



თბილისის უნივერსიტეტის ურობები
 ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
 PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

2907
 1995/2

320

ISSN 0376—2637

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია
 МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ
 MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

30

105

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

Издательство Тбилисского университета

Tbilisi University Press



თბილისის
უნივერსიტეტი

თბილისის უნივერსიტეტის განათება

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

30


მათემატიკა, მექანიკა, ასტრონომია

MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

თბილისი 1995 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

290
1995/2



საქართველოს
უნივერსიტეტი

№ 320

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1995



საზღვრეურობის კოლეგია

ა. ტატიშვილი, ი. გორგჯანიანი, ი. მამბახიძე, ე. იმერლიშვილი,
ბ. კარსიძე, ი. მაგნიარაძე, ე. ნადარაია, შ. საბაშვილი, გ. თე-
ბუჩავა (სეკრეტარი), ი. ჯარსიძე, ჯ. შარჭიანი (რედაქტორი).

Редакционная коллегия

А. Г. Тагшидзе, Д. Г. Гордзевани, И. Г. Замбахидзе, Б. В. Имер-
лишвили, И. Н. Карпишадзе, Г. А. Ломадзе, Л. Г. Магнарадзе,
Э. А. Надарая, Ш. А. Сабашвили, Г. Е. Тебучава (секретарь).
Д. В. Шарикадзе (редактор).

Editorial board

A. Gagnidze, D. Gordeziani, E. Imerlishvili, I. Kartsvadze, G. Lomadze,
L. Magnaradze, E. Nadarain, Sh. Sabashvili, J. Sharikadze (editor),
G. Tebuchava (secretary), L. Zambakidze

საბჭოთავო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1995

© Издательство Тбилисского университета, 1995

Tbilisi University Press, 1995



საქართველოს სსრ, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
 ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
 им. И. Джанашивили

320.1995

20702

УДК 513.73

О ГЕОМЕТРИИ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ГИПЕРКВАДРИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Э.Д. Ашисба

В работе строятся разные пучки соприкасающихся гиперквадрик, внутренне связанных с распределением гиперплоскостных элементов и обладающих разными геометрическими характеристиками. Эти пучки существенно связаны с различными нормальными распределениями.

Гиперквадрики пучка устанавливают полнью соответствие между нормальными первого рода и нормальными второго рода, не совпадающее с соответствием Бомбияни-Лантази.

С голономным распределением ассоциируются также разные пучки соприкасающихся гиперквадрик. Для них выделяется конусы таких направлений, вдоль которых гиперквадрики имеют касания третьего порядка с голономным распределением.

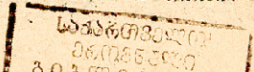
В $(n+1)$ - мерном аффинном пространстве рассмотрим приращенное к распределению гиперплоскостных элементов

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha} \omega^\alpha, \quad (\alpha, \beta, \dots = \overline{1, n+1}, \quad i, j, \dots = \overline{1, n}),$$

где

$$L_{ij} \neq L_{ji}.$$

поле гиперквадрик, каждая из которых определена относительно



локального репера уравнением

$$H_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2A_\alpha x^\alpha + A = 0, \quad (1)$$

где

$$H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha}.$$

Найдем дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты $H_{\alpha\beta}$, A_α , A гиперквадрики (при $\omega^\alpha = 0$), инвариантно связанной с распределением.

Если репер преобразовать при помощи вторичных параметров, то относительно нового репера уравнение нового репера гиперквадрики (I) будет иметь такой вид:

$$(H_{\alpha\beta} + \delta H_{\alpha\beta})(x^\alpha - x^\gamma \tilde{\omega}_\gamma^\alpha)(x^\beta - x^\gamma \tilde{\omega}_\gamma^\beta) + 2(A_\alpha + \delta A_\alpha)(x^\alpha - x^\gamma \tilde{\omega}_\gamma^\alpha) + A + \delta A = 0$$

где δ — символ дифференцирования при условии $\omega^\alpha = 0$, а

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta \Big|_{\omega^\alpha = 0}.$$

Условие инвариантности гиперквадрики приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \delta H_{\alpha\beta} - H_{\alpha\gamma} \tilde{\omega}_\beta^\gamma - H_{\gamma\beta} \tilde{\omega}_\alpha^\gamma &= \theta H_{\alpha\beta}, \\ \delta A_\alpha - A_\gamma \tilde{\omega}_\alpha^\gamma &= \theta A_\alpha, \\ \delta A &= \theta A. \end{aligned} \quad (2)$$

Требование, чтобы гиперквадрика (I) проходила через центр элемента и имела касание первого порядка с любой кривой, принадлежащей распределению, приводит к следующим условиям:

$$A = 0, \quad A_i = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим точку M , лежащую на произвольной кривой, принадлежащей распределению. Требование, чтобы квадрика имела соприкосновение второго порядка с любой кривой, принадлежащей



распределению, дает

$$A_{ij} = -A_{n+1} a_{ij}, \quad (4)$$

где a_{ij} - асимптотический тензор распределения. Из дифференциальных уравнений (2) для A_{n+1}

$$\delta A_{n+1} - A_{n+1} \omega_{n+1}^{n+1} = \theta A_{n+1} \quad (5)$$

видно, что A_{n+1} - относительный инвариант. Если проинормировать коэффициенты так, чтобы

$$A_{n+1} = -1, \quad (6)$$

то получим

$$\theta = -\tilde{\omega}_{n+1}^{n+1}. \quad (7)$$

При такой нормировке условия (4) примут вид

$$A_{ij} = a_{ij}.$$

Для такого охвата коэффициентов A_{ij} , дифференциальные уравнения инвариантности (2) удовлетворяются.

Следовательно, уравнение осприкасающей гиперквадрики имеет вид

$$a_{ij} x^i x^j - 2A_{in+1} x^i x^{n+1} - 2A_{n+1n+1} x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (9)$$

Для коэффициентов A_{in+1} и A_{n+1n+1} гиперквадрики (9) система дифференциальных уравнений (2), с учетом (7), записывается так:

$$\delta A_{in+1} - A_{kn+1} \tilde{\omega}_i^k - a_{ik} \tilde{\omega}_{n+1}^k = 0, \quad (10)$$

$$\delta A_{n+1n+1} - A_{n+1n+1} \tilde{\omega}_{n+1}^{n+1} - 2A_{in+1} \tilde{\omega}_{n+1}^i = 0. \quad (11)$$



Пусть \bar{y} - любая нормаль, внутренне связанная с распределением гиперплоскостных элементов:

$$\bar{y} = y^i \bar{e}_i + \bar{e}_{n+1}$$

где

$$dy^i + y^i \omega_i^i - y^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = y^i \omega^\alpha \quad (12)$$

Рассмотрим объект

$$y_i = y^k a_{ki} \quad (13)$$

Преддифференцировав (13), получим

$$dy_i - y_k \omega_i^k + a_{ki} \omega_{n+1}^k = y_i \omega^\alpha \quad (14)$$

Счетка $\bar{y} = a_{ki} y^i y^k$ удовлетворяет уравнению

$$d\bar{y} - \bar{y} \omega_{n+1}^{n+1} + 2y_i \omega_{n+1}^i = \bar{y} \omega^\alpha \quad (15)$$

Если положить

$$H_{i,n+1} = -y_i, \quad H_{n+1, n+1} = \bar{y} + \alpha H, \quad (16)$$

где

$$H = -\frac{1}{n} H_i^i = -\frac{1}{n} (y_i^i - y^i y^k a_{ki}), \quad (17)$$

и α - любой абсолютный инвариант, то дифференциальные уравнения (10), (11) удовлетворяются.

Таким образом, получаем однопараметрический пучок инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, присоединенных к распределению:

$$a_{ij} x^i x^j - 2y_i x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + (y_i \alpha H) x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим детерминант $(n+2)$ порядка, составленный из коэффициентов гиперквадрики



$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & -\nu_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & -\nu_n & 0 \\ -\nu_1 & \dots & -\nu_n & \nu \text{radf} & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = -a_0$$

Если

$$a_0 = \det(a_{ij}) \neq 0, \tag{19}$$

то все гиперквадрики пучка (18) нераспадающиеся.

Центры этих квадрики определяются системой

$$\begin{aligned} a_{ij} x^i - \nu_j x^{n+1} &= 0, \\ \nu_i x^i - (\tilde{\nu} + \alpha H) x^{n+1} &= -1. \end{aligned} \tag{20}$$

Если $\alpha \neq 0$, то разрешая, получим

$$x^i = \nu_i x^{n+1}, \quad x^{n+1} = \frac{1}{\alpha H}. \tag{21}$$

Центры всех соприкасающихся гиперквадрики пучка (18) лежат на аффинной нормали ν .

Полярная произвольной точки (x_0^i, x_0^{n+1}) относительно гиперквадрики (18) определяется уравнением:

$$(a_{ij} x_0^i - \nu_j x_0^{n+1}) x^j + ((\tilde{\nu} + \alpha H) x_0^{n+1} - \nu_n x_0^i - 1) x^{n+1} - x_0^{n+1} = 0. \tag{22}$$

Эта гиперплоскость пересекает гиперплоскостной элемент по $(n-1)$ -мерной плоскости

$$(a_{ij} x_0^i - \nu_j x_0^{n+1}) x^j - x_0^{n+1} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{23}$$

Полярная некоторой нормали ν^i (отличной от μ), служит также присоединенной к распределенной

$$x^i = \nu^i x^{n+1} \tag{24}$$

относительно этого пучка, является $(n-1)$ -мерная плоскость

$$(a_{ij} \nu^i - \nu_j) x^j - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0.$$



или

$$\tau_i x^{i-1} = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

где

$$\tau_i = a_{i,j} \nu^j - \nu_i, \quad \forall \tau_i = \tau_i \alpha \omega^\alpha. \quad (25)$$

Из (25) видно, что полярна не зависит от выбора гиперквадрики из пучка (18).

Гиперквадрики пучка (18) устанавливает полярность между нормальными (первого рода) и $(n-1)$ -мерными плоскостями, принадлежащими гиперплоскостному элементу и не проходящими через центр элемента (нормальными второго рода) нашего распределения. В частности, нормаль ν , которая была использована при построении охватов коэффициентов гиперквадрик пучка (18), в этом поляритете соответствует бесконечно удаленная $(n-1)$ -мерная плоскость.

а) Рассмотрим гиперквадрику пучка (18), для которой $\alpha = 0$,

т.е.

$$a_{i,j} x^i x^j - 2\beta_i x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + \tilde{\beta} x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (27)$$

Центр этой квадрики - бесконечно удаленная точка нормали ν . Эта гиперквадрика будет n -мерным параболоидом.

Уравнение

$$a_{i,j} x^i x^j - 2\beta_i x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + \tilde{\beta} x^{n+1} x^{n+1} = 0,$$

где

$$L^k = L^{ki} L_i, \quad L_i = L^{ki} a_{ki}, \quad \tilde{L} = a_{ki} L^i L^k$$

определяет параболоид, диаметром которого является нормаль $\alpha(L^i)$. Параболоид, диаметром которого служит нормаль $\beta(\beta^i)$, будет определяться уравнением:

$$a_{i,j} x^i x^j + 2 \frac{\beta_i}{n+2} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + \tilde{\beta} x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (29)$$

Параболоид (29) пересекет нормаль $\alpha(L^i)$ в точке

$$x^i = \frac{2L^i}{\tau_0}, \quad x^{n+1} = \frac{2}{\tau_0}, \quad (30)$$



где

$$T_0 = a_{ij}(\beta^i - L^j)(\beta^i - L^i), \quad (31)$$

а параболоид (28) пересекает нормаль β в точке

$$x^i = \frac{2\beta^i}{T_0}, \quad x^{n+1} = \frac{2}{T_0}. \quad (32)$$

Прямая, проходящая через эти точки,

$$x^i = \frac{2L^i}{T_0} + \lambda \frac{2}{T_0} (\beta^i - L^i), \quad x^{n+1} = \frac{2}{T_0}. \quad (33)$$

параллельна гиперплоскостному элементу.

б) Выделим из пучка (18) гиперквадрику, соответствующую $\alpha = 1$:

$$a_{ij}x^i x^j - 2y_i x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + (\tilde{y} + H)x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (34)$$

Центр такой квадрики будет лежать на нормали γ в точке

$$x^i = \frac{\gamma^i}{H}, \quad x^{n+1} = \frac{1}{H}. \quad (35)$$

Возьмем в качестве нормали нормаль β ($\beta^i = -\frac{1}{n+2} a^{ik} \beta_k$). При таком выборе γ уравнение (34) принимает вид:

$$a_{ij}x^i x^j + 2 \frac{\beta_i}{n+2} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + (\beta + H)x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (36)$$

где

$$H = -\frac{1}{n} (\beta_i^i - \beta^i \beta^s L_{si}). \quad (37)$$

Полярной проективной нормали $\gamma^i = \beta^i + k^i$ ($k^i = a^{ik} k_k$, $\Delta k_k = h_{ka} \omega^a$), аналог нормали Фубини для распределения, относительно этой гиперквадрики является $(n-1)$ -мерная плоскость

$$[a_{ij}(\beta^i + k^i) + \frac{\beta_j}{n+2}] x^j - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad (38)$$

$$h_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0.$$

Полярной нормали $w^i = \beta^i + k^i$ ($k^i = a^{ik} k_k$, $\Delta k_k = h_{ka} \omega^a$), аналог дуги конформности Вильчмесского, является $(n-1)$ -мерная плоскость



$$K_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0.$$

Пучку нормалей

$$N^i(A) = J^i + A \hat{J}^i, \quad (40)$$

где

$$J^i = w^i - y^i,$$

относительно данной гиперквадрики, соответствует пучок $(n-1)$ -мерных плоскостей

$$N_i(A) x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad (41)$$

где

$$N_i(A) = h_i + A \hat{h}_i, \quad \text{а} \quad \hat{h}_i = k_i - h_i.$$

Нормаль J пересекает гиперквадрику в инвариантной точке

$$x^i = \frac{2J^i}{H+K}, \quad x^{n+1} = \frac{2}{H+K}, \quad (42)$$

где

$$K = a^{ij} h_i h_j$$

Нормаль w пересекает ту же гиперквадрику в точке

$$x^i = \frac{2w^i}{H+K}, \quad x^{n+1} = \frac{2}{H+K}, \quad (43)$$

где

$$K = a^{ij} k_i k_j$$

Пучок проективных нормалей $N^i(A)$ с гиперквадрикой

(36) пересекается по кривой

$$x^i = \frac{2N^i(A)}{H+B(A)}, \quad x^{n+1} = \frac{2}{H+B(A)} \quad (44)$$

В ней лежат точки (42), (43) и инвариантные точки остальных нормалей пучка (40), определенные объектом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(H+B), \quad (45)$$

где

$$B(A) = a^{ij} N_i(A) N_j(A). \quad (46)$$



Двумерная плоскость, проходящая через β и \mathcal{F}

$$x^i = \lambda k^i + \beta^i x^{n+1}, \quad (47)$$

пересекает $(n-1)$ -мерную плоскость (38) в инвариантной точке

$$x^i = \frac{k^i}{k}, \quad x^{n+1} = 0. \quad (48)$$

Пересечение двумерной плоскости, проходящей через β и W

$$x^i = \lambda \kappa^i + \beta^i x^{n+1}, \quad (49)$$

с $(n-1)$ -мерной плоскостью (39) дает инвариантную точку

$$x^i = \frac{\kappa^i}{\kappa}, \quad x^{n+1} = 0. \quad (50)$$

Рассматривая каждый раз пересечение двумерной плоскости, проходящей через аффинную нормаль β , и одной из нормалей канонического пучка с соответствующей нормалью второго рода, мы найдем инвариантные точки всего пучка (41). Они будут лежать на кривой

$$x^i = \frac{\alpha^{ij} \eta_j(\lambda)}{\epsilon(\lambda)}, \quad x^{n+1} = 0, \quad (51)$$

которая является проекцией кривой (44) из центра гипергвандрики (36) на гиперплоскостной элемент.

2. Пусть распределение гиперплоскостных элементов

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha} \omega^\alpha$$

голомомное, т.е.

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} - L_{ji}) = 0.$$

При наличии такого распределения уравнение

$$\omega^{n+1} = 0$$

вполне интегрируемо и определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей. Гиперповерхности этого семейства огибают элементы распределения.



Все построения, приведенные для неголономного распределения, сохраняются и для этого случая. С голономным распределением ассоциируются также разные пучки соприкасающихся гиперквадрик, аналогичные построенным нами для неголономного распределения. Рассматриваются семейство соприкасающихся гиперквадрик, центры которых лежат на нормали $\alpha (L^i)$

$$L_{ij} x^i x^j + 2A_{i, n+1} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + A_{n+1, n+1} x^{n+1} x^{n+1} = 0, \quad (52)$$

и семейство соприкасающихся гиперквадрик

$$L_{ij} x^i x^j + 2 \frac{\beta_i}{n+2} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + A_{n+1, n+1} x^{n+1} x^{n+1} = 0, \quad (59)$$

центры которых лежат на обобщенной нормали Бляшке.

Рассмотрим вопрос касания третьего порядка гиперквадрики с распределением.

Требование, чтобы соприкасающаяся гиперквадрика

$$L_{ij} x^i x^j + 2A_{i, n+1} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + A_{n+1, n+1} x^{n+1} x^{n+1} = 0 \quad (54)$$

с распределением имела касание третьего порядка, т.е. чтобы гиперквадрике с точностью до величин третьего порядка малости принадлежали точки, лежащие на кривых, принадлежащих распределению, приводит к условиям:

$$(L_{ijk} - L_{kij} A_{k, n+1} - L_{kji} A_{j, n+1} - L_{jki} A_{i, n+1}) \omega^i \omega^j \omega^k = 0. \quad (55)$$

Разные пучки гиперквадрик будут иметь с разными кривыми касание третьего порядка.

Для неголономных распределений не существует гиперквадрик, имеющих с распределением касание третьего порядка. Однако в случае голономного распределения уравнение (55) определяет конус третьего порядка таких направлений, вдоль которых огибаемость гиперквадрик (54) имеет касание третьего порядка с голономным распределением.



Если коэффициенты $A_{i, n+1}$ охвачены фундаментальными объектами, то этот конус внутренне определен (неопределением).

Рассмотрим два конкретных охвата.

а) Пусть

$$A_{i, n+1} = L_{i, n+1}. \quad (56)$$

Если, кроме того, охватить и коэффициент $A_{n+1, n+1}$ по формуле

$$A_{n+1, n+1} = \tilde{L} = L_{ij} L^i L^j, \quad (57)$$

то мы получим соприкасающийся параболоид

$$L_{ij} x^i x^j + 2L_{i, n+1} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + \tilde{L} x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (58)$$

Уравнение, определяющее конус направлений, вдоль которых параболоид (58) имеет с распределением касание третьего порядка, принимает вид

$$\hat{M}_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k = 0, \quad (59)$$

где

Тензор \hat{M}_{ijk} можно считать некоторым аналогом тензора Дарбу.

б) Пусть

$$A_{i, n+1} = \frac{\beta_i}{n+2}, \quad (60)$$

и, кроме того,

$$A_{n+1, n+1} = \tilde{\beta} = L_{ij} \beta^i \beta^j. \quad (61)$$

Тогда получим соприкасающийся параболоид

$$L_{ij} x^i x^j + 2 \frac{\beta_i}{n+2} x^i x^{n+1} - 2x^{n+1} + \tilde{\beta} x^{n+1} x^{n+1} = 0. \quad (62)$$

Уравнение, определяющее конус направлений, вдоль которых этот параболоид имеет с распределением касание третьего порядка, принимает вид



$$N_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k = 0,$$

где

$$N_{ijk} = (n+2)L_{ijk} - L_{ij}\beta_k - L_{ki}\beta_j - L_{jk}\beta_i$$

является обобщением тензора Дарбу для гомогенного распределения.

Замечание: все гиперквадрики из совокупности (52) имеют с распределением касание третьего порядка вдоль конуса (59).

Гиперквадрики из семейства (53) также будут иметь с распределением касание третьего порядка вдоль конуса (63).

Поступила 15.XII.1992

Кафедра алгебры и геометрии

Литература

1. Э.Д.Алишбоя, Тр.Геометр. семинара. Ин.-т науч. информ.АН СССР, 1974, 5, 169-194.
2. Г.Ф.Лантес, Докл. АН СССР, 1958, 121, 11, 41-44.
3. T.Michăilescu, Geometrie diferencială proiectivă, Bucuresti, Acad. RPR, 1958, 494.

ს. აღმიძნაძე

საბჭოთავიანი მეცნიერებათა აკადემიის

მეცნიერებათა

მეცნიერებათა

(n+1) - განზომილებიანი სფეროზე სპონტანური ანტიკომპლექსური ვექტორული ვრცელდება მათი გეომეტრიის შესახებ. აღნიშნული ნაშრომის მიზანშეწონილია დასავლეთის მეცნიერებათა აკადემიის მიერ გამოცემულ "საბჭოთავიანი მეცნიერებათა აკადემიის მიერ გამოცემული ნაშრომების კრებულში".

E. Alehbaia

ON THE GEOMETRY OF OSCULATING HYPERQUADRICS
OF DISTRIBUTION

Summary

Various sheafs of osculating hyperquadrics, intrinsically connected with the distribution of hyperplane elements and characterised by different geometric features, are constructed in $(n+1)$ - dimensional affine space.

20702

ԵՐԵՎԱՆԻ
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавახишвили

320, 1995

УДК 359.3

ВЛИЯНИЕ ВЫДАВОК НА ДЕФОРМАЦИЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ

И. А. Зоненашвили

С целью увеличения жёсткости, прочности и долговечности тонкостенных конструкций, состоящих из пластин и оболочек, рассматриваются составные пластины и оболочки со смещёнными средними поверхностями, сопрягаемые посредством ребра переменной жёсткости. Наиболее распространёнными видами таких конструкций являются пластины и оболочки с малыми выдавками переменной глубины. Представляет интерес исследование влияния формы и глубины выдавок на напряжённо-деформированное состояние соответствующих тонкостенных элементов.

В работе /1/ выведены общие условия сопряжения оболочек со смещёнными средними поверхностями посредством ребра жёсткости. Эти условия позволяют изучить некоторые практически важные задачи об исследовании влияния геометрических параметров выдавок на напряжённо-деформированное состояние таких структур.

В качестве примера рассматривается изгиб прямоугольной в плане полкой цилиндрической оболочки постоянной толщины h с дуговым вырезом глубиной $2H$, параллельным образующей и отстоящим от оси симметрии в плане на расстоянии $a/2$. Пусть прямоугольный план оболочки имеет размеры a и b .



В качестве расчетной схемы такой конструкции принимаются три цилиндрические прямоугольные в плане оболочки O_1, O_2, O_3 со смещенными срединными поверхностями, сопряженные посредством ребер выдавок. Допустим, что нагрузка осесимметрична относительно продольной плоскости симметрии конструкции. Ввиду симметрии задачи, достаточно рассмотреть упругое равновесие оболочек O_1 и O_2 .

Предположим, что края оболочек $y=0$ и $y=b$ свободно оперты на вертикальные диафрагмы. Будем считать, что жесткость каждой из таких диафрагм очень велика в ее плоскости, т.е. при $y=0$ и $y=b$ имеют место условия

$$W_j = M_{j,2} = u_j = T_{j,2} = 0 \quad (j=1,2). \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда продольные кромки оболочек O_1 и O_3 жестко закреплены. В этом случае при $x = \pm \frac{c}{2}$ будем иметь следующие граничные условия:

$$u_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{u_1}{r_1} = 0, \quad v_1 = 0. \quad (2)$$

В нашем случае условия сопряжения оболочек имеют вид /2/:

$$u_1 - u_2 = -H\theta_{11}, \quad v_1 - v_2 = 0; \quad w_1 - w_2 = -2H \frac{\partial w_1}{\partial s}, \quad \theta_{11} = \theta_{22}, \quad (3)$$

$$P_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[B \frac{\partial^2}{\partial s^2} (u_1 + u_2) \right], \quad P_y = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(F \frac{\partial^2 w_k}{\partial s^2} \right),$$

$$P_z = -\frac{\partial}{\partial s} \left(EF \frac{\partial^2 w_k}{\partial s^2} \right), \quad m_z = \frac{\partial}{\partial s} \left(C \frac{\partial \theta_{rk}}{\partial s} \right).$$

Полная система дифференциальных уравнений равновесия данной оболочки в смещенных имеет вид /3/:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} - r_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} - \nu \gamma_j \frac{\partial w_j}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta^2 w_j - \frac{B}{D} \gamma_j^2 w_j + \frac{B}{D} \gamma_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) = \frac{P_z}{D},$$

где u_j, v_j, w_j - компоненты вектора смещения, $\theta_{\tau k} = \frac{\partial w_k}{\partial \tau_k}$,

P_x, P_y, P_z и m_z - соответственно усилия и момент, действующие на оболочку со стороны ребра вдоль его оси, EF - жёсткость ребра на растяжение, A и B - жёсткости ребра на изгиб

относительно осей OX и OY . C - жёсткость при кручении,

ν - коэффициент Пуассона, D - цилиндрическая жёсткость, P_z

- нормальная поверхностная нагрузка, γ_j - радиус кривизны оболочки ($j=1,2$), $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$,

M_{j2} - изгибающий момент, T_{j2} - обобщенная сдвигающая сила.

Вводятся в рассмотрение функции $\varphi_j(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$\Delta^4 \varphi_j + \frac{Eh\gamma_j}{D} \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial y^4} = \frac{P_z}{D}. \quad (7)$$

Проекция векторов смещения, усилия и моменты определяются через функции $\varphi_j(x, y)$ равенствами [3]:

$$u_j = \gamma_j \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial x^3} - \gamma_j(2-\nu) \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial x \partial y^2}, \quad (8)$$

$$v_j = \nu \gamma_j \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial y^3} - \gamma_j \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial x^2 \partial y}, \quad w_j = \Delta^2 \varphi_j$$

$$N_j = -Eh\gamma_j \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial y^4}, \quad T_j = Eh\gamma_j \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial x \partial y^3},$$

$$Q_{\tau j} = -D \Delta^3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x},$$

$$M_{\tau j} = -D \Delta^3 \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right)$$



Таким образом, задача отыскания проекции векторов смещений, усилий и моментов сводится к нахождению функций $\varphi_j(x, y)$, определяемых уравнением (7).

В предположении, что поверхностная нагрузка на оболочку разлагается в ряд Фурье

$$P_z = \sum_1^{\infty} P_k \sin \frac{k \pi y}{a}, \quad (9)$$

общее решение уравнения (7) представляется в следующем виде [3]:

$$\varphi_j(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^8 H_{j,i}^{(k)} m_{k,i,j} + \frac{1}{D} \frac{P_k}{\left(\frac{k\pi}{b}\right)^4 \left[\left(\frac{k\pi}{b}\right)^4 + \frac{12(1-\nu^2)E_0^2}{h^2} \right]} \right] \sin \frac{k\pi}{b} y, \quad (10)$$

где $H_{j,i}^{(k)}$ - действительные константы, подлежащие определению,

$$\begin{aligned} m_{k,1,j} &= \cos d_{k,j} x \cdot \operatorname{ch} c_{k,j} x, & m_{k,2,j} &= \cos d_{k,j} x \cdot \operatorname{sh} c_{k,j} x, \\ m_{k,3,j} &= \sin d_{k,j} x \cdot \operatorname{ch} c_{k,j} x, & m_{k,4,j} &= \sin d_{k,j} x \cdot \operatorname{sh} c_{k,j} x, \\ m_{k,5,j} &= \cos f_{k,j} x \cdot \operatorname{ch} l_{k,j} x, & m_{k,6,j} &= \cos f_{k,j} x \cdot \operatorname{sh} l_{k,j} x, \\ m_{k,7,j} &= \sin f_{k,j} x \cdot \operatorname{ch} l_{k,j} x, & m_{k,8,j} &= \sin f_{k,j} x \cdot \operatorname{sh} l_{k,j} x, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь

$$\begin{aligned} d_{k,j} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 - \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left(\frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right)^2} - \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 - \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right] \right\}}, \\ c_{k,j} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 - \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left(\frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right)^2} + \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 - \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right] \right\}}, \\ f_{k,j} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left(\frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right)^2} - \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right] \right\}}, \\ l_{k,j} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left(\frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right)^2} + \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \frac{\gamma_{k,j}}{\sqrt{2}} \right] \right\}}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\gamma_{k,j} = \frac{k\pi}{b} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)E_0^2}{h^2}}, \quad \gamma_1 = \frac{8\delta}{c^2}, \quad \gamma_2 = \frac{8(\delta + 2H)}{c^2}, \quad (j=1,2).$$



Из условий симметрии оболочки O_2 относительно оси Oy следует чётность функции $\varphi_2(x, y)$. Следовательно, получаем:

$$A_{2,2}^{(\kappa)} = A_{2,3}^{(\kappa)} = A_{2,6}^{(\kappa)} = A_{2,7}^{(\kappa)} = 0. \quad (13)$$

Неизвестные постоянные $A_{j,i}^{(\kappa)}$ ($j=1,2; i=1,8; \kappa=1,2,\dots$) определяются из равенства (2) и условий сопряжения (3) с учётом равенства $\theta_{\tau\kappa} = \frac{\partial w_{\kappa}}{\partial n_{\kappa}}$, в предположении, что в равенствах (3) величины, стоящие слева, выражаются по известным формулам теории оболочек через компоненты вектора смещений и углы поворота.

В результате приближённого решения задачи методом коллокации получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{j,i}^{(\kappa)}$:

$$\sum_{\kappa=1}^7 \left(\sum_{i=1}^4 T_{i,n}^{(\kappa)}(y_m) A_{2,i}^{(\kappa)} + \sum_{i=5}^{12} T_{i,n}^{(\kappa)}(y_m) A_{1,i}^{(\kappa)} \right) = \quad (14)$$

$$= \sum_{\kappa=1}^7 F_n^{(\kappa)}(y_m) = F_n(y_m) \quad (n=1,12; m=1,7).$$

$T_{i,n}^{(\kappa)}(y_m), F_n^{(\kappa)}(y_m)$ — известные величины.

В предположении, что оболочки несут поверхностную нагрузку вида (9), рассматривались два варианта равнообъёмной прямолинейной выдавки, а именно

Вариант 1: $H(y) = \frac{4H}{6} y,$

Вариант 2: $H(y) = 2H = \text{const},$

где $H(y)$ — глубина выдавки.

В случае второго варианта система (14) распадается на отдельные системы из двенадцати уравнений относительно столько же неизвестных для каждого K :

$$\sum_{i=1}^4 T_{i,n}^{(K)} A_{2,i}^{(K)} + \sum_{i=5}^{12} T_{i,n}^{(K)} A_{1,i}^{(K)} = F_n^{(K)} \quad (15)$$

$(n = \overline{1, 12}; K = \overline{1, 7})$,

где $T_{i,n}^{(K)}$ и $F_n^{(K)}$ - известные величины.

Решив системы (14) и (15), по формуле (10) находим значения функций $\varphi_j(x, y)$, после чего из равенств (7) и (8) определяются значения проекции векторов смещения, усилий и моменты. В таблицах 1, 2 выписаны значения $W_* = W_{\max} \frac{E}{\rho g} \left(\frac{h}{\delta}\right)^3$ в зависимости от положения оси ребра вылавки, глубины вылавки и стрелы подъема оболочки при $a/c = \frac{1}{2}$, $h/\delta = 0,01$, $\delta/c = 5$.

Таблица 1

Вариант 1			
H/h \ δ/h	1	5	10
0	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$3,04 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$
1	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$1,85 \cdot 10^{-5}$
2	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$2,55 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Вариант 2			
H/h \ δ/h	1	5	10
0	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$3,04 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$
1	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$4,67 \cdot 10^{-5}$	$1,23 \cdot 10^{-4}$
2	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$2,76 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$



Из этих таблиц видно, что наличие выдавок существенно уменьшает максимальные прогибы в оболочке. Выдавки переменной глубины являются более рациональными по сравнению с равнообъемной выдавкой постоянной глубины.

Поступила 5.IX.1993

Кафедра
теоретической механики

Литература

1. И.А.Зоненшвили, Труды ТГУ, т.259, 1985.
2. И.А.Зоненшвили. Сообщения АН ГССР, т.128, № 3, 1987.
3. А.А.Назаров. Основы теории и методы расчета пологих оболочек, Л.-М., 1966.

რ. ზონენაშვილი

საინჟინრო ინჟინერის კანდიდატი
ქვეყნის მეცნიერებათა აკადემიის
კორპორაციის წევრი

ქ ვ ბ უ ბ ე

ქვეყნის მეცნიერებათა აკადემიის
კორპორაციის წევრი
ქვეყნის მეცნიერებათა აკადემიის
კორპორაციის წევრი
ქვეყნის მეცნიერებათა აკადემიის
კორპორაციის წევრი

THE EFFECT OF EXTRUSIONS ON THE DEFORMATION OF
CYLINDRICAL SHELL



Summary

A cylindrical shell with rectilinear extrusion is considered with a view to increasing the longevity of shells and plates. The influence of the shape and position of extrusions on the maximum bendings in shells has been studied.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Дзидишвили

320, 1995

УДК 531

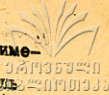
ОДНА НОВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ
УПРУГОСТИ

Л. Г. Доборджинидзе

В данной работе речь идет о построении математической модели для одного, достаточно обширного класса несжимаемых материалов, широко используемых в современной технике и медицине. Мы рассматриваем двумерную задачу. Соответствующую модель описываем в терминах теории функции комплексного переменного $/I/$.

1. Как известно, упругость является одним из основных свойств большинства имеющих в природе сплошных сред. При рассмотрении упругого равновесия этих тел часто полагают, что они способны как угодно деформироваться под действием приложенных нагрузок, конечно в определенных условиях, сохраняющих упругость и сплошность материала. Но вместе с тем сказывается, что большинство реальных тел не допускают развития некоторых видов деформации, каковы бы ни были приложенные к ним силы. Такие структуры называются материалами с наложенными связями. Указанным свойством характеризуются, в частности, несжимаемые материалы, сохраняющие объем при деформации, каково бы ни было изменение формы тела. Классическим примером таких материалов является несжимаемая жесткость.

Несжимаемыми являются эластомеры. Они представляют собой разнообразное вещество, широко используемые в современной практике и технологиях. Эластомерами являются натуральные и синтетические



тические каучуки, полуретаны, полиэтилены и различные полимеры, материалы биологического происхождения и др. Особую роль играют эластомеры в живой природе и медицине. В частности, их широко используют при создании искусственных органов. В любой области современной науки и техники широко используют изделия из эластомеров. Это мембраны и оболочки, различные резинометаллические изделия, используемые в современном машиностроении и транспорте, надувные антенны и сооружения, клеи, пленки, трансплантационные материалы и многие другие /2/.

Эти материалы обладают высокой эластичностью и деформативностью (до 800-900%) и, следовательно, не являются объектами исследования линейной классической теории. Они являются физически и геометрически нелинейными структурами. Поэтому их можно исследовать только методами нелинейной теории упругости.

Конечно, при деформировании эластомеров происходят и неупругие эффекты (теплообразование, появление вязкоупругих и вязкотекучих и других свойств), но они составляют лишь незначительную часть упругой деформации. Тем более, что из эластомера происходит релаксация всех неупругих эффектов. Так что эластомер практически находится в упругом состоянии.

Видно, несжимаемые материалы могут быть различными по своей природе и свойствам, но все они следуют одному странному закону - любой элементарный объем несжимаемого материала остается неизменным при деформировании.

Ниже мы рассматриваем случай плоской задачи, когда /3/

$$x_1^* = x_1^*(x_1, x_2), \quad x_2^* = x_2^*(x_1, x_2), \quad x_3^* = \lambda x_3, \quad (1)$$

где x_i и x_i^* ($i = 1, 2, 3$) - декартовы координаты материальной частицы до и после деформации соответственно.



2. Мы следуем энергетическому подходу построения модели упругого материала и выбираем упругий потенциал в виде /1,2/

$$W = \frac{\mu}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3^2 - 3 \right], \quad (2)$$

где μ - обобщенный модуль сдвига (при малых деформациях), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - главные значения тензора кратностей удлинений. В частности, $\lambda_i = ds_i^*/ds_i$, где ds_i и ds_i^* обозначают длину элементов материальных волокон до и после деформации соответственно. Или же, $\lambda_i = 1 + \delta_i$, где δ_i - главные относительные удлинения ($i = 1, 2, 3$).

Этот потенциал при малых деформациях должен перейти в потенциал линейной теории упругости для несжимаемого материала. Но для этого должно быть соблюдено условие /2/ ($i = 1, 2, 3$)

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right)_{\lambda_i=1} = 2\mu. \quad (3)$$

Очевидно, что это условие соблюдено. Следовательно, линейная часть всякого решения поставленной граничной задачи для этого материала представляет собой соответствующее решение классической задачи.

К этим равенствам присоединяем еще условие несжимаемости

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (4)$$

Для построения соответствующей математической модели воспользуемся соотношениями /2/

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + i(\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 2 \left(\left| \frac{\partial \lambda^*}{\partial \lambda} \right| \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + q \right), \quad (5)$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + i(\sigma_{12} + \sigma_{21}) = 2 \frac{\partial \lambda^*}{\partial \lambda} \left| \frac{\partial \lambda^*}{\partial \lambda} \right| + \frac{\partial \lambda^*}{\partial \lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i},$$

$$\sigma_{33} = 2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + q.$$

где ϵ_{ij} - компоненты тензора истинных напряжений Коши,

$$\delta_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \quad \varphi = \lambda^{-1} \frac{\partial W}{\partial \Delta} = -\lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}, \quad \lambda \equiv \lambda_3, \quad (6)$$

а $z = x + iy$ и $z^* = x^* + iy^* = x_1 + iy_1$ - комплексные координаты материальной точки до и после деформации соответственно; u, v - упругие перемещения.

К этим условиям присоединяем главное - разрешающее уравнение (при отсутствии массовых и инерционных сил), представляющее нелинейный аналог известных соотношений Навье /3/. В комплексной форме оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z^*}{\partial z} \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|^{-1} \frac{\partial W}{\partial \delta_1} \right) + \lambda \left(\frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (7)$$

При решении основных граничных задач необходимо будет использовать следующие граничные условия /2/:

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|^{-1} \frac{\partial W}{\partial \delta_1} + \lambda \varphi \left(\frac{\partial z^*}{\partial z} - \frac{\partial z^*}{\partial z^*} e^{-2i\theta} \right) = e^{-i\theta} (\epsilon_{n1} + i\epsilon_{n2}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} - \frac{\partial z^*}{\partial z^*} e^{-2i\theta} = -i e^{-i\theta} \frac{dz(s)}{ds}, \quad (9)$$

где θ - угол, который нормаль, проведенная к рассматриваемой недеформированной граничной линии L в ее точке $z = x + iy$, образует с положительным направлением оси Ox ; $\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}$ - составляющие вектора напряжений в декартовых координатах ($\epsilon_{n1} + i\epsilon_{n2} = X_n + iY_n$; см. /3/). Равенство (8) выражает силовое граничное условие, а (9) - деформационное. Можно поставить, конечно, и геометрическое условие

$$z = z(s). \quad (10)$$



На любой контур L , в недеформированной области D действуют напряжения с главным вектором /2/

$$X+iY = -\frac{1}{2} \int_L \left[(F^{-1} \cdot J\Sigma)_1 d\bar{z} - (F^{-1} \cdot J\Sigma)_2 d\bar{z} \right] \quad (11)$$

и главным моментом

$$M = -\frac{1}{2} Re \int_L \bar{z}^* \left[(F^{-1} \cdot J\Sigma)_1 d\bar{z} - (F^{-1} \cdot J\Sigma)_2 d\bar{z} \right], \quad (12)$$

где

$$(F^{-1} \cdot J\Sigma)_1 = 2 \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}} \left(\left| \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}} \right|^{-1} \frac{\partial W}{\partial \Delta_1} + \lambda q \right), \quad (F^{-1} \cdot J\Sigma)_2 = -2\lambda \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}} q. \quad (13)$$

На поперечное сечение цилиндра, со стороны положительного направления оси OZ_3 , действуют напряжения с главным вектором

$$F_3 = \iint_{\Omega} (F^{-1} \cdot J\Sigma)_5 d\Omega \quad (14)$$

и главным моментом

$$M_3 = -\iint_{\Omega} \bar{z} (F^{-1} \cdot J\Sigma)_5 d\Omega, \quad (15)$$

где Ω - область указанного поперечного сечения, а

$$(F^{-1} \cdot J\Sigma)_5 = \frac{\partial W}{\partial \lambda}. \quad (16)$$

В приведенных соотношениях

$$F^{-1} \cdot J\Sigma = d_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta$$

- координатный тензор напряжений,

$$\Sigma = \sigma_{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta$$

- тензор истинных напряжений Коши,

$$F = \frac{\partial x^*}{\partial x_p} l_\alpha l_\beta$$

- тензор, определяющий локальное движение - градиент движения.



Напомним, что тензор

$$\overset{\circ}{\Delta} = \sqrt{F^* \cdot F} = A_\alpha \rho_\alpha \rho_\alpha$$

описывает изменение расстояния между точками материальной частицы, т.е. деформацию.

Учитывая (6) в (2), функцию удельной потенциальной энергии деформации можно представить в виде

$$W = \frac{\mu}{2} (\overset{\circ}{\Delta}^2 + \overset{\circ}{\Delta}^2 - 3). \quad (17)$$

Из этого выражения, согласно (6), будем иметь

$$q = -\mu \overset{\circ}{\Delta}^2 = -\mu / \Delta^2. \quad (18)$$

Далее мы рассмотрим случай, когда $\overset{\circ}{\Delta} = \text{const}$. Тогда и $q = \text{const}$.

В принятых предположениях разрешающее уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (19)$$

Это уравнение имеет следующее общее решение:

$$z^* = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)}, \quad (20)$$

где $\varphi(z)$ и $\overline{\varphi(z)}$ — произвольные в рассматриваемой области D аналитические функции от комплексного аргумента $z = x + iy$.

Отсюда

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \varphi'(z), \quad \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} = \overline{\varphi'(z)}. \quad (21)$$

В дальнейшем понадобятся известные соотношения [2]

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Delta}_1^{-1} e^{i\omega}, \quad \overset{\circ}{\Delta}_1 = 2 \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|, \quad e^{i\omega} = \frac{\partial z^* / \partial z}{|\partial z^* / \partial z|}, \quad (22)$$

угол ω — угол поворота вокруг оси Ox_3 .

Учтем теперь симметричность тензора напряжений Коши и приведенные соотношения внесем в (5). Тогда будем иметь

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\mu \varphi'(z) \overline{\varphi'(z)} - 2\mu \lambda^2, \quad \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = 4\mu \varphi'(z) \overline{\varphi'(z)}.$$

Отсюда, используя традиционные обозначения для компонент тензора истинных напряжений Коши, получим комплексное представление поля напряжений в виде

$$X_x + Y_y = 4\mu \varphi'(z) \overline{\varphi'(z)} - 2\mu \lambda^2, \quad X_x - Y_y + 2iX_y = 4\mu \varphi'(z) \overline{\varphi'(z)}. \quad (23)$$

Следствием этих соотношений является формула

$$Y_y - iX_y + \mu \lambda^2 = 2\mu \varphi'(z) [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]. \quad (24)$$

Комплексное представление поля упругих смещений согласно (20) имеет вид

$$u + iv = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - z \quad (25)$$

При отсутствии деформации $z^* = z$ и, следовательно, $\varphi(z) = z$, $\varphi'(z) = 0$. Следовательно, из (23) получим

$$X_y = 0, \quad Y_y = X_x = \mu(2 - \lambda^2),$$

т.е. рассматриваемая среда в начальном состоянии находится в положении всестороннего равномерного растяжения.

Выясним теперь степень определенности введенных аналитических функций и предположим, что начало координат принадлежит рассматриваемой области S' .

Анализируя выражения (23), (25) убеждаемся, что при заданных напряжениях можно положить

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \quad (26)$$



То же самое справедливо и при заданных смещениях. Эти условия вполне фиксируют функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Перейдем к исследованию поведения введенных комплексных потенциалов и сначала рассмотрим случай конечной многосвязной области S , ограниченной несколькими замкнутыми непересекающимися контурами $L_0, L_1, L_2, \dots, L_m$, из которых первый охватывает все остальные /3/.

Исходя из условия однозначности напряжений, из (23) убеждаемся что $\varphi'(z)$, $\psi'(z)$ должны быть однозначными аналитическими (голоморфными) функциями в области S .

Но тогда для аналитических функций $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$ будем иметь представления

$$\varphi'(z) = \int_{z_0}^z \varphi'(z) dz + const = \sum_{k=1}^m \alpha_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad (27)$$

$$\psi'(z) = \int_{z_0}^z \psi'(z) dz + const = \sum_{k=1}^m \beta_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z),$$

где $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ - голоморфные функции в S .

Теперь обратимся к формуле (25) и примем во внимание условие однозначности смещений. Как легко убеждаемся, для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\alpha_k - \bar{\beta}_k = 0. \quad (28)$$

Далее используем формулу (II) и вычисляем значения главного вектора сил, приложенных к замкнутому контуру L' в области S . Тогда, как легко проверить, после элементарных рассуждений, получим

$$X_k + i Y_k = 4\pi \mu [\alpha_k (2 - \lambda^3) + \bar{\beta}_k \lambda^3]. \quad (29)$$



Из сравнения (28) и (29) находим

$$\alpha_k = \frac{X_k + iY_k}{4\pi\mu}, \quad \beta_k = \frac{X_k - iY_k}{4\pi\mu} \quad (30)$$

Следовательно, будем иметь окончательно

$$\varphi(z) = \frac{i}{4\pi\mu} \sum_{k=1}^m (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad (31)$$

$$\varphi(z) = \frac{i}{4\pi\mu} \sum_{k=1}^m (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z).$$

Перейдем к случаю бесконечной области S .

Исходя из условия ограниченности напряжений во всей области S , на основании (23) заключаем, что должно быть в области вне L_R

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad (32)$$

где L_R - окружность радиуса R , охватывающая внутри себя все контуры L_k ($k=1, 2, \dots, m$).

Вне этого контура ($|z| > |z_k|$)

$$\ln(z - z_k) = \ln z + \ln\left(i - \frac{z_k}{z}\right) = \ln z + \chi(z),$$

где $\chi(z)$ - голоморфная функция вне L_R . Но тогда из (31), (32) следует представление

$$\varphi(z) = \frac{X + iY}{4\pi\mu} \ln z + a_0 z + \varphi_0(z), \quad (33)$$

$$\psi(z) = \frac{X - iY}{4\pi\mu} \ln z + b_0 z + \psi_0(z),$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ - голоморфные вне L_R функции, включая бесконечно удаленную точку, т.е. имеющие при достаточно больших $|z|$ разложения вида

$$\varphi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \dots, \quad \psi_0(z) = b'_0 + \frac{b'_1}{z} + \frac{b'_2}{z^2} + \dots \quad (34)$$



Выясним физический смысл постоянных a_0 в ℓ_0 .

Для этого положим, что бесконечно удаленная часть плоскости не испытывает вращения на бесконечности, а напряжения там же распределены равномерно.

Тогда из (23) и (32) получим

$$X_x^{(\infty)} + Y_y^{(\infty)} = 4\mu a_0 \bar{a}_0 - 2\mu R^2, \quad X_x^{(\infty)} - Y_y^{(\infty)} + 2iX_y^{(\infty)} = 4\mu a_0 \bar{b}_0 \quad (35)$$

Поскольку на бесконечности вращения отсутствуют, то, исходя из формулы

$$e^{i\omega} = \sqrt{\frac{\partial \bar{z}^*}{\partial z^*} / \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}^*}} \quad (36)$$

и (21), согласно (32), определим

$$a_0 = \bar{a}_0,$$

т.е. постоянная a_0 должна быть действительной. Но тогда из (35) получим

$$a_0 = \sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{X_x^{(\infty)} + Y_y^{(\infty)}}{4\mu}}, \quad b_0 = \frac{X_x^{(\infty)} - Y_y^{(\infty)} - 2iX_y^{(\infty)}}{4\mu\sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{X_x^{(\infty)} + Y_y^{(\infty)}}{4\mu}}} \quad (37)$$

Пусть теперь N_1, N_2 — обозначают значения главных напряжений на бесконечности, а α — угол, который главная ось, соответствующая N_1 , составляет с осью Ox .

Используем известные соотношения [3]

$$X_x^{(\infty)} + Y_y^{(\infty)} = N_1 + N_2, \quad Y_y^{(\infty)} - X_x^{(\infty)} + 2iX_y^{(\infty)} = -(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha} \quad (38)$$

Тогда формулу (37) можно представить в виде

$$a_0 = \sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{N_1 + N_2}{4\mu}}, \quad b_0 = \frac{(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}}{4\mu\sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{N_1 + N_2}{4\mu}}} \quad (39)$$



Обратимся теперь к граничным условиям (8) и (9). Согласно (17), (21), (22), их можно представить в виде

$$(2 - \lambda^2) \varphi'(z) + \lambda^2 \overline{\varphi'(z)} e^{-2i\theta} = \mu^{-1} (\sigma_n + i\sigma_t), \quad (40)$$

$$\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} e^{-2i\theta} = -i e^{-i\theta} \frac{dz}{ds}, \quad (41)$$

где σ_n и σ_t обозначают нормальные и касательные составляющие вектора напряжения, приложенного в точке $z = x + iy$ контура L .

В приведенных соотношениях мы полагали, что $\lambda = \text{const}$. Примем теперь, что $\lambda \neq 1$, т.е. предположим, что торцы деформированного цилиндра не смещаются в продольном направлении. Тогда будем иметь

$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{N_1 + N_2}{4\mu}}, \quad b_0 = \frac{(N_1 - N_2) e^{-2i\alpha}}{4\mu \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{N_1 + N_2}{4\mu}}}. \quad (42)$$

Граничные условия (40), (44) теперь примут вид

$$\begin{aligned} \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} e^{-2i\theta} &= \mu^{-1} (\sigma_n + i\sigma_t), \\ \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} e^{-2i\theta} &= -i e^{-i\theta} \frac{dz}{ds}. \end{aligned} \quad (43)$$

Обратимся теперь к формулам (6), (14) и примем во внимание (17). Тогда убеждаемся, что $\sigma_{33} = 0$ и, следовательно, $F_3 = 0$. Значит торцы цилиндра свободны от внешних воздействий.



Литература

- 1. А. И. Лурье. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- 2. К. Ф. Черных, З. Н. Литвиненкова. Теория больших упругих деформаций. Л., Изд-во ЛГУ, 1988.
- 3. Н. И. Мухелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.

ცოდნობისთვის

მრავალზომიანი არაწინააღმდეგობის მქონე

მრავალზომიანი მასალის მასალა

ს უ გ ი მ ე

მაშრომში აგებულია მრავალზომიანი მრავალზომიანი
 ფართი კლასის უახლოვეს მასალის მასალის, რომელიც ინტენსივობა
 გამოიყენება ფუნქციონალური და მუდმივი მასალის, განიხილება მრავალზომი-
 ნობის ანტიპრობლემა, მრავალზომიანი მრავალზომიანი არაწინააღმდეგობის
 ფუნქციონალური ფუნქციონალური ფუნქციონალური, არაწინააღმდეგობის
 მრავალზომიანი მრავალზომიანი მრავალზომიანი მრავალზომიანი

L. Deborjginidze

A NEW MATHEMATICAL MODEL OF TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR
 ELASTICITY

Summary

A mathematical model is constructed for a fairly broad class of uncom-
 pressible materials widely used in modern equipment and medicine.

A two-dimensional problem is considered. A corresponding model
 is described in terms of the theory of functions of a complex variable, in
 particular, complex notions of the field of elastic elements are obtained.

Труды Тбилисского университета им.И.Джавახишвили

320, 1995

УДК 531

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ И ЧЕРУТТИ ДЛЯ

ВЯЗКО-УПРУГИХ ТИЛ

П.Г.Махвиладзе

В современной технике и промышленности часто применяются материалы, для которых напряжение и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Такие материалы называют вязко-упругими. К ним относятся такие материалы, как полимеры и их композиции, сплавы, бетоны, грунты и др. Для вязко-упругих материалов характерны два явления – ползучесть (изменение во времени деформации при постоянных напряжениях) и релаксация (изменение во времени напряжения при неизменных деформациях).

Задачи теории упругости отличаются от задач вязко-упругости физическими соотношениями – вместо закона Гука вводится закон Больцмана.

Для описания процессов деформирования вязко-упругих материалов Больцман предложил теорию наследственной вязко-упругости, в основе которой лежит принцип наложения (суперпозиции) деформации. Он ввел две гипотезы:

I) Упругие силы зависят не только от мгновенно полученных смещений, но и от предшествующих деформаций, которые оказывают тем меньшее влияние на них, чем больше времени протекло с момента предшествующих деформаций;



2) Влияния полученных в разное время деформаций складываются, то есть объединяются путем непосредственного сложения.

Задачи вязко-упругости решаются разными методами.

В данной статье они решаются методом аппроксимации, предложенным А.А.Ильюшиным [1], согласно которому решение вязко-упругой задачи можно получить из решений такой же упругой задачи формальной заменой упругих констант соответствующими функциями времени. Согласно методу аппроксимации решение любой статической задачи теории упругости для любой искомой величины S (напряжения, перемещения, момента, кривизны и др.) нужно выразить через коэффициент Пуассона ν , а потом всегда можно привести к виду

$$S = f + \omega \varphi + \frac{1}{\omega} \varphi + \sum_n \frac{1}{1 + \beta_n \omega} \chi_n, \quad (I)$$

где $f, \varphi, \varphi, \chi_n$ - известные функции, которые выражены через заданные в теле и на его границе нагрузки, перемещения и координаты и не зависят от параметра $\omega = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}$; β_n - так же не зависящие от ω постоянные параметры, определяемые при записи упругого решения в форме (I).

Используя соотношения Больцмана между девятками напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ϵ_{ij}) в предположении упругого изменения объема

$$\sigma_{ij} = \int_0^t R(t-\tau) d\epsilon_{ij}(\tau), \quad \epsilon_{ij} = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma_{ij}(\tau),$$

где $R(t)$ и $\Pi(t)$ - функции релаксации и ползучести материала, решение той же задачи линейной теории вязко-упругости при тех же заданных в теле и на границе нагрузках и перемещениях получаем с помощью преобразования Лапласа-Карсона [1, 2]



$$f^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

о действительным параметром p . В изображениях оно точно совпадает с формой решения (I)

$$s^* = f^* + \omega^* \varphi^* + \frac{1}{\omega^*} \varphi^* + \sum_n \frac{1}{1 + \beta_n \omega^*} \chi_n^* \quad (2)$$

Здесь звездочка $*$ для любой из величин $s, f, \varphi, \varphi, \chi_n$ означает их изображение, а ω^* и $\frac{1}{\omega^*}$ — изображение ядер релаксации $R(t)$ и ползучести $\Pi(t)$. Предполагается, что заданные нагрузки и перемещения, входящие в функции $f, \varphi, \varphi, \chi_n$, являются медленно изменяющимися функциями времени (т.е. квазистатическими). При этом

$$\omega(t) = \frac{1}{3B} R(t), \quad \frac{1}{\omega(t)} = \mathcal{R}(t) = 3B\Pi(t),$$

B — модуль объемного расширения.

Введем обозначение оператора $\frac{1}{1 + \beta_n \omega^*} = g_{\beta_n}^*$

После инверсий, т.е. обратного преобразования, из (2) получается решение соответствующей вязко-упругой задачи в оригинале:

$$s = f(x, t) + \int_0^t \left[\omega(t-\tau) \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} + \mathcal{R}(t-\tau) \frac{\partial \chi(x, \tau)}{\partial \tau} + g_{\beta_n}(t-\tau) \frac{\partial \chi_n(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau,$$

или

$$s(t) = \Phi[B, \Pi(t), R(t), g_{\beta_n}(t)].$$

Таким образом, согласно методу аппроксимаций решение любой задачи линейной теории вязко-упругости может быть представлено через три универсальные функции времени: функцию податливости $\Pi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{E_k}$, определяемой из опытов на ползучесть, модуля релаксации $R(t) = \frac{E(t)}{E_k}$, определяемой из опытов на релаксацию, и функцию связанной ползучести $g_{\beta_n}(t)$, отражающей одновременно протекающие в образце процессы ползучести и релаксации.

Практически нет нужды проводить три типа опытов для определения указанных функций времени, так как аналогично соотношениям между упругими константами, где любая постоянная выражается

через другие, любая из определяющих решения вязко-упругой задачи функций определяется в линейной теории через одну или две другие /1,2/. Так, например, функция модуля релаксации $R(t)$ и функция податливости $\Pi(t)$ связаны между собой соотношением

$$R^*(p) \cdot \Pi^*(p) = 1,$$

а их производные

$$\Pi'(t) = \frac{1}{E} \cdot K(t), \quad R'(t) = E \cdot T(t)$$

уравнением

$$T(t) - K(t) = \int_0^t K(t-\tau) \cdot T(\tau) d\tau.$$

(Здесь $T(t)$ - функция скорости релаксации, $K(t)$ - функция скорости ползучести, при этом $\Pi(0) = \frac{1}{E}$, $R(0) = E$). Данное уравнение позволяет по одной из известных функций, например $T(t)$, найти другую - $K(t)$.

Функция связанной ползучести $g_p(t)$ определяется по формуле /2/

$$g_{\beta_n}(t) = g_{\beta_n}(0) \left[1 + \int_0^t K_c(\tau, \beta_n \rightarrow \beta_n) d\tau \right], \quad (3)$$

где $g_{\beta_n}(0) = \frac{1}{1 + \beta_n \omega}$, а $\left[1 + \int_0^t K_c d\tau \right]$ - табулированная функция, построенная по опытным данным на ползучесть заменой в ней параметра β на β_n по формуле /2/:

$$\beta_{\beta_n} = \frac{\beta_n \omega}{1 + \beta_n \omega} \beta. \quad (4)$$

Ядра $T(t)$ и $K(t)$ - функции влияния, принять в виде

$$T(t) = A e^{-\lambda t} t^{\alpha-1}, \quad K(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t} \sum_n \frac{[\Gamma(\alpha)]^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha^n)}$$

здесь $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера, α , λ - параметры функций влияния.

Таким образом, в одноосном случае достаточно одной серии опытов, например, только на ползучесть, по данным которой определяются все три функции $\Pi(t)$, $R(t)$, $g_{\beta_n}(t)$.

Приведем примеры решения краевых задач теории вязко-упру-

гости по известным решениям соответствующих задач теории упругости.

Пример I (задача Буссинеска). Плоскость $z=0$ является границей полубесконечного тела. Соблюденная сила \vec{P} действует нормально к граничной плоскости и направлена вдоль оси Oz . Определить перемещения и напряжения.

Начало координат принимаем в точке O приложения силы \vec{P} и ось Oz направим внутри тела вниз (рис. I.).

Решения поставленной задачи для упругих тел в цилиндрических координатах имеют следующий вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\nu)R^2}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right]; & \sigma_z &= -\frac{3z^3}{2\pi R^3} P; \\ \sigma_\theta &= -\frac{P(1-\nu)}{2\pi R^2} \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right); & \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \cdot \frac{rz^2}{R^3}; \\ u_r &= -\frac{P(1+\nu)}{2\pi ER^2} \left[\frac{(1-2\nu)R}{R+z} - \frac{z}{R} \right]; & u_z &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $\nu = \sqrt{2^2 + y^2}$; $R = \sqrt{r^2 + z^2}$; ν - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга.

Для точек граничной плоскости ($z=0$, $R=r$) получим перемещения:

$$u_r = -\frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E r}; \quad u_z = \frac{P(1-\nu^2)}{2E r}$$

Наша цель решить эту же задачу, когда тело вязко-упругое. Решение вязко-упругой задачи получится заменой упругих постоянных на некоторые функции времени.

Найдем эти функции для u_r . Для этого выразим упругие постоянные, входящие в u_r из (5) через постоянные ω и B (сдвигаемый модуль). Запишем решение в форме (I):

$$u_r = \frac{rz}{6\pi R^3} \cdot \frac{P}{B} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{r}{4\pi R(R+z)} \cdot \frac{P}{B} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\omega}$$



Преобразуя это выражение по Лапласу-Карсону, получим решение вязко-упругой задачи в изображениях:

$$u_r^* = \frac{\gamma z}{2\pi R^3} \Pi^* P^* - \frac{\gamma}{4\pi R(R+z)} \cdot \frac{1}{B} g_{1/2}^* P^*.$$

Совершая обратные преобразования, получим решение вязко-упругой задачи в оригинале:

$$u_r = \frac{\gamma z}{2\pi R^3} \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) - \frac{\gamma}{4\pi R(R+z)} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau);$$

аналогично $u_z = \frac{R^2+z^2}{2\pi R^3} \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) + \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau);$

$$\epsilon_r = \left(\frac{3}{2\pi R(R+z)} - \frac{3z^2}{2\pi R^3} \right) P(t) - \frac{3}{2\pi R(R+z)} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau);$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{3}{2\pi R^2} \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right) \left[P(t) - \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau) \right];$$

$$\epsilon_z = -\frac{3z^3}{2\pi R^3} P(t); \quad \tau_{rz} = -\frac{3z^2}{2\pi R^2} P(t).$$

Для точек границы ($z=0$) имеем перемещения:

$$u_r = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau);$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau).$$

Пример 2. Однородная круглая цилиндрическая колонка весом P и радиусом основания r вертикально опирается на границе $z=0$ полубесконечного тела ($z \geq 0$). Это значит, что на границе $z=0$ полубесконечного тела на поверхность круга радиуса r действует равномерно распределенная нагрузка P интенсивности q : $P = \pi r^2 q$.

Начало координат принимаем в центре основания колонки и ось Oz направим вдоль оси колонки.

Решение упругой задачи в полубесконечном теле в точках, принадлежащих оси Oz в цилиндрических координатах, имеет следующий вид [3]:

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \frac{q}{2} \left[-(1+\nu) + \frac{2z}{\sqrt{r^2+z^2}} (1+\nu) - \left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^3 \right],$$

$$\sigma_x = q \sqrt{-1 + \frac{x^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}}}.$$

Максимальное касательное напряжение (достигается на глубине $z \approx \frac{1}{3} r$)

$$\tau_{max} = \frac{q}{2} \left[-\frac{1-2\nu}{2} + \frac{2}{9} (1+\nu) \sqrt{2(1+\nu)} \right].$$

На контуре нагруженного круга вертикальное перемещение

$$u_z = \frac{4(1-\nu^2) r q}{9 E}.$$

В центре круга

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1}{2} q (1+2\nu); \quad \sigma_x = -q; \quad u_x = \frac{2\nu}{E} q (1-\nu^2).$$

Соответствующие вязко-упругие решения этой же задачи принимают вид:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{2} \left[i - \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right)^3 \right] q(t) + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} - 1 \right) \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq(\tau);$$

$$\sigma_x = \left[-1 + \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right)^2 \right] q(t);$$

$$\tau_{max} = \frac{q + 2\sqrt{3}}{12} q(t) - \frac{\sqrt{3}}{24B} \int_0^t R(t-\tau) dq(\tau) - \frac{3}{4} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq(\tau).$$

На контуре круга

$$u_x = \frac{2\nu}{E} \int_0^t \Pi(t-\tau) dq(\tau) + \frac{\nu}{E} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq(\tau) \quad (6).$$

В центре круга:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{2} q(t) - \frac{3}{2} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq(\tau); \quad \sigma_x = -q(t);$$

$$u_x = r \int_0^t \Pi(t-\tau) dq(\tau) + \frac{\nu}{2} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq(\tau).$$

Пример 3 (задача Черугги). На полупространстве ($z \geq 0$) касательно к граничной плоскости $z=0$ действует сила \vec{T} , которая приложена в точке O . Определить перемещения.



НАЦИОНАЛЬНАЯ
БИБЛИОТЕКА
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Начало координат поместим в точке O . Ось Ox направим вдоль силы \vec{T} , ось Oz — перпендикулярно граничной плоскости (рис. 2).

Упругие решения задачи даны в /4, §166/: а) Для любой точки M по упространства:

$$u = \frac{T}{4\lambda\mu} \left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} + \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{1}{R} - \frac{T}{2\lambda(\lambda+\mu)} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+x)} \left[1 - \frac{x^2}{R(R+x)} \right] \right\};$$

$$v = \frac{T}{4\lambda} \cdot \frac{x\gamma}{R} \left[\frac{1}{\mu R^2} - \frac{1}{(\lambda+\mu)(R+x)\mu} \right];$$

$$w = \frac{T}{4\lambda} \cdot \frac{x}{R} \left[\frac{x}{\mu R^2} + \frac{1}{(\lambda+\mu)(R+x)} \right].$$

б) В точках границы ($x=0$, $R=z$)

$$u = \frac{T}{4\lambda\mu} \left[\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} + \frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)} \cdot \frac{x^2}{R^2} \right];$$

$$v = \frac{T}{4\lambda} \cdot \frac{x\gamma}{R^2} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)};$$

$$w = \frac{T}{4\lambda} \cdot \frac{x}{R^2} \cdot \frac{1}{\mu+\lambda}.$$

Здесь λ , μ — постоянные Ламе.

Соответствующие вязко-упругие решения этой же задачи имеют

вид:

$$а) u = \frac{R^2+2x^2}{4\lambda R} \int_0^t \Pi(t-\tau) dT(\tau) + \frac{1}{8\lambda R(R+x)} \left[1 - \frac{x^2}{R(R+x)} \right] \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dT(\tau);$$

$$v = \frac{x\gamma}{2\lambda R^2} \int_0^t \Pi(t-\tau) dT(\tau) - \frac{x\gamma}{8\lambda R(R+x)} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dT(\tau);$$

$$w = \frac{x}{2\lambda R^2} \int_0^t \Pi(t-\tau) dT(\tau) + \frac{x}{8\lambda R(R+x)} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dT(\tau);$$

$$б) u = \frac{r^2+x^2}{4\lambda r^2} \int_0^t \Pi(t-\tau) dT(\tau) + \frac{\gamma^2}{4\lambda r^2} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dT(\tau);$$

$$v = \frac{x\gamma}{4\lambda r^2} \int_0^t \Pi(t-\tau) dT(\tau) - \frac{x\gamma}{8\lambda r^2} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dT(\tau);$$

$$w = \frac{x}{8\lambda r^2} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dT(\tau).$$

В рассмотренных примерах решения задач линейной теории вязко-упругости с применением метода аппроксимации выражаются через функцию ползучести $\Pi(t)$, функцию релаксации $R(t)$ и функцию связанной ползучести $g_{1/2}(t)$ (в рассмотренных задачах $\beta_n = \frac{1}{2}$). Чтобы получить численные значения для напряжений и смещений при разных t и P, q, T , надо знать опытные значения функций $\Pi(t)$, $R(t)$ и $g_{1/2}(t)$. Метод определения этих функций дан в /2/.

Рассмотрим численный пример.

Вычислим численные значения для $w(u_x)$ в примере 2. Имеем вязко-упругое решение (6) на контуре круга:

$$w = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^t \Pi(t-\tau) dq(\tau) + \frac{\mu}{\pi} \cdot \frac{1}{B} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq(\tau). \quad (6)$$

Чтобы получить значения w для разных t и q , надо знать опытные функции $\Pi(t)$ и $g_{1/2}(t)$.

Допустим, что материал оргстекло и интенсивность нагрузки q постоянна ($\dot{q} = \dot{q}_0 = \text{const}$ и $q_0(0) = 0$); $q_0 = 10 \text{ кг/см}^2$; $r = 20 \text{ см}$.

Методом совмещений М.А. Колтунова в линейной области для оргстекла найдены опытные значения упругих постоянных и параметров функций влияния: $E = 6,4 \cdot 10^4 \text{ кгс/см}^2$; $\nu = 0,41$, $\alpha = 0,075$; $\beta = 0,0025$; $\beta' = 0,0283$; $\omega = 0,1277$; $B = 11,85 \cdot 10^4$;

По этим данным построим ядро $K_C(t)$ сдвиговой ползучести по формуле /2/:

$$K_C(t) = \frac{K_{11}(t) + \nu K_{21}(t)}{1 + \nu},$$

которая позволяет определить функцию скорости сдвиговой ползучести K_C по известным из опытов ползучести растянутых и сжатых образцов функциям продольной K_{11} и поперечной K_{21} пол-

зучести. При рассмотрении одноосной ползучести и деформации параметры α, λ, A у функций K_{11} и K_{21} одинаковы и поэтому сдвиговое ядро K_c подобно одноосному K_{11} : $K_c(t) = K_{11}(t) \equiv K(t)$.

Применяя интегрирование по частям, запишем выражение, входящее в решение (6), через функции $K(t)$ (функция влияния):

$$\int_0^t \Pi(t-\tau) dq_0(\tau) = [\Pi(t-\tau) \cdot q_0(\tau)]_0^t + \int_0^t q_0(\tau) \cdot \Pi'(t-\tau) d\tau = \\ = \Pi(0) q_0 + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau) q_0(\tau) d\tau = \frac{q_0}{E} \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right].$$

Здесь использованы равенства $\Pi(0) = \frac{1}{E}$; $\Pi'(t) = -\frac{1}{E} K(t)$.

Второе слагаемое в выражении (6) принимает вид:

$$\int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dq_0(\tau) = q_0 \cdot g_{1/2}(t).$$

Для вязко-упругого решения (6) имеем

$$w = \frac{2\tau q_0}{8E} \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right] + \frac{\tau q_0}{8} \cdot \frac{1}{B} g_{1/2}(t). \quad (7)$$

Известно, что функция вязкой ползучести $g_{1/2}(t)$ можно определить по формуле (3):

$$g_{1/2}(t) = g_{1/2}(0) \cdot \left[1 + \int_0^t K(\tau, A \rightarrow A_{1/2}) d\tau \right],$$

где

$g_{1/2}(0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\omega} = 0,948$; $\left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right]$ - табулированная функция, построенная по опытным данным на ползучесть замочной в ней параметра A на $A_{1/2}$ по формуле /2/:

$$A_{1/2} = \frac{0,5\omega}{1 + 0,5\omega} A = \frac{0,5 \cdot 0,1277}{1 + 0,5 \cdot 0,1277} \cdot 0,0286 = 0,00172.$$

Используя данные таблицы из /2/ и учитывая, что коэффициент горизонтального сдвига $K = \frac{t_T}{t_3} = 20$, построим график прогиба во времени при заданном $q_0 = const$. В таблице /2/ время $t = t_T$

надо заменить на $t_3 = 20t_T$ (t - время наблюдения, t_T - теоретическое, t_3 - экспериментальное).

По формуле (7) составим таблицу, а потом график $W(t)$ (рис. 3):

$t = t_T$	t_3	$1 + \int_0^t K(\tau) d\tau$	$g_{1/2}(t)$	$W \cdot 10^2$
0,2	4	1,0432	0,9937	0,3169
0,4	8	1,0508	0,9962	0,3170
0,6	12	1,0524	0,9977	0,3182
0,8	16	1,0536	0,9988	0,3186
1	20	1,0545	0,9997	0,3189
2	40	1,0574	1,0024	0,3198
3	60	1,0591	1,0040	0,3202
4	80	1,0602	1,0051	0,3205
5	100	1,0611	1,0059	0,3208
6	120	1,0618	1,0066	0,3211
7	140	1,0624	1,0072	0,3213
8	160	1,0628	1,0075	0,3214
9	180	1,0632	1,0079	0,3215
10	200	1,0636	1,0083	0,3216

Литература

1. А.А.Ильяхин. Механика полимеров, 1980, № 2.
2. М.А.Колтунов. Ползучесть и релаксация. "Высшая школа", М., 1976.
3. С.П.Тимoshenko, Дж.Гудьер. Теория упругости. М., 1975.
4. А.Льв. "Математическая теория упругости". 1935.

Поступила 15.V.1993

Грузинский
технический университет



6. მახვილაძე

ბუსინესკისა და სერუიტის პირობებში აქტიური

ვინაობა-ეკვივალენტი სხვადასხვა სახის

რეზონანსი

ა. ილიუშინის აპროქსიმაციის მეთოდის გამოყენებით მოცემულია ბუსინესკისა და სერუიტის პირობებში აქტიური ვინაობის აქტიური ნიშნის გამოთვლის საკითხი, რაც განსაკუთრებით აქტიური ვინაობის აქტიური ნიშნის გამოთვლის საკითხს ეხება. აღნიშნული პირობების გამოთვლის საკითხს ეხება მოცემულია ბუსინესკისა და სერუიტის პირობების გამოთვლის საკითხი.

მოცემულია რეზონანსის მაგალითი.

N. Makhviladze

THE SAME PROBLEMS OF BOUSSINESQ AND CERRUTI FOR VISCOELASTIC BODIES

Summary

Using A. Ilyushin's method of approximation the solution of some viscoelastic problems is given for the case when the solutions of analogous elastic problems are known. The solution of the viscoelastic problems are expressed by the function of creep and relaxation. A numerical example is given.

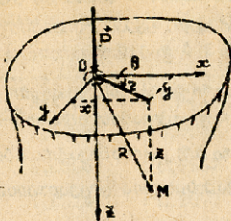


Рис. I

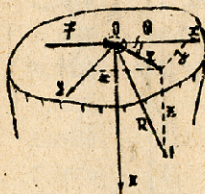


Рис. 2

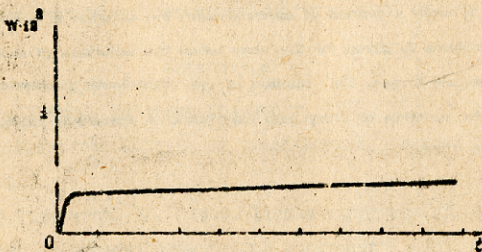


Рис. 3



Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавахишвили

320, 1995

УДК

ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШИРОКОЗАТОСТИ
ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Н. Ануашвили, А. Д. Гецадзе, Ц. А. Гегучадзе

При взаимодействии рассеивающей поверхности объекта с когерентными волнами происходит изменение фазы волн. Для полной регистрации таких волн необходимо их пересечение с волнами источника когерентного излучения и регистрации интерференционной картины, полученной при таком пересечении. Восстановление волны происходит путем дифракции волн источника на зарегистрированной интерференционной картине (дифракционной решетке). Именно фаза в процессе регистрации волн страдает в восстановленных волнах на изменение интенсивности.

Получено выражение относительной интенсивности восстановленного излучения:

$$I_{\text{стн}} = \text{sinc}^2 \left(\Delta R \frac{vT}{\lambda} \right), \quad (1)$$

где функция $\text{sinc}^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2}$, v - скорость движения объекта.

T - время регистрации волн, $\lambda = 0,53 \mu\text{m}$ - длина когерентных волн.

Приведенная зависимость позволяет судить о том, что в процессе регистрации когерентных волн, рассеянных движущимся объектом (последний перемещается на расстояниях $\Delta R \approx \frac{\lambda}{2}$), интенсивность восстановленных когерентных волн равно изменит



(рис.1). Как видно из графика, при перемещении шероховатого объекта на $\lambda/2$ интенсивность восстановленных волн падает до нуля (кривая а); при дальнейшем перемещении объекта интенсивность остается ниже уровня $J_{отн} = 0,5$. Если же шероховатости объекта $\Delta h \ll \lambda$ и такой объект движется в своей плоскости (график в), то интенсивность восстановленного излучения не падает, а сохраняет максимальное значение.

Рассмотрим теперь физическую сущность процессов при перемещении поверхности объекта в своей плоскости. Наглядный пример такого перемещения приводится на рис.2, на котором изображен в качестве исследуемого объекта цилиндр. В связи с тем, что цилиндр вращается вокруг своей оси, его поверхность перемещается в своей же плоскости. Цифрой 1 обозначена часть поверхности, шероховатость которой меньше половины длины волны, или много меньше длины волны. Цифрой 2 обозначена часть поверхности, шероховатость которой много больше длины волны. Когерентное излучение источника 3 облучает регистрирующую среду 4 и исследуемый объект. Волны, рассеянные предметом, пересекаются с волнами источника в области регистрирующей среды 4, в которой возникает интерференционная картина. В результате дифракции волн источника на регистрирующей среде на экране 5 возникает изображение исследуемого объекта. При перемещении той части поверхности объекта, шероховатость которой минимальная, изменение фазы волны происходит незначительно, или почти не происходит. Интерференционная картина изменяется слабо. Смещение дифракционной решетки будет незначительным, и, соответственно, дифракционная эффективность - высокой. Интенсивность восстановленных волн будет максимальной, она будет определяться не вели-

чиной перемещении поверхности объекта.

Пусть величина перемещения поверхности много больше длины волны. Это не приведет к падению интенсивности восстановленных волн. Этому случаю соответствует график (в).

Часть поверхности исследуемого объекта, шероховатость которого большая ($\Delta h \gg \lambda$) несмотря на то, что перемещается в своей же плоскости, приведет к изменению фазы волны источника многократно. Подразумевается, что $\Delta l \gg \lambda$. Изменение фазы произойдет из-за того, что при перемещении неровной поверхности в своей плоскости волны отражаются от разных точек поверхности, отдаленных по-разному от источника. Величина изменения отдаления разных точек поверхности от источника зависит от величины неровностей на поверхности. Так как в данном случае средняя высота неровностей $\Delta h \gg \lambda$, то изменение отдаления точек поверхности также будет много больше длины волны, что приведет к многократному изменению фазы волны источника. Следовательно, произойдет падение интенсивности восстановленных волн.

На экране 5 представлено восстановленное изображение объекта, цифрой 1' обозначена часть поверхности, шероховатость которой минимальная $\Delta h \ll \lambda$, поэтому интенсивность волн в этой части является максимальной. Часть поверхности, обозначенная цифрой 2', соответствует шероховатой части объекта и поэтому, эта часть изображения является затемненной, что обусловлено падением интенсивности волн.

Сизаческий эксперимент проведен в основном с целью экспериментального подтверждения разработанных теоретических положений, а не для проведения точных количественных измерений.

Длина волны источника λ когерентного излучения $\lambda = 0,63 \mu\text{м}$.



Регистрирующей средой служила фотопластина с разрешающей способностью 5000 лин/мм. Плоская исследуемая поверхность размером 7x5 см перемещалась параллельно своей плоскости на расстоянии 0,2 мм в течение времени регистрации волн 0,5 с. На гладкую поверхность заранее были нанесены шероховатости разной степени в различных областях.

Представлен результат физического эксперимента - фотография восстановленного изображения поверхности с различной степенью шероховатости. Распределение интенсивности света на восстановленном изображении образца соответствует распределению шероховатости на исследуемой поверхности. Если возникает задача определения шероховатости в целом по всей поверхности, то достаточно измерить интегральную интенсивность изображения исследуемой поверхности. Если же необходимо определить распределение неровностей по поверхности, нужно провести структурный анализ изображения (декодометрическое измерение).

На рисунке (3) представлено распределение значений относительной $\Delta h/\lambda$.

В конце можно заключить, что преимуществом предложенного метода является:

1. Возможность определения одновременно как интегральных, так и локальных признаков поверхностей.
2. Возможность определения характеристик поверхности в процессе её обработки. В этом случае, как правило, поверхность перемещается в своей плоскости и это обстоятельство не ухудшает воспринимаемый сигнал, как это было раньше, а наоборот способствует реализации данного метода.

Получила 25.IX.1994

Кутаисский
технический университет



ლიტერატურა

1. გ.ა.გეგუჩაძე, ა.ს. ანუაშვილი, ა.პ. ჯინაძე. ზღვიანობის სხვედრები უნივერსიტეტის შრომები, გ.29, 1993, გვ.152-157.
2. И.Р.Пранглывили, А.Н.Ануашвили, В.К.Быховский. Авт.свид. № 652534 Б.И.1979.
3. А.Н.Ануашвили. В кн.: Оптоэлектронные методы и средства обработки изображений. Вильница - Тбилиси. РИИ, 1987, с.95-99.

ა.ანუაშვილი, ა.გეგუჩაძე, გ.გეგუჩაძე

დადასტოვების სიძნელობის ტანსაცმლის ერთი ექსპერიმენტის შედეგები

რ ე ბ ი ე ბ ე

მოცემულია სხვედრების სიძნელობის მიხედვით დადასტოვების ექსპერიმენტების შედეგები. აღინიშნება, რომ აღფრთოვანებულია სიძნელობის ინტერფერენციის ტანსაცმელი შეესაბამება ტანსაცმელს დადასტოვების სიძნელობის ტანსაცმელს.

A. Anuashvili, A. Getsadze, T. Geguchadze

THE DEFINITION OF THE DEGREE OF ROUGHNESS FOR ITS ONE EXPERIMENT

Summary

In the article there is given the results of the physical experiments on the different degrees of roughness of the coherence waves, according the results it is known, that the reconstrac the image of the surface is the same.

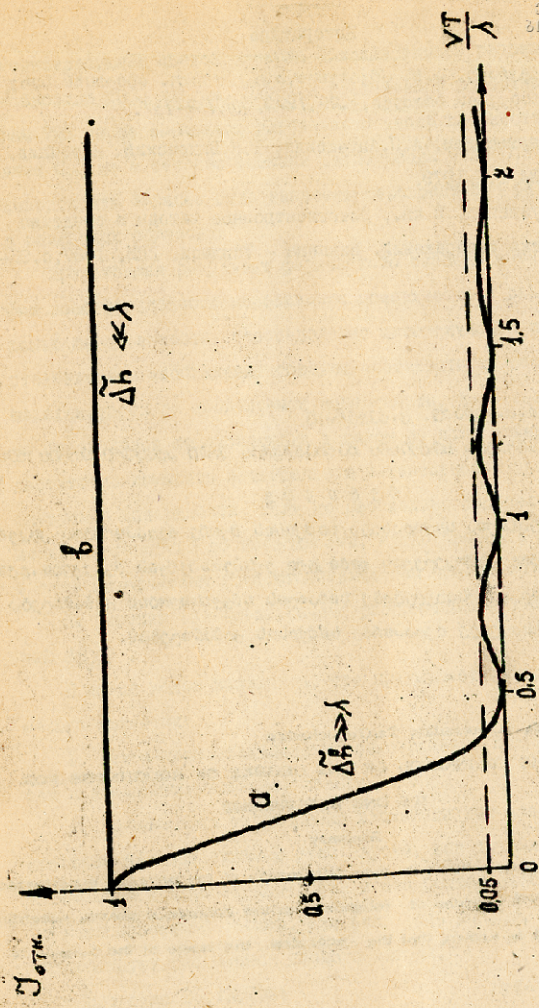


Рис. 1. График изменения интенсивности излучения

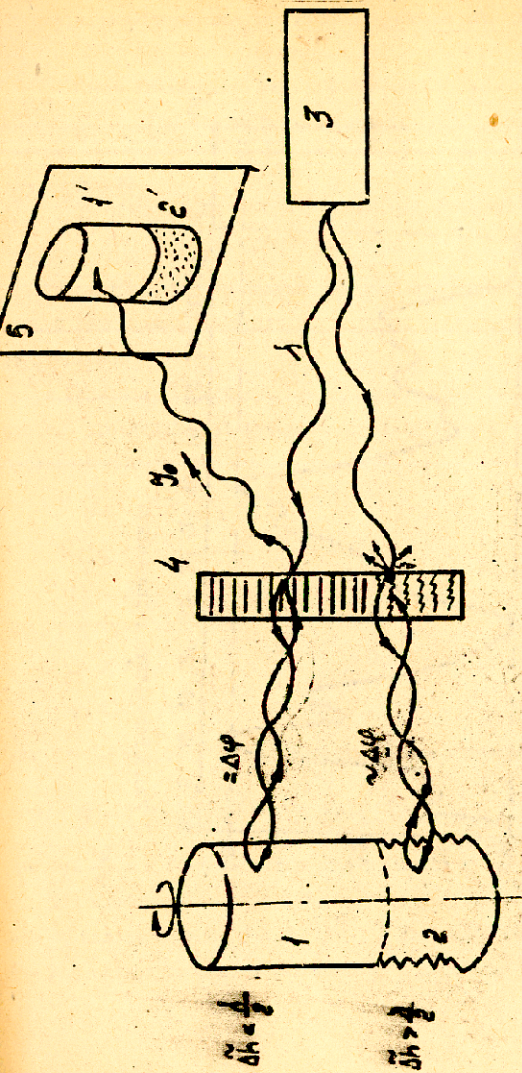


Рис. 2. Схема физического эксперимента

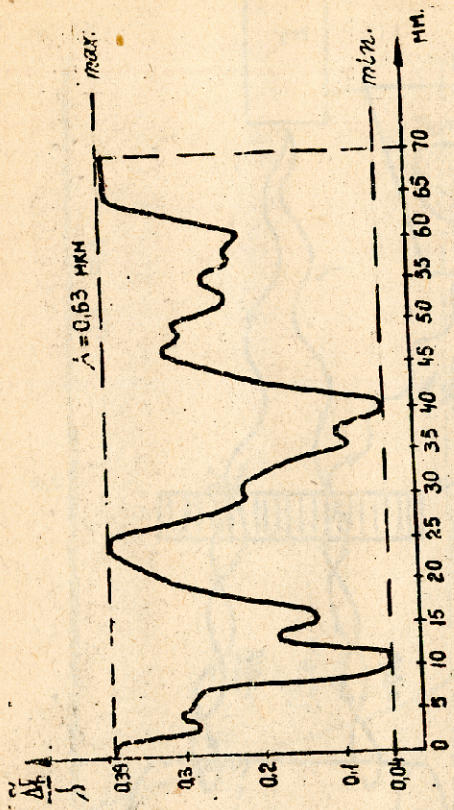


Рис. 3. Результаты эксперимента



решения выписывается в форме:

$$f = \frac{y}{2} \eta - \frac{\eta^3}{2} - \frac{R_0}{280} (3\eta^3 - 2\eta - \eta^7) + O(R_0^2),$$

$$K = -5 + \frac{81}{95} R_0 + O(R_0^2),$$
(4)

где $K = f''' + R_0(f'^2 - ff'')$.

Первые члены в (4) определяют скорость и градиент давления для течения Пуазейля в плоской трубе. Выписанная здесь функция $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$f''' + R_0(f'^2 - ff'') = K$$
(5)

и граничным условиям:

$$f(0) = f''(0) = f'(1) = 0, \quad f(1) = 1.$$
(6)

Приближенное аналитическое решение задачи (5), (6) построено в работе /2/, а численное решение в широком диапазоне изменения параметра R_0 получено в работах /3,4/. Большое количество литературы по исследованию аналогичных задач приводится в монографии /5/.

Ввиду важности таких исследований, в настоящей работе приводится общий метод решения поставленной задачи для малых чисел R_0 .

Введём безразмерные величины

$$\tau = h\alpha, \quad y = \zeta y, \quad u = u_0 u_1, \quad \sigma = \sigma_0 \sigma_1, \quad p = \mathcal{P} p_1$$
(7)

будем искать решение задачи (1)-(2) в виде

$$u_1 = \left(i - \frac{\sigma_0 \tau_1}{u_0} \right) f(y_1), \quad \sigma_1 = \mathcal{P}(y_1),$$
(8)



где u_0 - средняя скорость в сечении $x=0$. Граничные условия, которым удовлетворяют функции f и φ , имеют вид

$$f(\pm 1) = 0, \quad \varphi(\pm 1) = \pm 1. \quad (9)$$

После подстановки (7) и (8) в (1), отбрасывая индекс единицы у безразмерных величин, получим

$$f'' = K_x + R_0(\varphi f' - f^2), \quad (10)$$

$$\varphi'' = K_y + R_0 \varphi \varphi', \quad (11)$$

$$\varphi' = f. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$ER = \frac{\partial P}{\partial x} = K_x, \quad ER \frac{\partial P}{\partial y} = K_y,$$

где $E = \frac{\rho}{\rho_0 u_0^2}$ - число Эйлера, $R = \frac{u_0 h}{\nu}$ - динамическое число Рейнольдса.

Из [1] легко доказывается, что $K_x = \text{const} = K$.

Если известна функция Грина задачи

$$z'' = 0, \quad z(\pm 1) = 0,$$

то решение задачи (9), (10) можно представить в виде

$$f(y) = K \int_{-1}^{+1} G(y, \eta) d\eta + R_0 \int_{-1}^{+1} B(\eta) G(y, \eta) d\eta, \quad (13)$$

где введено обозначение $B(\eta) = \varphi f' - f^2$, а функция Грина имеет вид

$$G(y, \eta) = \begin{cases} G_1 = \frac{\eta - y}{2}(y + 1), & -1 \leq y < \eta, \\ G_2 = \frac{\eta + 1}{2}(y - 1), & \eta, y \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$



Будем искать решение (13) в виде рядов по степеням малого параметра

$$f(y) = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_0^\beta f_\beta, \quad \varphi = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_0^\beta \varphi_\beta, \quad (15)$$

$$K = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_0^\beta K_\beta, \quad B = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_0^\beta B_\beta.$$

Подставляя (15) в (13) и (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях R_0 , получим следующие рекуррентные соотношения:

$$f_0 = K_0 \int_{-1}^{+1} G(y, \eta) d\eta = \frac{K_0}{\lambda} (y^2 - 1),$$

$$f_{\beta+1} = K_{\beta+1} \int_{-1}^{+1} G(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^{+1} B_\beta(\eta) G(y, \eta) d\eta,$$

$$\varphi_0 = K_0 \int_{-1}^y \left(\int_{-1}^{+1} G d\eta \right) d\alpha - 1,$$

$$\varphi_{\beta+1} = K_{\beta+1} \int_{-1}^y \left(\int_{-1}^{+1} G d\eta \right) d\alpha + \int_{-1}^y \left(\int_{-1}^{+1} B_\beta G d\eta \right) d\alpha.$$

Все функции f_β удовлетворяют соответствующим условиям (9), а функции φ_β — только одному граничному условию

$$\varphi_0(-1) = -1, \quad \varphi_\beta(-1) = 0, \quad \beta > 0.$$

удовлетворение второго условия

$$\lim_{y \rightarrow 1} \varphi_0 = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 1} \varphi_\beta = 0$$

дает возможность определить величины K по формулам:

$$K_0 = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\varphi_0 + 1}{\int_{-1}^y \left(\int_{-1}^{+1} G d\eta \right) d\alpha},$$

$$K_{\beta+1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\int_{-1}^y \left(\int_{-1}^{+1} B_\beta G d\eta \right) d\alpha}{\int_{-1}^y \left(\int_{-1}^{+1} G d\eta \right) d\alpha}.$$

Вычисляя интегралы, для первых трех приближений получим:

$$f_0(y) = \frac{3}{2} (1 - y^2), \quad \varphi_0(y) = \frac{1}{2} (3y - y^3), \quad K_0 = -3,$$

$$f_1(y) = \frac{1}{280} (9y^2 - 7y^6 - 2), \quad \varphi_1(y) = \frac{1}{280} (3y^3 - y^7 - 2y), \quad K_1 = \frac{81}{35}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{35^2 \cdot 1056} (154y^{10} - 3465y^8 + 1386y^6 + 2628y^2 - 403),$$

$$\varphi_2(y) = \frac{1}{35^2 \cdot 1056} (14y^{11} - 385y^9 + 198y^7 + 876y^3 - 403y),$$

$$K_2 = -\frac{234}{35^2 \cdot 11}$$

Как видно из этих формул, первые два приближения дают результаты, полученные в работе Бермана.

Приведенный метод дает возможность найти любое приближение поставленной задачи для малых чисел Рейнольдса.

Поступила 15.1.1994

Кафедра
теоретической механики

Литература

1. A.S.Berman. J.Appl. Phys., 1953, v.24, N9, p.1232-1235.
2. M.Morduchow. Quart. Appl. Math., 1957, v.14, N 4, p.361-368.
3. R.M.Terrill. Aeronaut. Quart., 1964, v.15, N 3, p.299-310.
4. P.M.White, B.F. Bartold, M.J.Goglia. J.Appl. Mech., 1958, v. 25, N4, p. 613-617.
5. В.М.Ерошенко, Л.И.Зайчик. Гидродинамика и теплообмен на проницаемых поверхностях. М., Наука, 1967, с.274.



ჯ. შარიკაძე

ბერმანის ამოცანის ამოხსნის ერთი ზოგადი მეთოდის აღიარება

რ ე ბ ე ბ ე

ბრუნდება ბერმანის ამოცანის ამოხსნის ზოგადი მეთოდი.

J. Sharikadze

ON ONE GENERAL METHOD OF SOLUTION OF BERMAN'S
PROBLEM

Summary

General method of solution of Berman's problem is given.

Труды Тбилисского государственного университета

И.И. Дзавახишвили

320, 1995

УДК 532

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ
ВРАЩЕНИЯ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ В СЛАБOPPOBODЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

И. А. Джикидзе

Воспользуемся уравнениями движения слабoppoBодящей жидкости,

находящейся в однородном внешнем магнитном поле

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{v_x^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\Delta v_x - \frac{v_x}{r^2} \right) - \frac{c B_0^2}{\rho} v_x, \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_x v_\varphi}{r} = \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) - \frac{c B_0^2}{\rho} v_\varphi, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_x}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Так как рассматривается движение слабoppoBодящей жидкости, вызванное вращением пористой пластины, перпендикулярно которой приложено внешнее однородное магнитное поле, будем иметь следующие предельные условия:

$$\begin{cases} t=0, & v_x = v_\varphi = v_z = 0, \\ x=0, & v_x = 0, v_\varphi = r\omega(t), v_z = v_0(t), \\ z=\infty, & v_x = v_\varphi = v_z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если ввести безразмерные величины

$$\begin{cases} v_x = r\omega_0 f(\eta, t'), & v_\varphi = r\omega_0 \varphi(\eta, t'), & v_z = \sqrt{\nu\omega_0} \psi(\eta, t'), \\ \rho = -\rho_0 \omega_0 P(\eta), & z = \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}} \eta, & t = \frac{\nu}{\omega_0} t', \\ \omega = \omega_0 \omega', & v_0 = \sqrt{\nu\omega_0} v_0' \end{cases}$$



и для простоты воспользоваться величинами без штрихов, то система уравнений (1) в безразмерных величинах запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial t} - m^2 f = \psi \frac{\partial f}{\partial \eta} + f^2 - \psi^2, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - m^2 \psi = \psi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 2f\psi, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2f, \end{cases} \quad (3)$$

где $m^2 = \frac{6B_0^2}{\rho\omega_0}$.

Для системы (3) будем иметь следующие предельные условия:

$$\begin{cases} t=0, & f=\psi=\varphi=0, \\ \eta=0, & f=0, \quad \psi=\omega(t), \quad \varphi=U_0(t), \\ \eta \rightarrow \infty, & f=0, \quad \psi=0. \end{cases} \quad (4)$$

Для нахождения толщины слоя, образованной у вращающейся пластины, вместе асимптотического слоя рассмотрим слой конечной толщины, которая будет меняться со временем. Для ее определения воспользуемся условием непрерывного перехода продольной скорости пограничного слоя в скорость внешнего потока

$$\eta = \delta(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0.$$

Таким образом, для системы (3) будем иметь следующие условия:

$$\begin{cases} t=0, & f=\psi=\varphi=0, \\ \eta=0, & f=0, \quad \psi=\omega(t), \quad \varphi=U_0(t), \\ \eta=\delta(t), & f=0, \quad \psi=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}=0. \end{cases} \quad (5)$$

Для решения задачи применим метод последовательных приближений, рассмотренный в п. 1/1/ и распространенный для задач магнитной гидродинамики в работах /2/ - /6/.

Ищем решения задачи (3) - (5) в виде

$$f = f_0 + f_1 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$$

Функции f_0 и φ_0 являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} = 0, \quad \begin{cases} \eta = 0, & f_0 = 0, \\ \eta = \delta, & f_0 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} = 0, \quad \begin{cases} \eta = 0, & \varphi_0 = \omega, \\ \eta = \delta, & \varphi_0 = 0, \end{cases}$$

а функция φ_0 определяется по формуле

$$\varphi_0 = -2 \int_0^\eta f_0 d\zeta + \psi_0.$$

Функции f_0 , φ_0 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ \varphi_0 &= \omega \left(1 - \frac{\eta}{\delta}\right) \\ \psi_0 &= \psi_0. \end{aligned}$$

Функции f_1 и φ_1 являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} = \varphi_0 \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + f_0^2 - \varphi_0^2 + \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + m^2 f_0, \quad \begin{cases} \eta = 0, & f_1 = 0, \\ \eta = \delta, & f_1 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} = \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + 2f_0 \varphi_0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + m^2 \varphi_0, \quad \begin{cases} \eta = 0, & \varphi_1 = 0, \\ \eta = \delta, & \varphi_1 = 0, \end{cases}$$

а функция φ_1 определяется по формуле

$$\varphi_1 = -2 \int_0^\eta f_1 d\zeta.$$

Функции f_1 , φ_1 , ψ_1 имеют следующий вид:

$$f_1 = -\frac{\omega^2}{12} \left(\frac{\eta^4}{\delta^2} - \frac{4\eta^3}{\delta} + \eta^2 - 3\delta\eta \right),$$

$$\varphi_1 = -\frac{\psi_0 \omega}{2} \left(\frac{\eta^2}{\delta} - \eta \right) + (\omega^2 + \omega m^2) \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{6\delta} - \frac{\delta}{3} \eta \right) + \frac{\omega \delta^2}{\delta^2} \left(\frac{\eta^3}{\delta^2} - \eta \right),$$

$$\psi_1 = \frac{\omega}{\delta} \left(\frac{\eta^5}{5\delta^2} - \frac{\eta^4}{\delta} + 2\eta^3 - \frac{3\delta}{2} \eta \right).$$

Для определения толщины слоя $\delta(t)$ из условия

$$\gamma = \delta(t), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = 0$$

будем иметь следующее уравнение:

$$(\delta^2)' + [(\ln \omega)' + m^2] \delta^2 - 3\alpha \delta = 6. \quad (6)$$

Рассмотрим несколько частных случаев решения уравнения (6), когда решение можно будет выписать в явном виде.

1) Пусть $\alpha_0(t) = a\delta(t)$, где $a = \text{const}$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$(\delta^2)' + [(\ln \omega)' + m^2 - 3a] \delta^2 = 6. \quad (7)$$

Из последнего уравнения получим решение

$$\delta^2 = \frac{6}{\omega} e^{-(m^2-3a)t} \int_0^t \alpha(\tau) e^{(m^2-3a)\tau} d\tau.$$

В частности, если $\omega = \text{const}$, то

$$\delta = \sqrt{\frac{6}{m^2-3a} (1 - e^{-(m^2-3a)t})}$$

Допустим, что скорость просачивания выбрана в виде

$$\alpha_0(t) = \frac{m^2}{3} \delta(t), \quad (8)$$

т.е. $a = \frac{m^2}{3}$. Тогда при $\omega = \text{const}$ решение уравнения (7) имеет вид

$$\delta = \sqrt{6t}.$$

2) Если скорость просачивания выбрана в виде

$$\alpha_0(t) = \frac{(\ln \omega)' \delta(t) - 2\delta'(t)}{3},$$

то из уравнения (6) получим

$$(\delta^2)' + \frac{m^2}{2} \delta^2 = 3,$$

из которого находим

$$\delta = \sqrt{\frac{6}{m^2} \left(1 - e^{-\frac{m^2}{2}t}\right)}. \quad (9)$$

3) Пусть $\omega_0(t) = \frac{b}{\delta(t)}$, где $b = const$. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$(\delta^2)' + [(\ln \omega)' + m^2] \delta^2 = 6 + 3b,$$

из которого находим

$$\delta^2 = \frac{3(2+b)}{\omega} e^{-m^2 t} \int_0^t \omega(\tau) e^{m^2 \tau} d\tau.$$

В частности, если $\omega = const$, то толщина слоя равна

$$\delta = \sqrt{\frac{3(2+b)}{m^2} \left(1 - e^{-m^2 t}\right)}.$$

4) Если скорость просачивания выбрана в виде

$$\omega_0(t) = \frac{(\ln \omega)' + m^2}{3} \delta(t), \quad (10)$$

то из уравнения (6) получим простое уравнение для определения толщины слоя

$$(\delta^2)' = 6.$$

Отсюда

$$\delta = \sqrt{6t}. \quad (11)$$

Из полученных формул видно, что толщина слоя $\delta(t)$, при выборе скорости просачивания в форме (10), не зависит от значения угловой скорости $\omega(t)$ и, таким образом, для любых $\omega(t)$ имеет вид (11).

Если же скорость просачивания выбрана в форме (8), то толщина слоя уже зависит от значения $\omega(t)$ и только в случае $\omega = const$ совпадает с (11).

Рассмотрим теплоотдачу вращающейся пористой пластины при наличии магнитного поля. Напишем уравнение баланса энергии

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + v_{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = \lambda \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) \right] + \mu \left\{ \lambda \left(\frac{\partial v_{\eta}}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_{\eta}}{\eta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \eta} - \frac{v_{\varphi}}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} \right)^2 \right\}. \quad (12)$$

Уравнение (12) должно решаться при следующих условиях:

$$\begin{cases} \xi = 0, & T = T_w(\xi, t), \\ \xi = \infty, & T = T_{\infty}. \end{cases} \quad (13)$$

Поскольку толщина пограничного слоя и профили безразмерных скоростей не зависят от радиуса, то распределение температуры в пограничном слое также можно положить не зависящим от радиуса. Тогда в соответствии с уравнением (12), пренебрегая диссипативными членами и используя безразмерные величины, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - Pr \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \varphi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (14)$$

где должны решить при следующих условиях:

$$\begin{cases} \eta = 0, & T = T_w(\eta, t), \\ \eta = \infty, & T = T_{\infty}. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $Pr = \frac{\rho c_p}{\lambda}$ - число Прандтля.

Для нахождения толщины теплового пограничного слоя вместо асимптотического слоя рассмотрим слой конечной толщины. Для ее определения будем иметь условие

$$\eta = \delta_T(t), \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0.$$

Таким образом, уравнение (14) должны решить в следующих

условиях:

$$\begin{aligned} \eta=0, \quad T=T_w(\eta, t), \\ \eta=\delta_T(t), \quad T=T_\infty, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta}=0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для решения задачи применим метод последовательных приближений. Ищем решения задачи (14)-(16) в виде

$$T = T_0 + T_1 + \dots$$

где функция T_0 является решением задачи

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\begin{cases} \eta=0, & T_0=T_w, \\ \eta=\delta_T, & T_0=T_\infty \end{cases}$$

T_0 определяется по формуле

$$T_0 = \frac{\theta}{\delta_T} \eta + T_w,$$

где $\theta = T_\infty - T_w$.

Функция T_1 является решением задачи

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} = P_1 \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} + \psi_0 \frac{\partial T_0}{\partial \eta} \right),$$

$$\begin{cases} \eta=0, & T_1=0, \\ \eta=\delta_T, & T_1=0, \end{cases}$$

которое имеет вид

$$T_1 = P_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta}{\delta_T} \right) \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\delta_T^2}{6} \eta \right) + \left(\frac{\partial T_w}{\partial t} + \psi_0 \frac{\theta}{\delta_T} \right) \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\delta_T}{2} \eta \right) \right].$$

Для определения толщины слоя $\delta_T(t)$ из условия

$$\eta=\delta_T, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta}=0,$$

будем иметь следующее равенство

$$(\delta_T^2)' - \left[2(\ln \theta)' + \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t} \right] \delta_T^2 - 3\psi_0 \delta_T = \frac{6}{P_1}. \quad (17)$$

Рассмотрим несколько частных случаев решения уравнения (17), когда решение можно будет выписать в явном виде.

1) Пусть $v_0(t) = a_T \delta_T(t)$, где a_T - некоторая величина. Тогда уравнение (17) примет вид

$$(\delta_T^2)' - [2(\ln \theta)' + \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t} - 3a_T] \delta_T^2 = \frac{6}{P_1} \quad (18)$$

Из последнего уравнения получим решение

$$\delta_T^2 = \frac{6\theta^2}{P_1} e^{\int_0^t [\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t} - 3a_T] d\tau} \int_0^t \frac{1}{\theta} e^{-\int_0^\tau [\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t} - 3a_T] d\tau} d\tau$$

В частности, если $\theta = \text{const}$, то

$$\delta_T = \sqrt{\frac{2}{a_T P_1} (1 - e^{-3a_T t})}$$

Допустим, что скорость просачивания выбрана в виде

$$v_0(t) = \frac{1}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t} \delta_T(t), \quad (19)$$

т.е. $a_T = \frac{1}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t}$. Тогда

$$\delta_T = \sqrt{\frac{6\theta^2}{P_1} \int_0^t \frac{d\tau}{\theta^2}}$$

Если здесь $\theta = \text{const}$, то

$$\delta_T = \sqrt{\frac{6t}{P_1}}$$

2) Если скорость просачивания выбрать в виде

$$v_0(t) = \frac{\frac{6}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t} \delta_T' - 2(\ln \theta)' \delta_T'}{3}, \quad (20)$$

то из уравнения (17) получим

$$(\delta_T^2)' - \frac{\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t}}{1 - \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t}} \delta_T^2 = \frac{6}{P_2 \left(1 - \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_w}{\partial t}\right)},$$

из которого находим

$$\delta_T^2 = \frac{\epsilon}{\rho_1} e^{\int_0^t \frac{\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial r}}{1 - \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial r}} dr} \int_0^t \frac{e^{-\int_0^r \frac{\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial \alpha}}{1 - \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial \alpha}} d\alpha}}{1 - \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial r}} d\tau$$

В частности, если $\theta = \text{const}$,

$$\delta_T = \sqrt{\frac{\epsilon t}{\rho_1}}$$

3) Пусть $v_0(t) = \frac{b_T}{\delta_T(t)}$, где b_T — некоторая величина.

Тогда уравнение (17) принимает вид

$$(\delta_T^2)' - [2(\ln \theta)' + \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial t}] \delta_T^2 = \frac{\epsilon}{\rho_1} + 3b_T,$$

из которого находим

$$\delta_T^2 = \theta^2 \left(\frac{\epsilon}{\rho_1} + 3b_T \right) e^{\int_0^t \frac{\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial r}}{\theta^2} d\tau} \int_0^t \frac{e^{-\int_0^r \frac{\frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial \alpha}}{\theta^2} d\alpha}}{\theta^2} d\tau$$

При $\theta = \text{const}$

$$\delta_T = \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\rho_1} + 3b_T \right) t}$$

4) Если скорость просачивания выбрана в виде

$$v_0(t) = \frac{2(\ln \theta)' + \frac{3}{\theta} \frac{\partial T_W}{\partial t}}{3} \delta_T(t), \quad (21)$$

то из уравнения (17) получим простое уравнение для определения толщины слоя

$$(\delta_T^2)' = \frac{\epsilon}{\rho_1}$$

Отсюда

$$\delta_T = \sqrt{\frac{\epsilon t}{\rho_1}} \quad (22)$$



Как видно, толщина теплового пограничного слоя $\delta_T(t)$ при выборе скорости просачивания в форме (21) при любых θ имеет вид (22). Если же скорость просачивания выбрана в форме (19) или (20), то толщина слоя только при $\theta = const$ совпадает с (22).

Так как при расчете толщины динамического пограничного слоя при интегрировании уравнения толщины слоя выбраны разные значения скорости просачивания и аналогично это сделано для нахождения толщины теплового пограничного слоя, то существует функциональная зависимость между толщинами теплового и динамического пограничного слоя.

Например, если $v_0 = a\delta(t)$ и $v_0 = a_T \delta_T(t)$, то в частном случае, когда $\omega = const$ и $\theta = const$, отношение δ/δ_T будет

$$\frac{\delta(t)}{\delta_T(t)} = \sqrt{\frac{3P_1 a_T [1 - e^{-(m^2 - 3a)t}]}{(m^2 - 3a)(1 - e^{-3a_T t})}}$$

Если же $v_0 = \frac{b}{\delta(t)}$ и $v_0 = \frac{b_T}{\delta_T(t)}$, то при $\omega = const$ и $\theta = const$ получим

$$\frac{\delta(t)}{\delta_T(t)} = \sqrt{\frac{3(2+b)P_1 (1 - e^{-m^2 t})}{m^2 (b + 3P_1 b_T) t}}$$

а если при вычислении динамического и теплового пограничного слоя скорость просачивания выбрана в виде (10) и (21), то при любых ω и θ отношение δ/δ_T будет постоянным

$$\frac{\delta(t)}{\delta_T(t)} = \sqrt{P_1}$$

Если по полученным выражениям $\delta(t)$ и $\delta_T(t)$ вычислить компоненты скорости U_x, U_y, U_z , окружную составляющую касательного напр. ления - τ_{xz} , момент сопротивления пластины - M , коэффициент момента сопротивления - C_M и коэффи-

коэффициент теплоотдачи $-N$, будем иметь:

а) для компонентов скорости

$$u_x = \tau \omega_0 \left[-\frac{\omega^2}{12} \left(\frac{\eta^4}{\delta^2} - \frac{4\eta^3}{\delta} + 6\eta^2 - 3\delta\eta \right) \right],$$

$$u_y = \tau \omega_0 \left[\omega \left(1 - \frac{\eta}{\delta} \right) - \frac{v_0 \omega}{2} \left(\frac{\eta^2}{\delta} - \eta \right) + (\omega' + \omega \tau^2) \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{6\delta} - \frac{\delta}{3} \eta \right) + \frac{\omega \delta'}{6} \left(\frac{\eta^3}{\delta^2} - \eta \right) \right],$$

$$u_z = \sqrt{\nu} \omega_0 \left[v_0 + \frac{\omega}{6} \left(\frac{\eta^5}{\delta^2} - \frac{\eta^4}{\delta} + 2\eta^3 - \frac{3}{2} \delta \eta \right) \right];$$

б) для окружной составляющей касательного напряжения

$$\tau_{z\varphi} = -\frac{\tau \rho}{6} \sqrt{\nu} \omega_0^3 \left[\left(\frac{6}{\delta} - 3v_0 + \delta' \right) \omega + 2(\omega' + \omega \tau^2) \delta \right];$$

в) для момента сопротивления пластины

$$M = \frac{\rho \ell^4}{12} \sqrt{\nu} \omega_0^3 \left[\left(\frac{6}{\delta} - 3v_0 + \delta' \right) \omega + 2(\omega' + \omega \tau^2) \delta \right];$$

г) для коэффициента момента сопротивления

$$c_M = \frac{\rho \ell^4}{3\sqrt{Re}} \left[\left(\frac{6}{\delta} - 3v_0 + \delta' \right) \omega + 2(\omega' + \omega \tau^2) \delta \right],$$

где $Re = \frac{\tau^2 \omega_0}{\nu}$ - число Рейнольдса;

д) для коэффициента теплоотдачи

$$N = -\frac{\tau}{T_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + Pr \left[\frac{\delta' \tau - 3v_0}{6} \theta - \left(\theta' + 3 \frac{\partial T_w}{\partial t} \right) \frac{\delta \tau}{2} \right] \right\}.$$

Поступила 15.V.1994

Технический университет



ლიტერატურა

1. М. Е. Швец. Прикладная математика и механика, 13,3,1949, 257-266.
2. Д. В. Шарикадзе. Сб.АН Груз.ССР, 45,1,1967, 43-46.
3. Д. В. Шарикадзе. Труды I респ. конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену, Киевский университет, 1969, 161-164.
4. Д. В. Шарикадзе. Магнитная гидродинамика, 4,1968, 53-55.
5. Л. И. Бузникова, Б. Г. Мотковский, В. В. Кириллов. Изв.АН СССР, Механика жидкости и газа, I, 1969, 143-148.
6. Д. В. Шарикадзе, З. А. Керселидзе. Магнитная гидродинамика, 2, 1974, 138-140.
7. Н. А. Слезкин. Динамика вязкой несжимаемой жидкости, Москва, 1955, с. 519.
8. С. М. Тарг. Основные задачи теории ламинарных течений, Москва-Ленинград, 1951, с. 420.

დასკვნები

სამსახურების სიჩქარეში არსებული დინამიკური ცვლილების კონსტანტის დასაბუთების მიზნით გამოიყენებოდა მათემატიკური მეთოდები

ს. ვ. ბ. შ. შ. შ.

შედეგობები დასაბუთების მიზნით გამოიყენებოდა, სასრული სიჩქარის დინამიკური და სიჩქარე სიჩქარეში დინამიკური ცვლილების და კონსტანტის დასაბუთების მიზნით გამოიყენებოდა მათემატიკური მეთოდები სიჩქარეში დინამიკური ცვლილების დასაბუთების მიზნით გამოიყენებოდა მათემატიკური მეთოდები

შედეგობები დასაბუთების მიზნით გამოიყენებოდა მათემატიკური მეთოდები სიჩქარეში დინამიკური ცვლილების დასაბუთების მიზნით გამოიყენებოდა მათემატიკური მეთოდები

L. Jikidze

APPROXIMATE METHOD OF THE NONSTATIONARY ROTATION
PROBLEM OF THE POROUS PLATE IN THE WEAK CONDUCTION
FLUID

Summary

By means of the method of the consistent approximation the finite over thicknesses of dynamic and heat border levels introduction and using Karman's substitution non standart problems of the porous plate rotation in the weak conduction fluid with the heat transfer are solved. All the characteristic flows while definite values of speed of percolation were found.



თბილისის სახ. მშენებლის საბჭოების საბჭოების უნივერსიტეტი
 მშენებელი

Труды Тбилисского государственного университета
 им. И. Джавахишвили
 320, 1995

УДК 12.172

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ВНЕТРИВЕИНОЙ КЕТАМИНОВОЙ
 АНЕСТЕЗИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ
 МЕТОДОВ "СТАТГРАФ"

М.Г. Хятишвили, Г.И. Орахлашвили

Пакет прикладных программ статистических методов "Статграф" содержит так называемые традиционные статистические методы, широко применяемые в медицинских исследованиях: корреляционный, регрессионный и дисперсионный анализ, анализ данных, метод главных компонент, факторный анализ и т.д.

Пакет выдает как численные, так и графические результаты.

Программа корреляционного анализа выдает корреляционную матрицу. Для оценки внутренних связей в пакете содержится программы простой и множественной регрессии, последняя включает и дисперсионный анализ.

Результаты вычисления выдаются в виде таблицы (см. табл. 4.1), а точнее, при множественном варианте таблица содержит: коэффициент регрессии, стандартную ошибку, t - статистику и уровень значимости, коэффициенты детерминации, множественной корреляции, критерий Дарбина-Уотсона.

Тут же дается таблица (см. табл. 4.2), содержащая величины, необходимые для дисперсионного анализа: сумма квадратов - относительно регрессии, обусловленная регрессией, относительно



среднего; степень свободы, F - статистика и P - значение, а дополнительная таблица (см. табл. 4.3) конкретизирует те же величины для каждой переменной.

Перейдем конкретно к нашей задаче. Изучено влияние внутривенной кетаминовой анестезии на 26-ти пациентах. Измерены десять параметров: систолическое и диастолическое давление, частота пульса, дыхания, характеристики кардиограммы - ритм, мода, вариационный размах, среднее квадратическое отклонение, амплитуда моды и индекса напряжения.

Измерения проведены на шести этапах исследования:

- 1⁰. исходное состояние;
- 2⁰. после премедикации;
- 3⁰. вводный наркоз;
- 4⁰. начало операции;
- 5⁰. на высоте операции;
- 6⁰. после пробуждения.

Перечисленные в начале параметры меняются на разных этапах исследования, поэтому назовем их переменными. Введем соответственно идентификации:

$b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$ ($i = 1, 2, \dots, 10$), где буквы b, c, d, e, f, g соответствуют этапам, а индексы i - указанным 10-ти переменным:

- при
- $i=1$ имеем систолическое давление;
 - $i=2$ -" - диастолическое давление;
 - $i=3$ -" - частоту пульса;
 - $i=4$ -" - частоту дыхания;
 - $i=5$ -" - ср. ритм кардиограммы;
 - $i=6$ -" - моду кардиограммы;



- $i=7$ -- вариационный размах;
- $i=8$ -- дисперсию;
- $i=9$ -- амплитуду моды;
- $i=10$ -- индекс напряжения.

Например, t_5 - это сравнительный ритм кардиограммы на I^o этапе, f_i - систолическое давление на 5^o этапе и т.д.

Отметим, что переменные с индексами $i = 1, 2, 3, 4, 5$ принимаются как так называемые независимые переменные, а с индексами $i = 6, 7, 8, 9, 10$ - как зависимые. Применение слова "независимые" не следует смешивать с понятием "статистическая независимость", ибо в дальнейшем исследованы взаимовлияния и между ними.

Основной задачей является установление самого факта наличия (или отсутствия) статистически значимой связи между независимыми и зависимыми переменными, выявление причин связей между ними, т.е. проникновение в "физический механизм" изучаемых статистических связей.

Исследование данных начинаем с анализа выборочных статистик, которые получаем при помощи программы т.н. описательных методов - суммарной статистики, которая выдает: среднюю выборки, дисперсию, стандартное отклонение, минимальную и максимальную величины, размах нижней и верхней квартили, межквартильный размах, медиану, коэффициенты асимметрии и эксцесса (см.табл. I).

В табл. I дается суммарная статистика диастолического давления на всех шести этапах исследования.

Сравнивая полученные результаты, можно сказать, что распределения выборок не очень отличаются друг от друга: только на I^o, 2^o и 4^o этапах распределение имеет "перекос" в левую сторону и более плоскую вершину, ... нормальное распределение, а на 5^o и 6^o этапах - "перекос" в правую сторону и острый

вершину.

Соответствующий закон распределения для каждой переменной представлен в виде частотной гистограммы и там же вырисовывается график плотности нормального распределения (см. рис. 1). В специальной таблице даются χ^2 -оценки, оценивающие степень нормальности распределения:

$$\chi^2 = \sum \frac{(P - P')^2}{P'}$$

где P - эмпирическая, а P' - соответствующая теоретическая, т.е. ожидаемая частоты (см. табл. 2).

Оценка значимости критерия χ^2 -квadrat производится с помощью специальной таблицы, где содержатся стандартные значения.

В данном эксперименте нормальному закону распределения не соответствуют:

- диастолическое давление на 6⁰ этапе;
- систолическое давление на 1⁰, 3⁰, 4⁰, 5⁰ и 6⁰ этапах;
- частота пульса на 3⁰ этапе;
- вариационный размах кардиограммы на 1⁰, 3⁰, 4⁰, 5⁰ этапах;
- дисперсия - на 1⁰, 2⁰, 3⁰, 4⁰ этапах;
- индекс напряжения на 3⁰, 5⁰, 6⁰ этапах.

В методах по многомерному статистическому анализу имеется программа для построения графика так называемого "солнечного луча", который визуализирует масштабные соотношения каких-либо интересующих вас или для каждого пациента или для среднего уровня. Выдается шаблон, лучи которого указывают на расположение той или иной величины (см. рис. 2).

Таблица I

	b_1	c_1	d_1
Объем выборки	26	26	26
с зная	80.1923	80.1923	97.6923
медиана	80	80	100
мода	80	80	100
среднее геометрическое	79.0691	79.1933	97.3024
дисперсия	174.532	156.962	72.4615
стандартное отклонение	13.2273	12.5284	8.51243
стандартная ошибка	2.59409	2.45703	1.66943
минимум	55	55	70
максимум	105	100	110
размах	50	45	40
нижний квартиль	80	70	95
верхний квартиль	90	90	100
межквартильный размах	10	20	5
коэф. вариации	-0.227477	-0.344622	-1.30944
эксцесс	-0.322036	-0.228796	3.4148

Таблица 2

χ^2 - квадрат тест

Нижняя граница	Верхняя граница	Наблюдаемая частота	Ожидаемая частота	χ^2 - квадрат
Меньше чем .507	.507	8	6	.96155
.507	.587	6	7	.25356
.587	.640	4	5	.26490
Больше .640		8	8	.00528

χ^2 - квадрат = 1.48529

Уровень значимости = 0.222948

На рис. 2 изображена частота пульса на шести этапах исследования для каждого больного: на шаблоне луч β_3 указывается место расположения частоты пульса на 1^о этапе, луч ζ_3 - частоты пульса на 2^о этапе и т.д., а наверху изображены те же величины для каждого пациента (в соответствующих направлениях).

Чтобы статистически оценить, отклоняется ли та или иная величина (давление, частота пульса и т.д.) от "нормы", т.е. от величины в нормальном состоянии человека (в нашем случае выборка на 2-ом этапе исследования), выполняется проверка гипотезы о равенстве двух средних как в случае разных дисперсий, так и - наоборот. Для этого в пакете есть программа, соответствующая анализу двух выборок и дающая оценку достоверности различий двух выборок, одна из которых соответствует нормальному состоянию. Сравниваются их выборочные средние и дисперсии, которые соответственно равны:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

где n - число наблюдений; x_i - компоненты выборки;
 \bar{x} - средняя выборка.

Визуализированный метод выдает выборочные статистики, доверительные интервалы для различия между выборками и оценку статистики Стьюдента- t для гипотезы H_0 : выборочные средние двух выборок равны, при альтернативе H_1 : выборочные средние отличаются друг от друга; дается уровень значимости (см. табл. 3).

Для наглядности этого метода имеется многомерный график "Блок-и-дот", который дает визуальное представление о распределении данных выборок (см. рис. 3).

	C_9	e_9	средняя
Статистика выборки:			
число наблюдений	26	26	52
среднее значение	29.7558	37.8462	33.801
среднее отклонение	175.546	210.775	193.161
Стандартное отклонение	13.2494	14.5181	13.8992
метка	31	35.5	38
Доверительный интервал для разли- чия в средних значениях: (равное сред. отклонение)	95		
выборка 1 - выборка 2	-15.8345	-0.346269	50
(неравное сред. отклонение)			
выборка 1 - выборка 2	-15.8361	-0.34473	49.6
Доверительный интервал для соот- нош. сред. отклонений: 0			
выборка 1 ÷ выборка 2			
НС : разника = 0			
Альфа : разника ≠ 0			
Альфа = 0,05			
t-статистика = -2.09865			
уровень значимости = 0.0409013			



Центральный "ящик" покрывает область, которая содержит в среднем 50% данных между нижним и верхним квартилями, центральная линия представляет медиану, а "усы" выступают в направлении крайних точек.

Если существуют слишком крайние значения, они наносятся как отдельные точки, помимо "ящика".

На основании данных эксперимента делаются следующие выводы: от "нормы" отклоняются:

- на 1^о этапе - вариационный размах кардиограммы и индекс напряжения;
- на 2^о этапе - отклоненный цвет;
- на 3^о этапе - отклоняется все кроме частоты дыхания;
- на 4^о этапе - отклоняются все показатели;
- на 5^о этапе - диастолическое, систолическое давление, частота дыхания, вариационный размах;
- на 6^о этапе - диастолическое давление, частота дыхания.

Для решения основной задачи, т.е. для получения общей картины взаимосвязей между переменными применяется множественный линейный регрессионный анализ.

Используется регрессионная модель для рассматриваемого случая

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_5 x_5 + e$$

где β_0, \dots, β_5 - неизвестные параметры, а e - независимая случайная ошибка.

Вместо y подставляются поочередно (соответ.) $v_6, \dots, v_{10}, c_6, \dots, c_{10}$ и т.д., а вместо x_1, \dots, x_5 - $v_1, \dots, v_5, c_1, \dots, c_5$ и т.д.

Для оценки достоверности полученных регрессий проверяем следующую гипотезу H_0 : ни один из независимых переменных не влияет на изменение данной зависимой переменной, т.е.

Таблица 4.1

Результат построения модели				
переменная	коэффициент	стандартная ошибка	t-статистика	уровень значимости
Постоянная	4372.482078	1938.665817	2.2552	0.0355
	20.770716	13.03623	1.5933	0.1266
	-35.548475	17.435237	-2.0389	0.0549
	3.820118	9.508847	0.4017	0.6951
	-11.905819	24.884937	-0.4784	0.6375
	-4818.022056	1509.333453	-3.1922	0.0046

Коэфф. детерм. = 0.5241 Коэфф. множ. корр. = 0.7241 Дадб. Уог. = 2.293

Таблица 4.2

Двухсторонний анализ для полной регрессии			
сумма	DF	оценки среднего	F - коэфф.
5739042.	5	1147809.	6.50534
3528819.	20	176441	
9267861	25		

Таблица 4.3

Дальнейшая статистика дисперсии для переменных					
	сумма квадратов	DF	квадрат оценки	F - коэфф.	P - значение
f_1	415435.16	1	415435.2	2.35	.1406
f_2	128503.54	1	128503.5	.73	.4125
f_3	3358027.32	1	3358027.3	19.03	.0003
f_4	39172.04	1	39172.0	.22	.6476
f_5	1797904.23	1	1797904.2	10.19	.0046



$\beta_1 = \dots = \beta_5 = 0$, при альтернативе H_1 : хотя бы одна переменная оказывает влияние, т.е. хотя бы один коэффициент отличается от нуля.

Проверка указанных гипотез производится по критерию Фишера - F .

Если H_0 отвергается (и принимается H_1), то по критерию Стьюдента - t производится проверка каждого коэффициента в отдельности, т.е. поиск значений, значительно отличающихся от нуля коэффициентов.

На основании проведенных наблюдений получены результаты для каждой величины на каждом этапе исследования. Для удобства перевода вводим на пятом этапе.

На изменение	f_1 (сигн. лев.)	или	f_2 (двиг. лев.);
"	f_2 (двиг. лев.)	"	f_3 (сигн. лев.);
"	f_3 (частота пульса)	"	f_4 (сигн. лев.);
"	f_4 (частота дыхания)	"	на одна не имеет;
"	f_5 (ар. ритм. кардио.)	"	f_6 (сигн. лев.);
"	f_6 (мода)	"	f_7 (ар. ритм. кардио.);
"	f_7 (вариац. дисперс.)	"	f_8
"	f_8 (дисперсия)	"	на одна;
"	f_9 (амплитуда пульса)	"	f_9 ;
"	f_{10} (амплитуда дыхания)	"	f_{10} .

Получила 18.1.1993

Институт
 прикладной математики
 и механики
 АН УССР



Литература

1. Н.Б.Славин. Методы системного анализа.-М.: Медицина,1989.
- 302 с.
2. А.Араძი, С.Эйзен. Статистический анализ.-М.: Мир, 1982,
- 372 с.
3. STATGRAPH. Copyright, 1985, STSC, Inc. Printed in the USA. -360 p.

ბ.ხატიანი, ვ.ორაგიელაშვილი

სტატისტიკური მონაცემის ანალიზის "სტატგრაფის" გამოყენების
პრაქტიკული გამოცდის აღწერის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ი

"სტატგრაფის" პროგრამით გამოყენების მიზანმიმართულ მუშაობაში სტატისტიკური მონაცემების ანალიზისათვის. შესწავლილნი მონაცემები ვენოზული ანესთეზიის ანესთეზიის შედეგების შესახებ. გამოცდის დასრულების შემდეგ აღიწერა ანესთეზიის მონაცემთა 10 მახასიათებელი მონაცემები და გამოცდის საფუძვლები პროგრამის განვიხილეთ.

N.Khalashvili, G.Orakielashvili

APPLICATION OF THE SOFTWARE "STATGRAPH" IN THE ANALYSIS
OF RESULTS OF STATISTICAL DATA OF THE VENOUS
CETAMENOUS ANESTHESIA

Summary

An algorithm for analysing statistical data is developed on the basis of the "Statigraph" software. Data on the results of venous celamine anesthesia are studied. The relations between ten characteristics of the data have been established and important practical conclusions are made.

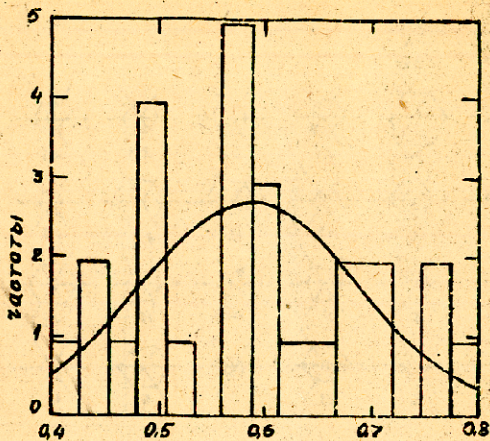
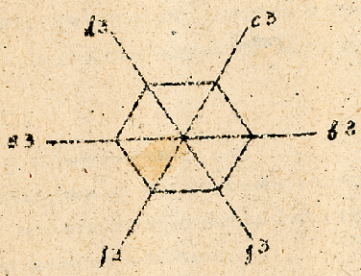
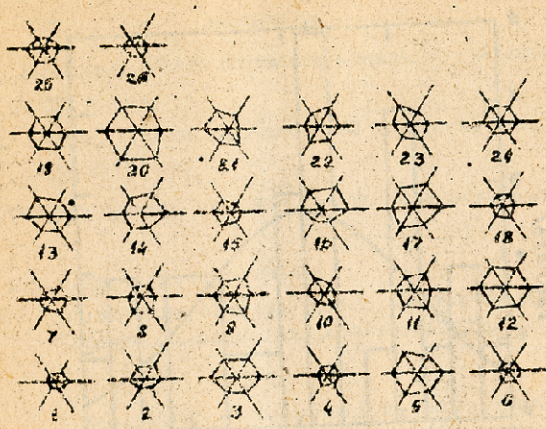


рис. I



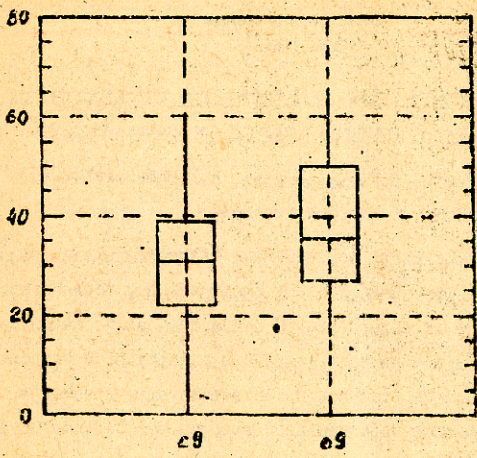
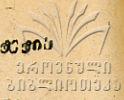


Fig. 3



გეოგრაფია

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавახишвили

320, 1995

УДК 537.53

К ВОПРОСУ ВЛИЯНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА БРСИМАЛЬНУЮ АСТМУ

Г.Г. Мгенти, Н.Г. Нимвиачидзе, К.А. Нимвиачидзе,

Н.Ш. Чавчавадзе

После обнаружения естественных электромагнитных волн ученые приступили к широкомасштабному спектральному исследованию и всестороннему их применению. С появлением электронной лампы были сконструированы усилительные и генераторные устройства, появились радиопередатчики и соответствующие приемники. Начались опыты по передаче информации на дальние расстояния. Осуществление таких передач дало возможность обнаружения заряженных слоев вокруг Земли. Впоследствии, при изучении верхних областей атмосферы, было установлено существование ионосферы, а затем дневной и ночной магнитосферы Земли. Наблюдения за деятельностью Солнца позволили установить пульсации магнитного поля Земли, а также ионосферные и магнитосферные бури. Во второй половине нашего столетия появились научные работы по определению собственных частот колебаний ионосферы и ночной магнитосферы. Оказалось, что колебания гораздо ниже одного герца как при спокойном Солнце, так и при магнитных возмущениях. Параллельно ведутся работы по изучению атмосферных электрических разрядов, а также по установлению спектральной зависимости прозрачности атмосферы Земли. За последнее время в атмосфере обнаружены области с отрицательной проводимостью, т.е. участки, которые сами могут генерировать электромагнитные колебания. Необходимо отметить, что низкочастотные электромагнитные колебания могут распространяться



в естественном волновом поле, которые носят почти глобальный характер.

Наряду с вышеуказанными актуальными работами ведутся интенсивные исследования по применению искусственных электромагнитных полей в разных отраслях науки и народного хозяйства. Установлена функциональная связь между естественным электромагнитным полем и жизнедеятельностью живой клетки как растительного, так и животного происхождения. Проведенные многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали широкоспектральную зависимость живой клетки от внешнего электромагнитного воздействия [1-4]. Только в определенных случаях и условиях могут наблюдаться квазирезонансные эффекты д. и несферических мембран биологической клетки [5,6].

Кроме научных исследований и разработок изобретены разные методы применения электромагнитной энергии в медицине и в сельском хозяйстве [7,8,9,10].

Ввиду того, что живая клетка имеет замкнутую мембрану и внутри и вне такой оболочки находятся определенные жидкости с разной электрической проводимостью, плотностью и вязкостью, то динамический процесс (в данном случае колебательный) такой системы можно описать уравнениями Навье-Стокса [5]. Для радиальных компонент сферической модели можно написать:

$$\rho_1 \frac{\partial v_{r1}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + F_1 \cdot \exp(-i\omega t) + \rho_1 \nu_1 \Delta v_{r1} \quad (0 \leq r \leq a), \quad (1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial v_{r2}}{\partial t} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + F_2 \cdot \exp(-i\omega t) + \rho_2 \nu_2 \Delta v_{r2} \quad (r \geq a), \quad (2)$$

где ν , ρ , ν и ρ - скорость, давление, кинематическая вязкость и плотность жидкости; a - радиус сферы, ω - круговая частота, r - радиус, t - время, F - плотность электроли-

натягивающей силы.

Переходя к потенциалам скоростей и решая соответствующее уравнение Лапласа, с учетом граничных условий для поверхности, для собственной частоты ω_n и коэффициента затухания β_n находим

$$\omega_n = \left\{ \frac{T(n-1) \cdot n(n+2)}{a^3 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{n}{n+1} \right)} \right\}^{1/2}, \quad (n=2, 3, 4, \dots), \quad (3)$$

$$\beta_n = \left[\chi_1 \rho_1 \cdot n(n-1) + \chi_2 \rho_2 \cdot n(n+2) \right] / a^2 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{n}{n+1} \right), \dots \quad (4)$$

где T — поверхностное натяжение мембраны клетки.

В работах [5, 11] проведены исследования для цилиндрической модели клетки, приведены примеры и получены формулы для расчета частот собственных колебаний. Кроме этого приведены фотографии эритроцитов до и после электромагнитного воздействия. Приведенные работы наглядно показывают, что энергия электромагнитного поля преобразуется в механическую и такое воздействие проявляется для широкого диапазона ($0 + 10^6$ Гц) частот. Как было указано выше, резонансный случай может наблюдаться для данных живых клеток.

С целью сопоставления указанных результатов с колебаниями магнитосферы Земли как для состояния покоя, так и для магнитных бурь, были проведены соответствующие теоретические исследования [12, 13].

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования, а также многочисленные научные литературные данные позволяют заключить, что электромагнитное "окружение" является необходимым для жизнедеятельности живых организмов.

Далее приведем данные об одном из возможных применений низкочастотного электромагнитного поля.



За последнее десятилетие накопился довольно внушительный материал о важной роли погодных факторов в провоцировании обострения бронхиальной астмы.

Проблема бронхиальной астмы сохраняет свою актуальность, так как за последнее время частота и тяжесть этой патологии растет /14/.

Механизм развития метеотропных реакций у больных с заболеваниями органов дыхания большинство авторов рассматривает как результат нарушения функции нейро-эндокринной системы, что и ведет к нарушению вентиляции легких, нарушению газообмена, кровообращения в системе малого круга и т.д. в организме больного человека.

Сущность биотропного эффекта резких колебаний электрического потенциала, заключающаяся в воздействии электромагнитных импульсов на первую систему через раздражение кожных рецепторов, определялась также Коэнко А.И. и соавт. (1989 г.) и Портновым Ф.Г. (1972 г.) /15/.

Доказано, что под действием низкой и средней интенсивности МП возникают изменения в органах и системах, осуществляющих приспособление организма к условиям окружающей среды /Д.П. Никитин и соавт. 1986 г./ . Важную роль в защитно-приспособительных реакциях организма на воздействие неблагоприятных факторов окружающей среды играет система гипофиз - кора надпочечников.

По данным Ю.Д. Душанского и соавторов (1975) повышение секреции нейтральных 17-кестероидов при облучении ЭМП увеличивается в результате усиления функциональной активности коры надпочечников. В период после действия наблюдается тенденция к нормализации функции коркового слоя надпочечников, о чем свиде-

тellecтвует снижение 17- кортикостероидов.

Исходя из вышерассмотренных клиникометеорологических сопоставлений, а также принимая во внимание, что геомагнитное поле является составными понятиями "погода" и "климат", мы решили в состав комплексной терапии больных бронхиальной астмой ввести процедуру перемещения магнитного поля.

Лечение проводилось на базе 5-ой клинической больницы г.Томска, являющейся клинической базой кафедры неотложной терапии (заведующий кафедрой профессор П.Г.Ишнинянц). С 1979г. по 1991г. в клинике лечилось 582 больных бронхиальной астмой. Общая характеристика приведенного контингента дана в таблице:

Год обслед. и лечен.	К-во больн.	Пол		Воз- раст		Давность заболевания			Лечение стерои- дами	Метео- чувст- витель- ность
		М	Ж.	16-40- 40л.	40-78л.	5	10	выше		
1973	61	38	23	21	40	20	16	25	45	36
1980	50	23	30	19	34	15	7	30	38	32
1981	64	24	40	28	36	14	24	26	37	31
1982	50	20	30	19	31	10	17	23	44	40
1983	82	50	32	27	55	26	14	42	61	52
1984	91	57	34	33	58	19	39	33	66	61
1985	92	49	43	30	62	28	32	32	69	59
1990	55	28	29	16	39	12	18	35	40	33
1991	50	18	17	15	20	7	9	19	26	28
Всего	582									

Как видно из таблицы, при поступлении в стационар у больных преобладали формы метеочувствительности: во всех случаях; клинически выраженной формы, встречающейся у 70% обследованных, характеризовалась обострениями или появлениями приступов.



бронхоспазма. А в 30% случаев метеочувствительность проявляется общим недомоганием и появлением свистящих хрипов.

Лечение электромагнитным полем проводили с помощью установки, представляющей собой звуковой генератор (ЗГ) последовательно соединенный с колебательным контуром. Катушка индуктивности сконструирована в виде полого цилиндра, в который помещают нижние конечности больного. Время экспозиции 10-15 минут подбиралось индивидуально, а частота процедур в день не превышала 1-ой процедуры. Курс лечения - всего 10-15 процедур.

По результатам лечения больных разделили на 3 группы.

Первую группу составили пациенты с выраженным клиническим улучшением. Они составили 67% от общего количества леченных (390 больных).

Вторая группа - 23% (111 больных) - пациенты, у которых наблюдалось полное прекращение приступа при проведении процедуры, но через некоторое время приступы повторялись значительно реже и с меньшей интенсивностью.

Остальным 48 больным (10%), которые на протяжении длительного времени лечились гормонами, комплексным лечением в сочетании с ЭМП удалось в некоторой степени облегчить состояние, но в стационаре не удалось сколько-нибудь уменьшить дозу принимаемого гормона.

- Выводы.
1. Метод лечения бронхиальной астмы электромагнитным полем в подавляющем большинстве случаев дает хороший терапевтический эффект, особенно в тех случаях, когда функция надпочечников не подавлена длительным приемом кортикостероидов.
 2. Лечение ЭМП бронхиальной астмы имеет широкие перспективы. Тем более, что в заметных дозах отрицательного воздействия в организм не оказывает.

Поступила 17.3.1993.

Кафедра
радиоселективных ТУ
Кафедра
всп. мед. помощи
Тбл. гос. и-та узл. врачей

Литература

1. А. Л. Чижковский. Земное эхо солнечных бурь. М., Мысль, 1973.
2. Т. Г. Мгенти, Г. Ш. Кеванишвили. Функциональная связь спектра атмосферных разрядов с биологической активностью живых организмов. Сообщения АН ГССР, т. 86, № 3, 1977.
3. С. У. Гузыя, Т. Мгенти, Н. И. Чхейкели. К вопросу влияния атмосферных электрических разрядов на урожай зерновых культур. Труды СХИ, XV, 1965.
4. Т. Г. Мгенти, Б. З. Гак, К. А. Нишнанидзе. О биологической активности электромагнитного поля звукового диапазона. Жур. Электронная обработка материалов, № 1, Тбилизи, 1972, с. 81.
5. Т. Г. Мгенти, Г. Ш. Кеванишвили. О воздействии низкочастотного электромагнитного поля на биологическую клетку. Жур. Биофизика, т. 36, вып. 3, М., 1991, с. 483.
6. Т. Г. Мгенти, Г. Ш. Кеванишвили, К. А. Нишнанидзе, М. Г. Роква. О вынужденных механических колебаниях биологической мембраны в низкочастотном электромагнитном поле. Труды ТГУ, т. 25 (284), 1980, с. 221.
7. Т. Г. Мгенти, К. А. Нишнанидзе. Способ предпосевной обработки семян низкочастотным электромагнитным полем. Автор. свидетельство (А.С.) № 206285, Булл. № 24, М., 1967.
8. Т. Г. Мгенти, К. А. Нишнанидзе. Способ обработки виноградных прививок. А.С. № 263680, Булл. № 37, М., 1981.
9. Т. Г. Мгенти, Д. Ш. Чельдзе, К. А. Нишнанидзе. Способ лечения лавандового, А.С. № 628928, Булл. № 39, М., 1978.
10. Т. Г. Мгенти, К. К. Катамдзе, Г. Ш. Кеванишвили, К. А. Нишнанидзе. Способ лечения заболеваний, связанных с нарушением обмена веществ. А.С. № 183119, Булл. № 47, М., 1980.



- 11. Т.Г.Жгенти, Г.Ш.Кованишвили, Свободные колебания поверхности цилиндра с закрепленными основаниями. Труды ТГУ, т.21, (264), 1986, с.237.
- 12. Т.Г.Жгенти, Г.Ш.Кованишвили, А.Г.Хантадзе. О собственных колебаниях ночной магнитосферы Земли. Жур.Геомagnetизм и аэрономия, АН РФ, т.33, вып.2, 1993.
- 13. Т.Г.Жгенти, Г.Ш.Кованишвили. О колебаниях магнитного хвоста Земли. Труды ТГУ,
- 14. С.М.Говалов, Л.П.Смирнова, Г.Г.Муратлева и др. Гормональные механизмы формирования адаптационного синдрома в приступном периоде бронхиальной астмы у детей и пути коррекции. Рязань, 1990, с.21-23.
- 15. А.И.Конко, Г.И.Иванченко, Ю.Н.Островерхний и др. ИФЧ-терапия как способ профилактики метеопатологии, М., Медицина, 1989, с.122-123.

თ. ჯგენტის, გ. ნიშნიანიძის, კ. ნიშნიანიძის, ნ. ჟაჭვანიძის
 ძირითადი დასკვნაა, რომ ნიშნიანიძის და ნიშნიანიძის
 კვლევების დასკვნის საკონკრეტოა

რ ე ბ ი ჯ მ ე

მეცნიერული დაკვირვების სიხშირის ელექტრომაგნიტური ველების გავლენის ძირითადი დასკვნაა. აღნიშნული მიზნის დაკვირვების საშუალებით ვფიქრობ.

T.Zhgenti, P.Nishnianidze, K.Nishnianidze, N.Chavchanidze
 ON THE INFLUENCE OF NATURAL AND ARTIFICIAL
 ELECTROMAGNETIC FIELDS ON BRONCHIAL ASTHMA

Summary

The influence of a low-frequency electromagnetic field on bronchial asthma has been studied and its positive curative effect is pointed out.



Содержание

1. Э.Д.Алшибая. О геометрии соприкасающихся гиперквადрик распределения - - - - -	5
2. И.А.Зоненашвили. Влияние выдавок на деформацию цилиндрической оболочки - - - - -	18
3. Ч.Г.Доборджинидзе. Одна новая математическая модель двумерной нелинейной упругости - - - - -	26
4. Н.Г.Махвиладзе. Некоторые задачи Буссинеска и Черутти для вязко-упругих тел - - - - -	38
5. А.Н.Ануашвили, А.Д.Гепалдзе, Ц.А.Гегучадзе. Об одном эксперименте определения шероховатости поверхностей - - - - -	51
6. Д.В.Шарикадзе. Об одном общем методе решения задачи Берманна - - - - -	59
7. Л.А.Джигидзе. Приближенный метод решения нестационарной задачи вращения пористой пластины в слабопроводящей жидкости - - - - -	65
8. М.Г.Хативашвили, Г.Н.Орахелашвили. Обработка результатов внутривенной кетоминовой анестезии с использованием пакета статистических методов "Статграф" - - - - -	78
9. Т.Г.Жгенти, Ч.Г.Ничианидзе, К.А.Нишвианидзе, Н.Ш.Чавчанидзе. К вопросу влияния естественных и искусственных электромагнитных полей на бронхиальную астму - - - - -	94



Contents

1. E. Avshibaia, On the geometry of osculating hyperquadrics of distribution 17

2. L. Zonenashvili, The effect of extrusions on the deformation of cylindrical shell 25

3. L. Doborjginkidze, A new mathematical model of two-dimensional nonlinear elasticity 37

4. N. Makhviladze, The same problems of Boussinesq and Cerruti for viscoelastic bodies 49

5. A. Anushvili, A. Getsadze, T. Gegushadze, The definition of the degree of roughness for its one experiment 55

6. J. Sharkadze, On one general method of solution of Berman's problem 64

7. L. Jikidze, Approximate method of the nonstationary rotation problem of the porous plate in the weak conduction fluid 77

8. M. Khatiashvili, G. Orakhelashvili, Application of the software "Statgraph" in the analysis of results of statistical of the venous catamenous anaesthesia 90

9. T. Zhgenti, P. Nishnianidze, K. Nishnianidze, N. Chavchanidze, On the influence of natural and artificial electromagnetic fields on bronchial asthma 101

Редактор издательства Л. Асуашвили

Подписано в печать 25.10.95. Бумага 60x84 1/16
Усл. печ. л. 6,5 Уч. издат. л. 3,78
Заказ 78 Цена договорная Тираж 200

Издательство Тбилисского университета, Тбилиси,
380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

Типография Тбилисского университета, Тбилиси,
380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.