\psi_{02}(\bar z)}+const,$$

$$\psi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)+i\tau_{xy}(t)]\ln(t-z)dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]}{t-z}dt$$
$$+\overline{\psi_{02}(\bar z)}+z\overline{\psi'_{02}(\bar z)}+z^2\overline{\varphi''_{02}(\bar z)}+z\overline{\varphi'_{02}(\bar z)}-\varphi_{02}(z)+const. \qquad (18)$$

Комплексные же перемещения в S^- будут заданы в виде

$$2\mu_2 h W_2(z)=\varkappa_2\varphi_{02}(z)-\varkappa_2 z\overline{\varphi'_{02}(\bar z)}-\varkappa_2\overline{\psi_{02}(\bar z)}-z\overline{\varphi'_{02}(z)}-$$
$$-\overline{\psi_{02}(z)}+\varphi_{02}(\bar z)+(z-\bar z)\left(\overline{\varphi'_{02}(\bar z)}+\bar z\overline{\varphi''_{02}(\bar z)}+\overline{\psi'_{02}(\bar z)}\right)+$$
$$+\frac{\varkappa_2}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]\ln(t-z)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)+i\tau_{xy}(t)]\frac{t-z}{t-\bar z}dt+ \qquad (19)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)]\ln(t-\bar z)dt+2\mu_2 c,\quad c=const.$$

Запишем условие сцепления на L следующим образом:

$$W_1'^{+}(z)\Big|_{z=x+i0}=W_2'^{-}(z)\Big|_{z=x-i0} \qquad (20)$$

Учитывая, что

$$2\mu_k h W_k'(z)=\varkappa_k\Phi_k(z)-\overline{\Phi_k(\bar z)}-z\overline{\Phi'_k(z)}-\overline{\Psi_k(z)}, \qquad (21)$$

с помощью (9),(10),(15),(16), приходим к характеристическому сингулярному интегральному уравнению вида

$$[\mu_2(\varkappa_1-1)-\mu_1(\varkappa_2-1)][\sigma_y(x)-i\tau_{xy}(x)]+ \qquad (22)$$
$$+\frac{\mu_1(\varkappa_1+1)+\mu_2(\varkappa_2+1)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\sigma_y(t)-i\tau_{xy}(t)}{t-x}dt=g(x),$$
$$x\in L,$$

где

$$\ldots(\varkappa+1)\left[\Phi_{02}(x)-\overline{\Phi_{02}(x)}-x\overline{\Phi'_{02}(x)}-\overline{\Psi_{02}(x)}\right]-$$

$$-\mu_2(\varkappa_1+1)\left[\Phi_{01}(x)-\overline{\Phi_{01}(x)}-x\overline{\Phi'_{01}(x)}-\overline{\Psi_{01}(x)}\right]+$$

$$+i\left[\mu_2(\varkappa_1+1)+\mu_1(\varkappa_2+1)\right]F(x), \tag{23}$$

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\ell}\frac{P(t)}{t-x}dt, \quad x\in L.$$

Следуя /2/, решение полученного уравнения запишется так:

$$\sigma_y(x)-i\tau_{xy}(x)=\gamma\left[\mu_1(\varkappa_2-1)-\mu_2(\varkappa_1-1)\right]g(x)+$$

$$+\gamma\frac{\left[\mu_1(\varkappa_2+1)+\mu_2(\varkappa_1+1)\right]\left[\cos\left(\beta\ln\frac{x+1}{x-1}\right)+i\left[\sin\left(\beta\ln\frac{x+1}{x-1}\right)\right]\right]}{\pi i\sqrt{x^2-1}\,(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)}\times$$

$$\times\int_L\frac{\sqrt{t^2-1}\,g(t)dt}{\left[\cos\left(\beta\ln\frac{t+1}{t-1}\right)+i\left[\sin\left(\beta\ln\frac{t+1}{t-1}\right)\right]\right](t-x)}, \quad x\in L, \tag{24}$$

где

$$1/\gamma=4(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)(\mu_2+\mu_1\varkappa_2), \quad \beta=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}{\mu_1+\mu_2\varkappa_1}.$$

Отделяя в (24) действительную и мнимую части, будем иметь

$$\sigma_y(x)=N\sigma_y^1(x)+\sigma_y^0(x), \tag{25}$$

$$\tau_{xy}(x)=N\tau_{xy}^1(x)+\tau_{xy}^0(x), \quad x\in L,$$

где

$$\sigma_y^1(x)=\gamma\left[\mu_1(\varkappa_2-1)-\mu_2(\varkappa_1-1)\right]A(x)+\gamma\frac{\mu_1(\varkappa_2+1)+\mu_2(\varkappa_1+1)}{\pi\sqrt{x^2-1}\,(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)}\times$$

$$\times\int_L\frac{\sqrt{t^2-1}}{t-x}\left[A(t)\sin\left(\beta\ln\frac{(x+1)(t-1)}{(x-1)(t+1)}\right)+\right. \tag{26}$$

$$\left.+B(t)\cos\left(\beta\ln\frac{(x+1)(t-1)}{(x-1)(t+1)}\right)\right]dt,$$

$$\sigma_y^0(x)=\gamma\frac{\left[\mu_1(\varkappa_2+1)+\mu_2(\varkappa_1+1)\right]^2}{\pi\sqrt{x^2-1}\,(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)}\int_L\frac{\sqrt{t^2-1}}{t-x}F(t)\cos\left(\beta\ln\frac{(x+1)(t-1)}{(x-1)(t+1)}\right)dt, \tag{27}$$

$$\tau_{xy}^1(x)=-\gamma\left[\mu_1(\varkappa_2-1)-\mu_2(\varkappa_1-1)\right]B(x)+\gamma\frac{\mu_1(\varkappa_2+1)+\mu_2(\varkappa_1+1)}{\pi\sqrt{x^2-1}\,(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)}\times$$

$$\times\int_L\frac{\sqrt{t^2-1}}{t-x}\left[A(t)\cos\left(\beta\ln\frac{(x+1)(t-1)}{(x-1)(t+1)}\right)-B(t)\sin\left(\beta\ln\frac{(x+1)(t-1)}{(x-1)(t+1)}\right)\right]dt, \tag{28}$$

$$\tau_{xy}^{\circ}(x) = -\gamma[\mu_1(\varkappa_2+1)+\mu_2(\varkappa_1+1)][\mu_1(\varkappa_2-1)-\mu_2(\varkappa_1-1)]F(x) -$$

$$-\gamma\frac{[\mu_1(\varkappa_2+1)+\mu_2(\varkappa_1+1)]^2}{\pi\sqrt{x^2-1}(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)}\int\frac{\sqrt{t^2-1}}{t-x}F(t)\sin\left(\beta\ln\frac{(x+1)(t-1)}{(x-1)(t+1)}\right)dt, \qquad (29)$$

$$A(x) = \operatorname{Re} g(x) = 4R^3(\mu_1-\mu_2)\left[\frac{1}{[(x+a)^2+R^2]^2}+\frac{1}{[(x-a)^2+R^2]^2}\right]+$$

$$+R[\mu_1(\varkappa_2+3)-\mu_2(\varkappa_1+3)]\left[\frac{1}{(x+a)^2+R^2}+\frac{1}{(x-a)^2+R^2}\right], \qquad (30)$$

$$B(x) = \operatorname{Im} g(x) = (\mu_1+\mu_2)\left[\frac{(x+a)[(x+a)^2-3R^2]}{[(x+a)^2+R^2]^2}+\frac{(x-a)[(x-a)^2-3R^2]}{[(x-a)^2+R^2]^2}\right]-$$

$$-[\mu_1(\varkappa_2+2)+\mu_2(\varkappa_1+2)]\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+R^2}+\frac{x-a}{(x-a)^2+R^2}\right]. \qquad (31)$$

В выражениях (30) и (31) учтена оправданная в большинстве практических случаев оценка $r^2/R^2 \ll 1$, которая будет учитываться и в дальнейшем.

Для определения неизвестной силы реакции N запишем условие совместности смещений в стрингере и пластинке в форме:

$$\operatorname{Re}^2[W_1(z_1^2)-W_2(z_2^2)]+\operatorname{Im}^2[W_1(z_1^2)-W_2(z_2^2)] = 4R^2N^2/E_s^2F_s^2. \qquad (32)$$

Вносия в это условие (25), (26), (27), (28), (29), после некоторых вычислений получим:

$$(a_0N+b)^2+(cN+d)^2 = N^2\cdot 64\pi^2h^2R^2/E_s^2F_s^2, \qquad (33)$$

где

E_s - модуль Юнга материала стрингера, F_s - площадь его поперечного сечения;

$$a_0=\left(\frac{\varkappa_1-1}{\mu_1}-\frac{\varkappa_2-1}{\mu_2}\right)\int\limits_L \sigma_y^1(x)\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{x-a}\,dx+$$

$$+\left(\frac{\varkappa_1+1}{2\mu_1}+\frac{\varkappa_2+1}{2\mu_2}\right)\int\limits_L \tau_{xy}^1(x)\ln\left((x-a)^2+R^2\right)dx+2R\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_L\frac{x-a}{(x-a)^2+R^2}\,\sigma_y^1(x)\,dx-\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\int\limits_L\frac{(x-a)^2-R^2}{(x-a)^2+R^2}\,\tau_{xy}^1(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{\mu_1(1+\varkappa_1)}\left[(1-\varkappa_1^2)\arccos\frac{-R}{\sqrt{a^2+R^2}}+(\varkappa_1-1/2)\frac{Ra}{a^2+R^2}-\right.$$

$$\left.-\varkappa_1\frac{a^2+2R^2}{a^2+R^2}+\frac{R^2(3a^2-R^2)}{2(a^2+R^2)^2}-\frac{a}{2R}-\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{\mu_2(1+\varkappa_2)}\times$$

$$\times\left[(1-\varkappa_2^2)\arccos\frac{-R}{\sqrt{a^2+R^2}}+(\varkappa_2-1/2)\frac{Ra}{a^2+R^2}-\varkappa_2\frac{a^2+2R^2}{a^2+R^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{R^2(3a^2-R^2)}{2(a^2+R^2)^2}-\frac{a}{2R}-\frac{1}{2}\right], \qquad (34)$$

$$b=\left(\frac{\varkappa_1-1}{\mu_1}-\frac{\varkappa_2-1}{\mu_2}\right)\left(\int\limits_L\sigma_y^0(x)\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{x-a}\,dx+\int\limits_l P(x)\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{x-a}\,dx\right)+$$

$$+2R\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\int\limits_L\frac{x-a}{(x-a)^2+R^2}\,\sigma_y^0(x)\,dx+\int\limits_l P(x)\frac{x-a}{(x-a)^2+R^2}\,dx\right)+$$

$$+\left(\frac{\varkappa_1+1}{2\mu_1}+\frac{\varkappa_2+1}{2\mu_2}\right)\int\limits_L\tau_{xy}^0(x)\ln\left((x-a)^2+R^2\right)dx-$$

$$-\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\int\limits_L\frac{(x-a)^2-R^2}{(x-a)^2+R^2}\,\tau_{xy}^0(x)\,dx, \qquad (35)$$

$$c=\left(\frac{\varkappa_1+1}{2\mu_1}+\frac{\varkappa_2+1}{2\mu_2}\right)\int\limits_L\sigma_y^1(x)\ln\left((x-a)^2+R^2\right)dx-$$

$$-\left(\frac{\varkappa_1-1}{\mu_1}+\frac{\varkappa_2-1}{\mu_2}\right)\int\limits_L\tau_{xy}^1(x)\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{x-a}\,dx+\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_L\sigma_y^1(x)\frac{(x-a)^2-R^2}{(x-a)^2+R^2}\,dx+2R\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\int\limits_L\tau_{xy}^1(x)\frac{x-a}{(x-a)^2+R^2}\,dx+$$

$$+\frac{1}{\mu_1(1+\varkappa_1)}\Big[2\varkappa_1\ln 2ar+(1+\varkappa_1^2)\ln\left(4R\sqrt{a^2+R^2}\right)+\frac{\varkappa_1 aR}{a^2+R^2}+$$

$$+(\varkappa_1+1/2)\frac{a^2}{a^2+R^2}+\frac{aR(3R^2-a^2)}{2(a^2+R^2)^2}-\frac{r}{4a^2}-\frac{a}{2R}+1\Big]+$$

$$+\frac{1}{\mu_2(1+\varkappa_2)}\Big[2\varkappa_2\ln 2ar+(1+\varkappa_2^2)\ln\left(4R\sqrt{a^2+R^2}\right)+\frac{\varkappa_2 aR}{a^2+R^2}+$$

$$+(\varkappa_2+1/2)\frac{a^2}{a^2+R^2}+\frac{aR(3R^2-a^2)}{2(a^2+R^2)^2}-\frac{r}{4a^2}-\frac{a}{2R}+1\Big], \qquad (36)$$

$$d=\left(\frac{\varkappa_1+1}{2\mu_1}+\frac{\varkappa_2+1}{2\mu_2}\right)\left(\int_b \sigma_y^0(x)\ln\left((x-a)^2+R^2\right)dx+\right.$$

$$+\int_e P(x)\ln\left((x-a)^2+R^2\right)dx\Big)+\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\int_b \sigma_y^0(x)\frac{(x-a)^2-R^2}{(x-a)^2+R^2}dx+\right.$$

$$+\int_e P(x)\frac{(x-a)^2-R^2}{(x-a)^2+R^2}dx\Big)-\left(\frac{\varkappa_1-1}{\mu_1}+\frac{\varkappa_2-1}{\mu_2}\right)\int_b \tau_{xy}^0(x)\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{x-a}dx+$$

$$+2R\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)\int_b \tau_{xy}^0(x)\frac{x-a}{(x-a)^2+R^2}dx. \qquad (37)$$

Если выполняется условие

$$64R^2h^2\mathfrak{P}^2/E_S^2F_S^2>a_0^2+c^2, \qquad (38)$$

что зависит от начальных данных задачи, то уравнение (33) имеет два разных по знаку решения и отрицательное из них, согласно выбору знака для N в комплексных потенциалах, будет является нужным нам значением N. Подставляя это значение в (25), поставленную задачу можно считать решенной.

Поступила 20.VI.1988

Кафедра
теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.:Наука, 1966.

2. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения.-М.: Наука,1968.

3. Л.С.Рыбаков, Г.П.Черепанов. ПММ,т.41,№2,1977.

4. Г.П.Черепанов. Изв.АН СССР, сер.механ.и машиностр.№ I,1962, 131-138.

5. А.А.Храпков. ПММ,т.32,вып.4,1968,647-659.

მ. ცობართელი

ჭრილის მქონე უბან-უბან ერთგვაროვანი უსასრულო ფირფიტის დაძაბვის ამოცანა

რეზიუმე

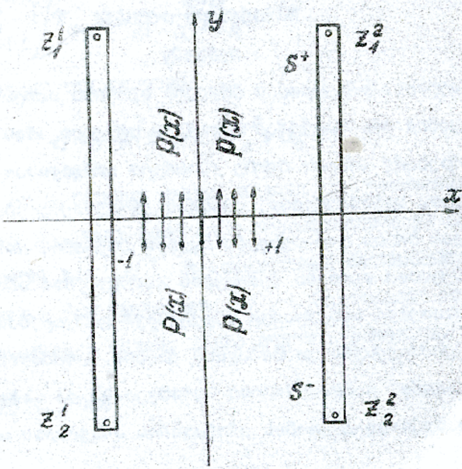
შესწავლილია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ამოცანა უბან-უბან ერთგვაროვანი ორი ნახევრად უსასრულო დრეკადი არის გამყოფ საზღვარზე მდებარე ჭრილის მქონე უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც გამაგრებულია სტრინგერებით, ამასთან ურთიერთქმედება სტრინგერსა და ფირფიტას შორის ხორციელდება წყვილი მოქლონის საშუალებით. ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა მიყვანილია მახასიათებელ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე საკონტაქტო ძაბვების კომპლექსური კომბინაციის მიმართ. ამონახსნი აგებულია ეფექტური სახით, განსაზღვრულია სტრინგერსა და ფირფიტის რეაქციის ძალა და დადგენილია ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკმარისი პირობა.

M. Gomarteli

THE PROBLEM OF REINFORCEMENT OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS INFINITE PLATE WITH A SECTION

Summary

The plane problem of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous infinite plate with a section lying on the separation line of two semi-infinite elastic mediums is studied. The plate is reinforced by means of stringers interacting with it through pairs of rivets. Using methods of the theory of analytic functions, the problem is reduced to a characteristic singular integral equation for a complex combination of the contact stresses, the solution of which is constructed in quadratures. The reaction force between the stringers and the plate is defined and a sufficient condition for the existence of a solution of the problem is written.



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

288, 1989

УДК 539.03.0I

СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, УСИЛЕННОЙ ТОНКОЙ НАКЛАДКОЙ ПО ОБВОДУ ОТВЕРСТИЯ

М.С.Шангуа

Уравнения движения для однородной, изотропной плоской области в полярных координатах r и ϑ имеют вид, данный в /I/:

$$\gamma u_{,tt}=(\lambda+2\mu)\Delta_{,r}-2\mu r^{-1}\cdot\omega_{,\vartheta}\,,$$
$$\gamma v_{,tt}=(\lambda+2\mu)\Delta_{,\vartheta}+2\mu\omega_{,r}\,, \tag{I}$$

где $u(r,\vartheta,t)$ и $v(r,\vartheta,t)$ – компоненты вектора перемещений, λ и μ – константы Ляме, а γ – плотность материала.

Уравнения (I) соотношениями между u, v и дилатацией Δ и вращением ω можно привести к виду:

$$\alpha_1^2 r^2\Delta_{,tt}=r(r\Delta_{,r})_{,r}+\Delta_{,\vartheta\vartheta}\,,\quad \alpha_1^2=\gamma/(\lambda+2\mu),$$
$$\alpha_2^2 r^2\omega_{,tt}=r(r\omega_{,r})_{,r}+\omega_{,\vartheta\vartheta}\,,\quad \alpha_2^2=\gamma/\mu. \tag{2}$$

Допуская, что Δ и ω – периодические функции ϑ и производя преобразование Фурье по t, согласно теории цилиндрических функций, ее общее решение дается формулой

$$\bar{\Delta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{1n}\sin n\vartheta+A_{2n}\cos n\vartheta\right]Z_n(\rho_1)\,, \tag{3}$$

$$\bar{\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_{1n}\cos n\vartheta - B_{2n}\sin n\vartheta\right]Z_n(\rho_2),$$

где $Z_n(\rho_j)$ цилиндрические функции вида:

$$Z_n(\rho_j)=C_{jn}J_n(\rho_j)+D_{jn}Y_n(\rho_j), \tag{4}$$

$$\rho_j=\alpha_j r\cdot r,$$

$A_{jn}, B_{jn}, C_{jn}, D_{jn}$ - константы интеграции.

Пусть наша область занимает всю плоскость с круговым отверстием с радиусом a. На границе отверстия заданы нормальные и тангенциальные компоненты напряжения:

$$\sigma_{rr}(a,\vartheta,t)=\sigma_0(\vartheta,t),$$
$$\sigma_{r\vartheta}(a,\vartheta,t)=\tau_0(\vartheta,t). \tag{5}$$

Вставляя в соотношения u, v, Δ, ω из (3) и затем решая дифференциальные уравнения, получаем:

$$\bar{u}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{1n}(r)\sin n\vartheta+U_{2n}(r)\cos n\vartheta, \tag{6}$$

$$\bar{v}=\sum_{n=0}^{\infty}V_{1n}(r)\cos n\vartheta-V_{2n}(r)\sin n\vartheta,$$

где

$$-r^{-1}U_{jn}(r)=A_{jn}\rho_1^{-1}\cdot Z_n'(\rho_1)+B_{jn}2n\rho_2^{-2}Z_n(\rho_2),$$
$$-r^{-1}V_{jn}(r)=A_{jn}\rho_1^{-2}Z_n(\rho_1)+B_{jn}2\cdot\rho_2^{-1}Z_n'(\rho_2), \tag{7}$$

здесь штрихи означают дифференцирование.

Из закона Гука для компонент напряжения получаем:

$$\bar{\sigma}_{rr}/2\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{1n}\cdot N_{1n}+B_{1n}\cdot N_{2n}\right]\sin n\vartheta+\left[A_{2n}\cdot N_{1n}+B_{2n}N_{2n}\right]\cos n\vartheta, \tag{8}$$

$$\bar{\sigma}_{r\vartheta}/2\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{1n}\cdot S_{1n}+B_{1n}\cdot S_{2n}\right]\cos n\vartheta-\left[A_{2n}\cdot S_{1n}+B_{2n}\cdot S_{2n}\right]\sin n\vartheta,$$

$$\bar{\sigma}_{\vartheta\vartheta}/2\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{1n}\cdot T_{1n}+B_{1n}\cdot T_{2n}\right]\sin n\vartheta+\left[A_{2n}\cdot T_{1n}+B_{2n}T_{2n}\right]\cos n\vartheta,$$

где

$$N_{1n}(r\tau)=\left[\lambda/2\mu+1-n^2\rho_1^{-2}\right]\cdot Z_n(\rho_1)+\rho_1^{-1}\cdot Z_n'(\rho_1),$$

$$N_{2n}(r\tau)=2n\rho_2^{-2}Z_n(\rho_2)-2n\rho_2^{-1}\cdot Z_n'(\rho_2),$$

$$S_{1n}(ar) = n\rho_1^{-2} Z_n(\rho_1) - n\rho_1^{-1} \cdot Z_n'(\rho_1),$$

$$S_{2n}(ar) = [1 - 2n^2\rho_2^{-2}] Z_n(\rho_2) + 2\rho_2^{-1} Z_n'(\rho_2),$$

$$T_{1n}(ar) = [\lambda/2\mu + n^2\rho_1^{-2}] Z_n(\rho_1) - \rho_1^{-1} Z_n'(\rho_1),$$

$$T_{2n}(ar) = -N_{2n}(ar). \qquad (9)$$

В нашем случае для единственности решения задачи должны выполняться условия принципа излучения Зоммерфельда, данные в /2/, которые в трансформантах Фурье имеют вид:

$$\bar{\Delta} = O\left(\sqrt{\rho_1}^{\,-1}\right), \quad \bar{\omega} = O\left(\sqrt{\rho_2}^{\,-1}\right),$$

$$\lim_{\rho_1 \to \infty} \sqrt{\rho_1}\left(\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial r} + i\alpha_1 r \bar{\Delta}\right) = 0, \qquad (10)$$

$$\lim_{\rho_2 \to \infty} \sqrt{\rho_2}\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} + i\alpha_2 r \bar{\omega}\right) = 0.$$

Используя асимптотику цилиндрических функций в бесконечно удаленной точке, нетрудно показать, что первые два из этих уравнений удовлетворяются автоматически, а последние два дают соотношения:

$$-iC_{jn} = D_{jn}.$$

Без нарушения общности можно считать $C_{jn} = 1$, и тогда везде, начиная с этого момента, вместо $Z_n(\rho_j)$ мы будем подразумевать функцию Ханкеля II рода $H_n^{(2)}(\rho_j) = J_n(\rho_j) - iY_n(\rho_j)$.

Для определения коэффициентов A_{jn}, B_{jn} мы имеем граничные условия (5), в которых надо перейти к трансформантам Фурье. Вставляя в эти условия выражения (8), разложив предварительно их в ряды Фурье, и применяя теорему Фурье, получаем:

$$A_{1n} = [2\mu D_n(ar)]^{-1}[S_{2n}(ar)\sigma_{os} - N_{2n}(ar)\tau_{os}],$$

$$A_{2n} = [2\mu D_n(ar)]^{-1}[S_{2n}(ar)\sigma_{os} + N_{2n}(ar)\tau_{os}],$$

$$B_{1n} = [2\mu D_n(ar)]^{-1}[-S_{1n}(ar)\sigma_{os} + N_{1n}(ar)\tau_{os}], \qquad (11)$$

$$B_{2n}=[\lambda_1 D_n(a r)]^{-1}[-S_{1n}(ar)\sigma_{od}-N_{1n}(ar)\tau_{os}],$$

$$A_{j0}=\frac{1}{2}[A_{jn}]_{n=0}, \quad B_{j0}=\frac{1}{2}[B_{jn}]_{n=0},$$

$$D_n(ar)=N_{1n}(ar)S_{2n}(ar)-N_{2n}(ar)S_{1n}(ar),$$

где

$$\sigma_{od}=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_o(\vartheta,\tau)\cos n\vartheta d\vartheta,$$

$$\sigma_{os}=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_o(\vartheta,\tau)\sin n\vartheta d\vartheta,$$

$$\tau_{oc}=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\bar{\tau}_o(\vartheta,\tau)\cos n\vartheta d\vartheta,$$

$$\tau_{os}=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}\bar{\tau}_o(\vartheta,\tau)\sin n\vartheta d\vartheta.$$

Перейдем к рассмотрению частных случаев нагружения:

I. Равномерно движущаяся периодическая нагрузка.

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_o(\vartheta-\Omega t)=\sum_{n=0}^{\infty}[p_n\cos n(\vartheta-\Omega t)+q_n\sin n(\vartheta-\Omega t)](Q_o/\pi a),$$

$$\tau_o(\vartheta-\Omega_1 t)=\sum_{n=0}^{\infty}[r_n\cos n(\vartheta-\Omega_1 t)+s_n\sin n(\vartheta-\Omega_1 t)](Q_o/\pi a). \tag{I2}$$

Перейдя здесь к трансформантам Фурье и используя выражени для σ_{od}, σ_{os} из (II), получаем:

$$a\sigma_{od}/Q_o=(p_n-iq_n)\delta(\Omega n-\tau)+(p_n+iq_n)\delta(-\Omega n-\tau),$$

$$a\sigma_{os}/Q_o=(ip_n+q_n)\delta(\Omega n-\tau)+(-ip_n+q_n)\delta(-\Omega n-\tau). \tag{I3}$$

Величины τ_{od}, τ_{os}, получаются от (I3) заменой p_n, q_n на r_n, s_n.

Здесь мы воспользовались формальным соотношением:

$$2\pi\delta(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itu}du.$$

Компоненты перемещения и тензор напряжения можем определить, комбинируя (6), (8), (II), (I3) и перейдя к обратному преобразованию Фурье:

$$-(2\pi a\mu/Q_o t)u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n^{(\omega)}(r\Omega n)[p_n\cos n(\vartheta-\Omega t)+q_n\sin n(\vartheta-\Omega t)]+$$

$$+u_n^{(2)}(r\Omega n)[-r_n \sin n(\vartheta-\Omega_1 t)+s_n \cos n(\vartheta-\Omega_1 t)],$$

$$-(2\pi a\mu/Q_0 r)v=\sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(1)}(r\Omega n)[-p_n \sin n(\vartheta-\Omega t)+q_n \cos n(\vartheta-\Omega t)]+ \quad (14)$$
$$+v_n^{(2)}(r\Omega n)[-r_n \cos n(\vartheta-\Omega_1 t)-s_n \sin n(\vartheta-\Omega_1 t)],$$

где

$$u_n^{(1)}(r\Omega n)=[D_n(a\Omega n)]^{-1}[(\alpha_1 r\Omega n)^{-1} Z_n'(\alpha_1 r\Omega n)S_{2n}(a\Omega n)-$$
$$-2n(\alpha_2 r\Omega n)^{-2} Z_n(\alpha_2 r\Omega n)S_{1n}(a\Omega n)],$$

$$v_n^{(1)}(r\Omega n)=[D_n(a\Omega n)]^{-1}[n(\alpha_1 r\Omega n)^{-2} Z_n(\alpha_1 r\Omega n)S_{2n}(a\Omega n)- \quad (15)$$
$$-2(\alpha_2 r\Omega n)^{-1} Z_n'(\alpha_2 r\Omega n)S_{1n}(a\Omega n)].$$

Здесь

$$D_n(a\Omega n)=N_{1n}(a\Omega n)S_{2n}(a\Omega n)-N_{2n}(a\Omega n)S_{1n}(a\Omega n).$$

Функции $u_n^{(2)}(r\Omega n)$ и $v_n^{(2)}(r\Omega n)$ получаются от соответствующих выражений (15) заменой Ω на Ω_1 и $S_{2n}(a\Omega n)$ и $S_{1n}(a\Omega n)$ на $N_{2n}(a\Omega_1 n)$ и $N_{1n}(a\Omega_1 n)$, кроме выражения $D_n(a\Omega n)$, где изменяется только Ω на Ω_1.

2. Две диаметрально противоположные, концентрированные, радиальные, равномерно движущиеся нагрузки.

В этом случае мы имеем $\tau_0=0$, т.е. $r_n=s_n=0$ и

$$\sigma_0(\vartheta-\Omega t)=(Q_0/\pi a)[\delta(\vartheta-\Omega t)+\delta(\pi-\vartheta+\Omega t)]=$$
$$=(Q_0/\pi a)\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n(\vartheta-\Omega t)+q_n \sin n(\vartheta-\Omega t), \quad (16)$$

где Q_0 – амплитуда каждой нагрузки. Коэффициенты Фурье p_n и q_n имеют вид:

$$p_n=\begin{cases} 2/\pi & n \text{ чётное} \\ 0 & n \text{ нечётное} \end{cases}, \quad q_n=0. \quad (17)$$

(I4) вместе с (I6) и (I7) дают для компонент перемещения:

$$-(\mathcal{R}^2 a\mu / Q_0 n)\, u = \sum_{n=0,2\ldots} u_n^{(0)}(n\Omega n)\cos(\vartheta-\Omega t)n,$$

$$(\mathcal{R}^2 a\mu / Q_0 n)\, v = \sum_{n=0,2\ldots} v_n^{(0)}(n\Omega n)\sin(\vartheta-\Omega t)n,$$

где $u_n^{(0)}$, $v_n^{(0)}$ даны формулами (I2).

Решим теперь задачу для нашей области, усиленной накладкой малой толщины, на верхнем крае которого даны нормальные и тангенциальные компоненты напряжения q_+ и τ_+ .

Сначала решаем вспомогательную задачу для диска со следующими граничными условиями:

$$\sigma_{rr}(a,\vartheta,t)=q_-(\vartheta,t),$$

$$\sigma_{r\vartheta}(a,\vartheta,t)=\tau_-(\vartheta,t), \tag{I8}$$

где q_-, τ_- искомые контактные напряжения на нижней грани накладки.

Для этой задачи имеем формулы (II), в которых σ_{0s}^-, σ_{0c}^-, τ_{0s}^-, τ_{0c}^- – неизвестные коэффициенты ряда Фурье функций $\bar q_-$, $\bar\tau_-$, данные аналогичными формулами после формул (II).

Для определения этих компонент имеем следующие условия из /3/:

$$\frac{E_\delta}{a^2}\left(\frac{\partial \bar v}{\partial \vartheta}+\bar u\right)=\bar q_+-\bar q_-+\rho\tau^2\bar u,$$

$$\frac{E_\delta}{a^2}\left(\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \vartheta^2}+\frac{\partial \bar u}{\partial \vartheta}\right)=\bar\tau_--\bar\tau_+-\rho\tau^2\bar v, \tag{I9}$$

где h – толщина накладки, а $E_\delta = E_1 h/12(1-\nu_1^2)$.

Вставляя в (7) выражения (II), а затем вставляя (6) в (I9), получаем

$$\bar{q}_- - \bar{q}_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[K_{1n}(a\tau)\sigma^-_{os} + K_{2n}(a\tau)\tau^-_{oc}\right]\sin n\vartheta +$$
$$+ \left[K_{1n}(a\tau)\sigma^-_{oc} - K_{2n}(a\tau)\tau^-_{os}\right]\cos n\vartheta,$$

$$\bar{\tau}_- - \bar{\tau}_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[L_{1n}(a\tau)\sigma^-_{os} + L_{2n}(a\tau)\tau^-_{oc}\right]\cos n\vartheta + \tag{20}$$
$$+ \left[-L_{1n}(a\tau)\sigma^-_{oc} + L_{2n}(a\tau)\tau^-_{os}\right]\sin n\vartheta,$$

где

$$K_{1n}(a\tau) = \left[2\mu D_n(a\tau)\right]^{-1}\left[S_{2n}(a\tau)G_{1n}(a\tau) - S_{1n}(a\tau)G_{2n}(a\tau)\right],$$
$$K_{2n}(a\tau) = \left[2\mu D_n(a\tau)\right]^{-1}\left[N_{1n}(a\tau)G_{2n}(a\tau) - N_{2n}(a\tau)G_{1n}(a\tau)\right],$$
$$L_{1n}(a\tau) = \left[2\mu D_n(a\tau)\right]^{-1}\left[S_{2n}(a\tau)M_{1n}(a\tau) - S_{1n}(a\tau)M_{2n}(a\tau)\right], \tag{21}$$
$$L_{2n}(a\tau) = \left[2\mu D_n(a\tau)\right]^{-1}\left[N_{1n}(a\tau)M_{2n}(a\tau) - N_{2n}(a\tau)M_{1n}(a\tau)\right],$$

а

$$G_{1n}(a\tau) = \frac{E_d n}{a^2} n(\alpha_1 a\tau)^{-2} a\cdot Z_n(\alpha_1 a\tau) - \left(\rho\tau^2 - \frac{E_d}{a^2}\right)(\alpha_1 a\tau)^{-1} a\cdot Z'_n(\alpha_1 a\tau),$$
$$G_{2n}(a\tau) = \frac{E_d n}{a^2} 2(\alpha_2 a\tau)^{-1} a\cdot Z'_n(\alpha_2 a\tau) - \left(\rho\tau^2 - \frac{E_d}{a^2}\right) 2n(\alpha_2 a\tau)^{-2} a\cdot Z_n(\alpha_2 a\tau),$$
$$M_{1n}(a\tau) = -\frac{E_d n}{a^2}(\alpha_1 a\tau)^{-1} a\cdot Z'_n(\alpha_1 a\tau) - \left(\rho\tau^2 - \frac{E_d n^2}{a^2}\right) n(\alpha_1 a\tau)^{-2} a\cdot Z_n(\alpha_1 a\tau), \tag{22}$$
$$M_{2n}(a\tau) = -\frac{E_d n}{a^2} 2n(\alpha_2 a\tau)^{-2} a\cdot Z_n(\alpha_2 a\tau) - \left(\rho\tau^2 - \frac{E_d n^2}{a^2}\right) 2(\alpha_2 a\tau)^{-1} a\cdot Z'_n(\alpha_2 a\tau).$$

Если разложим функции $\bar{\tau}_-$, $\bar{\tau}_+$, $\bar{q}_-$, $\bar{q}_+$ в ряды Фурье, вставим их в (20) и приравним коэффициенты, получим алгебраическую систему уравнений для искомых σ^-_{os}, σ^-_{oc}, τ^-_{os}, τ^-_{oc} :

$$\sigma^-_{os} - \sigma^+_{os} = K_{1n}(a\tau)\sigma^-_{os} + K_{2n}(a\tau)\tau^-_{oc},$$
$$\sigma^-_{oc} - \sigma^+_{oc} = K_{1n}(a\tau)\sigma^-_{oc} - K_{2n}(a\tau)\tau^-_{os},$$
$$\tau^-_{os} - \tau^+_{os} = -L_{1n}(a\tau)\sigma^-_{oc} + L_{2n}(a\tau)\tau^-_{os}, \tag{23}$$
$$\tau^-_{oc} - \tau^+_{oc} = L_{1n}(a\tau)\sigma^-_{os} + L_{2n}(a\tau)\tau^-_{oc}.$$

здесь σ^+_{os}, σ^+_{oc}, τ^+_{os}, τ^+_{oc} – соответственно синус и косинус коэффициенты ряда Фурье функции $\bar{q}_+$, $\bar{\tau}_+$.

Решая (23), получаем:

$$\sigma^-_{os} = [\mathcal{Y}_n(a\tau)]^{-1}[(1-L_{2n}(a\tau))\sigma^+_{os} + K_{2n}(a\tau)\tau^+_{oc}],$$

$$\tau^-_{oc} = [\mathcal{Y}_n(a\tau)]^{-1}[L_{1n}(a\tau)\sigma^+_{os} + (1-K_{1n}(a\tau))\tau^+_{oc}], \tag{24}$$

$$\sigma^-_{oc} = [\mathcal{Y}_n(a\tau)]^{-1}[(1-L_{2n}(a\tau))\sigma^+_{oc} - K_{2n}(a\tau)\tau^+_{os}],$$

$$\tau^-_{os} = [\mathcal{Y}_n(a\tau)]^{-1}[-L_{1n}(a\tau)\sigma^+_{oc} + (1-K_{1n}(a\tau))\tau^+_{os}],$$

где

$$\mathcal{Y}_n(a\tau) = [1-L_{2n}(a\tau)][1-K_{1n}(a\tau)] - L_{1n}(a\tau)K_{2n}(a\tau). \tag{25}$$

Перейдем к рассмотрению частных случаев нагружения.

I. Равномерно движущаяся периодическая нагрузка.

Граничные условия имеют вид:

$$q_+ = (Q_0/\pi a)\sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos n(\vartheta - \Omega t) + q_n \sin n(\vartheta - \Omega t),$$

$$\tau_+ = (Q_0/\pi a)\sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos n(\vartheta - \Omega_1 t) + s_n \sin n(\vartheta - \Omega_1 t). \tag{26}$$

Произведя над (26) преобразование Фурье, получаем

$$a\sigma^+_{oc}/Q_0 = (P_n - iq_n)\delta(\Omega n - \tau) + (P_n + iq_n)\delta(-\Omega n - \tau),$$

$$a\sigma^+_{os}/Q_0 = (iP_n + q_n)\delta(\Omega n - \tau) + (-iP_n + q_n)\delta(-\Omega n - \tau). \tag{27}$$

Для τ^+_{oc}, τ^+_{os} вместо P_n, q_n надо вставить r_n, s_n.

Вставляя (27) в (24), получаем:

$$\mathcal{Y}_n(a\tau)a\cdot\sigma^-_{oc}/Q_0 = (P^-_n - iq^-_n)\delta(\Omega n - \tau) + (P^-_n + iq^-_n)\delta(-\Omega n - \tau),$$

$$\mathcal{Y}_n(a\tau)a\cdot\sigma^-_{os}/Q_0 = (iP^-_n + q^-_n)\delta(\Omega n - \tau) + (-iP^-_n + q^-_n)\delta(-\Omega n - \tau), \tag{28}$$

для τ^-_{oc}, τ^-_{os} вместо $P^-_n(a\tau)$, $q^-_n(a\tau)$ надо вставить $r^-_n(a\tau), s^-_n(a\tau)$.

Они даются формулами:

$$
\begin{aligned}
P_n^-(a\tau) &= [1-L_{2n}(a\tau)]P_n - K_{2n}(a\tau)S_n, \\
q_n^-(a\tau) &= [1-L_{2n}(a\tau)]q_n + K_{2n}(a\tau)r_n, \\
r_n^-(a\tau) &= L_{1n}(a\tau)P_n - [1-K_{1n}(a\tau)]S_n, \\
S_n^-(a\tau) &= L_{1n}(a\tau)q_n + [1-K_{1n}(a\tau)]r_n.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Компоненты перемещения и напряжения получаем, комбинируя (6),(8),(11) и (29) и производя обратное преобразование Фурье:

$$
-(2\pi a\mu/Q_0 r)u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)}(r\Omega n)[P_n^-(a\tau)\cos n(\vartheta-\Omega t) + q_n^-(a\tau)\sin n(\vartheta-\Omega t)] + u_n^{(2)}(r\Omega n)[-r_n^-(a\tau)\sin n(\vartheta-\Omega_1 t) + S_n^-(a\tau)\cos n(\vartheta-\Omega_1 t)],
$$

$$
-(2\pi a\mu/Q_0 r)v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(1)}(r\Omega n)[-P_n^-(a\tau)\sin n(\vartheta-\Omega t) + q_n^-(a\tau)\cos n(\vartheta-\Omega t)] + v_n^{(2)}(r\Omega n)[-r_n^-(a\tau)\cos n(\vartheta-\Omega_1 t) - S_n^-(a\tau)\sin n(\vartheta-\Omega_1 t)], \tag{30}
$$

где

$$
\begin{aligned}
u_n^{(1)}(r\Omega n) &= [\mathcal{Y}_n(a\Omega n)\cdot D_n(a\Omega n)]^{-1}[(\alpha_1 r\Omega n)^{-1} \times \\
&\times Z_n'(\alpha_1 r\Omega n)S_{2n}(a\Omega n) - 2n(\alpha_2 r\Omega n)^{-2}\cdot Z_n(\alpha_2 r\Omega n)\cdot S_{1n}(a\Omega n)], \\
v_n^{(1)}(r\Omega n) &= [\mathcal{Y}_n(a\Omega n)D_n(a\Omega n)]^{-1}[n(\alpha_1 r\Omega n)^{-2} \times \\
&\times Z_n(\alpha_1 r\Omega n)\cdot S_{2n}(a\Omega n) - 2(\alpha_2 r\Omega n)^{-1} Z_n'(\alpha_2 r\Omega n)\cdot S_{1n}(a\Omega n)],
\end{aligned} \tag{31}
$$

а

$$D_n(a\Omega n)=N_{1n}(a\Omega n)\cdot S_{2n}(a\Omega n)-N_{2n}(a\Omega n)\cdot S_{1n}(a\Omega n),$$

(32)

$$y_n(a\Omega n)=[1-b_{2n}(a\Omega n)]\cdot[1-K_{1n}(a\Omega n)]-L_{1n}(a\Omega n)\cdot K_{2n}(a\Omega n).$$

Функции $u_n^{(a)}(a\Omega n)$, $v_n^{(a)}(a\Omega n)$ получаются от соответствующих заменой Ω на Ω_1, $S_{2n}(a\Omega n)$, $S_{1n}(a\Omega n)$ на $N_{2n}(a\Omega_1 n)$, $N_{1n}(a\Omega_1 n)$, кроме в D_n и y_n, где меняется только Ω на Ω_1.

2. Две диаметрально противоположные, концентрированные, радиальные, равномерно движущиеся нагрузки.

Граничные условия имеют вид:

$$\tau_t=0\quad,\ \text{т.е.}\quad \varkappa_n=s_n'=0,$$

$$q_t=(Q_0/\pi a)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n\cos n(\theta-\Omega t)+q_n\sin n(\theta-\Omega t), \tag{33}$$

где

$$P_n=\begin{cases}2/\pi & n\ \text{четное}\\ 0 & n\ \text{нечетное}\end{cases},\quad q_n=0.$$

Из (29) получаем:

$$\begin{aligned} &P_n^-(a\tau)=[1-b_{2n}(a\tau)]\cdot P_n,\\ &\varkappa_n^-(a\tau)=b_{1n}(a\tau)\cdot P_n,\\ &S_n^-(a\tau)=q_n^-(a\tau)=0. \end{aligned} \tag{34}$$

(30) вместе с (33) и (34) дают компоненты перемещения и напряжения. Выпишем компоненты перемещения:

$$-(\mathcal{R}^2 a\mu/Q_0 r)u = \sum_{n=0,2\ldots} u_n^{(1)}(r\Omega n)[1-b_{2n}(a\Omega n)]\cos n(\vartheta-\Omega t)+$$

$$+u_n^{(2)}(r\Omega n)[-b_{1n}(a\Omega n)]\sin n(\vartheta-\Omega t),$$

$$(\mathcal{R}^2 a\mu/Q_0 r)v = \sum_{n=0,2\ldots} v_n^{(1)}(r\Omega n)[b_{2n}(a\Omega n)-1]\sin n(\vartheta-\Omega t)+ \tag{35}$$

$$+v_n^{(2)}(r\Omega n)[-b_{1n}(a\Omega n)]\cos n(\vartheta-\Omega t),$$

где $u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, u_n^{(2)}, v_n^{(2)}$ даны формулами (31).

Нетрудно показать, что из результатов (20)-(35) можно получить решение этой задачи без накладки, данной в начале работы. Предельным переходом $h \to 0$ принимаем

$$\bar{q}_- = \bar{q}_+, \quad \bar{\tau}_- = \bar{\tau}_+,$$

потому что $b_{jn} = K_{jn} = 0,\ j=1,2$, а $J_n(a\tau)=1$.

Поступила 7.IX.1988

Кафедра
теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. C.Eringen. Quart. J. of Mech. and App. Mathematics. v. VIII, p. 4, 1955.
2. М.А.Дашевский. Строительная механика и расчет сооружений, № 2, 1967.
3. В.М.Александров, С.М.Мхитарян. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.-М.:Наука, 1983.

მ. შანგუა

დინამიკური სასაზღვრო ამოცანა სიბრტყისათვის წრიული ხვრელით, რომლის გამაგრებულია თხელი სისქის სტრინგერით საზღვრის გასწვრივ

რეზიუმე

შესწავლილია დრეკადობის თეორიის ბრტყელი დინამიკური ამოცანა, მცირე სისქის სტრინგერიდან წრიულხვრელიან უსასრულო სიბრტყეზე ძაბვების გადაცემის შესახებ. განხილულია, პრაქტიკულად საინტერესო შემთხვევა ორი დიამეტრულად საწინააღმდეგო კონცენტრული დატვირთვისა.

M.Shangua

A DYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INFINITE PLANE WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED WITH A THIN PLATE AROUND THE HOLE CONTOUR

Summary

A dynamic plane problem of the elasticity theory on the transfer of tension from a thin plate is investigated for an infinite plane with a circular hole. A practically important case of loading is considered: two concentrated radial diametrically opposite loads.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

288, 1989

УДК 539.03

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.А.Гоциридзе, В.И.Ткачишин

Теория стержней широко применяется в машиностроении и других областях техники. Она получила в последнее время значительное развитие /I,2 и др./. Разрешающие соотношения уточненной теории криволинейных пространственных упругих стержней типа Тимошенко, полученные путем последовательного сведения трехмерной задачи теории упругости к одномерной, приведены в работе /3/.

В данной статье предложена методика расчета стержневых конструкций с криволинейными, в общем случае, элементами, где в качестве математической модели стержней используется теория типа Тимошенко. Численное решение задач осуществляется методом конечных элементов /4/. Приведены результаты расчета реальной стержневой конструкции.

I. Рассмотрим пространственный упругий стержень, ось которого определяется радиусом-вектором

$$r_0(\alpha_\tau)=\{x_0(\alpha_\tau), y_0(\alpha_\tau), z_0(\alpha_\tau)\}, \qquad \alpha_\tau^0 \le \alpha_\tau \le \alpha_\tau^\ell . \qquad (I)$$

Отнесем стержень к системе криволинейных ортогональных координат $\alpha_\eta, \alpha_\zeta, \alpha_\tau$ с ортами $\bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\tau}$, где

$$\bar{\eta}=\bar{\nu}\cos\theta+\bar{\beta}\sin\theta; \quad \bar{\zeta}=-\bar{\nu}\sin\theta+\bar{\beta}\cos\theta, \tag{2}$$

$\bar{\nu}, \bar{\beta}, \bar{\tau}$ – нормаль, бинормаль и касательная оси стержня, $\theta(\alpha_\tau)$ – угол естественной закрученности

$$\theta(\alpha_\tau)=\int_{\alpha_\tau^0}^{\alpha_\tau^1} \varkappa(\alpha) A_p(\alpha)\, d\alpha . \tag{3}$$

Здесь $\varkappa$ – кручение стержня, $(\alpha_\eta, \alpha_\zeta)\in\Omega$,

$A_p=\sqrt{(x_0')^2+(y_0')^2+(z_0')^2}$.

Отметим, что для плоских стержней координатные оси совпадают с ортами натурального триедра оси стержня.

В общем случае координатные оси $\bar{\eta}, \bar{\zeta}$ и главные оси поперечного сечения Ω стержня не совпадают и образуют между собой угол физической закрученности $\varphi(\alpha_\tau)$.

Кинематические соотношения – представление перемещений произвольной точки сечения стержня-имеют вид

$$U_\eta=u_\eta(\alpha_\tau)-\alpha_\zeta\gamma_\tau(\alpha_\tau), \quad U_\zeta=u_\zeta(\alpha_\tau)+\alpha_\eta\gamma_\tau(\alpha_\tau), \tag{4}$$
$$U_\tau=u_\tau(\alpha_\tau)-\alpha_\zeta\gamma_\eta(\alpha_\tau)-\alpha_\eta\gamma_\zeta(\alpha_\tau).$$

Влияние депланации поперечного сечения при сдвиге и кручении стержня учитывается интегрально поправками в соответствующих жесткостях соотношений упругости.

Полную систему уравнений обобщенной теории пространственных стержней типа Тимошенко запишем в матричной форме. Она включает:

– Геометрические уравнения

$$\varepsilon=CU, \tag{5}$$

где $U=[u_\eta, u_\zeta, u_\tau, \gamma_\eta, \gamma_\zeta, \gamma_\tau]^T$ – вектор упругих перемещений оси и углов поворота сечения стержня;

$\varepsilon=[\varepsilon_{\eta\tau},\varepsilon_{\zeta\tau},\varepsilon_{\tau\tau},\varkappa_{\eta\tau},\varkappa_{\zeta\tau},\varkappa_{\tau\tau}]^T$ - вектор компонент деформаций, определяющих равномерно распределенную по сечению стержня трансверсальные ($\varepsilon_{\eta\tau}$, $\varepsilon_{\zeta\tau}$) и нормальную ($\varepsilon_{\tau\tau}$) деформации, а также линейно изменяющиеся по сечению деформации, связанные с изгибом ($\varkappa_{\eta\tau}$, $\varkappa_{\zeta\tau}$) и кручением ($\varkappa_{\tau\tau}$) стержня. C - матрица дифференциальных операторов.

$$C=\begin{vmatrix} \frac{1}{A_\rho}\frac{d}{d\alpha_\tau} & 0 & K_\rho\cos\theta & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_\rho}\frac{d}{d\alpha_\tau} & -K_\rho\sin\theta & 1 & 0 & 0 \\ -K_\rho\cos\theta & K_\rho\sin\theta & \frac{1}{A_\rho}\frac{d}{d\alpha_\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_\rho}\frac{d}{d\alpha_\tau} & 0 & K_\rho\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_\rho}\frac{d}{d\alpha_\tau} & -K_\rho\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -K_\rho\cos\theta & K_\rho\sin\theta & \frac{1}{A_\rho}\frac{d}{d\alpha_\tau} \end{vmatrix}$$

где K_ρ - кривизна стержня.

- Соотношения упругости

$$\sigma=E_\varphi^T\Delta E_\varphi C, \qquad (6)$$

где $\sigma=[N_\eta,N_\zeta,N_\tau,M_\eta,M_\zeta,M_\tau]^T$ - вектор усилий и моментов. $E_\varphi[\varphi(\alpha_\tau)]$ - матрица поворота, Δ - матрица упруго-геометрических констант.

$$\Delta=\begin{vmatrix} K_1'GF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2'GF & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EF & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EJ_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_\tau \end{vmatrix}$$

где E, G – модули Юнга и сдвига; F, J_1, J_2 – площадь и главные моменты инерции поперечного сечения Ω; K_1', K_2' – коэффициенты сдвига, J_2 – момент кручения.

– Уравнение равновесия

$$B\sigma + P = 0, \tag{7}$$

где B – матрица операторов дифференцирования.

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{A_p}\frac{d}{d\alpha_\tau} & 0 & K_p\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_p}\frac{d}{d\alpha_\tau} & -K_p\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -K_p\cos\theta & K_p\sin\theta & \frac{1}{A_p}\frac{d}{d\alpha_\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{A_p}\frac{d}{d\alpha_\tau} & 0 & K_p\cos\theta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_p}\frac{d}{d\alpha_\tau} & -K_p\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -K_p\cos\theta & K_p\sin\theta & \frac{1}{A_p}\frac{d}{d\alpha_\tau} \end{vmatrix}$$

$P=[P_\eta, P_\zeta, P_\tau, m_\eta, m_\zeta, m_\tau]^T$ – вектор приведенных к оси стержня усилий и моментов, статически эквивалентных внешним поверхностным и объемным силовым нагрузкам.

Система уравнений (4-6) дополняется геометрическими и статическими граничными условиями, например

$$u = u^0 \text{ при } \alpha_\tau = \alpha_\tau^0; \quad \sigma^s = \sigma^0 \text{ при } \alpha_\tau = \alpha_\tau^\ell .$$

2. Аналитическое исследование стержневой конструкции при всем многообразии внешних нагрузок и условий опирания весьма затруднительно. Проанализируем работу конструкции методом конечных элементов в перемещениях, схемы которого построим путем минимизации на множестве геометрически допустимых функций функционала полной энергии упругой деформации Лагранжа с уче

том упругой реакции рессорных пружин будут

$$\Pi(u)=\sum_{i=1}^{N}\Big\{\frac{1}{2}\int_{\alpha_{\tau_i}}(cu)^T E_\varphi^T \Delta E_\varphi c u A_p d\alpha_\tau - \int_{\alpha_{\tau_i}} u^T P A_p d\alpha_\tau - u^T \sigma^0\Big|_{\alpha_{\tau_i}^{\ell}} - \sum_{j=1}^{N_i}\beta_{ij} W_j^2\Big\}, \qquad (8)$$

где N - количество сопрягаемых элементов стержневой конструкции; N_i - количество рессорных пружин жесткостью β_{ij}, W_j - прогиб в направлении оси пружины в соответствующей точке стержневой конструкции.

Функционал (8) содержит производные от искомых функций не выше первого, что позволяет использовать для аппроксимации решения изопараметрические конечные элементы порядка K = 2,3,4,... Далее выполним известные процедуры МКЭ, состоящие в разбиении рассматриваемой конструкции на конечные элементы и выполнении на каждом изопараметрических преобразований.

Координаты и обобщенные перемещения стержня на конечном элементе представим с помощью одних и тех же интерполяционных функций $h_{Ki}(\xi)$ порядка K :

$$\alpha_{\tau\ell}=\sum_{i=1}^{K+1}\alpha_{\tau_i} h_{Ki}(\xi); \quad u^\ell = H_K(\xi) q^\ell, \qquad (9)$$

где α_{τ_i} - узловые точки конечного элемента, $-1\leq\xi\leq 1$;

$$H_K(\xi)=[H_{K1}(\xi);\ H_{K2}(\xi),\ldots,\ H_{K,K+1}(\xi)];$$

$$H_{Ki}(\xi)=h_{Ki}(\xi)\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$q^{\ell}=[q_1^{\ell}, q_2^{\ell}, \ldots, q_{k+1}^{\ell}]^T$ - степени свободы i-го узла.

Промежуточные значения геометрических характеристик конечного элемента стержня с переменным поперечным сечением определим аналогично (9), через их узловые значения, например,

$$F_{\ell}=\sum_{i=1}^{k+1} F_{\ell i}\, h_{ki}(\xi).$$

Матрица жесткости и вектор нагрузки изопараметрического конечного элемента стержня порядка k имеет вид:

$$K_{\ell k}=\int_{-1}^{1}(CH_k)^T E_{\varphi}^T \Delta E_{\varphi} A_P J_{\ell k}\, d\xi;$$

$$R_{\ell k}=\int_{-1}^{1} H_k^T H_k A_P J_{\ell k}\, d\xi\, P_{\ell},$$

где P_{ℓ} - столбец известных узловых нагрузок элемента,

$J_{\ell k}$ - якобиан изопараметрических преобразований порядка k.

Записывая необходимые условия минимума квадратичной формы, которую принимает функционал (8), после выполнения всех преобразований получим разрешающую систему алгебраических уравнений статического равновесия ансамбля конечных элементов стержня

$$K_q = R \qquad (10)$$

относительно вектора искомых перемещений и углов поворота узлов конечного элемента модели стержневой конструкции.

3. Предложенная методика расчета стержневых конструкций типа Тимошенко реализована в виде проблемно-ориентированного комплекса программ на фортране. Отличительной особенностью разработанного математического и программного обеспечения является то, что:

а) расчет стержневых элементов производится в криволинейной ортогональной системе координат, связанной с аналитическим представлением оси пространственного стержня, и не содержит существенных погрешностей от физической дискретизации его геометрии на конечные элементы. Дискретизируются только искомые поля перемещений и углов поворота;

б) схемы МКЭ реализованы на основе экономичного алгоритма формирования матрицы жесткости по столбцам с возможностью представления стержневых конструкций с замкнутой геометрией в расчетной модели полностью, что позволяет рассчитывать сложные конструкции при произвольной внешней силовой нагрузке;

в) используются изопараметрические конечные элементы высоких порядков аппроксимации, позволяющие получать высокоточные решения на сравнительно редких конечно-элементных сетках, особенно для усилий и моментов.

В качестве примера расчета рассмотрена замкнутая стержневая конструкция (с переменным поперечным сечением) рамы тележки электровоза ВЛ-15, нагруженной сложной системой сил, которая моделирует движение тележки "в кривой". Численные результаты доведены путем сгущения конечно элементной сетки и повышения порядка изопараметрических аппроксимаций до асимптотии.

Составлена программа счета, которая реализована на ЭВМ. Промежуточные результаты машинного счета для всех режимов нагружения (нагружение кузовом, полное статическое нагружение, подъем локомотива за автозацепку, максимальная тяга, выкатка колесной пары, режим удара, кососимметричная нагрузка, движение в кривую с учетом и без учета пружин) в работе не приведены, ввиду ограниченности ее объема. В работе приведены лишь окончательные результаты, которые дают полную оценку прочности рассматриваемой конструкции.

Усталостная прочность рамы тележки оценивается по формуле /5/

$$П = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_v + \varphi\sigma_m} \geq 2 , \qquad (11)$$

где σ_{-1} – предел выносливости стандартного образца при симметричном цикле нагружения; K – эффективный коэффициент, учитывающий понижение выносливости детали:

$$K = \beta_K \frac{K_1 \cdot K_2}{\gamma \cdot m} , \qquad (12)$$

β_K – эффективный коэффициент концентрации напряжений, учитывающий форму детали;

K_1 – коэффициент, учитывающий неоднородность материала детали;

K_2 – коэффициент, учитывающий внутренние напряжения в детали;

γ – коэффициент, учитывающий размеры детали;

m – коэффициент, учитывающий состояние поверхности детали;

σ_v – амплитуда напряжения цикла:

$$\sigma_v = K_d \cdot \sigma_{ст} . \qquad (13)$$

K_d – коэффициент динамики. Величины K_d назначаются в данном расчете по результатам испытаний для аналогичных сечений рам тележек электровозов типа ВЛ 80 и вычисляются как отношение

$$K_d = \frac{\sigma_v}{\sigma_{ст}} , \qquad (14)$$

$\sigma_{ст}$ – статические напряжения в раме тележки;

φ - коэффициент, характеризующий чувствительность металла к асимметрии цикла;

σ_m - среднее напряжение цикла /5/ - расчетное

$$\sigma_m = \sigma_{ст} + \sigma_f + \sigma_{кр}, \qquad (15)$$

σ_f - напряжение от сил тяги при движении электровоза с конструкционной скоростью, равной 110 км/ч;

$\sigma_{кр}$ - напряжение в раме тележки при прохождении электровозом кривой.

Оценка усталостной прочности рамы тележки выполнена для сечений, в которых величина статического напряжения $\sigma_{ст} \geq 100$ кгс/см^2 /5/.

Оценка усталостной прочности производится для двух марок стали: ст.16Д ГОСТ 6713-75 и 09Г2Д-15 ГОСТ 19282-73.

При оценке усталостной прочности рамы тележки принимаем: $K_1 = 1,1$; $K_2 = 1,1$; $\gamma_d = 0,7$; $m = 0,8$; $\varphi = 0,31$ /6/.

Вывод о статической прочности рамы тележки производится путем сравнения полученных напряжений с допускаемыми. Величина допускаемого напряжения для рассматриваемых режимов нагружения должна быть

$$[\sigma] = 0,55\sigma_m. \qquad (16)$$

При сравнении расчетных напряжений с допускаемыми условно берутся суммарные напряжения, действующие в расчетных сечениях для следующих режимов нагружения / 6 /:

Трогание локомотива с места

$$\sum \sigma = \sigma_{ст} + \sigma_f + \sigma_{код}. \qquad (17)$$

Движение локомотива в тяговом режиме в кривой

$$\sum \sigma_{кр} = \sigma_{ст} + \sigma_{дин} + \sigma_{f} + \sigma_{кр} + \sigma_{кос}, \tag{18}$$

где $\sigma_{дин} = K^{в}_{\alpha} \cdot \sigma_{ст}$ – динамические напряжения в расчетных сечениях, условно определенные при конструкционной скорости.

$K^{в}_{\alpha}$ – коэффициент вертикальной динамики

$$K^{в}_{\alpha} = 0{,}1 + 0{,}2 \frac{V}{f_{ст}} = 0{,}1 + 0{,}2 \frac{110}{190}, \tag{19}$$

где $V = 110$ км/ч – конструкционная скорость; $f_{ст} = 190$ мм полный статический прогиб рессорного подвешивания.

Для удобства сравнения полученных напряжений с допускаемыми определим коэффициент запаса, который должен быть:

$$П = \frac{[\sigma]}{\Sigma\sigma} \geq 1. \tag{20}$$

Величина запаса прочности в раме тележки при ударе определяется по формуле /6/

$$П_{у} = \frac{\sigma_{т}}{\alpha_{\sigma}(\sigma_{у} + \sigma_{ст})} \geq 1{,}2, \tag{21}$$

где α_{σ} – теоретический коэффициент концентрации напряжений.

Величины эффективного коэффициента концентрации напряжений $\beta_{к}$ и теоретического коэффициента концентраций α_{σ} связаны зависимо

$$\beta_{к} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1), \tag{22}$$

отсюда

$$\alpha_{\sigma} = 1 + \frac{\beta_{к} - 1}{q},$$

где q – коэффициент чувствительности металла к концентрации напряжений; для сечений рамы тележки принимаем $q = 0{,}8$.

Значения коэффициентов β_K заимствованы из /6/. Определение коэффициентов запаса прочности выполнено по максимальным статическим и ударным напряжениям, полученным в расчетных сечениях.

Развитие современных методов теории пространственных стержней и приближенных методов вычислительной математики, приспособленных к применению современных ЭВМ, дали возможность заново перерасчитать напряженно-деформированное состояние в различных сечениях рамы тележки, являющейся весьма ответственной механической частью электровоза ВЛ-15.

Следует отметить, что проведенные нами расчеты качественно совпадают с ранее известными расчетами, проведенными методами сопротивления материалов (см./8/). Количественно, как и следовало ожидать, между указанными расчетами имеются некоторые расхождения.

Достоверность полученных нами результатов обеспечивается тем, что 1) Расчетная схема строилась с учетом вертикальной жесткости пружин первого этажа подвешивания. 2) Напряженное состояние конструкции исследовано не в 18 сечениях (см./8/), а в 68 сечениях в симметричном и 136 сечениях в несимметричном случаях нагружения и эксплуатации конструкции. 3) В качестве математической теории стержней использовалась обобщенная сдвиговая теория пространственных стержней С.П.Тимошенко. 4) В качестве метода расчета использован эффективный экономичный вариант метода конечных (МКЭ), хорошо зарекомендовавший себя при решении различных сложных задач техники.

Коэффициенты запаса усталостной прочности в расчетных сечениях рамы тележки, определенные по новой методике, получились больше соответствующих коэффициентов, полученных в работе /8/, тем самым больше минимально допустимой величины 2,0 при изготовлении рамы тележки из стали 16Д ГОСТ 6713-75.

Поступила 7.XII.1988

Кафедра
теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.С.Воробьев, Б.Ф.Шорр. Теория закрученных стержней. К.: Наук. думка, 1983.
2. Ю.Б.Шулькин. Теория упругих стержневых конструкций. М.: Наука, 1984.
3. В.И.Ткачишин. Деп. в Укр. НИИНТИ, 1986, № 2206.
4. К.Бате, Е.Вилсон. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.
5. Технические требования к проектируемым локомотивам по условиям прочности, динамики и воздействия на путь. МПС, ВНИИЖТ, М.: 1964.
6. Сварные конструкции локомотивных тележек (Основные положения проектирования и изготовления). Под редакцией проф. К.П.Королева. М.: Транспорт, 1971.
7. Методические указания к расчетам деталей экипажей части локомотива на выносливость. МПС, ВНИИЖТ, 1966.

ვ.გოცირიძე, ვ.ტკაჩიშინი

ტიმოშენკოს ტიპის ღეროვანი კონსტრუქციების ანგარიში სასრულ ელემენტთა მეთოდით

რეზიუმე

სასრულ ელემენტთა მეთოდის საშუალებით ამოხსნილია ტიმოშენკოს ტიპის სივრცითი ღეროების ღუნვის ამოცანა.

მაგალითის სახით განხილულია ელმავალ ВЛ-15-ის ურიკის ჩარჩოს დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა სხვადასხვა დატვირთვების და სხვადასხვა რეჟიმის ექსპლუატაციის შემთხვევაში.

V.Gotsiridze, V.Tkachishin

CALCULATION OF TIMOSHENKO-TYPE BAR CONSTRUCTIONS BY THE FINITE ELEMENTS METHOD

Summary

The problem of twisted three-dimensional Timoshenko-type bars is solved by the finite elements method. The stress-strain state of the truck frame of the electrical locomotive ВЛ - 15 under different loadings and working conditions is considered by way of an example.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

УДК 532

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ ПРОВОДЯЩЕЙ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

Д.В.Шарикадзе, К.А.Хелми

Изучается задача нестационарного обтекания тела степенной слабопроводящей вязкой жидкостью с учетом теплопередачи, когда электропроводность жидкости переменна и является степенной функцией скорости

$$\sigma = \sigma_0\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)^m, \quad m \geq 0, \tag{I}$$

где u - скорость жидкости в пограничном слое, а u_∞ - скорость набегающего потока.

Основные уравнения, описывающие нестационарное обтекание пластины степенной вязкой жидкостью, с учетом внешнего магнитного поля и теплопередачи, для малых магнитных чисел Рейнольдса имеют вид /1,5/:

$$\frac{nk}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_0(t)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_\infty}{\partial t} + Nu_\infty\left[\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)^m - \left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)^{m+1}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v_0(t)\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{k}{\rho c}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n+1}, \qquad (3)$$

где

$$N=\sigma_0 B^2/\rho.$$

Неизвестные скорость $u(y,t)$ и температура $T(y,t)$ жидкости удовлетворяют следующим граничным условиям:

при $y=0$ $u(y,t)=0$; $u=u_\infty(t)$ при $y=\delta$, (4)

при $y=0$ $T=T_0=const$; $T=T_\infty(t)$ при $y=\delta_T$. (5)

Будем искать решение задачи (2) - (5) методом последовательных приближений /3,4/. Для этого введем конечную толщину пограничного слоя $\delta(t)$ и конечную тепловую толщину $\delta_T(t)$, которые определим из условий:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ при } y=\delta(t), \qquad \frac{\partial T}{\partial y}=0 \text{ при } y=\delta_T(t) \qquad (6)$$

соответственно.

Найдем два приближения поставленной задачи. Пусть $u(y,t)\approx u_1(y,t)+u_2(y,t)+\ldots$, причем за $u_1(y,t)$ примем решение (2) без правой части, удовлетворяющее условиям (4). Оно будет иметь вид

$$u_1(y,t)=[u_\infty(t)/\delta(t)]y. \qquad (7)$$

За следующее приближение u_2 возьмем решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=\frac{\rho}{nk\left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|^{n-1}}\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}+v_0(t)\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_\infty}{\partial t}+\right. \qquad (8)$$

$$+N u_\infty\left(\left[1-\frac{u_1}{u_\infty}\right]^m-\left[1-\frac{u_1}{u_\infty}\right]^{m+1}\right)\Big],$$

удовлетворяющее нулевым граничным условиям, соответствующим (4). Подставляя в это уравнение (7), интегрируя и удовлетворяя однородным граничным условиям, получим:

$$u(y,t)=[u_\infty(t)/\delta(t)]y+\frac{\rho\delta^{n-1}}{nku_\infty^{n-1}}\left[\frac{y^3}{6}\frac{d}{dt}\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{v_0u_\infty}{\delta}-\frac{du_\infty}{dt}\right)\frac{y^2}{2}+\left(\frac{\delta}{3}\frac{du_\infty}{dt}+\frac{u_\infty}{6}\frac{d\delta}{dt}-\frac{v_0u_\infty}{2}\right)y+$$

$$+\frac{Nu_\infty\delta^2}{(m+1)(m+2)(m+3)}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\left[-2+(m+3)\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^{m+1}-\right. \tag{9}$$

$$\left.\left.-(m+1)\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^{m+2}\right]\right].$$

Неизвестную толщину пограничного слоя $\delta(t)$ определим из условия (6). Для определения толщины пограничного слоя оно дает уравнение:

$$\frac{d}{dt}\delta^{n+1}+\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{d}{dt}\ln u_\infty-\frac{12N}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right]\delta^{n+1}- \tag{10}$$

$$-\frac{3(n+1)}{2}v_0\delta^n=3\nu_1(n+1)u_\infty^{n-1}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев, когда можно получить решение (10) в явном виде.

I. Пусть скорость отсоса $v_0(t)=c_1\delta(t)$, тогда для толщины пограничного слоя будем иметь

$$\delta^{n+1}=3\nu_1(n+1)\exp(Mt)u_\infty^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^t u_\infty^{\frac{3n-1}{2}}(\tau)e^{-M\tau}d\tau. \qquad (11)$$

Если здесь $u_\infty = const$, то

$$\delta^{n+1}(t)=\frac{3\nu_1(n+1)}{M}\left[e^{Mt}-1\right]u_\infty^{n-1} \qquad (12)$$

где $M=\frac{3(n+1)}{2}\left[c_1+\frac{4N}{H}\right]$, $H=(m+1)(m+2)(m+3)$, $\nu_1=\frac{nK}{\rho}$.

Таким образом $v_0(t)=\frac{3\nu_1 c_1(n+1)}{M}u_\infty^{n-1}\left[e^{Mt}-1\right]$.

2. Если $v_0(t)=\alpha\delta^{-n}$, α – произвольная постоянная, то

$$\delta^{n+1}(t)=\frac{3(n+1)}{2}e^{M_1 t}u_\infty^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left[2\nu_1\int_0^t u_\infty^{\frac{3n-1}{2}}(\tau)e^{-M_1\tau}d\tau+\alpha\int_0^t u_\infty^{\frac{n+1}{2}}e^{-M_1\tau}d\tau\right].$$

При $v_\infty = constant$, оно дает

$$\delta^{n+1}(t)=\frac{H}{4N}\left[\alpha+2\nu_1 u_\infty^{n-1}\right]\left[1-e^{-M_1 t}\right],$$

$$M_1=6(n+1)N/H.$$

3. Если $v_0(t)=-2\nu_1 u_\infty^{n-1}/\delta^n$, то

$$\delta^{n+1}(t)=A\,u_\infty^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\exp(M_1 t). \qquad (13)$$

Для напряжения поверхностного трения будем иметь

$$\tau=K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^n_{y=0}=$$

$$=K\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^n\left[\frac{3}{2}+\frac{\rho u_\infty^{1-n}}{4nK}\left(\left[\frac{d}{dt}\ln v_\infty-\frac{4mN}{H}\right]\delta^{n+1}-v_0\delta^n\right)\right]^n \qquad (14)$$

при $u_\infty = const$, $v_0 = c_1 \delta$. Тогда получим

$$\tau = K\left(\frac{3}{2}\right)^n \left[\frac{3n(n+1)K}{\rho M u_\infty^2}\right]^{-\frac{n}{n+1}} \times$$

$$\times \left[e^{Mt}-1\right]^{-\frac{n}{n+1}} \left[1-\left(\frac{n+1}{2M}\right)\left(c_1+\frac{4mN}{H}\right)\left(e^{Mt}-1\right)\right]^n.$$

Коэффициент трения для малых Mt и $c_1 = 0$ выражается формулой

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho u_\infty^2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n \left[\frac{K}{\rho u_\infty^2 [3n(n+1)]^n}\right]^{\frac{1}{n+1}} \times \tag{15}$$

$$\times \left[1-\frac{[3+2m(n+1)]\,nNt}{H}\right] t^{-\frac{n}{n+1}}.$$

Отсюда видно, что при обтекании плоской пластины жидкостью, электропроводность которой выражается формулой (1), коэффициент трения уменьшается как с увеличением магнитного поля, так и с увеличением n, а при увеличении степени проводимости m он увеличивается. Аналогично можно рассмотреть другие случаи задания v_0 ($v_0 = \frac{\alpha}{\delta^n}$, $v_0 = -2\nu_1 u_\infty^{n-1}/\delta^n$), дающие явное выражение для толщины пограничного слоя.

Для определения температуры $T(y,t)$ ищем решение (3) – (5) в виде:

$$T(y,t) \approx T_1 + T_2.$$

За T_1 примем

$$T_1(y,t) = T_0 + \frac{\theta}{\delta_T(t)}\, y$$

удовлетворяющее граничным условиям (5) и уравнению $\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0$.

За второе приближение возьмем решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_0(t)\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{K}{\rho c}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^{n+1}\right],$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям (5). Окончательно получим

$$T(y,t)=T_0+[\theta(t)/\delta_T(t)]y+$$

$$+\frac{y}{6a}(y-\delta_T)\left[\frac{3v_0\theta}{\delta_T}+\left(\frac{\theta}{\delta_T}\right)'(y+\delta_T)-\frac{3k}{\rho c}\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^{n+1}\right]. \quad (16)$$

Для определения толщины теплового слоя $\delta_T(t)$ из условия (6) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\delta_T^2+\left[\frac{3k}{\rho c\theta}\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^{n+1}-\frac{2\theta'}{\theta}\right]\delta_T^2-3v_0\delta_T=6a, \quad (17)$$

где $\theta=T_\infty(t)-T_0$, $\left(\frac{\theta}{\delta_T}\right)'=\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\delta_T}\right)$, $\theta'=\frac{d\theta}{dt}$.

Рассмотрим несколько частных случаев, когда можно получить решение (17) в явном виде.

1. Пусть $v_0=\frac{k}{\rho c_p\theta}\left[\frac{u_\infty}{\delta}\right]^{n+1}\delta_T$. (18)

Тогда решение (17) дает

$$\delta_T=\left[6a\theta^2\int_0^t\frac{d\tau}{\theta^2(\tau)}\right]^{1/2}. \quad (19)$$

Если выбрать $\theta(t)=T_\infty(t)-T_0=bt^\beta$, $\beta\ge 0$, то из (19) получим

$$\delta_T=\sqrt{\frac{6a}{1-2\beta}}\cdot\sqrt{t}.$$

Сравнивая значения скорости отсоса или вдува при динамическом и тепловом пограничном слоях получим связь между $\delta(t)$ и $\delta_T(t)$:

$$v_0=\alpha\delta^{-n}=\frac{k}{\rho c_p\theta}\left[\frac{u_\infty}{\delta}\right]^{n+1}\delta_T,$$

т.е.
$$\frac{\delta}{\delta_T}=\frac{k u_\infty^{n+1}}{\rho c_p \theta \alpha}=f(t).$$

Если обобщенное число Прандтля подобрать в виде:

$$P_r=k u_\infty^{n+1}/\rho c_p \theta \alpha$$

и считать что $f(t)=constant$, то получим

$$\delta=P_r\delta_T\,,\quad v_0=\left[\frac{k u_\infty^{n+1}}{\rho c_p \theta P_r}\right]\delta^{-n}.$$

2. Если $v_0(t)=\gamma\delta_T$, где γ - произвольная постоянная, а $\theta=T_\infty-T_0=const$, то для δ_T из уравнения (I7) будем иметь уравнение

$$\delta_T^2=6a\exp\left[3\gamma t-\frac{3k}{\rho c_p\theta}\int_0^t\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^{n+1}d\tau\right]\times$$
$$\times\left[\int_0^t\exp\left[-3\gamma\tau+\frac{3k}{\rho c_p\theta}\int_0^\tau\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^{n+1}d\xi\right]d\tau\right],$$

которое, при $u_\infty=constant$, с использованием (I2), даст

$$\delta_T^2=\frac{6a(n+1)n}{M\left[n(n+1)-E_c\right]}\left[e^{Mt}-1\right], \tag{20}$$

где $E_c=u_\infty^2/c_p(T_0-T_\infty)$ - число Эккерта.

Учитывая, что скорость вдува (отсоса) имеет одно и то же значение, как для динамического, так и теплового пограничного слоев, то должна существовать связь между толщинами δ и δ_T:

$$v_0=\frac{M}{3}\delta_T=c_1\delta,\quad \text{то}\quad \frac{\delta}{\delta_T}=\frac{M}{3c_1}.$$

Сравнивая (I2) и (20) при $n=1$, получим

$$\frac{\delta}{\delta_T}=\sqrt{\mathcal{P}_r\left(1-\frac{Ed}{2}\right)}=\frac{M}{3c_1}. \tag{21}$$

Это отношение определяет коэффициент c_1, если вспомнить, что $M=3\left(c_1+\frac{4N}{H}\right)$. Для скорости v_0 окончательно получим

$$v_0=c_1\delta=\frac{4N}{H\left[\sqrt{\mathcal{P}_r\left(1-\frac{Ed}{2}\right)}-1\right]}\delta(t). \tag{22}$$

3. Если скорость проницаемости выбирается в виде

$$v_0=-2a/\delta_T, \quad T_\infty=const,$$

тогда

$$\delta_T=\delta_{0T}\exp\left[\frac{-3k}{2\rho c_p\theta}\int_0^t\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^{n+1}d\tau\right]. \tag{23}$$

В таком случае, если $v_0=-2a/\delta_T=-2\frac{nk}{\rho}u_\infty^{n-1}/\delta^n$, то $\delta^n=\left[\frac{nk}{\rho a}u_\infty^{n-1}\right]\delta_T$. Отсюда, с использованием (13), получим

$$\delta_T=A_1\left(\frac{a\rho}{nk}\right)u_\infty^{\left(\frac{2-3n}{2}\right)}\exp\left[\frac{6nN}{H}t\right]. \tag{24}$$

В зависимости от скорости вдува (отсоса) для коэффициента теплоотдачи $\alpha(t)$ будем иметь

$$\alpha(t)=\frac{3\lambda}{2\delta_T}=\lambda\sqrt{\frac{3(1-2\beta)}{8ta}},$$

когда

$$v_0=\frac{k}{\rho c_p\theta}\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^{n+1}\delta_T,$$

$$\alpha(t) = \lambda\sqrt{\frac{2M[n(n+1)-E_d]}{3a\,n(n+1)}}\; \times$$

$$\times\left[1-\frac{n(n+1)e^{Mt}}{4[n(n+1)-E_d]}\right]\left[e^{Mt}-1\right]^{-1/2},$$

когда $v_0 = \frac{M}{3}\,\delta_r$.

Поступила I4.I.1988

Кафедра
механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

I. З.П.Шульман, Б.М.Берковский. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, 1966, с.238.

2. Д.В.Шарикадзе. МГ, № 4, 1968, с.53-55.

3. Д.В.Шарикадзе. Труды I респуб. конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену. Киев, 1969, с.161-164.

4. М.Е.Швец. ПММ,I3,3, 1949, с.257-266.

5. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, А.С.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах, М., Наука, 1970, 672 с.

ჯ. შარიქაძე, ქ. ხელმი

ცვალებადი გამტარებლობის კოეფიციენტის მქონე გამტარი ხარისხოვანი სითხის დინების არასტაციონარული ამოცანა სითბოგადაცემით

რეზიუმე

შესწავლილია დინების არასტაციონარული ამოცანა ცვალებადი გამტარებლობის კოეფიციენტის მქონე გამტარი ხარისხოვანი სითხის სითბოგადაცემის გათვალისწინებით.

J.Sharikadze, K.Helmy

UNSTEADY FLOW OF CONDUCTIVE POWER-LAW FLUID OF VARIABLE CONDUCTIVITY WITH HEAT TRANSFER

Summary

The problem of unsteady flow of power-law conductive fluid with variable conductivity with heat transfer has been studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
288, 1989

УДК 538

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ПЛОСКОЙ СТРУИ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ

М.А.Еззат

В работе /I/ рассматривались автомодельные решения динамической задачи о затопленной струе несжимаемой неньютоновской жидкости без учета взаимодействия с электромагнитным полем, а в /2/ изучалось автомодельное решение задачи о плоской свободной струе несжимаемой проводящей жидкости в поперечном магнитном поле в безиндукционном приближении.

В настоящей работе будет приведено автомодельное решение задачи о плоской свободной струе несжимаемой степенной жидкости при наличии поперечного магнитного поля.

Исходной является система уравнений плоского стационарного слоя для несжимаемой проводящей степенной жидкости, записанная для $Re_m \ll 1$, при $\vec{E} = 0$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n} - \frac{\sigma B^{2}}{\rho}u, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Для плоской свободной затопленной струи уравнения (I) должны быть решены при граничных условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad v=0 \qquad \text{при} \quad y=0,$$

$$u \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \longrightarrow \pm\infty, \tag{2}$$

и интегральном условии:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = -\frac{\sigma B^2}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} u\, dy. \tag{3}$$

Если теперь ввести, согласно уравнению неразрывности, функцию тока

$$\Psi=\left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{1}{2-n}} \Phi(x)^{\frac{1}{2-n}} f(\eta); \quad \eta = y\,\delta(x)^{-\frac{1}{2n-1}}; \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}<n<2,$$

где $\delta(x)$ обозначает "ширину" зоны перемешивания, то из соотношений

$$u=\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v=-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{5}$$

и из (I) получим уравнение движения в виде:

$$n|f''|^{n-1} f''' + \alpha f f'' - \beta f'^2 - N \Phi^{\frac{1-n}{2-n}} \delta^{\frac{2n}{2n-1}} f' = 0 \tag{6}$$

с граничными условиями для функции

$$f(0)=0, \quad f''(0)=0, \quad f'(\infty)=0, \tag{7}$$

где через α, β, N обозначены следующие выражения:

$$\alpha=\frac{1}{2-n}, \quad \beta=\delta^{\frac{2n}{2n-1}} \Phi^{\frac{1-n}{2-n}} \left(\frac{\Phi^{\frac{1}{2-n}}}{\delta^{\frac{1}{2n-1}}}\right)', \quad N=\frac{\sigma B^2}{\rho}\left(\frac{\rho}{K}\right)^{\frac{1}{2-n}}. \tag{8}$$

После несложных преобразований можно представить коэффициенты α и β в виде:

$$\alpha = \frac{1}{2-n}\delta\Phi' = \frac{1}{3n}(\Phi\delta)' - \frac{2(2n-1)}{3an}Nf(\infty)\delta^{\frac{2n}{2n-1}}\Phi^{\frac{1-n}{2-n}}, \qquad (9)$$

$$\beta = \delta^{\frac{2n}{2n-1}}\Phi^{\frac{1-n}{2-n}}\left(\Phi^{\frac{1}{2-n}}/\delta^{\frac{1}{2n-1}}\right)' = -\frac{1}{3n}(\Phi\delta)' - \frac{2(n+1)}{3an}Nf(\infty)\delta^{\frac{2n}{2n-1}}\Phi^{\frac{1-n}{2-n}},$$

где $a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\eta$,

после чего уравнение (6) перепишется в форме:

$$n|f''|^{n-1}f''' + \frac{1}{3n}(\delta\Phi)'(ff''+f'^2) =$$
$$= N\Phi^{\frac{1-n}{2-n}}\delta^{\frac{2n}{2n-1}}\left(f' - \frac{2(n+1)}{3an}f(\infty)f'^2 + \frac{2(2n-1)}{3an}f(\infty)ff''\right). \qquad (10)$$

Функции Φ и δ пока связаны лишь одним соотношением

$$\left(\Phi^{\frac{2}{2-n}}\delta^{-\frac{1}{2n-1}}\right)' = -\frac{2Nf(\infty)}{a}\Phi^{\frac{1}{2-n}}.$$

Второе соотношение вытекает из требования автомодельности решения, для чего в (10) должно быть $(\delta\Phi)' = const$ (эту постоянную можно выбрать равной единице).

Таким образом, для определения $\Phi(x)$, $\delta(x)$ имеем систему уравнений

$$\left(\Phi^{\frac{2}{2-n}}\delta^{-\frac{1}{2n-1}}\right)' = -\frac{2Nf(\infty)}{a}\Phi^{\frac{1}{2-n}}, \qquad (11)$$

$$(\Phi\delta)' = 1, \qquad (12)$$

которая после исключения $\Phi(x)$ переходит в уравнение для определения $\delta(x)$:

$$\frac{x\delta'}{\delta}=\frac{2(2n-1)}{3n}+\frac{2(2-n)(2n-1)}{3an}Nf(\infty)x^{\frac{1-n}{2-n}}\delta^{\frac{n+1}{(2-n)(2n-1)}}. \qquad (13)$$

Общим решением (13) является:

$$\delta=\frac{Dx^{\frac{2(2n-1)}{3n}}}{\left[1-\frac{2(n+1)}{3an}D^{\frac{n+1}{(2-n)(2n-1)}}f(\infty)\int N(x)x^{\frac{1}{3n}}dx\right]^{\frac{2n-1}{n+1}}}. \qquad (14)$$

В уравнении (10) $N\delta^{\frac{2n}{2n-1}}\Phi^{\frac{1-n}{2-n}}$ является произвольной функцией x, поэтому подобное решение, если оно существует, должно обращать в нуль обе части равенства (10), т.е.

$$n|f''|^{n-1}f'''+\frac{1}{3n}\left(ff''+f'^2\right)=0,$$

$$f'-\frac{2(n+1)}{3an}f(\infty)f'^2+\frac{2(2n-1)}{3an}f(\infty)ff''=0. \qquad (15)$$

Ясно, что в общем случае одна функция не может удовлетворить двум дифференциальным уравнениям, однако в данной конкретной задаче это можно сделать, если допустить, что

$$f'=\left(\frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}\left(|f(\infty)|^{\frac{n}{n+1}}-|f|^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n}{2n-1}}, \qquad (16)$$

где коэффициенты $f(\infty)$ и a связаны соотношением:

$$f(\infty)=\frac{(3n)^{\frac{2n}{2n-1}}}{2(n+1)}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}a. \qquad (17)$$

Не ограничивая общности, можно положить $a=1$.

Решение задачи примет законченный характер, если удастся определить единственную постоянную D в (I4) через заданную характеристику струи. Выбор конкретной характеристики зависит от вида магнитного поля как функции x. Если магнитное поле однородно, т.е. $B(x)=const$ $(N(x)=const)$, в качестве такой характеристики будет фигурировать импульс в начальном сечении струи $(x=0)$:

$$\lim_{x\to 0} \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = J_0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0} \rho \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{2}{2-n}} \frac{\Phi^{\frac{2}{2-n}}}{\delta^{\frac{1}{2n-1}}} = J_0. \qquad (I8)$$

Учитывая соотношение (I2), которое можно записать и как $\Phi = x/6$, а также (I4), которое для $N(x)=const$ дает

$$\delta = \frac{D x^{\frac{2(2n-1)}{3n}}}{\left[1-\frac{2(n+1)}{3n+1} f(\infty) N D^{\frac{n+1}{(2-n)(2n-1)}} x^{\frac{3n+1}{3n}}\right]^{\frac{2n-1}{3n}}}, \qquad (I9)$$

получим,

$$D = \left\{\frac{\rho}{J_0}\left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{2}{2-n}}\right\}^{\frac{(2-n)(2n-1)}{3n}}.$$

Из формулы (I7) следует, что для каждого из заданных значений магнитного поля и начального импульса существует точка на оси струи, при приближении к которой толщина струи неограниченно возрастает, а течение в струе вдоль оси x

полностью прекращается. Эта точка определяется из условия:

$$1-\frac{2(n+1)}{3n+1}f(\infty)\left\{\frac{\rho}{J_o}\left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{2}{2-n}}\right\}^{\frac{n+1}{3n}} x_{TP}^{\frac{3n+1}{3n}}=0.$$

Расход в поперечных сечениях струи дается формулой:

$$Q=\rho\int_{-\infty}^{\infty}u\,dy=2\rho f(\infty)\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\frac{1}{2-n}},$$

показывающей, что расход с ростом x возрастает от нуля до максимального значения в точке

$$x=\left\{\frac{3n+1}{2n+1}\,\frac{1}{Nf(\infty)}\left(\frac{J_o}{\rho(K/\rho)^{\frac{2}{2-n}}}\right)^{\frac{n+1}{3n}}\right\}^{\frac{3n}{3n+1}},$$

и затем вновь убывает до нуля.

При $n=1$ из полученных результатов получим решения неньютоновской жидкости, рассмотренное в /2/.

Поступила 24.II.1988

Кафедра
механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. З.П.Шульман, Б.М.Берковский. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, 1966, 239 с.
2. Э.В.Щербинин. Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле. Рига, 1973, 303 с.

მ. ეზზატ

უკუმში გამტარი ხარისხოვანი სითხის ჭავლის შერევა

რეზიუმე

შესწავლილია უკუმში გამტარი ხარისხოვანი სითხის ჭავლური შერევის ამოცანა განივი მაგნიტური ველის მოქმედებისას.

M. Ezzat

THE LAMINAR JET FLOW OF A CONDUCTING POWER-LAW FLUID

Summary

The flow a laminar jet a of conducting power-law fluid in the presence of a transverse magnetic field is studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
288, 1989
УДК 517.925.6

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ-ШВАРЦА

З.А.Цицкишвили

Рассмотрим комплексные плоскости: $z=x+iy$, $\zeta=t+i\tau$. Допустим, что на плоскости z имеется конечный линейный многоугольник с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ и соответственно с внутренними углами: $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots \pi\alpha_n$.

Отобразим конформно полуплоскость $\mathrm{Im}(\zeta)>0$ (или полуплоскость $\mathrm{Im}(\zeta)<0$) на внутреннюю область упомянутого многоугольника. При этом предположим, что точки действительной оси t, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, соответственно отображаются в вершины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ многоугольника. Упомянутое отображение осуществляется формулой Христоффеля-Шварца /1-4/:

$$z(\zeta)=M\int_{a_1}^{\zeta}\Phi(\zeta)ds+z_1, \tag{1}$$

где

$$\Phi(\zeta)=(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(\zeta-a_n)^{\alpha_n-1}, \tag{2}$$

z_1 - комплексная координата точки A_1.

Как известно, в формуле (1) три из параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно зафиксировать произвольно, следовательно, из этих параметров ($n-3$) остаются неопределенными. Кроме этого, M является комплексным неизвестным параметром, $M=\rho e^{i\varphi_1}$.

Если обозначить длину сторон $A_k A_{k+1}$ многоугольника через $\ell_{k,\,k+1}$, тогда имеет место равенство

$$\ell_{k,\,k+1}=\rho\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}|\Phi(\zeta)|ds,\quad k=1,2,\dots,n-1, \tag{3}$$

где

$$|\Phi(\zeta)|=\prod_{k=1}^{n}|\zeta-a_k|^{\alpha_k-1},\quad \alpha_n>0. \tag{4}$$

Формулы (3) можно еще записать так:

$$\rho=\frac{\ell_{12}}{\int\limits_{a_1}^{a_2}|\Phi(\zeta)|ds}=\frac{\ell_{23}}{\int\limits_{a_2}^{a_3}|\Phi(\zeta)|ds}=\dots=\frac{\ell_{n-1,n}}{\int\limits_{a_{n-1}}^{a_n}|\Phi(\zeta)|ds}. \tag{5}$$

Из системы (5) сначала находят неизвестные параметры a_k, а затем ρ.

Если одна из вершин многоугольника, например, точка A_n, отображается в точку $\zeta=\infty$ плоскости ζ, тогда формула (1) принимает вид:

$$z=M_1\int\limits_{a_1}^{\zeta}(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(\zeta-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}ds+z_1, \tag{6}$$

где M_1 – неизвестный комплексный параметр.

Если какая-нибудь вершина многоугольника, например A_2, удаляется на бесконечность так, что прилежащие к ней стороны становятся параллельными, то нужно взять $\alpha_2=0$; далее, если предположить, что стороны A_1A_2 и A_3A_2 продолжают разворачиваться дальше так, что они перестанут быть параллельными и вершина A_2 при этом удаляется к точке $z=\infty$, тогда угол $\pi\alpha_2$ следует считать отрицательным, а именно $\pi\alpha_2=-\pi\alpha$, где $\pi\alpha$ - угол, образованный продолжением сторон A_1A_2 и A_3A_2 /3/.

После изложения известных результатов сделаем замечание, когда на плоскости z некоторые вершины A_k находятся в бесконечности в соответствующих им точках $t=a_j$ функция (2) будет иметь разрыв непрерывности, порядок которых больше или равен единице. В таких случаях пользоваться формулой (I) становится затруднительно. В этих случаях нужно преобразовать формулу (I). Суть этого преобразования заключается в следующем. Интеграл (I) нужно представить в виде суммы, где вне интеграла окажется определенное аналитическое выражение, а под интегралом будет стоять функция, которая уже в указанных точках будет иметь разрыв непрерывности порядка ниже единицы.

Допустим, что на плоскости z некоторые вершины многоугольника находятся в бесконечности ($z=\infty$). Для общности допустим, что среди вершин $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ вершины $B_k, B_{k+1}, \ldots, B_n$, которые пронумерованы по мере их встречаемости, при обходе многоугольника в положительном направлении находятся в точке $z=\infty$. Аналогично пронумеруем и те вершины A_k, которые находятся на конечной части плоскости z - $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$. Соответствующие образы вершин $B_1, B_2, \ldots, B_n$ на плоскости ζ обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$, $b_k, \ldots, b_n$, а соответствующие им внутренние углы: $\pi\beta_1, \pi\beta_2, \ldots, \pi\beta_n$.

Для вершин, которые находятся в бесконечности, имеет место равенство $\Re\alpha_K = -\Re\beta_K$.

После этого формулу (2) можно переписать так:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\Phi_0(\zeta)}{\prod\limits_{K=1}^{K-1}(\zeta - b_K)\prod\limits_{j=K}^{n}(\zeta - b_j)^2}, \tag{7}$$

где

$$\Phi_0(\zeta) = \prod_{m=1}^{K-1}(\zeta - b_m)^{\beta_m}\prod_{m=K}^{n}(\zeta - b_m)^{1+\beta_m}. \tag{8}$$

Функцию

$$R(\zeta) = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{K-1}(\zeta - b_j)\prod\limits_{j=K}^{n}(\zeta - b_j)^2} \tag{9}$$

представим следующим образом:

$$R(\zeta) = \sum_{j=1}^{K-1}\frac{c_j}{\zeta - b_j} + \sum_{j=K}^{n}\left(\frac{c_j^{(2)}}{(\zeta - b_j)^2} + \frac{c_j^{(1)}}{\zeta - b_j}\right), \tag{10}$$

где постоянные c_j, $c_j^{(2)}$, $c_j^{(1)}$ определяются известным образом:

$$c_j = \frac{1}{\prod\limits_{m=1,\, m\neq j}^{K-1}(b_j - b_m)\prod\limits_{m=K}^{n}(b_j - b_K)^2}, \tag{11}$$

$$c_j^{(2)} = \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{K-1}(b_j - b_m)\prod\limits_{m=K,\, m\neq j}^{n}(b_j - b_m)^2}, \tag{12}$$

$$c_j^{(1)} = \left\{\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{K-1}(\zeta - b_m)\prod\limits_{m=K,\, m\neq j}^{n}(\zeta - b_m)^2}\right]\right\}_{\zeta = b_j} \tag{13}$$

С учетом (I0), формулу (I) можно переписать так:

$$z(\zeta)=M\left\{\sum_{m=1}^{k-1} C_m \int_{a_1}^{\zeta} \frac{\Phi_0(s)ds}{\zeta-b_m}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=k}^{n}\left[C_m^{(2)}\int_{a_1}^{\zeta}\frac{\Phi_0(\zeta)ds}{(\zeta-b_m)^2}+C_m^{(1)}\int_{a_1}^{\zeta}\frac{\Phi_0(\zeta)ds}{\zeta-b_m}\right]\right\}+z_1. \tag{I4}$$

В свою очередь, формулу (I4) можно переписать так:

$$z(\zeta)=M\left\{\int_{a_1}^{\zeta}\frac{P_1(\zeta)\Phi_0(\zeta)ds}{\prod\limits_{m=1}^{n}(\zeta-b_m)}+\sum_{m=k}^{n}C_k^{(2)}\int_{a_1}^{\zeta}\frac{\Phi_{om}(\zeta)ds}{(\zeta-b_m)^{1+\beta_m}}\right\}+z_1, \tag{I5}$$

где $P_1(\zeta)$ – полином, который определяется из равенства

$$\sum_{m=1}^{k-1}\frac{C_m}{z-b_m}+\sum_{m=k}^{n}\frac{C_m^{(1)}}{z-b_m}=\frac{P_1(\zeta)}{\prod\limits_{m=1}^{n}(\zeta-b_m)}, \tag{I6}$$

а функция $\Phi_{om}(\zeta)$ определяется формулой

$$\Phi_{om}(\zeta)=\prod_{j=1}^{k-1}(\zeta-b_j)^{\beta_j}\prod_{j=k,\, j\neq m}^{n}(\zeta-b_j)^{1-\beta_j},\quad \Phi_{om}(b_m)\neq 0. \tag{I7}$$

С помощью интегрирования по частям интерал

$$J_m(\zeta)=\int_{a_1}^{\zeta}\frac{\Phi_{om}(\zeta)ds}{(\zeta-b_m)^{1+\beta_m}} \tag{I8}$$

можно переписать так:

$$J_m(\zeta) = -\frac{1}{\beta_m}\,\frac{\Phi_{om}(\zeta)}{(\zeta-b_m)^{\beta_m}} + \frac{1}{\beta_m}\int_{a_1}^{\zeta}\frac{\Phi'_{om}(s)\,ds}{(s-b_m)^{\beta_m}}\,. \tag{19}$$

Функция $\Phi'_{om}(\zeta)$ определяется из следующего равенства:

$$\frac{\Phi'_{om}(\zeta)}{\Phi_{om}(\zeta)} = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\beta_j}{\zeta-b_j} + \sum_{j=k,\,j\neq m}^{n}\frac{1-\beta_j}{\zeta-b_j} = \frac{P_2(\zeta)}{\prod\limits_{j=1,\,j\neq m}^{n}(\zeta-b_j)}\,. \tag{20}$$

С учетом (19) и (20) формулу (15) можно переписать так:

$$z(\zeta) = M\left\{\int_{a_1}^{\zeta}\frac{P_1(s)\Phi_0(s)\,ds}{\prod\limits_{m=1}^{n}(s-b_m)} - \sum_{m=k}^{n}\tilde{C}_m^{(2)}\frac{\Phi_{om}(\zeta)}{(\zeta-b_m)^{\beta_m}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=k}^{n}\tilde{C}_m^{(2)}\int_{a_1}^{\zeta}\frac{P_2(s)\Phi_{om}(s)\,ds}{\prod\limits_{j=1,\,j\neq m}^{n}(s-b_j)(s-b_m)^{\beta_m}}\right\} + z_1\,, \tag{21}$$

где

$$\tilde{C}_m^{(2)} = C_m^{(2)}/\beta_m\,. \tag{22}$$

Формулу (21) перепишем так:

$$z(\zeta) = M\left\{\int_{a}^{\zeta}\frac{P_1(s)\Phi_0(s)\,ds}{\prod\limits_{m=1}^{n}(s-b_m)} - \frac{P_3(\zeta)\Phi_0(\zeta)}{\prod\limits_{m=k}^{n}(\zeta-b_m)} + \right. \tag{23}$$
$$\left. + \int_{a_1}^{\zeta}\frac{P_4(s)\Phi_0(s)\,ds}{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-b_m)}\right\} + z_1\,,$$

где

$$\sum_{m=k}^{n}\tilde{C}_m^{(2)}\frac{1}{\zeta-b_m} = \frac{P_3(\zeta)}{\prod\limits_{m=k}^{n}(\zeta-b_m)}\,,\quad P_4(\zeta) = P_3(\zeta)P_2(\zeta)\,. \tag{24}$$

Наконец, формулу (23) можно записать так:

$$z(\xi)=M\left\{-\frac{P_3(\xi)\Phi_0(\xi)}{\prod\limits_{j=k}^{n}(\xi-b_j)}+\int\limits_{a_1}^{\xi}\frac{P_5(s)\Phi_0(s)\,ds}{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-b_m)}\right\}+z_1, \qquad (25)$$

где

$$P_5(\xi)=P_1(\xi)+P_4(\xi). \qquad (26)$$

Сейчас перейдем к случаю, когда некоторые $\alpha_k=0$. Будем считать, что $\alpha_n=0$, а все остальные $\alpha_k>0$, $k=1,2,\ldots,n-1$. В этом случае функцию $\Phi(\xi)$ можно переписать так:

$$\Phi(\xi)=\frac{\Phi_{0n}(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\xi-a_j)}, \qquad (27)$$

где

$$\Phi_{0n}(\xi)=\prod_{j=1}^{n-1}(\xi-a_j)^{\alpha_j}. \qquad (28)$$

Функцию

$$R_1(\xi)=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\xi-a_j)} \qquad (29)$$

можно представить так:

$$R_1(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\frac{N_j}{\xi-a_j}, \qquad (30)$$

где

$$N_j=\frac{1}{\prod\limits_{m=1,\,m\neq j}^{n}(a_j-a_m)}. \qquad (31)$$

С учетом (30) формулу (I) можно переписать так:

$$z(\zeta)=M\left\{\sum_{j=1}^{n} N_j \int_{a_1}^{\zeta} \frac{\Phi_{on}(s)ds}{\zeta-a_j}\right\}+z_1. \tag{32}$$

Интеграл

$$\int_{a_1}^{\zeta} \frac{\Phi_{on}(s)ds}{\zeta-a_n} \tag{33}$$

можно представить так:

$$\int_{a_1}^{\zeta} \frac{\Phi_{on}(s)ds}{\zeta-a_n}=\Phi_{on}(\zeta)\ln(\zeta-a_n)-\int_{a_1}^{\zeta}\Phi'_{on}(s)\ln(s-a_n)ds, \tag{34}$$

где

$$\frac{\Phi'_{on}(\zeta)}{\Phi_{on}(\zeta)}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\alpha_j}{\zeta-a_j}=\frac{P_6(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n-1}(\zeta-a_j)}, \tag{35}$$

$P_6(\zeta)$ - полином, который определяется из равенства (35).

С учетом (34) равенство (32) можно записать так:

$$z(\zeta)=M\left\{\sum_{j=1}^{n-1} N_j \int_{a_1}^{\zeta} \frac{\Phi_{o1}(s)ds}{\zeta-a_j}+N_n\,\Phi_{on}(\zeta)\ln(\zeta-a_n)-\right. \tag{36}$$

$$\left.-\int_{a_1}^{\zeta}\frac{P_6(s)\Phi_{on}(s)\ln(s-a_n)}{\prod_{j=1}^{n-1}(s-a_j)}\right\}+z_1.$$

Из вышеизложенного очевидно, как нужно поступить в том случае, когда несколько вершин A_n, для которых $\alpha_k=0$, находятся в бесконечности.

Поступила 7.XII.1988

Грузинский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

I. А.И.Маркушевич. Теория аналитических функций. М., I950, 703 с.

2. И.И.Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., I960, 444 с.

3. П.Я.Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. М., I977, 664 с.

4. В.Коппенфельс, Ф.Штальман. Практика конформных отображений. М., ИЛ, I963, 406 с.

ზ. ციცქიშვილი

კრისტოფელ-შვარცის ფორმულის ერთი წარმოდგენის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია კრისტოფელ-შვარცის ცნობილი ფორმულა იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის წყვეტის რიგი ზოგიერთ განსაკუთრებულ წერტილში აღემატება ან ერთის ტოლია. ასეთი შემთხვევისათვის ზოგადად მოცემულია ამ ინტეგრალის ორ შესაკრებად წარმოდგენის გზა, შესაკრები, რომელიც ინტეგრალის გარეთ არის, მოიცემა ცხადი სახით, ხოლო მეორე შესაკრები არის განსაზღვრული ინტეგრალი ირაციონალური ფუნქციიდან, რომლის წყვეტის რიგი აღნიშნულ წერტილებში ერთზე ნაკლებია,

Z.Tsitskishvili

ON ONE REPRESENTATION OF THE CHRISTOFFEL-SCHWARTZ FORMULA

Summary

The Christoffel-Schwartz formula is considered for the case when at some singular points the discontinuity order of the irrational integrand function is greater than or equal to 1. For such cases it is proposed to represent the integral in the form of the sum of two terms - one term outside the integral is an explicit analytical expression, the other term is again the defined integral of the irrational function whose discontinuity order at the above-mentioned points is less than 1.

СОДЕРЖАНИЕ

შ ი ნ ა ა რ ს ი

C O N T E N T S

Редактор издательства Л.Абуашвили

Подписано в печать 29.II.89
УЭ 0I724 Бумага 60х84
Усл.печ.л. I0,5 Уч.изд.л.6,27
Тираж 300 Заказ 1023 Цена Iр.30 коп.

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси, 380028, пр.И.Чавчавадзе, I4.
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, I.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.