თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
298

ISSN 0376-2637

კიბერნეტიკა. გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS. APPLIED MATHEMATICS

12

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1990

Издательство Тбилисского унив.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINCS OF TBILISI UNIVERSITY

298

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა

CYBERNETICS
APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1990 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

298

КИБЕРНЕТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси 1990

Издательство Тбилисского университета, 1990
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1990
TBILISI UNIVERSITY PRESS, 1990

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ.ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

298, 1990

О РЕШЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ , ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А.Н.Джорбенадзе, Т.С.Цупунава

В работе приняты следующие обозначения:

E_3 - трехмерное пространство Евклида;

D - ограниченная область из E_3 ;

S - двумерная связная замкнутая, гладкая, ограниченная верхность в E_3 , ограничивающая область D ;

Ω - непустое ограниченное множество из E_3;

V - множество ограниченных и измеримых по Лебегу на D ктор-функций из E_3 ;

$A(\frac{\partial}{\partial x})$ - дифференциальный оператор теории упругости (/I/);

$$\Gamma(x-y)=\|\Gamma_{ij}(x-y)\|_{3\times 3};$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(\lambda+3\mu)\cdot\delta_{ij}}{2\mu(\lambda+2\mu)|x-y|}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}\right];$$

$$\Gamma^*_{ij}(y-x,n(y))=\|\Gamma^*_{ij}(y-x,n(y))\|_{3\times 3};$$

$$\Gamma^*_{ij}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mu\cdot\delta_{ij}}{\lambda+2\mu}+\frac{3(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{(y_i+x_i)(y_j-x_j)}{|y-x|^2}\right]\times$$

$$\times\frac{\sum\limits_{l=1}^{3}(x_l-y_l)n_l(y)}{|y-x|^3}+\frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left[n_i(y)\frac{x_j-y_j}{|y-x|^3}-\right.$$

$$\left.-n_j(y)\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\right];\quad i,j=\overline{1,3},$$

δ_{ij} - символ Кронекера, λ и μ - постоянные Ламе.

В работе /2/ рассмотрена оптимальная задача для систем, описываемых уравнениями теории упругости. При решении этой задачи в качестве класса допустимых управлений было взято пространство W_2^1. Цель настоящей работы получить необходимое условие оптимальности для управляющих функций из V.

Согласно /2/ для любого допустимого управления f из класса V существует единственное решение $u: D \to E_3$ уравнения

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) + \Phi(x) = 0, \quad \Phi \in V, \tag{I}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u^+(y) = f(y), \quad \forall y \in S. \tag{2}$$

Допустимое управление f_0 называется оптимальным, если для соответствующего решения u_0 задачи (I), (2) справедливо равенство

$$J(u_0) = \min_{f \in V} J(u),$$

где

$$J(u) = \int_D a(x)u(x)dx. \tag{3}$$

Вектор-функция $a(x): D \to E_3$ принадлежит V.

Оптимальная задача заключается в нахождении такого управления.

Если f_0 - оптимальное управление, то пара вектор-функций называется решением оптимальной задачи (I)-(3).

Как известно /I/, если $\Phi \in V$, то

$$u(\Phi)(x) = \int_D \Gamma(x-y)\Phi(y)dy \tag{4}$$

представляет собой решение уравнения (I).

Рассмотрим разность

$$v = u - u(\Phi). \tag{5}$$

Очевидно, что v является решением уравнения

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v = 0 \tag{6}$$

и удовлетворяет граничному условию

$$v^+(y) = \varphi(y) = f(y) - u^+(\Phi)(y), \qquad \forall y \in S. \tag{7}$$

Таким образом, задача (I), (2) приводится к задаче (6), (7). Так как $\Phi \in V$, то $\varphi(y) = f(y) - u^+(\Phi)(y)$ тоже принадлежит классу V.

Решение задачи (6),(7) имеет вид

$$v(x) = \int_S \Gamma^*(y-x, n(y))\,\nu(y)\,d_yS \tag{8}$$

где некоторый вектор $\nu(x)$ определяется с помощью следующего интегрального уравнения:

$$-\nu(y) + \int_S \Gamma^*(z-y, n(z))\,\nu(z)\,d_zS = \varphi(y) = f(y) - u^+(\Phi)(y). \tag{9}$$

Существование единственного решения (9) для фиксированного f доказано в /3/.

В силу (8), функционал (3) имеет вид

$$J(\nu) = \int_S T_1(y)\,\nu(y)\,d_yS + T_2, \tag{10}$$

где

$$T_1(y) = \int_D a(x)\,\Gamma^*(y-x, n(y))\,dx, \qquad T_2 = \int_D a(x)\,u(\Phi)\,dx.$$

Заметим, что T_2 не зависит от управления f.

Таким образом, мы можем сформулировать поставленную выше оптимальную задачу в следующем эквивалентном виде: требуется найти такое допустимое управление f_0, при котором решение ν_0 уравнения (9) обеспечивает минимальное значение функционала (10).

В этом случае, рассуждая аналогично /4/, получим, что сопряженная система интегральных уравнений имеет вид:

$$\varphi(x)-\int_S \Gamma^*(x-y,n(x))\varphi(y)d_yS+T_1(x)=0, \qquad (11)$$

а принцип максимума формулируется так: Для оптимальности управления f_0 необходимо и достаточно существование такой ненулевой функции φ, удовлетворяющей уравнению (11), что

$$\varphi\cdot f_0=\sup_{f\in\Omega}\varphi\cdot f .$$

Далее подставим f_0 в уравнение (9), решив которое, получим ν_0. Принимая во внимание (8) получим u_0. Таким образом будет найдена пара вектор-функций (f_0, u_0) - решение оптимальной задачи (1)-(3).

Поступила 15.IX.1989

Кафедра теории оптимального управления
Кафедра применения математических методов

Литература

1. В.Д. Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. - М.: Наука, 1976.
2. А.Н.Джорбенадзе. Труды ТГУ, т.270, сер. Математика. Механика. Астрономия, 1987, 120-135.
3. С.Г.Михлин. Успехи математических наук, т.3, выпуск 3(25), 1948, 30-111.
4. Т.С.Цуцунава. Труды ТГУ, т.261, сер. Кибернетика. Прикладная математика, 9, 1988, 60-69.

ა. ჯორბენაძე, თ. წუწუნავა

დრეკადობის თეორიის განტოლებებით აღწერილი სისტემებისათვის ოპტიმალური მართვის ამოცანის შესახებ

რეზიუმე

მოყვანილია ლ. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგი (1)-(3) ამოცანისათვის.

A.Jorbenadze, T.Tsutsunava

ON SOLVING THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SYSTEMS DESCRIBED BY THE ELASTICITY THEORY

Summary

An analogue of L. Pontryagin' s maximum principle is given for the optimal control problem (1)-(3).

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

298, 1990

О СХОДИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г.В.Меладзе, Г.З.Церцвадзе

Введение

Доказательство сходимости разностных схем для нелиней-ных систем законов сохранения, записанных в виде дифферен-циальных уравнений, даже при наличии гладкого решения у ис-ходной задачи является трудной самостоятельной задачей. Ра-боты, где были разрешены такие задачи, появились в основном в последнее десятилетие. Из работ, посвященных вопросам схо-димости разностных схем газовой динамики в эйлеровых перемен-ных, мы можем указать лишь на /1/, /2/,/3/. Любая новая рабо-та по этим вопросам представляет большой интерес.

В данной работе развивается методика, предложенная в ука-занных работах, и доказывается сходимость полностью консер-вативной дифференциально-разностной схемы для полной системы уравнений газовой динамики в переменных Эйлера в случае иде-ального газа.

§ I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

В области $\Omega=\{(x,t),\ x\in(-\infty,+\infty),\ t\in(0,T)\}$ рассмотрим следующий вид системы одномерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial m}{\partial x}=f_1(x,t,\rho,m,\varepsilon), \tag{I.Ia}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m^2}{\rho}+P\right)=f_2(x,t,\rho,m,\varepsilon), \tag{I.Iб}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(m\varepsilon)}{\partial x}+P\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{\rho}\right)=f_3(x,t,\rho,m,\varepsilon), \tag{I.Iв}$$

$$P=(\gamma-1)\rho\varepsilon,\quad \gamma=const>1,$$

где x – пространственная координата, t – время, ρ – плотность, m – импульс, P – давление, ε – внутренняя энергия; f_1, f_2, f_3 – функции, выражающие, соответственно, источники или стоки массы, импульса и энергии. Для системы (I.I) рассмотрим условия Коши:

$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\ m(x,0)=m_0(x),\ \varepsilon(x,0)=\varepsilon_0(x), \tag{I.2}$$

где ρ_0, m_0, ε_0 – достаточно гладкие периодические функции с периодом L.

Для задачи (I.I)-(I.2) построим полностью консервативную дифференциально-разностную схему, в которой пространственный оператор аппроксимируется аналогично работе /4/ (обозначения взяты из /4/,/5/):

$$\frac{d\rho_h}{dt}+m_{h\mathring{x}}=f_{1h}, \tag{I.3a}$$

$$\frac{dm_h}{dt}+\left(\left(\frac{m_h}{\rho_h}\right)_{(0.5)}m_{h(0.5)}\right)+P_{h\mathring{x}}=f_{2h}, \tag{I.3б}$$

$$\frac{d(\rho_h\varepsilon_h)}{dt}+(m_h\varepsilon_h)_{\mathring{x}}+P_h\left(\frac{m_h}{\rho_h}\right)_{\mathring{x}}=f_{3h}, \tag{I.3в}$$

$$P_h=(\gamma-1)\rho_h\varepsilon_h.$$

где функции

$$\rho_h \equiv \rho_h(jh,t),\quad m_h \equiv m_h(jh,t),\quad P_h = P_h(jh,t),$$

$$\varepsilon_h \equiv \varepsilon_h(jh,t),\quad f_{ih} \equiv f_i(jh,t,\rho_h,m_h,\varepsilon_h),\quad i=1,2,3$$

определены в области $\bar{D} = \omega_h \times [0,T]$, $\omega_h = \{x_j = jh,\ j=0,\pm1,\dots\}$. При этом, для некоторого натурального N выполняется равенство: $Nh = L$. Начальные условия для схемы можно записать в виде

$$\rho_h(jh,0) = \rho_0(jh),\quad m_h(jh,0) = m_0(jh),\quad \varepsilon_h(jh,0) = \varepsilon_0(jh). \qquad (I.4)$$

Относительно функций $\rho, m, P, \varepsilon, f_i$, $i=1,2,3$, предполагается:

(AI) функции ρ, m, P, ε принадлежит классу $C^{3,1}\{(-\infty;+\infty)\times[0,T]\}$. Существует такая константа $\delta > 0$, что в области $\bar{\Omega}$: $\rho(x,t)$, $\varepsilon(x,t) \geq \delta$;

(A2) функции f_i, $i=1,2,3$, удовлетворяют условию Липшица относительно переменных ρ, m, ε.

Нетрудно показать, что погрешность аппроксимации дифференциально-разностной схемы (I.3) в каждом узле сетки составляет $O(h^2)$.

Для доказательства сходимости схемы (I.3) понадобится несколько лемм. В пространстве сеточных функций введем скалярное произведение

$$(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^{N} u_h(ih)\, v_h(ih)\, h,\quad Nh = L,$$

и норму, индуцированную этим скалярным произведением: $\|u_h\|^2 = (u_h, u_h)$.

<u>Лемма I</u> (см./6/). Пусть сеточные функции u_h, v_h -

периодические с периодом L. Тогда справедливы равенства

$$(u_h, v_{hx}) + (v_h, u_{h\bar{x}}) = 0, \qquad (u_h, v_{h\overset{\circ}{x}}) + (v_h, u_{h\overset{\circ}{x}}) = 0$$

Лемма 2 (см./6/). Пусть сеточные функции $u_h^{(i)}$ – периодические с периодом L. Тогда справедливо неравенство

$$\Big\| \prod_{i=1}^{\ell} u_h^{(i)} \Big\|^2 \le h^{1-\ell} \prod_{i=1}^{\ell} \| u_h^{(i)} \|^2 .$$

Лемма 3 (см./I/). Пусть сеточные функции u_h, v_h – периодические с периодом L. Кроме того, выполнены следующие условия: $|v_h| \le \bar{M}$, $|v_{hx}| \le \bar{M}$ для всех $x_j \in [0, L]$, $\bar{M} = const > 0$. Тогда существует такая константа $M > 0$, зависящая только от $\bar{M}$, что справедливо неравенство

$$|(u_h, v_h u_{h\bar{x}})| \le M \| u_h \|^2 .$$

Лемма 4 (см./I/). Пусть сеточные функции u_h, v_h, w_h – периодические с периодом L. Тогда справедливо равенство

$$(w_h, v_h(+1) u_{hx}) + (w_h, v_h(-1) u_{h\bar{x}}) =$$

$$= -2(v_h w_{h\overset{\circ}{x}}, u_h) - 2(w_h v_{h\overset{\circ}{x}}, u_h).$$

§ 2. Оценка погрешности метода и теорема о сходимости

Рассмотрим компактное множество F в пространстве R^{3N+1} (где $Nh = L$), состоящее из всевозможных точек

$$\left(t, z_1^{(1)}(t), \cdots, z_N^{(1)}(t), z_1^{(2)}(t), \cdots, z_N^{(2)}(t), z_1^{(3)}(t), \cdots, z_N^{(3)}(t)\right),$$

координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$0 \le t \le T, \quad |z_j^{(1)}(t) - \rho(jh,t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad |z_j^{(2)}(t) - m(jh,t)| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|z_j^{(3)}(t) - \varepsilon(jh,t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = \overline{1, N},$$

для всех $t \in [0,T]$, функции ρ, m, ε являются решениями задачи (I.I)-(I.2).

Поскольку (I.3) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций

$$\rho_h(jh,t),\quad m_h(jh,t),\quad \varepsilon_h(jh,t),\quad j=\overline{1,N},$$

то согласно теореме о существовании и продолжении решения /7/ существует единственное решение задачи (I.3)-(I.4), которое продолжается вперед до границы с F .

Оценим погрешность решения (I.3)-(I.4) в компакте F . Для этого рассмотрим функцию погрешности

$$\tilde\rho=\rho_h-\rho(x_i,t),\quad \tilde m=m_h-m(x_i,t),\quad \tilde\varepsilon=\varepsilon_h-\varepsilon(x_i,t),$$

$$\tilde v=\frac{m_h}{\rho_h}-\frac{m(x_i,t)}{\rho(x_i,t)}=\frac{m+\tilde m}{\rho+\tilde\rho}-\frac{m}{\rho}=\frac{\tilde m}{\rho+\tilde\rho}-\frac{\tilde\rho}{\rho+\tilde\rho}\cdot\frac{m}{\rho},$$

$$\tilde P=P_h-P(x_i,t)=(\gamma-1)(\rho_h\varepsilon_h-\rho\varepsilon)=(\gamma-1)(\tilde\rho\varepsilon+(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon).$$

Из этих равенств определим $\rho_h,\ m_h,\ \varepsilon_h,\ P_h,\ \frac{m_h}{\rho_h}$ и внесем в разностное уравнение (I.3):

$$\frac{d\tilde\rho}{dt}+\tilde m_{\overset{\circ}{x}}=-\Psi_1+\tilde f_1, \tag{2.Ia}$$

$$\frac{d\tilde m}{dt}+\frac14\tilde m(+1)\left(\frac{m}{\rho}\right)_x+\frac14\tilde m(+1)\tilde v_x+\frac14 m(+1)\tilde v_x+$$
$$+\frac14\tilde m(-1)\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\bar x}+\frac14\tilde m(-1)\tilde v_{\bar x}+\frac14 m(-1)\tilde v_{\bar x}+$$
$$+\frac12\tilde m\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\overset{\circ}{x}}+\frac12\tilde m\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+\frac12 m\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+\frac{m}{\rho}\tilde m_{\overset{\circ}{x}}+m_{\overset{\circ}{x}}\tilde v+$$
$$+\tilde m_{\overset{\circ}{x}}\tilde v+(\gamma-1)(\tilde\rho\varepsilon+(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}=-\Psi_2+\tilde f_2, \tag{2.Iб}$$

$$\frac{d}{dt}\left((\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon+\tilde\rho\varepsilon\right)+(\tilde m\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+(\tilde m\tilde\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+(m\tilde\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+$$

$$+\rho\left(\frac{\tilde m}{\rho}\right)_{\overset{\circ}{x}}+\rho\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+\tilde\rho\tilde v_{\overset{\circ}{x}}=-\varphi_3+\tilde f_3 \; . \qquad (2.1в)$$

где

$$\tilde f_i=f_i(x_j,t,\rho+\tilde\rho,\, m+\tilde m,\, \varepsilon+\tilde\varepsilon)-f_i(x_j,t,\rho,m,\varepsilon),\quad i=1,2,3,$$

а невязки

$$\varphi_1=\frac{d\rho}{dt}+m_{\overset{\circ}{x}}-f_1 \; ,$$

$$\varphi_2=\frac{dm}{dt}+\left(\left(\frac{m}{\rho}\right)_{(0.5)}m_{(0.5)}\right)_x+p_{\overset{\circ}{x}}-f_2 \; ,$$

$$\varphi_3=\frac{d(\rho\varepsilon)}{dt}+(m\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+p\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\overset{\circ}{x}}-f_3 \; ,$$

порядок которых в каждой точке составляет $O(h^2)$, представляют собой погрешность аппроксимации. Учитывая, что

$$\tilde m=(\rho+\tilde\rho)\tilde v+\tilde\rho\cdot\frac{m}{\rho}\, ,$$

представим

$$\frac{d\tilde m}{dt}+\left(\frac{m}{\rho}\right)\tilde m_{\overset{\circ}{x}}=\frac{d((\rho+\tilde\rho)\tilde v)}{dt}+\frac{d\left(\tilde\rho\cdot\frac{m}{\rho}\right)}{dt}+\left(\frac{m}{\rho}\right)\tilde m_{\overset{\circ}{x}}=$$

$$=\frac{d((\rho+\tilde\rho)\tilde v)}{dt}+\tilde\rho\,\frac{d\left(\frac{m}{\rho}\right)}{dt}+\frac{m}{\rho}\left(\frac{d\tilde\rho}{dt}+\tilde m_{\overset{\circ}{x}}\right),$$

и используя очевидное равенство

$$(uv)_{\overset{\circ}{x}}=uv_{\overset{\circ}{x}}+u_{\overset{\circ}{x}}v+\frac{h}{2}\left(u_x v_x-u_{\bar x}v_{\bar x}\right),$$

представим

$$\frac{d}{dt}\left((\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon+\tilde\rho\varepsilon\right)+(\tilde m\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}=\frac{d((\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon)}{dt}+\tilde\rho\,\frac{d\varepsilon}{dt}+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{d\tilde\rho}{dt}+\tilde m_{\overset{\circ}{x}}\right)+\tilde m\varepsilon_{\overset{\circ}{x}}+\frac{h}{2}\left(\tilde m_x\varepsilon_x-\tilde m_{\bar x}\varepsilon_{\bar x}\right).$$

Тогда с использованием (2.Iа) уравнения (2.Iа)-(2.Iв) принимают следующий вид соответственно:

$$\frac{d\tilde\rho}{dt}+((\rho+\tilde\rho)\tilde v_{\overset{\circ}{x}})_{\overset{\circ}{x}}+\left(\tilde\rho\frac{m}{\rho}\right)_{\overset{\circ}{x}}=-\varphi_1+\tilde f_1 \tag{2.2а}$$

$$\frac{d((\rho+\tilde\rho)\tilde v)}{dt}+\tilde\rho\,\frac{d(\frac{m}{\rho})}{dt}+\frac14\tilde m(+1)\left(\frac{m}{\rho}\right)_x+\frac14\tilde m(+1)\tilde v_x+$$
$$+\frac14 m(+1)\tilde v_x+\frac14\tilde m(-1)\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\bar x}+\frac14\tilde m(-1)\tilde v_{\bar x}+$$
$$+\frac14 m(-1)\tilde v_{\bar x}+\frac12\tilde m\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\overset{\circ}{x}}+\frac12\tilde m\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+\frac12 m\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+$$
$$+m_{\overset{\circ}{x}}\tilde v+\tilde m_{\overset{\circ}{x}}\tilde v+(\gamma-1)(\tilde\rho\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+(\gamma-1)(\rho\tilde\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+$$
$$+(\gamma-1)(\tilde\rho\tilde\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}}+\frac{m}{\rho}\left(-\varphi_1+\tilde f_1\right)=-\varphi_2+\tilde f_2 \tag{2.2б}$$

$$\frac{d((\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon)}{dt}+\tilde\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\tilde m\varepsilon_{\overset{\circ}{x}}+\frac{h}{2}\left(\tilde m_x\varepsilon_x-\tilde m_{\bar x}\varepsilon_{\bar x}\right)+$$
$$+m\tilde\varepsilon_{\overset{\circ}{x}}+m_{\overset{\circ}{x}}\tilde\varepsilon+\frac{h}{2}\left(m_x\tilde\varepsilon_x-m_{\bar x}\tilde\varepsilon_{\bar x}\right)+\left(\tilde m\tilde\varepsilon\right)_{\overset{\circ}{x}}+$$
$$+\tilde\rho\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\overset{\circ}{x}}+\tilde\rho\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+(\gamma-1)\rho\varepsilon\tilde v_{\overset{\circ}{x}}+\varepsilon\left(-\varphi_1+\tilde f_1\right)=$$
$$=-\varphi_3+\tilde f_3. \tag{2.2в}$$

Умножим скалярно (2.2а) на $(\gamma-1)\varepsilon\tilde\rho$, (2.2б) на $((\rho+\tilde\rho)\tilde v)$ и (2.2в) на $\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon$. Получаем

$$(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde\rho,\frac{d\tilde\rho}{dt}\right)+(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde\rho,((\rho+\tilde\rho)\tilde v)_{\overset{\circ}{x}}\right)+\sum_{i=1}^{3}G_i=0, \tag{2.3а}$$

$$\frac12\frac{d}{dt}\|(\rho+\tilde\rho)\tilde v\|^2+(\gamma-1)((\rho+\tilde\rho)\tilde v,(\tilde\rho\varepsilon)_{\overset{\circ}{x}})+\sum_{i=4}^{13}G_i=0, \tag{2.3б}$$

$$\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ \frac{d((\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon)}{dt}\right)+\sum_{i=14}^{23} G_i = 0, \qquad (2.3в)$$

где

$$G_1=(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde\rho,\ \left(\tilde\rho\,\frac{m}{\rho}\right)_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_2=(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde\rho,\ \psi_1\right),$$

$$G_3=(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde\rho,\ -\tilde f_1\right),$$

$$G_4=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ \tilde\rho\,\frac{d\left(\frac{m}{\rho}\right)}{dt}\right),$$

$$G_5=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ \frac14\tilde m(+1)\left(\frac{m}{\rho}\right)_x+\frac14\tilde m(-1)\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\bar x}+\frac12 m\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_6=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ \frac14\tilde m(+1)\tilde v_x+\frac14\tilde m(-1)\tilde v_{\bar x}+\frac12\tilde m\tilde v_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_7=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ \frac14 m(+1)\tilde v_x+\frac14 m(-1)\tilde v_{\bar x}+\frac12 m\tilde v_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_8=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ m_{\mathring{x}}\tilde v\right),$$

$$G_9=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ \tilde m_{\mathring{x}}\tilde v\right),$$

$$G_{10}=(\gamma-1)\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ (\rho\tilde\varepsilon)_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_{11}=(\gamma-1)\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ (\tilde\rho\tilde\varepsilon)_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_{12}=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ -\frac{m}{\rho}\psi_1+\psi_2\right),$$

$$G_{13}=\left((\rho+\tilde\rho)\tilde v,\ \frac{m}{\rho}\tilde f_1-\tilde f_2\right),$$

$$G_{14}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ \tilde\rho\,\frac{d\varepsilon}{dt}\right),$$

$$G_{15}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ \tilde m\varepsilon_{\mathring{x}}+\frac{h}{2}\left(\tilde m_x\varepsilon_x-m_{\bar x}-\varepsilon_{\bar x}\right)\right),$$

$$G_{16}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ m\tilde\varepsilon_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_{17}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ m_{\mathring{x}}\tilde\varepsilon+\frac{h}{2}\left(m_x\tilde\varepsilon_x-m_{\bar x}\tilde\varepsilon_{\bar x}\right)\right),$$

$$G_{18}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ (\tilde m\tilde\varepsilon)_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_{19}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde\rho)\tilde\varepsilon,\ \tilde\rho\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\mathring{x}}\right),$$

$$G_{20}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\ \tilde{\rho}\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right),$$

$$G_{21}=(\gamma-1)\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\ \rho\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right),$$

$$G_{22}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\ -\varepsilon\varphi_1+\varphi_3\right),$$

$$G_{23}=\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\ \varepsilon\tilde{f}_1-\tilde{f}_2\right).$$

Рассмотрим сумму уравнений (2.3а)-(2.3в). Используя лемму I, получаем

$$(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde{\rho},\ \frac{d\tilde{\rho}}{dt}\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+$$

$$+\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\ \frac{d((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})}{dt}\right)+\sum_{i=1}^{23}G_i=0. \qquad (2.4)$$

Сначала преобразуем G_7 , используя лемму 4:

$$G_7=\frac{1}{4}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m(+1)\tilde{v}_x+m(-1)\tilde{v}_{\bar{x}}\right)+\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(m((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v})_{\overset{\circ}{x}},\ \tilde{v}\right)-\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\cdot m_{\overset{\circ}{x}},\ \tilde{v}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)=\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ (m\tilde{v})_{\overset{\circ}{x}}\right)+\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m_{\overset{\circ}{x}}\tilde{v}\right)=\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)+\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m_{\overset{\circ}{x}}\tilde{v}\right)+$$

$$+\frac{h}{4}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m_x\tilde{v}_x-m_{\bar{x}}\tilde{v}_{\bar{x}}\right)+\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m_{\overset{\circ}{x}}\tilde{v}\right)=\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)+$$

$$+\frac{h}{4}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m_x\tilde{v}_x-m_{\bar{x}}\tilde{v}_{\bar{x}}\right)=\left(\rho\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)+\left(\tilde{\rho}\tilde{v},\ m\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}\right)+$$

$$+\frac{h}{4}\left((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},\ m_x\tilde{v}_x-m_{\bar{x}}\tilde{v}_{\bar{x}}\right)=G_{24}+G_{25}+G_{26}.$$

Далее, преобразуем сумму $G_{10}+G_{21}$:

$$G_{10}+G_{21}=(\gamma-1)((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v},(\rho\tilde{\varepsilon})_{\overset{\circ}{x}})+$$

$$+(\gamma-1)((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\rho\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}})=(\gamma-1)\Big(-(((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v})_{\overset{\circ}{x}},\rho\tilde{\varepsilon})+$$

$$+((\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}},\rho\tilde{\varepsilon})\Big)=(\gamma-1)\Big(-((\rho+\tilde{\rho})_{\overset{\circ}{x}}\tilde{v},\rho\tilde{\varepsilon})-$$

$$-\frac{h}{2}((\rho+\tilde{\rho})_{x}\tilde{v}_{x}-(\rho+\tilde{\rho})_{\bar{x}}\tilde{v}_{\bar{x}},\rho\tilde{\varepsilon})\Big)=$$

$$=-(\gamma-1)(\rho_{\overset{\circ}{x}}\tilde{v}+\frac{h}{2}(\rho_{x}\tilde{v}_{x}-\rho_{\bar{x}}\tilde{v}_{\bar{x}}),\rho\tilde{\varepsilon})-$$

$$-(\gamma-1)(\tilde{\rho}_{\overset{\circ}{x}}\tilde{v}+\frac{h}{2}(\tilde{\rho}_{x}\tilde{v}_{x}-\tilde{\rho}_{\bar{x}}\tilde{v}_{\bar{x}}),\rho\tilde{\varepsilon})=G_{27}+G_{28}.$$

Учитывая также, что

$$(\gamma-1)\left(\varepsilon\tilde{\rho},\frac{d\tilde{\rho}}{dt}\right)=\frac{\gamma-1}{2}\left(\varepsilon,\frac{d}{dt}(\tilde{\rho}^{2})\right)=$$

$$=\frac{\gamma-1}{2}\frac{d}{dt}\left[(\varepsilon,\tilde{\rho}^{2})\right]-\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt},\tilde{\rho}^{2}\right),$$

$$\left(\varepsilon^{-1}(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon},\frac{d((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})}{dt}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(\varepsilon^{-1},((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^{2})\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d(\varepsilon^{-1})}{dt},((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^{2}\right),$$

скончательно получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[(\gamma-1)(\varepsilon,\tilde{\rho}^{2})+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^{2}+$$

$$+\left(\frac{1}{\varepsilon},((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^{2}\right)\Big]+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 7,10,21}}^{30}G_{i}=0, \qquad (2.5)$$

где

$$G_{29}=-\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt},\tilde{\rho}^2\right),\quad G_{30}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d(\varepsilon^{-1})}{dt},((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^2\right).$$

В дальнейшем через M будем обозначать положительную константу, которая не зависит от h. При этом значение величины M не будем уточнять. Для нас важно само существование такой константы. Оценим каждое слагаемое (2.5) в отдельности:

$$|G_1|=(\gamma-1)\left|\left(\varepsilon\tilde{\rho},\left(\tilde{\rho}\frac{m}{\rho}\right)_{\bar{x}}\right)\right|=(\gamma-1)\left|\left(\varepsilon\tilde{\rho},\tilde{\rho}_{\bar{x}}\frac{m}{\rho}\right)+\right.$$

$$+\left(\varepsilon\tilde{\rho},\tilde{\rho}\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\bar{x}}\right)+\left(\varepsilon\tilde{\rho},\frac{h}{2}\,\tilde{\rho}_x\left(\frac{m}{\rho}\right)_x-\right.$$

$$\left.\left.-\tilde{\rho}_x\left(\frac{m}{\rho}\right)_{\bar{x}}\right)\right|\le M\|\tilde{\rho}\|^2, \qquad \text{(лемма 3);}$$

$$|G_2|\le M\left(\|\tilde{\rho}\|^2+\|\varphi\|^2\right),$$

где $\|\varphi\|^2=max\left(\|\varphi_1\|^2,\ \|\varphi_2\|^2,\|\varphi_3\|^2\right)$.

Поскольку f_1 удовлетворяет условию Липшица по переменным ρ, m, ε, имеем:

$$|G_3|\le M\left(\|\tilde{\rho}\|^2+\|\tilde{m}\|^2+\|\tilde{\varepsilon}\|^2\right),$$

$$|G_4|\le M\left(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|\tilde{\rho}\|^2\right),$$

$$|G_5|\le M\left(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|\tilde{m}\|^2\right).$$

Используя лемму 2, можно оценить

$$|G_6|\le M\left(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+h^{-2}\|\tilde{m}\tilde{v}\|^2\right)\le M\left(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\right.$$

$$\left.+h^{-3}\|\tilde{m}\|^2\|\tilde{v}\|^2\right)\le M\left(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+h^{-3}\left(\|\tilde{m}\|^4+\|\tilde{v}\|^4\right)\right).$$

Применяя аналогичную методику оценок, мы можем оценить все G_i, $i=\overline{8,30}$ $(i \neq 10, 21)$, и из (2.5) получаем:

$$\frac{d}{dt}\left[(\gamma-1)(\varepsilon,\tilde{\rho}^2)+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\left(\frac{1}{\varepsilon},((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^2\right)\right] \leq$$

$$\leq M(\|\tilde{\rho}\|^2+\|\tilde{v}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|\tilde{m}\|^2+\|\tilde{\varepsilon}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2+\|\tilde{P}\|^2+$$

$$+h^{-3}(\|\tilde{\rho}\|^4+\|\tilde{v}\|^4+\|\tilde{m}\|^4+\|\tilde{\varepsilon}\|^4+\|\tilde{P}\|^4))+M\|\psi\|^2.$$

Учитывая, что

$$\|\tilde{v}\|^2 \leq M\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2,$$

$$\|\tilde{\varepsilon}\|^2 \leq M\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2,$$

$$\|\tilde{m}\|^2 \leq M(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|\tilde{\rho}\|^2),$$

$$\|\tilde{P}\|^2 \leq M(\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2+\|\tilde{\rho}\|^2),$$

$$a^4+b^4 \leq (a^2+b^2)^2,$$

окончательно получаем

$$\frac{d}{dt}\left[(\gamma-1)(\varepsilon,\tilde{\rho}^2)+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\left(\frac{1}{\varepsilon},((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^2\right)\right] \leq$$

$$\leq M\left[\|\tilde{\rho}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2+\right. \tag{2.6}$$

$$\left.+h^{-3}(\|\tilde{\rho}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2)^2\right]+M\|\psi\|^2.$$

Пусть постоянная M_1 выбирается следующим образом:

$$M_1=\max\left\{\sup_{\overline{\Omega}}\frac{1}{\varepsilon(\gamma-1)},1,\sup_{\overline{\Omega}}\varepsilon\right\}.$$

Тогда

$$\|\tilde{\rho}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2+\|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2 \leq M_1 Q,$$

где

$$Q = Q(t) = (\gamma-1)(\varepsilon, \tilde{\rho}^2) + \|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon}, ((\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon})^2\right).$$

Учитывая эти неравенства, (2.6) можно записать в виде

$$\frac{dQ}{dt} \leq M(Q + h^{-3}Q^2 + \|\Psi\|^2), \quad Q(0) = 0.$$

Проинтегрируем это неравенство:

$$Q(t) \leq M\int_0^t (Q + h^{-3}Q^2)d\tau + M\int_0^t \|\Psi\|^2 d\tau \leq$$
$$\leq M\int_0^t (Q + h^{-3}Q^2)d\tau + M\int_0^T \|\Psi\|^2 d\tau.$$

Используя теорию интегральных неравенств /8/, можно п... зать, что $Q(t)$ ограничено решением задачи

$$\frac{dU}{dt} = M(U + h^{-3}U), \quad U(0) = M\int_0^T \|\Psi\|^2 d\tau,$$

которое можно записать в явном виде:

$$U(t) = \left[1 + h^{-3}M\left(\int_0^T \|\Psi\|^2 d\tau\right)(1 - e^{Mt})\right]^{-1} \times \tag{2.7}$$
$$\times M\left(\int_0^T \|\Psi\|^2 d\tau\right)e^{Mt}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия, которые в области $\Omega = \{(x,t), x \in (-\infty, +\infty), t \in [0,T]\}$ гарантируют существование периодического по x гладкого решения класса $C^{3,1}\{\bar{\Omega}\}$ задачи (I.I)-(I.2); $\varepsilon(x,t)$, $\rho(x,t) \geq \delta = const > 0$.

Пусть функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют условию Липшица относительно переменных ρ, m, ε. Тогда существует $\bar{h} = const > 0$ такое, что при $h < \bar{h}$ решение задачи (I.3)-(I.4) существует и единственно на $[0,T]$, а также имеет мест... оценка

$$\|\tilde{\rho}\|, \ \|\tilde{m}\|, \ \|\tilde{\varepsilon}\| = O(h^2),$$

$$\|\tilde{\rho}\|_c,\ \|\tilde{m}\|_c,\ \|\tilde{\varepsilon}\|_c = O(h^{3/2}).$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим равенство (2.7). Так как $\|\Psi\|^2 = O(h^4)$, то можно выбрать h_0 таким образом, что будет выполнено неравенство

$$1 + h^{+3} M\left[\int_0^T \|\Psi\|^2 d\tau\right](1 - e^{Mt}) \geq \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0,T],$$

когда $h \leq h_0$. Отсюда можно заключить, что

$$Q(t) \leq M_2 e^{Mt} h^4 = O(h^4),$$

где M_2 взята из условия $2M\int_0^T \|\Psi\|^2 d\tau \leq M_2 h^4$.

Тогда

$$\|\tilde{\rho}\|^2 + \|\tilde{m}\|^2 + \|\tilde{\varepsilon}\|^2 \leq M_3\left(\|\tilde{\rho}\|^2 + \|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{v}\|^2 + \right. \tag{2.8}$$

$$\left. + \|(\rho+\tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2\right) \leq M_3 M_1 Q \leq M_1 M_2 M_3 e^{Mt} h^4 = O(h^4).$$

Используя неравенство

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 h \geq \max_i y_i^2 = h\|y\|_c^2,$$

можно получить оценку в равномерной метрике:

$$\|\tilde{\rho}\|_c^2 + \|\tilde{m}\|_c^2 + \|\tilde{\varepsilon}\|_c^2 \leq \frac{1}{h}\left(\|\tilde{\rho}\|^2 + \|\tilde{m}\|^2 + \|\tilde{\varepsilon}\|^2\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} M_1 M_2 M_3 e^{Mt} h^4 = M_1 M_2 M_3 e^{Mt} h^3 = O(h^3).$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\tilde{\rho}\|_c, \|\tilde{m}\|_c, \|\tilde{\varepsilon}\|_c \leq \sqrt{M_1 M_2 M_3}\, e^{\frac{Mt}{2}} h^{\frac{3}{2}} = O(h^{3/2}). \tag{2.9}$$

Оценки (2.8), (2.9) справедливы до первого пересечения решения задачи (I.3)-(I.4) с границей компакта F. Чтобы показать существование и единственность решения (I.3)-(I.4), а также сходимость к решению задачи (I.1)-(I.2) в интервале

$[0,T]$, достаточно показать, что существует $\bar{h}=const>0$ и при $h\leq\bar{h}$ решение (I.3)-(I.4) пересекает границу F на плоскости $t=T$.

Действительно, для этого достаточно взять $\bar{h}=\min(h_0;h_1)$, где h_1 определяется с помощью оценок (2.9) и неравенств

$$\|\tilde{\rho}\|_c, \|\tilde{m}\|_c, \|\tilde{\varepsilon}\|_c \leq \sqrt{M_1M_2M_3}\ e^{\frac{Mt}{2}} h_1^{\frac{3}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{M_1M_2M_3}\ e^{\frac{Mt}{2}} h_1^{\frac{3}{2}} < \frac{\delta}{2}.$$

Тем самым теорема доказа.

В заключение заметим, что доказательство сходимости двумерного аналога (I.3) дифференциально-разностной схемы проводится аналогично с использованием вспомогательных утверждений из /3/.

Поступила 20.IX.1989

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

I Г.В.Меладзе, Д.В.Попхишвили. О сходимости консервативной дифференциально-разностной схемы газовой динамики в эйлеровых координатах. Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,1985,т.25, № 6, с.850-859.

2. Д.В.Попхишвили. Сходимость полностью консервативной дифференциально-разностной схемы газовой динамики в эйлеровых координатах. Тр.ИПМ ТГУ, Тбилиси, 1985, т.15, с.294-297.

3. Н.О.Джгамадзе, Г.В.Меладзе, Д.В.Поцхишвили. Сходимость полностью консервативной дифференциально-разностной схемы газовой динамики в двумерном случае в переменных Эйлера. Депон. в ГрузНИИНТИ, 1987, № 340, 32 с.

4. А.В.Кузьмин, Л.В.Макаров, Г.В.Меладзе. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера. Ж.вычисл.матем. и матем. физ.,1980, т.20, № I, с.I7I-I8I.

5. А.А.Самарский, Ю.П.Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, I980.

6. Kuo Pen-Yo, Wu Hua-Mo. Numerical solution of K.D.V. equation. J.Math. Analys and Applic., 1981, v. 82, p.334-345.

7. В.И.Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, I975.

8. И.Т.Кигурадзе. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд. ТГУ, I975.

კ. მელაძე, ნ. ცერცვაძე

გაზური დინამიკის დიფერენციალურ-სხვაობიანი სქემების კრებადობის შესახებ ეილერის ცვლადებში

რ ე ზ ი უ მ ე

გაზური დინამიკის განტოლებათა სისტემისათვის დამტკიცებულია სრულიად კონსერვატული დიფერენციალურ-სხვაობიანი სქემის კრებადობა ეილერის ცვლადებში გლუვ ამონახსნთა კლასში (განხილულია იდეალური გაზის შემთხვევა).

H.Meladze, G.Tsertsvadze

ON THE CONVERGENCE OF DIFFERENCE-DIFFERENTIAL SCHEMES OF GAS DYNAMICS IN EULER VARIABLES

Summary

The convergence of the completely conservative difference-differential scheme for a system of gas dynamic equations in Euler variables in the class of smooth solutions is proved. (The case of ideal gas is discussed).

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахшвили

ივ.ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

298, 1990

გამოთვლითი ტექნიკის სასწავლო კომპლექსის "კორვეტის" მოდერნიზაციის ძირითადი საკითხი

ნ.ბენდელიანი

გამოთვლითი ტექნიკის და მისი კომპლექტაციის წარმოების განვითარებამ დააჩქარა სახალხო განათლების დაბალ საფეხურებზე გამოთვლითი ტექნიკის დანერგვა.

სამამულო წარმოება გამოთვლითი ტექნიკის სასწავლო კომპლექსის რამდენიმე ტიპს უშვებს. ყველა ეს კომპლექსი გათვალისწინებულია რუსულენოვანი მომხმარებლისათვის.

ბოლო წლებში ეროვნული მოძრაობის აღმავლობამ და ქართული ენის პროექტის გამოქვეყნებამ ცხოვრების დღის წესრიგში დააყენა ქართულენოვანი მომხმარებლისათვის გათვალისწინებული გამოთვლითი ტექნიკის სასწავლო კომპლექსის არსებობის პრობლემა.

მოცემული სტატია ამ პრობლემის გადაწყვეტის ერთ-ერთ ვარიანტს წარმოადგენს. ბაზურ კომპლექსად აღებული იქნა გამოთვლითი ტექნიკის სასწავლო კომპლექსი "კორვეტი". მოდერნიზაციის შედეგად გადაკეთებულ იქნა კომპლექსში შემავალი კომპიუტერები და მისი ბაზური პროგრამული უზრუნველყოფა, რომლებიც ადაპტირებული იქნენ ქართულენოვანი მომხმარებლის მოთხოვნათა გათვალისწინებით. მოდერნიზებულ ვარიანტში დიალოგი მოსწავლე-კომპიუტერი მიმდინარეობს ქართულ ენაზე.

გამოთვლითი ტექნიკის სასწავლო კომპლექს "კორვეტი"-ს მო-

დერნიზაცია მოიცავს ორ მიმართულებას: აპარატურულ და თეორიულ-პროგრამულ ნაწილს. კომპლექსის მოდერნიზაციის ძირითადი მიზანი იყო მისი მისადაგება ქართულენოვანი მომხმარებლისათვის, ამასთან მაქსიმალურად იქნა გამოყენებული "კორვეტი"-ს საკმაოდ მდიდარი არქიტექტურული შესაძლებლობანი /1/.

კომპლექსის აპარატურული გადაკეთება მოიცავს ნიშანგენერატორის და მუდმივ მეხსიერებაში ჩაწერილი ბეისიკის ინტერპრეტატორის მოდერნიზაციას, აგრეთვე ზოგიერთი მისადგმელის რეალიზაციას.

მოდერნიზაციის პროგრამულ-თეორიული ნაწილი ითვალისწინებს არსებული პროგრამული უზრუნველყოფის მოდერნიზაციას დასმული ამოცანის შესაბამისად, აგრეთვე მთელი რიგი ახალი უტილიტების და პროგრამების შექმნას და შესაბამისი დოკუმენტაციის და სახელმძღვანელოების დამუშავებას ქართულ ენაზე.

სასწავლო კომპლექსში შემავალი პერსონალური კომპიუტერების ნიშანგენერატორი რეალიზებულია გადაპროგრამირებად მუდმივი მეხსიერების მიკროსქემებზე К573РФ4 (I 16724), რომლის მოცულობაა 8 კბაიტი. თითოეულ ნიშანგენერატორი, რომელიც საშუალებას იძლევა გენერირებული იქნას 256 ასონიშანი, იკავებს ამ მეხსიერების ნახევარს, 4 კბაიტს. ნიშანგენერატორის მეორე ნახევარი თავისუფალია, ამ ადგილას შესაძლებელია ჩაიწეროს მეორე ალტერნატიული ნიშანგენერატორი, რომელზედაც მიმართვა შეიძლება მოხდეს სპეციალურ ე.წ. ვიდეორეგისტრში სპეციალური კოდის ჩაწერით. მოცემულ ვარიანტში მმართველი კოდის ჩაწერა ხდება კომპიუტერის ტექნიკურ საშუალებათა საერთო ტესტირების დაწყებამდე. რაც შეეხება პროგრამებს, რომელთა მუშაობაც გათვალისწინებულია სტანდარტული ნიშანგენერატორით, უნდა ჩაემატოს პროგრამის ფრაგმენტი, რომელიც მიიერთებს სტანდარტულ ნიშანგენერატორს.

ქართული ვარიანტისათვის გათვალისწინებული ნიშანგენერატორის საფუძვლად აღებულია КОИ-8-ს კოდები, ქართული ასონიშნების გრაფიკული მონახაზები მოთავსებულია ქართული ალფაბეტის კომპიუტერული სტანდარტის შესახებ სარეკომენდაციო წერილის შესაბამისად /2/.

ნიშანგენერატორის თითოეული ასონიშნის გრაფიკული მოხაზულობა წარმოადგენს მატრიცას 8X16, საიდანაც პრაქტიკულად გამოიყენება მატრიცა 7X14. ასეთი დიდი მატრიცა საშუალებას იძლევა რეალიზებული იქნას სამხაზოვანი ქართული ასონიშნები მთელი თავისი სიდიადით.

კლავიატურაზე ასონიშნები განლაგებულია თანაყოლერადი ლათინურ-რუსული კლავიშების გვერდზე /სადაც ასეთი თანაყოლერადობა არსებობს/. ვფიქრობთ, რომ ასეთი განლაგება უფრო მოსახერხებელია პრაქტიკული მუშაობისათვის, რადგანაც კლავიატურაზე "ბრმად" მუშაობისათვის ფსიქოლოგიურად უფრო მარტივია ერთი კომბინაციის დამახსოვრება, ვიდრე ორის ან მეტის. ამასთან, იმ კატეგორიის მომხმარებლებისათვის, რომლებსაც არ აკმაყოფილებს ასოების ასეთი განლაგება კლავიატურაზე, დამუშავებულია უტილიტა, რომელიც საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ ნებისმიერი კლავიშის გადაკოდირება.

სასწავლო კომპლექსზე ელექტრონული დისკის იმიტირების საშუალებას იძლევა თვითონ კომპიუტერის არქიტექტურა. აპარატურულად ეს საკითხი მარტივად წყდება: საჭიროა გრაფიკული დამახსოვრებელ მეხსიერებაში გამოყენებული 16 კბაიტი ტევადობის მიკროსქემები К565РУ6 შეიცვალოს 64 კბაიტი ტევადობის К565РУ5 მიკროსქემებით, რის შედეგადაც მიიღება დამატებითი 144 კბაიტი მოცულობის ელექტრონული დისკი, რომლის გამოყენებაც იძლევა საკმაოდ დიდ ეფექტს მონაცემთა ბაზებთან და ტრანსლატორებთან მუშა-

ობისას, რადგანაც მათზე მიმართვის დრო პრაქტიკულად ოპერატიულ მეხსიერებაზე მიმართვის დროის ეკვივალენტურია. ამასთან ასეთი შეცვლა საშუალებას იძლევა უფრო სრულად გამოვიყენოთ კომპლექსის გრაფიკული შესაძლებლობანი, რადგანაც შეცვლის შემდეგ 48 კბაიტი მოცულობის ერთი გრაფიკული ეკრანის ნაცვლად გვაქვს იგივე მოცულობის 4 გრაფიკული ეკრანი, რომელთაგანაც ერთ-ერთი ყოველთვის გამოისახება, ხოლო დანარჩენ სამში შეიძლება მომზადდეს "უჩინარი" გამოსახულება, შემდეგ კი საჭიროების მიხედვით მოხდეს გადართვა ერთი გამოსახვადი ეკრანიდან მეორეზე. /გადართვა მყისეულად ხდება ვიდეორეგისტრში მმართველი კოდის საშუალებით/.

სასწავლო კომპლექსში შემავალი კომპიუტერები აღჭურვილი არიან ბეისიკის ინტერპრეტატორის ორი ვერსიით: დისკური ვერსია და მუდმივ მეხსიერებაში ჩაწერილი ბეისიკის ინტერპრეტატორი /MSX სტანდარტი/. ამ ვერსიის თითოეულ მოდიფიკაციას გააჩნია თავისებურებანი, ამიტომ მათი განხილვა მთლიანობაში შეუძლებელია.

ბაზური პროგრამული უზრუნველყოფის "გადაქართულების" ყველაზე მარტივი გზაა შეტყობინებათა თარგმნა და შეცვლა, მაგრამ როცა საქმე ეხება ბეისიკის ინტერპრეტატორის ვერსიას, რომელიც ჩაწერილია მუდმივ მეხსიერებაში, ინფორმაციამ შეიძლება მიიღოს შედარებით მშრალი ხასიათი, რადგანაც შეზღუდული ვართ მეხსიერების მოცულობით. გამოსავალი აქ შეიძლება ვნახოთ მხოლოდ საწყისი ტექსტის რელანსლაციით და მისი ოპტიმიზაციით, რაც გამოანთავისუფლებს მეხსიერების საკმარის მოცულობას იმისათვის, რომ ინტერპრეტატორის შეტყობინებები უფრო ეფექტური იყოს.

რაც შეეხება დისკურ ფაილებს, პროგრამულ უტილიტებთან

უფრო ეფექტური დიალოგისათვის, მისი " გაქართულებისას" შეიძლება გამოვიყენოთ ორი ხერხი: "გაწევის" /4/ და "კუდის" ხერხი.

ა/ "გაწევის" ხერხი - როცა გვინდა პროგრამულ პროდუქტში /რომელიც მოცემულია ჩასატვირთი მოდულის სახით/ რაიმე ცვლილების შეტანა ან ტექსტური ინფორმაციის ჩამატება, საჭირო ხდება მისი "გაწევა" ზემოთ. ამის განხორციელებისათვის დაიწერა სპეციალური უტილიტა, რომელსაც შეუძლია კოდების "გაწევა" და შესაბამისი მისამართების კორექტირება. მაგრამ, თუ პროგრამაში გამოყენებულია სხვადასხვა პროგრამული ტრიუკები, ეს ხერხი ვერ იძლევა საკმარის ეფექტს.

ბ/"კუდის" ხერხი- ამ ხერხს ფართოდ იყენებენ პროგრამული პროდუქტების ვირუსით დასნებოვნებისათვის, მაგრამ თავისუფლად შეიძლება მისი გამოყენება უფრო სასარგებლო საქმისათვის. იგი მდგომარეობს შემდეგში: ჩასატვირთი მოდულის შემცველი ფაილის ბოლოში ხდება საჭირო მოდულის "მიბმა", სადაც ჩაწერილია შესაბამისი შესწორებები. პროგრამის ჩატვირთვის შემდეგ მართვა გადაეცემა "მიბმულ" მოდულს, რომელიც ახდენს საკუთარი თავის გადაადგილებას მეხსიერების ზედა ნაწილში, აკეთებს მთელი რიგი მისამართების მოდიფიცირებას და საკუთარი ძირითადი მოდულისათვის ქმნის მეხსიერების დაცულ ზონას. ამრიგად პროგრამაში ჩაკეთებული "საცობები" აიძულებენ პროგრამას ყველა კრიტიკულ შემთხვევაში მიმართოს მეხსიერებაში "გაქცეულ" მოდულს, სადაც მოთავსებულია ამ შემთხვევის შესაბამისი ბლოკები, რომელთა შესრულების შემდეგაც მართვა უბრუნდება "საცობის" შემდეგ მოთავსებულ ოპერატორს ან პროგრამის რომელიმე არჩეულ მისამართს.

კომპლექსში შემავალი მასწავლებლის მმართველი კომპიუტერი მუშაობს ოპერაციულ სისტემა МИКРОДОС -ით /5/, რომელიც წარმო-

ადგენს ოპერაციულ სისტემა CP/M-80 გაფართოებულ ვარიანტს. ქართულენოვანი მომხმარებლისათვის განკუთვნილი ოპერაციული სისტემა "ჯუჯა-დოს" წარმოადგენს ამ ორი სისტემის სინთეზს, ამასთან შეტანა-გამოტანის ბაზური სისტემის /BIOS-ის/ საფუძვლად აღებულია 2.2 ვერსია /3/, სადაც გათვალისწინებულია ელექტრონულ დისკთან მუშაობა და კლავიატურაზე ქართული ასონიშნების განლაგების არჩევითობა.

ოპერაციული სისტემა "ჯუჯა-დოს"-ში ჩამატებულია შემოწმების ბლოკი, რომელიც დაკავშირებულია მუდმივ მეხსიერებაში ჩაწერილ დაშიფრვის ბლოკთან და ამოწმებს თითოეული პროგრამული პროდუქტის შიფრს. ეს საშუალებას იძლევა საკმაოდ ეფექტიანად ვებრძოლოთ პროგრამული პროდუქტის არასანქციონირებულ ტირაჟირებას.

"ჯუჯა-დოს" ვერსია 1.2 საშუალებას იძლევა ვიმუშაოთ "თაგუნიას" ტიპის მისადგმელით ოპერაციული სისტემის ე.წ. "მეგობრულ გარემოში", სადაც მუშაობა ხდება მენიუს რეჟიმში, ხოლო ამორჩევა ინვერსირებული სტრიქონის გადაადგილებით "თაგუნიას" გამოყენებით.

მოსწავლის კომპიუტერზე ელექტრონული დისკის რეალიზაციის შემთხვევაში შესაძლებლობა გვაქვს ქსელის საშუალებით გადავგზავნოთ მოსწავლის სამუშაო ადგილზე ოპერაციული სისტემის მოდიფიცირებული ვარიანტი და ვიმუშაოთ ნებისმიერ პროგრამასთან, რომელიც საჭიროებს დისკს.

ოპერაციული სისტემის ეს ვარიანტი მოდიფიცირებულია იმის გათვალისწინებით, რომ მოსწავლის სამუშაო ადგილებზე არა გვაქვს დისკწამყვანები, ამასთან პრაქტიკულად ყველა სამუშაო პროგრამის გადაგზავნა უნდა მოხდეს მასწავლებლის მმართველი კომპიუტერიდან.

ელექტრონული დისკის გამოყენება შედარებით აჩქარებს შეტანა/გამოტანის ბაზურ სისტემას, რადგან ითვლება რომ ჩაწერის და წაკითხვის ოპერაციები ელექტრონულ დისკზე ყოველთვის წარმატებით მთავრდება.

მართალია შესაძლებელია გარე დამახსოვრებელი მოწყობილობის როლში მაგნიტოფონის გამოყენება, მაგრამ ელექტრონული დისკის გამოყენებისას ქსელით პროგრამების გადაგზავნაზე იხარჯება უფრო ნაკლები დრო, ვიდრე მისი მაგნიტურ ლენტზე ჩაწერისას.

ინფორმაციის სახით შეიძლება აღვნიშნოთ, რომ ქართულენოვანი მომხმარებლისათვის მომზადებულია პროგრამული უზრუნველყოფის პაკეტი, რომლის ნაწილი წარმოადგენს CP/M-80-ის გარემოში მომუშავე პროგრამული პროდუქტების ადაპტირებულ ვარიანტს (Pascal /MT , PL /M , ფორტრან-80, ასემბლერ-80 , C-80, ბეისიკის კომპილატორი, ტექსტური რედაქტორები ვორდსტარი (Wordstar), ვორდმასტერი (Wordmaster), DBASE II), ხოლო დანარჩენი ნაწილი წარმოადგენს ორიგინალურ პროგრამულ პროდუქციას. /მაგ., მრავალფანჯრიანი ტექსტური რედაქტორი, მისადგმელების მომსახურე პროგრამული უტილიტები, ოპერაციული სისტემის "მეგობრული გარემო", ოპერაციული სისტემის დისკური უტილიტების გაფართოებული, გაერთიანებული პაკეტი "ობობა"/.

მიღებულია 12.X.1989 ეგმ-ის მათემატიკური უზრუნველყოფის
კათედრა

ლიტერატურა

I. КУВТ "КОРВЕТ-ПК8020". Руководство системного программиста.

2. "ინფორმაციის დამუშავების სისტემები. ქართული ალფაბეტის ასოების გამოსახვა და კოდირება დისპლეიზე ასასახად და ალფაბეტურ-ციფრულ საბეჭდ მოწყობილობაზე დასაბეჭდად" - საქ.სსრ მეცნიერებათა აკადემიის განმარტებითი წერილი საქ.სსრ რესპუბლიკური სტანდარტების პროექტის შესახებ. თბილისი. 1988.

3. Скурыкин А.Н. и др., " BIOS версия 2.2", из-тво МГУ, 1988

4. Селицкий С.С., Сыркин М.М., "Процедура перемещения частей загрузочного модуля для микропроцессора КР580ИК80".
Микропроцессорные средства и системы. - № 4, 1987

5. Операционная система МикроДОС. Руководство системного программиста.

Н.С.Бенделиани

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕРНИЗАЦИИ КУВТ "КОРВЕТ"

Резюме

В статье обсуждаются некоторые приемы аппаратной модернизации КУВТ "КОРВЕТ" и решение проблем адаптации существующего программного обеспечения для грузиноязычного потребителя.

N.Bendeliani

SOME QUESTIONS OF MODERNIZATION OF KUVT "KORVET"

Summary

Some techniques of device modernization of KUVT "KORVET" are discussed as well as the solution of problem of adapting the existing programme provision for the Georgian-speaking consumer.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

298, I990

О МАНИПУЛЯТОРЕ С ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМ ОРГАНОМ ТИПА "ХОБОТ"

М.И.Шишигин, Н.Б.Лавренчук

При создании гибких производственных систем особое значение приобретают манипуляторы, которые могут быть применены на стадии, предшествующей конечной сборке механических узлов, т.е. когда затруднителен доступ "механическими руками" классической конструкции. Данная работа посвящена модели манипулятора с исполнительным органом типа "хобот", предназначенным для манипуляционных операций в труднодоступных местах металлоконструкций /I,2,3/.

I. Конструктивные особенности "хобота" манипулятора

"Хобот" манипулятора скомпонован по модульному принципу и состоит из идентичных модулей I, последовательно соединенных друг с другом. Основанием исполнительного органа служит ротационный модуль 2. На рис. I изображена кинематическая схема "хобота" манипулятора, а на рис.2 - модуль "хобота" манипулятора, общий вид.

Каждый модуль I имеет основной сферический полный элемент 3 с цилиндрическим хвостиком 4, жестко закрепленный на платформе 5, и промежуточный полый сферический элемент 6 с цилиндрическим хвостиком 7. При этом цилиндрический хвостовик 7 установлен на цилиндрическом хвостовике основного сферического полого элемента 3 с возможностью изменения относительного положения, и оба этих элемента подпружинены друг относительно друга пружиной 8. Сферическая часть 6 промежуточного полого элемента сопряжена со сферической частью 9 основного полого элемента последующего модуля. Сферический элемент 9 жестко закреплен на платформе 10. По периферии модуля установлены силовые устройства 11, например, гидравлические цилиндры. Корпуса гидравлических цилиндров шарнирно закреплены на платформе 5, а их штоки 12 - на платформе 10. Исполнительный орган манипулятора снабжен распределительными клапанами, установленными на платформе каждого модуля и связывающими соответствующие силовые устройства с магистралью подачи рабочей среды. Причем, магистраль подачи рабочей среды расположена в полости, образованной сферическими полыми элементами модулей, а магистраль слива расположена вдоль исполнительного органа по периферии платформы.

"Хобот" манипулятора работает следующим образом. По команде устройства управления (Микро-ЭВМ) срабатывает определенная группа силовых устройств 11, штоки 12 которых, выдвигаясь, поворачивают платформы 10 модулей относительно платформ 5, что позволяет осуществить изгиб "хобота" и придать ему определенную необходимую конфигурацию. При этом схват (либо инструмент), расположенный на платформе последнего модуля "хобота", перемещается в заданную область рабочего пространства. Платформы 10 модулей удерживаются штоками 12 силовых устройств и опираются на промежуточные полые сферические элементы 6, которые подпружинены 8 и обеспечивают достаточную жесткость при обработке определенных конфигураций "хобота" манипулятора.

2. Описание кинематической схемы "хобота" манипулятора в декартовой системе координат

С платформой 5 i-ого модуля "хобота" связана декартова система координат $X_i Y_i Z_i$, а с платформой IO i + I-го модуля декартовы системы координат $X_i' Y_i' Z_i'$ и $X_{i+1} Y_{i+1} Z_{i+1}$ (рис.3,4). Силовые устройства (силовые гидроцилиндры) расположены по периферии модуля, причем корпуса этих силовых устройств шарнирно закреплены на платформе 5, а их штоки - на платформе IO. При этом центры "сферических тел" этих шарниров лежат в координатных плоскостях $X_i Y_i$ и $X_i' Y_i'$, а именно: центрами "сферических тел" шарниров являются точки P_{i1} , P_{i2} , P_{i3} и P_{i1}' , P_{i2}', P_{i3}' (рис.3,4), имеющие следующие координаты (см. таблицу I).

Примечание: r_i - радиус окружности с центром в точке O_i (O_i'), на которой лежат точки P_{i1} , P_{i2} , P_{i3} (P_{i1}', P_{i2}', P_{i3}').

С каждой декартовой системой координат свяжем представление в однородных координатах и для обозначения вектора в этих координатных системах воспользуемся записями:

$$V = (x, y, z)^t, \quad \tilde{V} = (wx, wy, wz, w)^t,$$

где w - произвольная константа ($w \neq 0$). Одним из преимуществ однородных координат является то, что движение в декартовой системе координат (т.е. преобразование вида $v' = Uv + v''$, где v, v', v'' - трехмерные векторы, а U - ортогональная матрица размера 3х3) эквивалентно линейному преобразованию в однородных координат проективного пространства /4/.

Система координат $x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}$ получается из системы координат $x_i y_i z_i$ при помощи двух вращений и переносов, выполняемых в следующем порядке.

1. Перенос вдоль оси z_i на величину h_i, после которого начало координат окажется в точке O_i.

2. Выполнение двух эйлеровых поворотов на угол φ_i и угол θ_i (φ_i -- угол рыскания, θ_i - угол тангажа).

3. Перенос вдоль оси z_{i+1} на величину λ_i (λ_i - расстояние между плоскостями, в которых лежат центры "сферических тел" P_{i1}, P_{i2}, P_{i3} и P'_{i1}, P'_{i2}, P'_{i3}) (рис.3).

Нетрудно проверить, что матрица

$$T_i = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

является оператором перемещения, который однородное представление вектора (x, y, z) переводит в однородное представление вектора (x, y, $z-h_i$).

Укажем матрицу W_i, соответствующую двум последовательным эйлеровым поворотам на угол φ_i и угол θ_i :

$$W_i = \begin{Vmatrix} \cos\theta_i & \sin\varphi_i \sin\theta_i & -\cos\varphi_i \sin\theta_i & 0 \\ 0 & \cos\varphi_i & \sin\varphi_i & 0 \\ \sin\theta_i & -\sin\varphi_i \cos\theta_i & \cos\varphi_i \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Другими словами, если даны однородные координаты некоторой точки $V = (x, y, z)^t$ в системе координат XYZ, то произведение $W_i V$ дает однородные координаты той же самой точки в системе координат, получающейся двумя последовательными эйлеровыми поворотами на угол φ_i и угол θ_i.

Наконец, матрица:

$$\sigma_i = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

реализует смещение на величину a_i вдоль оси z_{i+1}. Придерживаясь договоренности насчет обозначений, имеем:.

$$\tilde{V}_{i+1} = \sigma_i W_i T_i \tilde{V}_i, \quad A_i \stackrel{\Delta}{=} \sigma_i W_i T_i, \quad \tilde{V}_{i+1} = A_i \tilde{V}_i .$$

Так как каждая из трех матриц σ_i, W_i, T_i имеет обратную, то

$$\tilde{V}_i = T_i^{-1} W_i^{-1} \sigma_i^{-1} \tilde{V}_{i+1} .$$

Легко убедиться, что

$$T_i^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \qquad \sigma_i^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$W_i^{-1} = W_i^t$, где W_i^t - транспонированная матрица, а именно:

$$W_i^{t} = \begin{Vmatrix} \cos\theta_i & 0 & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\varphi_i \sin\theta_i & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \cos\theta_i & 0 \\ -\cos\varphi_i \sin\theta_i & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Поэтому имеем: $C_i = T_i^{-1} W_i^t G_i^{-1}$, $\tilde{V}_i = C_i \tilde{V}_{i+1}$.
Возникает задача: вычислить расстояние между точками $P_i(x,y)$ и $P_i'(x,y)$, лежащими в плоскостях $X_i Y_i$ и $X_i' Y_i'$ на расстоянии r_i от точек O_i и O_i'.
($P_i(x,y)$, (x,y) – координаты точки P_i в системе координат $X_i Y_i$, $P_i'(x,y)$, (x,y) – координаты точки P_i' в системе координат $X_i' Y_i'$, $x^2+y^2=r^2$).

Вычислим координаты точки $P_i'(x,y)$ в системе координат $X_i Y_i Z_i$:

$$\begin{Vmatrix} \cos\theta_i & 0 & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\varphi_i \sin\theta_i & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \cos\theta_i & 0 \\ -\cos\varphi_i \sin\theta_i & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \cos\theta_i & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x\cos\theta_i \\ x\sin\varphi_i \sin\theta_i + y\cos\varphi_i \\ -x\cos\varphi_i \sin\theta_i + y\sin\varphi_i + h_i \\ 1 \end{vmatrix}$$

Обозначим расстояние между точками $P_i(x,y)$ и $P_i'(x,y)$ через $l_i(x,y)$.

Имеем уравнение:

$$(x - x\cos\theta_i)^2 + (x\sin\varphi_i\sin\theta_i + y\cos\varphi_i - y)^2 +$$

$$x\cos\varphi_i\sin\theta_i + y\sin\varphi_i - h_i)^2 = l_i^2(x,y). \tag{2.I}$$

Уравнение (2.I) можно переписать так:

$$h_i^2 - 2x^2\cos\theta_i - 2y^2\cos\varphi_i - 2xy\sin\varphi_i\sin\theta_i - 2xh_i\cos\varphi_i\sin\theta_i +$$

$$+ 2yh_i\sin\varphi_i = l_i^2(x,y) - 2r_i^2 . \tag{2.2}$$

Введем функцию: $q_i(x,y) = l_i^2(x,y) - 2r_i^2$.

Вычислим угол α_i между осями O_iZ_i и $O_i'Z_i'$ и запишем уравнение прямой, образованной пересечением плоскостей X_iY_i и Z_iZ_i'.

Имеем:

$$\begin{Vmatrix} \cos\theta_i & 0 & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\varphi_i\sin\theta_i & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i\cos\theta_i & 0 \\ -\cos\varphi_i\sin\theta_i & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i\cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \sin\theta_i \\ -\sin\varphi_i\cos\theta_i \\ \cos\varphi_i\cos\theta_i \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Отсюда $\cos\alpha_i = \cos\varphi_i \cos\theta_i$ и уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{y_i}{x_i} = -\frac{\sin\varphi_i \cos\theta_i}{\sin\theta_i}, \quad y_i = tg\beta_i x_i, \quad tg\beta_i = -\frac{\sin\varphi_i \cos\theta_i}{\sin\theta_i}.$$

Обозначим через (x_i, y_i) и $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ координаты пары симметричных точек на плоскости $x_i y_i$ относительно прямой $y_i = tg\beta_i x_i$.

Нетрудно показать, что эти координаты связаны уравнениями:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i(1-tg^2\beta_i)+2y_i tg\beta_i}{1+tg^2\beta_i}, \quad y_i = \frac{2x_i tg\beta_i - y_i(1-tg^2\beta_i)}{1+tg^2\beta_i}.$$

В силу того, что окружности с центрами O_i и O_i' радиуса r_i, лежащие в плоскостях $x_i y_i$ и $x_i' y_i'$ симметричны относительно плоскости $z_i z_i'$, имеем следующее равенство:

$$q(x_i, y_i) = q(\bar{x}_i, \bar{y}_i). \tag{2.3}$$

Сейчас затронем вопрос, касающийся обобщенных координат исполнительного органа типа "хобот". Так как задание определённых конфигураций "хобота" манипулятора (изгиб "хобота") осуществляется посредством силовых устройств (гидроцилиндров), то в качестве обобщенных координат исполнительного органа целесообразно принять длины отрезков:

$$[P_{i1}, P'_{i1}] = l_{i1}, \quad [P_{i2}, P'_{i3}] = l_{i2}, \quad [P_{i3}, P'_{i3}] = l_{i3}, \quad i = \overline{1,n}.$$

и угол поворота γ ротационного модуля в основании манипулятора (n - количество модулей в "хоботе").

В силу (2.3) имеем систему уравнений (2.4), связывающих величины l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} и φ_i, θ_i, h_i:

$$q(r_i, 0) = q\left(\frac{r_i(1-tg^2\beta_i)}{1+tg^2\beta_i}, \frac{2r\,tg\beta_i}{1+tg^2\beta_i}\right) = l_{i1}^2 - 2r_i^2,$$

$$q\left(\frac{1}{2}r_i, \frac{\sqrt{3}}{2}r_i\right) = q\left(\frac{r_i(tg^2\beta_i + 2\sqrt{3}\,tg\beta_i - 1)}{2(1+tg^2\beta_i)}, \frac{r_i(\sqrt{3}\,tg^2\beta_i - 2tg\beta_i - \sqrt{3})}{2(1+tg^2\beta_i)}\right) =$$

$$= l_{i2}^2 - 2r_i^2,$$

$$q\left(\frac{1}{2}r_i, \frac{\sqrt{3}}{2}r_i\right) = q\left(\frac{r_i(tg^2\beta_i - 2\sqrt{3}\,tg\beta_i - 1)}{2(1+tg^2\beta_i)}, \frac{r_i(-\sqrt{3}\,tg^2\beta_i - 2tg\beta_i + \sqrt{3})}{2(1+tg^2\beta_i)}\right) =$$

$$= l_{i3}^2 - 2r_i^2.$$

На основании системы уравнений (2.4) компоненты матриц A_i и C_i можно записать как функции величин l_{i1}; l_{i2}, l_{i3}. Таким образом, соотношение между координатными системами модулей $i+1$ и i исполнительного органа может быть выражено так: $\tilde{V}_{i+1} = A[l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}]\tilde{V}_i$; где $A_i[l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}]$ - матрица размером 4x4. С другой стороны, соотношение между координатными системами модулей i и $i+1$ может быть выражено так: $\tilde{V}_i = C_i[l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}]\tilde{V}_{i+1}$, где $C_i[l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}]$ - матрица размером 5x4. Причем, A_iC_i = I, где I - единичная матрица.

Имеем:

$$\tilde{V}_i = C_i \tilde{V}_{i+1}, \quad \tilde{V}_{i+1} = AV, \quad i = \overline{1,n} . \tag{2.5}$$

Используя формулы (2.5), можно перейти от системы координат любого модуля к лабораторной системе координат и, наоборот, от системы координат $x_0 y_0 z_0$ – к системе координат, связанной с любым модулем рассматриваемой кинематической схемы.

Имеем: $\tilde{V}_i = H_i \tilde{V}_i \quad (i = \overline{1,n})$,

где $H_{i+1} = H_i C_i$, $H_2 = H_1 C_1$.

$$H_1 = \begin{Vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} ,$$

где γ – угол поворота системы координат $x_1 y_1 z_1$ относительно оси z_0.

Матрица H_i является оператором преобразования системы координат $x_i y_i z_i$, связанной с i-ым модулем кинематической схемы, для описания положения этого звена в лабораторной системе координат.

3. Особенности исполнительного органа с дискретными устойчивыми состояниями

В вопросе применения силовых устройств особое внимание заслуживают силовые линейные приводы, работающие в "двоичном режиме", т.е. обеспечивающие два устойчивых состояния: шток втянут в корпус (исходное состояние), шток выдвинут (второе устойчивое рабочее состояние). Применение "двухпозиционных линейных приводов заслуживает внимание благодаря их экономичности, надежности и простоте в управлении. К тому же, обеспечив плавность изменения скорости штока на всем рабочем диапазоне линейных приводов, можно добиться плавности при отработке "изгибов" "хобота", что важно при планировании траектории схвата исполнительного органа. Таким образом, обеспечив в работе приводов необходимые условия торможения, получим возможность планировать достаточно плавные тракторий движения "хобота", имеющие особые "узловые" точки.

Специальной конфигурацией исполнительного органа ("хобота") будем называть вектор обобщенных координат l_{ij} $(i=\overline{1,n}$, $j = 1,2,3)$, каждая из которых принимает лишь два значения l_i и L_i , т.е.

$$\Phi \triangleq [l_{11}, l_{12}, l_{13}, \ldots, l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \ldots, l_{n1}, l_{n2}, l_{n3}],$$

где n - количество модулей в "хобосте",

$$l_{ij} = \begin{cases} l_i, \text{ если шток } j\text{-ого привода } i\text{-ого} \\ \text{модуля находится в исходном состоянии} \\ \text{(шток втянут в корпус),} \\ L_i, \text{ если } j\text{-ный привод } i\text{-ого модуля} \\ \text{находится во втором устойчивом состоянии} \\ \text{(шток выдвинут).} \end{cases}$$

"Узловые точки", упомянутые выше при обсуждении вопроса о траектории движения "хобота", соответствуют специальным конфигурациям исполнительного органа.

Возникает задача вычисления компонент матриц $C_i[l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}]$, соответствующих ($2^3 = 8$) восьми специальным состояниям i-ого модуля "хобота", учитывая "двоичный режим" работы его линейных приводов.

Запишем эти матрицы в таблице 2.

Напомним, что на основании матриц C_i $(i=\overline{1,n})$ вычисляется оператор H_n перехода от системы координат $x_n y_n z_n$, связанной со схватом (инструментом) "хобота", к лабораторной системе координат $x_0 y_0 z_0$.

Матрицы $C_i[\ell_i, \ell_i, \ell_i]$ и $C_i[b_i, b_i, b_i]$ имеют следующий простой вид и соответствуют тому случаю, когда совпадают направления осей z_i и z_{i+1} (z_i и z_i').

Имеем:

$$C_i[\ell_i, \ell_i, \ell_i] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_i + \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$C_i[b_i, b_i, b_i] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_i + \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для вычисления компонент матриц $C_i[b_i, \ell_i, \ell_i]$ и $C_i[\ell_i, b_i, b_i]$ воспользуемся тем фактом, что при заданных состояниях линейных приводов i-ный модуль "хобота" принимает геометрическую "конфигурацию", симметричную относительно координатной плоскости $x_i z_i$.

Для вычисления $\cos\alpha_i$ и h_i воспользуемся рис.5а.

Запишем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\left(2r_i\sin^2\frac{\alpha_i}{2}\right)^2+\left(h_i+2r_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_i}{2}\right)^2=L_i^2\\&\left(r_i\sin^2\frac{\alpha_i}{2}\right)^2+\left(h_i-r_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_i}{2}\right)^2=\ell_i^2\end{aligned}\right\}\qquad(3.I)$$

Систему уравнений (3.I) можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned}&\left[r_i(1+\cos\alpha_i)\right]^2+\left(h_i r_i\sin\alpha_i\right)^2=L_i^2\\&\left[\frac{r_i}{2}(1-\cos\alpha_i)\right]^2+\left(h_i\frac{r_i}{2}\sin\alpha_i\right)^2=\ell_i^2\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)$$

Наконец, систему уравнений (3.2) приведем к виду (3.3):

$$\begin{aligned}&h_i+r_i\sin\alpha_i=\sqrt{L_i^2-\left[r_i(1-\cos\alpha_i)\right]^2}\,,\\&h_i-\frac{r_i}{2}\sin\alpha_i=\sqrt{\ell_i^2-\left[\frac{r_i}{2}(1-\cos\alpha_i)\right]^2}\,.\end{aligned}\qquad(3.3)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{3}{2}r_i\sin\alpha_i=\sqrt{L_i^2-\left[r_i(1-\cos\alpha_i)\right]^2}-$$

$$-\sqrt{\ell_i^2-\left[\frac{r_i}{2}(1-\cos\alpha_i)\right]^2}\,.$$

Осуществив несложные преобразования и введя подстановку $\xi_i=\frac{r_i(\cos\alpha_i)}{2}$, получим уравнение для вычисления ξ_i:

$$72r_i\xi_i^3-\left(12L_i^2+24\ell_i^2+81r_i^2\right)\xi_i^2+$$

$$+18r_i(L_i^2+\ell_i^2)\xi_i-(L_i^2-\ell_i^2)=0.$$

Зададим конкретные числовые значения для величин L_i, ℓ_i и r_i, получим алгебраическое уравнение третьей степени с числовыми коэффициентами. Для нахождения корня этого алгебраического уравнения можно применить, например, метод касательных (метод Ньютона) /5/.

Выпишем формулы, по которым вычисляются $\cos\alpha_i$ и h_i для рассматриваемого случая:

$$\cos\alpha_i = 1-\frac{2\xi_i}{r_i}, \qquad \xi_i \in \left(0, \frac{r_i}{2}\right),$$

$$\sin\alpha_i = \sqrt{1-\cos^2\alpha_i},$$

$$h_i = \frac{2(L_i^2-\ell_i^2)-3r_i^2(1-\cos\alpha_i)}{6r_i\sin\alpha_i}.$$

Имеем:

$$C_i[L_i,\ell_i,\ell_i] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \cos\alpha_i & 0 & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_i & 0 & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times$$

$$
\times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .
$$

Компоненты матриц $C_i[\ell_i, L_i, L_i]$ вычисляются аналогичным способом. Воспользуемся рис. 5 б, запишем систему уравнений:

$$
\left[\frac{r_i}{2}(1-\cos\alpha_i)\ell_i^2\right]+\left(h_i+\frac{r_i}{2}\sin\alpha_i\right)^2=L_i^2 ,
$$

$$
\left[r_i(1-\cos\alpha_i)\right]^2+\left(h_i-r_i\sin\alpha_i\right)^2=\ell_i^2 .
$$

По аналогии с первым случаем осуществив несложные преобразования и введя подстановку $\xi_i=\frac{r_i(1-\cos\alpha_i)}{2}$, получим уравнение для вычисления ξ_i :

$$
72 r_i \xi_i^3-\left(24L_i^2+12\ell_i^2+81r_i^2\right)\xi_i^2+
$$

$$
18r_i\left(L_i^2+\ell_i^2\right)\xi_i-\left(L_i^2-\ell_i^2\right)^2=0.
$$

Наконец, на примере вычисления компонент матрицы $C_i[\ell_i, L_i, \ell_i]$ покажем, что для вычисления компонент оставшихся матриц $C_i[\ell_i, \ell_i, \ell_i]$ (таблица 2) можно воспользоваться результатами предыдущих вычислений. Действительно, положим, что имеем "конфигурацию" i -ого модуля, для которой $\ell_{i1}=\ell_i$, $\ell_{i2}=L_i$, $\ell_{i3}=\ell_i$. В этом случае система координат $x_{i+1}y_{i+1}z_{i+1}$ получается из системы координат $x_iy_iz_i$ при помощи двух переносов и трех поворотов, выполняемых в следующем порядке:

I. Перенос вдоль оси z_i на величину h_i,

2. Выполнение поворота вокруг оси z_i на угол $\varphi_i = \frac{2\pi}{3}$ (рис.6),

3. Выполнение поворота вокруг оси y_i на угол α_i (вокруг оси y_i системы координат $x_i y_i z_i$, полученной на предыдущем этапе),

4. Выполнение поворота вокруг оси z_i на угол $-\frac{2\pi}{3}$ (вокруг оси z_i системы координат $x_i y_i z_i$, полученной на предыдущем этапе),

5. Перенос вдоль оси z_{i+1} на величину a_i.

Нетрудно видеть, что компоненты матрицы $C_i[l_i, b_i, l_i]$ вычисляются так:

$$C_i[l_i, b_i, l_i] = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\left\| \begin{matrix} \cos\alpha_i & 0 & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_i & 0 & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

<u>Заключение</u>. В работе отражены результаты, полученные на одном из этапов проектирования исполнительного органа промышленного робота и послужившие исходными данными для:

I) Расчета его кинематической схемы,

2) Разработки модуля математического обеспечения, выполняющего пересчет координат схвата ПР (или инструмента) в абсолютной (лабораторной) системе координат.

Проектируемый промышленный робот должен сочетать в себе признаки как технологического ПР, способного выполнять основные технологические операции (окраска, сварка и др.), так и подъемно-транспортного (вспомогательного) ПР, обслуживающего основное технологическое оборудование (установка-снятие заготовок, деталей и инструментов, питание траспортеров и др.). Другими словами, предполагается разработка модели универсального ПР широкого назначения и со многими "специальностями". Причем, одной из "специальностей" проектируемого ПР должно быть умение производить манипуляционные операции в труднодоступных местах металлоконструкций на стадии, предшествующей конечной сборке механических узлов, т.е. когда затруднителен доступ "механическими руками" классической конструкции.

Поступила IУ.УI.1988

Институт систем управления АН ГССР

Таблица I

P	Координаты	В системе координат
P_{i1}	$(r_i, 0, 0)$	$x_i\, y_i\, z_i$
P_{i2}	$(-\frac{1}{2} r_i, \frac{\sqrt{3}}{2} r_i, 0)$	$x_i\, y_i\, z_i$
P_{i3}	$(-\frac{1}{2} r_i, -\frac{\sqrt{3}}{2} r_i, 0)$	$x_i\, y_i\, z_i$
P'_{i1}	$(r_i, 0, 0)$	$x'_i\, y'_i\, z'_i$
P'_{i2}	$(-\frac{1}{2} r_i, \frac{\sqrt{3}}{2} r_i, 0)$	$x'_i\, y'_i\, z'_i$
P'_{i3}	$(-\frac{1}{2} r_i, -\frac{\sqrt{3}}{2} r_i, 0)$	$x'_i\, y'_i\, z'_i$

Таблица 2

$\varphi_i = 0$	$\varphi_i = 0$	$\varphi_i = \frac{2\pi}{3}$	$\varphi_i = -\frac{2\pi}{3}$
$C_i[l_i, l_i, l_i]$	$C_i[l_i, L_i, L_i]$	$C_i[L_i, l_i, L_i]$	$C_i[L_i, L_i, l_i]$
$C_i[L_i, L_i, L_i]$	$C_i[L_i, l_i, l_i]$	$C_i[l_i, L_i, l_i]$	$C_i[l_i, l_i, L_i]$

Литература

I. Хобот манипулятора. А.с. № III4546.

2. Исполнительный орган манипулятора. А.с. № I227457.

3. Манипулятор. А.с.   I220780.

4. Н.И.Мусхелишвили. Курс аналитической геомтерии. "Высшая школа", I967.

5. Т.Шуп. Решение Инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, I982.

მ. შიშიგინი, ნ. ლავრენჩუკი

„ხორთუმის" ტიპის შემსრულებელი ორგანოს მქონე მანიპულატორის შესახებ

რეზიუმე

სამუშაო ეხება მეტალოკონსტრუქციების ძნელად მისადგომ ადგილებზე სამანიპულაციო ოპერაციებისათვის გათვალისწინებულ „ხორთუმის" ტიპის შემსრულებელი ორგანოს მქონე მანიპულატორის მოდელს.

M.Shishigin, N.Lavrenchuk

ABOUT THE MANIPULATOR WITH AN EXECUTIVE ORGAN OF "TRUNK" TYPE

Summary

This paper deals with the manipulator model with an executive organ of "trunk" type for manipulations in the metal construction places of difficult access.

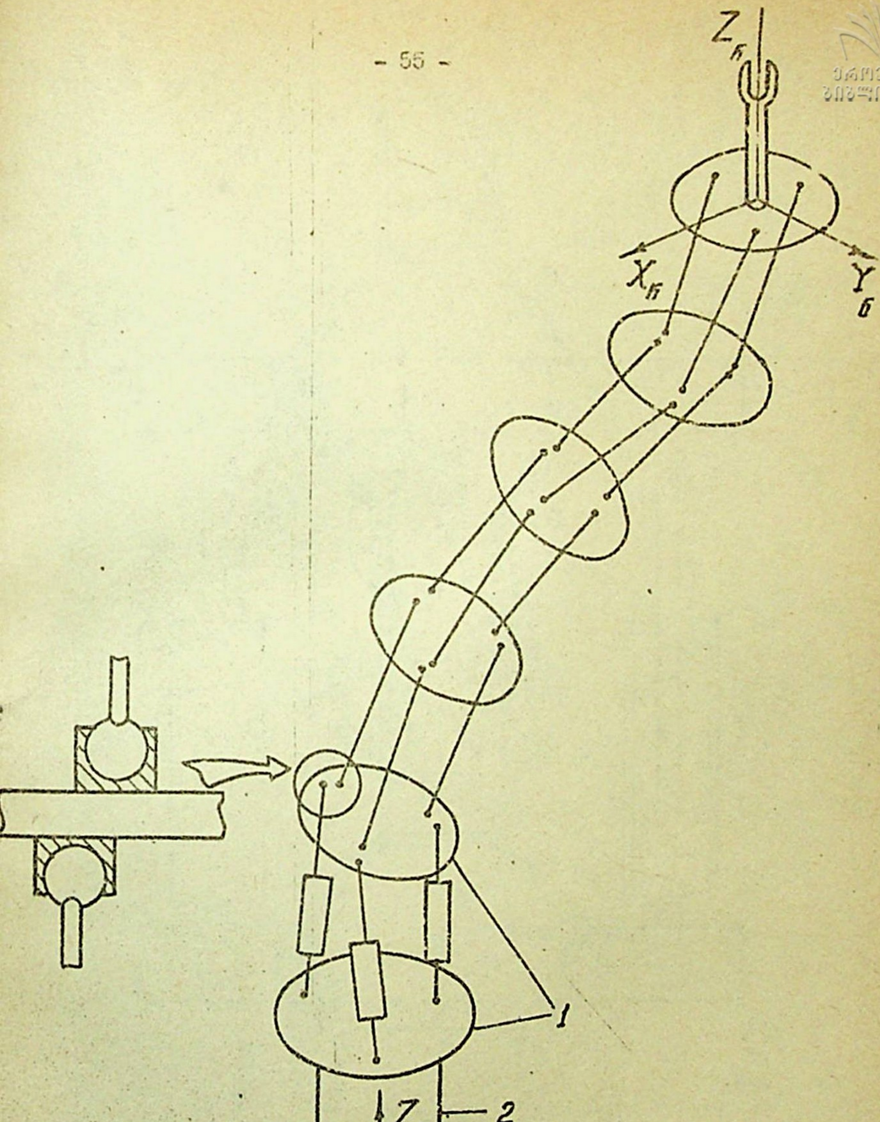

рис.1

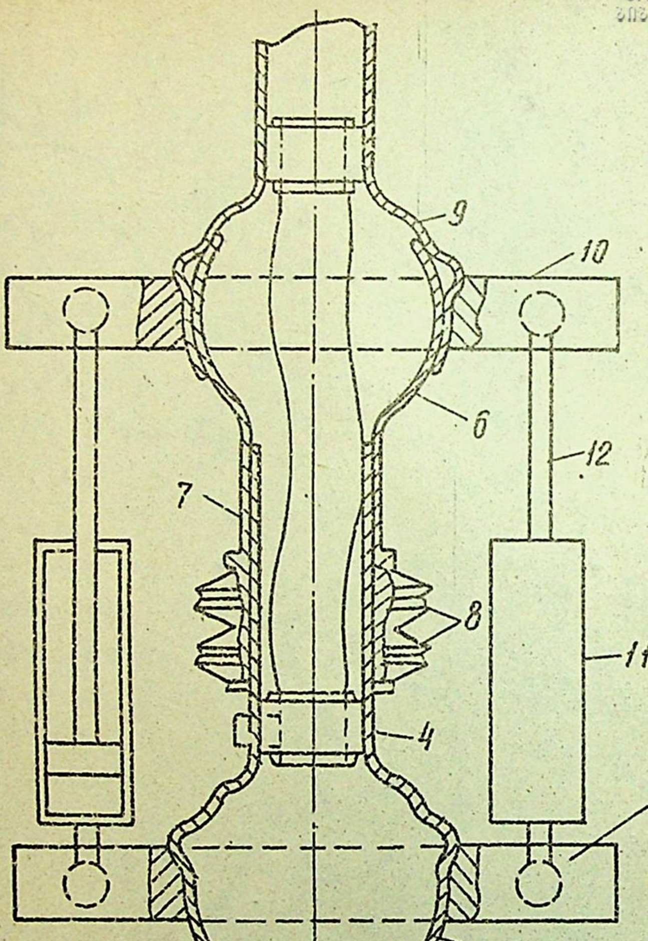

Рис. 2

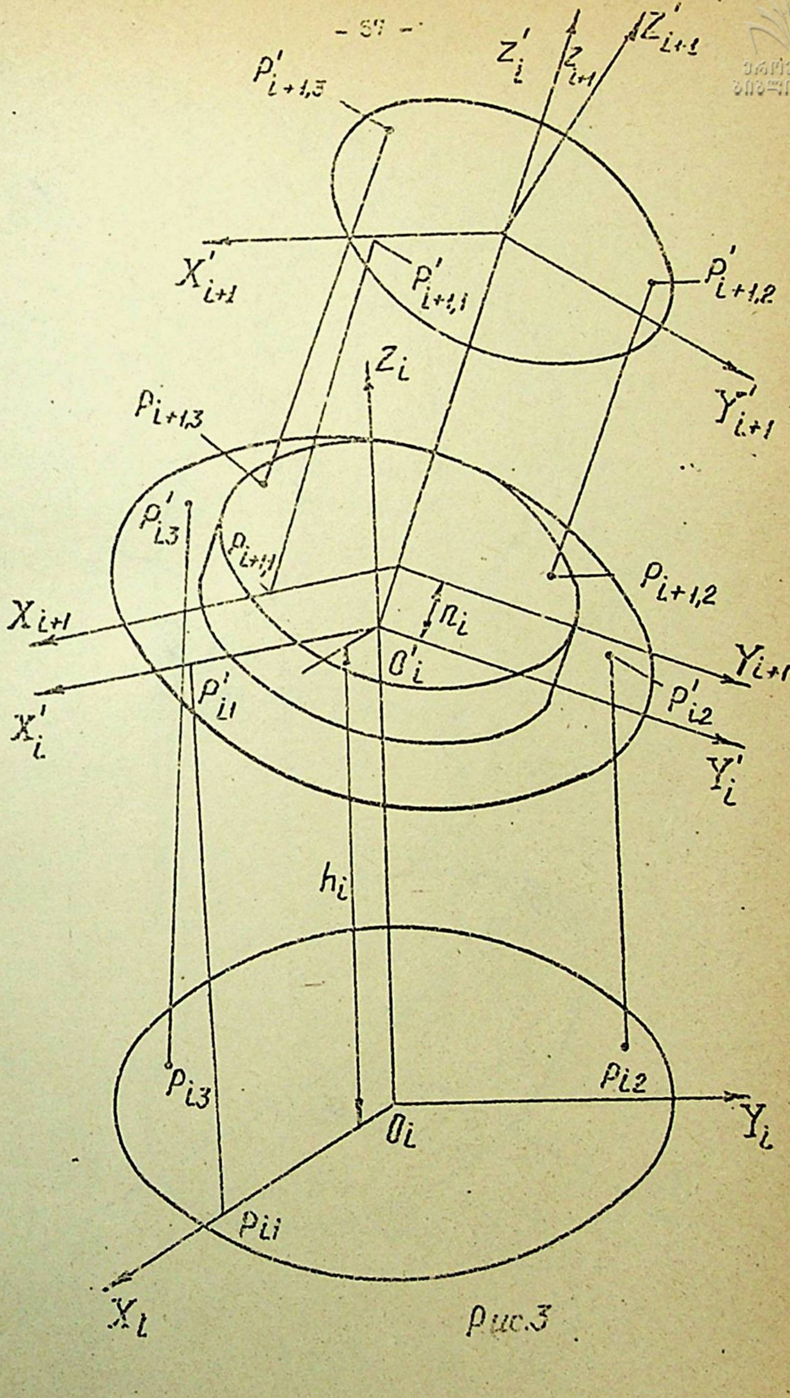
Z_i'
Z_{i+1}
Z_{i+1}'
$P_{i+1,3}'$
X_{i+1}'
$P_{i+1,1}'$
$P_{i+1,2}'$
Z_i
Y_{i+1}'
$P_{i+1,3}$
P_{i3}'
$P_{i+1,1}$
$P_{i+1,2}$
X_{i+1}
h_i
O_i'
Y_{i+1}
X_i'
P_{i1}'
P_{i2}'
Y_i'
h_i
P_{i3}
P_{i2}
Y_i
O_i
P_{i1}
X_i

Рис.3

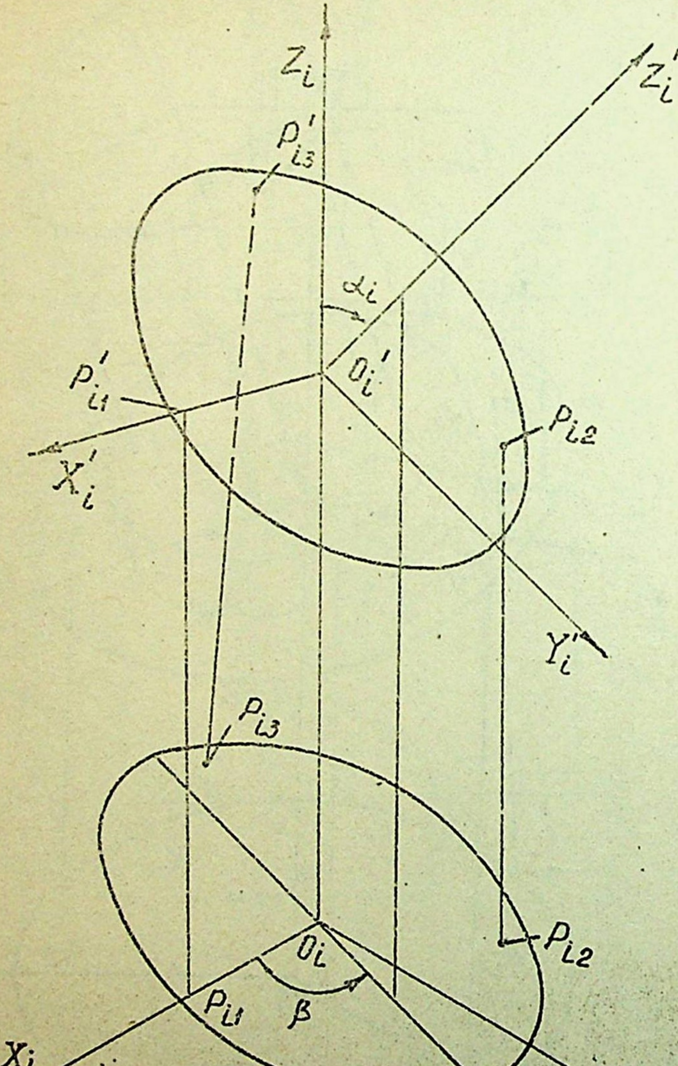

Рис.4

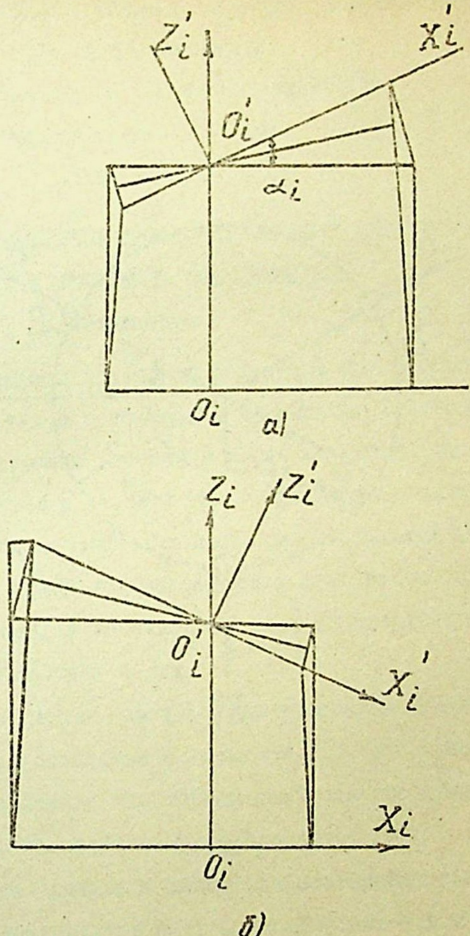

Рис. 5

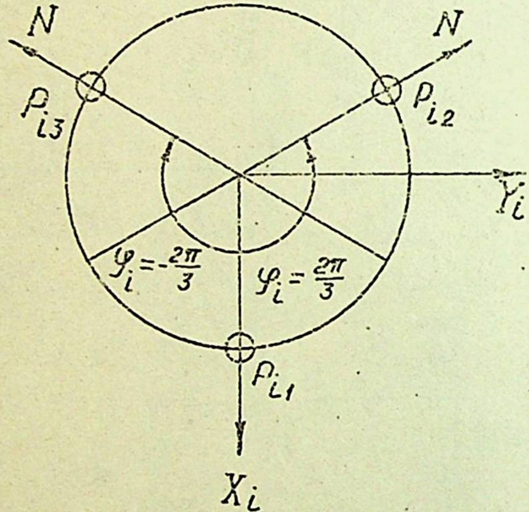

Рис.6

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
298, 1990

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ФОРМИРОВАНИЯ РАЗМЫТЫХ КЛАСТЕРОВ ДЛЯ ПРИЗНАКОВ

А.В.Корнеева

Организация размытых кластеров допустима как в отношении объектов /I,2/, так и в отношении признаков. Взаимосвязь признаков, характеризующих некоторый класс объектов, предопределяет особый интерес к анализу именно размытых кластеров, поскольку при решении классически поставленной задачи кластерного анализа признаков /3/ пресекаются достаточно сильные связи между признаками, и конечная картина кластеризации не содержит никакой информации о них.

Формирование размытых кластеров из признаков может быть осуществлено на базе различных алгоритмов /I/. В частности, по аналогии с классическим кластерным анализом, представляет интерес организация последовательной процедуры /3/.

Для формирования размытых кластеров последовательный алгоритм кластеризации должен быть модифицирован таким образом, чтобы при сохранении основного принципа (последовательного уменьшения числа кластеров на единицу при переходе от одного уровня агломеративного дерева к другому) обеспечивать и реализацию размытости, т.е. возможность отнесения некоторых признаков не к одному, а к нескольким кластерам с соответствующими функциями принадлежности.

Поставим задачу формирования размытых кластеров из признаков следующим образом:

Пусть задано множество объектов, которому соответствует матрица данных V. Каждый объект описывается M признаками. Требуется построить агломеративное иерархическое дерево кластеризации, на каждом уровне которого необходимо организовать отвечающее этому уровню число кластеров ($M-k+1$ для k -го уровня, k =I, ..., M) таким образом, чтобы для признаков с достаточно сильной связью было допустимо одновременное отнесение к нескольким кластерам (с соответствующими функциями принадлежности). Под достаточно сильной связью понимается связь, превосходящая задаваемое пороговое значение.

Организация агломеративного иерархического дерева требует определения целевой функции /3,4/ и функции принадлежности /5/.

В случае кластеризации признаков в качестве целевой функции может быть использована мера ассоциации между двумя кластерами.

Определим ассоциацию между кластерами через ассоциацию между признаками.

Связь между двумя количественными признаками (i -м и j -м; i, j = I,..., M) выражается коэффициентом корреляции:

$$RO(i,j)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} V(i,n)\cdot V(j,n), \qquad (I)$$

где $V(i,n)$ - центрированное и нормированное значение i -го признака для n -го объекта, $V(j,n)$ - центрированное и нормированное значение j -го признака для n -го объекта,

N - число объектов.

Связь между двумя бинарными признаками (i -м и j -м; $i, j = 1,\dots, M$) выражается тетрахорическим показателем связи /6/.

$$RO(i,j) = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}, \qquad (2)$$

где a - число объектов, имеющих оба признака; b - число объектов, имеющих i-й, но не имеющих j-го признака; c - число объектов, имеющих j-й, но не имеющих i-го признака; d - число объектов, не имеющих обоих признаков.

Связь между двумя признаками, характеризуемыми качественными градациями (i -м и j-м; $i, j = 1,\dots, M$), выражается полихорическим показателем связи /6/:

$$RO(i,j) = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(g_i-1)(g_j-1)}}} \qquad (3)$$

где φ^2 - коэффициент контингенции, g_i - число градаций i-го признака, g_j - число градаций j-го признака.

$$\varphi^2 = \sum_{p=1}^{g_i} \frac{\sum_{q=1}^{g_j} \frac{f^2}{n_{j,q}}}{n_{i,p}} - 1, \qquad (4)$$

где f - частоты ячеек корреляционной решетки /6/ по i-му и j-му признакам, $n_{i,p}$ - частоты ряда i-го признака по столбцам в нижней суммарной строке корреляционной решетки, $n_{j,q}$ - частоты ряда j-го признака по строкам в правом суммарном столбце корреляционной решетки.

Введем ассоциацию между признаком и кластером, определив ее как среднюю ассоциацию между расоматриваемым признаком и признаками, входящими в кластер.

Пусть кластер I содержит n_I признаков, а кластер J содержит n_J признаков. Ассоциация между признаком P и кластером I :

$$R(P,I)=\frac{1}{n_I}\sum_{i=1}^{n_I} RO(P,P_i), \qquad (5)$$

где P и P_i - признаки, а $RO(P,P_i)$ - коэффициент ассоциации между ними, вычисляемый по формулам (I), (2) или (3) в зависимости от типа признаков. В случае количественных признаков в качестве RO берется абсолютное значение коэффициента корреляции.

Ассоциацию между кластерами I и J естественно определить следующим образом:

$$RO(I,J)=\frac{1}{n_J}\sum_{j=1}^{n_J} R(P_j,I), \qquad (6)$$

откуда следует

$$R(I,J)=\frac{1}{n_I n_J}\sum_{i=1}^{n_I}\sum_{j=1}^{n_J} RO(P_i,P_j). \qquad (7)$$

Ее можно рассматривать в качестве целевой функции:

$$D = R(I,J). \qquad (8)$$

Очевидно, что $0 \le D_{IJ} \le 1$.

Функцию принадлежности признака P_i кластеру I естественно определить следующим образом:

$$\mu(P_i,I)=\frac{1}{n_I-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n_I} RO(i,j), \qquad (9)$$

где $RO(i,j)$ - коэффициент ассоциации между признаками P_i и P_j, определяемый по формулам (I), (2) или (3) в соответствии с их типом. Такое определение обеспечивает принадлежность $\mu(P_i,I)$ интервалу [0, I].

Пусть заданое пороговое значение связи POR (в случае кластеризации признаков $0 \le POR \le 1$).

Агломеративная иерархическая процедура, осуществляющая формирование размытых кластеров, состоящих из признаков, может быть реализована следующей последовательностью шагов.

Если проводится кластеризация количественных признаков, то процедура начинается с шага I. Если осуществляется кластеризация бинарных признаков, то процедура начинается с шага 3. Если осуществляется кластеризация признаков, характеризуемых качественными градациями, то процедура начинается с шага 4.

I. Приведение параметров к стандартной форме задания. Исходная матрица данных заменяется матрицей центрированных и нормированных величин.

2. Вычисление корреляционной матрицы.

После расчета корреляционной матрицы выполняется шаг 5.

3. Вычисление матрицы тетрахорических показателей связи.

После расчета матрицы тетрахорических показателей связи выполняется шаг 5.

4. Вычисление матрицы полихорических показателей связи.

5. Задание исходных кластеров.

Число кластеров полагается равным числу признаков (M). Каждый кластер включает один признак.

Размытость на этом шаге не имеет места, и функция принадлежности каждого признака своему кластеру равна I.

6. Вычисление матрицы целевых функций.

Для каждой пары кластеров I и J вычисляется целевая функция D_{IJ}.

На первом уровне кластеризации (для одноэлементных кластеров) значением D_{IJ} является соответствующий элемент матрицы ассоциации между признаками.

На последующих уровнях кластеризации элементы матрицы

D вычисляются согласно формуле (7).

7. Поиск максимума целевой функции.

8. Объединение кластеров.

Если в матрице $\{D_{IJ}\}$ максимум отвечает кластерам K и L, то они сливаются. Кластер L дополняется элементами кластера K, который подлежит дальнейшему уничтожению. При этом не допускается повторное включение элементов в кластер L (кластер K и исходный кластер L могут иметь общие элементы в силу своей размытости).

9. Поиск дополнительно объединяемых кластеров.

Ликвидации кластера K предшествует проверка возможности его слияния и с другими кластерами (помимо L). Для этого целевые функции $D_{I,K}$ ($I=1,\ldots,P$; $I\neq K, L$; P - число кластеров, соответствующее рассматриваемому уровню кластеризации) сравниваются с пороговым значением связи POR. Те кластеры, для которых $D_{IK}\geqslant POR$, должны быть объединены с кластером K.

10. Дополнительное объединение кластеров.

Если $D_{IK}\geqslant POR$, то кластер K сливается с кластером I. Кластер I дополняется элементами кластера K. При этом не допускается повторное включение элементов в кластер I (кластер K и исходный кластер I могут иметь общие элементы в силу своей размытости).

11. Ликвидация кластера K.

Кластер K уничтожается, число кластеров становится на единицу меньше.

12. Вычисление функций принадлежности.

Для каждого из кластеров организованного уровня агломеративного дерева рассчитываются функции принадлежности их элементов. Для этого используется формула (9).

13. Вычисление функционала качества группировки.

Функционал качества группировки, отвечающий рассматриваемому уровню кластеризации, определяется средней взаимосвязью элементов внутри организованных кластеров и числом последних:

$$Q = \sum_{I} \frac{1}{n_I(n_I - 1)} \sum_{P_i, P_j \in I} RO(P_i, P_j). \tag{10}$$

Далее осуществляется возврат к шагу 6.

Процедура завершается объединением всех признаков в один кластер.

Если число признаков, подлежащих кластеризации, равно M, то процедура включает $M-1$ цикл. Максимальное значение функционала качества группировки позволяет выбрать оптимальные результаты кластеризации, отвечающие конкретному уровню.

Вышеописанная процедура формирования размытых кластеров для признаков положена в основу программы CLUSF, написанной на языке фортран-IУ и реализованной на машине ЕС-1061. Входными данными являются: параметр, определяющий тип признаков (количественные, бинарные или характеризуемые качественными градациями); число признаков, число объектов, матрица данных; число градаций каждого из признаков (только для третьего типа); пороговое значение связь.

Результаты выводятся на печать по завершении обработки данных на каждом из уровней кластеризации. Выпечатываются: номер уровня, функционал качества группировка, количество элементов в каждом из кластеров и конкретный состав каждого кластера (номера входящих в него признаков и соответствующие последним функции принадлежности).

Поступила 17.X.1989

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

1. А.В.Корнеева. Формирование размытых кластеров. Труды Тбилисского университета, серия кибернетики и прикладной математики, 279, 1988.
2. А.В.Корнеева. Иерархические процедуры формирования размытых кластеров. Труды Тбилисского университета, серия кибернетики и прикладной математики. 289, 1989.
3. Б.Дюран, П.Оделл. Кластерный анализ. М., Статистика, 1977.
4. С.А.Айвазян, З.И.Бежаева, О.В.Староверов. Классификация многомерных наблюдений. М., Статистика, 1974.
5. Л.Заде. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., Мир, 1976.
6. Н.А.Плохинский. Биометрия. Издательство Московского университета, 1970.

ა. კორნეევა

ნიშან-თვისებებით წარმოქმნილი არამკაფიო კლასტერთა ფორმირების მიმდევრობითი პროცედურა

რ ე ზ ი უ მ ე

განხილულია აგლომერატიული იერარქიული ხის აგების პროცედურა, რომელიც გათვალისწინებულია ნიშან-თვისებებით წარმოქმნილი არამკაფიო კლასტერთა ფორმირებისათვის.

აღწერილია რაოდენობრივი, ბინარული და ხარისხობრივი გრადაციებით მოცემულ ნიშან-თვისებათა კლასტერიზაციის პროგრამა.

A.Korneeva

SEQUENTIAL PROCEDURES FOR THE FORMATION OF FUZZY CLUSTERS OUT OF ATTRIBUTES

Summary

A procedure for the construction of an agglomerative hierarchical tree is suggested. The procedure is meant for the formation of fuzzy clusters out of attributes. A program for clustering quantitative attributes, binary attributes, and attributes characterized by graduations is described.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
298,1990

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ОСТРЫЙ ПЕРИОД ИНФАРКТА МИОКАРДА, НА ОСНОВЕ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

А.В.Корнеева, Н.В.Пиотровская, Л.М.Ахалая

Применение кластерного анализа в области медицины позволяет решать ряд задач, имеющих как аналитическое, так и прикладное значение.

Например, кластеризация признаков, описывающих клиническую картину некоторого заболевания, дает возможность выявлять, с одной стороны, взаимосвязанные показатели (определяемые составом конкретного кластера), с другой стороны, относительно независимые показатели (принадлежащие различным кластерам). Очевидно, что это представляет интерес в аспектах аналитического исследования патологического процесса.

В то же время отмеченная выше возможность определяет целесообразность использования кластерного анализа в качестве процедуры, предваряющей применение тех или других методов распознавания в аспектах диагностики или прогноза. Это связано с тем, что многие статистические процедуры распознавания, например, широко применяемая в вычислительной медицине процедура Байеса /I/, опираются на независимые показатели. Предварительный кластерный анализ обеспечивает в этом случае корректную организацию признаковой системы (за счет подбора признаков из различных кластеров).

Результаты кластеризации признаков могут быть использованы и для исследования взаимосвязи различных медицинских тестов при обследовании больного (на основе анализа состава кластеров).

Проиллюстрируем возможности кластерного анализа признаков на примере инфаркта миокарда.

Для оценки состояния больного, для прогноза возможных осложнений, для прогноза исхода заболевания при инфаркте миокарда учитываются как показатели клинической симптоматики, так и данные специальных методов исследования: параметры поликардиограммы, отражающие фазовую структуру сердечного цикла, параметры кислотно-основного баланса крови, параметры электролитного состава крови и др. Взаимосвязь параметров различных методов исследования не является достаточно изученной. В связи с этим обстоятельством и представляет интерес проведение кластерного анализа показателей, характеризующих острый период инфаркта миокарда.

Для осуществления кластеризации признаков была использована программа WISH /2/. Эта программа предназначена для кластеризации количественных, бинарных и характеризуемых качественными градациями признаков на основе алгоритма, содержащего аналогию с методом Уишарта /3/. Выбор этой программы определялся тем, что при ее применении на результаты кластеризации налагаются минимальные ограничения: программой используется единственный параметр кластеризации - число признаков, наиболее тесно связанных с рассматриваемым /2/. Количество кластеров и их состав зависят исключительно от силы взаимосвязи параметров и не диктуются никакими априорными соображениями.

Для исследования взаимосвязи параметров, характеризующих острый период инфаркта миокарда, была использована статистическая выборка, содержащая 203 объекта. Каждый объект описывался 55 признаками; 18 из них относились к клинической симптоматике, 13 - к фазовой структуре сердечного цикла, 10 - к кислотно-основному балансу (КОБ) артериальной крови, 10 - к кислотно-основному балансу венозной крови, 4 - к электролитному составу крови. Для того, чтобы иметь возможность содержательно интерпретировать результаты кластеризации, перечислим эти признаки:

1. предшествующий инфаркт,
2. предшествующая стенокардия,
3. гипертония,
4. сахарный диабет,
5. курение,
6. употребление алкоголя,
7. длительность болевого приступа,
8. частота пульса,
9. пароксизмальная наджелудочковая тахикардия,
10. пароксизмальная желудочковая тахикардия,
11. мерцательная аритмия,
12. атрио-вентрикулярная блокада,
13. внутрижелудочковая блокада,
14. предсердные экстрасистолы,
15. желудочковые экстрасистолы,
16. систолическое артериальное давление (АД),
17. диастолическое артериальное давление,

18. частота дыхания,
19. асинхронное сокращение (АС),
20. изометрическое сокращение (ИС),
21. период напряжения (Т),
22. период изгнания (Е),
23. механическая систола (S_M),
24. общая систола (S_0).
25. интервал QT,
26. диастола (D).
27. механический коэффициент Блюмбергера (K),
28. внутрисистолический показатель (ВСП),
29. индекс напряжения миокарда (ИНМ),
30. время изгнания минутного объема (ВИМО),
31 начальная скорость повышения внутрижелудочкового давления (V_i),
32. pH артериальное,
33. PCO_2 (напряжение углекислого газа),
34. SB (стандартный бикарбонат)
35. BE (избыток или дефицит буферных оснований),
36. BB (буферные основания)
37. AB (истинный бикарбонат).
38. TCO_2 (общий CO_2 крови),
39. pH мет (метаболическое),
40. pO_2 (напряжение кислорода),
41. HbO_2 (насыщение гемоглобина кислородом),
42. pH венозное,
43. PCO_2 вен,
44. SB вен,

45. BE вен.
46. BB вен.
47. AB вен.
48. TCO_2 вен.
49. pH мет венозное.
50. PO_2 вен.
51. HbO_2 вен.
52. Na сыв (сывороточный),
53. Na эр. (эритроцитарный),
54. K сыв.
55. K эр.

Матрица данных была обработана программой $WISH$ при различных значениях параметра кластеризации IP (этим параметром определяется число учитываемых наиболее сильных связей для каждого из признаков). Оптимальное значение параметра кластеризации IP=15 было выявлено с помощью функционала качества группировки /2/.

При IP=15 были организованы восемь кластеров следующего состава. В скобках будут указаны номера признаков, соответствующие вышеприведенному списку.

<u>1-й кластер</u>

1. мерцательная аритмия (11),
2. атрио-вентрикулярная блокада (12),
3. внутрижелудочковая блокада (13),
4. pH арт. (32),
5. SB арт. (34),
6. BE арт. (35),
7. BB арт. (36),

8. АВ арт. (37),
9. pH мет. арт. (39),
10. pH вен. (42),
11. SB вен. (44),
12. BE вен. (45),
13. BB вен. (46),
14. АВ вен. (47),
15. pH мет. вен. (49),
16. K эр. (55)

2-й кластер

1. предшествующий инфаркт (1),
2. частота пульса (8),
3. систолическое АД (16),
4. диастолическое АД (17),
5. частота дыхания (18),
6. ИС (20),
7. Т (21),
8. Е (22),
9. S'_M (23),
10. S'_O (24),
11. Д (26),
12. К (27),
13. ВСП (28),
14. ИНМ (29),
15. ВИМО (30),
16. V_i (31)

3-й кластер

1. предшествующая стенокардия (2),

2. гипертония (3),
3. сахарный диабет (4),
4. TCO_2 вен. (48),
5. Na ар. (53)

<u>4-й кластер</u>

I. употребление алкоголя (6),
2. пароксизмальная наджелудочковая тахикардия (9),
3. предсердные экстрасистолы (I4),
4. желудочковые экстрасистолы (I5),
5. Ad (I9)
6. TCO_2 арт. (38)

<u>5-й кластер</u>

I. pO_2 арт. (40),
2. HbO_2 арт. (4I),
3. pCO_2 вен. (43),
4. pO_2 вен. (50),
5. HbO_2 вен. (5I),
6. Na снв. (52),

<u>6-й кластер</u>

I. курение (5),
2. K снв. (54)

<u>7-й кластер</u>

I. pCO_2 арт. (33)

<u>8-й кластер</u>

I. длительность болевого приступа (7),
2. пароксизмальная желудочковая тахикардия (I0),
3. QT (25).

Как показывают результаты кластеризации, более половины признаков (32 и 55) принадлежат двум из восьми кластеров. Наиболее крупные кластеры - I-й и 2-й. Каждый из них содержит по I6 признаков.

I-й кластер включает три показателя, относящихся к клинической симптоматике (II-й, I2-й, I3-й признаки), которые указывают на тяжелые нарушения ритма сердечной деятельности, и большую группу параметров кислотно-основного баланса крови. В эту группу входят показатели pH, SB, BE, BB, AB, $pH_{мет}$ как артериальной (32-й, 34-й, 35-й, 36-й, 37-й, 39-й признаки), так и венозной крови (42-й, 44-й, 45-й, 46-й, 47-й, 49-й признаки).

Таким образом, содержательный анализ состава первого кластера указывает на тесную связь мерцательной аритмии, атрио-вентрикулярной блокады и внутрижелудочковой блокады с кислотно-основным балансом крови, а также на корреляцию КОБ артериальной крови с КОБ венозной крови.

2-й кластер включает четыре показателя клинической симптоматики (I-й, 8-й, I6-й, I7-й, I8-й признаки) и большую группу параметров фазовой структуры сердечного цикла. Отсюда следует, что частота пульса, артериальное давление, частота дыхания, предшествующий инфаркт в анамнезе коррелируют с поликардиограммой.

Последующие кластеры малочисленны. Их состав указывает на связь тяжелых нарушений, отмечаемых в клинической картине заболевания, с теми или другими показателями специальных методов исследования.

Так из состава 3-го кластера следует, что наличие у больного стенокардии, гипертонии, сахарного диабета коррелирует с параметром TCO_2 кислотно-основного баланса и параметром Na эр. электролитного баланса крови.

Состав 4-го кластера указывает на взаимосвязь пароксизмальной наджелудочковой тахикардии, предсердных экстрасистол, желудочковых экстрасистол с параметром AC (фазовая структура сердечного цикла) и параметром TCO_2 (КОБ).

Состав 8-го кластера подчеркивает взаимозависимость длительности болевого приступа, пароксизмальной желудочковой тахикардии и параметра QT поликардиограммы.

5-й кластер включает только параметры PCO_2, PO_2, HbO_2 КОБ и параметр Na сыв. электролитного баланса.

6-й и 7-й кластеры содержат одиночные показатели.

Из анализа полученных кластеров можно также сделать заключение о практической независимости таких исследований, как фазовая структура сердечного цикла и кислотно-основной баланс (показатели, относящиеся к этим тестам, распределяются по разным кластерам).

Четыре параметра электролитного баланса крови оказались отнесенными к разным кластерам (I-му, 3-му, 5-му, 6-му), в то время как показатели КОБ и фазовой структуры сердечного цикла сгруппированы относительно компактно (параметры КОБ в I-м и 5-м кластерах, параметры фазовой структуры сердечного цикла - во 2-м кластере), что говорит о более сильной взаимосвязи параметров этих тестов.

Программа $WISH$ реализует процедуру, относящуюся к классическому кластерному анализу (каждый признак принадлежит только одному кластеру, и его связи с другими кластерами пренебрежимы). Кластеры организуются этой программой /2/ соответственно ранжированию (по убыванию) пороговых значений связи, т.ч. более сильными по взаимосвязи признаков являются кластеры, образованные первыми. Но при таком способе кластеризации могут быть оборваны достаточно сильные связи между отдельными признаками. Учет их оказывается возможным лишь при организации размытых кластеров /4/.

Поступила 24.X.1989

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

I. Л.Ластед. Введение в проблему принятия решений в медицине. М.,"Мир", I97I.
2. А.В.Корнеева, Н.В.Пиотровская, М.П.Пирцхалава. Программа кластеризации признаков на основе процедуры, имеющей аналогию с методом Уишарта. ГосФАП, рег.ном. 50880000975.
3. С.А.Айвазян, З.И.Бежаева, О.В.Староверов. Классификация многомерных наблюдений. М., "Статистика", I974.
4. А.В.Корнеева. Формирование размытых кластеров. Труды Тбилисского университета, серия кибернетики и прикладной математики, 279, 1988.

ა. კორნეევა, ნ. პიოტროვსკაია, ლ. ახალაია

მიოკარდის ინფარქტის მწვავე პერიოდისათვის დამახასიათებელ პარამეტრთა ურთიერთკავშირის გამოკვლევა კლასტერული ანალიზის საშუალებით

რეზიუმე

განხორციელებულია იმ ნიშან-თვისებათა კლასტერიზაცია, რომელთა საშუალებითაც ხასიათდება მიოკარდის ინფარქტის მწვავე პერიოდი. კლასტერული ანალიზის საშუალებით გამოვლენილია გულის ციკლის ფაზური სტრუქტურის პარამეტრებს, სისხლის ფუძე-მჟავე ბალანსს, სისხლის ელექტროლიტურ ბალანსსა და ზოგიერთ კლინიკურ სიმპტომს შორის არსებული ურთიერთკავშირი.

A. Korneeva, N. Piotrovskaya, L. Akhalaia

CLUSTER-ANALYSIS STUDY OF THE INTERDEPENDENCE OF THE PARAMETERS CHARACTERIZING THE ACUTE PERIOD OF MYOCARDIAL INFARCTION

Summary

A clusterization of attributes characterizing the acute period of myocardial infarction has been realized. Cluster analysis has revealed an interdependence of the phase structure parameters of the cardiac cycle, the acid-base equilibrium parameters of the blood, the electrolyte equilibrium parameters of the blood, and some clinical symptoms.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
298, 1990

ცოდნის კონცეპტუალური წარმოდგენა ექსპერტულ სისტემა "PSIKIATRI" -ში

ნ. შერგელაშვილი

70-იან წლებში ხელოვნური ინტელექტის გამოკვლევებში გამოიყო დამოუკიდებელი მიმართულება, რომელსაც სახელად ექსპერტული სისტემები დაერქვა. ექსპერტული სისტემების გამოკვლევათა მიზანია პროგრამების ან მოწყობილობის შემუშავება, რომლებიც გადაწყვეტენ ექსპერტ-ადამიანისათვის რთულად გადასაწყვეტ ამოცანებს. ძირითადად ექსპერტული სისტემები ხსნიან ამოცანებს, რომელთა ალგორითმიზაცია შეუძლებელია.

როგორც ცნობილია, ექსპერტული სისტემის სიმძლავრე დამოკიდებულია მისი ცოდნის მოცულობაზე.

ექსპერტული სისტემების უნივერსალობა ეყრდნობა ცნებას "ფორმალური პროდუქციული სისტემა".

ადამიანის მიერ გადაწყვეტილების მიღების პროცესების ფსიქოლოგიურმა გამოკვლევებმა გვიჩვენეს, რომ მსჯელობისას ადამიანი იყენებს წესებს, რომლებიც პროდუქციების ანალოგიურია, ანუ წესებს "პირობა-მოქმედება". ნიუელმა /1973/ დასვა პროდუქციული სისტემების გამოყენების საკითხი ეგმ-ზე გადაწყვეტილების მიღების მოდელირებისათვის. პროდუქციული სისტემა [PS] განვმარტოთ შემდეგნაირად: $PS=\langle F,P,I \rangle$, სადაც F -სისტემის მუშა მეხსიერებაა /იგივე მონაცემთა ბაზა/, P -ცოდნის ბაზაა, რომელიც შეიცავს პროდუქციების სიმრავლეს და აქვს სახე-"პირობა-მოქმედება".

I ინტერპრეტატორი /გადაწყვეტილების მიმღები/, რომელიც ასრულებს გადაწყვეტილების მიღებას. ინტერპრეტატორი ასრულებს შემდეგ მოქმედებებს:

1/ განსაზღვრავს იმ წესების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებს მიმდინარე მონაცემებს,

2/ ასრულებს განსაზღვრულ მინიშნებებს, ცვლის მუშა მეხსიერებას. ინტერპრეტატორი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ოთხეულის სახით:

$$I = \langle V, S, P, W \rangle ,$$

სადაც V- არჩევის პროცესია, რომლის დროსაც P და F -დან აირჩევა ქვესიმრავლე აქტიური მონაცემებისა F_V და აქტიური პროდუქციებისა P_V, რომლებიც გამოიყენება ინტერპრეტატორის მუშაობის მოცემული ციკლის დროს, S- მინიშნული სიმრავლის შედარების პროცესია, რომლის დროსაც ერთმანეთს დარდება წესი $/P_i/$ მონაცემებს $/d_i/$, $\{P_i\} \in P_V$, $\{d_i\} \in F_V$, ამასთან ყოველი P_i გამოიყენება $\{d_i\}$ სიმრავლის ელემენტების მიმართ. R -კონფლიქტების გადაწყვეტის პროცესია, რომელიც განსაზღვრავს რომელი მინიშვნა სრულდება. W - არჩეული მინიშნული წესის შესრულების პროცესია /ე.ი. სრულდება მოქმედება, რომელიც მითითებულია წესის მარჯვენა ნაწილში/. შესრულების შედეგია მონაცემების მოდიფიკაცია F -ში ან შეტან-გამოტანის ოპერაცია..

ადამიანის პრაქტიკული მოღვაწეობა მედიცინის სფეროში მოიცავს გარკვეულ თავისებურებებს. აქედან გამომდინარე, კაცობრიობის მოღვაწეობის ეს სფერო არ ექვემდებარება ზუსტ ალგორითმიზაციას.

ექიმის მიერ დიაგნოზის დასმა უფრო მის გამოცდილებასა და ინტუიციას ეფუძნება, ვიდრე ადამიანის ორგანიზმში მიმდინარე

ფიზიოლოგიურ და პათოლოგიურ პროცესების ანალიზს.

ექიმს არაფორმალური ცოდნის შემადგენლობა დროის განმავლობაში ეცვლება. ეს ცოდნა ექიმს საშუალებას აძლევს გადაწყვიტოს განსაზღვრული ამოცანა კონკრეტულ სიტუაციაში, მაგრამ თანამედროვე მედიცინა იმდენად გართულდა, რომ ყველაზე კარგ ექიმსაც არ შესწევს უნარი გააანალიზოს ათობით და ასობით მაჩვენებლები ავადმყოფის მდგომარეობის შესახებ. სწორედ ამან აიძულა მათემატიკოსები ეფიქრათ ისეთი სისტემის შექმნაზე, რომელიც დაეხმარება ექიმებს.

ასეთი სისტემის შექმნის მცდელობას ასობით წლების ისტორია აქვს. დღესდღეობით დიდი ყურადღება ეთმობა მანქანური დიაგნოსტიკის პრობლემებს, რაც გამოწვეულია დიაგნოსტიკური პროგრამების ახალი კლასის- ექსპერტული სისტემების შექმნით.

ყოველ სამედიცინო კლინიკას გააჩნია ათვლის მასალების მნიშვნელოვანი რაოდენობა – ავადმყოფის ისტორიის სახით. მაში მოცემული სიმპტომების კომპლექსების მიხედვით რთულია ავადმყოფობის დადგენა. სამედიცინო ექსპერტული სისტების დახმარებით ეს პროცესი რამდენადმე იოლდება.

ექსპერტულ სისტემაში ინახება ცოდნის დიდი მარაგი მეცნიერების ამა თუ იმ დარგზე, აღებული წიგნებიდან, მონოგრაფიებიდან, დასკვნები, ჩამოყალიბებული გამოცდილი სპეციალისტების მიერ, აგრეთვე ინფორმაცია, რომელიც დამოკიდებულია ექსპერტულ სისტემაში მომხმარებლის ურთიერთობაზე.

დღესდღეობით შექმნილია ასობით განსხვავებული ექსპერტული სისტემა, რომელსაც იყენებენ მედიცინის სხვადასხვა დარგში.

ექსპერტული სისტემების პრინციპების შემუშავება წინა პლანზე წამოწევს ცოდნის, წარმოდგენის პრობლემას. ისეთი პრობლემური არის განხილვისას, სადაც შესაძლებელია ობიექტის აღწერა

სისტემაში "ნიშანთვისება-მნიშვნელობა", შეიძლება გამოყენებულ იქნას ცნებითი ანუ კონცეპტუალური წარმოდგენა.

კონცეპტუალურ სისტემის რეალიზაცია მოითხოვს შესაბამისი ალგორითმული და პროგრამული უზრუნველყოფის შემუშავებას.

ექსპერტულ სისტემებში აბსტრაქტული ცოდნის კონცეპტუალური წარმოდგენის უზრუნველსაყოფად გამოყენებულ იქნა აღწერითი და განმასხვავებელი კონცეპტების ფორმირების პროგრამების კომპლექსი.

ზემოთ ხსენებულ პროგრამების კომპლექსები გამოიყენება ნებისმიერ სფეროში, სადაც წამოიჭრება ობიექტთა კლასების ფორმალურ-ლოგიკური განსაზღვრის ამოცანა.

ცოდნის კონცეპტუალური წარმოდგენის წინამძღვრებია ე.ბ. ჰანტის გამოკვლევები, რომლებმაც მისცეს საწყისი მიმართულებას, რომელსაც ეწოდება "ცნების ფორმირების მოდელირება გამომთვლელ მანქანაზე".

ობიექტთა კლასების მკაფიო და კომპაქტური განსაზღვრის შესაძლებლობა საშუალებას გვაძლევს გადავწყვიტოთ ცოდნის გამოხატვის, დაგროვების და კორექტირების ამოცანა, რომელსაც უნდა ფლობდეს ინტელექტუალურ შემსრულებელი სისტემა.

აღწერითი კონცეპტი წარმოადგენს ობიექტთა კლასის ფორმალურ-ლოგიკურ განსაზღვრას, განმსხვავებელი კონცეპტი კი - ფორმულურ-ლოგიკურ გამოსახულებას, რომელიც წარმოადგენს წესს, თუ როგორ დავადგინოთ, განეკუთვნება თუ არა ფიქსირებულ სისტემაში "ნიშან-თვისება-მნიშვნელობა" გამოსახული ობიექტი დასახელებულ კლასის ელემენტს.

აღწერითი და განმასხვავებელი კონცეპტები მიღებულ იქნა დეპრესიის ორი ფორმისათვის: ნევროზული და ინვოლუციური მასალა აღებულია მ.ასათიანის სახელობის ფსიქიატრიის ინსტიტუტში.

შესწავლილი იქნა 150 ავადმყოფის ისტორია, რომლებიც მკურნალობდნენ და გამოკვლეულ იქნენ ზემოთ აღნიშნულ ინსტიტუტის სტაციონარში.

CONF-2 პროგრამის დახმარებით გამომუშავდება ე.წ. ალბათური კონცეპტი. ალბათური კონცეპტის ფორმირება ხორციელდება ისე, რომ გამომუშავებულ ცნებას გააჩნია იერარქიული სტრუქტურა, რომლის დროსაც გათვალისწინებულია ნიშან-თვისებათა სიხშირული შეფასებები.

I საფეხურზე ფიგურირებენ შეხვედრის უდიდესი სიხშირის ნიშნები. II საფეხურზე- ნიშან-თვისებები უფრო ნაკლები შეხვედრის სიხშირით და ა.შ.

ცნების ფორმირების პროცედურა ავლენს ობიექტთა კლასისათვის დამახასიათებელ მდგომარეობის ფუნქციათა ჯგუფს.

აღმწერი ცნებები ასახავენ იმ საერთოს, რომელიც არსებითია განხილული კლასების ობიექტებისათვის, განმასხვავებელი ცნებები კი ასახავენ იმ სპეციფიკას, რომელიც გვაძლევს ორივე კლასის ობიექტების დიფერენცირების საშუალებას.

მასალის დამუშავების შედეგების ანალიზმა გვიჩვენა, რომ ნევროზული დეპრესიის შემთხვევაში I საფეხურზე ფორმირებული იყო აღმწერი კონცეპტი, რომელიც შეიცავდა 5 ნიშან-თვისებას:

12-ფსიქოტრავმული სიტუაცია,

28-გუნება-განწყობილების დაქვეითება,

33-განგაშის შეგრძნების ძლიერი გამოხატვა,

48- საერთო სისუსტე,

69-უძილობა.

ნევროზული დეპრესიის I დონის კონცეპტი აღიწერება შემდეგნაირად:

I. $\Psi_{12}(1)\Psi_{28}(2)\Psi_{33}(2)---V$,

2. $\varphi_{12}(2)\varphi_{28}(2) - \varphi_{48}(2) - V$,

3. $\varphi_{12}(1)\varphi_{28}(1)\varphi_{33}(2)\varphi_{48}(1)\varphi_{69}(1)V$,

4. $-\varphi_{28}(2)\varphi_{33}(2)\varphi_{48}(2)-V$,

5. $\varphi_{12}(1)\varphi_{28}(1)-\varphi_{48}(2)\varphi_{69}(2)V$,

6. $-- \varphi_{33}(2)\varphi_{48}(2)\varphi_{69}(2)V$,

7. $\varphi_{12}(2)\varphi_{28}(2)- -\varphi_{69}(2)$.

ცნების პირველ დონეზე ფიგურირებს ნიშან-თვისების ორი მნიშვნელობა: 1 და 2. 2 მდგომარეობა მიუთითებს იმაზე, რომ ნიშან-თვისებისათვის დამახასიათებელია პათოლოგიის მნიშვნელობები /ე.ი. მისი სუსტი, საშუალო ან ძლიერი გამოხატულება/. ცნების უფრო მაღალ დონეებზე ფიგურირებენ იგივე ნიშან-თვისებები, მაგრამ აღწერის დეტალიზება უფრო დიდია, ვიდრე პირველ დონეზე. ყოველი ნიშან-თვისებისათვის შესაძლებელია შემდეგი მდგომარეობები:

1. პათოლოგიის არ არსებობა,
2. პათოლოგიის სუსტი ან საშუალო გამოხატულება,
3. პათოლოგიის ძლიერი გამოხატულება.

2 მდგომარეობა ფიქტიურია, დაკავშირებულია პროგრამის სტრუქტურასთან და ამიტომ არ საჭიროებს ინტერპრეტაციას.

III დონეზე აღწერა კიდევ უფრო დეტალიზირებულია. აქ ფიგურირებს მდგომარეობები: 1,5,6,7.

1-მდგომარეობა შეესაბამება პათოლოგიის არ არსებობას,
5-მდგომარეობა შეესაბამება პათოლოგიის სუსტ გამოხატვას,
6-მდგომარეობა შეესაბამება პათოლოგიის საშუალო გამოხატვას.
7-მდგომარეობა შეესაბამება პათოლოგიის ძლიერ გამოხატვას.

ამ შემთხვევაში მდგომარეობები 2,3,4 ფიქტიურია და დაკავშირებულია CONF-2-ის სტრუქტურასთან.

ყველა ზემოაღნიშნული შენიშვნა რჩება ძალაში ინდუ-

ციური დეპრესიის შემთხვევაში, რომლისთვისაც მიღებული იყო კონცეპტები შემდეგ ნიშან-თვისებების საშუალებით:

25-კონტაქტის დაქვეითება გარშემო მყოფებთან და ექიმებთან,

28-გუნება-განწყობის დაქვეითება,

36-ტრაგიკული სახის გამომეტყველება,

69-ძილის მოშლა,

71-ღამის ძილით დაუკმაყოფილებლობა.

ინდივიდუალური დეპრესიის I დონის კონცეპტს აქვს სახე:

1. $\varphi_{25}(2)\varphi_{28}(2)\varphi_{36}(2)--V$,
2. $-\varphi_{28}(2)\varphi_{36}(2)--\varphi_{71}(1)V$,
3. $\varphi_{25}(2)-\varphi_{36}(1)\varphi_{69}(2)\varphi_{71}(2)V$,
4. $--\varphi_{28}(2)-\varphi_{69}(2)\varphi_{71}(2)$.

III ცხრილში მოყვანილია ნევროზული და ინვოლუციური დეპრესიის შედეგები აღმწერი კონცეპტების ბაზაზე /143 შემთხვევა/.

ცნების შემდეგი საფეხურები შეიძლება დაგვეხმაროს დეპრესიის ფორმების საბოლოო დიფერენციაციისათვის. აღწერი კონცეპტი რიგ შემთხვევებში შეიძლება აღმოჩნდეს არასაკმარისი საბოლოო დასკვნის მიღებისათვის. მაშინ ამ დაავადების დიფერენციაციისათვის შესაძლებელია გავითვალისწინოთ განმასხვავებელი კონცეპტებიც.

ალგორითმი, რომელიც საშუალებას იძლევა მივიღოთ განმასხვავებელი კონცეპტები ნევროზული და ინვოლუციური დეპრესიისათვის, მიღებული იყო ავადმყოფთა იმავე ჯგუფისათვის. ამ კონცეპტების დიდი მოცულობის გამო მოვიყვანთ მხოლოდ მათ ფრაგმენტებს:

განმასხვავებელი კონცეპტის ფრაგმენტი ნევროზული დეპრესიისათვის:

1. $\varphi_{11}(1)\varphi_{35}(1)\varphi_{62}(1)\varphi_{70}(1)V$

2. $\varphi_{11}(\Lambda)\varphi_{35}(\Lambda)\varphi_{62}(\Lambda)\varphi_{20}(\Lambda)\varphi_{65}(\Lambda)\varphi_{21}(\Lambda)V$;

3. $\varphi_{11}(\Lambda)\varphi_{35}(\Lambda)\varphi_{62}(\Lambda)\varphi_{20}(\Lambda)\varphi_{65}(\Lambda)\varphi_{21}(\Lambda)\varphi_{25}(\Lambda)V$.

განმსხვავებელი კონცეპტის ფრაგმენტი ინდუციური რეპრესიისათვის:

1. $\varphi_{11}(\Lambda)V$,
2. $\varphi_{11}(\Lambda)\varphi_{35}(\Lambda)V$;
3. $\varphi_{11}(\Lambda)\varphi_{35}(\Lambda)\varphi_{62}(\Lambda)\varphi_{20}(\Lambda)\varphi_{65}(\Lambda)V$.

განმსხვავებელი კონცეპტების გამოყენება აღწერი კონცეპტების წინასწარი გამოყენების გარეშე არ არის მიზანშეწონილი, რამდენადაც მიღებულ შემთხვევას დიფერენცირების საშუალებას გვაძლევს ხშირად აღწერი კონცეპტი და განმსხვავებელ კონცეპტს მიემართავთ მხოლოდ განუსაზღვრელი დიფერენციაციის შემთხვევაში.

პროგრამა CONF-2-ით მასალის დამუშავების შედეგების ინტერპრეტირების დროს შესამცირებლად და ამ პროცესის ავტომატიზაციის მიზნით შემუშავებულ იქნა პროგრამა ANALIZ.

პროგრამის საშუალებით შესაძლებელია გადაიჭრას არსებული სიმპტომატიკის მითითებით ახალი ავადმყოფის დიფერენციაციის საკითხი.

იმისათვის, რომ შევამოწმოთ, თუ რამდენად შეესაბამება მიღებული აღწერითი კონცეპტები რეალურ სინამდვილეს და რამდენად შეუძლიათ მათ გადაჭრან კლასიფიკაციის ამოცანა, საჭიროა კლინიკური მასალა, რომლის საფუძველზეც მიღებულია აღწერი კონცეპტები, შევადაროთ მათ და გავაკეთოთ ასეთი სახის დასკვნები: რომელი დაავადების, რომელი საფეხურის, რომელი დონის აღწერი კონცეპტის რომელი იმპლიკანტით ამოიცნობა ესა თუ ის ობიექტი /იგულისხმება ავადმყოფი/. ამისათვის საჭიროა შედარდეს მოცემული ავადმყოფის კლინიკური მონაცემები კონცეპტებს და გაკეთდეს შესაბამისი დასკვნები.

პროგრამა ANALIZ -ი გვაძლევს საშუალებას დამუშავდეს მონაცემთა დიდი მასივები დროის უმნიშვნელო დანახარჯებით და შეიძლება წარმატებით გადაწყდეს სხვადასხვა კლასის ობიექტების დიფერენცირების საკითხები.

როგორც N2 ცხრილიდან ჩანს, პროგრამა ANALIZ -ის გამოყენებით ნევროზულ დეპრესიის განხილულ 90 შემთხვევიდან I დონეზე ამოცნობილი იქნა 24 ობიექტი, II დონეზე- 64, III დონეზე-72 ობიექტი.

ინვოლუციური დეპრესიის 60 შემთხვევიდან I დონის კონცეპცის საშუალებით ამოცნობილი იქნა 28 ობიექტი, II დონეზე-52 და III დონეზე- 55 ობიექტი.

მიღებული შედეგები მიუთითებს მიღებულ კონცეპტების საკმაოდ მაღალ ხარისხზე, თუმცა გვაქვს განუსაზღვრელობის შემთხვევიც. ამ საკითხის გადაჭრა შეიძლება კონცეპტის მაღალი საფეხურების მეშვეობით. უკიდურეს შემთხვევაში მივმართავთ განმასხვავებელ კონცეპტს, რომელიც იძლევა საბოლოო პასუხს მოცემული შემთხვევის ნოზოლოგიური კუთვნილების შესახებ.

სამედიცინო თვალსაზრისით მიღებული შედეგები საკმაოდ კარგად ასახავს რეალობას. პირველ საფეხურებზე მიღებული ნიშანთვისებათა კომპლექსები ნათლად აღენიშნებათ ავადმყოფთა უმრავლესობას.

ზემოთქმულის საფუძველზე შეიძლება გაკეთდეს დასკვნები:

1. თუმცა ნევროზულ და ინვოლუციურ დეპრესიებს ხშირად ახასიათებს მსგავსი კლინიკური სურათი, პრინციპულად შესაძლებელია მათი დიფერენციაცია და ერთმანეთისაგან იმ სიმპტომატიკის საფუძველზე, რომელიც გამოყენებული იქნა თითოეული შემთხვევის დასახასიათებლად.

2. ალგორითმი და განმასხვავებელი ცნებების ფორმირების პროცედუ-

რეჩის გამოყენებამ შესაძლებლობა მოგვცა შეგვექმნა საწყისი ბაზა ექსპერტული სისტემის PSIKIATRI -ის კონცეპტუალიზაციის ბლოკისათვის. ამ ბლოკმა შემდგომი სრულყოფისა და განვითარების პროცესში უნდა შეძლოს დეპრესიის სხვა ფორმების დიფერენციაცია.

დამუშავების შედეგებით მთელი მიღებული მასალა ჯერ კიდევ ბოლომდე არაა შესწავლილი. მომავალში შეიძლება დაისვას კონცეპტების სხვადასხვა საფეხურების რეზულტატურობის ამოცანა, დაავადების სხვადასხვა პერიოდისათვის, რაც მოგვცემს საშუალებას მივიღოთ უფრო ზუსტი შედეგები.

მიღებულია 16.XI.1989

ფიზიკური კიბერნეტიკის პრობლემური ლაბორატორია

ცხრილი № 1

დონის № / რეაქ. ტიპი	შემთხვევათა რიცხვი			
	I	II	III	სულ
ნევროზული	24	64	72	90
ინვოლუციური	28	52	55	60

ცხრილი № 2

დონის № / რეაქ. ტიპის	შემთხვევათა რიცხვი				
	I	II	III	სულ	დიფერენციაციის. განუზღ:
ნევროზული	18	25	27	70	20
ინვოლუციური	10	11	4	25	28

ლიტერატურა

1. Р.Карнап. Значение и необходимость. М.,"Наука", 1954.

2. Э.Хант,Дж.Марин,Ф.Стоун. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машинке.М., "Мир",1970.

3. А.В.Корнеева. Искусственный интеллект и теоретические проблемы медицинской кибернетики. Труды Института кибернетики АН ГССР, т.I, Тбилиси,1977.

4. В.В.Чавчанидзе,А.В.Корнеева.Аналитический фильтрационный метод формирования понятий. Сообщения АН ГССР,т.65, № 3, 1972.

5. Отчет о научно-исследовательской работе по теме: "Разработка алгоритмических основ концептуальных подсистем представления знаний для интеллектуальных исполнительных систем". Тбилиси, 1985.

6. О.В.Кербиков, М.В.Керкина, Р.А.Наджаров, А.В.Снежневский. Психиатрия, М., "Медицина", 1968.

7. Депрессии, вопросы клиники,психопатологии, терапии. Сборник докладов, представленных на симпозиуме, проходившем 10-12 сентября 1970 г. в г.Москве.

Н.А.Шергелашвили

КОНЦЕПТУАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАНИЙ В ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЕ "PSIKIATRI"

Резюме

Рассматривается вопрос программного обеспечения экспертной системы "PSIKIATRI" для концептуального представления медицинских знаний.

N.Shergelashvili

A CONCEPTUAL REPRESENTATION OF KNOWLEDGE IN THE EXPERT SYSTEM "PSIKIATRI"

Summary

The question of the software of the Expert system "PSIKIATRI" for conceptual representation of medical knowledge is discussed.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

298, 1990

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ФЕРМЕНТАТИВНОЙ КИНЕТИКИ

Н.В.Бокучава

I.Введение

Известно, что при моделировании многих биологических процессов становится необходимым исследование их ферментативно-кинетических механизмов, ибо ни одна химическая реакция в организмах не протекает без участия ферментов (т.е. белков-катализаторов).

Одна из наиболее простых и в то же время основных ферментативных реакций - это реакция, в которой субстрат[x)] S необратимо превращается в продукт одним ферментом E. Согласно модели Микаэлиса-Ментена /I/ в реакциях подобного рода вначале образуется комплекс фермент-субстрат (ES), который в ходе дальнейшей реакции распадается на конечный продукт S и свободный фермент E :

$$S+E \underset{K_{-1}}{\overset{K_1}{\rightleftarrows}} (ES) \xrightarrow{K_2} F+E^{xx)}, \qquad (I)$$

при этом общая концентрация фермента всегда остается постоянной величиной, т.е.

---

x) Субстрат - это молекула, которая связывается с ферментом.

xx) K_1, K_{-1}, K_2 - константы скорости прямых и обратной реакций.

$$C_E + C_{(ES)} = const,$$

концентрации фермента и субстрата в начальный момент времени $t=0$ известны, а концентрации комплекса и продукта равны нулю, т.е.

$$\left.\begin{aligned} &C_E(0)=C_E^0, \quad C_S(0)=C_S^0, \\ &C_{ES}=0, \quad C_F(0)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ввиду того, что в большинстве реакций химической кинетики отношение начальных концентраций фермента к концентрации субстрата очень мало, то дифференциальные уравнения ферментативной кинетики в безразмерных переменных вообще, а для модели Микаэлиса-Ментена в частности, принадлежат к классу сингулярно возмущенных систем, общая теория которых разработана А.Н.Тихоновым /2/.

Новизной в настоящей работе можно считать представление модели Микаэлиса-Ментена в виде управляемой модели и унифицированную схему ее реализации, построенную на синергизме тихоновокого метода решения задач сингулярного типа и понтрягинской теории оптимального управления.

2. Постановка и решение задачи ферментативной кинетики

Согласно /I/ при начальных условиях (I) система дифференциальных уравнений ферментативной кинетики для модели Микаэлиса-Ментена имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dC_S}{dt} = -K_1 C^0 C_S + (K_1 C_S + K_{-1}) C_{(\;S)}, \\ &\frac{dC_{(E\;)}}{dt} = K_1 C_E^0 C_S - (K_1 C_S + K_{-1} + K_2) C_{(ES)}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

которая для безразмерных величин

$$\left.\begin{aligned} &\tau = k_1 C_E^0 t, \quad \beta = k_2 / k_1 C_S^0, \quad \alpha = \frac{(k_{-1}+k_2)}{k_1 C_S^0}, \\ &x(\tau) = \frac{C_S(t)}{C_S^0}, \quad y(\tau) = \frac{C_{(ES)}(t)}{C_E^0}, \quad \varepsilon = \frac{C_E^0}{C_S^0} \ll 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -x(\tau) + (x(\tau)+\alpha-\beta)\,y(\tau), \\ &\varepsilon\,\frac{dy(\tau)}{d\tau} = x(\tau) - (x(\tau)+\alpha)\,y(\tau), \\ &\qquad x(0)=1, \quad y(0)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Взяв в качестве управления ферментативных реакций типа (I) величину $\beta y(\tau) \equiv u(\tau)$ с учетом $C_{(ES)}(0)=0 \Rightarrow u(0)=0$ из (5) получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -x(\tau) + (x(\tau)+\alpha)\,y(\tau) - u(\tau), \\ &\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left[x(\tau) - (x(\tau)+\alpha)\,y(\tau)\right], \\ &\qquad x(0)=1, \quad y(0)=0, \quad u(0)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Зададимся целью определить такое оптимальное управление, которое минимизирует время T, необходимое для получения продукта в реакции типа (I); иначе говоря рассмотрим задачу об оптимальном быстродействии, когда имеем (6) и условие:

$$x_0(T) \equiv T = \int_0^T d\tau \longrightarrow \min, \quad 0 \le \tau \le T. \qquad (7)$$

Так как время T в нашей постановке не фиксировано, а в (6) ограничения на переменную наложены только в начальный момент времени, то для ее определения нужно использовать дополнительно так называемые условия трансверсальности

$\varphi_i(T)=0$, $(i=0,1,2)$, налагаемые на дополнительные переменные φ_i, удовлетворяющие следующей системе дифференциальных уравнений /3/:

$$\frac{d\varphi_i(\tau)}{d\tau}=-\sum_{j=0}^{2}\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_i}\varphi_j(\tau) \qquad (i,j=0,1,2) \tag{8}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &x_0=x_0(T),\quad x_1=x(\tau),\quad x_2=y(\tau),\\ &\varphi_0(\tau)=-1,\quad f_0(x,u)=1,\\ &f_1(x,u)=-x(\tau)+(x(\tau)+\alpha)\,y(\tau)-u(\tau),\\ &f_2(x,u)=\frac{1}{\varepsilon}\left[x(\tau)-(x(\tau)+\alpha)\,y(\tau)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Воспользовавшись далее условием /3/

$$\left.\begin{aligned} &\sup H(\varphi(\tau),x(\tau),u(\tau))=0,\\ &u\in U,\\ &0\le\tau\le T, \end{aligned}\right\} \tag{I0}$$

при

$$\frac{dx_i}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial\varphi_i},\qquad \frac{\partial\varphi_i}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=0,1,2), \tag{II}$$

где U - множество допустимых управлений, а

$$H(\varphi(\tau),x(\tau),u(\tau))=\sum_{j=0}^{2}\varphi_i f_i, \tag{I2}$$

с учетом (8) получим:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1\left[-x(\tau)+(x(\tau)+\alpha)\,y(\tau)-u(\tau)\right]+\\ &+\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2\left[x(\tau)-(x(\tau)+\alpha)\,y(\tau)\right]-1=0, \end{aligned}\right\} \tag{I3}$$

откуда следует, что для определения оптимального управления и оптимального (минимального) времени необходимо знать величины $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\varphi_i(\tau)$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Необходимо решить системы дифференциальных уравнений (6) и (II) с соответствующими граничными условиями.

Воспользовавшись тихоновским методом /2/, сначала найдем решения порождающей системы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -x(\tau) + (x(\tau)+\alpha)\,y(\tau) - u(\tau), \\ &x(\tau) - (x(\tau)+\alpha)\,y(\tau) = 0, \\ &x(0)=1, \quad y(0)=0, \quad u(0)=0, \quad 0 \le \tau \le T, \end{aligned}\right\} \tag{I4}$$

соответствующей (6). Согласно приложению I настоящей статьи, они имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &x^{o}(\tau) + \alpha \ln x^{o}(\tau) = 1 - \frac{u^{o}(\tau)}{y^{o}(\tau)}\,\tau = 1 - \beta\tau, \\ &y^{o}(\tau) = \frac{x^{o}(\tau)}{x^{o}(\tau)+\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{I5}$$

для которых $x^{o}(0)=1$, $y^{o}(0) = \frac{1}{1+\alpha} \neq 0$, т.е. не выполняется второе начальное условие основной задачи (6).

Для устранения полученного противоречия введем новую переменную $\sigma = \frac{\tau}{\varepsilon}$, для которой (6) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma} = -\varepsilon x(\sigma,\varepsilon) + \varepsilon\,(x(\sigma,\varepsilon)+\alpha)\,y(\sigma,\varepsilon) - \varepsilon u(\sigma,\varepsilon), \\ &\frac{dy(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma} = x(\sigma,\varepsilon) - (x(\sigma,\varepsilon)+\alpha)\,y(\sigma,\varepsilon), \\ &x(0,\varepsilon)=1, \quad y(0,\varepsilon)=0; \quad u(0,\varepsilon)=0. \end{aligned}\right\} \tag{I6}$$

Будем искать решения (I6) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} x(\sigma,\varepsilon) &= x^{\circ}(\sigma)+x_1(\sigma,\varepsilon), \\ y(\sigma,\varepsilon) &= y^{\circ}(\sigma)+y_1(\sigma,\varepsilon), \end{aligned}\right\} \quad (I7)$$

где

$$x^{\circ}(\sigma)\equiv x^{\circ}(\tau), \quad y^{\circ}(\sigma)\equiv y^{\circ}(\tau)$$

– решение системы (I4), а $x_1(\sigma,\varepsilon)$ и $y_1(\sigma,\varepsilon)$ – поправки к этим решениям, гарантирующие исполнение обоих начальных условий в (I6). Поскольку первое граничное условие для (6) при (I5) выполняется, то вместо (I7) мы можем пользоваться соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x(\sigma,\varepsilon) &= x^{\circ}(\sigma), \\ y(\sigma,\varepsilon) &= y^{\circ}(\sigma)+y_1(\sigma,\varepsilon), \end{aligned}\right\} \quad (I8)$$

для которых граничные условия примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1(0,\varepsilon) &= 0, \\ y_1(0,\varepsilon) &= y(0,\varepsilon)-y^{\circ}(0)\equiv y_0-y^{\circ}. \end{aligned}\right\} \quad (I9)$$

С учетом $\frac{dy^{\circ}(\sigma)}{d\sigma}=0$ и (I8) для порождающей системы, соответствующей (I6), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{\circ}(\sigma)}{d\sigma} &= 0 \\ \frac{dy_1(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma} &= -\left(x^{\circ}(\sigma)+\alpha\right)y_1(\sigma,\varepsilon), \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

решениями которых являются соотношения

$$\left.\begin{aligned} x^{\circ}(\sigma) &= 1, \\ y_1(\sigma,\varepsilon) &= -\frac{1}{1+\alpha}\, e^{-(x^{\circ}(\sigma)+\alpha)\sigma} \;{}^{x)} \end{aligned}\right\} \quad (2I)$$

---

x) Смотри приложение 2 настоящей статьи.

Подставляя теперь значения $x^0(\sigma)$, $y^0(\sigma)$ и $y_1(\sigma,\varepsilon)$ во второе соотношение (18), для $y(\sigma,\varepsilon)$ получим

$$y(\sigma,\varepsilon)=\frac{1}{1+\alpha}\left(1-e^{-(1+\alpha)\sigma}\right). \tag{22}$$

Таким образом, для безразмерных величин решениями основной системы дифференциальных уравнений ферментативной кинетики (5), удовлетворяющими всем начальным условиям, являются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &x(\tau)+\alpha\ln x(\tau)=1-\beta\tau,\\ &y(\tau)=\frac{1}{1+\alpha}\left(1-e^{-(1+\alpha)\tau/\varepsilon}\right).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Теперь определим значения оптимального управления и оптимального времени. Для этого запишем соотношение (7) в следующей форме:

$$x_c(T)=\varepsilon\int_0^{\sigma_T} d\sigma\to min,\quad 0\leq\sigma\leq\infty, \tag{24}$$

и напишем гамильтониан соответствующей системы (16). Согласно (12) он будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} H=\varepsilon\varphi_1\big[-x(\sigma,\varepsilon)+\big(x(\sigma,\varepsilon)+\alpha\big)y(\sigma,\varepsilon)-v(\sigma,\varepsilon)\big]+\\ +\varphi_2\big[x(\sigma,\varepsilon)-\big(x(\sigma,\varepsilon)+\alpha\big)\cdot y(\sigma,\varepsilon)\big]-\varepsilon.\end{aligned} \tag{25}$$

Для определения φ_1 и φ_2 воспользуемся вторым уравнением системы (11), тогда в нашем случае:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{d\sigma}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\big(1-y(\sigma,\varepsilon)\big)\big(\varepsilon\varphi_1-\varphi_2\big),\\ &\frac{d\varphi_2}{d\sigma}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\big(x(\sigma,\varepsilon)+\alpha\big)\big(\varepsilon\varphi_1-\varphi_2\big).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Будем искать асимптотические решения (26) в виде

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\sigma,\varepsilon)&=\varphi_1^0(\sigma,0)+\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon),\\ \varphi_2(\sigma,\varepsilon)&=\varphi_2^0(\sigma,0)+\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon),\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

где $\varphi_1^0(\sigma,0)$ и $\varphi_2^0(\sigma,0)$ – решения порождающей системы:

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{d\varphi_1}{d\sigma}\right|_{\varepsilon=0}&=-(1-y(\sigma,0))\varphi_2^0(\sigma,0)=0,\\ \left.\frac{d\varphi_2}{d\sigma}\right|_{\varepsilon=0}&=(x(\sigma,0)+\alpha)\varphi_2^0(\sigma,0)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

Из (28) следует:

$$\varphi_2(\sigma,0)=\varphi_2^0(\sigma)=0.\qquad(29)$$

Подставляя (27) в (26) и принимая во внимание, что $\frac{d\varphi_1^0(\sigma)}{d\sigma}=\frac{d\varphi_2^0(\sigma)}{d\sigma}=0$, с учетом (18), (29) и условия трансверсальности $\varphi_i(\sigma_T,\varepsilon)=0$ ($i=1,2$), получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma}&=(1-y^0(\sigma)-y_1(\sigma,\varepsilon))(\varepsilon\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)-\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)),\\ \frac{d\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma}&=-(x^0(\sigma)+\alpha)(\varepsilon\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)-\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)),\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}(\sigma_T,\varepsilon)&=-\varphi_1^0(\sigma_T),\\ \varphi_{22}(\sigma_T,0)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

Так как при $\sigma\to\infty$ (т.е. $\varepsilon\ll\tau$), исходя из (21), $y_1(\sigma,\varepsilon)\to 0$, а из (22) $y^0(\sigma)=\frac{1}{1+\alpha}$, то при $\sigma\to\infty$ (30) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma}&=\frac{\alpha\varepsilon}{1+\alpha}\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)-\frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon);\\ \frac{d\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma}&=-(1+\alpha)\varepsilon\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)+(1+\alpha)\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon).\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$

Вводя обозначения

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \equiv a, \qquad (1+\alpha) \equiv b, \tag{33}$$

для (31) получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma} &= a\varepsilon\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon) - a\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon), \\ \frac{d\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)}{d\sigma} &= -b\varepsilon\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon) + b\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Будем искать решения (34) в виде:

$$\varphi_{ii}(\sigma,\varepsilon) = A_i e^{\lambda_j \sigma} \quad (i,j=1,2), \tag{35}$$

где λ_j $(j=1,2)$ определяются из векового уравнения

$$\begin{vmatrix} a\varepsilon-\lambda & -a \\ -b\varepsilon & b-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Из (36) следует:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = a\varepsilon + b. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (34), получим:

$$\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon) = A_1, \quad \varphi_{22}(\sigma,\varepsilon) = A_2, \tag{38}$$

или

$$\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon) = A_1 e^{\lambda_2\sigma}, \quad \varphi_{22}(\sigma,\varepsilon) = A_2 e^{\lambda_2\sigma}. \tag{39}$$

Определим постоянные A_1 и A_2. Используя соотношение (10) для (25), при условии $\varepsilon=0$ и $\sigma=\sigma_T$, с учетом

$$x^\circ(\sigma_T)=1, \quad y^\circ(\sigma_T) = \frac{1}{1+\alpha}, \quad u(\sigma_T, \varepsilon=0) = u^\circ(\sigma_T)$$

– с одной стороны, и условия трансверсальности (31) с учетом

(38) - с другой стороны, соответственно получим:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\sigma,\varepsilon)&=\left[(x(\sigma,\varepsilon)+\alpha)y(\sigma,\varepsilon)-x(\sigma,\varepsilon)-u(\sigma,\varepsilon)\right]^{-1},\\ \varphi_1^{\circ}(\sigma_T)&=-\frac{1}{u^{\circ}(\sigma_T)},\end{aligned}\right\}\qquad(40)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}(\sigma_T,\varepsilon)&=\frac{1}{u^{\circ}(\sigma_T)},\\ \varphi_{22}(\sigma_T,\varepsilon)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

Следовательно, из (41) и (39) для постоянных A_1 и A_2 имеем:

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{u^{\circ}(\sigma_T)}e^{-\lambda_2\sigma_T},\\ A_2&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

подстановка которых в (39) для $\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)$ и $\varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)$ дает:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}(\sigma,\varepsilon)&=\frac{1}{u^{\circ}(\sigma_T)}e^{\lambda_2(\sigma-\sigma_T)},\\ \varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

Таким образом, из (27) при (40) и (43) следует:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\sigma,\varepsilon)&=-\frac{1}{u^{\circ}(\sigma)}+\frac{1}{u^{\circ}(\sigma)}e^{\lambda_2(\sigma-\sigma_T)},\\ \varphi_{22}(\sigma,\varepsilon)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

Так как из $u^{\circ}(\sigma)=\beta y^{\circ}(\sigma)$; $x^{\circ}(\sigma)=1$; $y^{\circ}(\sigma)=\frac{1}{1+\alpha}$ следует

$$u^{\circ}(\sigma)=u^{\circ}(\sigma_T)=\frac{\beta}{1+\alpha},\qquad(45)$$

то окончательно соотношения (44), определяющие значения для $\varphi_1(\sigma,\varepsilon)$ и $\varphi_2(\sigma,\varepsilon)$, могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\sigma,\varepsilon) &= -\frac{1+\alpha}{\beta}\left(1-e^{\lambda_2(\sigma-\sigma_T)}\right), \\ \varphi_{22}(\sigma,\varepsilon) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Приравнивая теперь первые соотношения (40) и (46) с учетом (22) и условия $u(\sigma=0,\varepsilon=0)=0$, для оптимального σ_T и $u(\sigma,\varepsilon)$ соответственно получим:

$$(\sigma_T)_{опт} = \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{1+\alpha}{1+\alpha-\beta},$$

но так как из (33) и (37)

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\varepsilon+(1+\alpha)^2}{1+\alpha},$$

то окончательно:

$$(\sigma_T)_{опт} = \frac{1+\alpha}{\alpha\varepsilon+(1+\alpha)^2}\ln\frac{1+\alpha}{1+\alpha-\beta},^{*)} \tag{47}$$

а

$$[u(\sigma,\varepsilon)]_{опт} = \frac{\beta}{1+\alpha}\left(1-e^{-(1+\alpha)\sigma_T}\right). \tag{48}$$

Таким образом, поставленная задача нами решена, т.е. решена задача быстродействия для реакции типа (I): найдены оптимальные значения управления и времени.

---

*) Из $\sigma=\frac{\tau}{\varepsilon}$ следует $T_{опт}=\varepsilon(\sigma_T)_{опт}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Определим из второго уравнения системы (I4) $y(\tau)$ и подставим в первое уравнение, получим:

$$\left.\begin{aligned} & y(\tau) \equiv y^{\circ}(\tau) = \frac{x(\tau)}{x(\tau)+\alpha} \equiv \frac{x^{\circ}(\tau)}{x^{\circ}(\tau)+\alpha}, \\ & \frac{dx(\tau)}{d\tau} = -x(\tau) + (x(\tau)+\alpha)\frac{x(\tau)}{x(\tau)+\alpha} - \\ & \qquad - u^{\circ}(\tau) = -u^{\circ}(\tau), \\ & u^{\circ}(\tau) = \beta y^{\circ}(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.I.I})$$

откуда следует:

$$dx(\tau) + \alpha\, d\ln x(\tau) = -\beta\, d\tau. \qquad (\text{П.I.2})$$

Интегрируя (П.I.2), с учетом $\tau_0 = 0$ и $x(0) = 1$, получим:

$$\left.\begin{aligned} & \int_1^{x(\tau)} dx(\tau) + \alpha \int_1^{x(\tau)} d\ln x(\tau) = -\beta \int_0^{\tau} d\tau, \\ & x(\tau) + \alpha \ln x(\tau) \equiv x^{\circ}(\tau) + \alpha \ln x^{\circ}(\tau) = 1 - \beta\tau \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.I.3})$$

или

$$x^{\circ}(\tau) + \alpha \ln x^{\circ}(\tau) = 1 - \frac{u^{\circ}(\tau)}{y^{\circ}(\tau)}\tau \;^{x)} \qquad (\text{П.I.4})$$

---

x) Через $x^{\circ}(\tau)$, $y^{\circ}(\tau)$ и $u^{\circ}(\tau)$ обозначены те решения, которые соответствуют системе (I4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Известно, что решение линейного дифференциального уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0$$

имеет вид

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x} Q(x) e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} dx + C\right]. \qquad (П.2.I)$$

Так как в нашем случае (см. второе уравнение системы (20))

$Q(x) = 0$, $P(x) = x^0(\sigma) + \alpha$, то из (П.2.I)

$$y_1(\sigma,\varepsilon) = Ce^{-\int_0^{\sigma}(x^0(\sigma)+\alpha)d\sigma} = Ce^{-(x^0(\sigma)+\alpha)\sigma}, \qquad (П.2.3)$$

откуда с учетом (I9), начального условия $y(0,\varepsilon) \equiv y_0 = 0$ и (П.2.3) следует:

$$y_1(0,\varepsilon) = -\frac{1}{1+\alpha},$$

т.е.

$$y_1(\sigma,\varepsilon) = -\frac{1}{1+\alpha} e^{-(x^0(\sigma)+\alpha)\sigma}.$$

Поступила 2I.XI.I989

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

1. Д.Марри. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М., "Мир", 1983.
2. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. – Математический сборник, 1952, 31, с.73, № 3.
3. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Б.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., "Наука", 1983.

ნ. ბოკუჩავა

ფერმენტაციული კინეტიკის ამოცანის ოპტიმიზაცია

რ ე ზ ი უ მ ე

ფერმენტაციული კინეტიკის ძირითადი მათემატიკური მოდელი დაყვანილია ოპტიმალურად მართვად მოდელზე. მიღებულია ამ მოდელის შესაბამისი ოპტიმალური პარამეტრებისათვის სათანადო გამოსახულებები.

N.Bokuchava

OPTIMIZATION OF THE PROBLEM OF FERMENTATIVE KINETICS

Summary

The basic mathematical model of fermentative kinetics is reduced to an optimally controllable model.

Relevant expressions are obtained for the optimal parameters corresponding to this model.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
298, 1990

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

М.И.Кезерашвили

Задача кручения однородного анизотропного тела со слабо изогнутой осью в линейной постановке дана в нашей работе /I/.

В настоящей работе дается алгоритм решения той же задачи в геометрически нелинейной постановке. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $\xi_1 O \eta_1 \zeta_1$ дано однородное анизотропное слабо изогнутое тело, ограниченное поверхностью

$$F\left(\xi_1+\frac{1}{2}k\zeta_1^2, \eta_1\right)=0$$

и плоскостями $\zeta_1=0$, $\zeta_2=l$, где k - малый параметр, квадратом и высшими степенями которого мы пренебрегаем.

Начало координат поместим в центре инерции нижнего закреплённого основания, а оси $O\xi_1$ и $O\eta_1$ направим по главным осям инерции указанного основания. Допустим, что боковая поверхность такого тела свободна от внешних усилий, а усилия, действующие на верхнем торце $\zeta_2=l$, статически эквивалентны крутящей паре с моментом M^*.

Обозначим поперечное сечение такого недеформированного тела через S, а границу области S через L.

Задача состоит в определении компонентов тензора напряжений и вектора смещений в области, занятой телом, удовлетворяющих всем известным условиям теории упругости в вышеуказанной постановке.

Произведем замену координат в виде:

$$\xi=\xi_1+\frac{1}{2}k\zeta_1^2, \quad \eta=\eta_1, \quad \zeta=\zeta_1, \tag{1}$$

тогда в пространстве $\zeta O\xi\eta$ рассматриваемое тело перейдет в призматическое, ограниченное поверхностью $F(\xi,\eta)=0$.

Пусть x, y, z – координаты точки тела после деформации, тогда

$$x=\xi+u, \quad y=\eta+v, \quad z=\zeta+w, \tag{2}$$

где u, v, w – компоненты вектора смещения.

Соотношения между производными по координатам ξ, η, ζ и x, y, z с точностью до k^2 примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(1-\frac{\partial u}{\partial\xi}-k\zeta\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\zeta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=-\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+k\zeta\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(1-\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\left[-\frac{\partial u}{\partial\zeta}+k\zeta\left(1-\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}-\left(\frac{\partial v}{\partial\zeta}+k\zeta\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}+$$

$$+\left(1-\frac{\partial v}{\partial\zeta}-k\zeta\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Связь между компонентами тензора деформации и компонентами вектора смещения в координатах конечного состояния имеет вид:

$$\ell_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{4}$$

$$\ell_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Решение задачи в смещениях будем искать в виде:

$$
\begin{aligned}
u &= -\tau\eta\zeta + \tau K u_1 + \tau^2 u_2 + \tau^2 K u_3, \\
v &= \tau\xi\zeta + \tau K v_1 + \tau^2 v_2 + \tau^2 K v_3, \\
w &= \tau\varphi(\xi,\eta) + \tau K w_1 + \tau^2 w_2 + \tau^2 K w_3,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где $\varphi(\xi,\eta)$ – функция кручения однородного анизотропного призматического тела, $\tau = M^* D^{-1}$ – малый параметр (D – жесткость при кручении), u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 – известные компоненты смещения, найденные в работах /1/ и /2/ соответственно, а u_3, v_3, w_3 – искомые компоненты смещения, вызванные учетом слабой изогнутости тела при его кручении, для определения которых будем производить выкладки, сохраняя члены, кроме τK, τ^2, а также $\tau^2 K$.

Компоненты деформации, соответствующие смещениям (5), определенные по формулам (4) с учетом (3), с вышеуказанной точностью, будут равны:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \tau K \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \tau^2\left[\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\zeta^2 + \eta\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2\right] + K\tau^2\frac{\partial u_3}{\partial \xi}, \\
\varepsilon_{yy} &= \tau K \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \tau^2\left[\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\zeta^2 - \xi\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right] + K\tau^2\left(\frac{\partial v_3}{\partial \eta} - \zeta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right), \\
\varepsilon_{zz} &= \tau K\left[\frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + \zeta\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right] + \tau^2\left[\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} + \eta\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\right] + \\
&\quad + K\tau^2\left[\frac{\partial w_3}{\partial \zeta} - \zeta^2\left(\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right], \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\tau K\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{2}\tau^2\left[\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\left(\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}K\tau^2\left[\frac{\partial u_3}{\partial \eta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} - \zeta^2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right],
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\eta\right)+\frac{1}{2}\tau\kappa\left(\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{2}\tau^2\left[\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_2}{\partial\xi}-\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\kappa\tau^2\left\{\frac{\partial u_3}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_3}{\partial\xi}+\zeta\left[\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\xi\right)+\frac{1}{2}\tau\kappa\left(\frac{\partial v_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_1}{\partial\eta}+\zeta^2\right)+\frac{1}{2}\tau^2\left[\frac{\partial v_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_2}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\kappa\tau^2\left[\frac{\partial v_3}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_3}{\partial\eta}-2\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{1}{2}\xi\right)\right].$$

Введем обозначения:

$$A_{11}=(G+H)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+G\xi,\qquad A_{22}=(F+B)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+R\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+F\xi,$$

$$A_{33}=(F+C)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+C\xi,\qquad A_{12}=(R+T)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+D\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+T\xi,$$

$$A_{13}=(M\eta-N\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-2M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2-2N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \tag{7}$$

$$A_{23}=(N\eta-L\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-2N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2-2L\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$

$$B_{11}=\left[(A+G)\eta-Q\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left[Q\eta-(H+G)\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$

$$\left.+H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+G(\xi^2+\eta^2)+2Q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right],$$

$$B_{22}=\left[(H+F)\eta-R\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left[R\eta-(B+F)\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$

$$\left.+B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+F(\xi^2+\eta^2)+2R\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right],$$

$$B_{33}=\left[(G+C)\eta-T\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left[T\eta-(F+C)\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\left[G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\right.$$

$$+F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+C(\xi^2+\eta^2)+2T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big],$$

$$B_{12}=\left[(Q+T)\eta-D\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left[D\eta-(R+T)\xi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\Big[Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+$$

$$+R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+T(\xi^2+\eta^2)+2D\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big],$$

$$B_{13}=N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-M\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},\qquad B_{23}=L\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$

$$C_{11}=\frac{1}{2}(A+H),\quad C_{22}=\frac{1}{2}(H+B),\quad C_{33}=\frac{1}{2}(G+F),\quad C_{12}=\frac{1}{2}(Q+R),$$

$$C_{13}=M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\eta\right)+N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\xi\right),\quad C_{23}=L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\xi\right)+N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\eta\right),$$

где A, B, ..., R, T - упругие постоянные.

Для компонентов напряжений, соответствующих деформациям (6), получим значения:

$$X_x=\tau\kappa\left(\tau_{11}^{(1)}+G\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\tau^2\left(\tau_{11}^{(2)}+C_{11}\zeta^2+B_{11}\right)-\kappa\tau^2\left(A_{11}\zeta^2-\tau_{11}^{(3)}\right),$$

$$Y_y=\tau\kappa\left(\tau_{22}^{(1)}+F\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\tau^2\left(\tau_{22}^{(2)}+C_{22}\zeta^2+B_{22}\right)-\kappa\tau^2\left(A_{22}\zeta^2-\tau_{22}^{(3)}\right),\quad(8)$$

$$Z_z=\tau\kappa\left(\tau_{33}^{(1)}+C\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\tau^2\left(\tau_{33}^{(2)}+C_{33}\zeta^2+B_{33}\right)-\kappa\tau^2\left(A_{33}\zeta^2-\tau_{33}^{(2)}\right),$$

$$X_y=\tau\kappa\left(\tau_{22}^{(1)}+T\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\tau^2\left(\tau_{12}^{(2)}+C_{12}\zeta^2+B_{12}\right)-\kappa\tau^2\left(A_{12}\zeta^2-\tau_{12}^{(3)}\right),$$

$$X_z=\tau C_{13}+\tau\kappa\left(\tau_{13}^{(1)}+N\zeta^2\right)+\tau^2\left(\tau_{13}^{(2)}+B_{13}\zeta^2\right)+\kappa\tau^2\left(A_{13}\zeta+\tau_{13}^{(3)}\right),$$

$$Y_z=\tau C_{23}+\tau\kappa\left(\tau_{23}^{(1)}+L\zeta^2\right)+\tau^2\left(\tau_{23}^{(2)}+B_{23}\zeta\right)+\kappa\tau^2\left(A_{23}\zeta+\tau_{23}^{(3)}\right),$$

где $\tau_{11}^{(3)}$, $\tau_{22}^{(3)}$, ..., $\tau_{23}^{(3)}$ – искомые дополнительные компоненты напряжения, соответствующие смещениям u_3, V_3, W_3, а $\tau_{11}^{(1)}$, $\tau_{22}^{(1)}$, ..., $\tau_{23}^{(1)}$ и $\tau_{11}^{(2)}$, $\tau_{22}^{(2)}$, ..., $\tau_{23}^{(2)}$ – компоненты напряжения, соответствующие смещениям u_1, V_1, W_1 и u_2, V_2, W_2, которые равны /1/, /2/:

$$\tau_{11}^{(1)}=f_{11}\zeta=\left(E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\eta^2}-U_1^*\right)\zeta, \qquad (9)$$

$$\tau_{22}^{(1)}=f_{22}\zeta=\left(E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}-V_1^*\right)\zeta,$$

$$\tau_{12}^{(1)}=f_{12}\zeta=-E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\partial\eta}\zeta,$$

$$\tau_{33}^{(1)}=f_{33}\zeta=\left[\sigma_1\left(E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\eta^2}-U_1^*\right)+\sigma_2\left(E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}-V_1^*\right)-E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\partial\eta}-Ed_0\right]\zeta,$$

$$\tau_{13}^{(1)}=-N\zeta^2+f_{13}=-N\zeta^2+\left(M\frac{\partial\omega^*}{\partial\xi}+N\frac{\partial\omega^*}{\partial\eta}-ML_1^*-NM_1^*+E\xi d_0\right),$$

$$\tau_{23}^{(1)}=-L\zeta^2+f_{23}=-L\zeta^2+\left[N\frac{\partial\omega^*}{\partial\xi}+L\frac{\partial\omega^*}{\partial\eta}-LM_1^*-NL_1^*+\left(\frac{EN}{M}+\sigma_3\frac{m^2}{M}\right)\xi d_0\right],$$

$$\tau_{11}^{(2)}=-C_{11}\zeta^2+\varphi_{11}=-C_{11}\zeta^2+\left[\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\eta^2}-U_1^{**}-M\left(C_0\varphi+\omega^{**}\right)-\frac{1}{2}\left(C_0N-M\right)\xi^2+N\xi\eta\right],$$

$$\tau_{22}^{(1)}=-C_{22}\zeta^2+\varphi_{22}=-C_{22}\zeta^2+\left[\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi^2}-V_1^{**}-L\left(C_0\varphi+\omega^{**}\right)+\frac{1}{2}\left(C_0N+L\right)\eta^2+N\xi\eta\right],$$

$$\tau_{12}^{(2)}=-C_{12}\zeta^2+\varphi_{12}=-C_{12}\zeta^2+\left[-\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi\partial\eta}-N\left(C_0\varphi+\omega^{**}\right)+\frac{1}{2}C_0\left(M\eta^2-L\xi^2\right)\right],$$

$$\tau_{33}^{(2)}=-C_{33}\zeta^2+\varphi_{33}=\sigma_1\left(\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\eta^2}-U_1^{**}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi^2}-V_1^{**}\right)-\sigma_3\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi\partial\eta}-$$

$$-\left(C_0\varphi+\omega^{**}\right)\left(M\sigma_1+L\sigma_2+N\sigma_3-E\right)+\frac{1}{2}C_0\left[\left(N\sigma_2+M\sigma_3\right)\eta^2-\left(N\sigma_1+L\sigma_3\right)\xi^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(M\sigma_1\xi^2+L\sigma_2\eta^2)+(\sigma_1+\sigma_2)N\xi\eta,$$

$$\tau_{13}^{(2)}=\varphi_{13}\zeta=\left[M\left(C_0\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial\omega^{**}}{\partial\xi}\right)+N\left(C_0\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial\omega^{**}}{\partial\eta}\right)+C_0(N\xi-M\eta)-(M\xi+N\eta)\right]\zeta,$$

$$\tau_{23}^{(2)}=\varphi_{23}\zeta=\left[N\left(C_0\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial\omega^{**}}{\partial\xi}\right)+L\left(C_0\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial\omega^{**}}{\partial\eta}\right)+C_0(L\xi-N\eta)-(L\eta+N\xi)\right]\zeta,$$

где функции Φ^*, Φ^{**}, ω^*, ω^{**} удовлетворяют известным граничным условиям, а L_1^*, M_1^*, U_1^*, V_1^*, U_1^{**}, V_1^{**}, C_0, d_0 имеют известные значения.

Подставляя (8) в уравнения равновесия, для определения искомых напряжений $\tau_{11}^{(3)}$, $\tau_{22}^{(3)}$, ..., $\tau_{23}^{(3)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{11}^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{12}^{(3)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{13}^{(3)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial U_2}{\partial\xi}\zeta^2+\frac{\partial U_0}{\partial\xi}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{12}^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}^{(3)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{23}^{(3)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_2}{\partial\eta}\zeta^2+\frac{\partial V_0}{\partial\eta}=0, \qquad (10)\\
&\frac{\partial\tau_{13}^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{23}^{(3)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{33}^{(3)}}{\partial\zeta}+C_1\zeta=0
\end{aligned}$$

в области S, где введены следующие обозначения:

$$\frac{\partial U_2}{\partial\xi}=-\frac{\partial f_{11}}{\partial\eta}+\frac{\partial f_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial B_{13}}{\partial\xi}+T\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-G\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial A_{11}}{\partial\xi}-\frac{\partial A_{12}}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial\xi}=A_{13}-\xi\frac{\partial f_{13}}{\partial\eta}+\eta\frac{\partial f_{13}}{\partial\xi}-f_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\left(A_{11}+G\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta} = -\frac{\partial f_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \xi} + \frac{\partial B_{23}}{\partial \xi} + F\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - T\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial A_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial A_{22}}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \eta} = A_{23} - \xi\frac{\partial f_{23}}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial f_{13}}{\partial \xi} - \left(f_{12} + T\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \left(f_{22} + F\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

$$c_1 = \frac{\partial f_{23}}{\partial \xi} - \frac{\partial f_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \xi} + \frac{\partial B_{33}}{\partial \xi} + \frac{\partial A_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial A_{23}}{\partial \eta} - 2A_{33} + \left(c\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_{33}}{\partial \xi}\right)\eta - \left(c\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial f_{33}}{\partial \eta}\right)\xi - \left(\frac{\partial c_{13}}{\partial \xi} + 2N\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial c_{23}}{\partial \xi} + 2L\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

Так как связь между направляющими косинусами нормали деформированной и недеформированной поверхностей с точностью до K, τ, τK имеет вид:

$$\cos\widehat{n,x} = \cos\widehat{n,\xi} - \tau\zeta\cos\widehat{n,\eta} + \tau K\zeta\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \eta\right)\cos^2\widehat{n,\xi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \xi\right)\cos\widehat{n,\xi}\cos\widehat{n,\eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right]\cos\widehat{n,\xi}, \qquad \text{(II)}$$

$$\cos\widehat{n,y} = \cos\widehat{n,\eta} + \tau\zeta\cos\widehat{n,\xi} + \tau K\zeta\left\{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \eta\right)\cos^2\widehat{n,\xi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \xi\right)\cos\widehat{n,\xi}\cos\widehat{n,\eta}\right]\cos\widehat{n,\eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cos\widehat{n,\xi}\right\},$$

$$\cos\widehat{n,z} = K\zeta\cos\widehat{n,\xi} + \tau\left(\eta\cos\widehat{n,\xi} - \xi\cos\widehat{n,\eta}\right) - \tau K\zeta^2\cos\widehat{n,\eta},$$

то граничные условия на основании (8) и (II) примут вид:

$$\tau_{11}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi} + \tau_{12}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta} = \left(P_2^{(1)}\zeta^2 + P_0^{(1)}\right)\cos\widehat{n,\xi} + \left(P_2^{(2)}\zeta^2 + P_0^{(2)}\right)\cos\widehat{n,\eta},$$

$$\qquad \text{(I2)}$$

$$\tau_{21}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi} + \tau_{22}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta} = \left(Q_2^{(1)}\zeta^2 + Q_0^{(1)}\right)\cos\widehat{n,\xi} + \left(Q_2^{(2)}\zeta^2 + Q_0^{(2)}\right)\cos\widehat{n,\eta},$$

$$\tau_{31}^{(3)}\cos n,\hat{\xi}+\tau_{32}^{(3)}\cos n,\hat{\eta}=\left[-(b+c_{33})\zeta^3+R_1^{(1)}\zeta\right]\cos n,\hat{\xi}+\left[N\zeta^3+R_1^{(2)}\zeta\right]\cos n,\hat{\eta}$$

на контуре L, где

$$P_2^{(1)}=A_{11}-f_{12}-\varphi_{13}-T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-B_{13}-N\eta, \qquad P_0^{(1)}=-\eta f_{13},$$

$$P_2^{(2)}=A_{12}+f_{11}+C_{13}+G\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+N\xi, \qquad P_0^{(2)}=\xi f_{13},$$

$$Q_2^{(1)}=A_{12}-f_{22}-\varphi_{23}-F\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-B_{23}-L\eta, \qquad Q_0^{(1)}=-\eta f_{23},$$

$$Q_2^{(2)}=A_{22}+f_{12}+C_{23}+T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+C_{23}+L\xi, \qquad Q_0^{(2)}=\xi f_{23},$$

$$R_1^{(1)}=-A_{13}-f_{23}-\varphi_{33}-B_{33}-\eta f_{33}+c_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+(c_{13}-c\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},$$

$$R_1^{(2)}=-A_{23}+f_{13}+\left(f_{33}+c\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\xi.$$

Кроме этого, компоненты деформации, соответствующие напряжениям $\tau_{ij}^{(3)}$ $(i,j=1,2,3)$, должны удовлетворять условиям совместимости Сен-Венана.

Решение поставленной задачи в напряжениях будем искать в следующем виде /3/:

$$\tau_{11}^{(3)}=-\frac{E\xi^2}{2}d_1-M\omega_1+\int^{\xi}(ML_2+NM_2)d\xi+\sum_{k=0}^{1}\left[E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\eta^2}-\right. \qquad (13)$$

$$-U_{2k}+M(P_{2k}f+q_{2k}\varphi+\tau_{2k}\varphi)-\left(\frac{E}{6}\xi^3-\frac{m^2}{L}\sigma_3\xi\eta^2\right)P_{2k}-$$

$$\left.-\frac{1}{2L}(NE+\sigma_3 m^2)\xi\eta^2 q_{2k}+\xi\left(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\right)\tau_{2k}\right]\zeta^{2k},$$

$$\begin{aligned}\tau_{22}^{(3)} = &-L\omega_1 - \frac{1}{M}(NE + m^2\sigma_3)\xi\eta d_1 + \int^{\eta}(LM_2 + NL_2)\,d\eta + \sum_{k=0}^{1}\Big[E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi^2} - \\ &- V_{2k} + L(P_{2k}f + q_{2k}\psi + r_{2k}\varphi) - \Big(\frac{E}{6}\eta^3 - \sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^2\eta\Big)q_{2k} - \\ &- \frac{1}{2M}(NE + \sigma_3 m^2)\xi^2\eta R_{2k} - \eta\Big(\frac{1}{2}N\eta - L\xi\Big)r_{2k}\Big]\zeta^{2k},\end{aligned}$$

$$\tau_{12}^{(3)} = -N\omega_1 + \sum_{k=0}^{1}\Big[N(P_{2k}f + q_{2k}\psi + r_{2k}\varphi) - E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi\partial\eta}\Big]\zeta^{2k},$$

$$\begin{aligned}\tau_{33}^{(3)} = &(E - \sigma_1 M - \sigma_2 L - \sigma_3 N)\omega_1 - \Big[\frac{E}{2}\Big(\sigma_2\eta^2 + 2\sigma_1\xi^2 - \frac{E - N\sigma_3}{M}\xi^2\Big) + \frac{\sigma_2}{M}(EN + \\ &+ \sigma_3 m^2)\xi\eta - \frac{1}{2}\xi\zeta\Big]d_1 + \sigma_1\int^{\xi}(ML_2 + NM_2)\,d\xi + \sigma_2\int^{\eta}(LM_2 + NL_2)\,d\eta + \\ &+ E\beta_{33}\Phi_2 + \sum_{k=0}^{1}\Big\{\sigma_1\Big(E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\eta^2} - U_{2k}\Big) + \sigma_2\Big(E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi^2} - V_{2k}\Big) - \\ &- E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi\partial\eta} + (\sigma_1 M + \sigma_2 L + \sigma_3 N - E)(P_{2k}f + q_{2k}\psi + r_{2k}\varphi) + \\ &+ \Big[\frac{E}{3}\Big(\frac{\sigma_2 N}{L}\eta^3 + \frac{E - 2M\sigma_1 - \sigma_3 N}{2M}\xi^3\Big) + \sigma_2\Big(\sigma_1\frac{m^2}{L} - \frac{E}{2}\Big)\xi\eta^2 - \\ &- \frac{\sigma_2}{2M}(EN + \sigma_3 m^2)\xi^2\eta\Big]P_{2k} + \Big[\sigma_1\Big(\sigma_2\frac{m^2}{M} - \frac{E}{2}\Big)\xi^2\eta - \frac{\sigma_1}{2L}(EN + \sigma_3 m^2)\xi\eta^2 + \\ &+ \frac{E}{3}\Big(\sigma_1\frac{N}{M}\xi^3 + \frac{E - 2L\sigma_2 - \sigma_3 N}{2L}\eta^3\Big)\Big]q_{2k} + \Big[\sigma_2\eta\Big(L\xi - \frac{1}{2}N\eta\Big) + \\ &+ \sigma_1\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi - M\eta\Big)\Big]r_{2k} - \frac{E}{(2k+1)(2k+2)}(P_{2k}\xi + q_{2k}\eta)\zeta^2\Big\}\zeta^{2k},\end{aligned}$$

$$\tau_{13}^{(3)}=-(L+C_{33})\zeta^3+\left(M\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}+N\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}+E\xi d_1-ML_2-NM_2\right)\zeta+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\frac{\zeta^{2k+1}}{2k+1}\Big[\Big(-\frac{E}{2}\xi^2-\sigma_2\frac{m^2}{L}\eta^2-M\frac{\partial f}{\partial\xi}-N\frac{\partial f}{\partial\eta}\Big)P_{2k}+\Big(\frac{NE}{2L}\eta^2+$$

$$+\frac{m^2}{2L}\sigma_3\eta^2-M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big)q_{2k}+\Big(M\eta-N\xi-M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big)\tau_{2k}\Big],$$

$$\tau_{23}^{(3)}=N\zeta^3+\Big[L\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}+N\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}+\Big(\frac{EN}{M}+\sigma_3\frac{m^2}{M}\Big)\xi d_1-LM_2-NL_2\Big]\zeta+$$

$$\sum_{k=0}^{1}\frac{\zeta^{2k+1}}{2k+1}\Big[\Big(\frac{NE}{2M}\xi^2+\sigma_3\frac{m^2}{2M}\xi^2-L\frac{\partial f}{\partial\eta}-N\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big)P_{2k}+\Big(\frac{E}{2}\eta^2-$$

$$-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^2-L\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)q_{2k}+\Big(N\eta-L\xi-L\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\tau_{2k}\Big],$$

где σ_1, σ_2, σ_3 - упругие постоянные, $m^2=ML-N^2$, $f(\xi,\eta)$ и $\varphi(\xi,\eta)$ - известные функции /4/. P_{2k}, q_{2k}, τ_{2k} $(k=0,1)$, d_1 - неизвестные постоянные, подлежащие определению, а функции L_2 и M_2 соответственно равны:

$$L_2=-\frac{2}{E}\int^{\xi}\Big\{\beta_{11}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}-U_2\Big)+\beta_{12}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}-V_2\Big)-\beta_{13}E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{E}{2}\beta_{33}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}+$$

$$+(M\beta_{11}+L\beta_{12}+N\beta_{13}+E\sigma_1)(P_2f+q_2\varphi+\tau_2\varphi)-\frac{E}{6}\eta^3\Big(\beta_{12}-\sigma_1\sigma_2+$$

$$+\sigma_1\frac{E-N\sigma_3}{L}\Big)q_2-\frac{E}{6}\Big(\beta_{11}-\sigma_1^2+\sigma_1\frac{E-N\sigma_3}{M}\Big)\xi^3P_2+\Big[\beta_{11}\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)+$$

$$+\beta_{12}\eta\Big(L\xi-\frac{1}{2}N\eta\Big)\Big]\tau_2-\frac{1}{2M}\beta_{12}(NE+\sigma_3m^2)\xi^2\eta P_2+\sigma_2\Big(\beta_{11}\frac{m^2}{L}+$$

$$+\frac{E}{2}\sigma_1\Big)\xi\eta^2P_2-\frac{1}{3}E\sigma_1^2\frac{N}{M}\xi^3q_2-\frac{1}{3}E\sigma_1\sigma_2\frac{N}{L}\eta^3P_2-\frac{1}{2L}\beta_{11}(NE+$$

$$+\sigma_3m^2)\xi\eta^2q_2+\sigma_1\Big(\beta_{12}\frac{m^2}{M}+\frac{E\sigma_1}{2}\Big)\xi^2\eta q_2\Big\}d\xi+h(\eta),$$

$$M_2=-\frac{2}{E}\int^{\eta}\Big\{\beta_{12}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}-U_2\Big)+\beta_{22}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}-V_2\Big)-\beta_{23}E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta}+$$

$$+\frac{E}{2}\beta_{33}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}+(M\beta_{12}+L\beta_{22}+N\beta_{23}+E\sigma_2)(p_2f+q_2\varphi+\tau_2\psi)-\frac{E}{6}\Big(\beta_{12}-$$

$$-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\frac{E-N\sigma_3}{M}\Big)\xi^3p_2-\frac{E}{6}\Big(\beta_{22}-\sigma_2^2+\sigma_2\frac{E-N\sigma_3}{L}\Big)\eta^3q_2+\sigma_2\Big(\beta_{12}\frac{m^2}{L}+$$

$$+\frac{\sigma_2E}{2}\Big)\xi\eta^2p_2-\frac{1}{2M}\beta_{22}(NE+\sigma_3m^2)\xi^2\eta p_2-\frac{1}{3}E\sigma_2^2\frac{N}{L}\eta^3p_2+\sigma_1\Big(\beta_{22}\frac{m^2}{L}+$$

$$+\frac{E\sigma_2}{2}\Big)\xi^2\eta q_2-\frac{1}{2L}\beta_{12}(NE+\sigma_3m^2)\xi\eta^2q_2-\frac{1}{3}E\sigma_1\sigma_2\frac{N}{M}\xi^3q_2+$$

$$+\Big[\beta_{12}\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)+\beta_{22}\eta\Big(L\xi-\frac{1}{2}N\eta\Big)\Big]\tau_2\Big\}d\eta+f(\xi),$$

где $\beta_{ik}=\sigma_{ik}-\sigma_i\sigma_k$ $(i,k=1,2,3)$, а функции $f(\xi)$ и $h(\eta)$ определяются из условия:

$$\frac{\partial M_2}{\partial\xi}+\frac{\partial L_2}{\partial\eta}=-\frac{2}{E}\Big\{\beta_{13}\Big(E\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-U_2\Big)+\beta_{23}\Big(E\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-V_2\Big)-(M\beta_{13}+L\beta_{23}+N\beta_{33}+E\sigma_3)(p_2f+$$

$$+q_2\varphi+\tau_2\psi)-\frac{E}{6}\Big(\beta_{13}-\sigma_1\sigma_3+\sigma_3\frac{E-N\sigma_3}{M}\Big)\xi^3p_2+\sigma_2\Big(\beta_{13}\frac{m^2}{L}+\frac{\sigma_3E}{2}\Big)\xi\eta^2p_2-$$

$$-\frac{1}{2}\beta_{23}\Big(\frac{NE}{M}+\sigma_3\frac{m^2}{M}\Big)\xi^2\eta p_2-\frac{E}{3}\sigma_2\sigma_3\frac{N}{L}\eta^3p_2-\frac{E}{6}\Big(\beta_{23}-\sigma_3\sigma_2+\sigma_3\frac{E-N\sigma_3}{L}\Big)\eta^3q_2+$$

$$+\sigma_1\Big(\beta_{23}\frac{m^2}{M}+\frac{E\sigma_3}{2}\Big)\xi^2\eta q_2-\frac{1}{2}\beta_{13}\Big(\frac{NE}{L}+\sigma_3\frac{m^2}{M}\Big)\xi\eta^2q_2-\frac{E}{3}\sigma_3\sigma_1\frac{N}{M}\xi^3q_2+$$

$$+\Big[\beta_{13}\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)-\beta_{23}\Big(\frac{1}{2}N\eta^2-L\xi\eta\Big)\Big]\tau_2\Big\}.$$

Напряжения (13) удовлетворяют уравнениям (10) и (12), а соответствующие компоненты деформаций – условиям совместимости, если функции $\Phi_{2k}(\xi,\eta)$ $(k=0,1)$ и $\omega_1(\xi,\eta)$ являются решениями следующих граничных задач:

$$1^\circ\text{-}2^\circ.\ E\Delta_1^{(2)}\varphi_{2k} = -(\beta_{11}M+\beta_{12}L+\beta_{13}N+E\sigma_1)\left(p_{2k}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+q_{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\tau_{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)-$$

$$-(\beta_{12}M+\beta_{22}L+\beta_{23}N+E\sigma_2)\left(p_{2k}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+q_{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\tau_{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)+(\beta_{13}M+\beta_{23}L+$$

$$+\beta_{33}N+\sigma_3E)\left(p_{2k}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+q_{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\tau_{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\beta_{11}U_{2k}+$$

$$+\beta_{12}V_{2k}-\beta_{13}U_{2k}-\beta_{23}V_{2k})+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\beta_{12}U_{2k}+\beta_{22}V_{2k})+\left[E\left(\beta_{12}+\sigma_2\frac{E-N\sigma_3}{M}\right)-\right.$$

$$\left.-2\sigma_2\left(E\sigma_1+\beta_{11}\frac{m^2}{L}\right)-\beta_{23}\left(\frac{NE}{M}+\sigma_3\frac{m^2}{M}\right)\right]\xi p_{2k}+\left[2\beta_{23}\sigma_1\frac{m^2}{M}+\sigma_1E\left(\sigma_3+2\sigma_2\frac{N}{M}\right)\right.$$

$$\left.+\beta_{11}\left(\frac{NE}{L}+\sigma_3\frac{m^2}{L}\right)\right]\xi q_{2k}+\left[E\left(\beta_{12}+\sigma_1\frac{E-N\sigma_3}{L}\right)-\frac{\beta_{13}}{L}(NE+\sigma_3m^2)-\right.$$

$$\left.-2\sigma_1\left(\beta_{22}\frac{m^2}{M}+E\sigma_2\right)\right]\eta q_{2k}+\left[2\sigma_2\beta_{13}\frac{m^2}{L}+\frac{\beta_{22}}{M}(NE+\sigma_3m^2)+\sigma_2E\left(\sigma_3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\sigma_1\frac{N}{L}\right)\right]\eta p_{2k}+(L\beta_{23}-M\beta_{13})\tau_{2k}+(k+1)\left\{(M\beta_{11}+L\beta_{12}+N\beta_{13}+\right.$$

$$+E\sigma_1)\frac{\partial^2\omega_{k+1}}{\partial\eta^2}+(L\beta_{22}+M\beta_{12}+N\beta_{23}+E\sigma_2)\frac{\partial^2\omega_{k+1}}{\partial\xi^2}-(M\beta_{13}+L\beta_{23}+N\beta_{33}+$$

$$+E\sigma_3)\frac{\partial^2\omega_{k+1}}{\partial\xi\partial\eta}-\left[\beta_{23}\left(\frac{EN}{M}+\frac{m^2\sigma_3}{M}\right)-E\beta_{12}+E\sigma_2\left(2\sigma_1-\frac{E-N\sigma_3}{M}\right)\right]d_{k+1}-$$

$$-\beta_{11}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\int^{\xi}(ML_{k+2}+NM_{k+2})d\xi-\beta_{22}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int^{\eta}(LM_{k+2}+ML_{k+2})d\eta+$$

$$+\beta_{13}\left(M\frac{\partial L_{k+2}}{\partial\eta}+N\frac{\partial M_{k+2}}{\partial\eta}\right)+\beta_{23}\left(L\frac{\partial M_{k+2}}{\partial\xi}+N\frac{\partial L_{k+2}}{\partial\xi}\right)-$$

$$-\beta_{12}\left(M\frac{\partial L_{k+2}}{\partial\xi}+N\frac{\partial M_{k+2}}{\partial\xi}+L\frac{\partial M_{k+2}}{\partial\eta}+N\frac{\partial L_{k+2}}{\partial\eta}\right)-\frac{k+2}{2}E\beta_{33}\left(\sigma_3\frac{\partial^2\Phi_{k+2}}{\partial\xi\partial\eta}-\right.$$

$$\left.\left.-\sigma_2\frac{\partial^2\Phi_{k+2}}{\partial\xi^2}-\sigma_1\frac{\partial^2\Phi_{k+2}}{\partial\eta^2}\right)\right\}$$

в области S ,

$$E\frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial\eta}=\int^{s}\left\{\left[P_{2k}^{(1)}+U_{2k}-M(p_{2k}f+q_{2k}\varphi+\tau_{2k}\varphi)+\left(\frac{E}{6}\xi^3-\frac{m^2}{L}\sigma_2\xi\eta^2\right)p_{2k}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2L}(NE+\sigma_3m^2)\xi\eta^2q_{2k}-\xi\left(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\right)\tau_{2k}+(k+1)\left(M\omega_{k+1}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}d_{k+1}\right)-(k+1)\int^{\xi}(ML_{k+2}+NM_{k+2})d\xi\right]\cos n,\xi+\left[P_{2k}^{(2)}-N(p_{2k}f+\right.$$

$$+q_{2k}\psi+r_{2k}\varphi)+(k+1)N\omega_{k+1}\Big]\cos n,\hat{\eta}\Big\}ds,$$

$$E\frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial\xi}=-\int^{s}\Big\{\Big[Q_{2k}^{(1)}+V_{2k}-L(P_{2k}f+q_{2k}\psi+r_{2k}\varphi)+\Big(\frac{E}{6}\eta^3-$$

$$-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^2\eta\Big)q_{2k}-\frac{1}{2M}(NE+\sigma_3 m^2)\xi^2\eta P_{2k}-\eta\Big(\frac{1}{2}N\eta-L\xi\Big)r_{2k}-$$

$$-(k+1)\Big(L\omega_{k+1}-\Big(\frac{EN}{M}+\frac{m^2\sigma_3}{M}\Big)\xi\eta d_{k+1}+\int^{\eta}(LM_{k+2}+$$

$$+NL_{k+2})d\eta\Big)\Big]\cos n,\hat{\eta}+\Big[Q_{2k}^{(2)}-N(P_{2k}f+q_{2k}\psi+r_{2k}\varphi)+$$

$$+(k+1)N\omega_{k+1}\Big]\cos n,\hat{\xi}$$

на контуре L , где принято что $\Phi_3=L_3=M_3=\omega_2=d_2=0$.

$$3^\circ.\ \Delta_1\omega_1=-C_1-2\Big\{\sigma_1\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}-U_2\Big)+\sigma_2\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}-V_2\Big)-E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta}+(\sigma_1 M+$$

$$+\sigma_2 L+\sigma_3 N-E)(P_2 f+q_2\psi+r_2\varphi)+\frac{E}{3}\Big(\frac{E-2L\sigma_2-N\sigma_3}{2L}\eta^3+\sigma_1\frac{N}{M}\xi^3\Big)q_2+$$

$$+\frac{E}{3}\Big(\frac{E-2M\sigma_1-N\sigma_3}{2M}\xi^3+\sigma_2\frac{N}{L}\eta^3\Big)P_2+\Big[\sigma_2\Big(\sigma_1\frac{m^2}{L}-\frac{E}{2}\Big)\xi\eta^2-\frac{\sigma_2}{2M}(EN+$$

$$+\sigma_3 m^2)\xi^2\eta\Big]P_2+\Big[\sigma_1\Big(\sigma_2\frac{m^2}{M}-\frac{E}{2}\Big)\xi-\frac{\sigma_1}{2L}(NE+\sigma_3 m^2)\eta\Big]q_2+\Big[\sigma_2\eta\Big(L\xi-\frac{1}{2}\,\text{[illegible]}\Big)+$$

$$+\sigma_1\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)\Big]r_2-M\frac{\partial L_2}{\partial\xi}-N\frac{\partial M_2}{\partial\xi}-L\frac{\partial M_2}{\partial\eta}-N\frac{\partial L_2}{\partial\eta}\Big\}$$

в области S .

$$\frac{d_1\omega_1}{dn}=\Big[R_1^{(1)}-d_1E\xi+ML_2+NM_2\Big]\cos n,\hat{\xi}+$$

$$+\Big[R_1^{(2)}-\frac{d_1}{M}(EN+\sigma_3 m^2)\xi+LM_2+NL_2\Big]\cos n,\hat{\eta}$$

на контуре L .

Значения постоянных P_{2k}, q_{2k} $(k=0,1)$ определяются из условий однозначности частных производных $\partial\Phi_{2k}/\partial\xi$ и $\partial\Phi_{2k}/\partial\eta$ $(k=0,1)$ при обходе контура $\mathcal{L}$ и соответственно равны:

$$P_2=\frac{1}{I_\eta}\iint\limits_S \frac{\partial c_{13}}{\partial\eta}\,d\xi d\eta, \qquad q_2=\frac{1}{I_\xi}\iint\limits_S \frac{\partial c_{23}}{\partial\eta}\,d\xi d\eta,$$

$$P_0=\frac{1}{I_\eta}\iint\limits_S\Big[\mathcal{A}_{13}-\Big(f_{11}+G\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\Big(f_{12}+T\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-M\mathcal{L}_2-NM_2+M\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}+ +N\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\Big]d\xi d\eta,$$

$$q_0=\frac{1}{I_\xi}\iint\limits_S\Big[\mathcal{A}_{23}-\Big(f_{12}+T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\Big(f_{22}+F\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\mathcal{L}M_2-N\mathcal{L}_2+N\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}+ +\mathcal{L}\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\Big]d\xi d\eta,$$

где I_ξ и I_η – моменты инерции основания относительно осей $O\xi$ и $O\eta$ соответственно.

Однозначность функций $\Phi_{2k}(\xi,\eta)$ $(k=0,1)$ будет выполняться, если

$$\begin{aligned}\tau_2=\frac{1}{D}\iint\limits_S\Big\{&\xi\frac{\partial c_{23}}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial c_{13}}{\partial\eta}-(F+G+M-\mathcal{L})\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-f_{11}-f_{22}-\varphi_{23}+\Big(M\eta\frac{\partial f}{\partial\xi}-\mathcal{L}\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}+\\&+N\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}-N\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big)P_2+\Big(M\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\mathcal{L}\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+N\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-N\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)q_2-\Big[-\frac{1}{2M}(NE+\\&+\sigma_3m^2)\xi^3+\Big(\frac{E}{2}\xi^2\eta-\frac{m^2}{\mathcal{L}}\sigma_2\eta^3\Big)\Big]P_2+\Big[\frac{E}{2}\eta^2\xi-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^3-\frac{1}{2\mathcal{L}}(NE+\\&+\sigma_3m^3)\eta^3\Big]q_2\Big\}d\xi d\eta,\end{aligned}$$

$$\tau_0=\frac{1}{D}\iint\limits_S\Big\{\xi\Big[\mathcal{A}_{23}-f_{13}-\Big(f_{12}+G\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\Big(f_{22}+F\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big]-\eta\Big[\mathcal{A}_{13}+f_{23}-$$

$$-\left(f_{11}+G\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\left(f_{12}+T\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Bigg]+\left(M\eta\frac{\partial f}{\partial\xi}-L\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}+N\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}-\right.$$

$$\left.-N\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)P_0+\left(M\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-L\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+N\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-N\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)q_0-\Big[-\frac{1}{2M}(NE+$$

$$+\sigma_3 m^2)\xi^3+\left(\frac{E}{2}\xi^2\eta-\frac{m^2}{L}\sigma_2\eta^3\right)\Big]P_0+\Big[\frac{E}{2}\eta^2\xi-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^3-\frac{1}{2L}(NE+$$

$$+\sigma_3 m^2)\eta^3\Big]q_0+L\xi\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}+N\xi\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}-M\eta\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}-N\eta\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}+\xi(LM_2+NL_2)+$$

$$+\eta(ML_2+NM_2)\Big\}d\xi d\eta.$$

Условие существования функции $\omega_1(\xi,\eta)$ для постоянной d_1 дает:

$$d_1=\frac{1}{ES}\iint\limits_S\left[C_{13}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+C_{23}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}-2A_{33}\right]d\xi d\eta.$$

Искомые смещения u_3, v_3, w_3, соответствующие напряжениям (13), определяем с помощью известного приема линейной теории упругости.

Для удовлетворения торцевых условий на торце $\zeta_2=\ell$ необходимо к полученным решениям добавить решения определенных задач Сен-Венана.

Поступила 15.XII.1989

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

1. М.И.Кезерашвили. Задача кручения однородного анизотропного стержня со слабо изогнутой осью. Тр.ТГУ, 1987, № 270(22), с.88-95.
2. Н.Г.Махвиладзе. Кручение однородных геометрически нели-

нейных анизотропных цилиндрических брусьев. Тр.ГПИ, 1973, № 6(162), с.33-37.

3. Р.Т.Зивзивадзе, Р.А.Берекашвили. Обобщение задачи Альманзи для составных анизотропных цилиндрических брусьев. Тр. ГПИ, 1984, № 9(279), с. 130-135.

4. А.К.Рухадзе, С.В.Бердзенишвили. О двух вспомогательных функциях для однородного анизотропного призматического бруса эллиптического сечения. Тр. ГПИ, 1984, № 9(279), с.127-129.

მ. კეზერაშვილი

დრეკადობის გეომეტრიულად არაწრფივი თეორიის ერთი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი

რ ე ზ ი უ მ ე.

შრომაში მოცემულია ერთგვაროვანი ოდნავ გაღუნული ანიზოტროპული სხეულის გრეხის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი დრეკადობის გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიაში. ამოცანა მოყვანილია ბრტყელი არის (სხეულის განივი კვეთი) მიმართ სამ სასაზღვრო ამოცანამდე. ნაჩვენებია მიღებული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობა.

M.Kezerashvili

THE ALGORITHM OF SOLUTION OF ONE BOUNDARY PROBLEM OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR THEORY OF ELASTICITY

Summary

The problem of torsion of an anisotropic homogeneous body with slightly bent axis in geometrically non-linear theory of elasticity is studied. The problem is reduced to three boundary value problems for plane section (cross-section of a body). The solvability of the obtained boundary-value problems is shown.

СОДЕРЖАНИЕ

შ ი ნ ა ა რ ს ი .

CONTENTS

Редактор издательства Л.Абуашвили

Подписано в печать 30.10.1990

Бумага 60 х 84

Усл.печ.л. 8   Уч.-изд.л. 3,91

Тираж 300   Заказ 213

Цена 30 коп.

Издательство Тбилисского университета,

380028, Тбилиси, пр. И.Чавчавадзе, 14.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,

თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Типография Тбилисского университета,

380028, Тбилиси, пр. И.Чавчавадзе, I.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,

თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.