თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

286

ISSN 0376—2637

ფიზიკა
ФИЗИКА
PHYSICS

27

თბილისი Тбилиси Tbilisi

1989

Издательство Тбилисского университета

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

ტ. 286 V.

ფიზიკა

PHYSICS

თბილისი 1989 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

т.286

Ф И З И К А

Тбилиси 1989

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

286, 1989

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЛИННЫХ АТМОСФЕРНЫХ ВОЛН С РЕЛЬЕФОМ

З.В.Хведелидзе

Волновые процессы - нелинейные и линейные - в настоящее время интенсивно изучаются в различных областях природы, в том числе и гидродинамике. Поскольку кинетическая энергия атмосферных движений сосредоточена, в основном, в нижних слоях, где наблюдаются мощные метеорологические образования, то вполне естественно предположить, что заметная доля волновых возмущений будет генерировать именно в нижнем слое атмосферы. В то же время атмосфера стратифицирована по температуре, плотности и ветру, что оказывает влияние на прохождение разных волн вверх.

Известно также, что рельеф местности вызывает волновые процессы при блокировании атмосферных масс. Авторы ряда работ по исследованию взаимодействия больших атмосферных потоков с рельефом подчеркивают то обстоятельство /I/, что начинают с предпосылки о синусоидальном вынуждении, и поэтому результирующие равновесия представляют собой глобальные явления. С другой стороны, синоптический опыт говорит о том, что большее значение может иметь также локальное или региональное блокирование.

Эти работы указывают на то, что амплитуда данных нелинейных баротропных или бароклинных волн в потоке с поперечным градиентом скорости без рельефа изменяется согласно либо уравнению Картвега-де-Фриса, либо модифицированному уравнению в соответствии с распределением переменных фонового потока. Многие исследователи получили квазигеострофические решения для одиночных волн в виде солитона /2/.

Для изучения волновых процессов в атмосфере используется уравнение гидротермодинамики в разных системах координат.

В /3,4/ работе для составляющих скорости ветра с учетом влияния горы получено выражение:

$$u=\frac{1}{\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad v=\frac{1}{\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{I}$$

где $\eta=\frac{P_z}{P_o}$; P_z - давление на поверхности горы; P_o=1000 мб-стандартное значение давления; φ - функция тока. С учетом (I) для вихря скорости получается уравнение:

$$\Omega=\frac{1}{\eta}\Delta\varphi-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial \ln\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial \ln\eta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)= \\ =\frac{1}{\eta}\left(\Delta\eta+a\varphi_x+b\varphi_y\right), \tag{2}$$

где Δ - двумерный оператор Лапласа,

$$a=-\frac{\partial \ln\eta}{\partial x}; \quad b=-\frac{\partial \ln\eta}{\partial y}$$

- параметры, характеризующие влияние рельефа местности.

Основное прогностическое уравнение получается в следующем виде /4,5/:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\varphi + a\varphi_x + b\varphi_y + c\frac{\partial}{\partial \varsigma}\varsigma^2\varphi_\varsigma\right) + \beta\varphi_x = \frac{g}{l}F, \qquad (3)$$

где $F = A_\Omega + \frac{l^2}{c^2}\frac{R}{g}\frac{\partial}{\partial\varsigma}\varsigma A_T$, $c = \frac{l^2}{c_1^2}$, $c_1 = \sqrt{aRT}$,

A_Ω - адвекция вихря, A_T -адвекция температуры, c_1 - скорость звука.

В работе/4/ было получено аналитическое решение уравнения (3) в случае баротропной атмосферы для геопотенциала в области $r \geq 0$ в полярных координатах (r, ϑ) в виде

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(r,\vartheta)e^{-r/2}(a\cos\vartheta + b\sin\vartheta) \times$$

$$\times\, t\int_{t\vartheta}^{\infty}\frac{J_1(2\sqrt{tt'})}{2t\sqrt{tt'}}e^{\frac{-r^2 a\beta}{8t'} - \frac{a^2+b^2}{2a\beta}t'}, \qquad (4)$$

где J_1 - функция Бесселя первого рода.

На рис.I представлен график функции влияния в плоскости (x, y) при t =I час. Видно, что функция влияния имеет по отношению к центру горы волновой асимметрический характер, вызванный влиянием горы. Известно, что без учета влияния рельефа функции влияния имеют симметрический характер.

Представим функции тока в виде суммы равномерного распределения и малого отклонения (от фонового значения):

$$\varphi = \overline{\varphi}(y,z) + \varepsilon\varphi(x,y,z,t), \qquad (5)$$

где $\varphi(y,z) = -\int^{y} u(y',z')\,dy'$,

$\varepsilon = \frac{u}{eL} = 0{,}1$ - число Россби-Кибеля.

Тогда в геострофическом приближении получается уравнение вихря скорости в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)q + \theta_y \varphi_x + \varepsilon\Big[J\Big(\varphi, \Delta\varphi + a\varphi_x + b\varphi_y + c\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\Big)\Big] + \Big[E(\ln \eta,\varphi) - \frac{g^2}{Re}\zeta_x \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\zeta} - \frac{\partial\bar\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\Big] = 0, \qquad (6)$$

где

$$q = \Delta\varphi + a\varphi_x + b\varphi_y + c\frac{\partial}{\partial\zeta}(\zeta^2\cdot\varphi_\zeta), \qquad (7)$$

$$\theta = \bar\varphi_{yy} + b\bar\varphi_y - \beta\eta y + c\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta^2\bar\varphi_\zeta ,$$

$J(A,B)$ - якобиан.

Граничные условия:

1) при $y = 0 - 1$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ - модель канала конечной ширины;

2) при $t = z(x,y)$ уравнение поверхности горы

$$w = u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\eta}(\varphi, z). \qquad (8)$$

Уравнение (7) для баротропной атмосферы при $\varepsilon = 0$ принимает вид

$$\Delta\varphi_t + a\varphi_{tx} + b\varphi_{yt} + \beta\varphi_x c = 0. \qquad (9)$$

Решение можно искать в виде

$$\varphi(x,y,t) = \varphi^{(1)}(x,y)\,\varphi^{(2)}(t).$$

После подстановки получим

$$-\frac{\varphi_t^{(2)}}{\varphi^{(2)}} = \frac{\beta\varphi_x^{(1)}}{\Delta\varphi^{(1)} + a\varphi_x^{(1)} + b\varphi_y^{(1)} \cdot y} = const.$$

Отсюда $\varphi^{(2)} = e^{-ct}$

и $\varphi^{(1)} = e^{-[(a-\frac{\beta}{c})x + by]}$

Следовательно,

$$\varphi(x,y,t) = e^{-[(a-\frac{\beta}{c})x - by - ct]} \qquad (10)$$

По формуле (10) построены графики с помощью ЭВМ (t =1,2 час), когда горные массивы моделируются как бы четырехскатной крышей. Рельеф задавался в виде (10) и соответствующие графики для Кавказа даны на рис.3. Из графика видно наличие волны, вызванной воздействием локального рельефа.

С другой стороны, следуя работам /1,7/, представим

$$w = -\frac{1}{s}\frac{d\theta}{dt}, \quad S(z) = \frac{N_S^2 D^2}{l^2 L^2}, \quad N_S^2 = \frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz},$$

N_S - частота Брента-Вяйсяля, где S - характеристика стратификации атмосферы, θ - потенциальная температур

Допустим S =1 и $\theta \approx \varphi_x$. Можно записать /7/

$$\frac{d}{dt}(\varphi_z)+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}=0,$$

и, если представим u и v в следующем виде:

$$u=-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_z+uh_x-u_z\varphi_x+\varepsilon J(\varphi,\varphi_z+h). \qquad (11)$$

Исследуем уравнения (7) и (11) при $\varepsilon=0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)q+\theta_y\varphi_x=0, \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_z+uh_x-u_z\varphi_x=0. \qquad (13)$$

Если будем искать решение в таком виде, как в /1/

$$\varphi=A(x,\tau)\,\Phi(y,z), \qquad (14)$$

для $A(x,\tau)$ получается уравнение типа Картвега-де-Фриса:

$$A_\tau+\alpha A_x+\beta AA_x+\gamma A_{xxx}=f'(x). \qquad (15)$$

Решение однородного уравнения (15) имеет вид /1/:

$$A=a\,\mathrm{sech}^2\left[K^2(x-ct)+d\right],$$

где

$$K^2 = \frac{a\beta}{12\gamma}, \qquad c = \alpha + \frac{\beta a}{3}.$$

Если первоначально текучая среда является возмущенной и рельеф включается при $t=0$, то отклик и решение зависят от формы рельефа и от того, равна ли нулю линейная скорость фазы на реальной оси. Используя леммы Римана-Лебега для локализированных функций, американские ученые /I2/ получили отклики, зависящие от высоты горы.

Конечным эффектом рельефа является образование фазового сдвига всего возмущения /I/ .

Однако влияние рельефа учитывалось и через правую часть. Авторы взяли $f = e^{\frac{-x^2}{4}}$ и построили графики, которые показаны на рис.2. Из рисунков видно существование стоячей волны и что учет рельефа вызывает фазовый сдвиг волны.

Мы рассмотрели случаи, когда учет рельефа задавался через правую часть уравнения в виде плоской волны. Соответствующие графики показаны на рис.3.

Для анализа бароклинного случая, принимая, что поток не является ограниченным по ζ , потребуем только, чтобы энергия возмущения исчезала с достаточной скоростью, когда $\zeta \to 0$. Тогда уравнение (7) при $\varepsilon=0$ перепишется в виде решений с разделяющимися переменными вида

$$\varphi = R_e\, e^{i(mx+ny-\sigma t)}\, \Phi(\zeta) \tag{17}$$

Функция $\Phi(\zeta)$, описывающая вертикальную структуру решения, удовлетворяет уравнению /7/ :

$$c\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\Phi}{d\zeta}\right)=-\lambda\Phi. \tag{18}$$

В самом деле, после подстановки (I7) и (7) (ε =0) получим

$$(\sigma-U_m)\left[x^2-i(a_m+b_n)-c\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]-m\theta_y=0.$$

Скорость волны

$$c=U+\frac{\theta_y}{x^2-i(a_m+b_n)-c\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta}} \tag{I9}$$

или

$$c=U\frac{\theta_y(x^2-\rho^2)}{(x^2-\rho^2)^2+(a_m+nb)^2}+i\frac{\theta_y(a_m+b_n)}{(x^2+\rho^2)^2-(a_m+nb)^2},$$

где
$$x^2=m^2+n^2,$$
$$\rho^2=c\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Если между параметрами, характеризующими влияние рельефа, и волновыми числами выполняется условие

$$a_m+b_n=0, \tag{20}$$

то

$$c=U+\frac{\theta_y(x^2-\rho^2)}{(x^2+\rho^2)^2-(a_m+b_n)^2}. \tag{2I}$$

Решение уравнения (I8), при условии $\Phi(1)=\Phi_0$, $\Phi(0)=0$, имеет вид

$$\Phi(\varsigma) = \Phi_0 e^{\frac{\sqrt{1+4\gamma^2}-1}{2}\ln\varsigma}, \qquad (22)$$

где $\gamma^2 = \frac{1}{c}$.

Поскольку ς^2 всегда положительны в интервале (0,1), мы можем быть уверены что существует бесконечное число собственных решений $\Phi_n(\varsigma)$, n=1,2,3, каждому из которых соответствует одно действительное собственное число γ_n; γ =0 является собственным числом ς.

Эта мода является баротропной. Для моды γ=0 скорость волны имеет вид:

$$c = U + \frac{Q_y x^2}{x^2 - (a_m + b_n)^2} + i\frac{Q_y (a_m + b_n)}{x^2 - (a_m + b_n)^2},$$

или, с учетом (18),

$$c = U + \frac{Q_y x^2}{x^2 - (a_m + b_n)^2}, \qquad (23)$$

т.е. совпадает со скоростью волн Россби при $a = b = 0$, а в общем виде со скоростью, полученной в /4,5/.

Если горизонтальный перенос масс равен нулю

$$\int_0^1 \rho_s u_0 d\varsigma = \int_0^1 \rho_s v_0 d\varsigma = 0,$$

получается бароклинная мода при $\gamma \neq 0$.

Для бароклинной атмосферы очень трудно найти соответствующие моды $\gamma \neq 0$. Если для фиксированного ς взять решение (7) в виде (18), то для σ получается

$$\sigma = i\,\frac{l a_n - m(lb + Q_y)}{i\chi^2 + ma + nb} = \sigma_1 + i\sigma_2\,,$$

т.е. частота оказывается мнимой, что отражает неустойчивость решения.

Очень интересно, что везде фигурируют комбинации (20), при выполнении которых частота будет числом действительным.

Интересно, существуют ли стационарные волны типа нейтральных в природе? Для примера были проанализированы спутниковые карты облачности за достаточно большой период в регионе Кавказа. В ряде случаев наблюдались квазистационарные волны с периодом I÷I,5 суток, что соответствует теоретическим выводам, которые были получены в /8/.

Поступила 21.06.1988 Кафедра геофизики

Литература

I. A.Patoine and T.Warn. The Interaction of Long, Qwasi-Stationary Baroclinic with Topography . January, 1985

2. H.Yang, Evolution of a Rossby Wave Packet in Barotropic with Asymmetric Basic Current, Topography and δ-Effect. J.Atmos. Sci., 1987. vol. 44, N 16.

3. И.А.Кибель. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., Гостехиздат, 1957, с.375.

4. З.В.Хведелидзе. Сообщения АН ГССР, т.XXУII, №2, 1961, с.143-148.

5. З.В.Хведелидзе. Метеорология и гидрология, № 10, 1982, с.110-115.

6. Г.И.Марчук. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды, М., "Наука", 1982, с.320.

7. Дж.Педлоски. Геофизическая гидродинамика, часть 2, "Мир", 1984, с.811.

8. З.В.Хведелидзе. Математическое моделирование крупномасштабных атмосферных процессов в условиях горной местности в приближении β - плоскости. Докторская диссертация, 1985, с.255.

ზ. ხვედელიძე

გრძელი ატმოსფერული ტალღების და რელიეფის ურთიერთქმედება

რეზიუმე

მოცემულია ქარის სიჩქარის გრიგალის განტოლების ამოხსნა ბაროტროპული ატმოსფეროსათვის, სათანადო გავლენის ფუნქციის ანალიზი რელიეფის ზემოქმედების გათვალისწინების სხვადასხვა შემთხვევაში, აგრეთვე ატმოსფეროს ბაროკლინობის შემთხვევაში მოხდენილია შესაბამისი ამოხსნის რაოდენობრივი შეფასება.

Z.Khvedelidze

THE INTERACTION OF LONG ATMOSPHERIC WAVES AND THE RELIEF

Summary

The equation of a strong wind force is solved for barotropic atmosp the relevant influence function is analyzed with account of different cas of the effect of the relief, and the respective solution is quantitatively es mated for the case of baroclinic atmosphere.

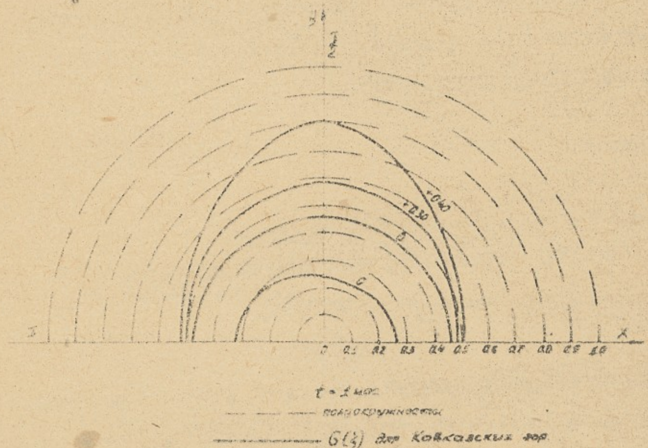


Рис. I.

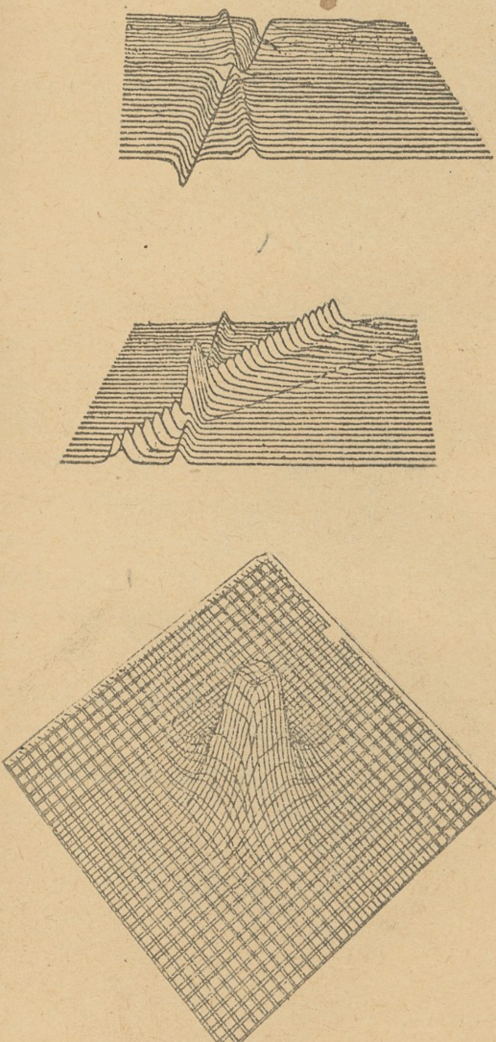
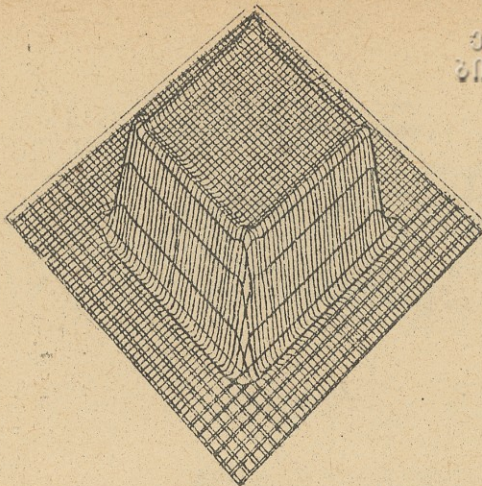
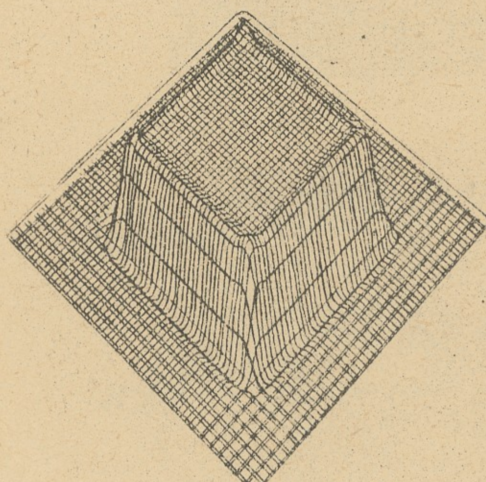


Рис. 2



$t = 1$ zac.



$t = \infty$ zac.

Рис. 3

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

286, 1989

КАЛИБРОВОЧНОЕ ПОЛЕ ТРАНСЛЯЦИЙ И ПРОБЛЕМА ГРАВИТАЦИОННЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

М.Я.Гогберашвили

I. Введение.

В статье найдено центрально-симметричное решение уравнений "Тензорно-тензорной теории гравитации". Эта теория была предложена в работах /I-5/ с целью устранения трудности с физической интерпретацией калибровочного поля группы трансляций θ^{ν}_{μ}, существующей в калибровочной теории группы Пуанкаре в формализме расслоений /6,7/. В работе показано, что калибровочное поле трансляций может решить проблему гравитационного коллапса.

2. Тензорно-тензорная теория гравитации.

В тензорно-тензорной теории, как и в стандартной калибровочной теории группы Пуанкаре в формализме расслоений /6,7/ калибровочное поле трансляций возникает при припаивании аффинного касательного расслоения AT к базе X^4, т.е. при редукции аффинной структурной группы касательного расслоения до линейной

$$GA(4,R) \longrightarrow GL(4,R).$$

Деформация многообразия $\mathcal{X}^4$ при этом сводится к замене

$$\partial_\mu \longrightarrow (\delta_\mu^\nu + \theta_\mu^\nu)\partial_\nu .$$

Но тензорная I-форма трансляционной связности θ_μ^ν в этой теории не связывается с тетрадой h_μ^a, а интерпретируется как некоторый новый тип поля.

Тетрадное гравитационное поле h_μ^a задается с помощью Хиггс-Голдстоуновских полей на второй ступени спонтанного нарушения общей аффинной группы, а именно при редукции линейной группы до группы Лоренца

$$GL(4,R) \longrightarrow L_6 .$$

Тетрадное поле деформирует многообразие $\mathcal{X}^4$ в виде:

$$\partial_\mu \longrightarrow h_\mu^a \partial_a .$$

Эффективная метрика теории

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}(\delta_\mu^\alpha + \theta_\mu^\alpha)(\delta_\nu^\beta + \theta_\nu^\beta), \qquad (I)$$

(где $g_{\alpha\beta} = h_\alpha^a h_{\beta a}$ гравитационная метрика) оказываются гибридом двух обычно рассматриваемых трактовок - классического гравитационного поля и калибровочного поля трансляций. Источником θ_μ^ν, как и источником гравитационного поля, являеется тензор энергии-импульса материи. Таким образом, теория обобщает известные скалярно-тензорное и векторно-тензорное теории гравитации, в которых источник дополнительных полей вообще не называется.

Существует аналогия тензорно-тензорной теории гравитации с калибровочной теорией дислокаций в упругой среде /8/, в которой внешнее напряжение тоже порождает два поля: поле упругих деформаций и поле дислокаций. Таким образом, калибровочное поле трансляций можно интерпретировать как своеобразный сингулярный объект, своего рода дислокации пространства-времени.

Надежда с помощью калибровочного поля трансляций решить проблему гравитационных сингулярностей связана с тем, что поле θ^{ν}_{μ}, в отличие от тетрады h^{α}_{μ}, является тензором, определено однозначно и поэтому преобразованием координат его нельзя убрать из метрического тензора (I).

Проводя аналогию с упругой средой, без учета поля дефектов дислокации проявились бы в виде сингулярных точек упругой деформации. Аналогично, без учета калибровочного поля трансляций гравитационная метрика в ОТО имеет сингулярности.

Но основным свойством поля θ^{ν}_{μ}, позволяющим подойти к проблеме коллапса, является то, что калибровочное поле трансляций, в отличие от гравитационного поля, может быть вырожденным, т.е. возможны точки, в которых

$$\theta = det(\delta^{\nu}_{\mu} + \theta^{\nu}_{\mu}) = 0,$$

что соответствует сингулярностям.

Уравнения тензорно-тензорной теории гравитации в случае безмассового калибровочного поля трансляций имеют вид /I-3/:

$$R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}R = 8\pi G\left(T^{\alpha}_{\beta} + \overset{\theta}{T}{}^{\alpha}_{\beta}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\theta\sqrt{-g}}\mathcal{D}_\gamma\left[\frac{\theta\sqrt{-g}}{4\pi a}\left(\delta^\alpha_\beta F^{\delta\gamma}_{\cdot\cdot\delta}-\delta^\gamma_\beta F^{\delta\alpha}_{\cdot\cdot\delta}-F^{\gamma\alpha}_{\beta\cdot\cdot}\right)-\frac{\theta\sqrt{-g}}{b}\varepsilon^{\nu\cdot\gamma\alpha}_{\beta}\bar{F}_\nu\right]$$

$$-\left(\delta^\alpha_\beta+\theta^\alpha_\beta\right)^{-1}\left[\frac{1}{8\pi a}\left(F^{\lambda}_{\cdot\nu\mu}F^{\cdot\nu\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{2}F_{\cdot\nu\alpha}F^{\mu\nu\alpha}_{\cdots}\right)-\frac{1}{2b}\bar{F}^\nu\bar{F}_\nu\right]=$$

$$=-\left(\delta^\alpha_\nu+\theta^\alpha_\nu\right)^{-1}\left[T^\nu_\beta-\frac{1}{2}\delta^\nu_\beta\left(T+\overset{e}{T}\right)\right], \qquad (3)$$

где (2) - уравнения Эйнштейна, $\overset{e}{T}$ - тензор энергии-импульса калибровочного поля, $\mathcal{D}_\gamma$ - ковариантное производное по гравитационному полю и введено обозначение

$$F^{\gamma}_{\cdot\mu\nu}=\partial_\mu\theta^\gamma_\nu-\partial_\nu\theta^\gamma_\mu, \qquad (4)$$

$$\bar{F}^\nu=\varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta\gamma}.$$

3. <u>Сферически-симметричное решение.</u>

Будем искать сферически-симметричное решение системы (2), (3) вне источника, т.е. полагая

$$T_{\alpha\beta}=0.$$

В уравнениях калибровочного поля трансляций (3) положим

$$\theta^0_0=A(r),$$

$$\theta^i_j=\delta^i_j\,B(r), \qquad i,j=1,2,3.$$

$$\theta^0_i=\theta^i_0=0.$$

С помощью этих величин по формуле (4) находим:

$$F^{0}_{x0} = \partial_x A, \qquad F^{y}_{xy} = F^{z}_{xz} = \partial_x B,$$

$$F^{0}_{y0} = \partial_y A, \qquad F^{x}_{yx} = F^{z}_{yz} = \partial_y B,$$

$$F^{0}_{z0} = \partial_z A, \qquad F^{x}_{zx} = F^{y}_{zy} = \partial_z B.$$

Все остальные компоненты $F^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$ равны нулю. Тогда для величин, входящих в уравнения (3), получаем:

$$\bar{F}^{\nu} = \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

$$F^{\mu}_{\alpha\mu} F^{\nu\alpha}_{\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{2} F^{\mu}_{\cdot\alpha\beta} F^{\alpha\beta}_{\mu\cdot\cdot} = 0.$$

Таким образом, уравнения калибровочного поля трансляций (3) вне вещества сводятся к

$$\begin{gathered}
2g_{00}\Delta B = 0, \\
g_{xx}\left[\Delta(A+2B) - \partial_x^2(A+2B) - (\partial_y^2+\partial_z^2)B\right] = 0, \\
g_{yy}\left[\Delta(A+2B) - \partial_y^2(A+2B) - (\partial_x^2+\partial_z^2)B\right] = 0, \\
g_{zz}\left[\Delta(A+2B) - \partial_z^2(A+2B) - (\partial_y^2+\partial_x^2)B\right] = 0, \\
\partial_x\partial_y(A+B) = 0, \\
\partial_x\partial_z(A+B) = 0, \\
\partial_y\partial_z(A+B) = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Чтобы удовлетворить последние три уравнения, надо взять

$$A(r) = -B(r).$$

Тогда все уравнения (5), кроме первого, удовлетворяются тождественно, а первое уравнение принимает вид:

$$\Delta A(r) = 0.$$

Получаем сферически-симметричное решение уравнений калибровочного поля трансляций (3) в пустоте

$$\theta^0_0 = \frac{c}{r},$$

$$\theta^i_j = -\delta^i_j \frac{c}{r}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\theta^i_0 = \theta^0_i = 0,$$

или в сферических координатах

$$\theta^0_0 = \frac{c}{r},$$

$$\theta^r_r = -\frac{c}{r},$$

$$\theta^\theta_\theta = \theta^\varphi_\varphi = 0.$$

Что касается уравнений Эйнштейна (2), их сферически-симметричное решение - решение Шварцшильда - давно известно:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -g^{-1}_{rr} = 1 + \frac{E}{r}, \\ g_{\theta\theta} &= -r^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \qquad (6)$$

Используя определение эффективной метрики (I), находим

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= \left(1 + \frac{E}{r}\right)\left(1 + \frac{c}{r}\right)^2, \\ \tilde{g}_{rr} &= -\left(1 + \frac{E}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{c}{r}\right)^2, \\ \tilde{g}_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta\, \tilde{g}_{\theta\theta} = -r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \qquad (7)$$

Значения констант c, E в выражении (7) находятся из ньютоновского приближения в случае безмассового калибровочного поля трансляций /I-3/

$$\tilde{g}_{00} \approx 1 + 2\,\frac{m(G - a)}{r},$$

где m - масса источника, G - гравитационная константа, а a - константа калибровочного поля, т.е.

$$E = -2mG ,$$

$$c = 2ma .$$

Окончательно сферически-симметричное решение уравнений тензорно-тензорной теории гравитации (2), (3) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}_{00} = \left(1 - \frac{2mG}{r}\right)\left(1 + \frac{2ma}{r}\right)^2 , \\
&\tilde{g}_{rr} = -\left(1 + \frac{2mG}{r}\right)^{-1}\left(1 + \frac{2ma}{r}\right)^2 , \\
&\tilde{g}_{\theta\theta} = -r^2 , \\
&\tilde{g}_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2\theta .
\end{aligned} \tag{8}$$

Проблема сингулярностей.

В ОТО справедлива теорема Хокинга-Пенроуза о гравитационных сингулярностях /9/. Суть ее состоит в том, что решение уравнения Райчаудхури, описывающего девиацию (расхождение) близких геодезических, для материи, удовлетворяющей сильному энергетическому условию, т.е. для большинства физически разумных решений уравнений Эйнштейна, показывает существование сопряженных точек (пересечений) геодезических.

Самое известное сингулярное решение уравнений Эйнштейна - решение Шварцшильда (6) - имеет особенность на сфере

$$r = 2mG . \tag{9}$$

Но в ОТО эта сингулярность мнимая, тем более, что определитель

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin\theta$$

никакой особенности на поверхности (9) не имеет. В координатах Крускаля или Финкельштейна эта поверхность оказывается полупроницаемой для материи, поскольку пропускает времениподобные геодезические до истинной особенности

$$r = 0.$$

В этом заключается проблема гравитационного коллапса.

Избавиться от сингулярностей в ОТО пытаются различными способами: допущением нарушения причинности, использованием отрицательного космологического члена, переходом к квадратным по кривизне лагранжианам, учетом геометрического поля кручения, когда появляющиеся добавочные члены в уравнениях Эйнштейна, будучи перенесенными в правую часть, могут нарушить сильное энергетическое условие.

В тензорно-тензорной теории сильное энергетическое условие нарушает тензор энергии-импульса калибровочного поля трансляций $\overset{\theta}{T}{}_{\beta}^{\alpha}$ в уравнениях (2). Например, центрально симметричное решение (8) внутри поверхности Шварцшильда (9) имеет вторую характерную поверхность

$$r = 2ma. \qquad (10)$$

Однако сингулярность на этой поверхности является реальной и она полностью непроницаема для материи, т.е. предотвращается коллапс. Это видно из того, что, во-первых, уравнения калибровочного поля трансляций (3) не допускают преобразования типа Финкельштейна или Крускаля. Во-вторых, калибровочное поле трансляций является однозначным и преобразованием координат его нельзя убрать из эффективной метрики (I). В-третьих, детерминант калибровочного поля

$$\theta = \det\left(\delta^\mu_\nu + \theta^\mu_\nu\right) = \left(1 + \frac{2ma}{r}\right)\left(1 - \frac{2ma}{r}\right)$$

в точке (I0) становится равным нулю, т.е. элемент объема $\theta\sqrt{-g}\, d^4x$ на этой поверхности имеет особенность. Можно сказать, что на поверхности (I0) задана ультралокальная вырожденная геометрия, называемая геометрией Кэррола. Такое состояние, как показано в работе /I0/, может осуществляться в сингулярности.

Таким образом, наличие калибровочного поля трансляций приводит к тому, что геодезические не проникают через поверхность (I0) и предотвращается коллапс.

Поступила 3.II.1988 ЗакНИГМИ

Литература

I. G.Sardanashvili, M.Gogberashvili. Mod. Phys. Lett., 1987, v.2, 609
2. G.Sardanashvili, M.Gogberashvili. Ann. Phys., 1986, v.45, N7, 297.
3. М.Я.Гогберашвили. Труды ТГУ, серия физики, т.25, 1988.
4. Г.А.Сарданашвили, М.Я.Гогберашвили. Изв. вуз-ов, №3, 71, 1988.
5. М.Я.Гогберашвили. Труды ТГУ, серия физики, т.26, 1988.
6. Д.Д.Иваненко, П.И.Пронин, Г.А.Сарданашвили. Калибровочная теория гравитации.-М.:Изд-во МГУ, 1985.
7. В.Н.Пономарев, А.О.Барвинский, Ю.Н.Обухов. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравита-

ционных взаимодействий.-М.: Энергоатомиздат, 1985.
8. А.Кадич, Д.Эделен. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций.-М.: Мир, 1987.
9. С.Хокинг, Дж.Эллис. Крупномасштабная структура пространства-времени. - М.: Мир, 1977.
10. C.Teitelboim. Phys. Rev., 1982, V. D25, 2645.

მ. გოგბერაშვილი

ტრანსლაციის კალიბრული ველი და გრავიტაციული სინგულარობის პრობლემა

რეზიუმე

შრომაში ნაპოვნია ტრანსლაციის კალიბრული ველის განტოლებების სფერულ-სიმეტრიული ამოხსნა. ეს ამოხსნა შეიცავს შვარცშილდის სფეროს შიგნით მოთავსებულ მატერიისათვის შეუღწევად სინგულარულ ზედაპირს. რადგან ტრანსლაციის კალიბრული ველი შედის მეტრიკულ ტენზორში გრავიტაციულ ველთან ერთად, ამიტომ იხსნება სინგულარობის პრობლემა.

M.Gogberashvili

TRANSLATION GAUGE FIELD AND THE GRAVITATION SINGULARITY PROBLEM

Summary

The spherical-symmetric solution of translation gauge field equations has been found in this paper. This solution contains the singular surface disposed inside the Schwarzschield sphere and impenetrable to matter. Therefore, since the translation gauge field is a part of the metric tensor, along with the gravitational field, the problem of singularity is removed.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, I989

РАСЧЁТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПРИ МЕЖДОЛИННОМ ПЕРЕНОСЕ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАТЕРИАЛАХ ТИПА $Ga_{1-x}Al_xAs$ В СЛУЧАЕ СТРИМИНГА В ТЯЖЁЛОЙ ДОЛИНЕ

Г.Э.Дзамукашвили

Хорошо известно, что частотный потолок существующих активных приборов, основанных на междолинном переносе (МП) горячих электронов (ГЭ) (диодов Ганна) составляет около I50-200 ГГц, что связано с соответствующим частотным пределом отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП) при междолинном переносе ГЭ. С другой стороны (см., напр., /I,2/), с увеличением электрического поля можно увеличить предельную частоту ОДП. Прямое исследование условий возникновения ОДП при междолинном переносе в субмиллиметровой области проведено в работах /3,4/, хотя рассмотрение высокочастотных свойств электронов при МП (проводимости и флуктуации тока) проведено и несколько раньше /5-7/. В /3,4/ исследована упрощенная модель баллистического (динамического) междолинного переноса в материалах типа $Ga_{1-x}Al_xAs$, без учёта рассеяния электронов в нижней (Г) долине и разогрева электронов в верхних (Х) долинах в предположении, что время междолинного Г→Х рассеяния $\tau_0 \to 0$. Динамические характеристики электронов Г-долины имеют в этом случае ряд интересных особенностей. В частности, в некоторых условиях в этой модели можно получить области ОДП на частотах порядка 3000 ГГц. Полученные в этих работах результаты относятся исключительно только к электронам Г-долины. В них также была отмечена необходимость учёта разогрева и проводимости электронов Х-долины.

В /8,9/ показано, что при определенных условиях в твердом растворе $Ga_{1-x}Al_xAs$ распределение электронов Х-долины носит стриминговый характер. В работе /10/ приведены результаты теоретического исследования дифференциальной проводимости (ДП) с учётом стримингового распределения электронов Х-долины. Там же приведены результаты прямого численного моделирования высокочастотной ДП методом Монте-Карло в модели, используемой в аналитических расчётах.

В настоящей работе приведен аналитический расчет дифференциальной проводимости при одновременном учете баллистического разогрева электронов в Г-долине и стриминга в Х-долине и получены выражения ДП в отдельных долинах. Кроме этого, будет рассмотрено влияние конечной величины времени междолинного Г-Х рассеяния на ВЧ характеристики.

1. Модель и система кинетических уравнений.

Предлагаемая модель такая же, что в работе /10/, т.е. предположим: 1) в Г-долине разогрев электронов до энергии начала междолинного перехода ε_0 является баллистическим; 2) температура кристалла низкая, так что междолинный переход идет лишь за счет спонтанного излучения междолинного фонона с энергией $\hbar\omega^*$; 3) в Х-долинах имеется стриминг, т.е. основным процессом является спонтанное излучение междолинных X-X фононов (с характерным временем τ_0), время ускорения электронов X-долины от $\varepsilon = \varepsilon_x$ до $\varepsilon = \varepsilon_x + \hbar\omega^*$ $-\tau_+$ мало (ε_x - энергия минимума X-долины) по сравнению с временами междолинного X→Г рассеяния ($\tau_{x\Gamma}$) и рассеяния на акустических фононах внутри X-долины (τ_x^a):

$$\tau_0 \approx \tau_x \ll \tau_+ = \left(\frac{eE_0}{P_+}\right)^{-1} \ll \tau_{x\Gamma}, \tau_x^a. \qquad (I)$$

Здесь $P_+ = \sqrt{2m_x^* \hbar\omega^*}$, m_x^* - эффективная масса электрона в X-долине, τ_0 - время Г→X перехода, E_0 - напряженность постоянного электрического поля, e - заряд электрона. В пределе $\tau_0 = \tau_x \to 0$ электроны Г- и X- долин, достигая энергий ε_0 , сразу испускают междолинный фонон, и, следовательно, их проникновение в область $\varepsilon > \varepsilon_0$ (величина проникновения $\Delta P \sim eE_0\tau_x$) будет мало. Поэтому, после междолинного Г→X и X→X′ рассеяния электроны перейдут на дно X-долины.

Схема междолинных переходов в этих условиях показана на рис.I, на котором видны две группы электронов А и Б, имеющие различные времена пролета нижней долины:

$$\tau_E^A = \left(\frac{eE_0}{P_0 + P_1}\right)^{-1}, \quad \tau_E^Б = \left(\frac{eE_0}{P_0 - P_1}\right)^{-1},$$

причем $\tau_E^A \gg \tau_E^Б$ при $\varepsilon_x \gg \hbar\omega^*$ и $\tau_E^A \approx \tau_E^Б$ при $\varepsilon_x \approx \hbar\omega^*$ $P_1 = \sqrt{2m_\Gamma^* \varepsilon_1}$, $P_0 = \sqrt{2m_\Gamma^* \varepsilon_0}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \hbar\omega^*$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \hbar\omega^*$, m_Γ^* - эффективная масса электрона в Г-долине.

Исследование ВЧ характеристик горячих электронов при динамическом междолинном переносе заслуживает особого интереса, так как на этом пути можно найти возможности продвижения предельной частоты ОДП в субмиллиметровом диапазоне электромагнитного спектра.

Для определения динамических характеристик электронов Г- и Х - долин воспользуемся решением системы линеаризованных кинетических уравнений для малых гармонических добавок к функции распределения (ФР) $f_{\Gamma\sim} = f^{o}_{\Gamma\sim} e^{i\omega t}$, $f_{x\sim} = f^{o}_{x\sim} e^{i\omega t}$ возникающих в переменном электрическом поле малой амплитуды $\vec{E}_{\sim} = \vec{E}^{o}_{\sim} e^{i\omega t}$ ($\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_{\sim}$, $E^{o}_{\sim} << E_o$; $f_x = f^{o}_x + f_{x\sim}$, $f_\Gamma = f^{o}_\Gamma + f_{\Gamma\sim}$; f^{o}_Γ и f^{o}_x ФР в долинах в постоянном электрическом поле). В указанных выше условиях система уравнений в продольном электрическом поле $\vec{E}_{\sim} \parallel \vec{E}_o \parallel \vec{z}_o$ принимает вид (ср./10/):

$$i\omega f^{o}_{x\sim}(\varepsilon^x) + eE_o \frac{\partial f^{o}_{x\sim}(\varepsilon^x)}{\partial P_z} + eE^{o}_{\sim} \frac{\partial f^{o}_x}{\partial P_z} = \qquad (2,a)$$

$$= I_{\sim}\delta(P^x) - \nu_1 f^{o}_{x\sim}(\varepsilon^x), \quad P^x < P_+, \quad \varepsilon^x = \varepsilon - \varepsilon_x,$$

$$i\omega f^{o}_{\Gamma\sim}(\varepsilon) + eE_o \frac{\partial f_{\Gamma\sim}(\varepsilon)}{\partial P_z} + eE^{o}_{\sim} \frac{\partial f^{o}_\Gamma(\varepsilon)}{\partial P_z} = \qquad (2,б)$$

$$= \nu_o \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_o}} f^{o}_{x\sim}(\varepsilon + \hbar\omega^*), \quad P < P_o,$$

где f^{o}_x и f^{o}_Γ удовлетворяют системе уравнений в постоянном $\vec{E}_o \parallel \vec{z}_o$ поле.

$$eE_o \frac{\partial f^{o}_x(\varepsilon^x)}{\partial P_z} = I_o\delta(P^x) - \nu_1 f^{o}_x(\varepsilon^x), \quad P^x < P_+, \qquad (3,a)$$

$$eE_0 \frac{\partial f_\Gamma^0(\varepsilon)}{\partial P_z} = \nu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}\, \bar{f}_x^0(\varepsilon+\hbar\omega^*), \quad P<P_0, \qquad (3,б)$$

$$\nu_1 = \tau_{x\Gamma}^{-1} = \frac{D_{\Gamma x}^2 (m_\Gamma^*)^{3/2}\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{2}\,\pi\hbar^3\rho\,\omega^*}, \quad \nu_0 = \nu_1\left(\frac{m_x^*}{m_\Gamma^*}\right)^{3/2},$$

$D_{\Gamma x}$ - константа взаимосвязи между Г- и Х-долинами, ρ - плотность образца, ω^* - частота междолинного фонона, I_0 , $I_\sim$ - постоянный и переменный источники в Х-долине, которые следует определить из условия сохранения полного числа частиц в долинах. $\bar{f}_x^0 = \int f_x^0(\vec{P})\, d\Omega/4\pi$ - зависящая только от энергии функция распределения, усредненная по телесному углу в пространстве импульсов. В уравнениях (2), (3) ε^x и P^x - энергия и импульс, отсчитанные от дна Х-долины, ε и P - отсчитаны от дна Г-долины.

2. Нахождение переменной функции распределения в приближении $\tau_0=0$, $\tau_x=0$.

Для решения системы (2) с использованием решений системы (3) представим стриминговую функцию в Х-долине в виде $f_x = \varphi_x \delta(1-\cos\theta)$, где θ - угол между направлениями импульса и электрического поля. Тогда получим:

$$f^0_{x\sim} = \frac{c_1}{x^3} \exp\left[-\left(i\frac{\omega}{\nu_+} + \frac{\nu_1}{\nu_+}\right)\cdot x\right], \quad \nu_+ = \tau_+^{-1}, \qquad (4)$$

где $x \equiv P^x/P_0$. C_1 определяется из условия неизменности полной концентрации электронов при междолинном рассеянии:

$$\int f^{o}_{\Gamma\sim} d^3P + \int f^{o}_{x\sim} d^3P = 0 \quad \text{или же} \quad n^{o}_{\Gamma\sim} + n^{o}_{x\sim} = 0$$

($n^{o}_{\Gamma\sim}$ и $n^{o}_{x\sim}$ – амплитуды переменных составляющих концентрации электронов в Г- и Х-долинах соответственно). C_1 пропорциональна $n^{o}_{x\sim}$:

$$C_1 = \frac{n^{o}_{x\sim}}{2\pi P_+^3} \cdot \frac{i\frac{\omega}{\nu_+} + \frac{\nu_1}{\nu_+}}{1-\exp\left(-i\frac{\omega}{\nu_+} - \frac{\nu_1}{\nu_+}\right)} . \tag{5}$$

В сильном поле основная доля электронов находится в Х-долине и можно положить $n^{o}_{x\sim}=0$ (справедливость этого положени доказать нетрудно), следовательно, в (2,б) можно опустить член с $f^{o}_{x\sim}$. В результате, амплитуда функции в Г-долине будет:

$$f^{A,Б}_{\Gamma\sim} = -\frac{E^{o}_{\sim}}{E_o} \cdot \frac{C_o}{2} \cdot \frac{\nu^*_o}{\nu^*_E} e^{-i\frac{\omega}{\nu_E}z} \int e^{i\frac{\omega}{\nu_E}z} \varphi(z, z_1)\, dz , \tag{6}$$

где $\nu^*_o = \nu_o\sqrt{\hbar\omega^*/\varepsilon_o}$, $\nu^*_E = eE_o/P^*$. $\nu_E = eE_o/P_o$ есть характерная частота пролета в Г-долине. В (6) C_o и $\varphi(z, z_1)$ определяются по формулам:

$$C_o = n_o\left[\mathcal{K} + \frac{\nu^*_o}{\nu^*_E}\,\frac{P_o^3}{2}\left(G^{A} + G^{Б}\right)\right]^{-1} ,$$

$$\varphi(z, z_1) = \left(z^2 - z_1^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\nu_1}{\nu_+}\sqrt{\frac{2}{1-\alpha^2}}\sqrt{z^2 - z_1^2}\right),$$

n_o – концентрация электронов в зоне проводимости, $P^* = \sqrt{2m_\Gamma^* \hbar\omega^*}$.

$$\mathcal{K} \equiv 2\pi P_+^3 \frac{\nu_+}{\nu_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{\nu_1}{\nu_+}\right)\right],$$

$$G^{A,Б} = 2\pi \int\limits_{\Sigma_{A,Б}} \left[\int\limits_{z'_{A,Б}}^{z} \varphi(z, z_1)\, dz\right] y\, dy\, dz$$

Здесь и везде ниже введены обозначения: $\Sigma_{А,Б}$ - область движения А-и Б-электронов в Г-долине на плоскости импульсов $(P_z, P_\perp)$, $z'_{А,Б}=P'_{А,Б}/P_0$, $P'_{А,Б}$ - начальная z компонента импульса при пролете Г-долины А,Б-электронов с данным $P_\perp$. $z=P_z/P_0$, $y=P_\perp/P_0$, $P_\perp=\sqrt{P_x^2+P_y^2}$, $z_1=\sqrt{\alpha^2-y^2}$. $\alpha=P_1/P_0$ - параметр, с помощью которого характеризуются пролетные условия А-и Б-электронов в Г-долине: при $\alpha\approx 1$ $\varepsilon_x \gg \hbar\omega^*$ и при $\alpha \ll 1$ $\varepsilon_x\approx\hbar\omega^*$, так что варьированием параметра α в интервале (0,I) можно менять соотношение между временами $\tau_E^А$ и $\tau_E^Б$.

3. Дифференциальная проводимость горячих электронов.

3 а. Проводимость в приближении $\tau_0=0$, $\tau_x=0$.

Тензор дифференциальной проводимости σ_{ik} в данной долине определяется выражением для тока:

$$j^0_{i\sim}=e\sum_\beta\int\frac{P_i}{m^*_\beta}f^0_{\beta\sim}d^3P=\sigma_{ik}E^0_{k\sim}, \tag{7}$$

где $f^0_{\beta\sim}$ - функция, найденная из решения системы (2). Подстановкой функций (4),(6) в (7), с учетом (5), получим выражения частотной зависимости продольной дифференциальной проводимости (в продольном поле) в отдельных долинах в квадратурной форме:

$$\sigma_Г^{А,Б}(\Omega)=-\frac{\sigma_0}{\alpha}\left(\frac{2}{1-\alpha^2}\right)^{1/2}\left(\frac{m_\Gamma^*}{m_x^*}\right)^{3/2}\frac{\nu_1}{\nu_+}\left(1-e^{-\frac{\nu_1}{\nu_+}}\right)\int z\left[e^{-i\Omega z}\times\right.$$

$$\times \int\limits_{z'_{Л,Б}}^{z} e^{i\Omega z} \varphi(z,z_1)dz\Big]ydydz, \qquad (8\,а)$$

$$\sigma_x(\Omega_+) = \frac{\sigma_0}{\alpha}\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{m_\Gamma^*}{m_x^*}\right)^{1/2}\frac{G_1}{I_1}\Big[e^{-Q_1}\left(\frac{-1}{Q_1^2}+\frac{1}{Q_1}\right) \qquad (8\,б)$$

$$+\frac{1}{Q_1^2}\Big]\frac{Q_1}{(1-e^{-Q_1})},$$

где $\quad Q_1 = i\Omega_+ + \frac{\nu_1}{\nu_+}, \quad \Omega_+ = \frac{\omega}{\nu_+} = \Omega\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{m_\Gamma^*}{m_x^*}\right)^{1/2}.$

$$G_1 = 2\pi\int\limits_{\Sigma_{Л,Б}}\exp(-i\Omega z)\Big[\int\limits_{z'_{Л,Б}}^{z}\exp(i\Omega z)\varphi(z,z_1)dz\Big]ydydz, \qquad (8в)$$

$$I_1 = 2\pi\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{m_x^*}{m_\Gamma^*}\right)^{3/2}\Big[1-\exp\Big(-i\Omega_+-\frac{\nu_1}{\nu_+}\Big)\Big]\Big(i\Omega_+ + \frac{\nu_1}{\nu_+}\Big)^{-1},$$

$\sigma_0 = \frac{e^2 n_x \nu_0}{2m_\Gamma^* \nu_E^2}$, n_x - концентрация электронов в Х-долине, $\Omega = \omega/\nu_E$ — безразмерная частота.

3.б. Влияние проникновения электронов в область $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ на динамической ОДП Г-долины.

В реальной ситуации $\tau_0 \neq 0$, поэтому следует учесть проникновение электронов в область $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$, и, следовательно, учесть вклад дифференциальной проводимости этой области в суммарную ДП Г-долины.

Для оценки этого вклада ограничимся только рассмотрением случая, когда электроны в Х-долине не разогреваются ($T'_x = 0$, T'_x -электронная температура в Х-долине) из-за их большой эффективной массы (такая модель предложена в /4/), так как вычисление дифференциальной проводимости области $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ с учетом разогрева в Х-долине ($T'_x \neq 0$) очень сложно, а качественного отличия учет $T'_x \neq 0$ дать не должен.

Основание на такое высказывание дает следующее обстоятельство: как показало исследование, в обоих случаях ($T_x \simeq 0$ и $T_x \neq 0$) ФР при $\varepsilon > \varepsilon_0$ имеет одинаковый экспоненциальный вид и могут отличаться только коэффициентами при экспоненте, которые мало отличаются друг от друга. По этой причине ДП в случаях $T_x \simeq 0$ и $T_x \neq 0$ не должны существенно различаться. Зато в случае $T_x \simeq 0$ наглядно можно интерпретировать влияние увеличения времени пролета электронов Г-долины (за счет проникновения в область $\varepsilon > \varepsilon_0$) на ДП в этой долине. Во-вторых, результаты модельных расчетов ДП при $T_x \simeq 0$ с учетом проникновения электронов в область $\varepsilon > \varepsilon_0$ согласуются с результатами моделирования методом Монте-Карло, проведенного недавно в работе /10/.

Уравнение в переменном поле $\vec{E}_\sim \parallel \vec{E}_0 \parallel \vec{z}_0$ для переменной функции в области $\varepsilon > \varepsilon_0$ – $f'_{\Gamma\sim}$ запишется в виде:

$$i\omega f'_{\Gamma\sim} + eE_0 \frac{\partial f'_{\Gamma\sim}}{\partial P_z} = -eE^0_\sim \frac{\partial f'_\Gamma}{\partial P_z}, \qquad (9)$$

где f'_Γ – функция, удовлетворяющая уравнению в постоянном поле:

$$eE_0 \frac{\partial f'_\Gamma}{\partial P_z} = -\nu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}}\, f'_\Gamma .$$

В отличие от статической функции (которая имеет одинаковый вид для обоих групп электронов), уравнение (9) в области $\varepsilon > \varepsilon_0$ имеет разные решения для А- и Б-электронов, потому что константа, появляющаяся при решении уравнения (9) определяется из условий непрерывности функции $f_{\Gamma\sim}$ на границе $\varepsilon = \varepsilon_0$, а функции А-и Б-электронов в области

$\mathcal{E} > \mathcal{E}_o$ разные и при $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o$ они имеют разные фазы. Из-за того, что $f'^{A}_{\Gamma\sim}$ и $f'^{Б}_{\Gamma\sim}$ разные, разные будут и вклады А- и Б-электронов в Д_ области $\mathcal{E} > \mathcal{E}_o$, которые обозначим через σ'_A и $\sigma'_Б$:

$$\sigma' = \sigma'_A + \sigma'_Б, \quad \sigma'_A = \sigma''_A + \sigma_2, \quad \sigma'_Б = \sigma''_Б + \sigma_2,$$

где σ''_A, $\sigma''_Б$ и σ_2 выражаются функциями:

$$\sigma''_A = -\frac{\sigma'_o}{2\alpha} \int\limits_{\varepsilon > \varepsilon_o} \varphi(z, z_o) \cos[\Omega(y + z_1)] \frac{yz}{z_1} dz\,dy, \tag{10 а}$$

$$\sigma''_Б = -\frac{\sigma'_o}{2\alpha} \int\limits_{\varepsilon > \varepsilon_o} \varphi(z, z_o) \cos[\Omega(y - z_1)] \frac{yz}{z_1} dz\,dy, \tag{10 б}$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma'_o \xi}{2\alpha} \int\limits_{\varepsilon > \varepsilon_o} \varphi(z, z_o) \Big[\cos(\Omega z) \int\limits_{z_o}^{z} \sqrt{z^2 - z_o^2}\, \cos(\Omega z) dz + \sin(\Omega z) \int\limits_{z_o}^{z} \sqrt{z^2 - z_o^2}\, \sin(\Omega z) dz\Big] dz\,dy. \tag{10 в}$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi(z, z_o) = z_o^{-\frac{z_o^2}{2}\xi} \left| z + \sqrt{z^2 - z_o^2} \right|^{\frac{z_o^2}{2}\xi} \exp\left(-\frac{\xi}{2} z \sqrt{z^2 - z_o^2}\right),$$

$z_o = \sqrt{1 - y^2}$, $\xi = \nu_o / \nu_E$ – отношение частоты Г→Х перехода к пролетной частоте в Г-долине, $\sigma'_o = e^2 n_x \nu_1 / m^*_\Gamma \nu_E^2$.

4. Обсуждение возможности динамической ОДП.

На рис. 2,3 показаны частотные зависимости реальной части дифференциальной проводиомсти в $Ga_{1-x}Al_xAs$ в отдельных долинах при разных энергетических зазорах $\mathcal{E}_x$

между долинами (при разных x). Параметры зонной структуры твердого раствора, при которых построены зависимости $\sigma(\omega)$, приведены в таблице I.

Таблица I.

α	x	$\frac{\varepsilon_x}{\hbar\omega^*}$	ε_x (эВ)	$\hbar\omega^*$ (эВ)	$D_{\Gamma x}\cdot 10^{-8}$ (эВ/см)	$\frac{m^*_\Gamma}{m_0}$	$\frac{m^*_x}{m_0}$
I	2	3	4	5	6	7	8
0,I	0,39	I,02	0,033I	0,0325	7,304	0,0995	0,3955
0,8	0,30	4,45	0,I409	0,03I7	5,682	0,09I9	0,3985
0,9	0,I7	9,53	0,290I	0,0305	4,08I	0,808	0,403

Дифференциальная проводимость в образце есть сумма проводимостей в отдельных долинах $\sigma(\omega)=\sigma_x(\omega)+\sigma_\Gamma(\omega)$, причем вклады А и Б групп электронов в ДП Г-долины аддитивны в рассмотренном случае сильных полей $[\sigma_\Gamma(\omega)=\sigma_A(\omega)+\sigma_Б(\omega)]$. Для интерпретации возникновения ОДП в Г-долине на рисунках приведены отдельные вклады А-и Б-электронов.

Важным параметром, определяющим ДП Х-долины, является параметр $Q\equiv\nu_+/\nu_1$, т.н. "добротность" стриминга. В случае $Q>>1$ в X-долине стриминг явно выражен и $\mathcal{E}_x(\omega)$ на частотах, кратных частоте пролета X-долины (т.е. при $\Omega_+ = \omega/\nu_+ = 2\pi n$) имеет пики как в отрицательной, так и в положительной области (см.формулу (8 б) с учетом (8 в)). При $Q \gtrsim 1$ пики уменьшаются и при $Q<1$ исчезают. Величина пиков с ростом частоты уменьшается пропорционально ω^{-1}.

Вышерассмотренная пролетная ОДП в X-долине аналогична ОДП, исследованной в работах /II-I4/ для простой зоны. Следует отметить, что в нашем случае (в отличие от /II-I3/) области ОДП остаются и для идеального стриминга (когда $\tau_x = 0$) и оказываются связанным здесь с конечным значением добротности Q из-за X→Г рассеяния (ср./I4/, где рассматривается влияние упругого рассеяния на пролетную ОДП в простой зоне). Значение добротности Q меняется с изменением электрического поля и изменением ν_1 . Последнее меняется с изменением состава твердого раствора, т.к. параметры, входящие в его выражение, зависят от x /I5/. Пролетная частота и, следовательно, частота, соответствующая ОДП, пропорциональна E_0 , но увеличение поля (и пропорциональное ему увеличение предельной частоты ОДП) ограничено в основном следующими обстоятельствами: нарушением условий (I) при больших полях и уменьшением величины ДП при увеличении E_0 ($\mathcal{E}_0 \sim n_x(E_0)/E_0^2$; n_x с увеличением поля увеличивается слабее, чем линейно, поэтому спад $\mathcal{E}_0$ с ростом E_0 заметный). С увеличением поля увеличивается проникновение электронов Г-долины за энергию $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Такое проникновение удлиняет время пребывания электронов в Г-долине и, следовательно, дает положительный вклад в проводимость. Это проникновение и проникновение электронов X-долины за энергию $\mathcal{E}^{x} = \hbar\omega^{*}$ нарушают условия пролетного резонанса, что является дополнительным препятствием для возникновения ОДП в X-долине на пролетной частоте.

Влияние проникновения электронов Г-долины за энергию $\mathcal{E}_o$ на дифференциальную проводимость продемонстрировано на рис.4 при одном значении $\mathcal{E}^{c}_{x}$. В пределе, когда $\tau_o \to 0$, выполняются условия σ''_A, σ''_B, $\sigma_2 \to 0$, но при конечной величине τ_o они отличаются от нуля. В частности, на частотах, где имеются динамическая ОДП, σ' положительна и по абсолютной величине преобладает над отрицательной ДП, в результате чего динамическая ОДП исчезает.

Приведенные в настоящей работе результаты поясняют механизм возникновения динамической ОДП при междолинном переносе горячих электронов в материалах типа $Ga_{1-x}Al_xAs$ в условиях стриминга в X-долине и указывают на условия, препятствующие появлению такой ОДП. По-видимому, наиболее вероятным путем поиска по созданию субмиллиметровой ОДП был бы поиск материалов, в которых вышеуказанные факторы, мешающие появлению ОДП, были бы слабы. Например, следует искать материалы, в которых будет слабая связь электронов с оптическими фононами внутри нижней долины и сильная связь между нижней и верхними долинами.

Кафедра физики твердого тела

Поступила I6.09.I988

Литература

1. H.D.Rees. IBM J. Res. Dev., 13, 5, 537, 1969.
2. H.Kroemer. Sol. St. Electron., 21, 1, 61, 1978.
3. А.А.Андронов, Г.Э.Дзамукашвили. В кн. Инвертированные распределения горячих электронов в полупроводниках. Горький, 1983, 187.
4. А.А.Андронов, Г.Э.Дзамукашвили. ФТП, 19, 10, 1810, 1985.
5. G.Hill, P.Robson, W.Fawsett. J.Appl. Phys., 50, 1, 356, 1979.
6. R.Q. Grondin, P.A.Blackey, J.R.East, E.D.Rothman IEEE Trans., ED-28, 8, 914, 1981.
7. Р.Рагуотис, А.Реклайтис. ФТП, 15, 8, 1564, 1981.
8. Г.Э.Дзамукашвили. Труды Тбилисского ун-та, физика, 18, 123, 1985.
9. Г.Э.Дзамукашвили, З.С.Качлишвили, К.В.Кобахидзе. Сообщ. АН ГССР, 123, 3, 517, 1986.
10. А.А.Андронов, Г.Э.Дзамукашвили, З.С.Качлишвили, И.М.Нефёдов. ФТП, 21, 10, 1813, 1987.
11. В.Л.Бонч-Бруевич, М.А.Эль-Шарнуби. Вестн. МГУ, сер.3, 13, 616, 1972.
12. А.А.Андронов, В.А.Козлов. Письма ЖЭТФ, 17, 9, 124, 1973.
13. Ю.В.Гуляев, И.И.Чусов. ФТТ, 20, 9, 2637, 1978.
14. А.Матулис, А.Чёнис. ЖЭТФ, 77, 3, 1134, 1979.
15. S.Adachi. J.Appl. Phys., 58, 3, R1, 1985.

გ. ძამუკაშვილი

დიფერენციალური გამტარებლობის გამოთვლა ცხელი ელექტრონების მინიმუმთაშორისი გადასვლებისას $Ga_{1-x}Al_xAs$-ის ტიპის მასალებში მძიმე მინიმუმში სტრიმინგის დროს

რეზიუმე

ნაშრომში მოყვანილია დიფერენციალური გამტარებლობის თეორიული კვლევის შედეგები ცხელი ელექტრონების მინიმუმთაშორისი გადასვლებისას $Ga_{1-x}Al_xAs$-ის ტიპის მასალებში. განხილულია ისეთი მოდელი, როდესაც ერთდროულადაა გათვალისწინებული ელექტრონების ბალისტიკური გაცხელება "მსუბუქ" მინიმუმში და სტრიმინგი "მძიმე" მინიმუმში. მიღებული თითოეულ მინიმუმში დიფერენციალური გამტარებლობის გამოსახულება. განხილულია მინიმუმთაშორისი გადასვლების სასრული დროის გავლენა ელექტრონების მაღალსიხშირულ მახასიათებლებზე.

G. Dzamukashvili

THE DIFFERENTIAL CONDUCTIVITY CALCULATIONS DURING INTERVALLEY TRANSFER OF HOT ELECTRONS IN $Ga_{1-x}Al_xAs$ TYPE MATERIALS IN THE CASE OF STREAMING IN HEAVY VALLEY

Summary

The results of differential conductivity (DC) during intervalley transfer of hot electrons in $Ga_{1-x}Al_xAs$ type materials had been investigated theoretically. The model of simultaneous calculation of ballistic heating of electrons in "light" valley and streaming in "heavy" valley is discussed. The DC expressions for separate valleys have been obtained. The influence of valley dispersion time finite value on high frequency electron characteristics is discussed.

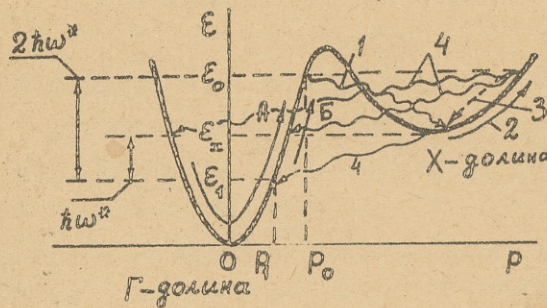


Рис.I. Схема междолинных переходов в двухдолинной модели в полупроводниках типа $n\text{-}Ga_{1-x}Al_xAs$ в случае стриминга в тяжёлой долине.
А,Б - свободное (баллистическое) движение А и Б-электронов в Г-долине; I - переход Г $\to$ Х, 2 - ускорение в пассивной области Х-долины, 3 - рассеяние на Х - Х$'$ фононах, которое сведено до рассеяния внутри Х-долины, 4 - переход Х $\to$ Г.

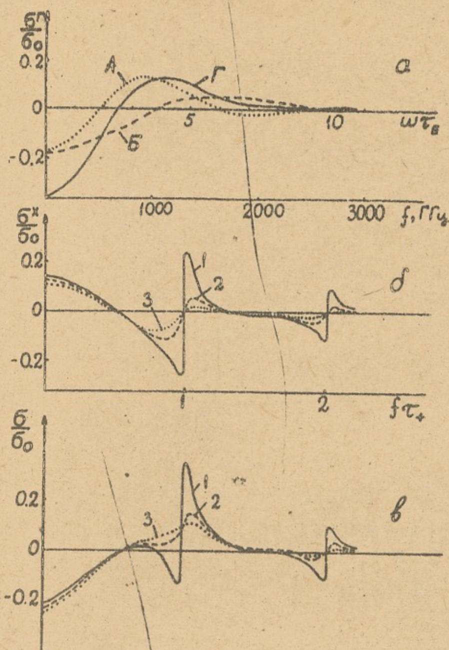


Рис.2. Продольная ДП при $\alpha = 0,1$ ($\mathcal{E}_x = 1.02\hbar\omega^*$) в случае стриминга в Х-долинах. а) ДП в Г-долине (А, Б – вклады А и Б-электронов, Г – их сумма); б) ДП в Х-долине; в) суммарная ДП в образце. Q^{-1}: 1– 0,2; 2– 0,6; 3– 1,0. Частоты f взяты при E_o =5 кВ/см. $\sigma_o = e^2 n_x \nu_o / 2m_r^* \nu_E^2$; $\tau_+ = p_+ / eE_o$.

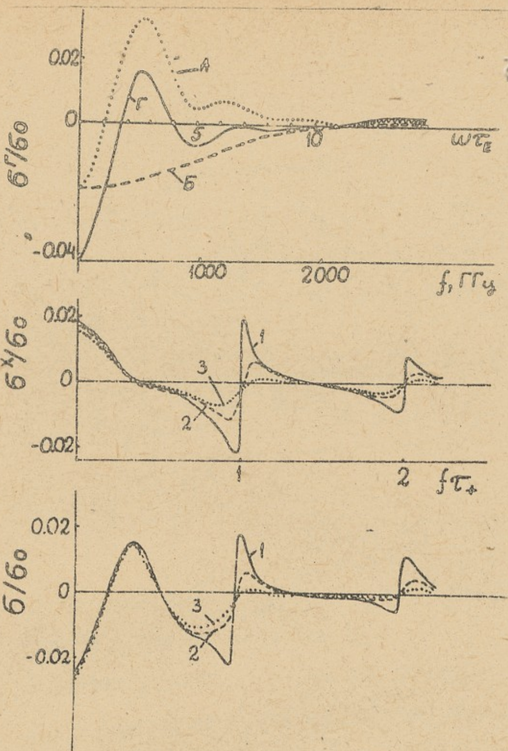


Рис.3. Продольная ДП при $\alpha=0{,}8$($\mathcal{E}_X = 4{,}5\,\hbar\omega^*$) в случае стриминга в X-долинах. а)ДП в Г-долине;(А,Б - вклады А и Б-электронов,Г - их сумма); б) ДП в X-долине; в) суммарная ДП в образце. Q^{-1}:I - 0,3; 2 - 0,5; 3 - I,0. Частоты f взяты при $E_0 = 5$ кВ/см.

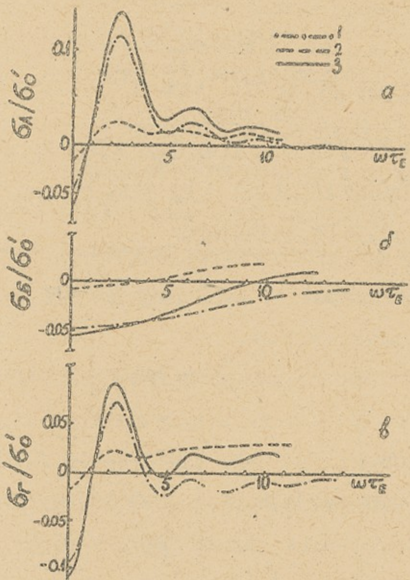


Рис.4. Продольная ДП с учётом проникновения электронов Г-долины за энергии $\mathcal{E}_0$ в случае $T_x \simeq 0$ при $\alpha = 0{,}9$ ($\mathcal{E}_x = 10\,\hbar\omega^*$). а) проводимость А-электронов; б) проводимость Б-электронов; в) суммарная ДП в Г-долине. I – ДП без учёта проникновения электронов за $\mathcal{E}_0$

2 – проводимость только области $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$,

3 – сумма вкладов областей $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$.

$\mathcal{D}_{\Gamma X} = 1{,}5 \cdot 10^9$ эВ/см. $E_0 = 5$ кВ/см. $\sigma_0' = e^2 n_x \nu_1 / (m_\Gamma^* \nu_E^2)$.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

286, 1989

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КАЧЕСТВЕННОЙ И КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ДЛЯ ТЕРРИТОРИИ ЦЕРОВАНИ-ДЗАЛИСИ-НАТАХТАРИ

Г.Д.Манагадзе, Н.К.Качахидзе, Р.Г.Манагадзе

Карталинская депрессия, часть которой составляет изучаемая территория (Церовани-Дзалиси-Натахтари), считается одной из перспективных районов для описков и разведки промышелнных скоплений нефти и газа /2,3,5/. На этой территории структуры, содержащие залежи нефти и газа, пока еще не открыты, но выделяются нефтегазоносные структуры, среди которых заслуживают внимания эоценовые отложения.

Ввиду того, что основные геологические структуры исследуемой территории покрыты почти горизонтальными, слабо дислоцированными, посттретичными осадочными породами, только геологическим методом изучение распределения более древних пород и составление ясного представления об их структурных формах очень затруднено.

О плотностной характеристике этого района, которая считается необходимым элементом при количественной интерпретации аномалии силы тяжести, можно судить по Бицминдской опорной скважине, пробуренной до 1716 м. По данным этой скважины миоцен-плиоценовые отложения распространяются до глубины 410 м, верхне-миоценовые-до 1410 м, миоцен-плиоценовые начинаются с глубины 1410 м. На глубине 1716 м бурение прекращено, и сведений об изменении плотности залегающих ниже этой глубины структур не имеется.

В настоящей работе дана попытка приближенной оценки кровли эоценовых отложений гравиметрическим методом на основе измеренных данных поля Δg и геолого-геофизической изученности /2,3,5,6,7,8/ отдельных участков исследуемой территории и смежных с ней районов.

I. Некоторые результаты количественной и качественной интерпретации по "профильному" варианту трансформации поля Δg

Для количественной интерпретации поля Δg, с целью определения рельефа эоценовых отложений на исследуемой площади, были проведены четыре профиля (I, II, III, IУ) (рис.2). Из них первые два (I, II) совпадают с сейсмо-геологическими профилями из работы /6/, а III и IУ были проведены в крест простирания изолиний аномалий силы тяжести.

Для выделения из наблюдаемого поля Δg локальных особенностей, связанных с неоднородным строением осадочного комплекса, по этим профилям были вычислены трансформанты $F[\Delta g]$ по "профильным" вариантам формулы Андреева-Гриффина /1/ и по параболической функции /4/. Вычисления велись для различных значений параметра трансформации S.

Из упомянутых четырех профилей здесь приведены результаты качественной и количественной интерпретации по сейсмо-геологическому профилю III (рис.2), простирающемуся с юга-запада на северо-восток, севернее населенного пункта Мухрани. Протяженность профиля 25 км.

Трансформированные кривые $F[\Delta g]$, вычисленные по этому профилю (рис.I), были применены для приближенного представления рельефа эоценовых отложений вдоль профиля и для определения центра тяжести аномальных масс Дзалисской грабенной структуры.

Для количественной оценки глубины h центра тяжести по кривой $F[\Delta g]$, составленной при S =I км (участок профиля CD, кривая I), определив абсциссу X_0 нулевого значения функции $F[\Delta g]$ (равна 2,72 км), на основе формулы $h=\sqrt{3x_0^2-s^2}$ /I/ получаем h =4,6км

Когда параметр трансформации S =2 и 3 км для X_0 имеем 2,70 и 2,88 км соответственно, и для глубины центра тяжести грабенной структуры будем иметь 4,3 и 4 км. За оптимальное значение центра тяжести берется среднее значение h_1 =4,3 км.

Таким образом, определив глубину центра тяжести аномальных масс Дзалисской структуры,что было достигнуто благодаря ее уподоблению горизонтальному круговому цилиндру, верхняя образующая которого совпадает с древней поверхностью Земли,, дальше можем определить глубину залежи нижней образующей цилиндра:

$$h_2=2R=8,6 \text{ км.}$$

Аналогично этому примеру определения глубины центра тяжести на участке профиля DE при S=I,2 и 3 км для среднего значения центра тяжести аномальных масс антиклинарной структуры получено h_1=3,3 км, а для средней глубины залежи фундамента в этой части профиля будем иметь 5,6 км.

По разности глубин центров тяжести можем оценить величину смещения структур на участках профиля CD и DE, т.е.

$$d=4,3-3,3=I \text{ км},$$

Кроме того, до участка АВ этого же профиля, как это видно из кривой Δg (рис.I.а), наблюдается довольно интенсивное воздымание глубинных структур осадочного комплекса, а на участке EF - их постепенное погружение.

Результаты качественной и количественной интерпретации приведены на рис.5.

2. Некоторые результаты качественной интерпретации по "площадной" трансформации.

Трансформированные карты гравитационных аномалий по "площадным" вариантам трансформации были вычислены по методу Андреева-Гриффина при значении параметра трансформации I,2,3 км (рис.2,3,4). Анализ этих карт позволил наметить структурные нарушения (нулевые изолинии) в осадочном комплексе и оконтурить отдельные локальные структуры, а их сравнение - проследить за распространением отдельных локальных структур с глубиной.

Кроме того, опираясь на результаты сейсмо-геологической изученности исследуемого участка /6/ и смежных с ним районов /2,3,5,7 и 8/, на характер изменения поля Δg (рисунок не приводится) и на результаты интерпретации по профилям III (рисунки I а, I в) и IУ, получили возможность построить рельеф эоценовых отложений исследуемой площади (рис.6).

Поступила 20.IX.I988 Кафедра геофизики

Литература

I. Б.А.Андреев, И.Г.Клушин. Гостоптехиздат, 495 с., I962.
2. Д.А.Булейшвили. Гостоптехиздат, 84 с., I960.
3. Е.К.Вахания, А.И.Русадзе. Ф-ы ГПК ПО Грузнефть, I04 с., I983.
4. Р.Г.Манагадзе. Научные труды ГПИ, № II(28I), с.88-92, I984.
5. Д.Ю.Папава, В.П.Агеев. Ф-ы ГПК ПО Грузнефть, I24 с., I960.
6. Г.И.Санадзе и др. Ф-ы ГПК ПО Грузнефть, I46 с., I986.
7. О.А.Сепашвили. Ф-ы ГПК ПО Грузнефть, 74 с., I980.
8. Е.Ш.Шенгелая. Мецниереба, I78 с., I968.

გ. მანაგაძე, ნ.კაჭახიძე, რ.მანაგაძე

სიმძიმის ძალის ანომალიის ხარისხობრივი და რაოდენობრივი ინტერპრეტაციის ზოგიერთი შედეგი წეროვანი - ძალისი - ნატახტარის ტერიტორიისათვის

რეზიუმე

წინამდებარე ნაშრომში წეროვანი - ნატახტარი - ძალისის ტერიტორიის ეოცენური წყების ჩაწოლის სიღრმისა და რელიეფის დასადგენად გამოყენებულ იქნა გრავიტაციული ველის Δg ანომალიის ტრანსფორმირებული რუკები.

ტრანსფორმირებული რუკები აგებულია ანდრეევ - გრიფინის, საქსოვ - ნიგაარდის, როზენბახისა და კვადრატული პარაბოლური მეთოდებით.

ტრანსფორმირებულ რუკებზე გამოვლენილი ანომალიების ურთიერთშეჯერება და ანალიზი საშუალებას გვაძლევს მივუთითოთ უბანი, სადაც მომავალში მიზანშეწონილი იქნება დაიდგას საძიებო ჭაბურღილი.

G.Managadze, N.Kachakhidze, R.Managadze

SOME RESULTS OF A QUALITATIVE AND QUANTITATIVE INTERPRETATION OF THE GRAVITY ANOMALY FOR THE TSEROVANI-DZAZLISI-NATAKHTARI

Summary

Transformed maps of the Δg anomaly of the gravity field have been used to determine the depth of occurrence and relief of the Eocene suite in the Tserovani-Natakhtari-Dzalisi area.

The transformed maps were compiled by the methods of Andreev-Griffin, Saxov-Nigaard, Rosenbach, and by the square parabolic technique.

A comparison and analysis of the anomalies found on the transformed maps will permit to indicate the site where a prospecting borehole may be sunk in the future.

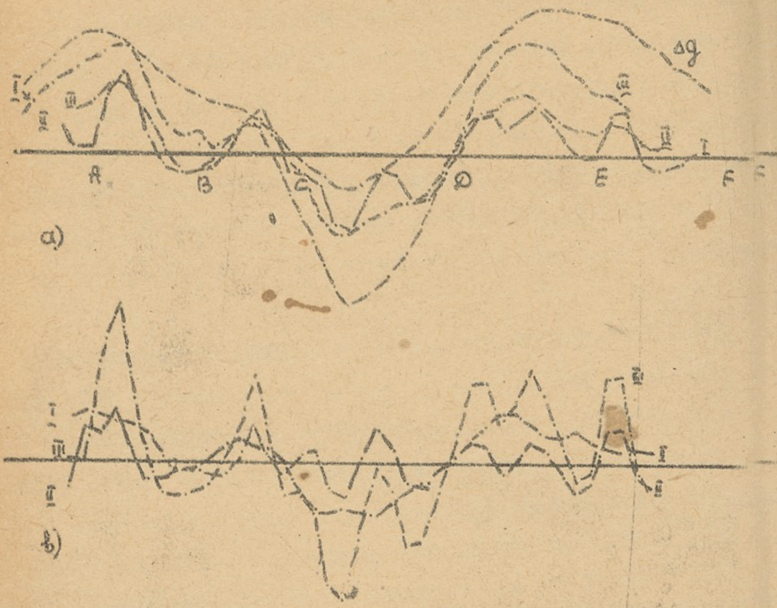


Рис. I. Кривые $F[\Delta g]$ по профилю Ш, построенные по формулам: Андреева-Гриффина (рис.Iа), Розербаха (рис.Iв,П), Саксова-Нигарда (рис.Iв,I) и параболической функции (рис.Iв,Ш).

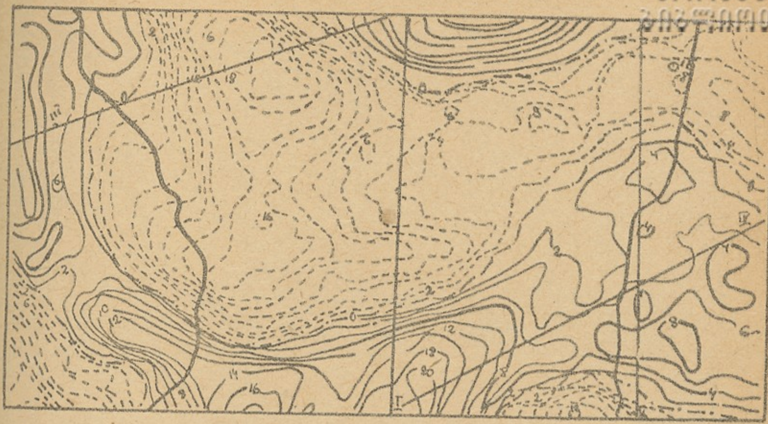


Рис.2. Схема трансформированной аномалии силы тяжести Церовани-Дзалиси-Натахтарской площади; аномалии вычислены по формуле Саксова-Нигарда, при $S = 1$ км.

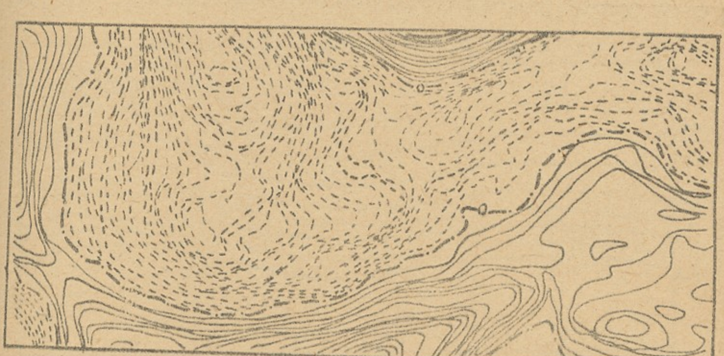


Рис.3. Схема трансформированной аномалии силы тяжести Церовани-Дзалиси-Натахтарской площади, аномалии вычислены по формуле Андреева-Гриффина, при $S = 2$ см.

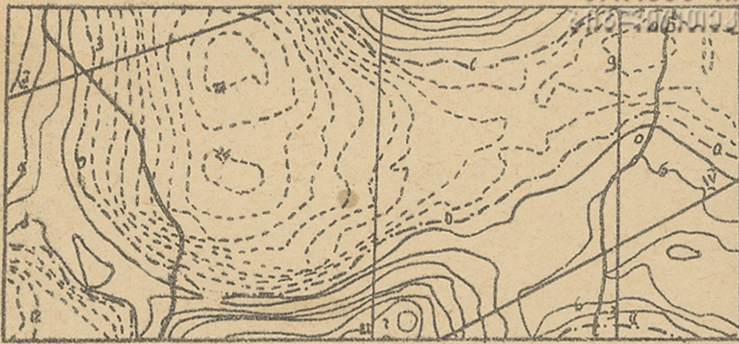


Рис.4. Схема трансформированной аномалии силы тяжести Цероп ни-Дзалиси-Натахтарской площади, аномалии вычислены по формуле Саксова-Нигарда, при S = 3км.

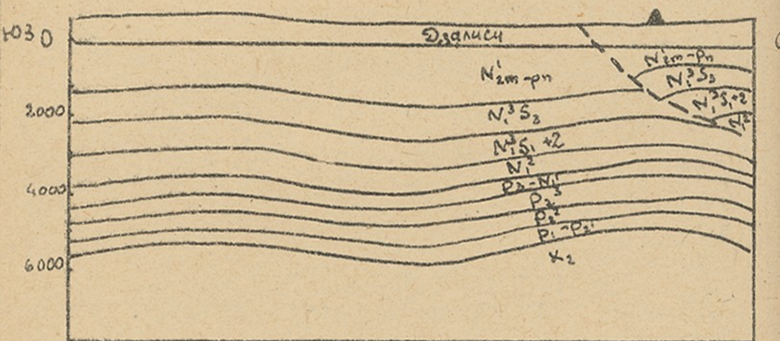


Рис.5. Разрез осадочного комплекса по профилю Ш, составленного на основе грави-геолого-сейсмометрических данных.

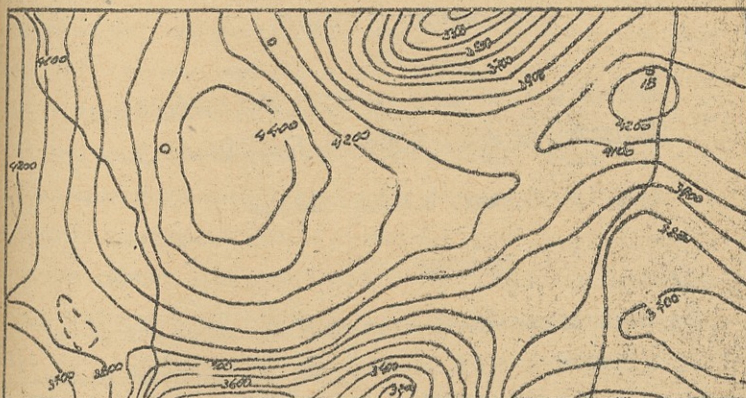


Рис.6. Схема рельефа верхнеэоценовых отложений, составленная на основе грави-геолого-сейсмометрических данных Церовани-Дзалиси-Натахтарской площади.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

286, 1989

НЕКОТОРЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ РАСЧЕТОВ ЭКСКЛЮЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ С ПОМОЩЬЮ REDUCE-3

Я.З.Дарбаидзе, З.В.Меребашвили

§ I. Введение

Изучение эксклюзивных процессов /I/ имеет важное значение для получения полной информации из процессов рассеяния высокоэнергетических частиц. В моделях квантовой теории поля для подобных расчетов в высших порядках теории возмущений (ТВ) необходимо привлечь методы систем аналитических вычислений (САВ) /2/.

За последние десять лет накопилось /3-5/ много ярких примеров /6/ удачного использования САВ SCHOONSCHIP /7/ и REDUCE-2 /8/ в расчетах высших порядков ТВ. Эти системы хорошо приспособлены к вычислениям по физике высоких энергий, но особенного усовершенствования достигла система REDUCE-3 /9/. Своей универсальностью она обязана базовому языку программирования ЛИСП /10/, хорошо известному в теории искусственного интеллекта ЭВМ /II/, и в последнее время подвергается интенсивному развитию в исследованиях пользователей (см., например, /I2-I4/).

С целью иллюстрации некоторых возможностей системы

REDUCE-3, мы хотели бы привести ниже опыт расчета калибровочно - инвариантного набора диаграмм Фейнмана в эксклюзивных процессах (2→3) рассеяния партонов в моделях суперсимметричной квантовой хромодинамики (СКХД) /I5/. Некоторые полезные советы для расчета диаграмм Фейнмана имеются в работах /I6/. Отметим, что уже в α^3 порядке ТВ СКХД суммирование квадратов амплитуд калибровочно - инвариантного набора диаграмм (т.е. математически - рациональных полиномов от 5 независимых переменных) сводится к огромному выражению, но, благодаря интересной физике изучаемых процессов/I7/, происходит сокращение большого числа общих множителей и факторизация окончательного результата. Важно подчеркнуть, что факторизация, приводящая к компактному ответу, является строгим критерием правильности результата. Поскольку мелкие механические ошибки могут привести к катастрофически большим неправильным выражениям, весьма желательно исключить ручной труд. Например, включать в блок Физики Высоких Энергий программу генерации диаграмм /I8/, алгоритм расчета групповых факторов /I9/ и т.д. Эти замечания особенно важны для получения разумных результатов в α^4 порядке ТВ и выше. Например, хотя в работах /20/ проведено обобщение формул расчета квадрированных амплитуд для КХД (2→3) процессов на случай (2→n), однако из-за отмеченных проблем они не проверены с помощью САВ на ЭВМ даже в α^4 порядке ТВ. В связи с этим особый интерес представляют собой точные расчеты калибровочно-инвариантного набора древесных диаграмм в α^5 порядке ТВ (процессы (5→5), (6→6) и т.д.), которые прямо связаны с т.н. "правилами кваркового счета" /2/. Этой проблеме была посвящена работа /22/, в которой с использованием языка "СИ" приводился алгоритм для расчета весьма большого (3500-300000) количества квадрированных диаграмм за I час. Но из-за вышеприведенных замечаний полученные ответы не могли быть разумными и вопреки обещаниям нигде не приводятся.

СВ REDUCE позволяет решать разнообразные задачи. Например, с её помощью легко проверить калибровочную инвариантность /23/, можно работать с некоммутирующими переменными в суперсимметричных теориях /24/ и т.д. В этом направлении нам кажутся полезными примеры, приведенные в §§ 3 и 4.

Последние версии REDUCE-3 /9/ имеют возможность вычислять неопределенные /2,12/ и определенные /25/ интегралы от широкого класса алгебраических функций. Однако в настоящее время интегрирование квадрата матричного элемента предпочтительнее /26,27/ проводить в виде табличных подстановок, возвращаясь тем самым к алгоритмам, использованным в программах SCHOONSCHIP /7/. Таким образом, в § 3 проводится интегрирование однопетлевых графов с реальным и виртуальным глюонами по алгоритму, впервые приведенному в работе /27/.

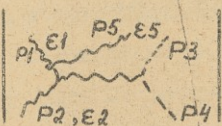
В обеих системах встроены алгоритмы /28/ алгебры γ-матриц Дирака (операции приведения и вычисления следа). В § 4 приводится доказательство хорошо известного коммутационного соотношения Грисару и др. /29/ как пример работы с пакетами программ матричной и некоммутативной алгебр. Таким образом, показано, насколько естественно работать, например, с явным представлением γ - матриц и антисимметричными майорановскими спинорами.

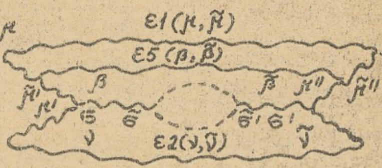
§2. Суммирование и факторизация квадратов калибровочно-инвариантного набора диаграмм Фейнмана

С целью иллюстрации рассмотрим полный калибровочно-инвариантный набор диаграмм для процесса глюон (P1) + глюон (P2) ⟶ скварк (P3) + скварк (P4) + глюон (P5=K) /15/ (рис.1), где все партоны считаются безмассовыми. При их квадрировании возникает 320 графов (плюс квадраты с духами Фадеева-Попова), которые предстоит суммировать (а также усреднять по спиновым и цветовым состояниям)

$$|M|^2 = \sum_{i=1}^{25} M_i^2 + \sum_{i \neq j=1}^{25} M_i * M_j^* . \tag{1}$$

Например, с учетом правил Фейнмана в СКХД /7/, выражение M77 имеет вид

M77 = 

^{2} = 

=

$$\begin{aligned}&\langle colour\rangle (P3-P4)_{\tilde\sigma}(P3-P4)_{\tilde\sigma'} PR(\mu',\tilde\mu',P1-P5)\, PR(\mu'',\tilde\mu'',P1-P5)\\ &PR(\sigma,\tilde\sigma,P3+P4)\, PR(\sigma',\tilde\sigma',P3+P4)\, \varepsilon 1(\mu,\tilde\mu)\, \varepsilon 2(\nu,\tilde\nu)\, \varepsilon 5(\beta,\tilde\beta)\\ &C3(\mu',\nu,\sigma,P1-P5,P2,-P3-P4)\, C3(\mu'',\tilde\nu,\sigma',P1-P5,P2,-P3-P4)\\ &C3(\mu,\tilde\mu',\beta,P1,-P1+P5,-P5)\, C3(\tilde\mu,\tilde\mu'',\beta,P1,-P1+P5,-P5),\end{aligned} \tag{2}$$

где C3 -- трехглюонная вершина

$$C3(\alpha,\beta,\gamma,K1,K2,K3) = g^{\alpha\beta}(K1+K2)^{\gamma} + g^{\beta\gamma}(K2-K3)^{\alpha} + g^{\gamma\alpha}(K3-K1)^{\beta}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_i(\alpha,\tilde{\alpha}) = \sum_{\text{спин}} \varepsilon_i^{\alpha} \varepsilon_i^{*\alpha}$$ – поляризационный оператор

$$\varepsilon_i(\alpha,\tilde{\alpha}) = -g^{\alpha\tilde{\alpha}} + \left(P_i^{\alpha} n^{\tilde{\alpha}} + P_i^{\tilde{\alpha}} n^{\alpha}\right) / (n \cdot P_i), \qquad (4)$$

и PR – глюонный пропагатор

$$PR(\alpha,\tilde{\alpha},k) = \frac{1}{k^2}\, \varepsilon_k(\alpha,\tilde{\alpha}). \qquad (5)$$

Заметим, что в произвольной ($n^2 \neq 0$) аксиальной калибровке работать нежелательно из-за громоздких промежуточных выкладок. Не очень удобно также работать в ($n=0$) фейнмановской калибровке из-за возникающих в ней духов. Поэтому мы предпочли /I5,I7/ светоподобную калибровку ($n^2=0$) с калибровочным вектором n , направленным вдоль одного из 5 заданных импульсов (например, n =P3). Не следует также забывать, что с помощью САВ в первоначальных работах О.В.Тарасова и др. /6/ была показана конечность $N=4$ суперсимметричной теории Янга-Мильса и впоследствии она была получена во всех порядках ТВ благодаря светоподобной калибровке /30/. В связи с этим интерес к ней в последние годы значительно усилился /31/.

Переход от фейнмановской калибровки к светоподобной в квадратах диаграмм из рис.I привел на первый взгляд к удивительному результату: занулились 242 графа из-за того, что они содержали равные нулю в этой калибровке множители:

$$(2P_3 \pm P_1)^{\mu}\, \varepsilon_1(\mu,\tilde{\mu}) = 0,$$

$$K(\alpha,\beta,\gamma,\delta)PR(\beta,P3-P4,P3+P4)E1(\alpha,\tilde{\alpha})E2(\gamma,\tilde{\gamma})E5(\delta,\tilde{\delta})=0,$$

$$K(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}-g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\qquad(\alpha,\gamma,\delta\longleftrightarrow\beta).$$

Нетрудно показать, что эти соотношения эквивалентны калибровочным условиям /I7/: $(n\cdot\varepsilon_i)=0$, $(\varepsilon_i\cdot P_i)=0$ и означают зануление I3 амплитуд (I3–25) из рис.I.

Что касается усредненных групповых коэффициентов (обозначим в данном примере C(7)=<COLOR>), их в α^3 порядке ТВ нетрудно посчитать. Однако в более высоких порядках, а также с целью надежности, желательно пользоваться программой COLOR /I9/, представляющей собой реализацию алгоритма Квитановича для вычисления групповых факторов в неабелевых калибровочных теориях с группой $SU(n)$. Кроме того, вообще говоря, если коэффициент C(7) равнялся бы нулю, то следовало бы предотвратить счет других частей диаграмм командой

```
M77:= IF C(7)=0 THEN 0 ELSE..
```

Иначе система на коэффициент перемножает в последнюю очередь и при большом числе квадратов это приведет к бессмысленной трате машинного времени. Например, в светоподобной калибровке у нас осталось 78 квадрированных графов и 21 из них зануляется из-за усреднения по групповым индексам. Более того, часто делается искусственное группирование частей всего комплекта по независимым коэффициентам с целью уменьшения числа обрабатываемых полиномов. Однако мы должны прибегать в этом случае тоже к неудобному логическому условию

IF...THEN... , поскольку подходящая для подобных манипуляций BEGIN...END - операция блока не проходит. В ней не определены немые индексы суммирования INDEX.

Перейдем к разбору программы. Вначале мы определяем векторы и индексы, а также импульсы и их массы:

```
INDEX A1,A2,A3,A4;
VECTOR B1,B2,B3,B4,B5,B6;
MASS P1=0,P2=0,P3=0,P4=0,P5=0;
MSHELL P1,P2,P3,P4,P5;
```

Потом мы определяем функции (3), (4), и (5) от произвольных векторов

```
FOR ALL B1,B2,B3 LET PR(B1,B2,B3)=1/B3.B3*(-B1.B2+
(B3.B1*P3.B2+B3.B2*P3.B1)/B3.P3);
FOR ALL B1,B2,B3,B4,B5,B6 LET O3(B1,B2,B3,B4,B5,B6)=
B1.B2*(B4.B3-B5.B3)+B2.B3*(B5.B1-B6.B1)+B3.B1*(B6.B2-B4.B2);
FOR ALL B1,B2 LET E1(B1,B2)=-B1.B2+(P1.B1*P3.B2+
P1.B2*P3.B1)/P1.P3,
E2(B1,B2)=-B1.B2+(P2.B1*P3.B2+P2.B2*P3.B1)/P2.P3,
E5(B1,B2)=-B1.B2+(P5.B1*P3.B2+P5.B2*P3.B1)/P5.P3;
```

Вычисление формулы (2) произведем несколькими ступеньками с использованием команды FOR ALL... SAVEAS . Такое разбиение вызвано ограничением на число спариваемых индексов. Один из вариантов такой программы имеет вид

```
PR(A3,P3-P4,P3+P4)*PR(A4,P3-P4,P3+P4)*
E2(A1,A2)*O3(B1,A1,A3,P1-P5,P2,-P3-P4)*
O3(B2,A2,A4,P1-P5,P2,-P3-P4);
FOR ALL B1,B2 SAVEAS M71(B1,B2);
```

```
E1(A1,A2)*E5(A2,A4)*C3(A1,B1,A2,P1,-P1+P5,-P5)*
C3(A3,B2,A4,P1,-P1+P5,-P5);
FOR ALL B1,B2 SAVEAS M72(B1,B2);
M72(A1,A2)*PR(A1,B1,P1-P5)*PR(A2,B2,P1-P5);
FOR ALL B1,B2 SAVEAS M73(B1,B2);
FOR ALL B1,B2 CLEAR M72(B1,B2);
M77:=M71(A1,A2)*M73(A1,A2);
FOR ALL B1,B2 CLEAR M71(B1,B2),M73(B1,B2);
```

Аналогично можно посчитать и другие графы и одновременно суммировать, уничтожая при этом ненужные выражения командой CLEAR :

```
M(8):=M77+M88$ CLEAR M77, M88;...; M(9):=M(8)+M99$...
```

Чтобы иметь представление о заказанных машинных ресурсах, скажем, что такие диаграммы, как M77 на ЕС 1061 ЛВТА ОИЯИ считались при 5 Мбайт и счет всех 57 диаграмм требовал около 1 часа. При отдельном счете каждой диаграммы требуемая память зависит от ее сложности и варьируется в пределах 1÷5 Мбайт. Сохранить небольшие (на несколько страниц) полиномы можно так:

```
//A  DD  DSN=SUM(A),DISP=SHR
        ........
OFF NAT; LINELENGTH(70);...; OUT A; SUM:=SUM; SHUT A;
```

Следует помнить, что нецелесообразно записывать на внешние файлы длинные суммы (на несколько десятков страниц), поскольку при их повторном чтении с помощью команды IN тратится много времени. Аналогичное происходит при их повторном выводе на чтение, т.е. при таких манипуляциях максимально надо использовать знак $, запрещающий их вывод. Например, у нас их внешних файлах были сохранены 57 подсчитанных диаграмм и впоследствии их суммировали одновременно таким образом:

```
SM: = FOR I: = 1:57 SUM M(I)$
FOR I:=1:57 DO << CLEAR M(I)>>;
N: = NUM(SM)$ D : = DEN(SM); CLEAR SM;
```

Прежде чем факторизовать числитель N этой суммы необходимо исключить все зависимые переменные (из 10 скалярных инвариантов оставлять 5 независимых), но какие именно приведут к факторизации заранее строго не определено. В частности, можно их задать в следующем порядке:

```
LET U = - (U1+S+S1+T +T2),
  P4.P5 = - (U+S1+T2)/2, P3.P5 = - (T1+U1+S1)/2,
  P2.P5 = (S+U1+T2)/2, P1.P5 = (S+T1+U)/2,
  P1.P2 = S/2, P3.P4 = S1/2, P1.P3 = - T1/2,
  P1.P4 = - U/2, P2.P3 = - U1/2, P2.P4 = - T2/2; N:=N$
```

Наконец, если у нас не допущена ошибка при генерации полного калибровочно-инвариантного набора диаграмм, или при счете групповых факторов, или при написании квадратов по правилам Фейнмана, то мы получим в "упакованном" виде ответ следующим образом:

```
ARRAY V(15); J : = FACTORIZE(N,V);
FOR I : = 0:J DO WRITE V(I) : = V(I);
ON FACTOR; D : = D; OFF FACTOR; OFF EXP;
ANS : = FOR I : = 0:J PRODUCT V(I)/D;
```

Если еще видоизменить ответ /I7/, то получим формулу для $|M|^2(I)$ в виде инфракрасно-сингулярных "эйкональных" слагаемых $[i,j]=\dfrac{(P_i.P_j)}{(P_i.K)(P_j.K)}$:

$$|M|^2 = (g^6/32)\,|M^0|^2\, I, \qquad (6)$$

где

$$|M^0|^2 = (2/9)\big[(S+t1+u1)^2\cdot(S1+T1+U1)^2 + U^2 + T1^2 +$$
$$+ U1^2\cdot T2^2\big]/(u\cdot t1\cdot U1\cdot t2),$$

$$I = \{[34] + 9([34]-[13]-[14]-[23]-[24]-(T1\cdot T2+U\cdot U1)/(S\cdot S1)[34]) +$$
$$+ 81/(S\cdot S1)[([12]+[14]+[23])\,t1\cdot t2 + ([12]+[13]+[24])\,U\cdot U1]\}.$$

Прежде чем сделать выводы, нам хочется высказать надежду о возможности обобщения рассмотренной программы для расчетов ($2 \longrightarrow n \geqslant 4$) процессов в α^n порядке ТВ. Ясно, что камнем преткновения на этом пути является ограниченность ресурсов ЭВМ. Например, при рассмотрении процесса $q\bar{q} \to \Phi\bar{\Phi}\Phi\bar{\Phi}$ на ЕС 1061 вычисление прерывалось из-за нехватки памяти на последней подстановке

$$(P1\cdot P2) = (P3\cdot P4) + (P3\cdot P5) + (P3\cdot P6) +$$
$$+ (P4\cdot P5) + (P4\cdot P6) + (P5\cdot P6).$$

На основе проделанных здесь и ранее /15,17/ вычислений можно сделать следующие выводы:

- аналитические расчеты эксклюзивных процессов на ЭВМ в высших порядках ТВ являются математически необходимым способом для получения имеющих физический смысл результатов;

- при этом требуются следующие символьные манипуляции: 1) генерация диаграмм Фейнмана, 2) квадрирование калибровочно-инвариантного набора*, 3) расчет группового фактора,

---

* "Автоматизация" перечисленных этапов достигается в программе ВИРТОН /32/, написанной на языке REDUCE LISP (RLISP)

4) суммирование и факторизация квадрата полной амплитуды, сокращение лишних степеней пропагаторов и пропагаторов с аксиальным вектором, 5) дальнейшее интегрирование с целью получения радиационных поправок и других физических характеристик.

- существующие пользовательские программы пока не позволяют полностью исключать ручной труд, что является основной помехой для вычислений эксклюзивных процессов в высших порядках ТВ. Особенно необходимым, по нашему мнению, являются такие расчеты для физически наблюдаемых процессов, подчиняющихся "правилам кваркогого счета" /21/.

§3. Интегрирования по реальным и виртуальным глюонам

Ситуация с интегрированиями квадратов матричных элементов с помощью САВ хорошо изложена в работе /26/, где говорится о сравнении возможностей систем SCHOONSCHIP и REDUCE-3 при решении этой задачи (см. также /33/). Известно, что интеграция фейнмановских интегралов любого типа не вложена в новых версиях REDUCE-3 и изучается интенсивно /I4,25,34/. В связи с этим легче всего "дублировать" /26/ SCHOONSCHIP - программы и реализовать интегрирование в виде табличных подстановок.

В первую очередь проинтегрируем формулу (6) по импульсу K=P5 т.н. тормозного глюона. Формула (6) проста и приводит к интегралам одного типа /35/:

$$R(P_i,P_j)=\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d_K^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}2K_0}\,\frac{(P_i\cdot P_j)}{(K+P_i)^2(K+P_j)^2}=$$

$$=\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2\varepsilon^2\,\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{P_iP_j}{2\pi\mu^2}\right). \tag{7}$$

С учетом симметрии $R(P_1,P_2)=R(P_1,P_3)=\cdots$ интеграл от $|M|^2$ в $n=4-2\varepsilon$ размерном пространстве имеет вид

$$\mu^{2\varepsilon}\int|M|^2_{\alpha^3}\,\frac{d_K^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}2K_0}=A\,|M^0|^2_{\alpha^2}\,R(P1,P2), \tag{8}$$

где $|M^0|^2$ - борновское сечение процесса $GG\to\Phi\bar{\Phi}$

$$|M^0|^2_{\alpha^2}=(g^4/3)\left(1-\frac{9}{4}\,\frac{tu}{s^2}\right).$$

Метод устранения возникающей в (8) расходимости подробно изложен, например, в /35/. Суть метода состоит в том, что в фейнмановской калибровке всегда найдется такая пара вершинных диаграмм, которые различаются лишь правилом разреза, определяющего реальность или виртуальность тормозного глюона. Важно подчеркнуть, что перенормировка происходит в каждой паре.

Для простоты рассмотрим предел мягкого тормозного глюона $K\to 0$ для S-канальных графов процесса $q\bar{q}\to\Phi\bar{\Phi}$ (рис.2)

```
FOR I:=1:J DO <<N(I):=NUM(M(I)); D(I):=DEN(M(I))>>;
FOR I:=1:J DO <<CLEAR M(I)>>;
LET S1=-T1-U, U1=U, T2=T1, P1.P2=-(U+T1)/2, P1.P3=-T1/2,
P1.P4=-U/2, P2.P3=-U/2, P2.P4=-T1/2, P3.P4=-(U+T1)/2;
Let K.P1=0,K.P2=0,K.P3=0,K.P4=0;
FOR I:=1:J DO N(I):=N(I);
```

Из рис.2 видим, что массив $N(J)$ содержит всего 6 элементов и интегрировать с помощью (7) нетрудно. Однако мы будем следовать работе /27/ с целью наблюдения специфики САВ REDUCE-3. Домножим подинтегральные выражения на функцию $SN(0,0,0,0)$ и сделаем "заселение" этой функции в следующем порядке:

```
CLEAR K.P1, K.P2, K.P3, K.P4;
ON DIV; ORDER K.P1, K.P2, K.P3, K.P4, SN, U, T1;
FOR I:=1:24 DO WRITE R(I):=N(I)/D(I);
FOR I:=1:24 DO R(I):=R(I)*SN(0,0,0,0)*(K.P1*K.P2*K.P3*K.P4)**3;
FOR ALL N4 LET K.P4**N4*SN(0,0,0,0)=SN(0,0,0,N4);
    ..........................
FOR ALL N1,N2,N3,N4 LET K.P1**N1*SN(0,N2,N3,N4)=SN(N1,N2,N3,N4);
FOR I:=1:24 DO R(I):=R(I);
```

Завышение степеней скалярных произведений мы произвели из-за упрощения работы подстановок с положительными степенями. И, наконец, сделаем подстановки интегралов (7):

```
PROCEDURE R(B1,B2); 1/(32*B1.B2*EP**2);
LET SN(2,2,3,3)=R(P1,P2), SN(2,3,2,3)=R(P1,P4),
    SN(2,3,3,2)=R(P1,P3), SN(3,2,2,3)=R(P2,P4),
    SN(3,2,3,2)=R(P2,P3), SN(3,3,2,2)=R(P1,P2);
    FOR I:=1:24 DO R(I):=R(I);
```

$R(P_1.P_2) \Rightarrow R(P1,P2)*P1.P2 \; ; \; = R(P1,P3)*P1.P3 \ldots$

Ясно, что аналогично (8) мы получим ε^{-2} сингулярный ответ

```
ANS : = FOR I : = 1:24 SUM R(I);
```

Спаривание виртуальных диаграмм инфракрасной сингулярности (рис.3) с диаграммами из рис.2 происходит после рассмотрения предела K→0 во всех графах α^3 порядка ТВ с виртуальным глюоном. Соответствующая программа различается от предыдущей из-за виртуальности (внемассовой поверхности) импульса K, приводящей к пропагаторам, составленным из импульсов KMI=K-PI, KPI=K+PI, KM2=K-P2, KP2=K+P2, KM3=K-P3, KP3=K+P3, KM4=K-P4, KP4=K+P4. Поэтому функция SN теперь имеет 8 аргументов.

Приведем те части программы, где наблюдается различие

```
MASS P1=0, P2=0, P3=0, P4=0, K=M;
LET M**2=0, K.P1=0, K.P2=0, K.P3=0, K.P4=0;
FOR I:=1:24 DO N(I):=NUM(M(I));
.........................
ORDER M,KP1,KM1,KP2,KM2,KP3,KM3,KP4,KM4,SN,U,T1;
FOR I:=1:24 DO V(I):=N(I)*SN(0,0,0,0,0,0,0,0)*
(KM1*KP1*KM2*KP2*KM3*KP3*KM4*KP4)**6;
FOR ALL N8 LET KM4**N8*SN(0,0,0,0,0,0,0,0)=SN(0,0,0,0,0,0,0,
    N8/2);      FOR I:=1:24 DO V(I):=V(I);
    ...................................
FOR ALL N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8 LET KP1**N1*SN(0,N2,N3,N4,
N5,N6,N7,N8)=SN(N1/2,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8);
FOR I:=1:24 DO V(I):=V(I);
```

Заметим, что эти функциональные подстановки громоздкие и требуют каждый раз присвоения. Иначе, если это сделат в конце, система может быть и не пробежит весь список подстановок.

Значения соответствующих интегралов табулируем согласно формулы /I7,35/

$$V(P_i\,xP_j)=\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^n_K}{(2\pi)^n}\,\frac{(P_i\cdot P_j)}{K^2(K+P_i)^2(K+xP_j)^2}=$$

$$=-\frac{i\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{(4\pi)^2\,2x\varepsilon^2\,\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{x(P_iP_j)}{2\pi\mu^2}\right)^{-2}. \qquad (9)$$

Выражение (9) можно записать, например, в форме процедур для x=I и x=-I, соответственно

```
PROCEDURE VM(B1,B2); 1/(32*B1.B2)*(1/EP**2-1/3);
PROCEDURE VP(B1,B2); 1/(32*B1.B2)*(1/3-1/EP**2);
```

Дальше уже нетрудно определить 24 интеграла для подстановок

```
LET SN(2,3,2,3,3,3,3,3)=VP(P2,P3); ...
```

$$\mathrm{Re}\,[iV(P_i,xP_j)] \to -\frac{1}{32x\pi^2\varepsilon^2}\left(1-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{3}\right).$$

```
Re [i V(P1,-P2)] = P1.P2*VM(P1,P2):=-P2.P3*VP(P2,P3)...
```

Сокращение полюсов ε^{-2} в каждой паре (i,i') диаграмм из рис.2 и 3

```
FOR I : = 1:24 DO WRITE CANS(I) : = V(I) + R(I);
```

дает конечную инфракрасную радиационную поправку (К-фактор). Она полностью совпадает /I5,I7/ с тем значением, какое мы получили из простой факторизованной формулы типа (6) с помощью подстановки

$$[i\,j] \Rightarrow 4\left[R(P_i, P_j) + x\,Re\,V(P_i, -xP_j)\right] = \frac{1}{24}.$$

Полученные нами результаты вычислений К-факторов в СКХД, а также в КХД являются точными и несущественно отличными от значений, полученных вручную /35/. Это отличие, между прочим, вызвано и тем, что при ручном счете с целью облегчения работы обычно пренебрегают несущественными слагаемыми.

§4. Суперсимметричное коммутационное соотношение и программы матричной и некоммутативной алгебры

Кроме стандартных способов /I/ вычисления эксклюзивных $(2 \to n)$ процессов методами САВ в последнее время стали интенсивно применять методы т.н. спиральных амплитуд и суперсимметричных соотношений Уорда (см./I7,20/ и цитированную там литературу). Исходным пунктом этих работ является хорошо известное соотношение Грисару и др. /29/

$$[Q(\eta), a_j] = \Gamma(P, \eta)\, a_{j-1/2},$$

где $Q(\eta) = Q_\alpha \eta^\alpha$, Q_α - обычные генераторы суперсимметрии, η -майорановский спинор с антисимметричными комплексными компонентами, a_j - оператор рождения частиц с импульсом P и спином j, функция $\Gamma(P, \eta)$ - линейная относительно η и зависящая от импульса P через неизвестные коэффициенты

$$\Gamma(P,\eta) = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_1^* + b_4\eta_2^*$$

Согласно /29/ определение явного вида коэффициентов b_i сводится к решению уравнения

$$\Gamma(P,\xi)\Gamma^*(P,\eta) - \Gamma(P,\eta)\Gamma^*(P,\xi) = -2i\bar{\eta}\hat{P}\xi \tag{I0}$$

в смысле равенства коэффициентов при независимых произведениях $\eta_i\xi_j^*$. Здесь метрика определена так, что $\hat{P} = -\gamma^0 P_0 + \gamma^1 P_1 + \gamma^2 P_2 + \gamma^3 P_3$.

Кроме этого, мы будем точно следовать определениям /29/

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0, & -i\sigma^\alpha \\ i\sigma^\alpha, & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2^* \\ -\eta_1^* + \eta_2 \\ -\eta_1 + \eta_2^* \\ -\eta_1^* - \eta_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^4 = i\gamma^0, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad C = \begin{pmatrix} 0, & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2, & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\eta} = \eta^*\gamma^4, \quad \eta^* = D^{-1}\eta, \quad D = C\gamma^4,$$

Сперва вычислим правую часть уравнения (I0):

```
G0:=-I *MAT((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1))$
G1:=MAT((0,0,0,-I),(0,0,-I,0),(0,I,0,0),(I,0,0,0))$
G2:=MAT((0,0,0,-1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(-1,0,0,0))$
G3:=MAT((0,0,-I,0),(0,0,0,I),(I,0,0,0),(0,-I,0,0))$
    PG := - P0*G0 + P1*G1 + P2*G2 + P3*G3 $
```

Объявим компоненты η и ζ, а также L и LC некоммутирующими. Воспользуемся приведенными выше определениями и вычислим $\bar{\eta}$:

```
ET :=1/2*MAT((ET(1)+ETC(2)),(-ETC(1)+ET(2)),(-ET(1)+ETC(2)),
     (-ETC(1)-ET(2)))$      G4 : = I*GO$
C:=MAT((0,0,0,1),(0,0,-1,0),(0,1,0,0),(-1,0,0,0))$
D : = C*G4$  ETC : = 1/D*ET$      ETH : = TP ETC*G4$
  ZT := 1/2*MAT((ZT(1)+ZTC(2)), (-ZTC(1)+ZT(2)),
       (-ZT(1)+ZTC(2), (-ZTC(1)-ZT(2)))$
```

Таким образом, мы получим правую часть уравнения (IO)

```
W : = -2*I*ETH*PG*ZT$
```

Пусть L, LC, EE, EEC, ZZ, ZZC задают матрицы

```
MATRIX L(1,4),LC(1,4),ET1(4,1),ET1C(4,1),ZT1(4,1),ZT1C(4,1);
  L : = MAT((L(1), L(2), L(3), L(4)))$
  LC : = MAT((LC(1), LC(2), LC(3), LC(4)))$
  ET1 : = MAT((ET(1)), (ET(2)), (ETC(1)), (ETC(2)))$
  ET1C : = MAT((ETC(1)), (ETC(2)), (ET(1)), (ET(2)))$
  ZT1 : = MAT((ZT(1)), (ZT(2)), (ZTC(1)), (ZTC(2)))$
  ZT1C : = MAT((ZTC(1)), (ZTC(2)), (ZT(1)), (ZT(2)))$
```

Тогда согласно определениям

$$\Gamma(P,\eta)=L\cdot EE,\quad \Gamma^*(P,\eta)=LC\cdot EEC,\quad \Gamma(P,\zeta)=L\cdot ZZ,$$
$$\Gamma^*(P,\zeta)=LC\cdot ZZC$$

имеем

```
GE : = L*ET1$ GEC : = LC*ET1C$ GZ : = L*ZT1$
GZC : = LC*ZT1C$
```

и левая часть уравнения (I0) вычисляется так:

```
W1 : = GZ*GEC - GE*GZC$
```

Таким образом получаемое уравнение эквивалентно равенством нулю I6 коэффициентов перед независимыми произведениями $\eta(i)\xi^*(j)$

```
EQO : = W1 - W$ EQ : = EQ(1,1)$
```

Эти коэффициенты нетрудно получить с помощью команды COEFF

```
FOR ALL I,J LET ET(I)*ZT(J) = C1(I,J), ZT(J)*ET(I) = -C1(I,
ARRAY CC(1);FOR ALL I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO WRITE
CF(I,J):=IF COEFF(EQ,C1(I,J),CC) NEQ 0 THEN CC(1) ELSE 0;
```

Заметим, что поскольку L(I) не коммутируют с ξ(I), то для выделения коэффициентов заранее требуются подстановки

```
FOR ALL I,J LET ZT(I)*L(J) = L(J)*Z(I)+D1; EO: = EQ$
FOR ALL I,J LET CLEAR ZT(I)*L(J);
FOR ALL I,J LET L(J)*ZT(I) = ZT(I)*L(J)+D2; EQ : = EQ$
D1 : = 0; D2 : = 0; EQ : = EQ$
```

без которых мы наверно обошлись бы, если воспользовались бы пакетом программ NONCOM /24/.

Наконец, с целью определения явного вида функции Γ(F, проанализируем получаемые значения коэффициентов

```
CF(1,1) : = 2*(LC(3)*L(1)); CF(2,2) : = 2*(LC(4)*L(2));
CF(3,3) : = 2*(LC(1)*L(3)); CF(4,4) : = 2*(LC(2)*L(4));
CF(1,2) : = LC(4)*L(1)+LC(3)*L(2);
CF(1,3):=LC(3)*L(3)+LC(1)*L(1)-P3-P0;
CF(1,4) : = LC(3)*L(4)+LC(2)*L(1)-I*P2-P1;
CF(2,4) : = LC(4)*L(4)+LC(2)+P3-P0;
```

....

Первые 4 уравнения указывают на то, что две переменные $L(3)$, $L(4)$ (или $L(1)$, $L(2)$) равны нулю. Оставщуюся систему нетрудно решить при параметризации $P=E\,(1, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ и ответ имеет вид:

$$L(1)=\sqrt{2E}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad L(2)=\sqrt{2E}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}.$$

Здесь мы могли бы использовать команду SOLV относительно величин $\ln L(i)$, $\ln LC(i)$, $i=1,2$.

В заключение хотелось бы признаться в том, что рассмотренные в статье программы далеки от идеальности во многих отношениях. Единственное, что мы хотели показать - способность компьютерной алгебры увеличить интерес при решении громоздких, скучных и т.д. проблем.

Поступила 26.XI.1988

Институт
физики высоких энергий

Литература

I. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1984;
А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, В.А.Петров. В сб.:Общие принципы квантовой теории поля и их следствия,М.,Наука, 1977;
В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, ЭЧАЯ,2,5,1971.

2. В.П.Гердт, О.В.Тарасов, Д.В.Ширков. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике. УФН, 130,113,1980.

3. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике (АВПТФ), Дубна,сентябрь, 1979,ОИЯИ Д11-80-13,1980.

4. АВПТФ,Дубна,сентябрь, 1982, ОИЯИ Д11-83-511, 1983.

5. АВПТФ, Дубна, сентябрь, 1985, ОИЯИ,Д11-85-791, 1985.

6. A.Schiller, J.Phys. G5, 1329, 1979;
T.Gottschalk and D.Sivers, Phys. Rev. D21, 102, 1980;
Л.В.Авдеев, А.А.Владимиров, О.В.Тарасов. Phys. Lett.96B,94,198[illegible]
К.Г.Четыркин, А.Л.Катаев, Ф.В.Ткачев. Nucl.Phys. B174, 345, 19[illegible]
F.A.Berends e.a. Phys. Lett. 103B, 124, 1981;
С.И.Виницкий, В.А.Ростовцев. В /5/, с.366.

7. H.Strubbe. Comp. Phys.Comm. 8, 1, 1974.

8. A.C.Hearn, REDUCE-2: User's Manual, UCP-19, University of Utah, 1973;
А.А.Боголюбская, И.Е.Жидкова, В.А.Ростовецв. Система программирования REDUCE-2 , ОИЯИ, Б1-11-83-512, Дубна, 1983;

В.Ф.Еднерал, А.П.Крюков, А.Я.Родионов. Язык аналитических вычислений REDUCE-2. М., МГУ, 1989;
М.Б.Закс. Аналитические преобразования на ЕС ЭВМ. Изд-во Сарат.ун-та, 1981.

9. A.C.Hearn, REDUCE User's Manual, Version 3.3, Rand Publication CP78 (7/87) 1987.

10. J.McCarthy, Comm. ACM, 3, 184, 1960.

11. У.Маурер. Введение в программирование на языке ЛИСП.М., Мир, 1976;
С.С.Лавров, Г.С.Силагадзе. Автоматическая обработка данных: Язык ЛИСП и его реализация, М., Наука, 1978;
П.Уинстон. Искусственный интеллект, М., Мир, 1980.

12. Дж.Дэвенпорт. Интегрирование алгебраических функций,М., Мир, 1985;
Компьютерная алгебра, сб.под ред. Б.Бухбергера, М.,Мир, 1985.

13. F.Schwarz, Phys. Comm. 27, 179, 1982;
V.P.Gerdt, A.B.Shvachka, A.Yu.Zharkov. CPC, 34, 303, 1985.

14. А.А.Боголюбская, В.П.Гердт, О.В.Тарасов. В /5/, с.82.

15. Я.З.Дарбаидзе, В.А.Матвеев, З.В.Меребашвили,Л.А.Слепченко. Phys. Lett. 177B, 188, 1986; Phys. Lett. 191B, 179, 1987; Phys. Lett. 206B, 127, 1988.

16. H.J.Mohring and A.Schiller. In /3/, p. 127;
Я.З.Дарбаидзе и др. EUROCAL-87, Leipzig, June, 1987.
А.Г.Грозин. В /4/, с.226.

17. Я.З.Дарбаидзе,В.А.Матвеев,З.В.Меребашвили, Л.А.Слепченко.Препринт ОИЯИ,Р2-88-129,Дубна, 1988.

18. T.Sasaki, J.Comp. Phys. 22, 189, 1976.

19. А.П.Крюков, А.Я.Родионов. В /5/, с.388; CPC,48,327,1988;

P.Cvitanovic, Phys. Rev. D14, 1536, 197[illegible]

20. M.Mangano, S.J.Parke. FERMILAB Publ 87/136 T, 1987;

F.A.Berends and W.T.Giele. Recursive Calculations for processes with n gluons, 1987;

S.J.Parke and T.R.Taylor. Phys. Lett. 157B, 81, 1985.

21. В.А.Матве[illegible], Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. Lett.Nuovo.Cim.7,719,[illegible]

S.J.Brodsky and G.R.Farrar. Phys. Rev. Lett. 31, 1153, 1973.

22. G.R.Farrar and F.Neri. Phys. Lett. 130B, 109, 1983;

Errata. Phys. Lett. 152B, 443, 1985.

23. Л.Ф.Жирков. В /5/ ,с. 411.

24. А.Я.Родионов. В /4/, с.187;

W. Lassner. In /3/, p.58;

U.Quasthoff. In /4/, p.253.

25. J.A.Fox, A.C.Hearn, J.Comp.Phys. 14, 123, 1974;

K.S.Kölbig. In /5/, p. 172.

26. А.А.Ахундов, С.П.Баранов, Д.Ю.Бардин, Т.Риманн. В /5/, с.382.

27. О.В.Тарасов. В /3/, с.150; В/4/ , с.214;

28. J.S.Chisholm, Nuovo Cimento, 30, 426, 1963;

J.Kahane, J.Math. Phys. 9, 1732, 1968.

29. M.T.Grisaru and H.N.Pendleton. Nucl. Phys. B124, 81, 1977;

M.T.Grisaru, H.N.Pendleton and P.van Nieuwenhuizen. Phys. Rev.D13,9[illegible]

30. S.Mandelstam. Nucl. Phys. B213, 149, 1983;

L.Brink, O.Lendgren, B.E.W.Nillson.Phys. Lett. 123B, 323, 1983.

31. G.Leibrandt. Phys. Rev. D29, 1699, 1984;

H.C.Lee and M.S.Milgram. Ann. Phys. 157, 408, 1984;
К.Р.Натрошвили, А.А.Хелашвили, В.Ю.Хмаладзе. Однопетлевые расчеты в светоподобной калибровке. В сб.:"Инфракрасное поведение в КХД", Тбилиси, 1984.

32. А.М.Рапортиренко. В /5/, с.71.

33. А.В.Радюшкин, Р.С.Халмурадов. Препринт ОИЯИ, Р2-84-767, Дубна, 1984.

34. А.И.Алексеев, В.Ф.Еднерал. Препринт ИФВЭ 87-118, Серпухов, 1987.

35. A.P.Contogouris e.a. Phys. Rev. D29, 1354, 1984;
Mod. Phys. Lett. A2, 735, 1987.

ი. დარბაიძე, ზ. მერებაშვილი

ელექტრონული პროცესების ზოგიერთი გამოთვლების კომპიუტერული რეალიზაცია ანალიზური პროგრამირების სისტემის REDUCE-3 საშუალებით

რეზიუმე

განხილულია ყალიბურად ინვარიანტული სრული ამპლიტუდის კვარკის გათვლის ალგორითმი შეშფოთების თეორიის α^3 რიგში ანალიზური თვლის სისტემა REDUCE-3 საშუალებით. ნაჩვენებია აუცილებლობა შესაბამისი პროგრამების გამოყენებისა დიაგრამების გენერაციისათვის, მრავალწევრის მამრავლებად დაშლისათვის, ფერადი ფაქტორების მოძებნისათვის და ა.შ. პარტონების გაბნევის ბორნის კვეთებისადმი ინფრაწითელი შესწორების მოძებნის მაგალითზე განიხილება მანქანური ანალიზის სიზუსტე ხელით გათვლებთან შედარებით. მოცემულია აგრეთვე [illegible] მატრიცული და არაკომუტირებადი ალგებრისათვის არსებული

პროგრამების გამოყენებისა, რისთვისაც ნაჩვენებია გრისარუს სუპერსი-
მეტრიული კომუტატორული თანაფარდობის სამართლიანობა.

I.Darbaidze, Z.Merebashvili

SOME COMPUTER REALIZATIONS OF REDUCE-3 CALCULATI
FOR EXCLUSIVE PROCESSES

Summary

Some REDUCE-3 algorithms for the calculation of the square gauge invariant set of the tree diagrams are given. The necessity of using suc program packages as Factorizer, "COLOR" Factor, and so on is shown. The validity of the calculation for the infrared radiation corrections is di cussed. An example of applying the programs to matrix-and noncomutative algebras is presented and the validity of the Grisaru supersymmetric com mutatius relation is demonstrated.

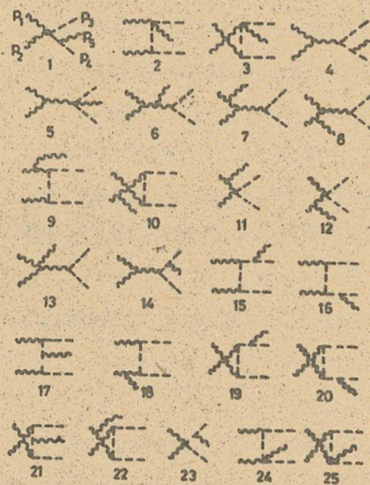


Рис. I

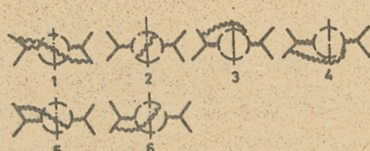


Рис. 2

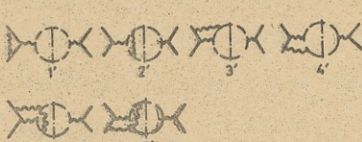


Рис. 3

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

286, 1989

СВОЙСТВА РЕЛЯТИВИСТСКИХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ В СЛУЧАЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Т.П.Надарейшвили, А.А.Хелашвили

Введение

В цикле работ /I-3/ были доказаны строгие теоремы об энергетических уровнях в нерелятивистском уравнении Шредингера в случае центральных потенциалов. Смысл этих теорем состоит в установлении связей между общими свойствами центральных потенциалов и порядком следования уровней в зависимости от значений квантовых чисел, таких, как число узлов (n) волновой функции и орбитальный момент (ℓ). Основное применение эти результаты находят в проблеме чармониев ($c\bar{c}$) и ботониев ($b\bar{b}$), т.к. во многих случаях удается получить модельно-независящие соотношения.

Известно, однако, что в этих системах релятивистские эффекты играют определенную роль. Поэтому, естественно, возникает задача обобщения вышеуказанных результатов на релятивистский случай. Недавно такая попытка была сделана в работе /4/, в которой авторы ограничились рассмотрением бесспиновых частиц, исследуя уравнения с релятивистской кинематикой, максимально приближая их к уравнению Шредингера.

Учет спинов в данном контексте - достаточно нетривиальная проблема. В литературе известны лишь две работы /5,6/, в которых с этой целью применяется уравнение Дирака. Однако, это все еще одночастичная задача, а не проблема двух тел.

Цель настоящей работы состоит в исследовании предложенной ранее /7/ квазипотенциальной модели, в которой для определенных квантовых состояний задача максимально приближается к уравнению Шредингера. На примере явных решений, там, где это возможно, мы демонстрируем справедливость основных теорем о порядке следования уровней связанных состояний.

I. Уравнение модели

Как было показано выше, мы исследуем квазипотенциальное уравнение специального вида /7/, записанное в СЦМ двух спинорных частиц с массами m_1 и m_2.

$$(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m_1)\varphi+\varphi(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m_2)+\frac{1}{2}(\beta\varphi+\varphi\beta)V=M\varphi. \qquad (I.I)$$

Уравнение записано в координатном пространстве, где $\vec{p}=-i\vec{\nabla}$, а $V=V(r)$ - центральный потенциал. Мотивировка этого уравнения дана в работе /7/. Там же приводится редукция к радиальным уравнениям для конкретных состояний. Для полноты изложения здесь дадим другой вывод редуцированных уравнений, пользуясь тем, что потенциальные члены в (I.I) могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{2}(\beta\varphi+\varphi\beta)=\frac{1}{2}(1+\beta)\varphi\frac{1}{2}(1+\beta)-\frac{1}{2}(1-\beta)\varphi\frac{1}{2}(1+\beta), \qquad (I.2)$$

откуда более прозрачно видно его происхождение из уравнения Солпитера.

Вводя проекции волновой функции

$$\varphi_{\pm\pm}=\frac{1}{2}(1\pm\beta)\varphi\frac{1}{2}(1\pm\beta),\quad \varphi_{\pm\mp}=\frac{1}{2}(1\pm\beta)\varphi\frac{1}{2}(1\mp\beta),$$

уравнение (I.I) можно переписать с помощью 2x2 матриц Паули в виде следующей системы:

$$
\begin{aligned}
&(M-m_1-m_2)\varphi_{++}-V\varphi_{++}=\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi_{-+}+\varphi_{+-}\,\vec{\sigma}\vec{p}\,,\\
&(M-m_1+m_2)\varphi_{+-}=\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi_{--}+\varphi_{++}\,\vec{\sigma}\vec{p}\,,\\
&(M+m_1-m_2)\varphi_{-+}=\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi_{++}+\varphi_{--}\,\vec{\sigma}\vec{p}\,;\\
&(M+m_1+m_2)\varphi_{--}+V\varphi_{--}=\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi_{+-}+\varphi_{-+}\,\vec{\sigma}\vec{p}\,.
\end{aligned}
\qquad (I.3)
$$

Второе и третье уравнения этой системы приводят к условиям

$$(M-m_1+m_2)\varphi_{+-}(\vec{\sigma}\vec{p})=(M+m_1-m_2)(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi_{-+}\,,$$

$$(M-m_1+m_2)(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi_{+-}=(M+m_1-m_2)\varphi_{-+}(\vec{\sigma}\vec{p}),$$

использование которых в остальных уравнениях (I.3) позволяет исключить из них $\varphi_{\pm\mp}$. В результате этого приходим к системе двух уравнений для диагональных компонент:

$$\left\{\vec{P}^2 - \frac{M^2-(m_1-m_2)^2}{2M}\left[M-m_1-m_2-V\right]\right\}\varphi_{++} = -\vec{\sigma}\vec{P}\,\varphi_{--}\,\vec{\sigma}\vec{P},$$

$$\left\{\vec{P}^2 - \frac{M^2-(m_1-m_2)^2}{2M}\left[M+m_1+m_2+V\right]\right\}\varphi_{--} = -\vec{\sigma}\vec{P}\,\varphi_{++}\,\vec{\sigma}\vec{P}. \qquad (I.4)$$

Когда φ_{--} и φ_{++} пропорциональны единичной матрице, что соответствует нулевому полному спину, $S=0$, то правые части (I.4) тривиально упрощаются. Вводя новые функции

$$\varphi^{(\pm)} = \varphi_{++} \pm \varphi_{--}, \qquad (I.5)$$

систему (I.4) в этом случае сведем к искомому уравнению

$$\left\{\vec{P}^2 - \frac{M^2-(m_1-m_2)^2}{4M^2}\left[M^2-(m_1+m_2+V)^2\right]\right\}\varphi^{(+)}(\vec{r}) = 0 \qquad (I.6)$$

и дополнительному соотношению

$$\varphi^{(-)} = \frac{m_1+m_2+V}{M}\,\varphi^{(+)}. \qquad (I.7)$$

Выделение угловой зависимости в уравнении (I.6) представляет теперь стандартную задачу.

В случае ненулевого полного спина, $S=1$, волновые функции $\varphi_{\pm\pm}$ содержат зависимость от σ - матриц Паули. Умножая уравнение (I.4) на σ_i и вычисляя шпуры, после некоторых алгебраических преобразований придем к уравнениям

$$\left\{\vec{P}^2 - \frac{M^2-(m_1-m_2)^2}{4M^2}\left[M^2-(m_1+m_2+V)^2\right]\right\} Sp\left(\sigma_i\varphi^{(+)}\right) =$$

$$= Sp\left\{(\vec{\sigma}\vec{P})P_i\varphi^{(-)}\right\} - \frac{m_1+m_2+V}{M} Sp\left\{(\vec{\sigma}\vec{P})P_i\varphi^{(+)}\right\} \qquad (I.8)$$

и дополнительному условию

$$Sp\left(\sigma_i\varphi^{(+)}\right) = \frac{m_1+m_2+V}{M} Sp\left(\sigma_i\varphi^{(-)}\right) + \qquad (I.9)$$

$$+ \frac{4}{M^2-(m_1-m_2)^2} Sp\left\{(\vec{\sigma}\vec{P})P_i\varphi^{(+)}\right\}.$$

Видно, что эти уравнения в общем случае весьма сложны и не сводятся к дифференциальным уравнениям второго порядка. Однако для состояний с четностью $\varepsilon_P = (-1)^{J+1}$ (т.н. A_L - траектория), волновые функции которых имеют структуру

$$\varphi^{(\pm)} \sim (\vec{\sigma}\vec{L}) f^{(\pm)}, \qquad (I.10)$$

"недиагональные" члены в уравнениях (I.8) исчезают, так как

$$Sp\left\{(\vec{\sigma}\vec{P})P_i(\vec{\sigma}\vec{L})f^{(\pm)}\right\} \sim P_i(\vec{P}\vec{L})f^{(\pm)} = 0.$$

Поэтому для функций $L_i f^{(-)}$ мы снова приходим к уравнению вида (I.6), которое остается в силе и после свертывания с σ_i , т.е. для волновой функции $\varphi^{(-)}$.

После выделения угловой зависимости для радиальных волновых функций соответствующих состояний получается уравнение типа Шредингера /7/

$$u'' + \left\{ \frac{M^2 - (m_1 - m_2)^2}{4M^2} \left[M^2 - (m_1 + m_2 + V)^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{J(J+1)}{r^2} \right\} u = 0, \qquad \text{(I.II)}$$

где J – полный момент количества движен:і.

2. Порядок следования уровней

Рассмотрим для простоты случай разных масс, $m_1 = m_2 = m$, и перепишем наше уравнение в виде, приближенном к уравнению Шредингера

$$u'' + \left\{ \varepsilon - W - \frac{J(J+1)}{r^2} \right\} u = 0. \qquad \text{(2.I)}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{M^2}{4} > 0, \qquad W = \frac{(2m+V)^2}{4} \geqslant 0. \qquad \text{(2.2)}$$

Сравнивая с уравнением Шредингера, заключаем, что на уравнение (2.I) автоматически распространяются все теоремы, относящиеся к положительно определенному потенциалу, так как в данном подходе эффективный потенциал $W \geqslant 0$.

Сформулируем основные теоремы для нашего случая:

<u>Теорема I.</u>

Если $\Delta W = \dfrac{1}{r^2} \dfrac{d}{dr} \left(r^2 \dfrac{dW}{dr} \right) \gtrless 0$ при $\forall r$,

тогда имеет место неравенство $M(n+1, J) \gtrless M(n, J+1)$.

В то же время справедлива ослабленная теорема:

Если $\Delta W < 0$ при $r < r_0$ и $\dfrac{dW}{dr} > 0$ при $r > r_0$, тогда $M(n+1, J) < M(n, J+1)$.

Рассмотрим частные примеры.

а) Кулоновский потенциал. $V = -\frac{\alpha}{r}$.

Очевидно, $\Delta W = 2\frac{\alpha^2}{r^4} > 0$ при $\forall r$.

Уравнение (2.I) решается точно и для массы дает

$$M(n, J) = 2m\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4n_0^2}}, \tag{2.3}$$

где

$$n_0 = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(J + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Ясно, что $n_0(n+1, J) > n_0(n, J+1)$ и поэтому

$$M(n+1, J) > M(n, J+1).$$

б) Линейно растущий потенциал. $V = kr + b$ ($k > 0$).

В этом случае

$$\Delta W = 6k^2 + \frac{4k}{r}(2m + b).$$

Поэтому:

при $2m + b > 0$ имеем $\Delta W > 0$ ($\forall r$) и $M(n+1, J) > M(n, J+1)$;

при $2m + b < 0$ ΔW - знакопеременная, но нет такого значения r_0, чтобы применить ослабленную теорему.

Особого внимания требует случай $2m + b = 0$, т.е. когда потенциал "съедает" массы составляющих кварков. В этом случае уравнение решается точно и дает

$$M^2(n, J) = 8k\left(n + \frac{J}{2} + \frac{3}{4}\right), \tag{2.5}$$

откуда следует неравенство теоремы

$$M(n+1, J) > M(n, J+1),$$

а также оптимизирующее равенство для потенциала гармоничес-кого осциллятора

$$M(n+1, J) = M(n, J+2).$$

в) Представляет интерес еще один случай с компенсацией массы:

$$V = -\frac{a}{r} + kr + b, \quad 2m + b = 0, \quad a, k > 0.$$

Тогда уравнение (2.I) вновь решается точно и приводит к результату

$$M^2(n, J) = 8k\left(n + \frac{s}{2} + \frac{3}{4}\right) - 2ak, \tag{2.6}$$

где

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(J + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}}. \tag{2.7}$$

Имеем

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r^4} + 3k^2\right) > 0, \quad \forall r.$$

Легко проверить из явного решения (2.6), что выполнено неравенство теоремы.

Последние два случая интересны тем, что из-за компенсации массы они не имеют нерелятивистского предела. Тем не менее, теорема I остается в силе.

Обратимся теперь к следующей теореме, которую в наших обозначениях можно сформулировать так:

Теорема II.

Если $Y(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right) \gtrless 0, \ \forall r,$

то имеет место неравенство

$$M(n+1, J) \gtrless M(n, J+2)$$

или, в ослабленной форме, если $Y(r) < 0$ при $r < r_0$ и $\frac{dW}{dr} < 0$ при $r > r_0$, то $M(n+1, J) < M(n, J+2)$.

В случае линейно растущего потенциала $V = kr + b$ знак $Y(r)$ зависит от знака комбинации $2m + b$, а при $2m + b = 0$ неравенство оптимизируется $M(n+1, J) = M(n, J+2)$.

Когда $V = -\frac{a}{r} + kr + b$ и $2m + b = 0$, то из явного решения (2.6) легко проверить, что $M(n+1, J) > M(n, J+2)$, как и должно быть, поскольку $Y = \frac{8a^2}{r^5} > 0$, $\forall r$.

На этом же примере легко проверить справедливость другой теоремы /8/, которая в нашем случае гласит, что: если $Y(r) \gtrless 0$ при $\forall r$, то

$$M^2(n, J+1) \gtrless \frac{1}{2}\left[M^2(n, J) + M^2(n+1, J)\right].$$

Решение (2.6) дает верхний знак в согласии с $Y(r) > 0$.

Заметим, что в /8/ имеется доказательство лишь при верхнем знаке неравенства. Однако расширить его на нижний знак, по-видимому, возможно.

Это подтверждается также на следующем примере:

$V = -\frac{\alpha}{\sqrt{r}} + b$, $2m + b = 0$, $Y(r) > 0$.

Тогда

$$M(n,J)=\frac{\alpha\sqrt{2m}}{n+J+1}$$

и, очевидно,

$$\frac{1}{n+J+2}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+J+1}+\frac{1}{n+J+2}\right].$$

Рассмотрим, наконец, вопрос об уровнях с $J=0$. В работе /8/ выдвигается предположение, согласно которому уровни с ростом n все больше сближаются, если

$$z(r)=\frac{d}{dr}\left[r^5\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right]<0,\quad W>0,\ \forall r. \tag{2.8}$$

Рассмотрим, например, кулоновский потенциал $V=-\frac{\alpha}{r}$. Ясно, что $z(r)=-3\alpha m$ при $\forall r$. Из явного решения

$$M^2(n,0)=2m\left[1-\frac{\alpha^2}{4(n+1)^2}\right]$$

имеем

$$M^2(n,0)-M^2(n-1,0)>M^2(n+1,0)-M^2(n,0). \tag{2.9}$$

Это свойство проверяется также на примере линейно растущего потенциала $V=kr+b$, для которого уравнение (2.I) решается аналитически точно при $J=0$. Собственные значения в хорошем приближении можно найти с помощью аналитической формулы /7/

$$\arccos\frac{2m+b}{M_n}-\frac{2m+b}{M_n}\sqrt{1-\frac{(2m+b)^2}{M_n^2}}=\frac{8k(-a_n)^{3/2}}{3M_n^2},$$

где a_n - n-ый отрицательный нуль функции Эйри $Ai(z)$.

Если параметры m и k зафиксировать по двум $^1S_0$ уровням чармония η_c (2.982) и η'_c (3.590), то для высших уровней получается /b=0.289 (Гэв)^2/

n	3	4	5	6
M_n	4.052	4.442	4.789	5.103
M_n^2	16.419	19.731	22.935	25.041

Легко проверить, что $Z(r)=-2k(2m+b)r^2<0$ и выполняется ожидаемое сближение уровней.

Сделаем замечание относительно предположения (2.8). В работе /8/ приводятся примеры, когда предположение (2.8) соблюдается, но (2.9) не выполняется. Поэтому добавляется еще одно условие, которое не выполняется для тех примеров, которые нарушают (2.9). В частности, добавляется условие

$$\frac{dW}{dr}>0, \quad \forall r. \tag{2.10}$$

Для линейного потенциала $V=kr+b$, $\frac{dW}{dr}=\frac{1}{2}k(2m+b+k$ При $2m+b>0$ (2.10) соблюдается, и, как было показано выше, выполняется (2.9). При $2m+b<0$ условие (2.10) нарушается, но при $2m+b<0$ и $k>0$ для уравнения (2.1) связанные состояния не существуют Казалось бы, добавление условия (2.10) разумно, но для кулоновского потенциала $\frac{dW}{dr}=\frac{1}{2}\left(2m-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}$ и (2.10) нарушается, но, тем не менее, (2.9) соблюдается. По-видимому, предположение (2.8) надо усилить другим условием, отличным от (2.10).

Заключение

Как было пояснено выше, рассмотренная релятивистская модель проблемы двухспиновых частиц по виду максимально приближена к уравнению Шредингера и допускает ряд интересных аналитически решаемых примеров. Поэтому, с одной стороны, справедливы теоремы, доказанные в работах /1-4,8/ для нерелятивистского уравнения с известными видоизменениями, и, с другой стороны, возникает возможность их проверки с помощью явных решений. Рассмотрение показывает, что в релятивистском случае сохраняются все модельно-независимые соотношения и порядок следования уровней совпадает с нерелятивистским случаем. Отсюда следует, что в спектрах кварконией, там, где наблюдено отклонение от общих закономерностей, соответствующие уровни не могут иметь одноканального происхождения.

Поступила 19.10.1988

Институт
физики высоких энергий

Литература

1. B.Baumgartner, H.Grosse, A.Martin. Phys. Lett., 146B, 363 (1984).

2. B.Baumgartner, H.Grosse, A.Martin. Nucl.Phys., 254B, 528 (1985).

3. H.Grosse, A.Martin. Phys. Lett., 134B, 368 (1984).

4. D.B.Lichtenberg, E.Predazzi, C.Rossetti. Preprint DFTT 5/88 (1988).

5. P.E.Palladino, P.Leal Ferreira. Phys. Lett., 185B, 118 (1987).

6. E.Gesztesy, B.Thaller, H.Grosse. Phys. Rev. Lett., 50, 625 (1983).
7. З.К.Силагадзе, А.А.Хелашвили. ТМФ,6I,43I.(I984).
8. A.Martin. Preprint CERN-TH. 4676/87 (1987).

თ. ნადარეიშვილი, ა. ხელაშვილი

რელატივისტური ბმული მდგომარეობების თვისებები ცენტრალური პოტენციალის შემთხვევაში კვაზიპოტენციალური მოდელის მაგალითზე

რეზიუმე

შესწავლილია რელატივისტური ბმული მდგომარეობების თვისებები კვაზიპოტენციალური მოდელის მაგალითზე. ნაჩვენებია, რომ რელატივისტურ შემთხვევაშიც ადგილი აქვს ცნობილ თეორემებს დონეთა განლაგების შესახებ, შენარჩუნებულია მოდელზე დამოუკიდებელი ყველა თანაფარდობა. თეორემებიდან გამომდინარე შედეგების სამართლიანობა შემოწმებულია ანალიზურად ამოხსნადი პოტენციალებისათვის.

T.Nadareishvili, A.Khelashvili

RELATIVISTIC BOUND-STATE PROPERTIES FOR THE CENTRAL POTENTIAL IN ONE QUASIPOTENTIAL MODEL

Summary

The properties of relativistic bound states are studied in the quasipotential model. It is shown that in the relativistic case too the known theorems on level ordering take place. Hence all model-independent relations are preserved. The validity of the consequencies of these theorems is verified for analytically solvable potentials.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, 1988

ბიპოტენციალური ელექტროსტატიკური ლინზის თეორიისათვის

მ. კობახიძე, ს. იაგანაშვილი, ი. ქლენტი

ლიტერატურაში დღემდე არ არსებობს ბიპოტენციალური ელექტროსტატიკური ლინზის ოპტიკური ძალის რამდენადმე მიახლოებული ანალიზური გამოსახულება. ჩვენ შევეცადეთ გამოგვეყვანა შესაბამისი ფორმულა და დაგვედგინა მისი გამოყენების ფარგლები როგორც კონსტრუქციული, ისე მუშაობის რეჟიმის თვალსაზრისით.

გამოსაკვლევად შევარჩიეთ ორი კოაქსიალური (ე.ი. ერთიდაიგივე სიმეტრიის ღერძის მქონე) თანაბარი რადიუსის ცილინდრი. იგულისხმება, რომ ლინზის ცენტრი მდებარეობს მათ შორის ნახევარ მანძილზე ორივე ცილინდრიდან (სიმარტივისათვის ცილინდრებს შორის მანძილი უგულებელვყოთ).

ლინზის მარცხენა ნაწილში $-\infty<z\leq 0$ (z სიმეტრიის ღერძის მიმართულების მქონე კოორდინატაა), ე.ი. ლინზის ცენტრამდე (ლინზის ცენტრი $z=0$ წერტილშია) ელექტრული პოტენციალის განაწილება ასე წარმოვადგინეთ:

$$\Phi(z)=U_1+Ae^{mz}, \qquad (1)$$

ხოლო ლინზის მარჯვენა ნაწილში $0\leq z<\infty$ კი შემდეგნაირად:

$$\Phi(z)=U_2\left(1-Be^{-nz}\right). \qquad (2)$$

(1) და (2) ფორმულებში U_1 მარცხენა ცილინდრის პოტენცი-ალია, ხოლო U_2 – მარჯვენა ცილინდრისა. A, B, n და m საძიებელი პირობებიდან განისაზღვრებიან. მიახლოებით ჩავთვალოთ, რომ $z=0$ წერტილში (ლინზის ცენტრში)

$$\Phi(0)=\frac{U_1+U_2}{2}, \quad \Phi'(0)=\frac{U_2-U_1}{R}, \qquad (3)$$

სადაც R –ცილინდრების რადიუსია. ჯერ (1) ჩავსვათ (3) -ში, შემდეგ კი (2) იმავე (3) -ში. მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$A=\frac{U_2-U_1}{2}; \quad B=\frac{U_2-U_1}{2U_2}; \quad m=n=\frac{2}{R} \qquad (4)$$

ლინზის ოპტიკური ძალა [1]

$$D=\frac{1}{f}=\frac{1}{4\sqrt{\Phi(z_2)}}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\Phi''(z)}{\sqrt{\Phi(z)}}\,dz, \qquad (5)$$

სადაც $z_1=-\frac{l}{2}$, $z_2=+\frac{l}{2}$, ხოლო l– ლინზის სიგრძეა (აქ იგულისხმება, რომ ლინზა "სქელია"). ჩვენ ოპტიკური ძალა წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{f''}, \qquad (6)$$

სადაც

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{4\sqrt{\Phi(z_2)}}\int_{-l/2}^{0}\frac{\Phi''(z)}{\sqrt{\Phi(z)}}\,dz \qquad (7)$$

წარმოადგენს ლინზის მარცხენა ნაწილის ოპტიკურ ძალას, ხოლო

$$\frac{1}{f''}=\frac{1}{4\sqrt{\Phi(z_2)}}\int_{0}^{+l/2}\frac{\Phi''(z)}{\sqrt{\Phi(z)}}\,dz \qquad (8)$$

წარმოადგენს ლინზის მარჯვენა ნაწილის ოპტიკურ ძალას.

(2) -ს და (4)-ის თანახმად

$$\Phi(z_2) = \Phi\left(+\frac{L}{2}\right) = U_2 - \frac{U_2 - U_1}{2} e^{-\frac{L}{R}}. \qquad (9)$$

ჯერ (1)-სა და (4)-ს თანახმად ვპოულობთ (7)-ს. შემდეგ (2)-სა და (4)-ს თანახმად ვპოულობთ (8)-ს. მიღებულ შედეგებს ვსვამთ (6)-ში და ვითვალისწინებთ (9)-ს. შედეგად ვღებულობთ ბიპოტენციალური ელექტროსტატიკური ლინზის ოპტიკური ძალის საძიებელ ანალიზურ გამოსახულებას

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{R\sqrt{U_2 - \frac{U_2 - U_1}{2} e^{-L/R}}} \left(2\sqrt{\frac{U_1 + U_2}{2}} - \sqrt{U_1 + \frac{U_2 - U_1}{2} e^{-L/R}} - \sqrt{U_2 - \frac{U_2 - U_1}{2} e^{-L/R}}\right) \qquad (10)$$

(10) ფორმულის საშუალებით ჩავატარეთ D-ს გამოთვლა სხვადასხვა U_2-ს, L-ს და R-ს შემთხვევაში (U_1 ფიქსირებული გვქონდა).

მიღებული შედეგები შევადარეთ იგივე კონსტრუქციის მქონე ბიპოტენციალური ელექტროსტატიკური ლინზის ოპტიკური ძალის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც იგივე პარამეტრების შემთხვევაში გამოთვლილი პოტენციალის ზუსტი განაწილებისათვის. ეს ზუსტი განაწილება ექსპერიმენტალურად დადგენილი ცნობილი მეთოდებით [2]. პოტენციალის ზუსტი განაწილების საფუძველზე ოპტიკური ძალის გამოთვლა ვაწარმოეთ სიმფსონის ფორმულით [3].

ამ შედარების საფუძველზე დავადგინეთ, რომ L პარამეტრის ზრდა იწვევს ოპტიკური ძალის ზუსტ და მიახლოებით მნიშვნელობათა შორის სხვაობის გადიდებას. ამ სხვაობას იგივე ემართება U_2-ს გადიდებით (ფიქსირებული U_1-სათვის). რაც შეეხება R პარამეტრს, მისი გადიდება იწვევს აღნიშნული სხვაობის შემცირებას.

ამგვარად, მიახლოებითი (10) ფორმულით თავისუფლად შეიძლება ვისარგებლოთ შედარებით მცირე L-ის შემთხვევაში ($0{,}001 \div 0{,}02$ მ), შედარებით დიდი R-ის შემთხვევაში ($0{,}02 \div 0{,}05$ მ) და არც ისე დიდი U_2-ს შემთხვევაში ($300 \div 500$ ვოლტი, როცა U_1 რამდენიმე ათეულიდან 100 ვოლტამდეა).

ჩატარებული გამოკვლევა (10) ფორმულის საფუძველზე იძლევა სასურველი ოპტიკური ძალის მქონე ბიპოტენციალური ელექტროსტატიკური ლინზის მიღების საშუალებას მოცემული პარამეტრებით.

შემოვიდა VIII.1988 რადიოტექნიკის კათედრა

ლიტერატურა

I. В.Г. Гапонов. Электроника, ч.I. Физматгиз, 1960.

2. А.А.Жигарев. Электронная оптика и электроннолучевые приборы, "Высшая школа", 1972.

3. И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев, Справочник по математике, "Наука", 1965.

М.Ш.Кобахидзе, С.С.Иаганашвили, И.Д. Игенти

К ТЕОРИИ БИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ

Резюме

На основе приближенного экспоненциального распределения электрического потенциала вдоль оси симметрии выведена формула оптической силы бипотенциальной электростатической линзы.

Установлены пределы применения этой формулы по параметрам конструкции и режима.

M.Kobakhidze, S.Iaganashvili, I. Zhgenti

TOWARDS THE THEORY OF A BIPOTENTIAL ELECTROSTATIC LENS

Summary

A formula of the optical power of a bipotential electrostatic lens has been derived on the basis of the approximate exponential distribution of the electric potential along the axis of symmetry. The limits of the use of this formula are set with regard to the parameters of design and regime.

Труды Тбилисского орде а Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელ. დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, I989

ВОЗМОЖНОСТЬ РЕНТГЕНОВСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ МАГНИТНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Д.В.Малазония

Взаимодействие рентгеновских лучей с электронным зарядовым распределением позволяет исследовать структуру конденсированных состояний. Поскольку рентгеновские лучи - часть спектра электромагнитного излучения, мы вправе ожидать их чувствительность к магнитному, так же, как и зарядовому распределению. Действительно, эта чувствительность давно используется для анализа поляризационных эффектов в Комптон-эффекте. В работе/I/ впервые обращено внимание на возможность использования этого свойства рентгеновских лучей для изучения магнитных плотностей в твердых телах, аналогично методу рассеяния нейтронов. Наибольшее значение в рентгеновском рассеянии на магнитных плотностях дает так называемый интерференционный член в сечении рассеяния. Поляризация рентгеновского луча в этих экспериментах круговая. Сечение для магнитного рассеяния рентгеновских лучей в $(\hbar\omega/mc^2)^2$ раз меньше сечения рассеяния нейтронов. Благодаря большой интенсивности синхротронных источников излучения и возможности накопления сигналов удается достичь интенсивности рассеянных на магнитных плотностях рентгеновских лучей сравнимой с интенсивностями нейтронных линий. Разрешение рассеянных на магнитных моментах рентгеновских лучей возможно в антиферромагнетиках (АФМ) и ферромагнетиках со спиральной структурой, зарядовые и магнитные Брэгговские максимумы которых не совпадают. Рентгеновские лучи, в отличие от метода рассеяния нейтронов, можно использовать для определения орбитального и спинового рассеяний, которые имеют разную поляризационную зависимость.

Представляет интерес возможность использования рентгеновских лучей для регистрации спиновых возбуждений. Оценка значений интерференционного члена в сечении рассеяния на магнонах дает величину, не доступную измерению. Однако на основе этого нельзя заключить, что спектроскопия магнитных возбуждений с помощью рентгеновского излучения невозможна. Так, в АФМ в поперечном магнитном поле такая возможность имеется.

Обменные параметры между невозбужденными ионами и ионами, один из которых возбужден , различны, спиновые конфигурации основного состояния АФМ и состояния с возбужденными ионами также могут не совпадать. Это предложение впервые высказано Еременко с сотр. /3/ при интерпретации деталей экситонного спектра MnF_2 . Различные спиновые конфигурации возникают только во внешнем поле, нарушающем исходную колинеарную спиновую конфигурацию /4/, при этом оси квантования спинов в основном и возбужденном состояниях не совпадают, и любые переходы могут связывать состояния с неравными спиновыми проекциями. Другими словами, неравенство параметров обменного взаимодействия в основном и возбужденном состояниях определяет принципиальную возможность рождения магнонов в процессе рассения фотона, но проявляет себя лишь в присутствии внешнего поля, которое вызывает скос подрешеток АФМ.

В случае легкоплоскостного АФМ в работе /4/ найдено, что угол между осью квантования спина иона и поперечным магнитным полем в основном (θ) и возбужденном (θ_f) состояниях определяются уравнениями:

$$\cos\theta_f = \left(1 - \frac{1}{2}æ\,\frac{g\varepsilon_s^{(f)}}{g_f\varepsilon_s}\right)\frac{\mu_0 g_f H}{\varepsilon_s^{(f)} H}, \quad \sin\theta_f = \frac{\varepsilon_s^{(f)}}{\varepsilon_s^{(f)}(H)}\sin\theta,$$

где величина

$$\varepsilon_s^{(f)}(H) = \left\{(\varepsilon_s^{(f)})^2 + \left(1 - æ\,\frac{g\varepsilon_s^{(f)}}{g_f\varepsilon_s}\right)(\mu_0 g_f H)\right\}^{1/2}$$

определяет энергию $M_f\varepsilon_s^{(f)}(H)$ спиновых подуровней возбужденного мультиплета в магнитном поле, $M_f\,\varepsilon_s^{(f)}$ - без магнитного поля, $M\varepsilon_s$ - в основном состоянии в магнитном поле (M, M_f - магнитный момент иона, в основном и возбужденном состояниях); g , g_f - фактор Ланде основного и возбужденного мультиплетов, μ_0 - магнетон Бора, $æ = \operatorname{sign} I_f$ отражает то обстоятельство, что знак обменного интеграла в возбужденном состоянии I_f может быть произволен.

Гамильтониан электронной системы АФМ в квантовом электромагнитном поле излучения в системе единиц $\hbar = 1$, $c = 1$ имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{n}\alpha}\frac{1}{2m}\,\vec{P}_{\vec{n}\alpha} - e\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha}) + \sum_{\vec{n}\alpha,\vec{m}\beta} V(|\vec{r}_{\vec{n}\alpha} - \vec{r}_{\vec{m}\beta}|) -$$
$$- \frac{e}{2m}\sum_{\vec{n}\alpha}\vec{s}_{\vec{n}\alpha}\nabla\times\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha}) - \frac{e}{2m^2}\sum_{\vec{n}\alpha}\vec{s}_{\vec{n}\alpha}\vec{E}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha})\times \tag{I}$$
$$\times\left(\vec{P}_{\vec{n}\alpha} - e\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha})\right) + \sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\left(c^+_{\vec{k}}c_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right),$$

где $\vec{n}$ указывает элементарную ячейку, α (α =I,2) - номер подрешетки АФМ, к которой относится ион. Вектор-потенциал $\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha})$ линеен по операторам рождения $c^{+}_{\vec{k}}$ и уничтожения $c_{\vec{k}}$ фотонов с волновым вектором $\vec{k}$:

$$\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha}) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{2\pi}{V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \left[\vec{\varepsilon}_{\vec{k}} c^{+}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}} + \text{э.с.} \right],$$

где V - нормировочный объем, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}}$ - единичный поляризационный вектор.

Рассеяние фотона происходит во втором порядке для членов линейных по $\vec{A}$ и в первом порядке для квадратичных членов. Наибольший вклад в рассеяние рентгеновских лучей вносит квадратичный по $\vec{A}$ член (I):

$$\mathcal{H}_1 = \frac{e^2}{2m} \sum_{\vec{n}\alpha} \left[\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha}) \right]^2 .$$

Рассеяние рентгеновского фотона с изменением волнового вектора $\vec{k}$ на $\vec{k}'$ сопровождается переходом иона с основного i состояния в кристалле в возбужденное f . Представим волновые функции этих состояний в виде произведений пространственных и спиновых частей $|i\rangle_{\vec{n}\alpha} = |g\rangle_{\vec{n}\alpha} |S\, m_0\rangle_{\vec{n}\alpha}$, $|f\rangle_{\vec{n}\alpha} = |e\rangle_{\vec{n}\alpha} |S\, m\rangle_{\vec{n}\alpha}$ (S - значение спина иона, а m - его проекция на ось квантования).

Вероятность рассеяния пропорциональна квадрату матричного элемента

$$\langle f\vec{k}' | \mathcal{H}_1 | i\vec{k} \rangle = \frac{e}{2m} \sum_{\vec{n}\alpha} {}_{\vec{n}\alpha}\langle f\vec{k}' | \left[\vec{A}(\vec{r}_{\vec{n}\alpha}) \right]^2 | i\vec{k} \rangle_{\vec{n}\alpha} =$$

$$= \frac{e}{2mc} \sum_{\vec{n}\alpha} \left(|e\rangle_{\vec{n}\alpha} \langle g| \right) d^{S}_{m m_0}(\beta) \left(|S m\rangle_{\vec{n}\alpha} \langle S m_0| \right) \times \qquad (2)$$

$$\times\left[\vec{\varepsilon}_{\vec{k}}\vec{\varepsilon}^{*}_{\vec{k}'}e^{i\Delta\vec{k}\vec{n}_{\vec{n}\alpha}}+\text{э.с.}\right]|g\rangle_{\vec{n}\alpha},$$

где $d^{s}_{mm_o}(\beta)=\langle sm|sm_o\rangle$ - "интеграл перекрытия" спиновых функций - есть функция Вигнера, $\beta=\theta_f-\theta$ - угол между осями квантования спина иона в возбужденном и основном состояниях.

Введем операторы экситонных $B^{+}_{\vec{n}\alpha}$ ($B_{\vec{n}\alpha}$) и спиновых $b^{+}_{\vec{n}\alpha}(m,m_o)\;(b_{\vec{n}\alpha}(m,m_o))$ возбуждений /5/:

$$B^{+}_{\vec{n}\alpha}=|e\rangle_{\vec{n}\alpha}\langle g|,\quad B_{\vec{n}\alpha}=\left(B^{+}_{\vec{n}\alpha}\right)^{+}=|g\rangle_{\vec{n}\alpha}\langle e|,$$

$$b^{+}_{\vec{n}\alpha}(m,m_o)=|sm\rangle\langle sm_o|,\quad b_{\vec{n}\alpha}(m,m_o)=b^{+}_{\vec{n}\alpha}(m_o,m)=|sm_o\rangle\langle sm|$$

Оператор многоспиновых возбуждений $b^{+}_{\vec{n}\alpha}(m,m_o)$ (при $|m-m_o|>1$) запишем в виде произведения операторов односпиновых возбуждений $b^{+}_{\vec{n}\alpha}$ ($b_{\vec{n}\alpha}$):

$$b^{+}_{\vec{n}\alpha}(m,m_o)=\hat{R}_{mm_o}\left(b^{+}_{\vec{n}\alpha}\right)^{|m-m_o|}.$$

Действие оператора $\hat{R}_{mm_o}$ заключается в следующем:

$$\hat{R}_{mm_o}x=\begin{cases}x & \text{при } m>m_o,\\ x^{+} & \text{при } m<m_o.\end{cases}$$

С помощью унитарных преобразований, приводящих к диагонализации экситонного и магнитного гамильтонианов, запишем операторы экситонных и односпиновых возбуждений в операторах рождения и уничтожения экситонов и магнонов /5/:

$$B^{+}_{\vec{n}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{\vec{Q},\nu}\left\{e^{-i\vec{Q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}U_{\alpha\nu}(\vec{Q})B^{+}_{\nu}(\vec{Q})+\right.$$
$$\left.+e^{i\vec{Q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}V_{\alpha\nu}(\vec{Q})B_{\nu}(\vec{Q})\right\},$$

$$b^{+}_{\vec{n}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{\vec{q},\mu}\left\{e^{-i\vec{q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}u_{\alpha\mu}(\vec{q})b^{+}_{\mu}(\vec{q})+e^{i\vec{q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}v_{\alpha\mu}(\vec{q})b_{\mu}(\vec{q})\right\},$$

$2N$ - число ионов в образце.

Матричный элемент рентгеновского рассеяния света (2) примет вид:

$$\langle f\vec{k}'|\mathcal{H}_1|i\vec{k}\rangle=\frac{e}{4mN}\sum_{\vec{n}\alpha}d^{s}_{mm_0}(\beta)\left[\vec{\varepsilon}_{\vec{k}'}\vec{\varepsilon}^{*}_{\vec{k}}e^{i\Delta\vec{k}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}+\text{э.с.}\right]\times$$
$$\times\sum_{\vec{q},\vec{Q},\nu,\mu}\left[e^{-i\vec{Q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}U_{\alpha\nu}(\vec{Q})B^{+}_{\nu}(\vec{Q})+e^{i\vec{Q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}V_{\alpha\nu}(\vec{Q})B_{\nu}(\vec{Q})\right]\times \tag{3}$$
$$\times\hat{R}_{mm_0}\left[e^{-i\vec{q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}u_{\alpha\mu}b^{+}_{\mu}(\vec{q})+e^{i\vec{q}\vec{r}_{\vec{n}\alpha}}v_{\alpha\mu}(\vec{q})\right]^{|m-m_0|}.$$

При $\beta=0,\pi$, $d^{s}_{mm_0}=d_{m_0m_0}\delta_{mm_0}$ рентгеновское рассеяние на спиновых возбуждениях не происходит, (3) описывает зарядовое рассеяние. При $\beta\neq 0,\pi$ (3) наряду с зарядовым рассеянием дает рассеяние на магнонах. Изменение волнового вектора фотона при этом равно $\Delta\vec{k}=\pm\vec{Q}\pm|m-m_0|\vec{q}$ *). Разрешающая способность метода дифракции рентгеновских лучей позволяет различать линии рассеянных на магнонах лучей с $q\gtrsim 10^4\,\text{см}^{-1}$.

Наиболее вероятные одномагнонные рассеяния описываются матричным элементом (3) при $m=m_0\pm1$. С учетом свойств функции $d^{s}_{mm_0}(\beta)$ /6/ можно заключить, что для ионов со спином $S=1/2,\ 1$ отношение интенсивностей линии магнит-

*) Выполнение наряду с этим условием закона сохранения энергии до и после рассеяния с учетом дисперсии экситонов и магнонов в АФМ возможно в рентгеновском диапазоне.

ного и зарядового рассеяний рентгеновских лучей

При не очень малых β интенсивность линии магнонного рассеяния сравнима с интенсивностью линии зарядового рассеяния. Для ионов со спином $S > 1$ при низких температурах имеется такая же оценка отношения этих интенсивностей. Однако с повышением температуры это отношение будет несколько уменьшаться.

Рассмотренный метод рассеяния рентгеновских лучей на спиновых колебаниях в неколлинеарной АФМ системе можно применять для изучения спектра магнонов с волновым вектором $q \neq 0$; он дает возможность измерения константы обменного взаимодействия и фактора Ланде в возбужденном состоянии.

Поступила 26.X.1988

Грузинский
политехнический институт

Литература

1. P.M.Platzman, N. Tzoar, Phys. Rev. B2, 3556, 1970.
2. M.Blume. J.Appl. Phys. 57(1), 3615, 1985.
3. В.В.Еременко и др. ЖЭТФ. 84, 2251, 1983.
4. В.М.Локтев. К теории обменного механизма одномагнонного рассеяния света. Препринт ИТФ-86-138Р, Киев, 1986; В.М.Локтев. ЖЭТФ, 93, 231, 1987.
5. В.I.Еременко. Введение в оптическую спектроскопию магнетиков. - Киев: "Наукова Думка", 1975.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. - М.: "Наука", 1974.

დ. მალაზონია

მაგნიტურ აღგზნებათა რენტგენული სპექტროსკოპიის შესაძლებლობა

რეზიუმე

სპინურ აღგზნებებზე რენტგენის სხივების გაბნევა შესამჩნევი შეიძლება გახდეს ანტიფერომაგნეტიკებში გარეშე განივ მაგნიტურ ველში. აღგზნებულ და ძირითად მდგომარეობებში მყოფი იონის მეზობლებთან გაცვლითი ურთიერთქმედების კონსტანტის სხვადასხვა მნიშვნელობის გამო ანტიფერომაგნეტიკებში სპინური კონფიგურაციები განსხვავდებიან. ასეთ შემთხვევაში იონის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლისას შესაძლებელია მისი სპინური პროექციის შეცვლა.

რენტგენის სხივების გაბნევა სპინურ ტალღებზე საშუალებას მოგვცემს შევისწავლოთ სისტემის მაგნონური სპექტრი ნულისაგან განსხვავებული ტალღური რიცხვით, აგრეთვე გავზომოთ აღგზნებული იონის ლანდეს ფაქტორი და მეზობლებთან გაცვლითი ურთიერთქმედების მუდმივა.

D.Malazonia

THE POSSIBILITY OF X-RAYS SPECTROSCOPY OF MAGNETIC EXCITATIONS

Summary

The scattering X-rays on spin excitations may become perceptible in an ferromagnetics in an external transverse magnetic field. Owing to the different values of the exchange interaction constant of an ion in excited and ground st with its neighbours the spin configurations in antiferromagnetics differ. In this case, thr transition of an ion into an excited state may be attended by a char of its spin projection.

The scattering of X-rays on spin waves will allow to study the magnon spectrum with a nonzero wave-vector, as well as to measure the gyromagneti

ratio of the excited ion and the constant of the exchange interaction with its neighbours.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

286, 1989

ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНОГО ВИДА СПИНОВОГО ОПЕРАТОРА ПРОЕКТИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ ЛАГРАНЖА

М.Д.Звиададзе, З.Д.Какушадзе

Во многих прикладных задачах возникает проблема интерполяции функции $f(x)$ полиномом. Одна из интерполяционных формул такого типа имеет вид

$$f(x)=P_N(x)+R_N(x),$$

$$P_N(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_N)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_N)}f(x_k), \qquad (1)$$

$$R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_N),\ \xi\in\,]\min(x_k),\max(x_k)[, \qquad (2)$$

где $P_N(x)$ - полином Лагранжа, $R_N(x)$ - остаточный член интерполяции, x_k - узлы интерполяции /1/. Из формулы (2) следует, что $R_N(x)\equiv 0$ и $f(x)\equiv R_N(x)$, если $f(x)$ - полином степени $n\leq N$.

В настоящей работе показано, что операторный аналог полинома Лагранжа естественным образом возникает в квантовомеханической задаче о нахождении явного вида оператора проектирования $\hat{P}_m(\hat{S}_z)$ произвольного спинового состояния на собственное состояние $|m\rangle$ оператора $\hat{S}_z$ /2/:

$$\hat{S}_z|m\rangle = m|m\rangle,\ m=-S,-S+1,\ldots,S;\quad S=0,1/2,1,3/2,\ldots \tag{3}$$

Оператор проектирования обладает известными свойствами:

$$\hat{P}^2_m(\hat{S}_z)=\hat{P}_m(\hat{S}_z),\quad \hat{P}_m(\hat{S}_z)|m'\rangle = \delta_{mm'}|m\rangle. \tag{4}$$

Рассмотрим произвольную операторную функцию $\hat{f}(\hat{S}_z)$. Используя (3) и (4), легко показать, что

$$\hat{f}(\hat{S}_z)=\sum_{m=-S}^{S} f(m)\hat{P}_m(\hat{S}_z). \tag{5}$$

С другой стороны, воспользуемся разложением Маклорена:

$$\hat{f}(\hat{S}_z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\hat{S}_z)^n. \tag{6}$$

Из свойств оператора $\hat{S}_z$ следует, что

$$\hat{S}_z(\hat{S}_z-1)(\hat{S}_z+1)\cdots(\hat{S}_z-S)(\hat{S}_z+S)=0,\quad S\in N,$$

$$(\hat{S}_z-\tfrac{1}{2})(\hat{S}_z+\tfrac{1}{2})\cdots(\hat{S}_z-S)(\hat{S}_z+S)=0,\quad S=K-\tfrac{1}{2},\ K\in N. \tag{7}$$

Согласно (7), степени $\hat{S}_z^n$ с $n\geq 2S+1$ линейно выражаются через более низкие степени $\hat{S}_z^K$ с $K=0,1,2,\ldots,2S$ для полуцелого S и $K=1,2,\ldots,2S$ для целого S. Поэтому бесконечный ряд (6), в конечном счете, может быть приведен к полиному степени $2S$, вследствие чего интерполяционный полином Лагранжа с аргументом $\hat{S}_z$, в котором за узлы интерполяции выбраны собственные значения оператора $\hat{S}_z$, будет точно совпадать с $\hat{f}(\hat{S}_z)$, т.е.

$$\hat{f}(\hat{S}_z)=\sum_{m=-s}^{s}(-1)^{s+m+\alpha_s}\frac{f(m)}{(s-m)!(s+m)!}\prod_{\substack{n=-s\\(n\neq m)}}^{s}(\hat{S}_z-n), \qquad (8)$$

где $\alpha_s=1$ для полуцелых s и $\alpha_s=0$ для целых s (в формуле (8) шаг m и n равен I).

Сравнивая (5) и (8), находим явный вид оператора проектирования:

$$\hat{P}_m(\hat{S}_z)=(-1)^{s+m+\alpha_s}\frac{\prod\limits_{\substack{n=-s\\(n\neq m)}}^{s}(\hat{S}_z-n)}{(s-m)!(s+m)!}. \qquad (9)$$

Учитывая (3), легко показать, что оператор (9) действительно обладает свойствами (4).

В заключение приведем некоторые частные случаи:

I. $s=\frac{1}{2},\ m=\pm\frac{1}{2},\ \hat{P}_m(\hat{S}_z)=\frac{1}{2}+2m\hat{S}_z$;

2. $s=1,\ m=0,\pm1,$

$$\hat{P}_{\pm1}(\hat{S}_z)=\frac{1}{2}\hat{S}_z(\hat{S}_z\pm1),\quad \hat{P}_0(\hat{S}_z)=(1+\hat{S}_z)(1-\hat{S}_z);$$

3. $s=\frac{3}{2},\ m=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},$

$$\hat{P}_{\pm\frac{3}{2}}(\hat{S}_z)=\frac{1}{6}(\hat{S}_z-\frac{1}{2})(\hat{S}_z+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}\pm\hat{S}_z),$$

$$\hat{P}_{\pm\frac{1}{2}}(\hat{S}_z)=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\hat{S}_z)(\frac{3}{2}-\hat{S}_z)(\frac{1}{2}\pm\hat{S}_z).$$

Поступила 30.II.1988

Грузинский

политехнический институт

Литература

1. А.В.Игнатьева, Т.И.Краснощекова, В.В.Смирнов. Курс высшей математики. М., "Высшая школа", 1968.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., "Наука", 1974, с.752.

მ. ზვიადაძე, ზ. კაკუშაძე

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის გამოყენებით პროექტორების სპინური ოპერატორის ცხადი სახის მიღება

რეზიუმე

მიღებულია პროექტორების სპინური ოპერატორის ცხადი სახე, რა საშუალებას იძლევა გამოითვალოს გამოსახულება $\hat{f}(\hat{S}_z)\psi$ ნებისმიერი f-სა და ψ-სათვის.

M.Zviadadze, Z.Kakushadze

DERIVATION OF AN EXPLICIT FORM OF THE SPIN PROJECTION OPERATOR USING THE LAGRANGE INTERPOLATION FORMULA

Summary

An explicit form of the spin projection operator which enables to evaluate the expression $\hat{f}(\hat{S}_z)\psi$ for the arbitrary functions f and ψ has been derived.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, 1969

О ВЫБОРЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

В.Р.Гарсеваншвили, М.Б.Шефтель

Двухчастичная амплитуда рассеяния может быть представлена как функция на гиперболоиде для прямого и кросс-канала преобразованием от мандельстамовских инвариантов s, t, u к новым инвариантным переменным.

В настоящей работе рассмотрена стереографическая проекция с гиперболоида на плоскость, приводящая к новым инвариантным переменным. В новых переменных амплитуда рассеяния в физической области является функцией, определенной на плоскости. Внутренность единичного круга на плоскости соответствует физической области прямого канала, а его внешность - физическим областям кросс-каналов.

I. Введение

Выбор переменных играет существенную роль при анализе различных характеристик физических систем. Неудачный выбор переменных приводит, например, к кинематическим сингулярностям и кинематическим дополнительным условиям (см., например, /I/), а удачный их выбор дает возможность вскрыть дополнительные симметрии рассматриваемой задачи (см., например, /2/).

Если ограничиться анализом амплитуды рассеяния в физической области, то переменные Мандельстама s , t , u неудобны, так как граница физической области имеет сложный вид в этих переменных, а пределы изменения одной из них зависят от значений других переменных. Это затрудняет, в частности, исследование амплитуды с помощью разложений по полным системам функций в физической области.

Двухчастичную амплитуду рассеяния можно представить как функцию на гиперболоиде с помощью преобразования от инвариантов Мандельстама к новым инвариантным переменным - координатам на гиперболоиде /3/. Новые переменные имеют независимые пределы изменения, что позволяет разложить амплитуду по полной системе функций на гиперболоиде.

В настоящей работе рассмотрена стереографическая проекция с гиперболоида на экваториальную плоскость /4/.

При этом вместо координат на гиперболоиде возникают новые инвариантные переменные - координаты на плоскости. Физическая амплитуда рассеяния есть функция, определенная на плоскости, причем внутренность единичного круга соответствует физической области прямого канала, а его внешность - физическим областям кросс-каналов. Все точки новой плоскости физические : каждой точке физической области в плоскости Мандельстама взаимно однозначно соответствует точка плоскости Пуанкаре.

Если далее сделать предположение о том, какому классу функций на плоскости относится физическая амплитуда рассеяния, то это будет динамическим требованием, из которого вытекают следствия для наблюдаемых величин. Поэтому здесь рассматривается только кинематическая часть задачи, связанная с отображением на плоскость Пуанкаре и выбором переменных.

Специальное предположение о классе функций, к которому относится амплитуда рассеяния, и его следствия для измеряемых величин будут рассмотрены отдельно.

2. Амплитуда рассеяния как функция на гиперболоиде

Амплитуда рассеяния для двухчастичных реакций

$$a_1 + a_2 \longrightarrow a_3 + a_4$$

с равными массами может быть представлена как функция на гиперболоиде /3/

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1. \qquad (1)$$

Здесь мы выберем следующую конкретную связь переменных x_0, x_1, x_2 с переменными Мандельстама s, t, u в прямом s - канале:

$$x_0 = \frac{\sqrt{s}}{2m}, \quad x_1 = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{tu}{s-4m^2}}, \quad x_2 = \frac{u-t}{2m\sqrt{s-4m^2}} \qquad (2)$$

(Основные результаты не связаны с выбором именно этой конкретной параметризации). Кроссинг-преобразование получается аналитическим продолжением координат x_0, x_1, x_2:

$$x_0' = \varepsilon i x_0 = \frac{\varepsilon\sqrt{-s}}{2m}, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = i x_2 = \frac{u-t}{2m\sqrt{4m^2-s}}. \qquad (3)$$

$\varepsilon = \pm 1$ для u - или t - канала соответственно и кросс-каналы отображаются на гиперболоид:

$$x_2'^2 - x_1'^2 - x_0'^2 = 1. \tag{4}$$

Правая пола гиперболоида (4) с $x_2' > 0$ соответствует u-каналу, а левая пола с $x_2' < 0$ — t - каналу.

Отметим, что s - каналу соответствуют только точки верхней полы гиперболоида (I), удовлетворяющие условию

$$x_0 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \tag{5}$$

а u- и t-каналам - точки гиперболоида (4), удовлетворяющие условиям

$$x_0' \geq 0, \; x_1' \geq 0, \; x_2' \geq 1 \qquad u\text{ - канал} \tag{6}$$

и

$$x_0' \leq 0, \; x_1' \geq 0, \; x_2' \leq -1 \qquad t\text{ - канал} \tag{7}$$

3. Стереографическая проекция с гиперболоида на плоскость

Геометрия гиперболоида может быть реализована на плоскости /4,5/. Она получается с помощью стереографической проекции верхней полы гиперболоида из вершины нижней полы на координатную плоскость $x_0 = 0$.

Рассмотрим вначале верхнюю полу гиперболоида (I), соответствующую s - каналу. Стереографическая проекция задается формулами:

$$x=\frac{x_1}{x_0+1}, \qquad y=\frac{x_2}{x_0+1}, \tag{8}$$

где x, y - декартовы координаты в плоскости $x_0=0$. Обратное преобразование имеет вид:

$$x_0=\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}, \quad x_1=\frac{2x}{1-x^2-y^2}, \quad x_2=\frac{2y}{1-x^2-y^2}. \tag{9}$$

Формулы (8),(9) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между точками верхней полы гиперболоида (I), соответствующими s - каналу (условие (5)), и точками правой половины единичного круга на плоскости Пуанкаре с центром в начале координат:

$$x^2+y^2\leq 1, \quad x\geq 0. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь стереографическую проекцию гиперболоида (4), соответствующего кросс-каналам, на его экваториальную плоскость $x_2'=0$:

$$x'=\frac{x_1'}{\varepsilon x_2'+1}, \quad y'=\frac{x_0'}{\varepsilon x_2'+1}, \tag{11}$$

$$\varepsilon=\pm 1 \quad (\text{ср. с } (3)). \tag{12}$$

Здесь x', y' - декартовы координаты в плоскости $x_2'=0$. При этом физическая область u - канала отображается в I квадрант единичного круга в плоскости $x_2'=0$

$$x'^2+y'^2\leq 1, \quad x'\geq 0, \quad y'\geq 0, \tag{13}$$

а физическая область t - канала отображается в IУ квадрант этого круга

$$x'^2+y'^2\le 1,\quad x'\ge 0,\quad y'\le 0 \tag{14}$$

(см.условия (6),(7)).

Далее отобразим внутренность единичного круга в плоскости $x_2'=0$ на его внешность и совместим плоскости $x_2'=0$ и $x_0=0$. Тогда прямой канал займет внутренность единичного круга в правой полуплоскости, а кросс-каналы - внешность круга в этой полуплоскости.

Внутренность круга отображается на его внешность преобразованием инверсии

$$z=\frac{1}{z'}, \tag{15}$$

где

$$z=x+iy,\quad z'=x'+iy', \tag{16}$$

и новые координаты x, y определяются следующим образом:

$$x=\frac{x'}{x'^2+y'^2},\quad y=-\frac{y'}{x'^2+y'^2}. \tag{17}$$

При этом физическая область u - канала отображается во внешность единичного круга в IУ квадранте:

$$x^2+y^2\ge 1,\quad x\ge 0,\quad y\le 0, \tag{18}$$

а область t - канала - во внешность круга в I квадранте:

$$x^2+y^2\ge 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0. \tag{19}$$

С учетом преобразований (II) и (I7) связь переменных x, y с координатами на гиперболоиде (4) кросс-каналов приобретает следующий вид:

$$x = \frac{x_1'}{\varepsilon x_2' - 1}, \quad y = -\frac{\varepsilon x_0'}{\varepsilon x_2' - 1}, \qquad (20)$$

где величина

$$x_0' = i x_0 \qquad (21)$$

определна теперь одинаково для t- и u- канала[x)].

Совместим теперь плоскости $x_0 = 0$ и $x_2' = 0$ и назовем полученную плоскость z-плоскостью:

$$z = x + iy. \qquad (22)$$

Физическая область прямого канала отображается в правую половину единичного круга, а кросс-каналы – во внешность полукруга в правой полуплоскости посредством преобразований (8) и (20), соответственно. Все точки правой z -полуплоскости являются физическими.

4. Преобразование z - полуплоскости W -плоскость к универсальной переменной W.

Новые инвариантные переменные x, y определены формулами (8), (20) по-разному для разных каналов. Чтобы перейти к переменной W, универсальной для всех каналов, сделаем преобразование z-полуплоскости в W-плоскость, переводящее правый полукруг в единичный круг. Это преобразование оставляет неподвижными 3 точки единичной окружности:

---

x) Величина x_0', определенная формулой (3), отличалась знаком ε для u- и t -канала.

$$(x=1,\ y=0),\ (x=0,\ y=1),\ (x=0,\ y=-1), \qquad (23)$$

а точку ($x=0,\ y=0$) переводит в точку с координатами ($U=-1$, $V=0$). Эти условия определяют искомое преобразование, которое имеет вид:

$$W=\frac{z^2+2z-1}{-z^2+2z+1}, \qquad (24)$$

где

$$W=U+iV. \qquad (25)$$

Декартовы координаты U , V в W -плоскости связаны с координатами x , y в z -плоскости соотношениями:

$$U=\frac{4x^2-(x^2+y^2-1)^2}{[(x-1)^2+y^2-2]^2+8y^2}, \qquad (26а)$$

$$V=\frac{4y(x^2+y^2+1)}{[(x-1)^2+y^2-2]^2+8y^2}. \qquad (26б)$$

Формулы (8) и (20) позволяют связать координаты в W -плоскости с координатами на гиперболоиде:

$$U=\frac{x_1^2-1}{(x_1+1)^2+2x_2^2}, \qquad (27а)$$

$$W=\frac{2x_2 x_0}{(x_1+1)^2+2x_2^2} \qquad (27б)$$

для прямого канала и

$$U = \frac{x_1'^2 - 1}{(x_1' - 1)^2 + 2x_0'^2}, \tag{28a}$$

$$V = \frac{-2x_0' x_2'}{(x_1' - 1)^2 + 2x_0'^2} \tag{28б}$$

для кросс-каналов. Воспользовавшись соотношением (3) между координатами на гиперболоидах (I) и (4), можно выразить U, V через x_0, x_1, x_2 для всех каналов:

$$U = \eta \frac{x_1^2 - 1}{(x_1 + 1)^2 + 2x_2^2}, \tag{29a}$$

$$V = \eta \frac{2x_2 x_0}{(x_1 + 1)^2 + 2x_2^2}, \tag{29б}$$

где

$$\eta = \mathrm{sign}\left[(x_1 + 1)^2 + 2x_2^2\right]. \tag{30}$$

Так как

$$(x_1 + 1)^2 + 2x_2^2 = -\left[(x_1' - 1)^2 + 2x_0'^2\right], \tag{31}$$

то

$$\eta = \pm 1 \tag{32}$$

для прямого и кросс-каналов соответственно.

Итак, формулы (29) определяют преобразование от координат на гиперболоиде к новым инвариантным переменным U, V - декартовым координатам в W-плоскости, универсальным для всех каналов. Физической области прямого канала соответствует единичный круг в W-плоскости с центром в начале координат. Физическим областям t- и u- каналов соответствует внешность единичного круга в верхней и нижней полуплоскости, соответственно.

Преобразование (29) с гиперболоида на W-плоскость не зависит от параметризации гиперболоида через инварианты Мандельстама, т.е. от соотношения между x_0, x_1, x_2 и s, t, u.

5. Соответствие между физической областью в плоскости Мандельстама и z-плоскостью

Рассмотрим здесь подробно только одну параметризацию гиперболоида, задаваемую формулами (2), наиболее тесно связанную с энергией и углом рассеяния в системе центра масс s-канала. Тогда формулы (2) и (8) определяют преобразование мандельстамовской физической области s-канала на правую половину единичного круга в z-плоскости

$$x = \frac{2\sqrt{tu}}{(\sqrt{s}+2m)\sqrt{s-4m^2}}, \tag{33а}$$

$$y = \frac{u-t}{(\sqrt{s}+2m)\sqrt{s-4m^2}}. \tag{33б}$$

Линии (см.рис.I) фиксированной энергии в z-плоскости есть правые половины окружностей фиксированного радиуса:

$$r^2 = x^2+y^2 = \frac{\sqrt{s}-2m}{\sqrt{s}+2m} \leq 1. \tag{34}$$

Точки единичной полуокружности соответствуют асимптотическим энергиям:

$$\tau \to 1 \quad \text{при} \quad s \to \infty \tag{35}$$

при различных фиксированных значениях угла рассеяния θ_s в системе центра масс (с.ц.м.) s-канала. Линии фиксированного θ_s есть лучи, исходящие от начала координат, на которых фиксирован полярный угол φ :

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{u-t}{s-4m^2} = -\cos\theta_s \tag{36}$$

или

$$\varphi = \theta_s - \frac{\pi}{2}, \tag{37}$$

где

$$0 \le \theta_s \le \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \tag{38}$$

Преобразование физических областей кросс-каналов в плоскости Мандельстама на внешность единичного круга в правой z-полуплоскости определяется формулами (3), (20):

$$x = \frac{\sqrt{-tu}}{\varepsilon\frac{u-t}{2} - m\sqrt{4m^2-s}}, \tag{39а}$$

$$y = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{s(s-4m^2)}}{\frac{u-t}{2} - \varepsilon m\sqrt{4m^2-s}}, \tag{39б}$$

где для t-канала $y \ge 0$, для u-канала $y \le 0$. Новые переменные x, y -декартовы координаты в z-плоскости определены формулами (33) и (39) по-разному в прямом и кросс-каналах.

Поэтому кроссинг-преобразование удобнее рассматривать в W-плоскости, где декартовы координаты U, V есть переменные, универсальные для всех каналов.

6. Соответствие между физической областью в плоскости Мандельстама и W-плоскостью

С помощью формул (2) и (29) получаем соответствие между точками физической области в плоскости Мандельстама и W-плоскости:

$$U=\eta\,\frac{tu-m^2(s-4m^2)}{(m\sqrt{s-4m^2}+\sqrt{tu}\,)^2+\frac{1}{2}(u-t)^2}, \tag{40a}$$

$$V=\eta\,\frac{\frac{1}{2}(u-t)\sqrt{s(s-4m^2)}}{(m\sqrt{s-4m^2}+\sqrt{tu}\,)^2+\frac{1}{2}(u-t)^2}, \tag{40б}$$

где

$$\eta=\pm 1 \tag{41}$$

для прямого и кросс-каналов, соответственно.

В переменных U, V физическая амплитуда рассеяния является функцией, определенной на плоскости. Внутренность единичного круга с центром в начале координат соответствует физической области s-канала, его внешность в верхней полуплоскости – t-каналу, внешность круга в нижней полуплоскости – u-каналу. Дуга единичной окружности в I и IУ квадрантах соответствует асимптотическим энергиям в каждом из каналов для различных значений угла рассеяния. В частности, точка ($U=0$, $V=-1$) соответствует рассеянию вперед

($t=0$) при $s \to \infty$, а точка ($U=0$, $V=1$) - рассеянию назад при $s \to \infty$. Дуга единичной окружности во II квадранте соответствует рассеянию назад ($u=0$), а в III квадранте - рассеянию вперед ($t=0$) для разных значений энергии. Точка ($U=-1$, $V=0$) соответствует порогу любого канала. Подробнее это соответствие можно проследить на рис.2.

7. Заключение

Введенные нами переменные $U(s,t,u)$ и $V(s,t,u)$, определенные как декартовы координаты на плоскости W , при физических значениях мандельстамовских инвариантов s , t , u принимают вещественные значения и множество их значений заполняет всю W-плоскость.

Если рассматривать амплитуду рассеяния как функцию двух комплексных переменных s и t, то W-плоскость будет соответствовать той области 4-мерного многообразия вещественных величин $Re\,s$, $Im\,s$, $Re\,t$, $Im\,t$, в которой $Im\,s = Im\,t = 0$.

Рассмотрение амплитуды рассеяния как функции на W - плоскости может оказаться удобным при изучении кросс-симметрии и вопросов асимптотического поведения различных характеристик упругого рассеяния.

Авторы выражают искреннюю признательность В.С.Владимирову, А.Д.Донкову, В.Г.Кадышевскому, А.Н.Квинихидзе, М.А. Мествиришвили, В.А.Мещерякову, Р.М.Мир-Касимову, Л.А.Слепченко, Я.А.Смородинскому, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову,

И.С.Шапиро за интересные обсуждения.

Поступила I5.I2.I988 ИФВЭ ТГУ

Литература

I. G.Cohen-Tannoudji, A.Morel, H.Navelet. Ann. Phys. 406 239 (1968);
E.Leader. Phys. Rev. 166, 1599 (1968).

2. V.A.Fock. Zs. Phys. 98, 145 (1935);
Н.Н.Боголюбов, УМЖ, 2, 3 (I950), см.также Избранные труды, т.2, Киев (I970);
M.Toller, Nuovo Cim. 53A, 671 (1968);
Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев, ТМФ, I0, I62(I97I).

3. П.Винтерницц, Я.А.Смородинский, М.Б.Шефтель. ЯФ, 7, I325 (I968).

4. H.Poincaré. Les géometries non-euclidiènnes, Oeuvres, Paris Gauthier-Villars, 1951.

5. Б.А.Розенфельд. Неевклидовы пространства,"Наука" М., I969;
И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Обобщенные функции,т.5, Физматгиз, М., I962.

ვ. გარსევანიშვილი, მ. შეფტელი

ინვარიანტული ცვლადების შერჩევის შესახებ ორნაწილაკოვანი პროცესებისათვის

რეზიუმე

ორნაწილაკოვანი გაბნევის ამპლიტუდა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც ფუნქცია ჰიპერბოლოიდზე პირდაპირი და კრ.ს-არხებისათვის მანდელშტამის s, t, u -ცვლადებიდან ახალ ინვარიანტულ ცვლადებზე გადასვლით.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია სტერეოგრაფიული პროექცია ჰიპერბოლოიდიდან სიბრტყეზე, რომელსაც მივყავართ ახალ ინვარიანტულ ცვლადებამდე, ახალ ცვლადებში ამპლიტუდა წარმოადგენს ფუნქციას სიბრტყეზე. ერთეულოვანი წრეწირის შიგნით მდებარე არე შეესაბამება პირდაპირ არხს, ხოლო მის გარეთ მდებარე არე კი კროს-არხებს.

V.Garsevanishvili, M.Sheftel

ON THE CHOICE OF INVARIANT VARIABLES FOR TWO-BODY PROCESSES

Summary

Two-body scattering amplitude can be presented as a function on the hyperboloid for the direct and cross-channels by transfo[illegible]ation from the Mandelstam variables s, t, u to some new variables.

In the present paper a stereographic projection from the hyperboloid into the plane is considered, leading to new invariant variables. The pysical scattering amplitude is a function on the plane in new variables. The internal part of the unit circle on this plane corresponds to the physical region of the direct channel, while the external part corresponds to the cross-channels

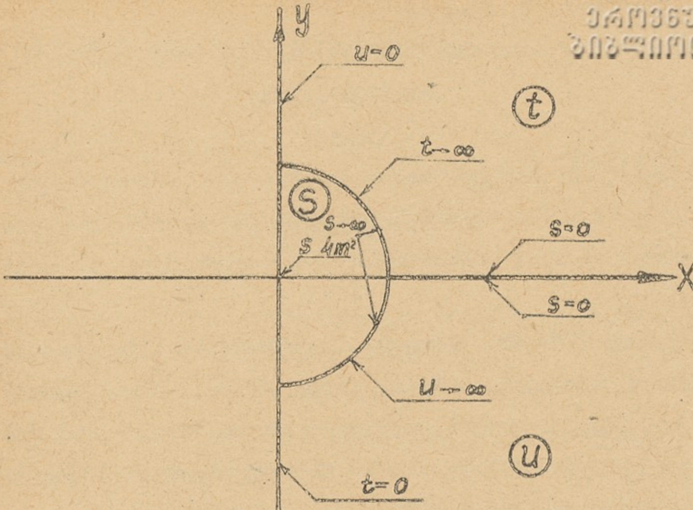


Рис. I. z - плоскость

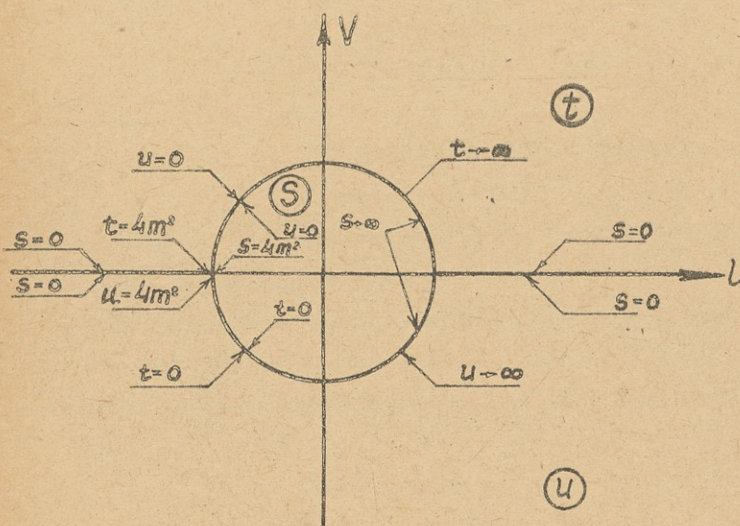


Рис. 2. W - плоскость

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, 1989

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОТОНОВ И π^--МЕЗОНОЕ В ЯДРО-ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ИМПУЛЬСЕ 4,5 ГэВ/с НА НУКЛОН

Г.Л.Варденга[x], Т.Д.Джобава, Э.О.Оконов[x],
И.И.Тулиани, Л.В.Чхаидзе, М.Х.Аникина[x]

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все большее внимание уделяется исследованию ядро-ядерных взаимодействий при высоких энергиях. Представляет интерес исследование свойств ядерной материи в экстремальных условиях. Выдвигаются предположения о возможности фазовых переходов ядерной материи в пионный конденсат /I,2/, кварк-глюонную плазму /3,4/. Экспериментальное обнаружение подобного рода переходов невозможно без понимания механизма взаимодействия, без исследования характеристик процессов множественного рождения в ядро-ядерных соударениях. В связи с этим большое значение имеет изучение свойств π^--мезонов и вторичных протонов, которые характеризуют динамику процесса столкновения, в частности, температуру ядерной системы. Накоплен большой экспериментальный материал по взаимо-

---

[x] Объединенный институт ядерных исследований, г.Дубна.

действиям релятивистских ядер. Получены инклюзивные распределения барионов и мезонов из неупругих и центральных ядро-ядерных взаимодействий в широком диапазоне масс сталкивающихся ядер при энергиях Бэвалака в Беркли /5-11/ и Дубненского синхрофазотрона /12/.

Настоящая работа посвящена анализу импульсных и угловых распределений протонов и π^- - мезонов во взаимодействиях ядер He, C с ядрами Li, C, Ne, Cu, Pb на установке СКМ-200 /13/ при импульсе Р=4,5 ГэВ/с на нуклон с целью получения их температур и сравнения с предсказаниями теоретических моделей. Результаты исследования пионообразования на стримерном спектрометре СКМ-200 в неупругих и центральных ядро-ядерных столкновениях опубликованы в работе /12/.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальные данные получены на установке СКМ-200 /14/, состоящей из двухметровой стримерной камеры, помещенной в магнитное поле с напряженностью 0,8 Т, и системы запуска. Твердые мишени в виде тонких дисков толщиной (0,2÷0,5) г/см^2 устанавливались внутри эффективного объема камеры. Мишенью служил также чистый Ne (газ-наполнитель камеры).

Система запуска состояла из двух групп сцинтиляционных счетчиков, одна из котсрых располагалась перед камерой и выделяла пучковую частицу, а другая - за камерой (счетчики работали в антисовпадательном режиме). Было использовано две триггерных системы:

- система, отбирающая столкновения /15-17/;
- триггер отбора центральных столкновений /13,16,17/.

Триггер отбора центральных столкновений выделял события, в которых в пределах угла запрета θ_{ch} =2,4° или θ_{ch} =2,9° отсутствовали заряженные фрагменты-спектаторы ядра снаряда (P/Z > 3 ГэВ/с, эффективность регистрации одной заряженной частицы $\sim$ 99%). В последних экспозициях в антисовпадательную часть был включен и нейтронный детектор, перекрывающий угол θ_n =1,8° или θ_n =2,8° (эффективность регистрации одного спектаторного нейтрона $\sim$ 80%). Вариант триггера для данного ансамбля событий обозначен через Т (θ_{ch}, θ_n), где θ_{ch} и θ_n округлены до градуса. Таким образом, неупругим столкновениям соответствует Т (0,0).

При отборе центральных столкновений ядер He в количестве исходного ансамбля были взяты неупругие столкновения, и на основе измерений всех вторичных заряженных частиц был выделен подансамбль центральных столкновений, не содержащий заряженных релятивистских фрагментов ядра-снаряда (с P/Z > 3 ГэВ/с и с углом вылета θ_{ch} , меньшим, чем 2°) триггер Т (2,0).

Представленные в работе импульсные и угловые распределения протонов для $HeLi$, HeC и CNe соударений получены путем вычитания из распределений однозарядных положительных частиц, куда входят протоны (с примесью дейтронов d и тритонов t) и π^+- мезоны, распределений π^-- мезонов, полученных с пересчетом на массу протона. Здесь использован тот факт, что во взаимодействиях изотопически-симметричных ядер распределения π^+- и π^- - мезонов совпадают. Примесь d -, t - и π^+-мезонов среди протонов по различным оценкам составляет не более 10% /5,10,18/.

Ошибки в определении импульсов вторичных однозарядных частиц с $P_{лаб.} > 0,270$ ГэВ/с составляют $\sim 8-10\%$ и углов $\sim 1^{\circ} \div 2^{\circ}$.

В таблице I приводятся числа событий в исследованных группах взаимодействий ($HeLi$, HeC, CNe, CCu, OPb), число π^{-}-мезонов и протонов и средние значения их кинематических характеристик: $\langle P_{лаб.} \rangle$, $\langle P_T \rangle$, $\langle y_{лаб.} \rangle$, $\langle X_F \rangle$.

Для исключения примеси фрагментов A_P и A_T исследовали распределение по быстроте в лабораторной системе $y_{лаб.} = \frac{1}{2} \ln \frac{E+P_{\parallel}}{E-P_{\parallel}}$.

На рис.2 показаны распределения по $y_{лаб.}$ отрицательных пионов и протонов для CNe взаимодействий.

Среди вторичных протонов могут быть стриппинговые протоны. Определение стриппингового протона (d, t) не совсем однозначно. Упругое рассеяние нуклонов из налетающего ядра на нуклонах ядра-мишени, дифракционная диссоциация ядер-снарядов, упругая перезарядка нейтронов в протоны дают вклад в импульсные и угловые распределения, характерные для спектаторов. Как показал анализ распределений протонов по быстроте $y_{лаб.}$ в $HeLi$, HeC и CNe взаимодействиях, спектаторы попадают в интервале по $y=1,8\div3,0$, а испарительные протоны (протоны-фрагменты мишени) - по $y=-0,2\div0,3$. Поэтому в распределениях по y вторичных протонов в $HeLi$, HeC и CNe соударениях мы выделили наиболее центральную область $y=0,4\div1,6$. Протоны, попадающие в этот интервал, можно классифицировать как протоны-участники и использовать их для анализа. Для π^{-}-мезонов в $HeLi$, HeC и

CNe столкновениях (почти симметричные пары ядер) выделили интервал по $У$=0,5÷2,I, а в CCu и OPb соударениях - по $У$=0,I-I,8.

АНАЛИЗ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ π^--МЕЗОНОВ

О степени анизотропии в испускании пионов можно судить, изучая угловые распределения в с.ц.м. сталкивающихся ядер.

Экспериментальные спектры мы аппроксимировали соотношением /I8/:

$$\frac{dN}{d\cos\theta^*} = const(1+a\cos^2\theta^*). \qquad (I)$$

После интегрирования по $\cos\theta^*$ соотношения (I) получаем коэффициент анизотропии

$$R = \frac{a}{a+3}.$$

На рис.I приведены распределения π^--мезонов по $\cos\theta^*$. (θ^* - угол вылета в с.ц.м.) в HeC , CNe и CCu соударениях. В таблице 2 приведены результаты аппроксимации. Как видно из таблицы, $R \simeq 0,25$. Таким образом, $\sim$25% отрицательных пионов испускаются неизотропно. Была исследована зависимость R от кинематической энергии в с.ц.м. E_K в трех интервалах: $E_K \leq 0,2$ ГэВ, $0,2 < E_K < 0,4$ ГэВ, $E_K \geq 0,4$ ГэВ (таблица 3). Из таблицы 3 видно, что R растет от 0,I до 0,5 для различных пар ядер.

В центральных столкновениях $ArKCl$ при энергии I,8 ГэВ на нуклон для π^--мезонов R=0,I6, а что касается зависимости R от E_K , то при $E_K < 0,4$ ГэВ R растет в пределах от 0,05 до 0,45, достигая максимального значения 0,45 при E_K=300 МэВ, и потом при $E_K \geq 0,4$ ГэВ уменьшается и становится $< 0{,}2$ /21/.

Рост коэффициента анизотропии R от E_K для пионов предсказывают расчеты по каскадным моделям /20,28/. В этих моделях ядро-ядерные взаимодействия описываются последовательными нуклон-нуклонными столкновениями. Каждое ядро рассматривается, как нуклонный газ, движущийся в потенциальной яме, т.е. нуклоны в ядре связаны. В расчетах учитывается распределение нуклонной плотности, кинематика образования изобар, поглощени. пиона парой нуклонов. Заложены экспериментальные сечения элементарных упругих и неупругих NN взаимодействий.

Коэффициент анизотропии в нашем случае больше, чем в $ArKCl$ соударениях. Это различие, видимо, можно объяснить следующим образом: в ядро-ядерных столкновениях центральные части ядер с большей плотностью взаимозамедляются (взаимнотормозятся) и распадаются изотропно, тогда как на периферии, вблизи поверхностей ядер, вдоль экватора, перпендикулярно к оси пучка образовывается разреженная область (эффект "короны"), в которой нуклоны испытывают одно или два столкновения. Это недостаточно для установления термодинамического равновесия. Таким образом происходят прямые реакции $NN \rightarrow N\Delta \rightarrow NN\pi$, вследствие чего пионы испускаются неизотропно. С ростом масс сталкивающихся ядер число нуклонов, попадающих в эту область, растет как $2A^{\alpha}$, $\frac{1}{3}<\alpha<\frac{2}{3}$, а доля нуклонов от полного числа $2A$, испытавших только одно столкновение, уменьшается как $A^{\alpha-1}$ /19/. Так как наш набор ядер легче, чем $ArKCl$ система, а энергия вдвое больше, то эффект прозрачности ядер в нашем случае возрастает. Доля нуклонов, испытавших одно или два столкновения увеличивается. Таким образом, вклад прямых реакций в нашем случае возрастает и R соответственно больше.

ТЕМПЕРАТУРА ПРОТОНОВ И π^--МЕЗОНОВ

Температура возбужденной системы адронов является одним из важнейших канонических параметров, определяющих состояние системы. Температуру мы оценили двумя методами: по наклону наблюдаемого инклюзивного спектра по E_K протонов и π^--мезонов и с использованием распределения по поперечному импульсу.

Проанализировали неинвариантные инклюзивные спектры $\frac{d^3\sigma}{d\bar{p}^3}=\frac{1}{EP}\frac{dN}{dE_K}$ протонов и пионов (P - импульс, E - полная энергия, E_K - кинетическая энергия рассматриваемых частиц в с.ц.м.). Экспериментальные спектры аппроксимировали экспоненциальной зависимостью:

$$F(E_K)=\frac{1}{PE}\frac{dN}{dE_K}=A\exp\left(-E_K/T\right). \qquad (2)$$

Величина T в формуле (2) определяет среднюю кинетическую энергию рассматриваемых частиц и, следовательно, характеризует температуру ядерной материи в той стадии ее расширения, когда испускаются данные частицы. Поэтому параметр T обычно называется средней или инклюзивной температурой.

Температура может быть найдена также из распределений по поперечному импульсу. Этот метод был предложен в термодинамической модели Хагедорна /22/, в которой предполагается, что в столкновении формируются горячие источники (один или несколько) и они движутся вместе вдоль оси столкновения. Продольная скорость и температура источника определяются законами сохранения энергии и импульса. Некоторые авторы утверждают /22,28/, что распределение по $P_\perp$ для оценки температуры предпочтительнее в силу инвариантности этой величины. Распределения по $P_\perp$ аппроксимировали следующей формулой /19,22/:

$$\frac{dN}{dP_\perp} = const\, P_\perp E_\perp K_1\left(\frac{E_\perp}{T}\right) \approx const\, P_\perp (TE_\perp)^{1/2} exp(-E_\perp/T), \quad (3)$$

$$E_\perp = (P_\perp^2 + m^2)^{1/2},$$

$K_1(x)$ - функция Мак-Дональда.

Значения температур протонов и π^--мезонов для центральной области по y ($0,4 \leqslant y_{лаб.} \leqslant 1,6$ для протонов и $0,5 \leqslant y_{лаб.} \leqslant 2,1$ для пионов), полученные по наклонам неинвариантных спектров E_K и спектров по $P_\perp$ по формуле Хагедорна (3) для пар ядер $HeLi$, HeC и CNe, представлены в таблице 4. Соответствующие распределения с результатами аппроксимации показаны на рис.3-6. Как видно из таблицы 4, получили совпадающие оценки температур для пионов и протонов двумя подходами. Видна зависимость температуры T протонов от массовых чисел снаряда и мишени (A_P, A_T). Температура растет с ростом A_P и A_T: $T_P = (118 \pm 3)$ МэВ для $HeLi$, $T_P = (134 \pm 3)$ МэВ для CNe. Значения температуры π^--мезонов не зависят от A_P, A_T и $T_{\pi^-} \approx (95 \pm 2)$ МэВ. Ранее, в нашем эксперименте для π^--мезонов, рожденных ассоциативно с кумулятивными Λ^0 - частицами (кумулятивные Λ^0-частицы - это выходящие за пределы кинематической области NN взаимодействий) в CNe, CC, ONe столкновениях, получили T_{π^-} =(114±11) МэВ (для T_{Λ^0} =(150±19) МэВ)/23/.

В таблице 4 приведены также значения температур протонов и π^--мезонов из центральных CC столкновений, при импульсе P=4,2 ГэВ/с на нуклон /24/, полученные по наклонам неинвариантных спектров по E_K. Анализировались π^--мезоны и протоны, испущенные под углом, близким к 90° в с.ц.м. сталкивающихся ядер ($60^\circ \leqslant \theta^* \leqslant 120^\circ$, $70^\circ \leqslant \theta^* \leqslant 110^\circ$, $80^\circ \leqslant \theta^* \leqslant 100^\circ$). Как видно из таблицы, T_p для CC столкновений больше примерно на 25 МэВ, чем наш результат для CNe. Значения температур для π^--мезонов совпадают. На рис.7,8 показаны спектры по кинетической энергии в с.ц.м. и по $P_\perp$ для π^--мезонов из несимметричных комбинаций ядер CCu и OPb. Они не описываются одной экспонентой. Согласие с экспериментом получили при аппроксимации двумя экспонентами (две температуры T_1 и T_2, формулы (2), (3)) с использованием двух вышеописанных методов. Результаты аппроксимации представлены в таблице 5. Как видно из таблицы, и в этом случае получили совпадающие оценки температур T_1 и T_2 для π^--мезонов двумя подходами. Оценили вклад второй температуры T_2. Для CCu взаимодействий вклад T_2 составляет 26%, а для OPb - 16%. В той же таблице представлены T_1 и T_2 для пионов в $LaLa$ взаимодействиях при энергии 1,35 ГэВ на нуклон /25/, полученные по наклонам неинвариантных спектров по E_K, и результаты NA-35 эксперимента /26/ во взаимодействиях OAu при энергии 200 ГэВ на нуклон, полученные по $P_\perp$

распределениям в рамках термодинамической модели Хагедорна в интервале $2 < Y_{лаб.} < 3$. В обоих экспериментах одна экспонента не описывает спектры пионов. Согласие было достигнуто для двух температур T_1 и T_2. Причем вклад высокотемпературной компоненты с ростом энергий и масс сталкивающихся ядер растет, достигая 60% для OAu столкновений. Надо отметить, что первая компонента $T_1 = (43 \pm 6)$ МэВ OAu столкновений в пределах ошибок совпадает с нашими результатами для CCu $T_1 = (54 \pm 4)$ МэВ и OPb $T_1 = (44 \pm 2)$ МэВ соударений. Возрастание значения (от 110 до 153) и относительного вклада второй температуры T_2 можно объяснить тем, что при энергии 200 ГэВ на нуклон возрастает степень термализации ядерной материи.

Термодинамическая модель Хагедорна /22/ предсказывает при наших энергиях температуру для протонов $T_p = (135-138)$ МэВ и для $T_{\pi^-} = (115-120)$ МэВ. Наш результат для T_p в CNe столкновениях совпадает с предсказанием модели. Значения температуры для π^--мезонов, полученные нами для $HeLi$, HeC, CNe взаимодействий, отличаются от предсказания модели Хагедорна, кроме второй компоненты $T_2 = (110 \pm 5)$МэВ для CCu и OPb. В этой модели разница в расчетных температурах протонов и пионов объясняется тем, что протоны испускаются на более ранней стадии расширения ядерной материи, чем пиона, так же, как и в /27/. Как утверждают авторы /27/, этот эффект слишком мал, чтобы объяснить экспериментальные данные.

В случае пионов необходимо принять во внимание резонансный характер их образования, через распад Δ изобар.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проведен анализ угловых распределений π^--мезонов в CNe, HeC, CCu взаимодействиях. Получен коэффициент анизотропии R =0,25. Была исследована зависимость R от кинетической энергии E_K в с.ц.м. в трех интервалах: $E_K \leq$ 0,2 ГэВ, 0,2< E_K < 0,4 ГэВ и $E_K \geq$ 0,4 ГэВ. R растет с ростом E_K, что согласуется качественно с предсказанием каскадных моделей.

2. Оценили температуру протонов и π^--мезонов в $HeLi$, HeC, CNe, CCu и OPb центральных взаимодействиях по наклону наблюдаемого инклюзивного спектра по E_K и распределениям по поперечному импульсу $P_\perp$. Получено указание на рост температуры протонов с ростом массовых чисел снаряда и мишени (A_P, A_T) от T_P =(118±2) МэВ ($HeLi$) до T_P =(134±3) МэВ (CNe). Температура π^--мезонов не зависит от A_P, A_T и T_{π^-} =(95±2) МэВ. Для несимметричных комбинаций ядер CCu и OPb спектры π^--мезонов аппроксимировались двумя экспонентами: T_1 =(54±4) МэВ, T_2 =(104±5) МэВ для CCu и T_1 =(44±2) МэВ, T_2 = =(109±5) МэВ для OPb. Вклад температуры T_2 для CCu взаимодействий составляет 26%, а для OPb - 16%. Полученные результаты для T_P согласуются с предсказанием термодинамической модели Хагедорна, тогда как для T_{π^-} модель предсказывает большую температуру (кроме второй компоненты T_2 для CCu и OPb столкновений).

Поступила 12.XII.1988

Институт
высоких энергий ТГУ

Литература

1. A.B.Migdal. Rev. Mod. Phys., 1971, 50, 107.
2. W.Weise, G.E. Brown. Phys. Rep., 1976, 27C, 1.
3. H.Jacob. J. Tran Thanh Van. Phys. Rep., 1982, 88C, 321
4. H.Stocker et al. Phys. Lett., 1979, 81 B, 303.
5. S. Nagamiya et al. Phys. Lett., 7.1981, 24 C, 971.
6. I.Mankov, S.Nagamiya. Nucl. Phys., 1982, 384 A, 475.
7. H.H.Gutbrod et al. Phys. Lett., 1983, 127 B, 317.
8. H.A.Gustafsoon et al Phys. Lett., 1984, 142 B, 141.
9. A.Sandoval et al. Phys. Rev., 1980, 21 C, 1321.
10. R.Malfliet et al. Phys. Rev., 1985, 31 C, 1275.
11. L.Anderson et al. Phys. Rev., 1983, 28 C, 1224.
12. M.X. Anikina et al. Phys. Rev., 1986, 33 C, 895.
13. M.X. Anikina et al. JINR Report, E1-84-785, Dubna, 1984.
14. М.Х.Аникина и др. ЯФ, 1977, том 27, с.724.
15. V.Aksinenko et al. Nucl. Phys., 1979, 324 A, 266.
16. V. Aksinenko et al. Nucl. Phys., 1980, 348 A, 518.
17. A. Abdurakhimov et al. Nucl. Phys., 1981, 362 A, 376.
18. B.D. Adyasevich et al. IAE-3973/2, Moscow, 1984, IAE-4148/21, Moscow, 1985
19. R.Stock. Phys. Rep., 1986, 135 C, 261.
20. J.Cugnon, T.Mitzutani, Vandermeulen. Nucl. Phys., 1981, 352 A, 505.
21. R.Brockman et al. Phys. Rev. Lett., 1984, V. 53, 2012.
22. R.Hagedorn, J.Rafelski. Phys. Lett., 1980, 97 B, 136; R. Hagedorn, Preprint TH-3684-CERN, 1984.
23. M.X.Anikina et al. JINR Report, E1-84-376, Dubna, 1984.
24. В.Г.Гришин и др. Препринт ОИЯИ, PI-86-639, Дубна, 1986.
25. G.Odynic et al. GSI -report 85-1, p. 94, 1985.
26. S.Wenig, M.Gazdzicki et al. CSI-report, 88-1, p.81, 1988.
27. S.Nagamiya et al. Phys. Rev. Lett., 1982, v.49, 1383.

28. К.К. Гудима, В.Д. Тонеев. ЯФ, 1978, т.27, с.659;
K.K. Gudima, V.D. Toneev. Nucl. Phys., 1983, 400 A, 173.

მ. ვარდენგა, თ. ჯობავა, ე. ოკრიბელი, ი. თულიანი, ლ. ჩხაიძე, მ. ანიკინა

პროტონების და π^--მეზონების ტემპერატურული მახასიათებლები ბირთვ-ბირთვულ ურთიერთქმედებებში 4,5 გევ/c ნუკლონზე იმპულსის დროს

რეზიუმე

ექსპერიმენტული მასალა მიღებულია სტრიმერულ სპექტრომეტრ СКМ-200-ზე 4,5 გევ/c ნუკლონზე იმპულსის დროს. π^--მეზონების კუთხური განაწილებებიდან მიღებულ იქნა ანიზოტროპიის კოეფიციენტი R HeC, CNe, CCu ურთიერთქმედებებისათვის $R = 0,25$. R იზრდება კრიტიკული ენერგიის ზრდასთან ერთად (მასათა ცენტრის სისტემაში), რაც თანხვდება კასკადური მოდელის წინასწარმეტყველებას.

შესწავლილ იქნა ცენტრალურ HeLi, HeC, CNe, CCu და OPb ურთიერთქმედებებში პროტონების და π^--მეზონების ტემპერატურა, მიღებულია მითითება პროტონების ტემპერატურის ზრდის შესახებ დამცემი ბირთვებისა და სამიზნეების მასურ რიცხვთა (A_P, A_T) ზრდასთან ერთად: $T_p = (118 \pm 3)$ მევი HeLi-სათვის, $T_p = (134 \pm 3)$ მევი CNe-სთვის. π^--მეზონების ტემპერატურა არ არის დამოკიდებული A_P, A_T-ზე და $T_\pi \approx (95 \pm 2)$ მევი. π^--მეზონებისათვის CCu და OPb ურთიერთქმედებებში ექსპერიმენტთან თანხვედრა მიღწეულ იქნა ორი ტემპერატურის T_1 და T_2-ის არსებობის დაშვებით. მეორე ტემპერატურის წვლილი T_2 შეადგენს 26% CCu ურთიერთქმედებისათვის და 16% OPb-სთვის. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები T_p-სთვის თანხვდება ხაგედორნის თერმო-

200

დინამიკური მოდელის წინასწარმეტყველებას, ხოლო T_{π^-}-სთვის მოდე-
ლი იძლევა უფრო დიდ ტემპერატურას ვიდრე ჩვენს-მიერ არის მიღე-
ბული.

G.Vardenga, T.Jobava, E.Okonov, T.Tuliani,

L.Chkaidze, M.Anikina

THE TEMPERATURES OF PROTONS AND π^--MESONS IN NUCLEUS - NUCLEUS INTERACTIONS AT A MOMENTUM 4.5 GeV/c PER INCIDENT NUCLEON

Summary

The data are obtained on streamer spectrometer SKM-200 at a momentum of 4.5 GeV/c per incident nucleon. From the analysis of angular distributions of π^--mesons the anisotropy coefficient for HeC, CNe, CCu collisions $R \approx 0.25$ is obtained R increases with the kinetic energy E_k (in s.m.c.), being consistent with the prediction of the intranuclear cascade model.

An estimation of the temperature of protons and π^--mesons in central HeLi, HeC, CNe, CCu, and OPb interactions, is presented. An indication is received on the increase of proton temperature with increasing mass numbers of projectile nuclei and targets (A_p, A_T) from $T_p = (118 \pm 3)$ MeV for HeLi to $T_p = (134 \pm 3)$ MeV for CNe. The temperature of π^--mesons does not depend on A_p, A_T and $T_{\pi^-} \simeq (95 \pm 2)$ MeV. A satisfying fit for π^--mesons in CCu and OPb collisions can be achieved by assuming two temperatures: $T_1 = (54 \pm 4)$ MeV, $T_2 = (104 \pm 4)$ MeV for CCu and $T_1 = (44 \pm 2)$ MeV, $T_2 = (109 \pm 5)$ MeV for OPb. The relative yield of the second temperature T_2 is 26% for CCu interactions, and 16% for OPb. The observed results for T_p are consistent with the prediction of the thermodynamic Hagedorn model while for T_{π^-} the model gives a higher temperature.

Средние значения кинематических характеристик протонов и π^--мезонов

Тип взаимодействия	Тип частиц	Число событий	Число треков	$\langle P_{лаб.} \rangle$ (ГэВ/с)	$\langle P_{\perp} \rangle$ (ГэВ/с)	$\langle У_{лаб.} \rangle$	$\langle X_F \rangle$
HeLi T (0,0)	P	402I	5849	I,63±0,0I	0,378±0,0I6	I,00±0,02	0,39±0,02
	π^-		3423	0,66±0,02	0,236±0,0I2	I,25±0,03	0,I2±0,0I
HeLi T (2,0)	P	I686	3I43	I,66±0,0I	0,399±0,0I6	I,02±0,92	0,37±0,0I
	π^-		I724	0,67±0,02	0,236±0,0I3	I,27±0,03	0,I2±0,0I
HeC T (0,0)	P	2I37	4572	I,45±0,0I	0,392±0,0I6	0,89±0,02	0,4I±0,02
	π^-		2099	0,64±0,02	0,238±0,0I3	I,I5±0,03	0,I3±0,0I
HeC T (2,0)	P	I0I7	2746	I,44±0,0I	0,406±0,0I6	0,89±0,02	0,39±0,02
	π^-		I280	0,64±0,02	0,245±0,0I3	I,I4±0,03	0,I3±0,0I
CNe T (2,0)	P	2I5	2I90	I,50±0,0I	0,420±0,0I7	0,90±0,02	0,4I±0,02
	π^-	404	I9I2	0,62±0,02	0,234±0,0I2	I,I5±0,03	0,I2±0 0I
CCu T (3,3)	π^-	I203	8I86	0,48±0,02	0,2I0±0,0I2	0,9I±0,03	0,I[illegible]±0,0I
OPb T (2,0)	π^-	732	65I7	0,40±0,02	0,I83±0,0I2	0,76±0,03	0,II±0,0I

Таблица 2

Результаты аппроксимации распределений π^--мезонов по $\cos\theta^*$ соотношением (I)

Тип взаимодействия	а	R
HeC T (2,0)	1,08±0,18	0,27±0,04
CNe T (2,0)	0,89±0,13	0,23±0,03
CCu T (3,3)	1,05±0,07	0,26±0,02

Таблица 3

Зависимость параметра анизотропии R от кинетической энергии (в с.ц.м) π^-- мезонов

Тип взаимодействия	а			R		
	$E_K \leq 0,2$ (ГэВ)	$0,2 < E_K < 0,4$ ГэВ	$E_K \geq 0,4$ ТэВ	$E_K \leq 0,2$ ТэВ	$0,2 < E_K < 0,4$ ГэВ	$E_K \geq 0,4$ ТэВ
HeC T (2,0)	0,31± 0,17	1,61± 0,42	2,22± 0,85	0,09± 0,05	0,35± 0,05	0,43± 0,16
CNe T (2,0)	0,24± 0,13	1,51± 0,34	2,80± 0,88	0,07± 0,03	0,33± 0,07	0,49± 0,15
CCu T (3,0)	0,35± 0,06	1,61± 0,20	3,79± 0,69	0,10± 0,02	0,35± 0,04	0,55± 0,10

Таблица 4

Значения температуры T протонов ($0,4 \leq y_{лаб.} \leq 1,6$) и π^--мезонов ($0,5 \leq y_{лаб.} \leq 2,1$), полученные при аппроксимации экспериментальных распределений соотношениями (2) и (3) (N - число экспериментальных точек)

Тип взаимодействия	Тип частиц	T (МэВ) по $E_{кин.}$ нейтив.	χ^2/N	T(МэВ) по распр. $P_\perp$	χ^2/N
HeLi T (2,0)	P	I18 ± 2	23/20	I2I ± 2	39/20
	π^-	87 ± 2	35/30	95 ± 2	I3/20
HeC T (2,0)	P	I26 ± 3	36/20	I24 ± 3	23/20
	π^-	90 ± 2	26/30	98 ± 2	2I/20
CNe T (2,0)	P	I32 ± 3	26/20	I34 ± 3	I4/20
	π^-	85 ± 2	64/30	94 ± 2	23/20
CC центральн.*	P	I62±3 ($60^0 \leq \theta^* \leq 120^0$) I59±3 ($70^0 \leq \theta^* \leq 110^0$) I57±5 ($80^0 \leq \theta^* \leq 100^0$)			
P=4,2 ГэВ/с		97±2 ($60^0 \leq \theta^* \leq 120^0$) 97±2 ($70^0 \leq \theta^* \leq 110^0$) 95±3 ($80^0 \leq \theta^* \leq 100^0$)			

* Данные взяты из работы /24/ .

Таблица 5

Значения температур T_I и T_2 π^--мезонов ($0{,}I \leq y_{лаб.} \leq I{,}8$), полученные при аппроксимации двумя экспонентами (выражения (2) и (3) ($\mathcal{N}$ - число экспериментальных точек)

Тип взаимодействия	по $E_{кин.}$ неинв.			P_i по распр.		$\chi^2/\mathcal{N}$	Вклад второй экспон.
	T_I(МэВ)	T_2(МэВ)		T_I(МэВ)	T_2(МэВ)		
CCu T (2,0)	48 ± 2	I04 ± 3	30/30	54 ± 4	I04 ± 4	I8/20	0,26 ± 0,0I
OPb T (2,0)	42 ± I	I09 ± 3	I9/30	44 ± 2	I09 ± 5	I0/20	0,I6 ± 0,0I
LaLa* E/A=I,35(ГэВ)	39 ± 4	80 ± 5					0,36 ± 0,I3
OAu* E/A=200 ГэВ/ 2<У<3				43 ± 6	I53 ± 5		0,60

* Данные взяты из работ /25,26/.

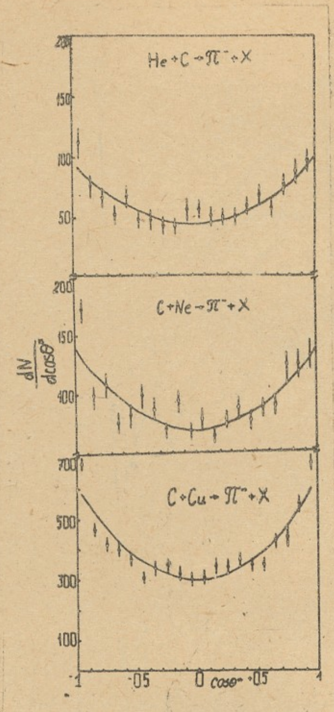


Рис.I Распределения по $\cos\theta^*$ (в с.ц.м.) для π^--мезонов в НеС, CNe и ССu взаимодействиях.

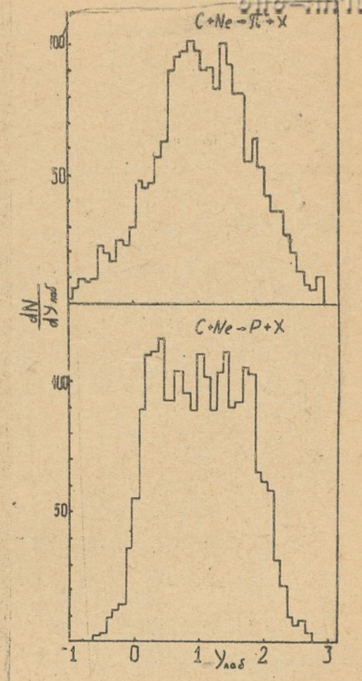


Рис.2. Распределения по $У_{лаб.}$ для протонов и π^--мезонов в CNe столкновениях.

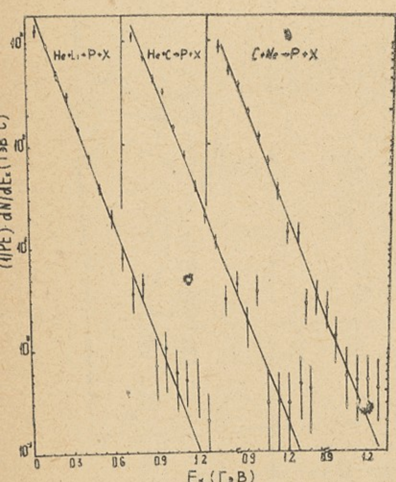


Рис.3 Неинвариантный спектр по кинетической энергии $E_К$ (в с.ц.м.) для протонов в HeLi ,HeC и CNe взаимодействиях.

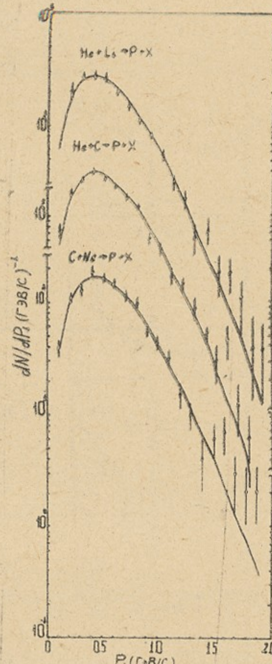


Рис.4. Распределения по $P_\perp$ для протонов в HeLi, HeC и CNe столкновениях.

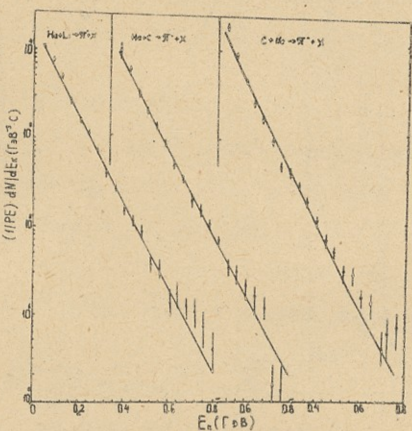


Рис.5 Неинвариантный спектр по кинетической энергии E_K (в с.ц.м.) для π^- - мезонов в $HeLi$, HeC и CNe взаимодействиях.

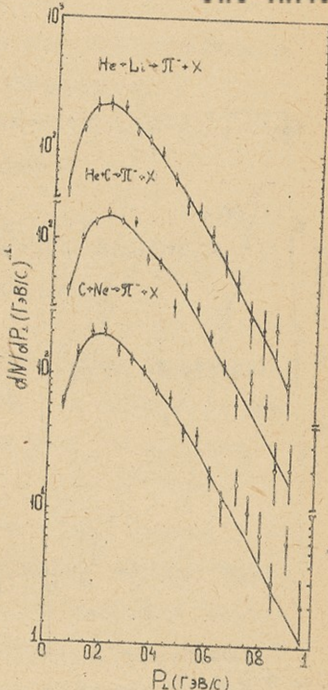
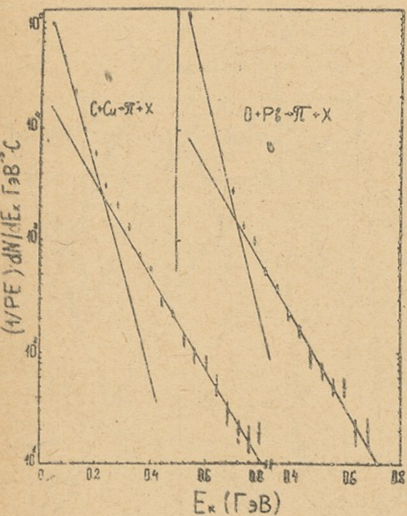


Рис.6. Распределения по $P_\perp$ для π^--мезонов в $HeLi$, HeC и CNe столкновениях.



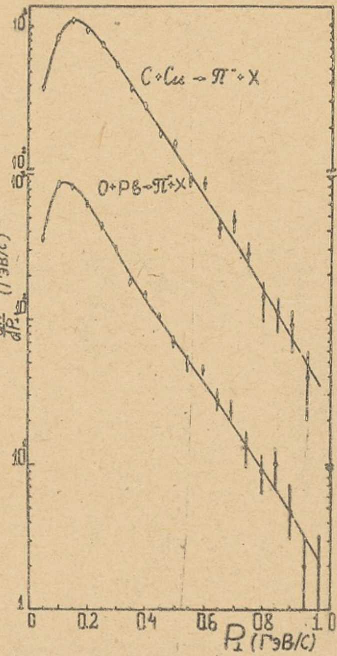


Рис.7 Неинвариантный спектр по кинетической энергии (в с.ц.м.) для π^--мезонов в CCu и OPb взаимодействиях.

Рис.8 Распределения по $P_\perp$ для π^--мезонов в CCu и OPb взаимодействиях

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, 1989

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ СИЛЬНО НАГРЕТЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

А.М.Джабер, З.С.Качлишвили

В работе /I/ была исследована вольтамперная характеристика (ВАХ) невырожденных полупроводников для теплых и умеренно нагретых электронов. Вычисления были проведены с помощью исправленной теории Лэкса /2,3/.

Нелинейность ВАХ возникает из-за появления полевой зависимости подвижности и концентрации свободных носителей заряда в сильном электрическом поле. Разогревом свободных носителей заряда сильное электрическое поле смещает рекомбинационное равновесие и, следовательно, изменяет стационарную концентрацию носителей.

Пренебрегая процессом ударной рекомбинации, из условия стационарности концентрации (n) свободных носителей заряда получаем:

$$n = B\left[1+\left(1+\mathcal{D}/B^2\right)^{1/2}\right], \qquad (I)$$

где

$$B \equiv \frac{A_I(N_D - N_a) - A_T - B_T N_D}{2(A_I + B_T)}, \qquad (2)$$

$$\mathcal{D} \equiv \frac{A_T(N_D - N_a)}{(A_I + B_T)},$$

A_I, A'_T, B_T - коэффициенты ударной и тепловой ионизации и теплового захвата соответствённо, A'_T выражается с помощью коэффициента теплового захвата в отсутствие электрического поля в соответствии с принципом детального равновесия, N_D, N_a - концентрации доноров и акцепторов.

В настоящей работе приводятся результаты исследования нелинейных эффектов в области сильных полей (пробивные и за пробивные поля). Конкретные вычисления проведены для условия эксперимента /4/: сверхчистый $n-Ge$, T =9,62°K. Согласно оценкам /5/, в этих условиях основными механизмами рассеяния являются рассеяния энергии и импульса на акустических фононах.

Как показывают оценки в области сильных полей $\alpha = \frac{3\pi}{16}\left(\frac{\mu_0 E}{S}\right)^2 \gg 1$ (где μ_0 - подвижность в слабом поле, E - напряженность электрического поля и S - скорость звука), до определенного значения электрического поля выполняется условие "высоких" температур и, следовательно, при вычислениях можно пользоваться функцией распределения Давыдова. Последняя для сильно нагретых ($\alpha \gg 1$) электронов имеет вид:

$$f = N \exp\left(-x^2/2\alpha\right), \qquad (3)$$

где N - нормировочный множитель, $x = \frac{\varepsilon}{KT}$ (ε - кинетическая энергия электрона, KT - тепловая энергия).

Однако при более высоких полях невозможно пользоваться однозначно приближениями "высоких" и "низких" температур. Для таких полей при вычислении коэффициентов тепловой рекомбинации и ударной ионизации проводится деление энергии на следующие интервалы: от нуля до $\frac{X_{kp}}{I_0}$ (число $I_0 > 1$) и от X_{kp} до бесконечности, где $X_{kp} = \frac{KT}{2ms^2}$ (где m - эффективная масса электрона).

В первом интервале энергии усреднение проводится с помощью функции Давыдова, во втором - функцией распределения Стреттона, которая имеет вид:

$$f = N \exp(-2x^{5/2}/5\alpha). \qquad (4)$$

Число I_0 - выбирается при машинном счете. Оказалось, что результаты для $I_0 = 2$ и $I_0 = 3$ почти не отличаются. Коэффициент рекомбинации вычисляется с помощью сечения захвата /2,3/:

$$\sigma_T(x) = \frac{1}{3} 4^6 \frac{\sigma_1}{\gamma^4} \frac{1 - e^{-\frac{x + a_0}{8}}}{x(x + a_0)^3}, \qquad (5)$$

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}, \quad \sigma_1 = 2{,}13 \cdot 10^{-9} \, см^2,$$

где величина ε_0 играет роль энергии связи /3/, $\gamma = \frac{2KT}{ms^2}$.

При вычислении коэффициента ударной ионизации пользуемся сечением ионизации /6/:

$$\sigma_I(x) = 2{,}66 \sigma_0 I \frac{(x - I)}{x^2} \ln\left(\frac{1{,}25 x}{I}\right), \qquad (6)$$

$$\sigma_0 = 5{,}03 \cdot 10^{-13} \, см^2,$$

где $I = \frac{\varepsilon_i}{KT}$ (ε_i - энергия ионизации).

Для подвижности с помощью (3) (приближение "высоких" температур) имеем:

$$\mu/\mu_0 = \frac{\pi}{2\Gamma(3/4)} (2\alpha)^{-1/4}. \qquad (7)$$

А с помощью (4) (приближение "низких" температур)

$$\mu/\mu_0 = \frac{\Gamma(6/5)}{\Gamma(3/5)}(5/2)^{3/5}(\alpha)^{-2/5}, \quad (8)$$

где $\Gamma(x)$ - гамма функции. А в области полей, в которой невозможно однозначно использовать эти приближения, мы вычисляем подвижность так же, как и коэффициенты рекомбинации и ионизации. Однако после анализа полученных аналитических выражений легко убедиться, что в указанной области полей справедливо выражение (8).

Полевая зависимость концентрации свободных электронов, с использованием выражений (I) — (6), вычислена на ЭВМ. Результаты вычислений сравниваются с экспериментальным результатом (рис.I, сплошная кривая - эксперимент, точки - наша теория).

На рис.2 приведены результаты теоретических вычислений ВАХ в указанной выше области электрических полей. Там же, для сравнения, приводится экспериментальная кривая.

Для экспериментальной кривой (рис.I) выделяется три участка: АВ, ВС и СД. По-видимому, можно сказать, что эти участки описывают следующие физические процессы: АВ - пробой из мелкого уровня, ВС - область насыщения концентрации, СД - пробой из более глубокого уровня, теоретически насыщение наступает при более больших значениях, чем на эксперименте.

Теория не описывает эксперимент в области СД. Это, по-видимому, связано с тем, что в образцах, которые были использованы на эксперименте, кроме мелкого уровня, который пробивается в сравнительно слабых полях (область АВ), есть еще второй уровень, более глубокий, который вступает в игру при более сильных полях - область СД.

Поскольку в теории не учтена возможность включения второго уровня, область СД не может быть описана нашей теорией. Очевидно, с этим связано также и расхождение на кривой ВАХ между последними точками теории и экспериментальной кривой (рис.2).

Как видно из приведенных кривых, представленная в работе теория удовлетворительно описывает эксперимент.

Поступила I3.XII.1988

Кафедра
физики твердого тел

Литература

I. А.М.Джабер, З.С.Качлишвили. Труды Тбилисского университета, сер.физ., 1988, № 26, т.282.
2. В.Н.Абакумов, И.Н.Яссиевич. ЖЭТФ, 1976, т.71, в.2(8), с.557-664.
3. Т.О.Гегечкори, В.Г.Джакели, З.С.Качлишвили. Сообщ.АН ГССР, 1981, т.103, №3, с.565-567.
4. S.H. Koenig, R.D.Brown, W.Schillinger. Phys. Rev., 1962, v.128, N4, p. 1668-1696.
5. З.С.Качлишвили. ФТП, 1968, т.2, в.4, с.580-584.
6. З.С.Качлишвили, Э.Г.Хизанишвили. ФТП, 1988, т.22, в.8, с.1507-1509.

ა. ჯაბერი, ზ. ქაჩლიშვილი

ძლიერად გახურებული ელექტრონების არაწრფივი ეფექტები

რეზიუმე

შრომაში განხილულია გამოკვლევათა შედეგები, რომლებიც ეხება ნახევარგამტარებში აღძრულ არაწრფივ ეფექტებს ძლიერ ელექტრული ველების არეში-მინარევული გარღვევისა და უფრო დიდი ველების არეში.

თავისუფალი ელექტრონების კონცენტრაციის ველზე დამოკიდებულება გამოთვლილია ლექსის შესწორებული კასკადური თეორიის გამოყენებით. კონკრეტული განხილვა ჩატარებულია ზესუფთა გერმანიუმისათვის $T=9{,}62\,^{\circ}K$ ტემპერატურაზე გათვლები შესრულებულია ეგმ-ზე. შესწავლილია აგრეთვე ძვრადობის ველზე დამოკიდებულება.

მიღებული შედეგების საფუძველზე გამოთვლილია ვოლტამპერული მახასიათებლები. ჩატარებულია ექსპერიმენტთან შედარება. ექსპერიმენტისა და თეორიის ურთიერთდამთხვევა დამაკმაყოფილებელია.

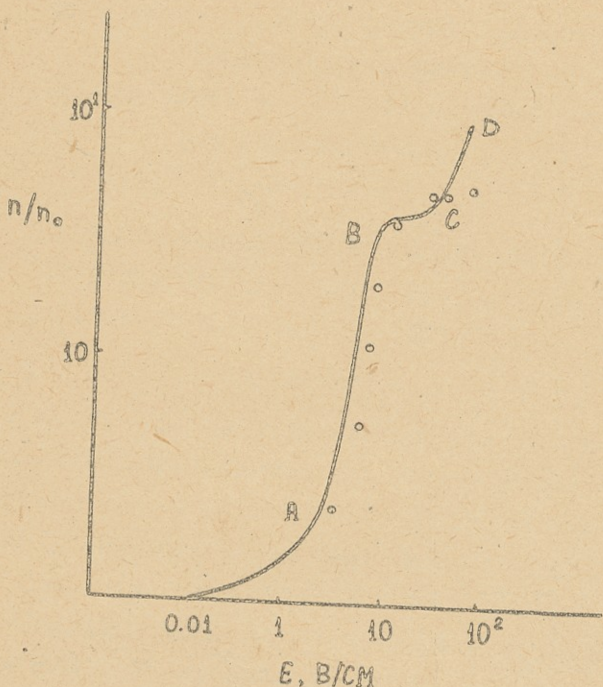
A.Jaber, Z.Kachlishvili

NONLINEAR EFFECTS OF STRONGLY HEATED ELECTRONS

Summary

The authors' investigation shows that in the region of a strong electric field nonlinear effects occur in semiconductors in and over the breakdown fi Dependence of the concentration of free carriers on the electric field was obtained with the help of corrected Lax cascade capture theory.

Numerical calculation, carried out for superpure n-type Ge in $T = 9.62\,^{\circ}$I and the obtained results are compared with the experimental data. The theore tical and experimental findings are found to be in good agreement.

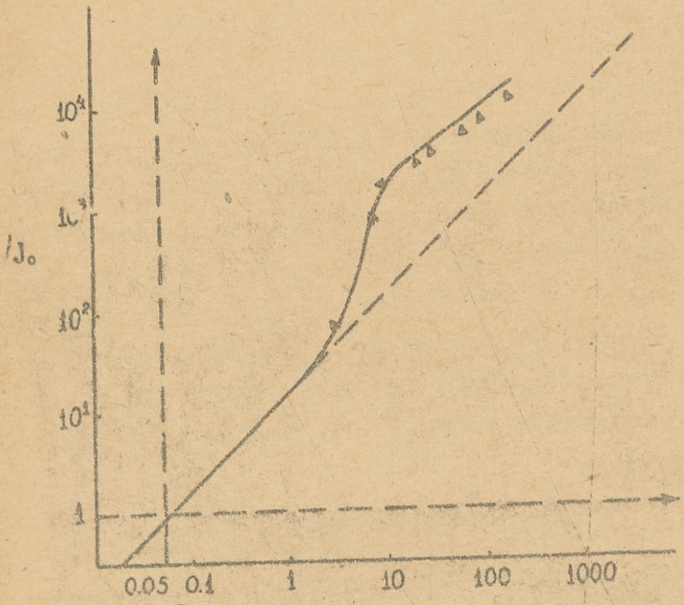


ис.I. Зависимости концентрации (n/n_0) от напряженности электрического поля (E)

———————— эксп.

. . . . теоретические результаты для сильно разогретых электронов.

$$\left(\alpha_1 = \frac{3\pi}{16}\left(\frac{\mu_0 E}{s}\right)^2 >> 1\right)$$



.2. Зависимости плотности тока (j/j_0) от напряженности электрического поля ($\mathcal{E}$)

——————— эксп.

– – – – – – закон Ома

▲▲▲▲▲ теоретические результаты для сильно разогретых электронов ($\alpha >> 1$)

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
286, 1989

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ В ОДНОМ НЕИЗВЕСТНОМ ДОКЛАДЕ Н.И.МУСХЕЛИШВИЛИ

Т.И.Ефремидзе

В неопубликованном докладе Н.И.Мусхелишвили "Задача о движении электрона, притягивающегося к неподвижному центру (ядру), в постоянном электрическом поле", прочитанном им 5 февраля 1920 г. перед членами "Атомной комиссии" (АК) /1, с.87/, решение основной задачи механики в теории атома Бора-Зоммерфельда в параболических координатах производится с помощью разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. В присутствии внешнего постоянного электрического поля (явление Штарка), с применением общего метода пространственного квантования и интегрирования уравнений в комплексной плоскости по методу Зоммерфельда /2, с.329/, задача была решена Эпштейном /3/ и Шварцшильдом /4/ в 1916 г. Но, как указал Н.И.Мусхелишвили, аналогичная задача для гравитационного поля была решена Де Сен - Жерменом в 1892 г. /5/, который опирался на труды Якоби, решившего впервые задачу одного тела в небесной механике с разделением переменных /6/.

Перенесение методов небесной механики в атомную физику не тривиально. Характерно в связи с этим высказывание Джеммера: "Одной из нерешенных проблём была проблема выбора нужных координат. Задачу Кеплера можно было рассматривать, как в параболических, так и в полярных координатах, однако в разных системах координат получались разные квантовые условия и квантовые орбиты (подчеркнуто нами - Т.Е.)" / 7, с. I08/.

При отсутствии внешнего электрического поля Зоммерфельдом / 3, с.I02 / задача Кеплера была решена в полярных или сферических координатах с привлечением условий квантования следующим образом: пишутся условия квантования

$$\oint P_r dr = n_r h, \quad \oint P_\theta d_\theta = n_\theta h, \quad \oint P_\varphi d_\varphi = n_\varphi h, \tag{I}$$

$$P_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2\mu[E - U(r)] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}};$$

$$P_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2\theta}}, \tag{2}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi.$$

Функция действия $S = -Et + W$ или W представляется:

$$W = W_r + W_\theta + W_\varphi \tag{3}$$

и из уравнений Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \tag{4}$$

$$+ 2\mu[U(r) - E] = 0$$

получается три уравнения:

$$\frac{dW_\varphi}{d\varphi}=\alpha_\varphi, \quad \left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\alpha_\theta^2, \tag{5}$$

$$\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2+2\mu\left[u(r)-E\right]+\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}=0,$$

решение которых позволяет определить энергию и орбиту движения электронов

$$E_n=-\frac{z^2\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad r=\frac{q}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)} \tag{6}$$

с параметрами q и ε, а при интегрировании учитывается, что

$$J_r=\oint\sqrt{-A+2\frac{B}{r}-\frac{C}{r^2}}\,dr=2\pi\left(-\sqrt{C}+\frac{B}{\sqrt{A}}\right). \tag{7}$$

Н.И.Мусхелишвили /I/, как и Эпштейн /3/ решает задачу Кеплера при E=0 в параболических координатах, чтобы избежать неоднозначности, связанной с переходом от эллипса Эпштейна (при E=0) к эллипсу Зоммерфельда. Для этого он записывает уравнения Гамильтона-Якоби в параболических координатах ($q=2x+y^2/q$, $p=-2x+y^2/p$)[I] в форме

$$4q\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+4p\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2=2\mu(q+p)E+4\mu x e^2-\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)P_\varphi^2 \tag{8}$$

разделением переменных получает:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2q}{\mu}\left(\frac{dW_1}{dq}\right)^2+\frac{\alpha_0^2}{2q}-(x+\beta)e^2+A_0 q=0\\ \frac{2p}{\mu}\left(\frac{dW_1}{dp}\right)^2+\frac{\alpha_0^2}{2p}-(x-\beta)e^2+A_0 p=0\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

I. Эпштейн в своей работе применяет обозначения для параболических координат: $\xi=\sqrt{q}$, $\eta=\sqrt{p}$.

где $\mathcal{H}=-E_0$ – энергия системы, $P_\varphi=\alpha_0$ – момент импульса, $\varkappa e$ – заряд ядра, β_0 – произвольный параметр, а производящая функция

$$W(q,p,\varphi)=\alpha_0\sqrt{\mathcal{H}}\,\varphi+\sqrt{\mathcal{H}}\int^{q}\frac{dq}{2q}\sqrt{F_1^0(q)}+\sqrt{\mathcal{H}}\int^{p}\frac{dp}{2p}\sqrt{F_2^0(p)}, \qquad \text{(I0)}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1^0(q)&=-2\mathcal{H}_0q^2+2(\varkappa+\beta_0)e^2q-\alpha_0^2\\ F_2^0(p)&=-2\mathcal{H}_0p^2+2(\varkappa-\beta_0)e^2p-\alpha_0^2\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Из представления производящей функции в форме (I0) получатся уравнения движения /I/

$$\begin{aligned} &\int^{q}\frac{dq}{2\sqrt{F_1^0(q)}}-\int^{p}\frac{dp}{2\sqrt{F_2^0(p)}}=\beta_0',\\ &\int^{q}\frac{dq}{2q\sqrt{F_1^0(q)}}+\int^{p}\frac{dp}{2p\sqrt{F_2^0(p)}}=\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha_0},\\ &\int^{q}\frac{q\,dq}{2\sqrt{F_1^0(q)}}+\int^{p}\frac{p\,dp}{2\sqrt{F_2^0(p)}}=\frac{t-\tau}{2}.\end{aligned} \qquad \text{(I2)}$$

Вслед за доказательством замкнутости траекторий электрона в интервалах: $q_3\leq q\leq q_2$, $p_3\geq p\geq p_2$, где

$$q_3=\frac{1}{2\mathcal{H}_0}\left[(\varkappa+\beta_0)e^2-\sqrt{\Delta}\right],\quad q_2=\frac{1}{2\mathcal{H}_0}\left[(\varkappa+\beta_0)e^2+\sqrt{\Delta}\right],$$

$$\Delta=e^2(\varkappa+\beta_0)-2\mathcal{H}_0\alpha_0^2,$$

$$p_3=\frac{1}{2\mathcal{H}_0}\left[(\varkappa-\beta_0)e^2-\sqrt{\Delta'}\right],\quad p_2=\frac{1}{2\mathcal{H}_0}\left[(\varkappa-\beta_0)e^2+\sqrt{\Delta'}\right], \qquad \text{(I3)}$$

$$\Delta'=e^4(\varkappa-\beta_0)^2-2\mathcal{H}_0\alpha_0^2.$$

Н.И.Мусхелишвили вводит обозначения:[2]

---

2. Теми же обозначениями Эпштейн решает следующие уравнения:

$$2\sqrt{\mathcal{H}}\int^{q}\sqrt{F_1^0(q)}\,dq=2\pi n_1\hbar,\quad 2\sqrt{\mathcal{H}}\int^{p}\sqrt{F_2^0(p)}\,dp=2\pi n_2\hbar,$$

$$\sqrt{\mathcal{H}}\int\alpha_0\,d\varphi=2\pi n_0\hbar.$$

$$q=\frac{1}{2A_0}\left[(\varkappa+\beta_0)e^2+\sqrt{\Delta}\sin u\right],$$
$$p=\frac{1}{2A_0}\left[(\varkappa-\beta_0)e^2+\sqrt{\Delta'}\sin v\right], \qquad (14)$$

где изменению (q , p) в допустимых пределах соответствует изменение (u, v) в пределах ($-\pi/2$, $+\pi/2$). После замены переменных из (12) получится:

$$u-v=2\sqrt{2A_0}\,\beta_0' ;$$
$$e^2(\varkappa+\beta_0)u+e^2(\varkappa-\beta_0)v-\sqrt{\Delta}\cos u-\sqrt{\Delta'}\cos v= \qquad (15)$$
$$=(2A_0)^{3/2}\frac{2}{\mu}(t-\tau).$$

При периодическом движении $t-\tau=T$ получится

$$T=2\pi\sqrt{\mu}\,\frac{\varkappa e^2}{2A_0^{3/2}}, \quad -E_0=A_0=\frac{\varkappa e^2}{2a} \qquad (16)$$

и при квантовании орбиты

$$E_{0n}=-\frac{\varkappa^2\mu e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad a_n=\frac{\hbar^2}{\varkappa\mu e^2}(n_1+n_2+n_0). \qquad (17)$$

Изложенным методом Н.И.Мусхелишвили решает соответствующие уравнения, определяя интегралы движения A_0, α_0, β_0 и начальные значения (q_0, p_0) через параметры орбиты, (полуось орбиты), ε (эксцентриситет эллипса), (наклон орбиты) и φ_0 (азимут перигелия) следующими формулами:[3]

---

3 Некоторые из этих формул приводятся без вывода в работе Эпштейна /3/ со значительными ошибками.

$$A_0 = \frac{\varkappa e^2}{2a}, \quad \alpha_0 = e\sqrt{\varkappa}\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}\cos\theta_0,$$

$$\beta_0 = -\varepsilon\varkappa\sin\theta_0\sin\varphi_0, \quad \beta_0' = \frac{1}{2\sqrt{2A_0}}(u_0 - v_0), \tag{18}$$

$$\cos(u_0 - v_0) = \frac{\varepsilon^2(1+\sin^2\theta_0\cos^2\varphi_0) - \sin^2\theta_0}{\sqrt{[\sin^2\theta_0 + \varepsilon^2(1-\sin^2\theta_0\cos^2\varphi_0)]^2 - 4\varepsilon^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0}}, \tag{19}$$

$$\sin(u_0 - v_0) = \frac{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin\theta_0\cos\varphi_0}{\sqrt{[\sin^2\theta_0 + \varepsilon^2(1-\sin^2\theta_0\cos\varphi_0)] - 4\varepsilon^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0}}$$

Следует заметить, что выведенные Н.И.Мусхелишвили формулы (18) и (19) были использованы одним из членов АК в своем докладе, прочитанном 7-го июня 1920 г. на тему: "О теории явления *Stark'a* по *Epstein'y* и о переходе от квантования по *Sommerfeld'y* к квантованию по *Epstein'y* для простейшего случая модели Бора /8,230/, при определении адиабатических инвариантов указанной задачи и условий квантования соответствующих величин, и тем самым сыграли и важную роль в выяснении причин несогласия квантовых условий Зоммерфельда и Эпштейна при E=0.

При E=0 метод Эпштейна - Шварцшильда для решения уравнения Гамильтона - Якоби сводится к следующему: разлагаются $\sqrt{F_1(q)}$ и $\sqrt{F_2(P)}$ по параметру $e\frac{E}{A^2}$ (где $A = A_0 + \Delta A$) следующим образом:

$$\sqrt{F_1(q)}\,dq = \sqrt{1 - u^2 - \frac{2eEAq^2}{\Delta^2}}\,\frac{\Delta}{\sqrt{2A}}\,\frac{dq}{q} =$$

$$= \frac{\Delta}{2\sqrt{2A}}\left[\sqrt{1-u^2}\,\frac{1}{u+c_1} + \frac{eE}{8A^2}\,\frac{(u+c_1)^2}{\sqrt{1-u^2}}\right]du, \tag{20}$$

$$\sqrt{F_2(p)}\,dp=\sqrt{1-v^2-\frac{2eEAp^3}{\Delta'^2}}\;\frac{\Delta}{\sqrt{2A}}\;\frac{dp}{p}=$$

$$=\frac{\Delta'}{2\sqrt{2A}}\left[\sqrt{1-v^2}\;\frac{1}{v+c^2}-\frac{eE}{8A^2}\;\frac{(v+c_2)^2}{\sqrt{1-v^2}}\right]dv, \tag{21}$$

где $a_1=e^2(\varkappa+\beta)/\Delta$, $c_2=e^2(\varkappa-\beta)/\Delta'$, $u=\frac{2A}{s_1}q-c_1$,

$$v=\frac{2A}{s_2}-c_2,\quad s_1=\sqrt{\Delta},\quad s_2=\sqrt{\Delta'}\;,$$

и условия квантования записываются в виде:

$$\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1-u^2}\;\frac{du}{u+c_1}+\frac{eE}{8A^2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{(u+c_1)^2}{\sqrt{1-u^2}}du=2\pi\sqrt{\frac{2A}{\mu}}\;\frac{\hbar}{\sqrt{\Delta}}n_1,$$

$$\int_0^{2\pi}a_\varphi d_\varphi=\int_0^{2\pi}\alpha_0 d_\varphi=2\pi\;\frac{\hbar}{\sqrt{\mu}}n_3,\quad n_0=n_3, \tag{22}$$

$$\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{1-v^2}\;\frac{dv}{v+c_2}-\frac{eE}{8A^2}\int_{v_1}^{v_2}\frac{(v+c_2)^2}{\sqrt{1-v^2}}dv=2\pi\sqrt{\frac{2A}{\mu}}\;\frac{\hbar}{\sqrt{\Delta'}}n_2.$$

При этом $A=A_0+\Delta A=A_0+eEx_0$, $\beta=\beta_0+\Delta\beta=\beta_0-\frac{E}{2e}y^2$, $\alpha=\alpha_0$.

Не вдаваясь в подробности анализа уравнений Эпштейна - Шварцшильда (22), которые решаются по методу Зоммерфельда / 2, с.529/, отметим только, что при E=0 они приводят к формулам

$$A_0=\frac{\varkappa\mu e^4}{2\hbar^2(n_1+n_2+n_3)^2},\quad \beta_0=\varkappa\,\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2+n_3}, \tag{23}$$

а при E≠0 и известным формулам Эпштейна

$$A=\frac{\varkappa^2\mu e^4}{2\hbar^2}\;\frac{1}{(n_1+n_2+n_3)^2}+$$
$$+\frac{3}{2}\;\frac{\hbar^2E}{\varkappa\mu e}(n_1+n_2+n_3)(n_1-n_2), \tag{24}$$

$$\beta = \varkappa \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2 + n_3} - \frac{2\pi\hbar^4}{\varkappa^2 e^6}(n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + n_3)\left[6n_1 n_2 + 3n_3(n_1 + n_2) + 2n_3^2\right].$$

Изложим кратко метод, примененный впервые Мусхелишвили для решения уравнений Гамильтона-Якоби (I2), которые при $E \neq 0$ записываются в виде:

$$\begin{aligned}
&\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{4F_1(q)}} - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\sqrt{4F_2(p)}} = \beta', \\
&\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{q\sqrt{4F_1(q)}} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p\sqrt{4F_2(p)}} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha_\varphi}, \qquad (25) \\
&\int_{q_1}^{q_2} \frac{q\,dq}{\sqrt{4F_1(q)}} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{p\,dp}{\sqrt{4F_2(p)}} = \frac{t - \tau}{2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1(q) &= eEq^3 - 2Hq^2 + 2(\varkappa + \beta)e^2 q - \alpha_\varphi^2, \\
F_2(p) &= -eEp^3 - 2Hp^2 + 2(\varkappa + \beta)e^2 p - \alpha_\varphi^2. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Вводится эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(u)$ [4], для которой справедливо следующее соотношение:

$$\frac{d\wp(u)}{du} = \sqrt{4[\wp(u) - e_1][\wp(u) - e_2][\wp(u) - e_3]}, \qquad (27)$$

---

4. Эллиптические функции Н.И.Мусхелишвили иногда пишет в форме $\wp u$, ζu, σu и т.д., как это было принято по обозначению /9,с.582-6I3/.Собственно, эти эллиптические функции определяются так:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1, m_2}{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$\sigma(u) = u \prod_{m_1, m_2}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) \exp\left[\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2\right].$$

где e_1, e_2, e_3 – произвольные числа, характеризующие эту функцию и связывающиеся между собой соотношениями:

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3=-\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3. \tag{28}$$

g_2 и g_3 называют инвариантами функции $\wp(u)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d\wp(u)}{du}\right)^2=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3. \tag{29}$$

Далее, Н.И.Мусхелишвили вводит обозначения:

$$q=\frac{1}{eE}[\wp(\bar{u})+a], \quad \bar{u}=u+\omega_3,$$
$$p=-\frac{1}{eE}[\wp(\bar{v})+b], \quad \bar{v}=v+\omega_2 \tag{30}$$

и записывает

$$F_1(q)=\frac{1}{(eE)^2}[\wp(\bar{u})-e_1][\wp(\bar{u})-e_1][\wp(\bar{u})-e_3],$$
$$F_2(p)=\frac{1}{(eE)^2}[\wp(\bar{v})-e_1'][\wp(\bar{v})-e_2'][\wp(\bar{v})-e_3'], \tag{31}$$

где

$$e_i=eEq_i-a, \quad e_i'=-eEp_i-b, \quad i=1,2,3, \tag{32}$$

e_i и e_i', соответствующие коэффициентам $a=b=\frac{2}{3}A$, определяются из соотношений

$$e_1+e_2+e_3=(q_1+q_2+q_3)eE+3a=-2A+3a=0,$$
$$e_1'+e_2'+e_3'=(p_1+p_2+p_3)eE+3b=-2A+3b=0. \tag{33}$$

При этом можно записать: $\wp(u)=-\zeta'(u)$, $\zeta(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=[\ln\sigma(u)]'$, где u – комплексная переменная, $w=m_1\omega_1+m_2\omega_2$; m_1 и m_2 –

действительные целые числа, а ω_1 и ω_2 - комплексные периоды этих функций.

Эллиптические функции связаны между собой и с F_1, F_2 соотношениями:

$$F_1(q)=\frac{1}{(eE)^2}[\wp'(\bar{u})]^2,\quad \frac{dq}{\sqrt{4F_1(q)}}=\pm\frac{\wp(\bar{u})d\bar{u}}{eE\sqrt{4F_1(q)}}=\pm d\bar{u}, \tag{34}$$

$$F_2(p)=\frac{1}{(eE)^2}[\wp'(\bar{v})]^2,\quad \frac{dp}{\sqrt{4F_2(p)}}=\pm\frac{\wp(\bar{v})d\bar{v}}{eE\sqrt{4F_2(p)}}=\pm d\bar{v}. \tag{35}$$

Пользуясь условиями расположения корней функции $F_1(q)$ и $F_2(p)$, $q_2 \geq q \geq q_3$, $p_2 \leq p \leq p_3$, устанавливаем, что $e_3 \leq \wp(\bar{u}) \leq e_2$, $e_3' \leq \wp(\bar{v}) \leq e_2'$.

Учитывая, что эллиптические функции $\wp(\bar{u})$ и $\wp(\bar{v})$ являются комплексными функциями с двумя периодами $2\omega_1$ и $2\omega_1'$, из которых ω_1 - вещественная, а ω_1' - чисто мнимая, Мусхелишвили устанавливает, что когда $u=0, 2\omega_1, 4\omega_1, \ldots$, траектория движущегося электрона касается параболы $q=q_3$, а при $u=\omega_1, 3\omega_1, \ldots$, - параболы $q=q_2$. Точно так же при $v=0, 2\omega_1', 4\omega_2', \ldots$, траектория электрона касается ветви параболы $p=p_2$, при $v=\omega_1', 3\omega_1', 5\omega_1', \ldots$, - параболы $p=p_3$.

Следовательно, первое уравнение из системы (25) преобразуется и записывается в виде:

$$\int_{\omega_3}^{\bar{u}} d\bar{u}+\int_{\omega_2'}^{\bar{v}} d\bar{v}=\bar{u}-\omega_3+\bar{v}-\omega_2'=u-v=\beta'\,^{5}. \tag{36}$$

5. Соотношение $u-v=\beta'$ не переходит в соотношение $u_0-v_0'=2\sqrt{A}$ при $E=0$. Следовательно, Н.И.Мусхелишвили допускает неточност в введенных им обозначениях.

Здесь учитывается, что $\bar{u} = u + \omega_3$ и $\bar{v} = v + \omega_2'$. Но эти соотношения устанавливаются с использованием преобразований эллиптической функции:

$$\wp(u+\omega_i) = e_i + \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{\wp(u) - e_3}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \qquad (37)$$

из которых следуют:

$$q = q_3 + \frac{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)}{\wp(u) - e_3}, \quad p = p_2 - \frac{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)}{\wp(v) - e_2'}. \qquad (38)$$

Внесением соответствующих преобразований в уравнения (25) получается:

$$\frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha} = eE \int_{\omega_3}^{u} \frac{d\bar{u}}{\wp(\bar{u}) + a} + \int_{\omega_2'}^{\bar{v}} \frac{d\bar{v}}{\wp(\bar{v}) + b}, \qquad (39)$$

$$\frac{t - \tau}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{eE} \left(\int_{\omega_3}^{\bar{u}} (\wp(\bar{u}) + a) d\bar{u} + \int_{\omega_2'}^{\bar{v}} (\wp(\bar{v}) + b) \right) d\bar{u}. \qquad (40)$$

После дополнительных преобразований интегрированием получается

$$\frac{1}{eE} \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha_\varphi} = \frac{1}{\wp'(a_1)} \lg \frac{\sigma_3(u - a_1)}{\sigma_3(u + a_1)} - \frac{1}{\wp'(b)} \lg \frac{\sigma_2(v - b_1)}{\sigma_2(v + b_1)}{}^6 + \qquad (41)$$

$$+ \frac{2\zeta(a_1)}{\wp'(a_1)} u - \frac{2\zeta(b_1)}{\wp'(b_1)} v,$$

$$eE \frac{t - \tau}{\sqrt{\mu}} = -[\zeta(\bar{u}) - \zeta(\omega_3)] - [\zeta(\bar{v}) - \zeta(\omega_2')] + \qquad (42)$$

$$+ a(\bar{u} - \omega_3) + b(\bar{v} - \omega_2'),$$

где $a = -b(a_1)$, $b = -\wp(b_2)$, $\sigma(u) + \zeta(u)$ –

---

6. $\sigma_k(u)$ связаны с функцией Вейерштрасса соотношением

$$\wp'(u) = \pm 2 \frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

соответствующие эллиптические функции.

Как частный случай, Мусхелишвили решает свои уравнения (4I) и (42) при $a=b$, $u-v=\beta'$, $\alpha_\varphi=0$. При этом из (4I) $\varphi-\varphi_0=0$ (плоское движение), а уравнение (42) записывается в форме:

$$eE\frac{t-\tau}{\sqrt{\mu}}=-\zeta(u)+\zeta(v)-\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_3}+\frac{1}{2}\frac{\wp'(v)}{\wp(v)-e_2'}+a(u-v). \quad (43)$$

Для рассматриваемого случая он подбирает следующие значения e_i и e_i' :

$$e_1=\frac{1}{3}A+\sqrt{A^2-2e^3E(\varkappa+\beta)}>0,\quad e_1'=\frac{1}{3}A+\sqrt{A^2+2e^3E(\varkappa-\beta)}>0, \quad (44)$$

$$e_2=\frac{1}{3}A-\sqrt{A^2-2e^3E(\varkappa+\beta)}<0,\quad e_2'=\frac{2}{3}A<0,$$

$$e_3=-\frac{2}{3}A<0,\qquad e_3'=\frac{1}{3}A-\sqrt{A^2+2e^3E(\varkappa-\beta)}.$$

При этом параметрические уравнения орбиты даны формулами

$$q=\frac{2e^2(\varkappa+\beta)}{\wp(u)+\frac{2}{3}A},\quad p=\frac{2e^2(\varkappa+\beta)}{\wp(v)+\frac{2}{3}A}, \quad (45)$$

и уравнение движения (43) перепишется так:

$$eE\frac{t-\tau}{\sqrt{\mu}}=-\zeta(u)+\zeta(u)+\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(u)}{\wp(u)+\frac{2}{3}A}-\frac{\wp'(v)}{\wp(v)+\frac{2}{3}A}\right\}+ \quad (46)$$
$$+\frac{2}{3}A(u-v).$$

При этом E Мусхелишвили определяет:

$$\sqrt{e_1-e_3}=\sqrt{2A}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{e^3E(\varkappa+\beta)}{A^2}\right\}; \quad (47)$$

$$\sqrt{e_1'-e_3'}=\sqrt{2A}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{e^3E(\varkappa-\beta)}{A^2}\right\};$$

$$K^2 = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{e^3 E(\varkappa+\beta)}{2\mathcal{A}^2};$$

$$K_1^2 = \frac{e_2' - e_3'}{e_2' - e_3'} = \frac{e^3 E(\varkappa-\beta)}{2\mathcal{A}^2}, \tag{48}$$

на основании которых вычисляется

$$2\omega_1 = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2\mathcal{A}}}\left\{1+\frac{3}{8}\,\frac{e^3E(\varkappa+\beta)}{\mathcal{A}^2}\right\},\quad 2\omega_1' = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2\mathcal{A}}}\left\{1-\frac{3}{8}\,\frac{e^3E(\varkappa-\beta)}{\mathcal{A}^2}\right\}, \tag{49}$$

$$\delta = \frac{2\omega_1 - 2\omega_1'}{\omega_1'} = \frac{3\varkappa}{2}\,\frac{e^3}{\mathcal{A}^2}E. \tag{50}$$

Чтобы оцень порядок величины δ , характеризующей степень отклонения орбиты от периодического движения при $E\neq 0$ (условно-периодическое движение) внесем в (50) квантовое значение $\mathcal{A}$ и a :

$$a_n = \frac{\hbar^2}{\varkappa\mu e^2}n^2 = 5{,}29\cdot 10^{-9}\,\frac{n^2}{\varkappa}\,\text{см}\quad (n=1,2,3\ldots) \tag{51}$$

$$\mathcal{A}_n = \frac{\varkappa e^2}{2a_n} = \frac{\varkappa^2 e^4 \mu}{2\hbar^2 n^2} = 1{,}06\cdot 10^{-10}\,\frac{\varkappa^2}{n^2},$$

$$\delta_n = \frac{2\omega_1 - 2\omega_1'}{\omega_1'} = 6\,\frac{\hbar^4 E}{\varkappa^3 e^5 \mu^2}n^4 = 3{,}52\cdot 10^{-7}\,\frac{E}{\varkappa^3}n^4. \tag{52}$$

При этом выясняется, что для $E = (1{,}2 \div 4{,}8)10^6\, CGSF$

$$\pi/2\cdot 7{,}79\cdot 10^4\,\text{сек}^{-1} \leq \omega_1 \leq \pi/2\cdot 8{,}51\cdot 10^4\,\text{сек}^{-2};$$

$$\pi/2\cdot 7{,}58\cdot 10^7 \leq \omega_1' \leq \pi/2\cdot 7{,}45\cdot 10^7\,\text{сек}^{-1};\quad 0{,}055 \leq \delta_1 \leq 0{,}286.$$

В следующем докладе по данному вопросу, сделанном Н.И.Мусхелишвили I апреля I920 г. на 9-ом заседании АК ("О периодических орбитах электрона, движущегося в постоянном электрическом поле и притягиваемого к неподвижному ядру" /I0/), он занимался установлением критерия замкнутости орбиты.

Выясняется, что для замкнутости орбиты необходимо, чтобы вещественные периоды функций $\rho(u)$ и $\rho(v)$ были соизмеримыми:

$$\frac{\omega_1}{\omega_1'}=\frac{m'}{m}\;\frac{\sqrt{e_1'-e_3'}}{\sqrt{e_1-e_3}}=\frac{(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)}{(1+2q'+2q'^4+2'^9+\ldots)}, \tag{53}$$

где

$$q=\frac{1}{2}\gamma+2\left(\frac{1}{2}\gamma\right)^5+15\left(\frac{1}{2}\gamma\right)^9+\ldots,\quad \gamma=\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}, \tag{54}$$

$$q'=\frac{1}{2}\gamma'+2\left(\frac{1}{2}\gamma'\right)^5+15\left(\frac{1}{2}\gamma'\right)^9+\ldots,\quad \gamma'=\frac{1-\sqrt[4]{1-k_1^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_1^2}}.$$

При этом $m>m'$, так как $u=2m\omega$ и $v=2m'\omega_1'$. Для замкнутости орбиты нужно, чтобы число пересечения отрицательной оси OX превосходило число пересечений положительной оси. Из условий замкнутости орбиты и соизмеримости периодов следует формула для напряженности электрического поля

$$E=\left(\frac{\omega_1}{\omega_1'}-1\right)\frac{4\mu^2}{3\varkappa e^3}=\frac{2}{3}\left(\frac{\omega_1}{\omega_1'}-1\right)\frac{\varkappa e\mu}{\hbar^2}\;\frac{1}{n^2}. \tag{55}$$

Численное значение для напряженности внешнего электрического поля, обеспечивающего замкнутость орбиты электрона, движущегося вокруг неподвижного ядра при $\varkappa=2$, $n=1$, $\omega_1/\omega_1'=m'/m>1$ $(m-m'>1)$ определяется

$$E=\left(\frac{\omega_1}{\omega_1'}-1\right)\cdot 4{,}6\cdot 10^7\,CGSF>\frac{1}{m}\,4{,}6\cdot 10^7\,CGSF. \tag{56}$$

Из (56) следует: "чтобы получить орбиту, замыкающуюся после K кратного пересечения отрицательной части OX, необходимо приложить поле $E > m^{-1} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{7}$. Для случая внешнего поля E обыкновенно < 400. Поэтому $K > 10^{15}$. Только при таком числе оборотов орбита может замкнуться" /10, л. 169 об./.

Отметим, что решением уравнений Гамильтона-Якоби для указанной задачи Н.И.Мусхелишвили официально занимается с января 1920 г. Об этом свидетельствуют протоколы АК и записи в тетрадях, озаглавленные им как "Механика и теоретическая физика". По этим записям мы узнаем, что в 1920 г. он законспектировал статью П.Эпштейна "Zur Theorie des Starkeffektes" (1916) и некоторые работы физиков и механиков по данному вопросу. Нужно отметить также, что сильное влияние на тематику Н.И.Мусхелишвили оказало исследование акад.А.Н.Крылова "Некоторые замечания о движении электрона в атоме гелия" /18/, в котором некоторые математические вопросы были решены с помощью эллиптических интегралов. Однако можно заключить, что квантовой теорией эффекта Штарка Н.И.Мусхелишвили занимался гораздо раньше, о чем свидетельствует его приглашение в АК как одного из ведущих специалистов в данной области.

Отметим, что решением уравнений Гамильтона-Якоби для указанной задачи через специальные (эллиптические) функции независимо от Н.И.Мусхелишвили занимался С.Богуславский, который еще в 1914 г. (Phys. Z., Bd. 15, S. 285) применил эллиптические функции при квантовании нелинейной осцилляторной задачи /II, с. 70 /, и только в 1921 г. опубликовал цикл статей в ЖРФХО /I2/ под названием "К вопросу о строении атомного ядра", в которых были получены более общие формулы для эффекта Штарка, чем формула Эпштейна-Шварцшильда (24).

К сожалению, продвижению в этом направлении Н.И.Мусхелишвили помешали: I) прекращение работы и роспуск АК, 2) переход в ТГУ с 20 сентября 1920 г. на постоянную работу, 3) постепенный отход от намеченной программы в исследованиях бывших членов АК и вообще науки в целом от теории атома Бора-Зоммерфельда, 4) начало нового направления исследований по плоской задаче гидродинамики и теории упругости (I9I9), результатом которого явилась топография автора под названием "Применение интеграла, аналогичного интегралу Коши для решения некоторых задач математической физики", опубликованная в 1922 г. в Тбилиси на французском языке /I3/.

Рассмотренная нами работа Н.И.Мусхелишвили представляет интерес не только для историков физико-математических наук, но и как оригинальная работа, излагающая новый метод решения уравнений Гамильтона-Якоби через эллиптические функции.

Поступила 23.IX.I988

Кутаисский пединститут

Литература

I. Н.И.Мусхелишвили. ЛО Арх.АН СССР, ф.34I, оп.2, е.х.67, л.87-97об.

2. А.Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т.I, М., ГИТТЛ, 1956, 59I с.

3. P.S.Epstein, An. der Phys., 50, 489 (1916)

4. K.Schwarzschild, Berl. Sitzung., Aprel, 1916

5. De Saint - Germain, Nouv. Ann. de Math., 3-e, s.t. 11, 89 (1892).

6. К.Якоби. Лекции по динамике, М-Л, 1936.

7. М.Джеммер. Эволюция понятий квантовой механики, М.,"Наука", 1985, 379 с.

8. В.К.Фредерикс. ЛО Арх.АН СССР, ф.341, оп.2, е.х.67, л.230-236.

9. В.С.Смирнов. Курс высшей математики, т.III, ч.II, изд.8-е, М., "Наука", 1969, 689 с.

10. Н.И.Мусхелишвили. ЛО Арх.АН СССР, ф.341 оп.2, е.х. 67, л.169-169об.

11. А.Н.Крылов. ЛО Арх.АН СССР, ф.341,оп.2, е.х. 67.

12. М.Борн. Лекции по атомной механике, т.I, Харьков-Киев, ГНИ, 311 с.

13. С.Богуславский. ЖРФХО, 52, физ.отд. 73 (1922).

14. Н.И.Мусхелишвили. Applications des integrales analogues à celles Cauchy à quelques problemes de la physique mathematique, Tiflis, Ed. de l' université, 1922. 152 p.

თ. ეფრემიძე

ნ.ი. მუსხელიშვილის ერთი უცნობი მოხსენება წყალბადის მსგავსი ატომისათვის ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნის შესახებ პარაბოლურ კოორდინატებში

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია აკად. ნ.ი.მუსხელიშვილის ერთი უცნობი ნაშრომი, რომელიც წაკითხული იქნა 1920 წ. 5 თებერვალს პეტროგრადის სახელ-

მწიფო ოპტიკურ ინსტიტუტში მოქმედ "ატომური კომისიის" მე-3 სხდომაზე სათაურით: "მუდმივ ელექტრონულ ველში ელექტრონების მოძრაობის ამოცანა, რომელიც მიეზიდება უძრავი ცენტრის (ბირთვის) მიერ" (ЛО Арх. АН СССР, ф. 341, оп. 2, е.х. 67, л. 87-97) აღნიშნული ამოცანა, რომელიც მანამდე მათემატიკურად ამოხსნილი იყო ა.ზომერფელდის ნაშრომების მეთოდის გამოყენებით პ.ეპშტეინის და კ.შვარცშილდის მიერ (1916), საგრძნობლად გაამარტივა ნ.ი.მუსხელიშვილმა $E=0$ შემთხვევაში, ხოლო სრულიად ორიგინალურად გადაწყვიტა $E\neq 0$-სათვის. ნ.ი.მუსხელიშვილის მიერ გამოყენებული მეთოდი მოძრაობის განტოლების ამოხსნისა ვეიერშტრასის ელიფსურ ფუნქციებში, რამდენად ეფექტურია, ჩანს ს.ბოგუსლავსკის / ЖРФХО, 52, 73, 1922/ მიერ ანალოგიური მეთოდით დადგენილი შტარკის ეფექტის საანგარიშო ფორმულიდან, რაც აგრეთვე შეუმჩნეველი დარჩა ფიზიკისა და მათემატიკის მეცნიერებათა ისტორიკოსებს,

მოხსენებაში გადმოცემულია E დაძაბულობის გარეშე ელექტრულ ველში მოთავსებული წყალბადისმსგავსი ატომისთვის ჰამილტონ-იაკობის განტოლების დეტალური ამოხსნა პარაბოლურ კოორდინატებში. ცვლადთა განცალების მეთოდით მიღებულია პერიოდის ($E=0$) (და ორმაგი პერიოდის ($E\neq 0$) შესაბამისი ფორმულები, რომლებიც დაკვანტვის პროცედურის პირობებში გვაძლევენ ბორისა და ეპშტეინის ფორმულებს. ნაშრომში გადმოცემული გაანგარიშებით, მრავალპერიოდული (ამჯერად ორპერიოდული) მოძრაობისას ორბიტა ძლიერ გადაიხრება პერიოდულისაგან და კონკრეტული E-თვის, გარკვეულ საზღვრებში, გვაძლევს პერიოდულ ორბიტათა უსასრულოდ დიდ რიცხვს.

T.Epremidze.

CONCERNING ONE UNKNOWN PAPER BY N.I.MUSKHELISHVILI ON THE SOLUTION OF A HAMILTON-JACOBI EQUATION FOR A HYDROGEN-LIKE ATOM IN PARABOLIC COORDINATES

Summary

The author discusses an unknown paper presented by Acad. N.Muskhelishvili on 5 February 1920 at the 3rd meeting of the "Atomic Commission" functioning at the State Optical Institute in Petrograd, entitled: "The problem of the movement of an electron in a permanent electronic field attracted by the immovable centre (nucleus)". This problem, which had earlier been solved mathematically by P.Epstein and C. Schwarzschield (1916), using A. Sommerfeld's method of residues, was considerably simplified by Mushkelishvili for the E=0 case, and solved quite originally for E≠0. The effectiveness of the method used by Muskhelishvili for solwing th equation of movement in the Weierstrass elliptic functions is seen from the formula derived by S. Boguslavski for calculating the Stark effect, which also remained unknown to historians of physics and mathematics.

Muskhelishvili's paper presents a detailed solution in parabolic coordinates of a Hamilton - Jacobi equation of a hydrogen-like atom placed in an electric field free of E tension; using the method of separation of variables, respective formulae are obtained for period (E =0) and double-period (E ≠0) which, in conditions of a quantization procedure, yield the formulae of Bohr and Epstein. According to the calculation presented in Muskhelishvili's paper, under multi-period (in the present case, double-period) movement, the orbit strongly deviates from periodic, yieldingan infinitely large number of periodic orbits for a particular E, within definite limits.

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

სარჩევი

CONTENTS

Редактор издательства Л. АБУАШВИЛИ

Подписано в печать 20.УП.89

УЭ 01597 Бумага 60 х 84

Усл.печ.л. II,75 Уч.-изд.л. 7,22

Тираж 300 Заказ 806 Цена I р.40 к.

Издательство Тбилисского университета

Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, I4

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,

თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14

Типография Тбилисского университета,

Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, I.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,

თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.