ი. ნატანსონი

უმაღლესი
მათემატიკის მოკლე კურსი

რსფსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების ტექნოლოგიური სპეციალობებისათვის

ნაწილი I

თარგმანი მეორე რუსული გამოცემიდან

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1981

20205 — 019
H———————211—81
M-602 (08) — 81

მეუღლის — ელიზავეტა პეტრეს ასული სოკოლოვა-ნატანსონის ნათელ ხსოვნას უძღვნის ავტორი ამ წიგნს.

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს, რომელიც გათვალისწინებულია იმ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის, სადაც უმაღლესი მათემატიკის კურსს (სავარჯიშოების ჩათვლით) ეთმობა 300—400 საათი. მსხვილი შრიფტით დაბეჭდილი მასალა (ის არ არის დამოკიდებული პეტიტით დაბეჭდილ მასალაზე) მოიცავს მეექსპლუატაციე ინჟინრების პროგრამას; პეტიტით გადმოცემული მასალა, ძირითად კურსთან ერთად შეესაბამება ინჟინერ-კონსტრუქტორთა პროგრამას. წიგნი არ არის გათვალისწინებული მომავალი ინჟინერ-მკვლევარებისათვის, ვისაც ესაჭიროება უფრო საფუძვლიანი მომზადება მათემატიკაში. ამით არის განპირობებული, როგორც წიგნში მოცემული მასალა, ისე მისი გადმოცემის ხასიათი. ავტორი უმთავრესად ეყრდნობა მკითხველის ინტუიციას. საკითხების მკაცრ ლოგიკურ დასაბუთებას, როგორც ეს საუნივერსიტეტო კურსებშია მოცემული, ავტორი არ მიმართავს.

წიგნის ზოგიერთ ნაწილში მოცემულია სავარჯიშოები. ეს ძირითადად ის ნაწილებია, რომლებსაც შედარებით ნაკლები ყურადღება ექცევა ამოცანათა კრებულებში.

პირველი სამი თავის დაწერისას ავტორმა გამოიყენა თავისი ლექციები გადამუშავებული ი. კამიშკოს (I თავი) და ს. ცარეგრადსკის (თავი II და III) მიერ. ხელნაწერს მთლიანად დაწვრილებით გაეცნენ გ. აკილოვი, ბ. ვულიხი და ვ. ფაინშმიდტი, რომლებმაც მოგვცეს მრავალი სასარგებლო მითითება. მნიშვნელოვანი რჩევა იყო მოცემული აგრეთვე ს. ზალგელერის, ვ. ზალგელერის და გ. ნატანსონის მიერ. წიგნის გამოცემის პროცესში განსაკუთრებული ყურადღება გამოიჩინა ფიზიკა-მათემატიკის გამომცემლობის უფროსმა რედაქტორმა ნ. როზენგაუზმა. ყველა მათ ავტორი უძღვნის მადლობას.

ი. ნატანსონი
17. IV. 63 წ.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

I. უმაღლესი მათემატიკა წარმოადგენს თანამედროვე ინჟინრის განათლების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ელემენტს. ყოველი რამდენადმე რთული ნაგებობის შესაქმნელად, იქნება ეს მანქანა, შენობა, ხომალდი, თუ თვითმფრინავი, აუცილებელია მთელი რიგი გამოთვლები, რომელთა შესრულება ელემენტარული მათემატიკის ხერხებით შეუძლებელია.

ქვემოთ განვიხილავთ ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს უმაღლესი მათემატიკის მეთოდებს.

1. დიფერენციალური აღრიცხვის საშუალებით განისაზღვრება სხვადასხვა სიდიდის მნიშვნელობები. მაგალითად, შეიძლება დადგინდეს, რომ მრგვალი მაგიდის ცენტრის თავზე დაკიდებული ნათურით მაგიდის ნაპირებზე მაქსიმალური განათებულობის მისაღებად, საჭიროა ნათურა დაიკიდოს $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ სიმაღლეზე მაგიდიდან, სადაც r მაგიდის რადიუსია. მეორე მაგალითის ნიმუშად აღვნიშნავთ, რომ მრგვალი ძელისაგან გამოჭრილ მართკუთხოვან კოჭს ექნება უდიდესი სიმტკიცე, თუ მისი სიმაღლისა და სიგანის შეფარდება $\sqrt{2}$-ის ტოლია.

2. მრუდების სიგრძის, მრუდებით შემოსაზღვრული ფიგურების ფართობის, მრუდე ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობის გამოთვლა, სხვადასხვა სხეულის სიმძიმის ცენტრის მოძებნა და სხვა ამოცანები ამოიხსნება უმაღლესი მათემატიკის იმ განყოფილებაში, რომელსაც ეწოდება ინტეგრალური აღრიცხვა. მაგალითად, ინტეგრალური აღრიცხვის საშუალებით მტკიცდება, რომ კონუსის სიმძიმის ცენტრი ძევს მის ღერძზე და დაშორებულია ფუძიდან სიმაღლის მეოთხედი ნაწილით.

3. უმაღლესი მათემატიკის ერთ-ერთი განყოფილებაა „მწკრივთა თეორია“, სადაც შეისწავლება სხვადასხვა სიდიდის მნიშვნელობათა გამოთვლის საკითხები.

ასე მაგალითად, საშუალო სკოლაში გამოყვანის გარეშე მოცემულია, რომ $\pi=3{,}141592\ldots$ აქვე ფართოდ იყენებენ ლოგარითმების ცხრილებს, ტრიგონომეტრიული სიდიდეების ცხრილებს, თუმცა მათი შედგენის ხერხები მოსწავლისათვის უცნობია. სწორედ მწკრივთა თეორიაში ამოიხსნება ეს საკითხები.

მსგავსი მაგალითების რიცხვი ადვილად შეიძლება გავზარდოთ, მაგრამ უკვე ნათქვამიდან ჩანს, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია ინჟინრისათვის, რომ ის ფლობდეს უმაღლესი მათემატიკის ხერხებს. უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებელში სწავლის პროცესში, სტუდენტს უხდება უმაღლესი მათემატიკით სისტემატურად სარგებლობა, რადგანაც ისეთ ძირითად დისციპლინებში, როგორიცაა ფიზიკა, თეორიული მექანიკა, მასალათა გამძლეობა, დრეკადობის თეორია, რადიოტექნიკა და სხვა, ფართოდ გამოიყენება უმაღლესი მათემატიკის მეთოდები. ყოველივე ამით აიხსნება ის, თუ რატომ ექცევა დიდი ყურადღება უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სასწავლო გეგმებში უმაღლესი მათემატიკის კურსს.

II. შევჩერდეთ იმაზე, თუ რით განსხვავდება უმაღლესი მათემატიკა ელემენტარული მათემატიკისაგან, რომელიც საშუალო სკოლაში ისწავლება. რასაკვირველია, მათ შორის სავსებით მკვეთრი საზღვრის გავლება არ შეიძლება, მაგრამ შესაძლებელია თითოეული მათგანისათვის დამახასიათებელი ნიშნების გამოყოფა.

საზოგადოდ, ყოველი მათემატიკური მეცნიერებისათვის ძირითად თავისებურებას წარმოადგენს მისი განყენებული, ანუ როგორც ამბობენ, აბსტრაქტული ხასიათი. არითმეტიკაში დგინდება, რომ $2+3=5$. ეს არის აბსტრაქტული დებულება: მასში შედის სხვადასხვა კონკრეტული დებულება. მაგალითად, 2 ფანქარი და 3 ფანქარი შეადგენს 5 ფანქარს და სხვა. როდესაც ვამბობთ, რომ $2+3=5$, მხედველობაში არ ვღებულობთ ამ კონკრეტული დებულებებიდან არცერთს. როდესაც ვამბობთ, რომ სფეროს მოცულობა

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

უგულებელვყოფთ, თუ სად მდებარეობს სფერო, რისგან არის გაკეთებული, რა ფერისაა ის და სხვა. კონკრეტული შინაარსის უგულებელყოფა მათემატიკისათვის დამახასიათებელია. ეს აძლევს მის დებულებებს ზოგად ხასიათს და სწორედ ამაშია მისი ძალა. ამავე დროს აქ მჟღავნდება მათემატიკური მეთოდის სისუსტე. სინამდვილე ხომ ყოველთვის კონკრეტულია, ამიტომ მათემატიკური დებულება, ისევე, როგორც ყოველგვარი თეორია, ასახავს მას მიახლოებით*.

დიალექტიკური მატერიალიზმი გვასწავლის, რომ სამყაროში ყველაფერი მოძრაობს და იცვლება. ამიტომ ის სიდიდეები, რომლებთა-

---

* აბსოლუტური და ფარდობითი ჭეშმარიტების შესახებ იხ. В. И. Ленин (Собр. соч., 5-е изд., 1961, т. 18). გვ. 133—140.

ნაც გვაქვს საქმე ბუნების შესწავლის დროს, წარმოადგენენ ცვლად სიდიდეებს. შენობაში ჰაერის ტემპერატურა, ორთქლის წნევა ქვაბში, ძაბვა ელექტრულ ქსელში, თვითმფრინავის სიჩქარე და სხვა ცვლადი სიდიდეებია. ელემენტარულ მათემატიკაში (არითმეტიკა, ალგებრა, გეომეტრია) არ ვითვალისწინებთ, რომ განსახილველი სიდიდეები ცვლადებია და ვთვლით მათ მუდმივებად. ეს შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როდესაც განვიხილავთ სიდიდეებს, რომელთა ცვლილება მცირეა და შეიძლება მისი უგულებელყოფა. ამით აიხსნება ის, რომ ელემენტარული მათემატიკის, ანუ მუდმივების მათემატიკის გამოყენების სფერო ძალიან შეზღუდულია.

უმაღლეს მათემატიკაში პირიქით, მთავარი ყურადღება ექცევა სიდიდეების ცვალებადობას. ეს არის ცვლადების მათემატიკა. ფრ. ენგელსი ამბობს: „შემობრუნების წერტილი მათემატიკაში იყო დეკარტის ცვლადი სიდიდე. ამის წყალობით მათემატიკაში შევიდა მოძრაობა და დიალექტიკა და აგრეთვე ამის წყალობით მაშინვე აუცილებელი გახდა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, რომელიც მაშინვე იწყება და რომელიც საერთოდ და მთლიანად დამთავრებულ და არა გამოგონებულ იქნა ნიუტონისა და ლაიბნიცის მიერ“.*

უმაღლესი მათემატიკის საგნის უფრო სრულად დასახასიათებლად, უნდა მივუთითოთ, რომ ის შეისწავლის სიდიდეებს არა იზოლირებულად, არამედ მათ ურთიერთკავშირში. ცვლადების ამ ურთიერთკავშირს ზუსტად გამოხატავს მათემატიკური ცნება-ფუნქციის ცნება. ამ ცნებას მკითხველი ნაწილობრივ იცნობს ალგებრისა და ტრიგონომეტრიის კურსიდან, მაგრამ მას დაწვრილებით შეისწავლის უმაღლესი მათემატიკის დარგი-მათემატიკური ანალიზი. დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, რომელიც ზემოთ მოვიხსენიეთ, ამ განყოფილების ნაწილია.

მათემატიკური ანალიზის გარდა, შევისწავლით აგრეთვე ანალიზურ გეომეტრიასაც. ამ დისციპლინის შესწავლის საგანია გეომეტრიული ფიგურების გამოკვლევა გამოთვლების საშუალებით. მკითხველი ამის მსგავს მაგალითებს უკვე ხვდებოდა ელემენტარულ გეომეტრიაში და ტრიგონომეტრიაში, მაგრამ ანალიზური გეომეტრიის მეთოდები უფრო ზოგადი და ძლიერია.

III. უმაღლესი მათემატიკის ძირითადი იდეები შეიძლება აღმოვაჩინოთ ანტიკურ მეცნიერებაში. ასე მაგალითად, უდიდესი ბერძენი მათე-

---

*Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1955, გვ. 206.

მატიკოსი და მექანიკოსი არქიმედე (287—212 ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) იყენებდა ინტეგრალური აღრიცხვის ზოგიერთ ხერხს.

შუა საუკუნეებში მეცნიერება განიცდიდა დაქვეითებას და მხოლოდ მე-16 საუკუნიდან იწყება ბერძნული მეცნიერების აღორძინება საზოგადოდ და მათემატიკისა კერძოდ. მე-17 საუკუნის ბოლოს და მე-18 საუკუნის დასაწყისში ი. ნიუტონის (1642—1727) და გ. ლაიბნიცის (1646—1716) შრომებში დამთავრდა მათემატიკური ანალიზის აგება.

როცა ველაპარაკობთ დამთავრებაზე, მხედველობში გვაქვს ანალიზის ძირითადი იდეების დადგენა, მაგრამ სრულიად არ გვინდა ვთქვათ, რომ ნიუტონის და ლაიბნიცის შემდეგ თითქოს შეწყდა ანალიზის შემდგომი განვითარება. უმაღლესი მათემატიკის ამ დარგში ინტენსიური მეცნიერული გამოკვლევები გრძელდებოდა მე-18 და მე-19 საუკუნეებშიც და წარმატებით მიმდინარეობს დღესაც. ყოველწლიურად ქვეყნდება 10000-ზე მეტი შრომა უმაღლესი მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

მათემატიკური ანალიზის შემდგომი განვითარების საქმეში უდიდესი როლი შეასრულეს პეტერბურგელმა აკადემიკოსმა ლ. ეილერმა (1707—1783) და ფრანგმა მეცნიერმა ო. კოშიმ (1789—1857). ამ მეცნიერებმა არა მარტო გაამდიდრეს მეცნიერება პირველხარისხოვანი აღმოჩენებით, არამედ ბევრი გააკეთეს ანალიზის, როგორც სასწავლო დისციპლინის ჩამოყალიბების საქმეში. სწორედ ეილერისა და კოშის მეთოდური მუშაობის წყალობით, მიიღო ანალიზმა თანამედროვე სახე.

IV. ეილერის შემდეგ რუსეთში ანალიზის უდიდესი წარმომადგენლები იყვნენ* მ. ოსტროგრადსკი (1801—1861) და განსაკუთრებით პ. ჩებიშევი (1821—1894). პეტერბურგის უნივერსიტეტში პ. ჩებიშევმა შექმნა დიდი სკოლა, რომლის გამოჩენილი წარმომადგენლები იყვნენ აკადემიკოსები ა. მარკოვი (1856—1922) და ა. ლიაპუნოვი (1857—1918).

მე-20 საუკუნეში პროდუქტიული სამეცნიერო მუშაობა წარმოებდა ჩვენი ქვეყნის სხვა ქალაქებშიც. ძლიერი მათემატიკური სკოლა შექმნა მოსკოვში აკადემიკოსმა ნ. ლუზინმა (1883—1950). ამ სკოლის სრული აყვავება საბჭოთა პერიოდში ხდება და მიახლოებით 20-იანი წლებიდან მოსკოვის მათემატიკური სკოლა, როგორც თავისი ინტერესების ზოგადობის, ისე მიღებული შედეგების მნიშვნელობით, გამოდის მსოფლიოში პირველ ადგილზე.

---

* გენიალური რუსი გეომეტრი, ყაზანის უნივერსიტეტის რექტორი და პროფესორი ნ. ლობაჩევსკი (1792—1856) არის აგრეთვე ანალიზის საინტერესო საკითხების შესახებ შრომების ავტორი, მაგრამ მის შემოქმედებაში ამ შრომებს აქვს მეორეხარისხოვანი მნიშვნელობა.

V. წინამდებარე წიგნში არ შეიძლება მიახლოებითი წარმოდგენის მოცემაც კი იმის შესახებ, თუ რას შეისწავლის დღევანდელი მათემატიკა. ვისაც აინტერესებს ამ საკითხების გაცნობა ვურჩევთ საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის სამტომეულს „მათემატიკა, მისი შინაარსი, მეთოდები და მნიშვნელობა“, 1956 წ.

VI. დასასრულს, აღვნიშნავთ, რომ მათემატიკის შესწავლის დროს არსებითია ამოცანების ამოხსნა. ჯერ კიდევ ნიუტონი ამბობდა, რომ საქმის ეს მხარე უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე თეორიის შესწავლა. არ შეიძლება ამ აზრს სავსებით დავეთანხმოთ, მაგრამ ეჭვს გარეშეა, რომ ინჟინრისათვის მხოლოდ თეორიული მასალის გაცნობას არავითარი სარგებლობა არ ექნება. ამიტომ მკითხველმა ამ წიგნის შესწავლა უნდა შეუთავსოს ამოცანათა კრებულებიდან ამოცანების ამოხსნას.

I თავი

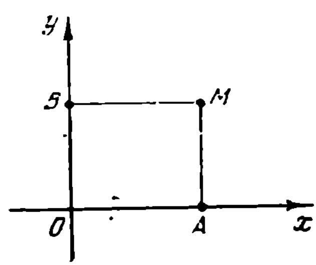
ანალიზური გეომეტრია სიბრტყეზე

§ 1. წერტილები და კოორდინატები

1. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

ანალიზური გეომეტრია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიულ სახეებს ალგებრის საშუალებით. ამისათვის პირველ რიგში იქმნება გარკვეული აპარატი, რომელიც იძლევა გეომეტრიული ცნებების ალგებრულ ენაზე გადატანის საშუალებას. ასეთ აპარატს წარმოადგენს „კოორდინატთა მეთოდი“, რომელიც ჯერ კიდევ მე-17 საუკუნეში ფრანგი მათემატიკოსების პ. ფერმას და რ. დეკარტის მიერ იყო შემოღებული (*P. Fermat* 1601—1665, *R. Descartes*, 1596—1650).

ამ მეთოდის საფუძველს წარმოადგენს კოორდინატთა სისტემა. არსებობს მრავალი ასეთი სისტემა. ჩვენ გავეცნობით ე. წ. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას*. ამ თავის ბოლოს შემოტანილი იქნება კიდევ სხვა სისტემაც — პოლარულ კოორდინატთა სისტემა.



ნახ. 1.

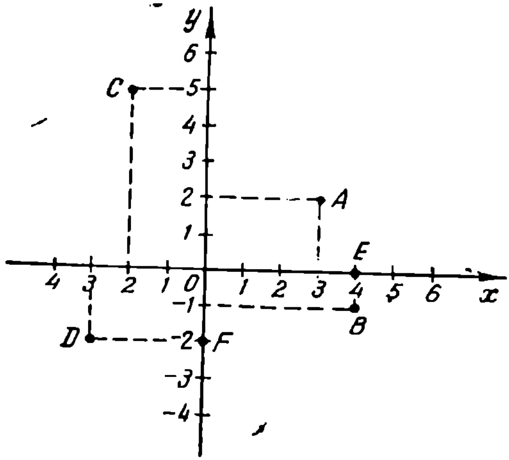
ვთქვათ, სიბრტყეზე გავლებულია ორი ურთიერთმართობული Ox და Oy წრფე. ჩვეულებრივ, Ox ჰორიზონტალურია, ხოლო Oy—ვერტიკალური. ამ წრფეებს ეწოდებათ საკოორდინატო ღერძები, მასთან Ox-ს ეწოდება აბსცისათა ღერძი, ხოლო Oy-ს

---

* ანუ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა

ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ღერძი. ამ ღერძების გადაკვეთის O წერტილს ეწოდება კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ა თ ა ვ ე. ახლა ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი M წერტილი და დავუშვათ MA და MB მართობები Ox და Oy ღერძებზე (ნახ. 1). ამით ღერძებზე მოიკვეთება OA და OB მონაკვეთები. ჩვენ გვაინტერესებს გარკვეული ნიშნით აღებული ამ მონაკვეთების სიგრძეები. ნიშნის არჩევა ხდება შემდეგი წესის მიხედვით:

წესი. 1) თუ A წერტილი ძევს Ox ღერძზე O წერტილის მარჯვნივ, მაშინ OA-ს სიგრძეს დაეწერება „+“ ნიშანი, ხოლო თუ A ძევს O-ს მარცხნივ, მაშინ OA-ს სიგრძეს დაეწერება „—“ ნიშანი.



ნახ. 2.

2) თუ B წერტილი მდებარეობს Oy ღერძზე O წერტილის ზემოთ (ქვემოთ), მაშინ OB მონაკვეთის სიგრძეს დაეწერება „+“ ნიშანი („—“ ნიშანი).

ნახაზზე Ox და Oy ღერძებს უკეთებენ ისრებს, ნიშნების აღნიშნული წესის გასახსენებლად.

OA და OB მონაკვეთების სიგრძეები, აღებული სათანადო ნიშნებით, აღინიშნება x და y სიმბოლოებით შესაბამისად:

$$x=OA, \qquad y=OB$$

და x-ს ეწოდება M წერტილის აბსცისა, ხოლო y-ს M წერტილის ორდინატი. x და y რიცხვებს ეწოდებათ M წერტილის კოორდინატები*.

* ან დეკარტის კოორდინატები.

ის ფაქტი, რომ M წერტილის კოორდინატებია x და y რიცხვები, ასე ჩაიწერება $M(x, y)$. ადვილი გასაგებია, თუ როგორ უნდა ავაგოთ M წერტილი, როცა ცნობილია მისი კოორდინატები: საჭიროა Ox და Oy ღერძებზე გადავზომოთ OA და OB მონაკვეთები (თუ რომელი მიმართულებით, ამას გვიჩვენებს x და y ნიშნები) და აღვმართოთ A და B წერტილებიდან მართობები ღერძებისადმი. მათი გადაკვეთა იქნება M წერტილი

მაგალითი. ავაგოთ წერტილები $A(3,2)$, $B(4,-1)$, $C(-2,5)$, $D(-3,-2)$, $E(4,0)$, $F(0,-2)$.

ამოხსნა მოცემულია მე-2 ნახაზზე.

საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ აბსცისათა (ორდინატთა) ღერძზე მდებარე წერტილების ორდინატები (აბსცისები) ნულის ტოლია. კოორდინატთა სათავის კოორდინატებია $(0,0)$.

ზემოთქმული შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ.

შესაბამისობის პირველი პრინციპი. სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ორი რიცხვი — მისი კოორდინატები. პირიქით, რიცხვთა ყოველ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული წერტილი, რომელსაც კოორდინატებად ეს რიცხვები აქვს.

გამოთქმების „ვიპოვოთ წერტილის კოორდინატები“ ან „მოცემულია წერტილის კოორდინატები“ ნაცვლად ამბობენ მოკლედ „ვიპოვოთ წერტილი“, „მოცემულია წერტილი“.

2. ორ წერტილს შორის მანძილი

ამოცანა. ვიპოვოთ ორ მოცემულ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილს შორის d მანძილი

ამოხსნა. მე-3 ნახაზიდან ჩანს, რომ საძიებელი მანძილი არის მართკუთხა M_1KM_2 სამკუთხედის ჰიპოტენუზა. მაშასადამე,

$$d=\sqrt{(M_1K)^2+(M_2K)^2}.$$

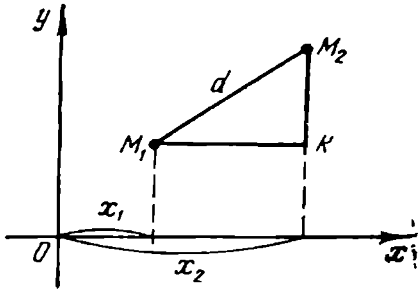
მაგრამ იგივე ნახაზი გვიჩვენებს, რომ

$$M_1K=x_2-x_1, \qquad M_2K=y_2-y_1$$

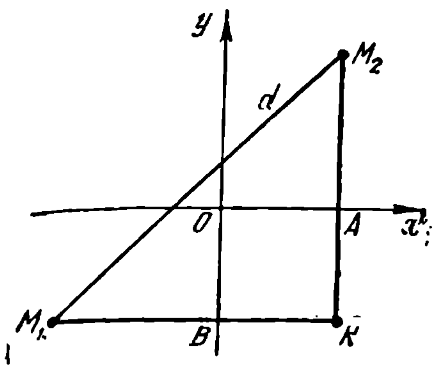
მაშასადამე,

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} \qquad (1)$$

ეს ფორმულა გვაძლევს ამოცანის ამოხსნას.



ნახ. 3.



ნახ. 4.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ გამოვიყვანეთ (1) ფორმულა, M_1 და M_2 წერტილების მდებარეობის უმარტივეს შემთხვევაში (ნახ. 3), მაგრამ (1) ფ ო რ მ უ ლ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა M_1 და M_2 წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს. ავიღოთ, მაგალითად, მე-4 ნახაზზე მოცემული შემთხვევა. აქ

$$M_1K=M_1B+BK.$$

მაგრამ* $M_1B=-x_1$, $BK=x_2$, ამიტომ წინანდებურად

$$M_1K=x_2-x_1.$$

ზუსტად ასევე

$$M_2K=M_2A+AK=y_2+(-y_1)=y_2-y_1$$

და ისევ

$$d=\sqrt{(M_1K)^2+(M_2K)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

მკითხველს ვურჩევთ თვითონ განიხილოს წერტილთა განლაგების კიდევ რამდენიმე შემთხვევა.

კერძოდ, თუ გვინდა ვიპოვოთ d მანძილი $M(x,y)$ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე $O(0,0)$ წერტილამდე, მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$\boxed{d=\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2}$$

საჭიროა ამ შედეგისა და ზოგადი ფორმულის დამახსოვრება.

---

* მკითხველმა კარგად უნდა გაიგოს, რომ აქ M_1B-ს ქვეშ გვესმის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძე, ანუ დადებითი რიცხვი. ხოლო x_1 აბსცისა (ნახ. 4) არის ეს სიგრძე აღებული „—“ ნიშნით, ე. ი. $x_1=-M_1B$, მაშასადამე, $M_1B=-x_1$.

მაგალითები. 1) ვიპოვოთ $d=M_1M_2$, თუ $M_1=M_1(2,5)$, $M_2=M_2(6,8)$.

აქ

$$d=\sqrt{(6-2)^2+(8-5)^2}=5.$$

2) ვიპოვოთ $d=M_1M_2$, $M_1(-2,1)$ და $M_2(3,-3)$ წერტილებისათვის.

აქ

$$d=\sqrt{(3+2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{41}\approx 6,4\,*$$

3) ვიპოვოთ Oy ღერძზე M წერტილი, რომელიც N (3,7) წერტილიდან $d=5$ მანძილითაა დაშორებული.

რადგან M წერტილი ძევს Oy ღერძზე, ამიტომ მისი x აბსცისა ნულის ტოლია. უნდა ვიპოვოთ მისი ორდინატი y. პირობა $MN=5$ (1) ფორმულის საშუალებით ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\sqrt{(3-0)^2+(7-y)^2}=5.$$

აქედან

$$(7-y)^2=16, \qquad 7-y=\pm 4,$$

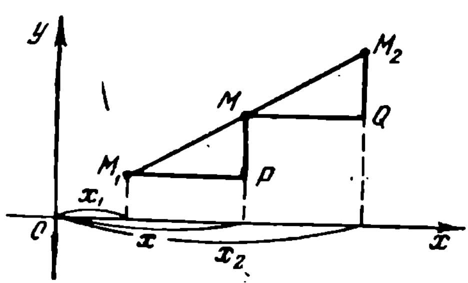
$$y_1=3, \qquad y_2=11.$$

ამგვარად, ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი: $M_1(0,3)$ და $M_2(0,11)$.

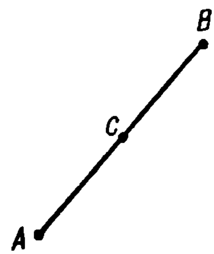
3. მონაკვეთის შუაწერტილი

ამოცანა. მოცემულია $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილები. ვიპოვოთ M_1M_2 მონაკვეთის შუა $M(x, y)$ წერტილი.

ამოხსნა. ავაგოთ M_1PM და MQM_2 სამკუთხედები (ნახ. 5).



ნახ. 5.



ნახ. 6.

*≈ სიმბოლო არის მიახლოებითი ტოლობის ნიშანი.

ცხადია, რომ ეს სამკუთხედები ტოლია. აქედან კერძოდ,

$$M_1P=MQ,$$

ან, რაც იგივეა

$$x-x_1=x_2-x.$$

მაგრამ, მაშინ $2x=x_1+x_2$ და ამიტომ

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}} \tag{3 ა}$$

ანალოგიურად, თუ შევადარებთ MP და M_2Q მონაკვეთებს, მივიღებთ

$$\boxed{y=\frac{y_1+y_2}{2}} \tag{3 ბ}$$

ამგვარად, **მონაკვეთის შუაწერტილის ყოველი კოორდინატი უდრის მისი ბოლოების ერთსახელა კოორდინატების ჯამის ნახევარს შესაბამისად.**

შენიშვნა. (3) ფორმულები მიღებულია წერტილების უმარტივესი მდებარეობისათვის, (რომელიც მოცემულია მე-5 ნახაზზე), მაგრამ ისინი მართებულია ყოველთვის.

მაგალითები. 1) ვიპოვოთ AB მონაკვეთის $C(x, y)$ შუაწერტილი, თუ $A=A(5,2)$, $B=B(11,8)$ (ნახ. 6)

(3) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$x=\frac{5+11}{2}=8, \quad y=\frac{2+8}{2}=5, \quad C=C(8,5).$$

2) ცნობილია AB მონაკვეთის ბოლო წერტილი $A(2,3)$ და $C(4,9)$ შუაწერტილი. ვიპოვოთ ბოლო B წერტილი.

ვთქვათ, რომ $B=B(x_B, y_B)$. (3) ფორმულების თანახმად

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}, \qquad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},$$

ანუ

$$4=\frac{2+x_B}{2}, \qquad 9=\frac{3+y_B}{2},$$

საიდანაც

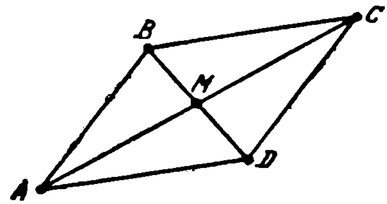
$$x_B=6, \qquad y_B=15. \qquad \text{ე. ი.} \qquad B=B(6,15).$$

3) მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამის სამი წვერო $A(1,2)$, $B(4,3)$, $C(7,5)$. ვიპოვოთ D წვერო (ნახ. 7)*.

ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ პირობით, რომ პარალელოგრამის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფენ. თუ მათი გადაკვეთის წერტილს აღვნიშნავთ M-ით, მაშინ

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+7}{2}=4,$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+5}{2}=3,5.$$



ნახ. 7.

მეორე მხრივ

$$x_M=\frac{x_B+x_D}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_D}{2},$$

ე. ი.

$$4=\frac{4+x_D}{2},\quad 3,5=\frac{3+y_D}{2},$$

საიდანაც

$$x_D=4,\qquad y_D=4.$$

ამგვარად,

$$D=D(4,4).$$

4. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

ამოცანა. მოცემულია $M_1(x_1\ y_1)$ და $M_2(x_2,\ y_2)$ წერტილები და q_1, q_2 დადებითი რიცხვები. ვიპოვოთ $M\ (x,\ y)$ წერტილი, რომელიც ყოფს M_1M_2 მონაკვეთს $q_1:q_2$ ფარდობით, ე. ი. აკმაყოფილებს

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{q_1}{q_2} \tag{4}$$

თანაფარდობას.

ამოხსნა. ავაგოთ M_1PM და MQM_2 სამკუთხედები, რომლებიც მოცემულია მე-8 ნახაზზე. ცხადია, რომ ეს სამკუთხედები მსგავსია. მაშასადამე,

$$\frac{M_1P}{MQ}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

---

* ჩვენ გირჩევთ მსგავს „ესკიზურ“ ნახაზებს, რომელთა მიზანია ამოცანაში გარკვევა. ამ ნახაზებზე არ არის დაცული ზომების სიზუსტე, დატალების ზუსტი განლაგება და სხვა.

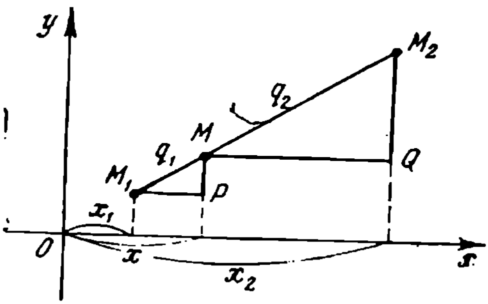
მაგრამ

$$M_1P = x - x_1, \qquad MQ = x_2 - x,$$

ამ და (4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{q_1}{q_2}.$$

მაშასადამე,



ნახ. 8.

$$xq_2 - x_1q_2 = x_2q_1 - xq_1$$

და ამიტომ

$$\boxed{x = \frac{x_1q_2 + x_2q_1}{q_1 + q_2}} \qquad (5\text{ა})$$

ანალოგიურად

$$\boxed{y = \frac{y_1q_2 + y_2q_1}{q_1 + q_2}} \qquad (5\text{ბ})$$

ამ ფორმულებს ადვილად დავიმახსოვრებთ, თუ მივაქცევთ ყურადღებას იმას, რომ M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატები უნდა გავამრავლოთ რიცხვზე, რომელიც შეესაბამება მეორე წერტილის მიმდებარე მონაკვეთს.

შევნიშნავთ, რომ (5) ფორმულები მართებულია M_1 და M_2 წერტილების არა მარტო მე-8 ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობის შემთხვევაში, არამედ მათი ნებისმიერი მდებარეობისათვის.

კერძოდ, თუ $q_1 = q_2 = q$, მაშინ (5) ფორმულები გვაძლევს (3) ფორმულებს, რომლებიც მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებს გამოსახავენ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) ვიპოვოთ AB მონაკვეთზე ისეთი C წერტილი, რომლისათვისაც $AC:CB = 7:5$, სადაც $A = A(2,9)$, $B = B(-4,3)$. აქ

$$x_C = \frac{2\cdot 5 + (-4)\cdot 7}{12} = -\frac{3}{2}, \qquad y_C = \frac{9\cdot 5 + 3\cdot 7}{12} = \frac{11}{2},$$

$$C = C\left(-\frac{3}{2},\ \frac{11}{2}\right).$$

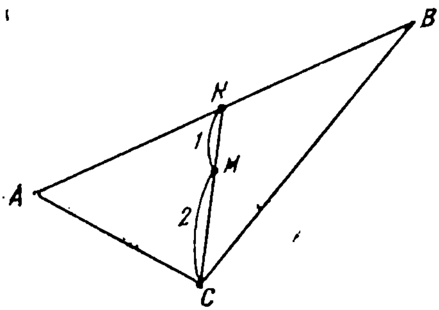
2) ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი M, თუ $A = A(1,5)$, $B = B(7,\ 8)$ და $C = C(4,\ 2)$ (ნახ. 9).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ფიზიკიდან ცნობილია, რომ საძიებელი წერტილი მედიანების გადაკვეთის წერტილია და ყოფს თითოეულ მათგანს ფარდობით 2:1 (თუ ვიანგარიშებთ წვეროდან).

ვთქვათ, K AB მონაკვეთის შუაწერტილია.

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+7}{2}=4,$$

$$y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5+8}{2}=6{,}5,$$



ნახ. 9.

K-ს მონახვის შემდეგ, ვყოფთ CK მონაკვეთს 2:1 ფარდობით

$$x_M=\frac{x_C\cdot 1+x_K\cdot 2}{3}=\frac{4+8}{3}=4,$$

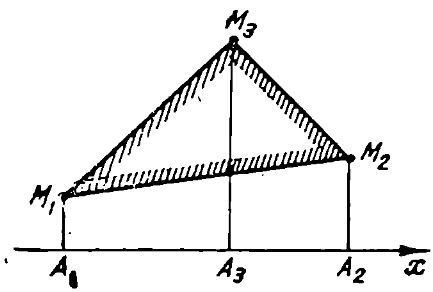
$$y_M=\frac{y_C\cdot 1+y_K\cdot 2}{3}=\frac{2+13}{3}=5.$$

ამგვარად,

$$M=M\,(4{,}5).$$

5. სამკუთხედის ფართობი

ამოცანა. მ ო ც ე მ უ ლ ი ა $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ და $M_3(x_3,\ y_3)$ წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი. ვ ი პ ო ვ ო თ $M_1M_2M_3$ ს ა მ კ უ თ ხ ე დ ი ს ფ ა რ თ ო ბ ი F.



ნახ. 10.

ა მ ო ხ ს ნ ა. M_1, M_2, M_3 წერტილებიდან დავუშვათ Ox ღერძზე მართობები (ნახ. 10). მივიღებთ ფიგურას, რომელიც მოგვაგონებს სახლს; ეს „სახლი“ შედგება $A_1M_1M_3A_3$ და $A_3M_3M_2A_2$ ტრაპეციებისაგან. ჩვენთვის საინტერესო სამკუთხედი მიიღება, თუ ამ „სახლიდან“ გამოვყოფთ $A_1M_1M_2A_2$ ტრაპეციას. მაშასადამე,

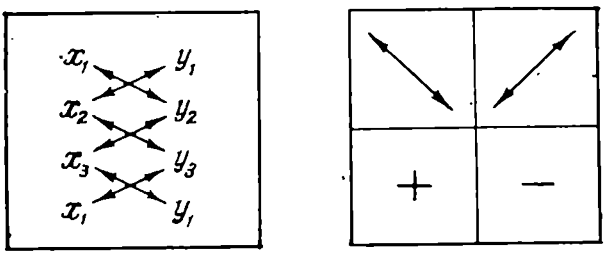
$$F=\frac{y_1+y_3}{2}\,(x_3-x_1)+\frac{y_3+y_2}{2}\,(x_2-x_3)-\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1).$$

ფრჩხილების გახსნის და მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ ვღებულობთ.

$$\boxed{F=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)\right]} \qquad (6)$$

ამ შედეგის დასამახსოვრებლად გირჩევთ შემდეგ წესს.

წესი. იმისათვის, რომ შევადგინოთ (6) ფორმულის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება, საჭიროა ჩამოვწეროთ სვეტში პირველი, მეორე, მესამე წვეროს და ბოლოს კვლავ პირველი წვეროს კოორდინატები. შემდეგ ისინი გავამრავლოთ ქვემოთ მითითებული სქემის მიხედვით, ხოლო ნიშნები მივუწეროთ ისე, როგორც მარჯვენა ნახაზზეა მითითებული.



მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი წვეროებია (2,1), (8,3), (6,5).

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სვეტი:

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 8 & 3 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 6 & 5 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 2 & 1 \end{array}$$

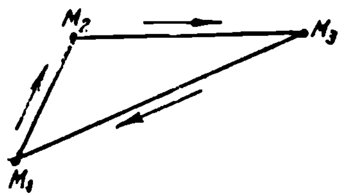
მაშინ

$$F=\frac{1}{2}\left[(2\cdot3+8\cdot5+6\cdot1)-(1\cdot8+3\cdot6+5\cdot2)\right]=8 \text{ კვ. ერთ.}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: 1) ზოგჯერ (6) ფორმულა F-ისათვის გვაძლევს უარყოფით მნიშვნელობას*. მაშინ მინუს ნიშანს უკუვაგდებთ, ე. ი. F ფართობი უდრის (6) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში მიღებული რიცხვის ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს (ანუ მ ო დ უ ლ ს).

2) თუ (6) ფორმულით F-ის გამოთვლისას მივიღებთ ნულს, მაშინ M_1, M_2 და M_3 წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე. აქედან გამომდინარეობს

წესი. იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ძევს, თუ არა სამი წერტილი ერთ წრფეზე, საჭიროა ჩავთვალოთ ისინი სამკუთხედის წვეროებად და გამოვთვალოთ F ფართობი. თუ $F=0$, მაშინ წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე.



ნახ. 11,

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გავიგოთ ძევს თუ არა ერთ წრფეზე

$$A(1,12),\quad B(5,6),\quad C\ (9,0)\ \text{წერტილები.}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სვეტი:

$$\begin{array}{cc} 1 & 12 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 5 & 6 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 9 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 1 & 12 \end{array} \qquad F=\frac{1}{2}[(1\cdot6+5\cdot0+9\cdot12)-(12\cdot5+6\cdot9+0\cdot1)]=0.$$

რადგან $F=0$, ამიტომ A, B, C წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე.

6. მრავალკუთხედის ფართობი

ნებისმიერი მრავალკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით, რომელიც (6) ფორმულის ანალოგიურია. მაგალითად, ხუთკუთხედის F ფართობი, თუ მისი წვეროებია: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (x_4, y_4), (x_5, y_5) უდრის

$$F=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_5+x_5y_1)-\right.$$

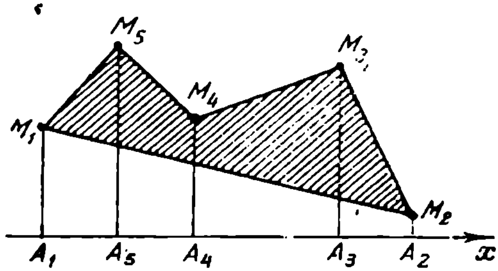
$$\left.-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_5+y_5x_1)\right]. \qquad (7)$$

---

* წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომელიც გარს უვლის $M_1M_2M_3$ სამკუთხედის კონტურს მიმდევრობით $M_1M_2M_3M_1$, თუ ამ დროს თვით სამკუთხედი რჩება დამკვირვებლის მარცხნივ (ნახ. 10), მაშინ (6) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ნიშანი დადებითია, ხოლო თუ სამკუთხედი რჩება მარჯვნივ (ნახ. 11). მაშინ—უარყოფითი.

ეს გამოსახულება შეიძლება დავიმახსოვროთ იმავე წესით, როგორც (6) ფორმულა. (7) ფორმულა მტკიცდება ისე, როგორც (6) ფორმულა.

ვთქვათ, მაგალითად, რომ ლაპარაკია ხუთკუთხედზე, რომელიც გამოსახულია მე—12 ნახაზზე. მაშინ ის უნდა შევადგინოთ ტრაპეციებისაგან შემდეგნაირად:

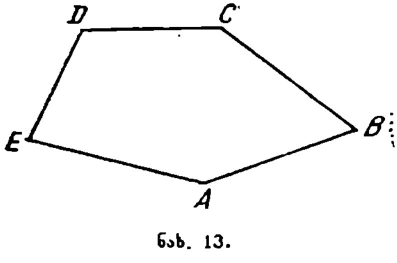


ნახ. 12

$$M_1M_2M_3M_4M_5M_1 = A_1M_1M_5A_5 + A_5M_5M_4A_4 + A_4M_4M_3A_3 + \\ + A_3M_3M_2A_2 - A_1M_1M_2A_2.$$

შემდგომი მსჯელობა შეიძლება მივანდოთ მკითხველს.

მრავალკუთხედის ფართობის გამოთვლის დროს უნდა გამოვიჩინოთ სიფრთხილე, რომელიც არ გვჭირდებოდა სამკუთხედის შემთხვევაში. სახელდობრ, როდესაც სვეტში ვწერთ მრავალკუთხედის წვეროების კოორდინატებს, უნდა დავიცვათ, ამ წვეროების განლაგების თანამიმდევრობა.*



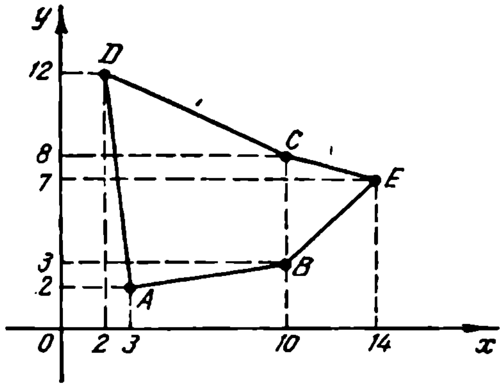
ნახ. 13.

ასე მაგალითად, მე-13 ნახაზზე გამოსახული მრავალკუთხედისათვის წვეროები უნდა ავიღოთ შემდეგი თანამიმდევრობით $ABCDEA$, არ შეიძლება მათი აღება $ADCBEA$ თანამიმდევრობით. ამ გარემოების გამო, საჭიროა მრავალკუთხედის ფართობის გამოთვლა დავიწყოთ თუნდაც უხეში ნახაზის აგებით.

* სულ ერთია, თუ რომელი წვეროდან დავიწყებთ შემოვლას. ასევე არ არის არსებითი, თუ მრავალკუთხედი რომელ მხარეს რჩება ჩვენგან, მარცხნივ თუ მარჯვნივ. პირველ შემთხვევაში უმალ ვღებულობთ ჩვენთვის საინტერესო ფართობს, ხოლო მეორე შემთხვევაში ვღებულობთ ფართობს „მინუს“ ნიშნით, რომელსაც უკუ ვაგდებთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ფართობი ხუთკუთხედისა, რომლის წვეროებია $A(3,2)$, $B(10,3)$, $C(10,8)$, $D(2,12)$, $E(14,7)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავიწყოთ წვეროების აგებით როგორც ნაჩვენებია მე-14 ნახაზზე. წრფივი მონაკვეთებით წვეროების შეერთების შემდეგ



სურ. 14.

დავინახავთ, რომ $ABCDEA$ თანამიმდევრობა დაუშვებელია. დასაშვებია $ABECDA$ თანამიმდევრობა. თუ წვეროების კოორდინატებს ამ მიმდევრობით ამოვწეროთ სვეტში, მივიღებთ

$$\begin{array}{rr} 3 & 2 \\ 10 & 3 \\ 14 & 7 \\ 10 & 8 \\ 2 & 12 \\ 3 & 2 \end{array} \qquad F=\frac{1}{2}((9+70+112+120+4)- -(20+42+70+16+36))=65,5 \text{ კვ. ერთ.}$$

§ 2. წირები და განტოლებები

1. შესაბამისობის მეორე პრინციპი

შემდგომი მსჯელობა, უფრო გასაგები რომ იყოს, დავიწყოთ მაგალითით.

განვიხილოთ განტოლება

$$3x+2y-6=0. \qquad (1)$$

რადგან ეს განტოლება აკავშირებს ორ უცნობს, შეგვიძლია ერთ-ერთ მათგანს, მაგალითად x-ს, მივცეთ რაიმე მნიშვნელობა და ამის მიხედვით

ვიპოვოთ მეორე უცნობის, y-ის, მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ $x=1$, მაშინ $y=\frac{3}{2}$. ანალოგიურად

როცა $x=0$, მაშინ $y=3$,

როცა $x=4$, მაშინ $y=-3$,

როცა $x=2$, მაშინ $y=0$,

როცა $x=-1$, მაშინ $y=\frac{9}{2}$

თუ შევადგენთ ამ უცნობების ერთმანეთის შესაბამის მნიშვნელობათა წყვილებს, მივიღებთ: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $(0,3)$, $(4, -3)$, $(2, 0)$, $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$.

ცხადია, რომ ასეთი წყვილები შეიძლება მივიღოთ რამდენიც გვინდა, თანაც ყოველი მათგანი აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. არსებობენ ისეთი წყვილებიც, რომლებიც განტოლებას არ აკმაყოფილებენ. მაგალითად, ასეთებია $(0,0)$, $(7,1)$, $(4,0)$, $(-2,2)$. ამოვწეროთ ორივე ტიპის წყვილები ორ სვეტში. პირველში მოვათავსოთ ის წყვილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას, ხოლო მეორეში — ისინი, რომლებიც მას არ აკმაყოფილებენ.

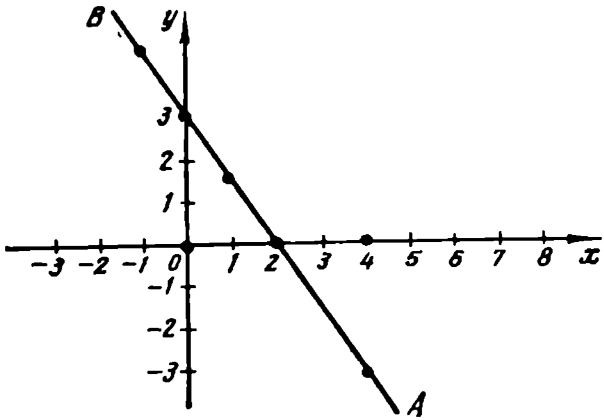
$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$(0, 0)$
$(0,3)$	$(7,1)$
$(4, -3)$	$(4, 0)$
$(2, 0)$	$(-2, 2)$
$\left(-1, \frac{9}{2}\right)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
----------	--------

ამის შემდეგ გავიხსენოთ, რომ რიცხვთა ყოველი წყვილი შეიძლება ჩავთვალოთ სიბრტყის რაიმე წერტილის კოორდინატებად. ამით ჩვენი წყვილები შეიძლება ჩავთვალოთ წერტილებად. ავაგოთ ეს წერტილები მე-15 ნახაზზე. ამ დროს აღმოჩნდება, რომ წერტილები, რომელთა კოორდინატები პირველ სვეტშია დაწერილი, მდებარეობენ გარკვეულ AB წრფეზე, ხოლო მეორე სვეტის წერტილები არ ხვდებიან ამ წრფეზე. ვხედავთ, რომ (1) განტოლებასა და AB წრფეს შორის ადგილი აქვს შემდეგ შესაბამისობას: თუ $M(x, y)$ წერტილი ძევს AB წრფეზე, მაშინ მისი x და y კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას, ხოლო

თუ წერტილი არ ძევს AB წრფეზე, მაშინ მისი კოორდინატები არ აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას.

ანალოგიური სურათი გვაქვს მეორე მაგალითშიც

$$2y=x^2 \tag{2}$$



ნახ. 15.

განტოლებას აკმაყოფილებენ რიცხვთა შემდეგი წყვილები (0,0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$, (2, 2), (−2, 2).

წერტილები, რომელთა კოორდინატებს ეს წყვილები წარმოადგენენ, მდებარეობენ, რაღაც AB წირზე* (ნახ. 16).

პირიქით, რიცხვთა წყვილები (0,—1), (1,0), (2,1) (2) განტოლებას არ აკმაყოფილებენ და მათი შესაბამისი წერტილები AB წირზე არ მდებარეობენ.

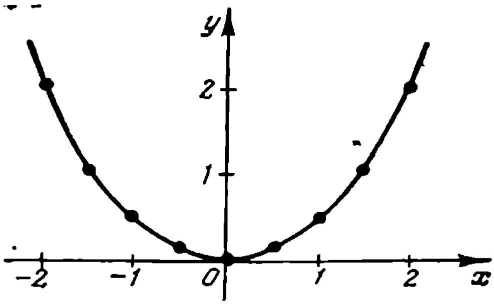
ეს მაგალითები შემდეგი პრინციპის ილუსტრაციას წარმოადგენენ:

---

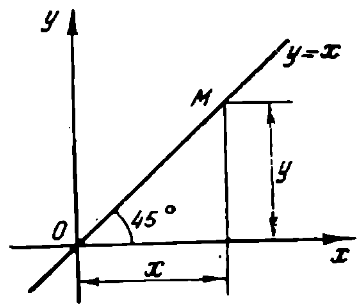
* ამ წირს პარაბოლა ეწოდება. ქვემოთ მას შევისწავლით უფრო დაწვრილებით.

შესაბამისობის მეორე პრინციპი. ორ x და y უცნობის შემცველ ყოველ განტოლებას საზოგადოდ* შეესაბამება სიბრტყეზე რაიმე წირი და პირიქით, ყოველ ბრტყელ წირს შეესაბამება რაიმე განტოლება.

სიტყვას „შეესაბამება“, რომელიც ამ პრინციპის ფორმულირებაში შედის, აქვს შემდეგი ზუსტი შინაარსი: თუ რაიმე წერტილი ძევს წირზე, მაშინ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ წირის განტოლებას, ხოლო თუ წერტილი წირზე არ ძევს, მაშინ მისი კოორდინატები არ აკმაყოფილებენ წირის განტოლებას.



ნახ. 16.



ნახ. 17.

აღნიშნული პრინციპი ანალიზური გეომეტრიის საფუძველია. წირის გეომეტრიული თვისებები (მაგალითად, მისი თვისება იყოს წრფე, „წრფეობა“, ან სიმეტრია და სხვა) შეიძლება აღმოვაჩინოთ შესაბამისი განტოლების (ან როგორც მოკლედ ამბობენ „მისი განტოლების“) ალგებრული თვისებებით.

შემდგომში გამოთქმებს: „მოცემულია წირი“ და „მოცემულია წირის განტოლება“ არ განვასხვავებთ ერთმანეთისაგან ისევე როგორც არ ვანსხვავებთ ერთმანეთისაგან გამოთქმებს: „მოცემულია წერტილი“ „მოცემულია წერტილის კოორდინატები“. უფრო მეტიც, ვიტყვით

* გამოთქმა „საზოგადოდ“ აღნიშნავს იმას, რომ პრინციპი უშვებს გამონაკლისებს, მაგალითად,

$$x^2+y^2+1=0$$

განტოლებას არ შეესაბამება სიბრტყეზე არავითარი გეომეტრიული სახე, ვინაიდან არ არსებობს ნამდვილი x და y რიცხვები, რომლებიც ამ განტოლებას აკმაყოფილებს.

$$(x-5)^2+(y-1)^2=0$$

განტოლებას შეესაბამება არა წირი, არამედ (5,1) წერტილი. ბოლოს $x+y=x+y$ განტოლებას შეესაბამება მთელი სიბრტყე.

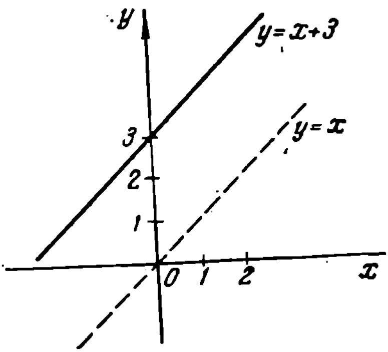
„$y=x+2$ წირი“, ნაცვლად გამოთქმისა „წირი, რომელიც შეესაბამება $y=x+2$ განტოლებას“.

ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითებში ვიწყებდით განტოლებით და მივდიოდით შესაბამის წირამდე. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი, სადაც მოცემულია წირი, და მივიღოთ შესაბამისი განტოლება.

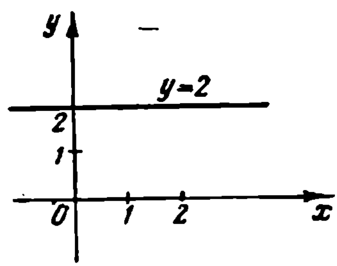
1) პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისას (ნახ. 17) შეესაბამება განტოლება

$$y=x.$$

მართლაც, თუ $M(x, y)$ წერტილი მდებარეობს, აღნიშნულ ბისექტრისაზე, მაშინ ცხადია, რომ $y=x$. იმ წერტილებისათვის, რომლებიც ბისექტრისის ზემოთ (ქვემოთ) მდებარეობენ გვექნება $y>x$ (შესაბამისად $y<x$).



ნახ. 18.



ნახ. 19.

2) თუ წრფე ხსენებული ბისექტრისის პარალელურია და მდებარეობს 3 ერთეულით მასზე ზემოთ (ნახ. 18), მაშინ მას შეესაბამება განტოლება

$$y=x+3.$$

3) Ox ღერძის პარალელურ წრფეს, რომელიც 2 ერთეულით მის ზემოთ მდებარეობს (ნახ. 19) შეესაბამება განტოლება*

$$y=2. \tag{3}$$

* ზოგჯერ მოსწავლეები (3) ტოლობას განტოლებად არ თვლიან. ისინი ამაში ცდებიან. (3) „ნამდვილი“ განტოლებაა, რადგან ის შეიცავს ასოს და მართებულია ამ ასოს გარკვეული ($y=2$) მნიშვნელობისათვის. y-ის ნებისმიერი სხვა მნიშვნელობისათვის (3) ტოლობა მცდარია. ის, რომ ამ შემთხვევაში განტოლება შეიცავს მხოლოდ ერთ უცნობს, არავითარ როლს არ ასრულებს (თუნდაც იმიტომ, რომ (3) შეიძლება ჩაიწეროს $x+y=x+2$ სახით).

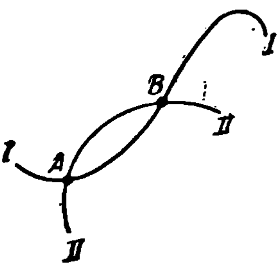
მართლაც, $A(1,2)$, $B(0,2)$, $C(-7,2)$ და ა. შ. წერტილები მდებარეობენ ჩვენს წრფეზე და მათი კოორდინატები აკმაყოფილებენ (3) განტოლებას მაშინ, როდესაც (1,7) წერტილი მასზე არ ძევს და მისი კოორდინატები (3) განტოლებას არ აკმაყოფილებენ.

4) ორდინატთა ღერძის განტოლებაა

$$x=0.$$

ზემოთ ფორმულირებული პრინციპიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ორი წესი:

I. იმისათვის, რომ გავიგოთ ძევს, თუ არა მოცემული წერტილი მოცემულ წირზე, უნდა ჩავსვათ წერტილის კოორდინატები წირის განტოლებაში. თუ მიღებული ტოლობა აღმოჩნდება მართებული (მცდარი), მაშინ წერტილი ძევს (არ ძევს) წირზე.



ნახ. 20.

მაგალითად $M(2,1)$ წერტილი არ ძევს $x^2+y^3=xy$ წირზე, ვინაიდან $2^3+1^3\neq 2\cdot 1$.

II. ორი I და II წირის გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად, უნდა მოვნახოთ ამ წირების განტოლებების საერთო ამონახსნები, რადგან საძიებელი კოორდინატები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდნენ ორივე განტოლებას (ნახ. 20).

მაგალითად, $y=x$ ბისექტრისის $x=0$ აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად უნდა ამოიხსნას ორივე განტოლება ერთობლივად. მიიღება (0,0) წერტილი, რაც ცხადია უშუალოდაც,

წირები $y^2=x^2+1$ და $y=x$ არ გადაიკვეთება, რადგან დაწერილი განტოლებები არათავსებადია.

2. წრეწირი

შესაბამისობის მეორე პრინციპის ილუსტრაციის კარგი მაგალითია წ რ ე წ ი რ ი.

განვიხილოთ მაგალითად, წრეწირი, რომლის ცენტრი მოთავსებულია C (3,1) წერტილში, ხოლო რადიუსი 4-ის ტოლია (ნახ. 21). ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილი. მიუხედავათ იმისა, ძევს ეს წერტილი წრეწირზე თუ არა, მანძილი CM ამ წერტილიდან C ცენტრამდე უდრის

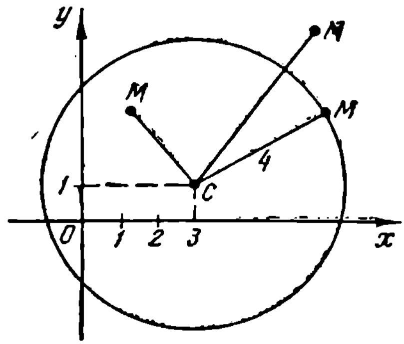
$$CM=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

თუ M ძევს წრეწირზე, მაშინ $CM=4$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $CM\neq 4$. მაშასადამე,

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=4$$

განტოლებას აკმაყოფილებენ მხოლოდ და მხოლოდ წრეწირის ყველა წერტილის კოორდინატები.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დაწერილი განტოლება წარმოადგენს ჩვენი წრეწირის განტოლებას.



ნახ. 21.

სრულიად ანალოგიური გარემოებაა ზოგად შემთხვევაში. თუ წრეწირის ცენტრია $C(a, b)$ წერტილი და რადიუსი არის R, მაშინ მისი განტოლება იქნება

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$$

ჩვეულებრივად, ამ განტოლებას უფრო მარტივი სახით წერენ

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2} \qquad (4)$$

კერძოდ, როცა ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, წრეწირის განტოლება ასეთია:

$$\boxed{x^2+y^2=R^2} \qquad (5)$$

(4) და (5) განტოლებები უნდა დავიმახსოვროთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) $(x-2)^2+(y-4)^2=25$ განტოლებას შეესაბამება წრეწირი, რომლის ცენტრია $C(2,4)$ წერტილი, ხოლო რადიუსი — $R=5$.

2) $(x+1)^2+y^2=5$ განტოლებას შეესაბამება წრეწირი, რომლის ცენტრია $C(-1,0)$ წერტილი, ხოლო რადიუსი — $R=\sqrt{5}\approx 2,24$.

3) იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ, თუ რა წირი შეესაბამება

$$x^2-6x+y^2+10y=3 \qquad (6)$$

განტოლებას, გარდავქმნათ *ის ასე:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)=37$$

---

* მკითხველის ყურადღებას მივაქცევთ ამ ხერხს. x^2+px+q კვადრატული სამწევრის შემდეგ გამოსახულებად გარდაქმნას

$$\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

ეწოდება „სრული კვადრატის გამოყოფა". ის ძალიან ხშირად გამოიყენება.

ან

$$(x-3)^2+(y+5)^2=37.$$

ახლა გასაგებია, რომ (6) არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $C(3,-5)$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $R=\sqrt{37}\approx 6{,}08$.

4) $x^2+y^2=6x$ განტოლება დაიყვანება $(x-3)^2+y^2=9$ სახემდე და ამიტომ ის არის წრეწირი ცენტრით C (3,0) წერტილში, და რადიუსით $R=3$.

5) ვიპოვოთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც ორჯერ მეტი მანძილით არიან დაშორებული $A(-3,1)$ წერტილიდან, ვიდრე $B(9,10)$ წერტილიდან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილისათვის გვაქვს

$$AM=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2},\quad BM=\sqrt{(x-9)^2+(y-10)^2}.$$

თუ M ეკუთვნის ჩვენს წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, მაშინ

$$AM=2BM.$$

ე. ი.

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-9)^2+(y-10)^2}.$$

ეს არის აღნიშნული გეომეტრიული ადგილის განტოლება. გარდავქმნათ ის თანამიმდევრულად:

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=4\,(x^2-18x+81+y^2-20y+100),$$
$$3x^2-78x+3y^2-78y+714=0,$$
$$x^2-26x+y^2-26y+238=0.$$

და საბოლოოდ,

$$(x-13)^2+(y-13)^2=100.$$

მაშასადამე, საძიებელი გეომეტრიული ადგილი არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $C(13, 13)$ წერტილი, ხოლო რადიუსი — $R=10$. ამ მაგალითზე უკვე ჩანს ანალიზური გეომეტრიის მეთოდის ძალა.

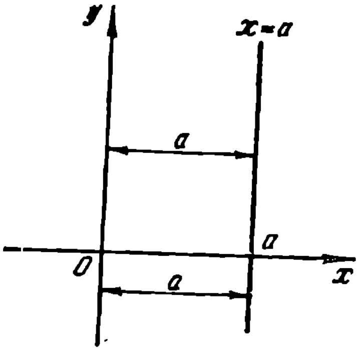
§ 8. წრფე

1. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით

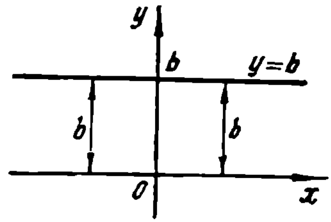
წრფე წირებს შორის უმარტივესია. მას შევისწავლით ქვემოთ ანალიზური გეომეტრიის მეთოდებით.

თეორემა. 1. ყ ო ვ ე ლ წ რ ფ ე ს შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ა პ ი რ ვ ე ლ ი ხ ა რ ი ს ხ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გავარჩიოთ წრფის მდებარეობის სხვადასხვა შემთხვევა. ყოველი მათგანისათვის შევადგენთ შესაბამის განტოლებას და დავადგენთ, რომ მიღებული განტოლება პირველი ხარისხისაა.



ნახ. 22.



ნახ. 23.

I შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ, განსახილავი წრფე Oy ღერძის პარალელურია (ნახ. 22). მაშინ ამ წრფის ყოველ წერტილს აქვს ერთი და იგივე აბსცისა. თუ კერძოდ, წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისაა a რიცხვი, მაშინ ამ წრფის ყოველი (x, y) წერტილისათვის:

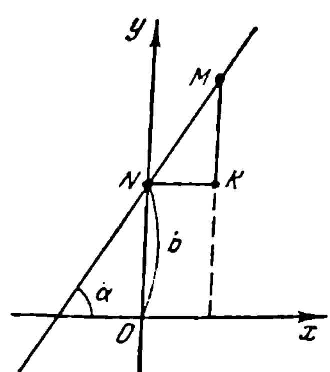
$$\boxed{x=a} \qquad (1)$$

(1) ტოლობა ამ წრფის განტოლებას წარმოადგენს. როგორც ვხედავთ (1) განტოლება პირველი ხარისხისაა, რაც ამტკიცებს თეორემას.

II შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ, წრფე Ox ღერძის პარალელურია (ნახ. 23). თუ ამ წრფის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატა b რიცხვის ტოლია, მაშინ წრფის განტოლება იქნება

$$\boxed{y=b} \qquad (2)$$

ამ შემთხვევაშიც წრფის განტოლება პირველი ხარისხისაა.



ნახ. 24.

III შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ, წრფე არ არის პარალელური არცერთი ღერძის (ნახ. 24). აღვნიშნოთ α-თი ის უმცირესი კუთხე, რომელზეც უნდა მოვაბრუნოთ Ox ღერძი (საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით), რომ ის შეუთავსდეს მოცემულ წრფეს. ვთქვათ

$$\operatorname{tg} \alpha = m.$$

დავინახავთ, რომ ამ სიდიდეს აქვს დიდი მნიშვნელობა. მას უწოდებენ წრფის კ უ თ ხ უ რ კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ს. აღვნიშნოთ b-თი წრფის Oy ღერძთან გადაკვეთის N წერტილის ორდინატა. ამ სიდიდეს უწოდებენ ს ა წ ყ ი ს ო რ დ ი ნ ა ტ ა ს.

ავიღოთ წრფეზე ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილი. თუ გავავლებთ ღერძების პარალელურ NK და MK წრფეებს, მივიღებთ NKM მართკუთხა სამკუთხედს. ცხადია*, რომ

$$\frac{MK}{NK}=\operatorname{tg}\alpha, \quad NK=x, \quad MK=y-b.$$

აქედან (თუ გავიხსენებთ, რომ $\operatorname{tg}\alpha=m$) ვღებულობთ

$$\frac{y-b}{x}=m.$$

საბოლოოდ,

$$\boxed{y=mx+b} \tag{3}$$

ვინაიდან M წრფის ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ (3) განტოლება იქნება ჩვენი წრფის განტოლება**. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (3) განტოლება პირველი ხარისხის განტოლებაა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა . 1) (3) სახით შეიძლება დაიწეროს ღერძების არა პარალელური ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი წრფის განტოლება.

2) (2) განტოლება, რომელიც წარმოადგენს Ox ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას, შეიძლება განვიხილოთ როგორც (3) განტოლების კერძო შემთხვევა, რომელიც მიიღება როცა $m=0$, ეს სავსებით შეესაბამება m კუთხური კოეფიციენტის გეომეტრიულ მნიშვნელობას. მართლაც Ox ღერძის პარალელური წრფისათვის α უნდა ჩავთვალოთ 0-ის ტოლად, მაშინ $m=\operatorname{tg}\alpha=0$.

---

* ყოველივე, რაც ნათქვამია ტექსტში, ეხება 24-ე ნახაზს. თუ იმავე წრფისათვის ავიღებთ $M(x, y)$ წერტილს არა პირველ საკოორდინატო კუთხეში, ან განვიხილავთ სხვა წრფეს, რომლისათვისაც α კუთხე ბლაგვია, მაშინ ბუნებრივია, რომ მსჯელობა გართულდება. ჩვენ აქ არ განვიხილავთ ყველა შესაძლო შემთხვევას. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ყველა შემთხვევაში მიიღება იგივე (3) განტოლება (რასაკვირველია ბლაგვი კუთხის შემთხვევაში $m=\operatorname{tg}\alpha<0$)

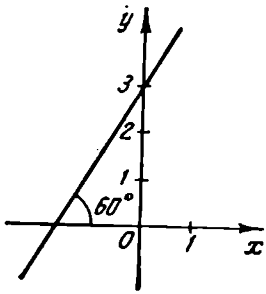
** მკაცრად რომ ვთქვათ, საჭირო იყო აგრეთვე იმის დამტკიცება, რომ მოცემულ წრფეზე არამდებარე წერტილების კოორდინატები ვერ დააკმაყოფილებენ (3) განტოლებას.

3) თუ წრფე პარალელურია Oy ღერძის, მაშინ მისი განტოლება $x=a$, არ წარმოადგენს (3) განტოლების კერძო შემთხვევას. ეს გარემოებაც შეესაბამება m-ის გეომეტრიულ შინაარსს. მართლაც, ამ შემთხვევაში $\alpha=90°$, ამ კუთხის ტანგენსი კი არ არსებობს.

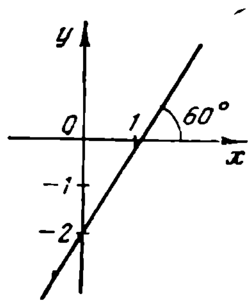
4) m რიცხვის სახელწოდებასთან დაკავშირებით თვით (3) განტოლებასაც ეწოდება *განტოლება კუთხური კოეფიციენტით*. ამგვარად Oy ღერძის არაპარალელურ წრფეებს აქვთ განტოლება კუთხური კოეფიციენტით, ხოლო Oy ღერძის პარალელურ წრფეთა განტოლება კი განსხვავებული სახისაა $x=a$.

მაგალითები. 1) განვიხილოთ 25-ე ნახაზზე მოცემული წრფე. ამ წრფისათვის $\alpha=60°$, $b=3$, ამიტომ მისი განტოლებაა

$$y=\sqrt{3}x+3.$$



ნახ. 25.



ნახ. 26.

2) 26-ე ნახაზზე მოცემული წრფისათვის $\alpha=60°$, $b=-2$. მაშასადამე, მისი განტოლებაა

$$y=\sqrt{3}\,x-2$$

3) 27-ე ნახაზზე მოცემული წრფისათვის $\alpha=150°$, $b=2$, ამიტომ ამ წრფის განტოლებაა

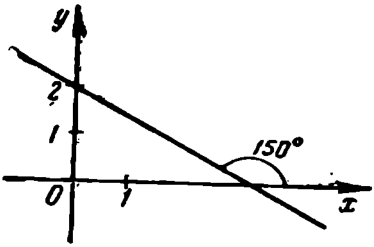
$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\,x+2.$$

განხილულ მაგალითებში ნახაზზე მოცემული წრფეების მიხედვით ვადგენთ მათ განტოლებებს. ამავე დროს პირველი თეორემის შედეგებიდან გამომდინარე, შეიძლება ვიმსჯელოთ შებრუნებით.

მაგალითად, ცხადია, რომ

$$y=\frac{2}{3}\,x+1 \tag{4}$$

წარმოადგენს წრფის განტოლებას, რომელიც Oy ღერძს კვეთს $(0,1)$ წერტილში და ადგენს Ox ღერძთან კუთხეს, რომლის ტანგენსი $\frac{2}{3}$-ის ტოლია. მართლაც, პირველი თეორემის თანახმად, ასეთი წრფის განტოლება იქნება (4) განტოლება. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $x=3$



ნახ. 27.

წარმოადგენს იმ წრფის განტოლებას, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია და Ox ღერძს ჰკვეთს $(3,0)$ წერტილში.

ამ მაგალითების განზოგადება გვაძლევს, რომ მართებულია.

თეორემა. 1.*. 1) ყოველ

$$x=a \qquad (1)$$

განტოლებას შეესაბამება წრფე, ეს წრფე ჰკვეთს Ox ღერძს $(a, 0)$ წერტილში და პარალელურია Oy ღერძის. 2) ყოველ

$$y=mx+b \qquad (3)$$

სახის განტოლებას შეესაბამება წრფე. ეს წრფე ჰკვეთს Oy ღერძს $(0, b)$ წერტილში და დახრილია Ox ღერძისადმი α კუთხით, რომლის ტანგენსი m-ის ტოლია, ე. ი. $\operatorname{tg}\alpha=m$.

კერძოდ, თუ $m=0$, ე. ი. (3) განტოლება ღებულობს $y=b$ სახეს, მაშინ წრფე Ox ღერძის პარალელურია.

წრფის ზოგადი განტოლება

1* თეორემის საშუალებით ადვილად მტკიცდება 1 თეორემის შებრუნებული თეორემა.

თეორემა 2. პირველი ხარისხის ყოველ განტოლებას შეესაბამება რაიმე წრფე.

დამტკიცება. პირველი ხარისხის განტოლების ზოგადი სახე

$$\boxed{Ax+By+C=0} \qquad (5)$$

ვიხილავთ განტოლებებს, რომლებიც არ შეიცავენ x, y უცნობებისაგან განსხვავებულ უცნობებს.

გავარჩიოთ (5) განტოლების ორი ტიპი, რომელიც მიიღება $B=0$

ან $B\neq 0$ შემთხვევაში. ვთქვათ, $B=0$. მაშინ (5) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $Ax+C=0$,*

ან

$$x=-\frac{C}{A}.$$

ეს კი არის $x=a$ სახის განტოლება, ამიტომ 1* თეორემის თანახმად მას შეესაბამება რაიმე წრფე.

ვთქვათ, ახლა, რომ $B\neq 0$. მაშინ (5) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

ეს კი არის $y=mx+b$ სახის განტოლება. ამიტომ მას (1* თეორემის თანახმად) შეესაბამება რაიმე წრფე. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

(5) განტოლებას ეწოდება **წრფის ზოგადი განტოლება**. განვიხილოთ ამ განტოლების ზოგიერთი კერძო შემთხვევა.

1) **თუ (5) განტოლებაში $A=0$, მაშინ შესაბამისი წრფე პარალელურია Ox ღერძის.**

მართლაც, როცა $A=0$, განტოლებას აქვს სახე $By+C=0$, ე. ი. $y=-\frac{C}{B}$. ამ განტოლებას კი შეესაბამება Ox ღერძის პარალელური წრფე. ზუსტად ასევე

2) **თუ (5) განტოლებაში $B=0$, მაშინ მას შეესაბამება Oy ღერძის პარალელური წრფე.**

3) **თუ (5) განტოლებაში $C=0$, მაშინ შესაბამისი წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე.**

მართლაც, იმისათვის, რომ შევამოწმოთ წრფე გადის თუ არა კოორდინატთა სათავეზე, საჭიროა (5) განტოლებაში დავუშვათ, რომ $x=0$, $y=0$, მაშინ მივიღებთ

$$C=0. \qquad (6)$$

(5) წრფე გაივლის (0,0) წერტილში იმ შემთხვევაში, როდესაც მართებულია (6) ტოლობა.

განვიხილოთ ორი ამოცანა, რომელიც ხშირად გვხვდება წრფის განტოლებასთან დაკავშირებით.

---

* შევნიშნავთ, რომ როცა $B=0$, მაშინ $A\neq 0$, რადგან წინაამდეგ შემთხვევაში არ გვექნება არავითარი განტოლ ბა. ამიტომ A-ზე გაყოფა მართებულია. ეს უნდა აღინიშნოს, რადგან ნულზე გაყოფა არ შეიძლება.

I. წრფის ზოგადი განტოლების დასაყვანად განტოლებაზე კუთხური კოეფიციენტით, საჭიროა (5) განტოლება ამოიხსნას y-ის მიმართ (ვგულისხმობთ, რომ $B \neq 0$ ე. ი. განტოლება შეიცავს y-ს).

მაგალითად, განტოლება

$$5x+3y-7=0$$

გადავწეროთ ასე

$$3y=-5x+7,$$

შემდეგ მივცეთ სახე

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}.$$

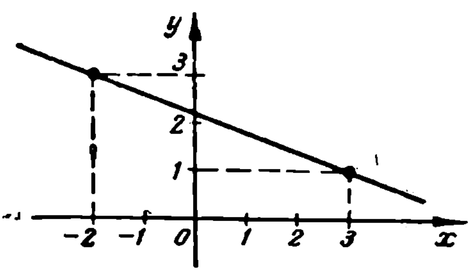
გამოდის, რომ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი $m=-\frac{5}{3}$.

II. ავაგოთ წრფე მისი განტოლების მიხედვით. თუ წრფის განტოლებაში არ შედის ერთ-ერთი კოორდინატი, მაშინ წრფე პარალელურია სათანადო ღერძის და უკვე ცნობილია როგორ უნდა აიგოს ასეთი წრფე. როდესაც განტოლება შეიცავს x და y კოორდინატებს, მაშინ საჭიროა მოვნახოთ ორი წერტილი, რომლებიც ეკუთვნიან წრფეს და შემდეგ ამ წერტილებზე სახაზავით გავავლოთ წრფე. წრფეზე მდებარე წერტილის პოვნა ადვილია: ამისათვის საკმარისია მივცეთ ერთ-ერთ კოორდინატს ნებისმიერი მნიშვნელობა, ის ჩავსვათ განტოლებაში და მოვნახოთ მეორე კოორდინატის სათანადო მნიშვნელობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ავაგოთ წრფე

$$2x+5y-11=0. \qquad (7)$$

დავუშვათ, რომ $y=1$, მაშინ (7) განტოლება მიიღებს სახეს $2x-6=0$, საიდანაც $x=3$. წრფე გადის (3,1) წერტილზე. ახლა დავუშვათ, რომ $y=3$, მაშინ $2x+4=0$, საიდანაც $x=-2$. მეორე წერტილი, რომელზეც გადის წრფე იქნება $(-2,3)$.



ნახ. 28.

წრფის მდებარეობა მოცემულია 28-ე ნახაზზე.

3. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში

ვნახეთ, რომ წრფის აგება მისი განტოლების მიხედვით მარტივად ხდება, მაგრამ დაკავშირებულია გარკვეულ გამოთვლებთან. არსებობს წრფის განტოლების ისეთი სახე, რომელიც არ მოითხოვს დამატებით გა-

მოთვლებს წრფის ასაგებად. ამ განტოლებას ეწოდება „განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში“.

ვთქვათ, წრფე

$$Ax+By+C=0 \tag{8}$$

არ არის არცერთი ღერძის პარალელური და არ გადის კოორდინატთა სათავეში. მაშინ $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$.

გადავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით

$$Ax+By=-C.$$

გავყოთ ამ განტოლების ორივე ნაწილი $-C$-ზე.

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1.$$

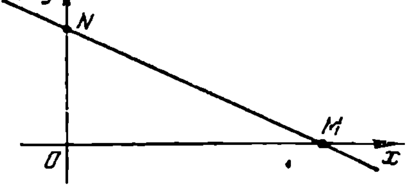
ეს განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ასეთი სახით

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

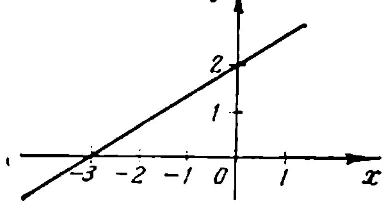
აღვნიშნოთ $-\dfrac{C}{A}=a$, $-\dfrac{C}{B}=b$, მაშინ მივიღებთ

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \tag{9}$$

ეს არის წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. ამ განტოლების სახელწოდების წარმოშობის ასახსნელად ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა.



ნახ. 29.



ნახ. 30.

ამოცანა. მოცემულია (9) განტოლება. ვიპოვოთ M და N წერტილები, რომლებშიც წრფე ჰკვეთს Ox და Oy ღერძებს (ნახ. 29).

ამოხსნა. რადგან $M(x_M, y_M)$ წერტილი ძევს Ox ღერძზე, მისი ორდინატი ტოლია ნულის: $y_M=0$. ვიპოვოთ x_M აბსცისა. რადგან M წერტილი ძევს მოცემულ წრფეზე, მისი კოორდინატები $(x_M, 0)$ აკმაყოფილებენ (9) განტოლებას. ე. ი.

$$\frac{x_M}{a}+\frac{0}{b}=1.$$

აქედან $x_M=a$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $y_N=b$. ამგვარად, a და b რიცხვები

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

განტოლებაში, წარმოადგენენ შესაბამისი წრფით საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრილ მონაკვეთებს[*]

$$\boxed{a=OM, \quad b=ON}$$

მაგალითები. 1) ავაგოთ წრფე

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1.$$

გადავზომოთ ღერძებზე —3 და 2 მონაკვეთები და გავავლოთ მიღებულ წერტილებზე წრფე (ნახ. 30).

2) ავაგოთ წრფე

$$2x+5y-16=0. \qquad (10)$$

წრფის ასაგებად გადავწეროთ ეს განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. ამისათვის შევასრულოთ შემდეგი გარდაქმნები:

$$2x-5y=16, \quad \frac{2x}{16}-\frac{5y}{16}=1, \quad \frac{x}{8}-\frac{y}{\frac{16}{5}}=1$$

საბოლოოდ[**]

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{-\frac{16}{5}}=1.$$

---

[*] უფრო ზუსტად ამ მონაკვეთების სიგრძეებს (აღებულს სათანადო ნიშნით).

[**] მკითხველი მიაქცევს ყურადღებას იმას, რომ $\frac{x}{8}-\frac{y}{\frac{16}{5}}=1$ ჯერ კიდევ არ არის (9) სახის განტოლება, ვინაიდან უკანასკნელში $\frac{x}{a}$ და $\frac{y}{b}$ სიდიდეები შეერთებულია პლუს ნიშნით.

ამ განტოლების მიხედვით წრფეს ადვილად ავაგებთ. წრფის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების პოვნა შეიძლება სხვა გზითაც. სახელდობრ იმისათვის, რომ მოვნახოთ (10) წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, საკმარისია დავუშვათ (10) განტოლებაში, რომ $y=0$, მაშინ $2x-16=0$, $x=8$. რა თქმა უნდა, x-ის ეს მნიშვნელობა წარმოადგენს a მონაკვეთის სიდიდეს. ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, რომ $x=0$, მივიღებთ $y=-\frac{16}{5}$, ე. ი. $b=-\frac{16}{5}$. ეს ხერხი უფრო გამართლებულია, ვიდრე განტოლების ფორმალური გარდაქმნა.

4. წრფეებს შორის კუთხური თანაფარდობანი

განვიხილოთ ორი წრფის ურთიერთმდებარეობის ზოგიერთი საკითხი, როდესაც წრფეები მოცემულია განტოლებებით

$$y=m_1x+b_1, \tag{I}$$

$$y=m_2x+b_2. \tag{II}$$

როგორც ვიცით, m_1 და m_2 კოეფიციენტები წარმოადგენენ მოცემული წრფეების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი α_1 და α_2 კუთხეების ტანგენსებს სათანადოდ:

$$m_1=\operatorname{tg}\alpha_1, \qquad m_2=\operatorname{tg}\alpha_2.$$

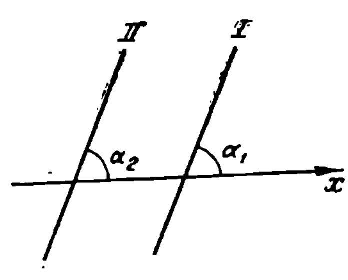
1. წ რ ფ ე თ ა პ ა რ ა ლ ე ლ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ა. თუ I და II წრფეები ურთიერთპარალელურია (ნახ. 31), მაშინ $\alpha_1=\alpha_2$, ანუ

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2 \quad \text{ე.}$$

$$\boxed{m_1=m_2}$$

ამგვარად, წ რ ფ ე თ ა პ ა რ ა ლ ე ლ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ს ა ჭ ი რ ო ა მ ა თ ი კ უ თ ხ უ რ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს ტ ო ლ ო ბ ა.

მაგალითად, $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ და $6x+15y+10=0$ წრფეები პარალელური არიან. მართლაც, თუ ამ განტოლებებს დავიყვანთ განტოლებებზე კუთხური კოეფიციენტით, მივიღებთ სათანადოდ, $y=-\frac{2}{5}x+2$, $y=-\frac{2}{5}x-\frac{2}{3}$,



ნახ. 31

მაშასადამე,

$$m_1=m_2=-\frac{2}{5}:$$

II. წ რ ფ ე თ ა მ ა რ თ ო ბ უ ლ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ა. ვთქვათ, I და II წრფეები ურთიერთმართობული არიან (ნახ. 32).

სამკუთხედის გარე კუთხის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე გვაქვს

$$\alpha_2=\alpha_1+90°,$$

მაშინ

$$m_2=\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}(\alpha_1+90°)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{m_1}.$$

ამგვარად,

$$\boxed{m_2=-\frac{1}{m_1}}$$

მივიღეთ, რ ო მ ო რ ი წ რ ფ ი ს უ რ თ ი ე რ თ მ ა რ თ ო ბ უ ლ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ს ა ჭ ი რ ო ა, რ ო მ მ ა თ ი კ უ თ ხ უ რ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი თ ი ყ ვ ნ ე ნ უ რ თ ი ე რ თ შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი, ხ ო ლ ო ნ ი შ ნ ი თ — მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე.

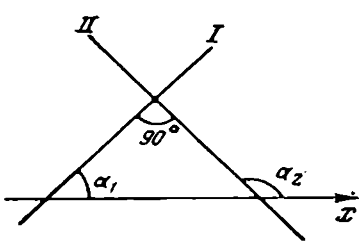
მაგალითად, წრფეები

$$2x+5y-7=0, \qquad 15x-6y+4=0$$

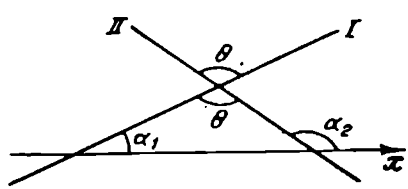
ურთიერთმართობული არიან, რადგან

$$m_1=-\frac{2}{5}, \quad m_2=\frac{5}{2}.$$

III. კ უ თ ხ ე ო რ წ რ ფ ე ს შ ო რ ი ს. განვიხილოთ ახლა ზოგადად საკითხი, თუ როგორ კუთხეს ქმნიან I და II წრფეები. θ-თი ავღნიშნოთ უმცირესი კუთხე, რომელზეც უნდა შემობრუნდეს I წრფე



ნახ. 32.



ნახ. 33.

საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ შეუ-თავსდეს II წრფეს (ნახ. 33). ამგვარად, წრფეები თ ა ნ ა ს წ ო რ უ ფ ლ ე ბ ი ა ნ ი ა რ ა რ ი ა ნ.

თუ ვისარგებლებთ თეორემით სამკუთხედის გარე კუთხის შესახებ, მივიღებთ

$$\alpha_2=\Theta+\alpha_1,$$

აქედან

$$\Theta=\alpha_2-\alpha_1$$

ამიტომ *

$$\operatorname{tg}\Theta=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2},$$

ან

$$\boxed{\operatorname{tg}\Theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}} \tag{11}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ Θ' არის კუთხე, რომელზეც II წრფე უნდა შემობრუნდეს, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ შეუთავსდეს I წრფეს, მაშინ $\Theta'=180^\circ-\Theta$. მაშასადამე, $\operatorname{tg}\Theta'=-\operatorname{tg}\Theta$ და

$$\operatorname{tg}\Theta'=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}. \tag{11'}$$

(11) და (11′) ტოლობები შეიძლება შევცვალოთ ერთი ფორმულირებით, სახელდობრ: უ ძ რ ა ვ ი წრფის კუთხურ კოეფიციენტს უნდა გამოვაკლოთ მ ო ძ რ ა ვ ი ს კუთხური კოეფიციენტი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის

1) $5x-7y+1=0$ და 2) $2x+3y-7=0$.

აქ

$$m_1=\frac{5}{7},\quad m_2=-\frac{2}{3}$$

და ამიტომ **

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{5}{7}}{1+\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{29}{11},\quad \Theta=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\left(-\frac{29}{11}\right).$$

---

* კერძოდ. ფორმულა $\Theta=\alpha_2-\alpha_1$ სწყვეტს საკითხს, ვინაიდან როცა მოცემულია m_1 და m_2, შეიძლება მოინახოს α_1 და α_2 კუთხეები. მაგრამ ამისათვის საჭირო იქნება ორჯერ მივმართოთ ცხრილებს. ხოლო $\operatorname{tg}\Theta$-სათვის ქვემოთ მიღებული ფორმულა გვაძლევს ცხრილების მხოლოდ ე რ თ ჯ ე რ გამოყენების საშუალებას.

** $\operatorname{tg}\Theta<0$ უტოლობა გვიჩვენებს, რომ $90^\circ<\Theta<180^\circ$.

იმისათვის, რომ მივიღოთ Θ კუთხის გრადუსული ზომა, ვიპოვოთ პირველ მეოთხედში კუთხე φ, რომლისთვისაც $\operatorname{tg}\varphi=\frac{29}{11}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{11}{29}=0{,}379,$$

ცხრილებში ვპოულობთ $\varphi\approx 69^\circ 10'$. Θ კუთხის განსაზღვრის თანახმად ის ძევს 0° და 180° შორის. მაშასადამე,

$$\Theta=180^\circ-\varphi\approx 110^\circ 50'.$$

5. ერთ ან ორ მოცემულ წერტილზე წრფის გავლება

შემდეგ ორ ამოცანას აქვს დიდი მნიშვნელობა.

ამოცანა I. მოცემულია $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი და m რიცხვი. M_0 წერტილზე უნდა გავავლოთ წრფე, რომლის კუთხური კოეფიციენტი უდრის m-ს.

ამოხსნა. საძიებელი წრფის განტოლება ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y=mx+b. \qquad (12)$$

რადგან m ჩვენთვის ცნობილია, საკმარისია ვიპოვოთ საწყისი ორდინატი b. ამისათვის ვისარგებლოთ იმით, რომ M_0 წერტილი ძევს ჩვენს წრფეზე და ამიტომ მისი (x_0, y_0) კოორდინატები აკმაყოფილებენ (12) განტოლებას, ე. ი.

$$y_0=mx_0+b.$$

ეს გვაძლევს b-ს შემდეგ მნიშვნელობას

$$b=y_0-mx_0.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (12) ტოლობაში, მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას

$$y=mx+y_0-mx_0.$$

ჩვეულებრივად, მას ასე წერენ:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)} \qquad (13)$$

მაგალითები. 1) $M_0(5,2)$ წერტილზე გავავლოთ წრფე

$$3x-2y+6=0 \qquad (14)$$

წრფის მართობულად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (14) წრფის კუთხური კოეფიციენტი უდრის $\frac{3}{2}$. ამიტომ მართობულობის პირობის თანახმად საძიებელი წრფის კუთხური კოეფიციენტი $m=-\frac{2}{3}$.

მაშასადამე, წრფის განტოლება შემდეგია:

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-5)$$

ან, რაც იგივეა

$$2x+3y-16=0.$$

2) კოორდინატთა სათავეზე გავავლოთ წრფე, რომელიც ადგენს (14) წრფესთან 45°-იან კუთხეს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეს ამოცანა არ არის ნათლად ჩამოყალიბებული, რადგან არ ჩანს, თუ რომელი წრფე (მოცემული, თუ საძიებელი) უნდა მოვაბრუნოთ ს ა ა თ ი ს ი ს რ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს ს ა წ ი ნ ა ა ღ მ დ ე გ ო მიმართულებით 45°-იანი კუთხით, რომ ის დაემთხვეს მეორე წრფეს. ამასთან დაკავშირებით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ (14) წრფის კუთხური კოეფიციენტი არის $\frac{3}{2}$ და აღვნიშნავთ საძიებელი წრფის კუთხურ კოეფიციენტს m-ით, მივიღებთ*

$$1=\frac{\frac{3}{2}-m}{1+\frac{3}{2}m}, \quad \text{ანუ} \quad 1=\frac{m-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}m}.$$

პირველი ტოლობა უნდა დაიწეროს, თუ უძრავ წრფეს წარმოადგენს (14) წრფე, ხოლო მეორე — თუ უძრავი წრფე საძიებელი წრფეა. თუ ორივე განტოლებას ამოვხსნით m-ის მიმართ, მივიღებთ

$$m_1=-5, \quad m_2=\frac{1}{5}.$$

ამონახსნებს წარმოადგენენ წრფეები

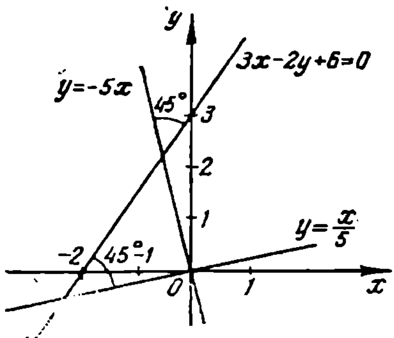
$$y=-5x, \quad y=\frac{x}{5}$$

(ნახ. 34). აღვნიშნოთ, რომ საძიებელი წრფეები აღმოჩნდნენ ურთიერთმართობული. ეს თავიდანვე ადვილი წარმოსადგენი იყო.

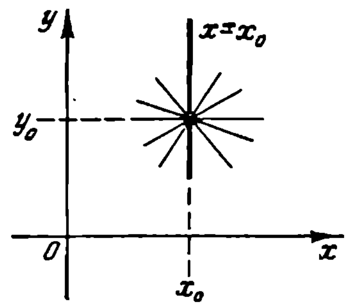
---

* უნდა გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ $\operatorname{tg} 45°=1$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ (13) განტოლებაში ვცვლით კუთხურ კოეფიციენტს, ხოლო (x_0, y_0) წერტილს დავამაგრებთ, მაშინ მივიღებთ (x_0, y_0) წერტილზე გამავალ წრფეთა უსასრულო სიმრავლეს. ამ გეომეტრიულ სახეს ეწოდება წრფეთა კონა, რის გამოც (13) განტოლებას ცვლადი m-ის შემთხვევაში უწოდებენ წ რ ფ ე თ ა კ ო ნ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ც ე ნ ტ რ ი თ (x_0, y_0) წერტილში. ეს განტოლება მოიცავს (x_0, y_0) წერტილში გამავალ ყველა წრფეს, გ ა რ დ ა $x=x_0$ წ რ ფ ი ს ა, რომელსაც საერთოდ არ აქვს კუთხური კოეფიციენტი (ნახ. 35).



ნახ. 34



ნახ. 35

ამოცანა II. გ ა ვ ა ვ ლ ო თ წ რ ფ ე მ ო ც ე მ უ ლ ო რ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავღნიშნოთ m-ით საძიებელი წრფის (უცნობი!) კუთხური კოეფიციენტი. რადგან ეს წრფე გადის $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე, (13) ტოლობის თანახმად მის განტოლებას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$y-y_1=m(x-x_1). \tag{15}$$

m-ის საპოვნელად, ვისარგებლოთ იმით, რომ წრფე გადის M_2 წერტილზეც, და მაშასადამე, x_2 და y_2 რიცხვები უნდა აკმაყოფილებდნენ (15) განტოლებას. ე. ი.

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1), \tag{16}$$

საიდანაც

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{17}$$

თუ m-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (15) ტოლობაში, მივიღებთ —

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

ან, რაც იგივეა

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}} \tag{18}$$

ამოცანა ამოხსნილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) გავავლოთ წრფე $A(2,5)$ და $B(11,8)$ წერტილებზე. (18) ტოლობის თანახმად AB-ს განტოლება იქნება

$$\frac{y-5}{8-5}=\frac{x-2}{11-2}, \quad \text{ე. ი.} \quad 9(y-5)=3(x-2),$$

ანუ

$$x-3y+13=0.$$

2) გავავლოთ წრფე $A(2,6)$ და $B(2,11)$ წერტილებზე.

ისევ (18) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ ტოლობას

$$\frac{y-6}{11-6}=\frac{x-2}{2-2},$$

რომელსაც აზრი არა აქვს, რადგანაც მეორე წილადის მნიშვნელი ნულის ტოლია.

ამგვარად, (18) ტოლობის საშუალებით ამ ამოცანის ამოხსნა არ მოხერხდა. მაგრამ ის ადვილად ამოიხსნება უშუალოდ. მართლაც A და B წერტილებს აქვთ ერთი და იგივე აბსცისა $x=2$. მაგრამ მაშინ ცხადია, რომ AB წრფე პარალელურია Oy ღერძის, ამიტომ მის ყველა წერტილს უნდა ჰქონდეს იგივე აბსცისა. მაშასადამე, საძიებელ განტოლებას აქვს სახე $x=2$. ასე ვიმსჯელებთ ყოველთვის, როდესაც (18) ტოლობის ერთ-ერთი მნიშვნელი ნულის ტოლი აღმოჩნდება*. აქედან გამომდინარეობს

წესი. თუ ორ მოცემულ წერტილზე წრფის გავლების დროს, (18) ფორმულაში ერთ-ერთი მნიშვნელი აღმოჩნდება ნულის ტოლი, მაშინ საძიებელი განტოლება მიიღება, სათანადო მრიცხველის ნულთან გატოლებით.

* ორივე მნიშვნელი ერთდროულად არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, რადგანაც მაშინ აღმოჩნდება, რომ $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, ე. ი. M_1 და M_2 წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ, როცა ბუნებრივია, ისინი ჩავთვალოთ სხვადასხვა წერტილებად.

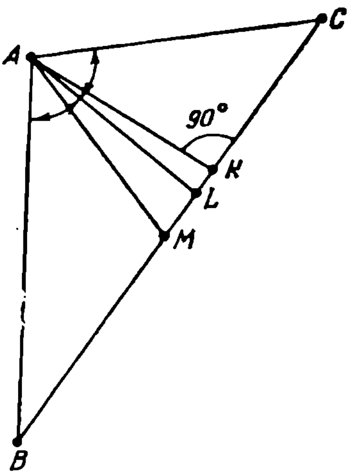
მ ა გ ა ლ ი თ ი. გავავლოთ წრფე $A(2,7)$ და $B(5,7)$ წერტილებზე. (18) განტოლების საფუძველზე გვაქვს.

$$\frac{y-7}{7-7}=\frac{x-2}{5-2}.$$

მაშასადამე, საძიებელი წრფე არის $y-7=0$.

გამოვიყენოთ მთელი განვლილი მასალა შემდეგი ამოცანის ამოსახსნელად. მოცემულია სამკუთხედის სამი წვერო $A\ (2,-1)$, $B\ (5,3)$, $C(7,11)$ (ნახ. 36). ვიპოვოთ A წერტილიდან გავლებული მედიანის, სიმაღლის და ბისექტრისის განტოლებები და სიგრძეები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) ვთქვათ, რომ BC გვერდის შუაწერტილი არის M. მაშინ



ნახ. 36

$$x_M=\frac{x_B-x_C}{2}=\frac{5+7}{2}=6.$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3+11}{2}=7.$$

AM მედიანის გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა მიიღება (18) ფორმულიდან:

$$\frac{y+1}{7+1}=\frac{x-2}{6-2},$$

ანუ

$$y+1=2\ (x-2)$$

ან

$$2x-y-5=0.$$

მედიანის ს ი გ რ ძ ე არის მ ა ნ ძ ი ლ ი A და M წერტილებს შორის. მაშასადამე,

$$AM=\sqrt{(6-2)^2+(7+1)^2}=\sqrt{80}\approx 8,9.$$

2) AK სიმაღლის საპოვნელად, შევადგინოთ BC გვერდის განტოლება:

$$\frac{y-3}{11-3}=\frac{x-5}{7-5},\ \text{ანუ}\ \ y-3=4(x-5),$$

ან

$$4x-y-17=0. \qquad (19)$$

ამ გვერდის კუთხური კოეფიციენტი $m_{BC}=4$. მაშასადამე, AK სიმაღლის კუთხური კოეფიციენტი (გავიხსენოთ მართობულობის პი-

რობა!) $m=-\frac{1}{4}$. ამიტომ AK წრფის განტოლება, (13) ტოლობის თანახმად, იქნება

$$y+1=-\frac{1}{4}(x-2),$$

ანუ

$$x+4y+2=0 \tag{20}$$

AK-ს სიგრძის საპოვნელად ჯერ ვიპოვოთ AK სიმაღლის BC გვერდთან გადაკვეთის K წერტილი. ეს წერტილი მოინახება (19) და (20) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

$$\begin{array}{r|l} 4x-y-17=0 & 4 \\ x+4y+2=0 & 1 \\ \hline 17x-66=0 & \end{array} \; +$$

$$x=\frac{66}{17}, \quad y=4x-17=-\frac{25}{17}.$$

ამგვარად,

$$K=K\left(\frac{66}{17}, \ -\frac{25}{17}\right)$$

საიდანაც

$$AK=\sqrt{\left(\frac{66}{17}-2\right)^2+\left(-\frac{25}{17}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{17}}{17}=\frac{8}{\sqrt{17}}.$$

3) გადავიდეთ AL ბისექტრისის* განხილვაზე. გავიხსენოთ, რომ ის ყოფს BC გვერდს მიმდებარე გვერდების პროპორციულ ნაწილებად, ე. ი.

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}.$$

მაგრამ

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5, \quad AC=\sqrt{(7-2)^2+(11+1)^2}=13.$$

მაშასადამე,

$$\frac{BL}{LC}=\frac{5}{13}.$$

---

* შემდეგ ქვეპარაგრაფში მოვიყვანთ ამ ბისექტრისის მონახვის სხვა ხერხს.

მონაკვეთის მოცემული ფარდობით დაყოფის ფორმულების თანახმად

$$x_L=\frac{5\cdot 13+7\cdot 5}{18}=\frac{50}{9},$$

$$y_L=\frac{3\cdot 13+11\cdot 5}{18}=\frac{47}{9}.$$

$A(2,-1)$ და $L\left(\frac{50}{9},\ \frac{47}{9}\right)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება

იქნება $\dfrac{y+1}{\frac{47}{9}+1}=\dfrac{x-2}{\frac{50}{9}-2}$, საიდანაც $\dfrac{y+1}{56}=\dfrac{x-2}{32}$, ანუ $\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{x-2}{4}$,

ან

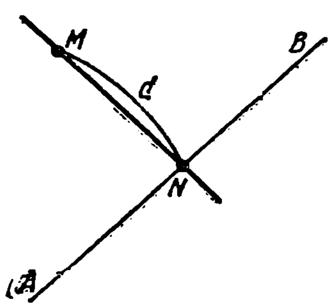
$$7x-4y-18=0. \tag{21}$$

AL ბისექტრისის სიგრძე

$$AL=\sqrt{\left(\frac{50}{9}-2\right)^2+\left(\frac{47}{9}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{65}}{9}.$$

ს. მანძილი წერტილიდან წრფემდე

ხშირად საჭიროა მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილის პოვნა. ის ცნობები, რომელსაც ჩვენ უკვე ვფლობთ, გვაძლევს ამ ამოცანის ამოხსნის საშუალებას. ვაჩვენოთ ეს მოცემული $M(7,2)$ და AB წრფის მაგალითზე, სადაც AB-ს განტოლებაა $3x-4y+12=0$.



ნახ. 37.

M წერტილიდან AB წრფემდე d მანძილი ტოლია M წერტილიდან AB წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძისა (ნახ. 37). აღვნიშნოთ ამ მართობისა და AB წრფის გადაკვეთის (ჯერ კიდევ უცნობი!) წერტილი N-ით.

გვაქვს

$$d=MN.$$

გამოდის, რომ ამოცანა დაიყვანება N წერტილის პოვნაზე. ამ წერტილს ადვილად ვიპოვიდით, რომ ცნობილი იყოს MN მართობის განტოლება. მაშინ ამ განტოლებისა და AB წრფის განტოლების ერთად ამოხსნით

მივიღებთ N წერტილის კოორდინატებს. ჩვენთვის ცნობილია M წერტილი, რომელზეც გადის მართობი, ხოლო კუთხური კოეფიციენტის საპოვნელად საჭიროა წინასწარ ვიპოვოთ AB წრფის კუთხური კოეფიციენტი m^* და ვისარგებლოთ წრფეთა მართობულობის პირობით. ნათქვამის მიხედვით ვღებულობთ ამოცანის შემდეგ ამოხსნას:

1) ვპოულობთ AB წრფის m^* კუთხურ კოეფიციენტს. ამისათვის მისი განტოლება დაგვყავს განტოლებამდე კუთხური კოეფიციენტით:

$$y=\frac{3}{4}x+3.$$

აქედან ჩანს, რომ $m^*=\frac{3}{4}$.

2) ვპოულობთ MN მართობის m კუთხურ კოეფიციენტს

$$m=-\frac{1}{m^*}=-\frac{4}{3}.$$

3) ვადგენთ MN მართობის განტოლებას

$$y-2=-\frac{4}{3}(x-7),$$

ანუ

$$4x+3y-34=0.$$

4) ვპოულობთ N წერტილს, ამისათვის ვხსნით AB და MN წრფეთა განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას

$$\begin{array}{r|l} 3x-4y+12=0 & 3 \\ 4x+3y-34=0 & 4 \\ \hline 25x-100=0 & \end{array} +$$

აქედან, $x=4$, თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ MN წრფის განტოლებაში, მივიღებთ

$$16+3y-34=0$$

და $y=6$. ამგვარად, $N=N(4,6)$.

5) ვპოულობთ საძიებელ მანძილს

$$d=MN=\sqrt{(4-7)^2+(6-2)^2}=5.$$

ცხადია, რომ ასე შეიძლება ვიმსჯელოთ ნებისმიერი რიცხვითი მაგალითის შემთხვევაში. ამოვხსნათ ამოცანა ზოგადად და მიღებული შედეგი ჩავწეროთ ფორმულის სახით.

ამოცანა. ვიპოვოთ d მანძილი $M(x_0, y_0)$ წერტილიდან

$$Ax+By+C=0 \tag{*}$$

წრფემდე.

ამოხსნა. ვთქვათ, რომ $N(x_1, y_1)$ არის M წერტილიდან მოცემულ (*) წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე. მაშინ

$$d=MN=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}. \tag{22}$$

ადვილი დასანახია, რომ (*) წრფის კუთხური კოეფიციენტი m^*

$$m^*=-\frac{A}{B}.$$

მაშასადამე, MN მართობის კუთხური კოეფიციენტი $m=\frac{B}{A}$ და ამ მართობის განტოლებას აქვს სახე

$$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0). \tag{23}$$

თუ გავყვებით უკვე გამომუშავებულ გეგმას, უნდა ამოვხსნათ ერთად ეს განტოლება და (*) განტოლება. ამით ვიპოვით N წერტილის (x_1, y_1) კოორდინატებს და ჩავსვამთ მას (22) განტოლებაში. მაგრამ ამ ბუნებრივ გზას მივყავართ ვრცელ გამოთვლებამდე. ამიტომ ავირჩევთ სხვა გზას, რომელიც თუმცა ხელოვნურია, მაგრამ მოითხოვს ნაკლებ გამოთვლებს. სახელდობრ, აღვნიშნოთ უპირველეს ყოვლისა, რომ N წერტილი ძევს MN წირზე, ამიტომ x_1, y_1 რიცხვები აკმაყოფილებენ (23) განტოლებას. ე. ი.

$$y_1-y_0=\frac{B}{A}(x_1-x_0),$$

საიდანაც

$$\frac{y_1-y_0}{B}=\frac{x_1-x_0}{A}.$$

აღვნიშნოთ ამ წილადების (ჩვენთვის უცნობი!) საერთო მნიშვნელობა q-თი:

$$\frac{x_1-x_0}{A}=q, \qquad \frac{y_1-y_0}{B}=q.$$

მაშინ

$$x_1-x_0=Aq, \qquad y_1-y_0=Bq. \tag{24}$$

თუ ამ სხვაობების მნიშვნელობებს შევიტანთ (22) ფორმულაში, მივიღებთ

$$d=\sqrt{(A^2+B^2)q^2}=|q|\sqrt{A^2+B^2}. \tag{25}$$

აქ ჩავსვით q რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა, რადგან d მ ა ნ ძ ი ლ ი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ხოლო q რიცხვი შეიძლება იყოს უარყოფითიც.

ახლა საკმარისია მოვნახოთ q. ამისათვის (24) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$x_1=x_0+Aq, \qquad y_1=y_0+Bq$$

და ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (*) განტოლებაში. (N წერტილი ამ წრფეზე ძევს და ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ შესაბამის განტოლებას). ეს გვაძლევს

$$A(x_0+Aq)+B(y_0+Bq)+C=0,$$

საიდანაც

$$q=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

q-ს მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ (25) ფორმულაში და შევკვეცოთ მიღებული განტოლება $\sqrt{A^2+B^2}$-ზე, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}} \tag{26}$$

ამგვარად, ი მ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ ვ ი პ ო ვ ო თ მ ა ნ ძ ი ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი დ ა ნ წ რ ფ ე მ დ ე, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ზ ო გ ა დ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი თ, ს ა ჭ ი რ ო ა წ ე რ ტ ი ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ჩ ა ვ ს ვ ა თ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს მ ა რ ც ხ ე ნ ა ნ ა წ ი ლ შ ი დ ა მ ი ღ ე ბ უ ლ ი რ ი ც ხ ვ ი ს მ ო დ უ ლ ი გ ა ვ ყ ო თ კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ფ ე ს ვ ზ ე კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ ე ბ ი ს ჯ ა მ ი დ ა ნ.

მაგალითად, (5,1) წერტილიდან $5x+12y-50=0$ წრფემდე მანძილი არის

$$d=\frac{|5\cdot5+12\cdot1-50|}{\sqrt{25+144}}=1.$$

შევჩერდეთ კითხვაზე. თუ რა გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა აქვს

$$Ax+By+C=0 \tag{27}$$

განტოლების მარცხენა ნაწილის ნ ი შ ა ნ ს.

რადგან A და B კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ გარკვეულობისათვის შეიძლება დავუშვათ, რომ $A \neq 0$. (27) განტოლების (—1)-ზე გამრავლებით განტოლების აზრი არ იცვლება, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$A > 0. \tag{28}$$

შევნიშნოთ, რომ $A \neq 0$ პირობის გამო (27) წრფე უეჭველად გადაკვეთს Ox ღერძს. მაშასადამე, სიბრტყის წერტილები, რომლებიც (27) წრფეზე არ მდებარეობენ შეიძლება დაიყოს ორ კლასად:
1) ამ წრფის *მარჯვნივ* მდებარე წერტილები და 2) მის *მარცხნივ* მდებარე წერტილები.

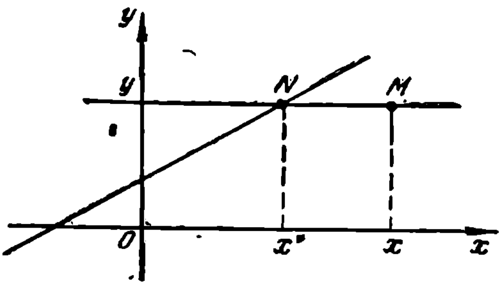
თეორემა. 1) *თუ $M(x, y)$ წერტილი (27) წრფის მარჯვნივ მდებარეობს, მაშინ*

$$Ax + By + C > 0. \tag{29}$$

2) *თუ $M(x, y)$ წერტილი (27) წრფის მარცხნივ მდებარეობს, მაშინ*

$$Ax + By + C < 0.$$

გარკვეულობისათვის დავამტკიცოთ 1). ამ მიზნით გავავლოთ $M(x, y)$ წერტილზე Ox ღერძის პარალელური წრფე (ნახ. 38). რადგან (27) წრფე არ არის Ox ღერძის პარალელური, ამიტომ გავლებული წრფე აუცილებლად გადაკვეთს (27) წრფეს. ვთქვათ, რომ ეს წრფეები იკვეთებიან $N(x^*, y^*)$ წერტილში.



ნახ. 38.

N წერტილი ძევს (27) წრფეზე, ამიტომ

$$Ax^* + By^* + C = 0.$$

მაგრამ M და N წერტილებს აქვთ ერთიდაიგივე ორდინატი. ამიტომ $y^* = y$ და წინა განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax^* + By + C = 0. \tag{30}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ პირობის თანახმად $M(x, y)$ წერტილი მდებარეობს $N(x^*, y)$ წერტილის მარჯვნივ. მაშასადამე, $x > x^*$. აქედან და (28) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

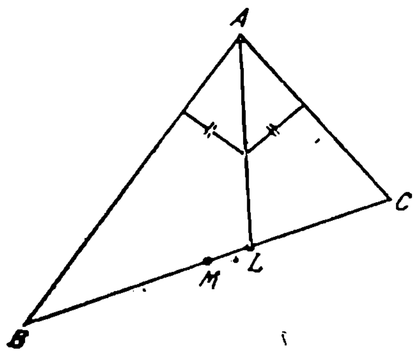
$$Ax + By + C > Ax^* + By + C.$$

ამ უტოლობიდან და (30) პირობიდან ვღებულობთ (29) უტოლობას.

შ ე დ ე გ ი. თუ Ax_1+By_1+C და Ax_2+By_2+C რიცხვებს აქვთ ერთნაირი (სხვადასხვა) ნიშნები, მაშინ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილები მდებარეობენ (27) წრფის ერთ (სხვადასხვა) მხარეს.

ვუჩვენოთ ამ შედეგის გამოყენება შემდეგ მაგალითზე.

ამოცანა. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(2, -1)$, $B(5,3)$, $C(7, 11)$. ვიპოვოთ A წვეროდან გავლებული ბისექტრისის განტოლება და სიგრძე* (ნახ. 39).



ნახ. 39.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავწეროთ AB და AC გვერდების განტოლებები.

$$(AB)\quad \frac{y+1}{3+1}=\frac{x-2}{5-2},\quad \frac{y+1}{4}=\frac{x-2}{3},$$

$$3(y+1)=4(x-2),\quad \underline{4x-3y-11=0}$$

$$(AC)\quad \frac{y+1}{11+1}=\frac{x-2}{7-2},\quad \frac{y+1}{12}=\frac{x-2}{5},\quad 5(y+1)=12(x-2),\quad \underline{12x-5y-29=0}$$

როგორც ცნობილია, ბისექტრისის ყველა წერტილი ერთნაირადაა დაშორებული AB და AC გვერდებიდან. ამიტომ ბისექტრისის ყოველი (x, y) წერტილისათვის გვაქვს

$$\frac{|4x-3y-11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|12x-5y-29|}{\sqrt{12^2+5^2}},$$

$$\pm\frac{4x-3y-11}{5}=\pm\frac{12x-5y-29}{13}. \tag{31}$$

თითოეულ ნაწილში ნიშანი ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ ეს ნაწილი აღმოჩნდეს დადებითი.

შევნიშნოთ ახლა, რომ (x, y) წერტილი ძევს AB წრფის (AC წრფის) იმ მხარეს, რომელშიც ძევს BC გვერდის $M(6,7)$ შუა წერტილი. თუ AB წრფის განტოლების მარცხენა ნაწილში ჩავსვამთ (6,7) კოორდინატებს, მივიღებთ

$$4\cdot 6-3\cdot 7-11=-8<0.$$

მაშასადამე, ბისექტრისის (x, y) წერტილებისათვის AB განტოლების მარცხენა ნაწილი იქნება <0, და ამიტომ, (31) განტოლების პირველ ნაწილში უნდა ავირჩიოთ „—" ნიშანი. თუ შემდეგ ჩავსვამთ (6,7) AC-ს განტოლების მარცხენა ნაწილში, მივიღებთ

$$12\cdot 6-5\cdot 7-29=8>0.$$

მაშასადამე, (31) განტოლების მეორე ნაწილში უნდა ავირჩიოთ „+" ნიშანი.

---

* ეს ამოცანა ზემოთ ამოვხსენით სხვა ხერხით.

ამგვარად, ჩვენი ბისექტრისის განტოლებაა

$$-\frac{4x-3y-11}{5}=\frac{12x-5y-29}{13},$$

ან, რაც იგივეა

$$7x-4y-18=0. \tag{32}$$

როგორც იყო მოსალოდნელი, მივიღეთ უკვე ცნობილი (21) განტოლება.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ბისექტრისისა და BC გვერდის გადაკვეთის L წერტილი, ამოვხსნათ (32) განტოლება და BC გვერდის ზემოთ ნაპოვნი (იხ. (19)) განტოლება ერთობლივად:

$$\begin{array}{l|l} 7x-4y-18=0 & 1 \\ 4x-y-17=0 & 4 \\ \hline -9x+50=0 & \end{array}\ -,\qquad x=\frac{50}{9},\quad y=4x-17=\frac{47}{9}.$$

მოვძებნეთ იგივე L წერტილი, რომელიც მივიღეთ მე-5 ქვეპარაგრაფში. ბისექტრისის d სიგრძე მოინახება ისე, როგორც ზემოთ, ფორმულით

$$d=AL=\sqrt{\left(\frac{50}{9}-2\right)^2+\left(\frac{47}{9}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{65}}{9}.$$

ერთი და იგივე ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა ხერხის შედარება ძალიან სასარგებლოა.

§ 4. ელიფსი

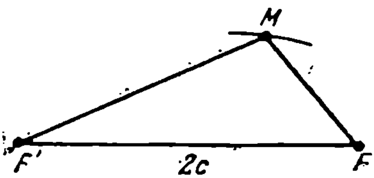
წირების შესწავლისას მათი განტოლებებით ბუნებრივია, მათი დალაგება განტოლებათა სირთულის მიხედვით. უმარტივესი წირი ამ თვალსაზრისითაც არის წრფე, რადგან მისი განტოლება პირველი ხარისხისაა. წრფის მომდევნოდ, თავისი სირთულის მიხედვით, უნდა ჩაითვალოს წირები, რომელთა განტოლებები მ ე ო რ ე ხარისხისაა. ასეთებია: ე ლ ი ფ ს ი, პ ა რ ა ბ ო ლ ა, ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ა. მათ უწოდებენ მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს წ ი რ ე ბ ს*. ეს წირები ასრულებენ დიდ როლს მათემატიკაში, ბუნებისმეტყველებაში და ტექნიკაში. ამ პარაგრაფში შევისწავლით ელიფსს.

---

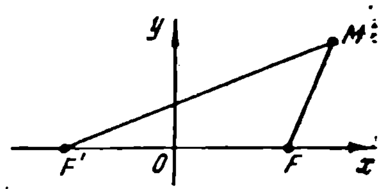
* წრეწირი აგრეთვე წარმოადგენს მეორე რიგის წირს, რადგან მისი განტოლება $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ არის მეორე ხარისხის. მაგრამ ქვემოთ ვნახავთ, რომ წრეწირი არის ელიფსის კერძო შემთხვევა. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ წ რ ფ ე ც შეიძლება მოცემული იყოს მეორე ხარისხის განტოლებით. მაგალითად განტოლება $y-x=0$ შეიძლება ასეც ჩაიწეროს $y^2-2yx+x^2=0$. როცა ტექსტში ლაპარაკია მეორე რიგის წირებზე მხედველობაში გვაქვს მ რ უ დ ე ბ ი.

1. ელიფსის განსაზღვრა. მისი კანონიკური განტოლება

წარმოვიდგინოთ ორი ლურსმანი, რომლებიც ჩარჭობილია მაგიდაში და მათზე მობმული ძაფი, რომლის სიგრძე მეტია ლურსმნებს შორის მანძილზე. თუ ამ ძაფს გავჭიმავთ ცარცით და ამ ცარცს გავატარებთ მაგიდაზე, ის შემოხაზავს ოვალის ფორმის რაღაც ჩაკეტილ წირს. ამ წირს ეწოდება ელიფსი. ცხადია, რომ ელიფსზე მოძრავი წერტილიდან ლურსმნებამდე მანძილი იცვლება, მაგრამ ამ მანძილების ჯ ა მ ი რჩება ტოლი ძაფის სიგრძისა. ახლა გადავიდეთ საკითხის ზუსტ გარჩევაზე.



ნახ. 40.



ნახ. 41.

განსაზღვრა. ელიფსი ეწოდება წირს, რომელიც წარმოადგენს წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს რომელთათვის ორ მოცემულ (ფოკუსებად წოდებულ) წერტილამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

აღვნიშნოთ ელიფსის ფოკუსები F და F', ხოლო ელიფსის წერტილებიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი $2a$-თი, მაშინ ელიფსის ნებისმიერი M წერტილისათვის (ნახ. 40) გვექნება

$$\boxed{MF+MF'=2a} \tag{1}$$

ფოკუსებს შორის მანძილს ჩვეულებრივად აღნიშნავენ $2c$-თი

$$\boxed{FF'=2c.}$$

რადგან სამკუთხედის ერთი გვერდი ყოველთვის ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე, ამიტომ $2c<2a$, საიდანაც

$$\boxed{c<a} \tag{2}$$

ელიფსის განტოლების გამოსაყვანად საჭიროა უპირველეს ყოვლისა ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა. გავავლოთ Ox ღერძი F და F' ფოკუსებზე, ხოლო კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ FF' მონაკვეთის

შუაწერტილში. ამით განისაზღვრება Oy ღერძის მდებარეობაც (ნახ.41). ცხადია, რომ ამ სისტემაში ფოკუსების კოორდინატები იქნება

$$F(c,0) \text{ და } F'(-c,0).$$

ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილისათვის იქნება

$$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

აქედან და (1) ტოლობიდან ჩანს, რომ M წერტილი ძევს ან არ ძევს ელიფსზე იმის მიხედვით, მართებულია თუ არა ტოლობა

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \tag{3}$$

ამგვარად, (3) ტოლობა არის განსახილველი ელიფსის განტოლება. ეს განტოლება შეიძლება გავამარტივოთ. ამისათვის (3) გადავწეროთ ისე, რომ ერთ-ერთი რადიკალი დავტოვოთ მარცხენა ნაწილში:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

ორივე ნაწილის კვადრატში აყვანისა და ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მივიღებთ

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2.$$

საიდანაც

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

ანუ

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

ხელახლა კვადრატში აყვანით, ვღებულობთ

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

ანუ

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{4}$$

შევნიშნოთ ახლა, რომ (2) უტოლობის თანახმად $a^2-c^2>0$. მაშასადამე, ეს სხვაობა შეიძლება * აღვნიშნოთ b^2-ით

$$a^2-c^2=b^2. \tag{5}$$

მაშინ (4) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

---

* თუ არ განვიხილავთ წარმოსახვით რიცხვებს, მაშინ უარყოფითი რიცხვი არ შეიძლება აღვნიშნოთ b^2-ით.

თუ გავყოფთ ორივე ნაწილს a^2b^2-ზე, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (6)$$

ეს არის ელიფსის *უმარტივესი* (*კანონიკური*) სახის განტოლება. სასარგებლოა დავიმახსოვროთ აგრეთვე, რომ

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

ტოლობა ტოლფასია (5) ტოლობისა.

2. ელიფსის ფორმის გამოკვლევა

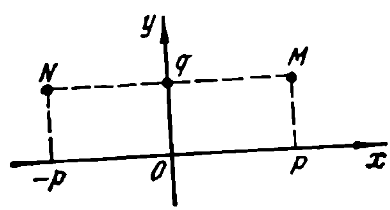
შევისწავლოთ ელიფსის ფორმა მის განტოლებაზე

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

დაყრდნობით.

ამ ამოცანის ამოხსნა დავიწყოთ შემდეგი თეორემის დამტკიცებით.

თეორემა. *ელიფსი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.*



ნახ. 42.

დამტკიცება. ავიღოთ Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებული ორი M და N წერტილი (ნახ. 42). თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ დავამტკიცებთ, რომ როცა M და N წერტილებიდან ერთ-ერთი ეკუთვნის (6) ელიფსს, მაშინ მეორეც აუცილებლად ეკუთვნის იმავე ელიფსს.

გარკვეულობისათვის დაუშვათ, რომ M წერტილი ეკუთვნის ელიფსს. აღვნიშნოთ მისი კოორდინატები $(p,\ q)$, მაშინ ცხადია, რომ მისი სიმეტრიული N წერტილის კოორდინატები იქნება $(-p,\ q)$: ის ფაქტი, რომ $M(p,\ q)$ წერტილი ძევს (6) ელიფსზე, ასე ჩაიწერება:

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1. \qquad (7)$$

ხოლო დასამტკიცებელი ფაქტი — $N(-p,q)$ ეკუთვნის ელიფსს— ჩაიწერება შემდეგი ტოლობის სახით

$$\frac{(-p)^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1. \qquad (8)$$

ამგვარად, როცა ვიცით, რომ მართებულია (7) ტოლობა, უნდა ვუჩვენოთ (8) ტოლობის მართებულობა. ეს კი სავსებით ცხადია, რადგან

$$(-p)^2=p^2. \tag{9}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ ჩავუფიქრდებით მოყვანილ დამტკიცებას, გამოვიტანთ დასკვნას, რომ (7) და (8) ტოლობები ერთდროულად ან მართებულია, ან არა. უკანასკნელი განპირობებულია (9) ტოლობით და იმით, რომ (8) ტოლობა მიიღება (7) ტოლობიდან, თუ p^2-ს შევცვლით $(-p)^2$-ით. მაგრამ $(-p)^4=p^4$, ამიტომ, თუ სიტყვა-სიტყვით გავიმეორებთ მოყვანილ დამტკიცებას, დავადგენთ, რომ წირი

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=1$$

აგრეთვე სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. იგივე ეხება

$$5x^6-9x^2y+3x^4y^3=42$$

წირსაც და ა. შ. საზოგადოდ, მართებულია მნიშვნელოვანი

სიმეტრიის პრინციპი. *თუ რაიმე წირის განტოლებაში x კოორდინატი შედის მხოლოდ ლუწ ხარისხში, მაშინ ეს წირი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.*

ვინაიდან x და y კოორდინატები სავსებით ტოლფასია, ცხადია, რომ წირი, რომლის განტოლება შეიცავს y ორდინატს მხოლოდ ლუწ ხარისხში, სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ.

კერძოდ, ელიფსის (6) განტოლება y შეიცავს მხოლოდ კვადრატში, ამიტომ *ელიფსი სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართაც.*

ნათქვამის ძალით, გვეცოდინება მთელი ელიფსის ფორმა, თუ დავადგენთ მისი იმ ნაწილის სახეს, რომელიც I საკოორდინატო კუთხეშია მოთავსებული. ამისათვის ამოვხსნათ (6) განტოლება y-ის მიმართ*

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{10}$$

აქედან გამომდინარეობს 4 მტკიცება:

1) როცა $x=0$, მაშინ $y=b$.
2) როცა x იზრდება, მაშინ y მცირდება.
3) როცა $x=a$, მაშინ $y=0$.

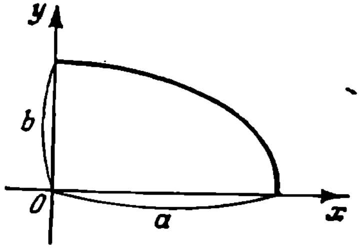
---

* რადგან I მეოთხედში მოთავსებულ (x, y) წერტილებისათვის $y>0$, ამიტომ რადიკალის წინ ვირჩევთ „+" ნიშანს.

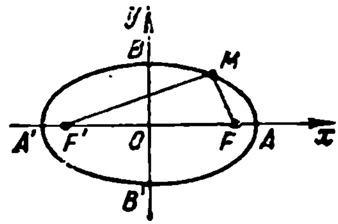
4) როცა $x>a$, მაშინ y წარმოსახვითია, ე. ი. (6) ელიფსზე არ არსებობს წერტილები, რომელთა აბსცისები მეტია a-ზე.

მოკლედ რომ ვთქვათ, როცა x იზრდება 0-დან a-მდე, მაშინ y ორდინატი მცირდება b-დან ნულამდე.

ამგვარად, ელიფსის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია პირველ საკოორდინატო კუთხეში აქვს 43-ე ნახაზზე გამოსახული სახე, ხოლო მთელი ელიფსი ნაჩვენებია 44-ე ნახაზზე. A, A', B, B' წერტილებს, რომლებშიც ელიფსი ჰკვეთს კოორდინატთა ღერძებს (ისინი ელიფსის



ნახ. 43.



ნახ. 44.

სიმეტრიის ღერძებია) ეწოდებათ ელიფსის *წვეროები*. AA' და BB' მონაკვეთებს (რომლებიც ცხადია ტოლია $2a$ და $2b$ რიცხვების) ეწოდებათ ელიფსის *დიდი* და *მცირე ღერძები* შესაბამისად. ხოლო მათ ნახევრებს a და b — *დიდი* და *მცირე ნახევარღერძები*. ბოლოს, O წერტილს, რომელიც ელიფსის *სიმეტრიის ცენტრია*, უწოდებენ ელიფსის *ცენტრს*.

შენიშვნები. 1) ელიფსზე მდებარე ნებისმიერი M წერტილისათვის $MF+MF'=2a$. კერძოდ, B წვეროსათვის გვაქვს

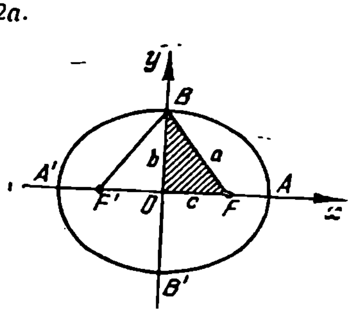
$$BF+BF'=2a.$$

მაგრამ სიმეტრიის თვალსაზრისით (ნახ.45) იქნება $BF'=BF$. მაშასადამე, $2BF=2a$. ე. ი.

$$BF=a.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ BF არის OBF მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, რომლის კათეტებია b და c, მივიღებთ უკვე ცნობილ ტოლობას

$$a^2=b^2+c^2.$$



ნახ. 45.

2) წრეწირი შეიძლება ჩავთვალოთ ისეთ ელიფსად, რომლის ფოკუსები ერთმანეთს ემთხვევა. ამ შემთხვევაში $c=0$, მაშასადამე, $b=a$ და (6) განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

ანუ

$$x^2+y^2=a^2.$$

ე. ი. იქცევა იმ წრეწირის კარგად ცნობილ განტოლებად, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) მოვნახოთ ელიფსი, რომლის დიდი და მცირე ღერძების ბოლოებს შორის მანძილი ტოლია 6-ის, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის მცირე ღერძს.

ამოცანის პირობის თანახმად

$$\sqrt{a^2+b^2}=6, \quad 2c=2b.$$

მეორე ტოლობა გვაძლევს $c=b$. მაგრამ რადგან $a^2=b^2+c^2$, ამიტომ $a^2=2b^2$. მაშასადამე, $\sqrt{3b^2}=6$ და $b^2=12$, მაშინ $a^2=24$ და ჩვენი ელიფსის განტოლება იქნება

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1.$$

2) ვიპოვოთ (6) ელიფსის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გადის ფოკუსში დიდი ღერძის მართობულად.

აღვნიშნოთ ჩვენთვის საინტერესო ქორდის ზედა ბოლო $M(x_0, y_0)$. მაშინ ქორდის სიგრძე უდრის $2y_0$. მეორე მხრივ, $x_0=c$, რადგან

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

ამიტომ

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1, \quad \text{ანუ} \quad \frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

საიდანაც

$$2y_0=2\,\frac{b^2}{a}.$$

3. ელიფსი, როგორც შეკუმშული წრეწირი

ელიფსის ფორმა ადვილად შეიძლება წარმოვიდგინოთ, თუ მის განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11}$$

შევადარებთ იმ წრეწირის განტოლებას

$$x^2+y^2=a^2, \tag{12}$$

რომლის დიამეტრია ელიფსის დიდი ღერძი (ნახ. 46). ვთქვათ, M და N ელიფსის და წრეწირის წერტილებია, რომელთაც აქვთ ერთი და იგივე აბსცისა x. მათი ორდინატები აღვნიშნოთ y_M და y_N შესაბამისად. გარკვეულობისათვის მივიღოთ, რომ ორივე M და N წერტილი მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ. (11) და (12) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_M{}^2}{b^2}=1, \quad x^2+y_N{}^2=a^2.$$

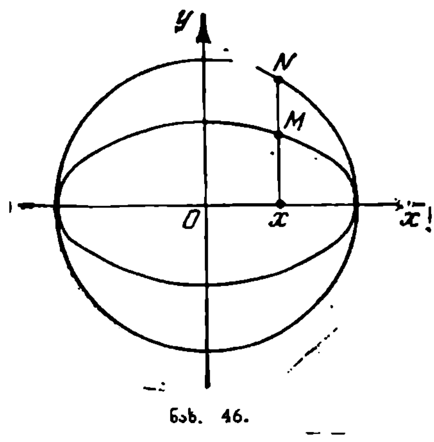
აქედან

$$y_M=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y_N=\sqrt{a^2-x^2}$$

და მაშასადამე,

$$\boxed{y_M=\frac{b}{a}\,y_N}$$



ნახ. 46.

ვხედავთ, რომ ელიფსის ყოველი წერტილის ორდინატი მიიღება წრეწირის შესაბამისი წერტილის (ე. ი. იმავე აბსცისის მქონე) ორდინატის, რაღაც რიცხვზე გამრავლებით. ეს რიცხვი (ერთი და იგივე ელიფსის ყველა წერტილისათვის) ნაკლებია 1-ზე (რადგან $b<a$).

მიღებულ შედეგს ასე გამოთქვამენ, (11) ელიფსი მიიღება (12) წრეწირისაგან, მისი $\frac{a}{b}$-ჯერ შ ე კ უ მ შ ვ ი თ (ყურადღება! შეკუმშვა სწორედ $\frac{a}{b}$-ჯერ და არა $\frac{b}{a}$-ჯერ) ანუ, მოკლედ, ელიფსი არის შეკუმშული წრეწირი. მაგალითად, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსი მიღებულია $x^2+y^2=36$ წრეწირისაგან მისი ორჯერ შეკუმშვით (აქ ხომ $a=6$, $b=3$).

4. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი

განსაზღვრა. ელიფსის *ექსცენტრისიტეტი* ეწოდება ფოკუსებს შორის მანძილის შეფარდებას დიდ ღერძთან, ანუ

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

რიცხვს. რადგან $c<a$, ამიტომ ნებისმიერი ელიფსისათვის

$$0 \leqslant \varepsilon < 1$$

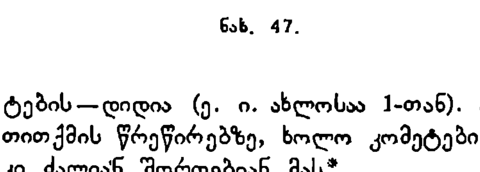
($\varepsilon=0$ შემთხვევა შეესაბამება წრეწირს). ძნელი არ არის გარკვევა იმაში, თუ როგორ მოქმედებს ელიფსის ფორმაზე ε-ის მნიშვნელობა. მართლაც, თუ $b^2+c^2=a^2$ გავყოფთ a^2-ზე, ვპოულობთ

$$\frac{b^2}{a^2}+\varepsilon^2=1.$$

მაშასადამე,

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

აქედან ჩანს, რომ ძალიან მცირე ε-ისათვის a და b რიცხვები თითქმის ტოლები არიან, ანუ ელიფსი ძალიან გავს წრეწირს. ხოლო, თუ ε ახლოს არის 1-თან, მაშინ b ძალიან მცირეა, a-სთან შედარებით და მაშასადამე, ელიფსი ძალიან გაწელილია (ნახ. 47).



ნახ. 47.

როგორც ცნობილია, პლანეტები და კომეტები მოძრაობენ ელიფსებზე. ყოველი ასეთი ელიფსის ერთ ფოკუსში მოთავსებულია მზე (მეორე ფოკუსში არ არის არაფერი). აღმოჩნდა, რომ პლანეტების ორბიტების ექსცენტრისიტეტი ძალიან მცირეა, ხოლო კომეტების — დიდია (ე. ი. ახლოსაა 1-თან). ამგვარად, პლანეტები მოძრაობენ თითქმის წრეწირებზე, ხოლო კომეტები ხან უახლოვდებიან მზეს, ხან კი ძალიან შორდებიან მას*.

---

* მერკურის, ვენერას, დედამიწის და მარსის ექსცენტრისიტეტები ტოლია შესაბამისად $\varepsilon=0{,}21$, $\varepsilon=0{,}01$, $\varepsilon=0{,}02$, $\varepsilon=0{,}09$, ხოლო კომეტების გალესი და ენკის ექსცენტრისიტეტები ტოლია $\varepsilon=0{,}97$ $\varepsilon=0{,}87$ შესაბამისად.

ელიფსის ცენტრში გამავალ ყოველ ქორდას, ეწოდება ამ ელიფსის დ ი ა მ ე ტ რ ი. დრეკადობის თეორიაში სასარგებლოა შემდეგი ამოცანის ამოხსნის ცოდნა.

ამოცანა. ა რ ჩ ე უ ლ ი ა.

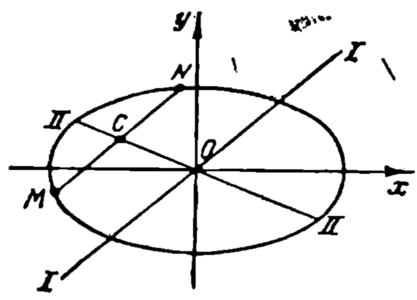
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{13}$$

ელიფსის რაიმე I—I დიამეტრი (ნახ. 48) და განიხილება ამ დიამეტრის პარალელური ქორდების ოჯახი. ვიპოვოთ მათი შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ I—I დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი არის m. ავირჩიოთ ამ დიამეტრის პარალელური რომელიმე ქორდა. ცხადია, რომ ამ ქორდის განტოლება იქნება

$$y=mx+h. \tag{14}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ამ ქორდისა და ელიფსის გადაკვეთის M და N წერტილები, უნდა ამოვხსნათ ერთობლივად (13) და (14) განტოლებები.



ნახ. 48.

თუ (14)-დან y-ს ჩავსვამთ (13)-ში მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+h)^2}{b^2}=1. \tag{15}$$

M და N წერტილების x_M და x_N აბსცისები ამ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია. გვაინტერესებს MN ქორდის შ უ ა წ ე რ ტ ი ლ ი $C(x_C y_C)$. ცნობილი ფორმულის თანახმად

$$x_C=\frac{x_M+x_N}{2}.$$

ამგვარად, გვჭირდება (15) განტოლების არა ცალკეული ამონახსენი, არამედ მათი ჯამი. მაგრამ

$$Ax^2+Bx+C=0$$

კვადრატული განტოლების ამონახსენთა ჯამი ტოლია $-\dfrac{B}{A}$.

თუ (15) განტოლებას შემდეგი სახით გადავწერთ

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+2\,\frac{mh}{b^2}\,x+\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)=0,$$

დავინახავთ, რომ

$$x_M+x_N=-\frac{2\dfrac{mh}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}=-\frac{2a^2mh}{b^2+a^2m^2},$$

საიდანაც

$$x_C=-\frac{a^2mh}{b^2+a^2m^2}. \tag{16}$$

y_C ორდინატის საპოვნელად (14) განტოლებაში ჩავსვათ x_0-ს მნიშვნელობა,მივიღებთ:

$$y_C=mx_C+h=\frac{-a^2m^2h}{b^2+a^2m^2}+h=\frac{b^2h}{b^2+a^2m^2}. \tag{17}$$

(16) და (17) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\frac{y_C}{x_C}=-\frac{b^2}{a^2m}.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ C წერტილი ძევს

$$\boxed{y=-\frac{b^2}{a^2m}x} \tag{18}$$

წრფეზე.

დიდი მნიშვნელობა აქვს იმას, რომ (18) განტოლებაში არ შედის h რიცხვი, რომელიც განასხვავებს ჩვენს მიერ არჩეულ ქორდას, ოჯახის სხვა ქორდებისაგან. მაშასადამე, ამ ოჯახის ყველა ქორდის შუაწერტილი ძევს (18) წრფეზე. თვით ეს წრფე კი გადის ელიფსის ცენტრში. მაშასადამე, საძიებელი გეომეტრიული ადგილი არის (18) წრფის მონაკვეთი, რომელიც ჩვენი ელიფსის შიგნით მდებარეობს. სხვანაირად, ეს გეომეტრიული ადგილი არის ელიფსის დიამეტრი. ამ ახალი II—II დიამეტრის m^* კუთხური კოეფიციენტი

$$\boxed{m^*=-\frac{b^2}{a^2m}} \tag{19}$$

II—II დიამეტრს ეწოდება I—I დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრი.

თეორემა. თუ II—II დიამეტრი I—I დიამეტრის შეუღლებულია, მაშინ პირიქით, I—I დიამეტრი II—II დიამეტრის შეუღლებულია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს დიამეტრები ურთიერთშეუღლებული დიამეტრებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, I—I და II—II დიამეტრების კუთხური კოეფიციენტები m და m^* რიცხვებია შესაბამისად. აღვნიშნოთ m^{**}-ით იმ დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი, რომელიც II—II დიამეტრის შეუღლებულია. (19) ტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$m^{**}=-\frac{b^2}{a^2m^*}.$$

მაგრამ m^* გამოისახება m-ის საშუალებით აგრეთვე (19) ფორმულით. მაშასადამე,

$$m^{**} = -\frac{b^2}{a^2\left(-\frac{b^2}{a^2 m}\right)} = m.$$

ამგვარად, $m^{**}=m$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

შენიშვნა. თუ ერთ დიამეტრად მივიჩნევთ ელიფსის *მცირე ღერძს*, მაშინ მისი შეუღლებული დიამეტრი იქნება იმავე ელიფსის *დიდი ღერძი*. მაშასადამე, ელიფსის ღერძები ისეთი ურთიერთშეუღლებული დიამეტრებია, რომლებიც ამავე დროს ურთიერთმართობულიც არიან. თუ ჩვენი ელიფსი წარმოადგენს წრეწირს, მაშინ I—I დიამეტრის შეუღლებული II—II დიამეტრი ყოველთვის მისი მართობული იქნება. წრეწირისაგან განსხვავებული ელიფსისათვის კი, გარდა მისი ღერძებისა, არც ერთი ურთიერთშეუღლებული ორი დიამეტრი არ იქნება ურთიერთმართობული. მართლაც, (19) პირობის თანახმად

$$mm^* = -\frac{b^2}{a^2}, \qquad (20)$$

იმისათვის კი, რომ დიამეტრები იყოს ურთიერთმართობული, საჭიროა

$$mm^* = -1. \qquad (21)$$

(20) და (21) ტოლობების ერთდროულად შესრულება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $b=a$, ე. ი. როცა ელიფსი წარმოადგენს წრეწირს.

მაგალითები. 1) ვიპოვოთ

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

ელიფსის დიამეტრი, რომელიც $y=7x$ დიამეტრის* შეუღლებულია.

ჩვენ შემთხვევაში $m=7$, $a=5$, $b=4$, მაშასადამე,

$$m^* = -\frac{b^2}{a^2 m} = -\frac{16}{175}$$

და საძიებელი დიამეტრი იქნება $y=-\frac{16}{175}x$.

2) $C(2,1)$ წერტილში გავავლოთ

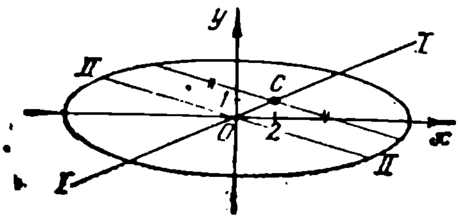
$$\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{11}=1$$

ელიფსის ქორდა, რომელიც ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

* ეს გამოთქმა მთლად ზუსტი არ არის. $y=7x$ არის *უსასრულო* წრფე, ხოლო ელიფსის დიამეტრი მისი *სასრულო* მონაკვეთია. ასეთი სიტყვიერი თავისუფლება ხშირად დასაშვებია (როცა მათ არ მივყავართ გაუგებრობამდე).

უპირველესად, C წერტილში გავავლოთ ჩვენი ელიფსის (ნახ. 49) I—I დიამეტრი. რადგან ის გადის O და C წერტილებზე, ამიტომ მისი განტოლება იქნება $y=\frac{x}{2}$. მისი შეუღლებული II—II დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი ((19) ტოლობის თანახმად) იქნება

$$m^* = -\frac{11}{80\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{11}{40}.$$



ნახ. 49.

ასეთივე იქნება ჩვენთვის საინტერესო ქორდის კუთხური კოეფიციენტი. მაშასადამე, ქორდის განტოლებაა

$$y-1=-\frac{11}{40}(x-2),$$

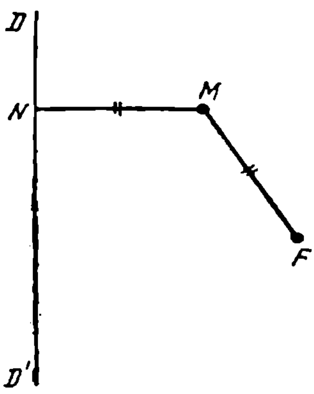
ანუ

$$11x+40y-62=0.$$

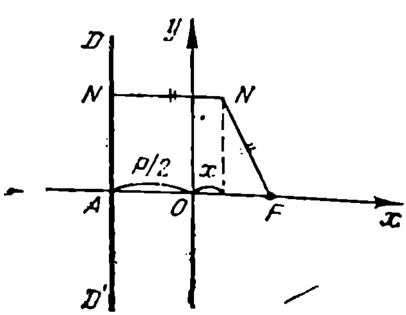
§ ნ. პარაბოლა

1. პარაბოლის განსაზღვრა. მისი კანონიკური განტოლება

განსაზღვრა. *პარაბოლა* ეწოდება წირს, რომელიც წარმოადგენს მოცემული წერტილიდან (*ფოკუსიდან*) და მოცემული წრფიდან (*დირექტრისიდან*) თანაბრად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს.



ნახ. 50.



ნახ. 51.

. თუ პარაბოლის დირექტრისა არის DD' ხოლო ფოკუსი F (ნახ. 50), მაშინ პარაბოლა შედგება ისეთი M წერტილებისაგან, რომლებისთვისაც

$$\boxed{MN = MF}$$

პარაბოლის განტოლების შესადგენად საჭიროა, უპირველეს ყოვლისა კოორდინატთა სისტემის არჩევა. გავავლოთ Ox ღერძი ფოკუსზე დირექტრისის მართობულად (დირექტრისიდან ფოკუსის მიმართულებით). O კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ფოკუსსა და დირექტრისას შორის თანაბარ მანძილზე. ამით განისაზღვრება Oy ღერძის მდებარეობაც (ნახ. 51). ვთქვათ, A არის Ox ღერძის და დირექტრისის გადაკვეთის წერტილი, და დავუშვათ,

$$\boxed{AF = p}$$

მაშინ F ფოკუსის კოორდინატები იქნება $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. ავიღოთ ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილი. ცხადია, რომ

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

მეორე მხრივ, ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$MN = x + \frac{p}{2}\ ^{*}$$

M წერტილი ძევს პარაბოლაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $MF = MN$, ე. ი. როცა:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

---

* უფრო ზუსტად $MN = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, რაც ადვილად შეიძლება დავადგინოთ წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულით. მართლაც, დირექტრისის განტოლებაა $x + \frac{p}{2} = 0$. მაშასადამე,

$$MN = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

ტექსტში დაშვებული უზუსტობა შეცდომამდე არ მიგვიყვანს, რადგან $MF = MN$ ტოლობის დაწერისთანავე, მას ვახარისხებთ კვადრატში.

ეს ტოლობა წარმოადგენს პარაბოლის განტოლებას. განტოლების გამარტივების მიზნით ავახარისხოთ ის კვადრატში. გავხსნათ ფრჩხილები, მივიღებთ

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

ანუ

$$\boxed{y^2=2px} \tag{1}$$

ეს არის პარაბოლის უმარტივესი (ანუ კანონიკური) განტოლება. ცხადია, რომ $p>0$.

2. პარაბოლის ფორმის გამოკვლევა

გამოვიკვლიოთ პარაბოლის ფორმა მისი განტოლების

$$y^2=2px \tag{1}$$

(სადაც $p>0$) გამოყენებით.

(1) განტოლება შეიცავს y-ს მხოლოდ კვადრატში. მაშასადამე, ჩვენი პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ, ამიტომ. პარაბოლის სახის დასადგენად, საკმარისია დავადგინოთ მისი სახე Ox ღერძის ზემოთ. ამ ნაწილის (x, y) წერტილებისათვის $y>0$, ამიტომ (1) განტოლებიდან y-ის განსაზღვრისას, რადიკალის წინ უნდა ავიღოთ „+" ნიშანი. მაშასადამე,

$$y=\sqrt{2px}.$$

აქედან ჩანს, რომ

1) x არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, რადგან მაშინ y იქნება წარმოსახვითი, რაც არ შეიძლება. მაშასადამე, პარაბოლაზე არ არის Oy ღერძის მარცხნივ მდებარე წერტილები.

2) თუ $x=0$, მაშინ $y=0$.

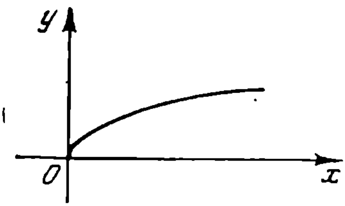
3) თუ x იზრდება, მაშინ y-იც იზრდება, მასთან x-ის უსაზღვრო ზრდა იწვევს y-ის უსაზღვრო ზრდას, მაგრამ არა ისე სწრაფად, როგორც თვით x (მაგალითად, x-ის 4-ჯერ გაზრდისას, y იზრდება მხოლოდ 2-ჯერ).

ამგვარად, პარაბოლის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ აქვს 52-ე ნახაზზე მოცემული სახე, ხოლო მთელი პარაბოლა გამოიყურება ისე, როგორც ნაჩვენებია 53-ე ნახაზზე.

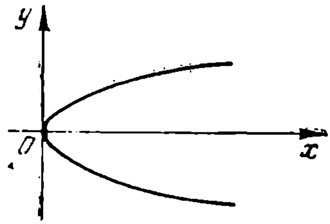
პარაბოლა აღმოჩნდა უსასრულო ღია წირი, რომლის სიმეტრიის ღერძია Ox, წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ხოლო Oy მისი მხებია* (წვეროზე გამავალი).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ძნელი არ არის იმის მიხვედრა, რომ შემდეგი განტოლებებიდან

$$x^2=2py, \qquad y^2=-2px, \qquad x^2=-2py, \qquad (p>0)$$



ნახ. 52.



ნახ. 53.

თითოეულს შეესაბამება პარაბოლა, რომლის ფორმა, ისეთივეა, მდებარეობა კი სხვა. 54-ე, 55-ე და 56-ე ნახაზებზე გამოსახულია ეს პარაბოლები.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) ვიპოვოთ $y^2=6x$ პარაბოლის დირექტრისა და ფოკუსი.

აქ $6=2p$. მაშასადამე, $p=3$: ფოკუსია $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ წერტილი, ხოლო დირექტრისაა $x=-\frac{3}{2}$ წრფე.

2) ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $x^2=-8y$ პარაბოლის დირექტრისა არის $y=2$ წრფე, ხოლო ფოკუსია $F(0, -2)$.

3. $y=ax^2$ პარაბოლა

თეორემა. განტოლებას

$$\boxed{y=ax^2} \qquad (2)$$

სადაც $a\neq0$, შეესაბამება პარაბოლა. მისი წვერო კოორდინატთა სათავეშია, ის სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ და როცა $a>0$ (2) პარაბოლა

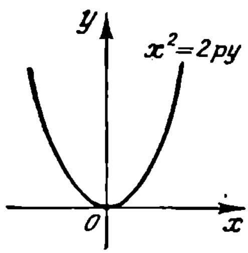
* მხების ზუსტი განსაზღვრა მოცემული იქნება III თავში.

მოთავსებულია აბსცისათა ღერძის ზემოთ, ხოლო როცა $a<0$ — მის ქვემოთ.

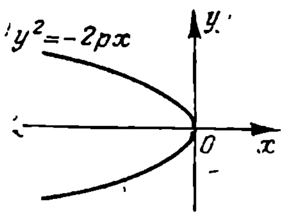
დამტკიცება. (2) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$x^2=\frac{1}{a}\,y.$$

ეს კი არის $x^2=2py$ ან $x^2=-2py$ ($p>0$) სახის განტოლება, იმის მიხედვით $a>0$, თუ $a<0$. ამ უკანასკნელ განტოლებებს კი შეესაბამებათ პარაბოლები, რომლებიც გამოსახულია 54-ე ნახაზზე, როცა $a>0$, და 56-ე ნახაზზე, როცა $a<0$. რისი დამტკიცებაც იყო საჭირო.



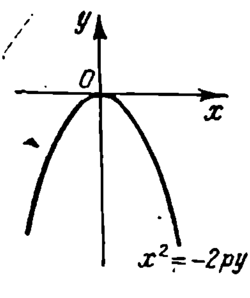
ნახ. 54.



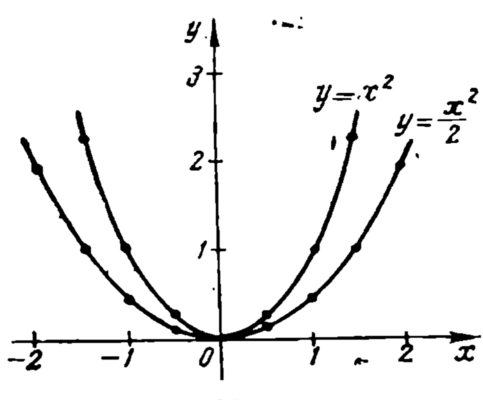
ნახ. 55.

იმისათვის, რომ გავერკვეთ, თუ როგორ მოქმედებს (2) პარაბოლის ფორმაზე a კოეფიციენტის მოდული, გამოვსახოთ ერთ ნახაზზე (ნახ. 57).

$$y=\frac{1}{2}\,x^2,\quad y=x^2$$



ნახ. 56.



ნახ. 57.

პარაბოლები, ავაგოთ თითოეულისათვის წერტილები, რომელთა აბსცისებია $x=0$, $x=\pm\frac{1}{2}$, $x=\pm1$, $x=\pm\frac{3}{2}$, $x=\pm2$.

ეს ნახაზი გვიჩვენებს, რომ რაც უფრო მეტია a რიცხვის მოდული, მით უფრო ახლოსაა Oy ღერძთან პარაბოლის შტოები. შეიძლება ითქვას, რომ (როცა $a>0$) რაც მეტია a, მით უფრო ციცაბოა პარაბოლა.

პარაბოლას აქვს მრავალი გამოყენება მექანიკაში. მაგალითად, ჰორიზონტის მიმართ რაიმე კუთხით გასროლილი ქვა აღწერს პარაბოლას*.

§ 6. ჰიპერბოლა

1. ჰიპერბოლის განსაზღვრა. მისი კანონიკური განტოლება

ჰიპერბოლის განსაზღვრა მოგვაგონებს ელიფსის განსაზღვრას. ოღონდ უკანასკნელ განსაზღვრაში სიტყვა „ჯამი" უნდა შევცვალოთ სიტყვა „სხვაობით".

განსაზღვრა. ჰიპერბოლა იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილია, რომელთათვის ორ მოცემულ წერტილამდე (ფოკუსებამდე) მანძილების სხვაობა არის მუდმივი სიდიდე.

თუ ფოკუსებს აღვნიშნავთ F და F', და სხვაობას $2a$-თი, მაშინ ჰიპერბოლის ნებისმიერი M წერტილისათვის ადგილი ექნება ერთ-ერთს შემდეგი ტოლობებიდან

$$\boxed{MF'-MF=\pm2a} \tag{1}$$

ამასთან ნიშანი „+" ან „—" უნდა ავირჩიოთ იმის მიხედვით, თუ F და F' ფოკუსებიდან, რომელთანაა უფრო ახლოს M წერტილი. 58-ე ნახაზზე M წერტილისათვის, (1) ტოლობაში, უნდა ავირჩიოთ „+" ნიშანი. თუ ფოკუსებს შორის მანძილს აღვნიშნავთ $2c$-თი

$$FF'=2c,$$

მაშინ $2c>2a$, რადგან MFF' სამკუთხედში FF' გვერდი უნდა იყოს MF და MF' გვერდების სხვაობაზე მეტი.

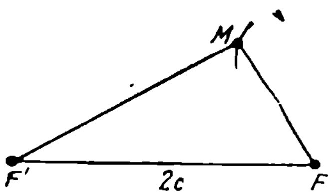
---

* თუ უგულებელვყოფთ ჰაერის წინააღმდეგობას; ეს დასაშვებია იმიტომ, რომ ქვის სიჩქარე დიდი არ არის. არტილერიის ჭურვების შემთხვევაში გვაქვს დიდი სიჩქარე და ჰაერის წინააღმდეგობა არსებითად მოქმედებს ტრაექტორიაზე.

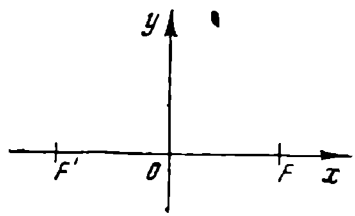
ამგვარად,

$$\boxed{c>a}\ ^{*} \tag{2}$$

ჰიპერბოლის განტოლების შესადგენად, უპირველეს ყოვლისა საჭიროა ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა. ისე, როგორც ელიფსის შემთხვევაში, აქაც Ox ღერძი გავავლოთ ფოკუსებზე ხოლო კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ FF' მონაკვეთის შუაწერტილში (ნახ. 59). ცხადია, რომ ფოკუსების კოორდინატები იქნება $F-(c, 0)$ და $F'-(-c, 0)$.



ნახ. 58.



ნახ. 59.

ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილისათვის იქნება

$$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

(1) ტოლობის თანახმად, M წერტილი ძევს ჰიპერბოლაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{3}$$

ეს ტოლობა ჰიპერბოლის განტოლებაა, მაგრამ ის შეიძლება გავამარტივოთ. ამისათვის (3) ტოლობა ასე გადავწეროთ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

ამ ტოლობის კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ

$$x^2+2cx+c^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2.$$

საიდანაც

$$4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

თუ შევკვეცავთ 4-ზე და ხელახლა ავახარისხებთ კვადრატში, მივიღებთ

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2),$$

* გავიხსენოთ, რომ ელიფსისათვის $c<a$.

ანუ

$$(c^2 - a^2) x^2 - a^2y^2 = a^2 (c^2 - a^2). \tag{4}$$

დავუშვათ, რომ

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2} \tag{5}$$

ეს აღნიშვნა კანონიერია, რადგან (2) პირობის თანახმად $c^2 - a^2$ დადებითია*. მაშინ (4) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

თუ გავყოფთ ამ ტოლობას a^2b^2-ზე, მივიღებთ ჰიპერბოლის კანონიკურ განტოლებას

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{6}$$

რომელიც გავს ელიფსის განტოლებას.

2. ჰიპერბოლის ფორმის გამოკვლევა

დავადგინოთ ჰიპერბოლის ფორმა მისი (6) განტოლების მიხედვით. რადგან ეს განტოლება შეიცავს x და y-ს მხოლოდ ლუწ ხარისხებში, ამიტომ (6) ჰიპერბოლა სიმეტრიულია ორივე საკოორდინატო ღერძის მიმართ. ამიტომ საკმარისია ჰიპერბოლის იმ ნაწილის ფორმის გამოკვლევა, რომელიც მდებარეობს პირველ საკოორდინატო კუთხეში. ამისათვის (6) განტოლება ამოვხსნათ y-ის მიმართ. თუ გავითვალისწინებთ, რომ პირველ მეოთხედში $y>0$, მივიღებთ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{7}$$

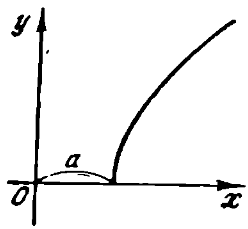
აქედან ჩანს, რომ როცა $0 \leqslant x < a$, y ღებულობს წარმოსახვით მნიშვნელობებს. ეს გვიჩვენებს: რომ ჰიპერბოლის ჩვენთვის საინტერესო ნაწილს არა აქვს წერტილები $x=a$ წრფის მარცხნივ. თუ $x=a$, მაშინ $y=0$, ხოლო როცა $x>a$, მაშინ y დადებითია და მით მეტია, რაც მეტია x. როცა x უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ y-იც იზრდება უსაზღვროდ. აქედან გამომდინარეობს, რომ ჰიპერბოლის ჩვენთვის საინტერესო ნაწილს აქვს მე-60 ნახაზზე გამოსახული სახე.

---

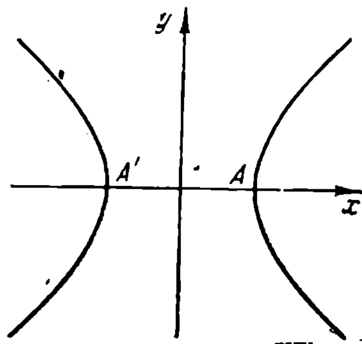
* (5) აღნიშვნა დასაშვებია, მაშინაც, როცა $c^2 - a^2 < 0$, მაგრამ მაშინ b იქნებოდა წარმოსახვითი.

ხოლო მთელი ჰიპერბოლა გამოიყურება ისე, როგორც ეს 61-ე ნახაზზეა ნაჩვენები, ანუ ის შედგება „ორი ნაჭრისაგან“, რომელთაგან თითოეული წარმოადგენს უსასრულო ღია წირს. ჰიპერბოლის ხსენებულ ნაჭრებს ეწოდება ჰიპერბოლის შ ტ ო ე ბ ი.

A და A' წერტილები ჰიპერბოლის წვეროებია. $AA'=2a$ მონაკვეთს ეწოდება (6) ჰიპერბოლის ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ღ ე რ ძ ი. a რიცხვს ეწოდება ჰიპერბოლის ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ნ ა ხ ე ვ ა რ ღ ე რ ძ ი, ხოლო (6) განტოლებაში შემავალ b რიცხვს — მისი წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ნ ა ხ ე ვ ა რ ღ ე რ ძ ი. b რიცხვის გეომეტრიული მნიშვნელობა გამოირკვევა მე-3 ქვეპარაგრაფში.



ნახ. 60.



ნახ. 61.

3. ჰიპერბოლის ასიმპტოტები

ჰიპერბოლის ფორმაზე უფრო ზუსტ წარმოდგენას მივიღებთ, თუ შემოვიღებთ მნიშვნელოვან ცნებას — ასიმპტოტების ცნებას.

რომ უფრო ადვილად გავერკვეთ ამ ცნებაში, დავიწყოთ მაგალითით. განვიხილოთ წირი

$$y=\frac{1}{1+x^2}.*$$

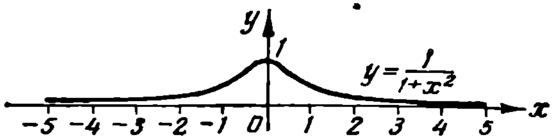
რადგანაც x აბსცისა ამ განტოლებაში შედის მხოლოდ კვადრატში, ამიტომ ჩვენი წირი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. ადვილი სანახავია, აგრეთვე, რომ ის მთლიანად მოთავსებულია Ox ღერ-

---

* მოცემული განტოლება შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით $x^2y+y-1=0$. მაშასადამე, ის მესამე ხარისხის განტოლებაა და შესაბამისი წირი მესამე რიგისაა. თუმცა ეს შენიშვნა ჩვენ არ დაგვჭირდება.

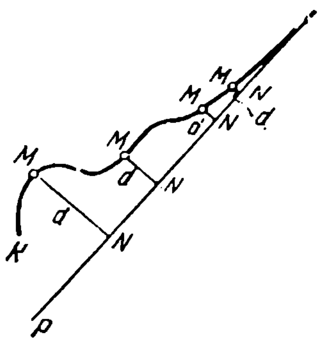
ძის ზემოთ, ვინაიდან მისი ყოველი წერტილისათვის $y>0$. იმისათვის, რომ უკეთ წარმოვიდგინოთ ეს წირი, ავაგოთ მისი რამდენიმე წერტილი.

თუ $x=0$, მაშინ $y=1$; თუ $x=0{,}5$, მაშინ $y=0{,}8$; თუ $x=1$, მაშინ $y=0{,}5$; თუ $x=2$, მაშინ $y=0{,}2$; თუ $x=3$, მაშინ $y=0{,}1$ და ა. შ. წირს აქვს 62-ე ნახაზზე გამოსახული სახე. როცა x იზრდება, მაშინ y მცირდება, უფრო მეტიც, როცა x უსაზღვროდ იზრდება (მაგალითად, x ხდება 100-ზე მეტი, 1000-ზე მეტი, 10000-ზე მეტი და ა. შ.) y ორდინატი

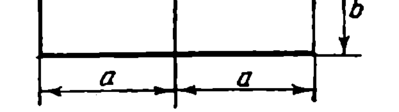


ნახ. 62

სულ უფრო და უფრო მცირდება და უსაზღვროდ უახლოვდება ნულს. მაგრამ ორდინატი ნულის ტ ო ლ ი არ ხდება არასდროს, რადგან ყოველი x-ისათვის $y>0$. მაშასადამე, როცა წერტილი უსაზღვროდ გადაინაცვლებს წირზე მარჯვნივ (ან მარცხნივ) ეს წერტილი სულ უფრო მეტად უახლოვდება Ox ღერძს. წირი თითქოს „გაეფინება" Ox ღერძზე და ხდება თითქმის განუყოფელი მისგან. მთელი ამ სურათის დასახასიათებლად ამბობენ, რომ აბსცისათა ღერძი წარმოადგენს განსახილველი წირის ა ს ი მ პ ტ ო ტ ა ს.



ნახ. 63.



ნახ. 64.

ამ ცნების ზუსტი განსაზღვრა ასეთია:

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. P წრფეს ეწოდება უსასრულო K წირის ა ს ი მ პ ტ ო ტ ა, თუ (ნახ. 63) წირზე მდებარე M წერტილიდან P წრფემდე მანძილი $d=MN$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M წერტილი K წირზე უსაზღვროდ შორს გადაინაცვლებს.

ამ ზოგადი ცნების დადგენის შემდეგ, დავუბრუნდეთ ჰიპერბოლას.

განსაზღვრა. მართკუთხედს (ნახ. 64), რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო გვერდები ღერძების პარალელურია და სათანადოდ ტოლია $2a$ და $2b$ რიცხვებისა ეწოდება

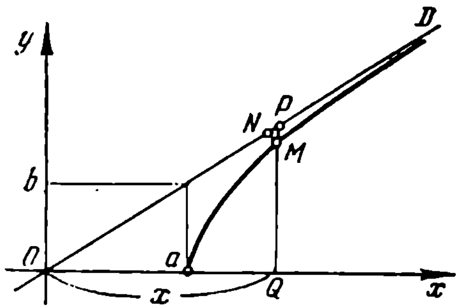
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

ჰიპერბოლის მახასიათებელი მართკუთხედი.

თეორემა. ჰიპერბოლის მახასიათებელი მართკუთხედის დიაგონალები* წარმოადგენენ მის ასიმპტოტებს.

დამტკიცება. სიმეტრიის გამო, საკმარისია განვიხილოთ (6) ჰიპერბოლის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ საკოორდინატო კუთხეში. ჩვენ ვნახეთ, რომ ამ ნაწილის წერტილებისათვის

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{7}$$



ნახ. 65.

მეორე მხრივ OD დიაგონალის (ნახ. 65), როგორც კოორდინატთა სათავეზე გამავალი და $\frac{b}{a}$ კუთხური კოეფიციენტის მქონე წრფის განტოლება იქნება

$$y=\frac{b}{a}\,x. \tag{8}$$

ვთქვათ, რომ M და P (7) ჰიპერბოლაზე და (8) წრფეზე მდებარე წერტილებია შესაბამისად; რომლებსაც ერთიდაიგივე x აბსცისა აქვთ. მაშინ (ნახ. 65 აღნიშვნების მიხედვით) გვაქვს

$$MQ=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad PQ=\frac{b}{a}\,x.$$

რადგანაც $\sqrt{x^2-a^2}<\sqrt{x^2}=x$, ცხადია $MQ<PQ$ და ჰიპერბოლა მდებარეობს OD დიაგონალის ქვემოთ. შემდეგ გვაქვს

$$MP=PQ-MQ,$$

---

* რასაკვირველია, ლაპარაკია ამ დიაგონალების უსასრულო გაგრძელებაზე.

ე. ი.

$$MP=\frac{b}{a}\,(x-\sqrt{x^2-a^2}). \tag{9}$$

თუ x უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ $\sqrt{x^2-a^2}$ აგრეთვე უსაზღვროდ იზრდება. ამიტომ დაწვრილებითი განხილვის გარეშე ძნელია იმის თქმა, თუ როგორი ყოფაქცევისაა (9)* სხვაობა. რომ გაერკვეთ ამ საკითხში, გავამრავლოთ და გავყოთ (9) სხვაობა შემდეგ ჯამზე

$$x+\sqrt{x^2-a^2}.$$

ამის შედეგად მივიღებთ

$$MP=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

ე. ი.

$$MP=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

გავიხსენოთ ახლა, რომ მნიშვნელის შემცირებისას წილადი იზრდება. ამიტომ

$$MP<\frac{ab}{x}. \tag{10}$$

თუ M წერტილი უსასრულოდ შორს გადაინაცვლებს ჰიპერბოლაზე, მაშინ მისი აბსცისა x უსაზღვროდ იზრდება, ამიტომ $\frac{ab}{x}$ წილადი უსაზღვროდ უახლოვდება ნულს. მით უმეტეს მიუახლოვდება ნულს MP მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც (10) პირობის თანახმად ამ წილადზე ნაკლებია. განვიხილოთ M წერტილიდან OD დიაგონალამდე მ ა ნ ძ ი ლ ი $MN=d$. რადგან MN მართობია OD წრფის, ხოლო MP დახრილია იმავე წრფისადმი, ამიტომ $MN<MP$. მაშინ მით უმეტეს MN მანძილი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M გადაინაცვლებს ჰიპერბოლაზე უსასრულოდ შორს. თეორემა დამტკიცებულია.

ვნახეთ, რომ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

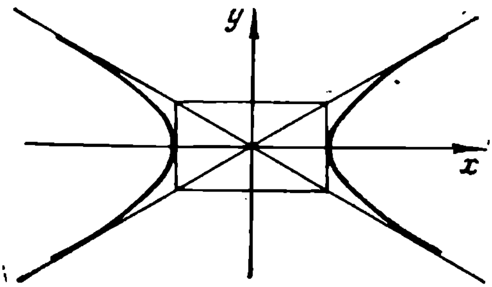
---

* თუ, რაიმე r სიდიდის შესახებ ცნობილია, რომ ის არის ორი ძალიან დიდი A და B რიცხვის სხვაობა, $r=A-B$, მის შესახებ არაფრის თქმა არ შეგვიძლია. მაგალითად, თუ $A=3000000$ და $B=2000000$, მაშინ $r=1000000$, ხოლო თუ $A=3000000$ და $B=2999999{,}98$, მაშინ $r=0{,}02$.

ჰიპერბოლის ერთ-ერთ ასიმპტოტას აქვს (8) სახე. ძნელი არ არის იმის მოსაზრება, რომ მეორე ასიმპტოტის კუთხური კოეფიციენტია $-\frac{b}{a}$, ამიტომ (6) ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ი ს ა ს ი მ პ ტ ო ტ ე ბ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ა:

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

ეს უნდა დაიმახსოვროთ.



ნახ. 66.

ჰიპერბოლის გამოხაზვის დროს საჭიროა ნახაზზე აიგოს მისი ასიმპტოტებიც (ნახ. 66). ამით მიღწეული იქნება დიდი სიზუსტე. პარალელურად ირკვევა ჰიპერბოლის წარმოსახვითი ღერძის გეომეტრიული შინაარსი; ის განსაზღვრავს მახასიათებელი მართკუთხედის სიმაღლეს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჰიპერბოლის ასიმპტოტები გვაძლევს საშუალებას ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვაზე: რით განსხვავდება ჰიპერბოლის შტო პარაბოლისაგან? წარმოვიდგინოთ, რომ უსაზღვრო ველზე დახაზულია $y^2=2px$ პარაბოლა, რომელზედაც აგებულია მაღალი ღობე. ვთქვათ, დამკვირვებელი დგას პარაბოლის წვეროში და მიყრდნობილია ამ ღობეს. თუ ის მიაპყრობს თავის მზერას Ox ღერძისაგან განსხვავებულ $y=mx$ სხივებიდან რომელიმეს გასწვრივ, მაშინ უსათუოდ დაინახავს ღობეს, რადგან $y=mx$ სხივი და $y^2=2px$ პარაბოლა გადაიკვეთებიან არა მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში, არამედ იმ წერტილშიც, რომლის აბსცისაა $x=\frac{2p}{m^2}$. რადგან ფიზიოლოგიურად არ შეიძლება შევაჩეროთ მზერა ერთი წრფის გასწვრივ, ამიტომ საითკენაც არ უნდა იყურებოდეს დამკვირვებელი, ის ხედავს ღობეს. ამგვარად მას მოეჩვენება, რომ წინ ველი შემოღობილია გიგანტური ელიფსით*.

სულ სხვა სურათი წარმოუდგება დამკვირვებელს, რომელიც დგას ჰიპერბოლის წვეროში და მიყრდნობილია ამ ჰიპერბოლის გასწვრივ

* აღწერილი ოპტიკური ეფექტი, რკინიგზებზე შემჩნეული მოვლენის მსგავსია: გვეჩვენება, თითქოს რელსები იკვეთება, თუმცა სინამდვილეში ისინი პარალელური არიან.

აგებულ ღობეს. ვთქვათ, θ არის ჰიპერბოლის ასიმპტოტების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხე. თუ დამკვირვებლის მზერის სხივი Ox ღერძთან შეადგენს θ-ზე მეტ კუთხეს (ხოლო პრაქტიკულად მის ტოლ კუთხეს), მაშინ ის დაინახავს ღობეს. ხოლო თუ ეს კუთხე θ-ზე ნაკლები იქნება, მაშინ დამკვირვებელი დაინახავს თავისუფალ ველს. მაშასადამე, მას მოეჩვენება, რომ ველი შემოსაზღვრულია ორი სწორი ვერტიკალური კედლით, რომლებიც ადგენენ ერთმანეთთან 2Θ-ს ტოლ კუთხეს.

4. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი

განსაზღვრა. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება მის ფოკუსებს შორის მანძილის შეფარდებას ნამდვილ ღერძთან, ანუ

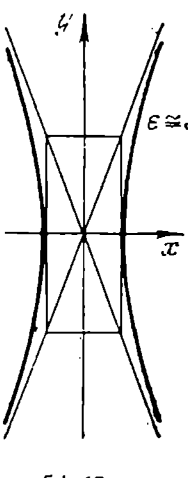
$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}}$$

რადგან $c>a$ ამიტომ ყოველი ჰიპერბოლისათვის $\varepsilon>1$. რომ დავადგინოთ ექსცენტრისიტეტის გავლენა ჰიპერბოლის ფორმაზე, შევნიშნოთ, რომ (5) ტოლობის ძალით იქნება

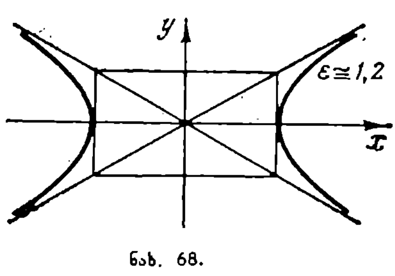
$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\varepsilon^2-1,$$

საიდანაც

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$$



ნახ 67.

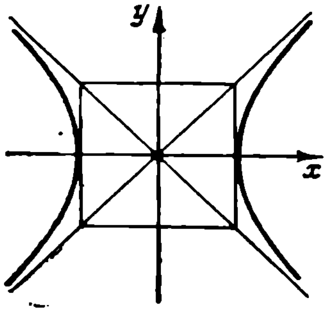


ნახ. 68.

მაშასადამე, რაც მეტია ε, მით უფრო მეტია ასიმპტოტებს შორის კუთხე. 67-ე და 68-ე ნახაზებზე გამოსახულია ჰიპერბოლები, რომელთა ექსცენტრისიტეტებია შესაბამისად $\varepsilon\approx3$ და $\varepsilon\approx1,2$.

5. ტოლფერდა ჰიპერბოლა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. თუ ჰიპერბოლის მახასიათებელი მართკუთხედი კვადრატია (ნახ. 69), მაშინ ჰიპერბოლას ეწოდება ტ ო ლ ფ ე რ დ ა. აღვნიშნოთ ასეთი ჰიპერბოლის ხუთი თვისება.



ნახ. 69

ეს თვისებები უშუალოდ გამომდინარეობს ტოლფერდა ჰიპერბოლის განსაზღვრიდან და თითოეული მათგანი შეიძლება მივიღოთ ასეთი ჰიპერბოლის განსაზღვრად.

1. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ნახევარღერძები ტოლია

$$\boxed{a=b}$$

2. ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

ანუ

$$\boxed{x^2-y^2=a^2}$$

3. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ასიმპტოტები ურთიერთმართობულია.

4. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებებია:

$$\boxed{y=x, \quad y=-x}$$

ე. ი. ისინი ყოფენ ჰიპერბოლის სიმეტრიის ღერძებს შორის კუთხეებს შუაზე.

5. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon=\sqrt{2}$ მართლაც, თუ $a=b$, მაშინ $c^2=a^2+b^2$ ფორმულა მიიღებს სახეს $c^2=2a^2$, საიდანაც გამომდინარეობს ზემონათქვამი.

6. შეუღლებული ჰიპერბოლა

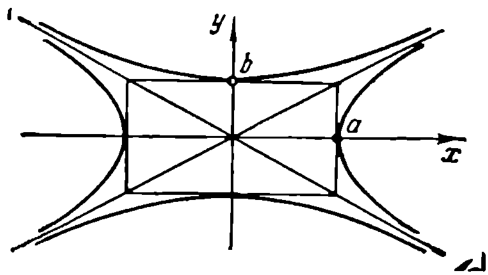
თუ გავითვალისწინებთ, რომ Ox და Oy ღერძები თანაბარუფლებიანია, ძნელი არ არის იმის გაგება, რომ

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1} \tag{11}$$

განტოლებას შეესაბამება ჰიპერბოლა; მისი ფოკუსები Oy ღერძზე მდებარეობენ, ნამდვილი ღერძია $2b$, ხოლო წარმოსახვითი $2a$. მაშასადამე, (11) ჰიპერბოლის მახასიათებელი მართკუთხედი ემთხვევა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ჰიპერბოლის მახასიათებელ მართკუთხედს. ამ ჰიპერბოლებს ეწოდებათ **ურთიერთშეუღლებული ჰიპერბოლები**. რადგანაც ურთიერთშეუღლებულ ჰიპერბოლებს აქვთ საერთო მახასიათებელი მართკუთხედი (ნახ. 70), ამიტომ ასიმპტოტებიც საერთო აქვთ. კერძოდ, თუ ურთიერთშეუღლებული ჰიპერბოლებიდან ერთ-ერთი ტოლფერდაა, მაშინ მეორეც ტოლფერდა იქნება.



ნახ. 70.

7. ჰიპერბოლის ზოგიერთი გამოყენება

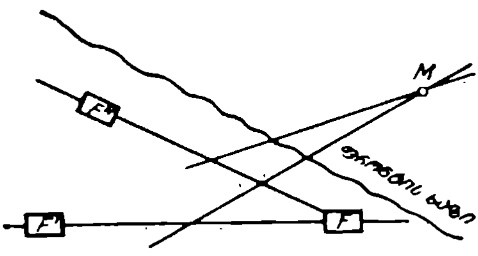
ვუჩვენოთ ჰიპერბოლის გამოყენების ორი მაგალითი: ერთი სამხედრო საქმეში, ხოლო მეორე — ეკონომიკაში.

ა. **ქვემეხის მოძებნა ბგერათსაზომი ხერხით.** ცნობილია, რომ ბგერის სიჩქარეა 300 მ/წმ. დავუშვათ, რომ ორი მეთვალყურე („მოყურადე"), რომლებიც F და F' წერტილებში იმყოფებიან, ინიშნავენ დროს, როდესაც გაიგონეს ქვემეხის გასროლის ხმა. თუ F მეთვალყურემ ეს ხმა გაიგონა t წამით ადრე, ვიდრე F' მეთვალყურემ, მაშინ ქვემეხი უნდა იმყოფებოდეს M წერტილში, რომელიც F'-ისაგან 300 t მ-ით უფრო შორსაა, ვიდრე F-ისაგან:

$$MF'-MF=300\,t.$$

ამიტომ M არის იმ ჰიპერბოლის წერტილი, რომლის ფოკუსებია F და F' ხოლო ნამდვილი ღერძი $2a=300\ t$. უფრო მეტიც, ცხადია, რომ

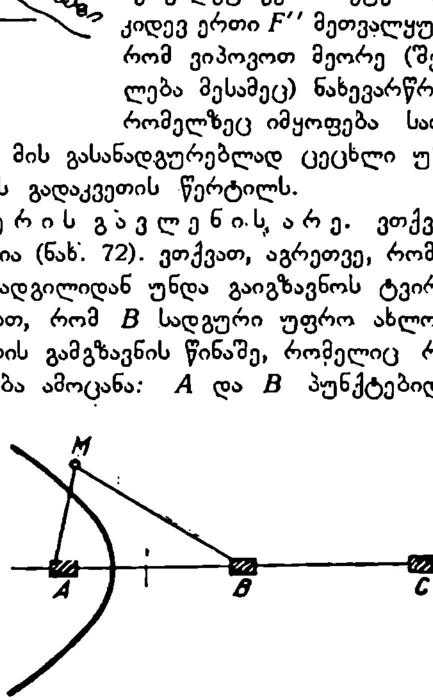
M წერტილი ძევს ამ ჰიპერბოლის სწორედ იმ შტოზე, რომელიც F ფოკუსის მხარესაა. რადგანაც ჩვეულებრივ მეთვალყურეები, ქვემეხიდან შორს იმყოფებიან, ამიტომ M წერტილი F და F' წერტილებიდან საკმაოდ დიდი მანძილით არის დაშორებული, ანუ ძევს იქ, სადაც ჰიპერბოლა ძალიან ახლოსაა თავის ასიმპტოტასთან. ამიტომ პრაქტიკულად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მტრის ქვემეხი მოთავსებულია M წერტილში, რომელიც ძევს ჰიპერბოლის ასიმპტოტაზე. თუ ცნობილია ფრონტის განაწილების საერთო ხასიათი, ანუ უხეშად რომ ვთქვათ, ის მხარე სადაც იმყოფება მოწინააღმდეგე, ადვილი იქნება იმის გარკვევა, თუ რომელ ასიმპტოტაზე ძევს M წერტილი.



ნახ. 71.

ამგვარად, F და F' მეთვალყურეებს შეუძლიათ განსაზღვრონ წრფე (ნახევარწრფეც კი), რომელზედაც შეიძლება იმყოფებოდეს მოწინააღმდეგის ქვემეხი. საკმარისია F და F' მეთვალყურეებს შეუერთდეს კიდევ ერთი F'' მეთვალყურე, რომ ვიპოვოთ მეორე (შეიძლება მესამეც) ნახევარწრფე, რომელზეც იმყოფება საძიებელი ქვემეხი (ნახ. 71). ამიტომ მის გასანადგურებლად ცეცხლი უნდა დაუშინონ ხსენებული წრფეების გადაკვეთის წერტილს.

ბ. *რკინიგზის სადგურის გავლენის არე*. ვთქვათ, A და B რკინიგზის ორი სადგურია (ნახ. 72). ვთქვათ, აგრეთვე, რომ ამ რკინიგზის მიდამოს სხვადასხვა ადგილიდან უნდა გაიგზავნოს ტვირთი რაიმე C პუნქტში. ვგულისხმობთ, რომ B სადგური უფრო ახლოსაა C სადგურთან, ვიდრე A. ტვირთის გამგზავნის წინაშე, რომელიც რაიმე M პუნქტში იმყოფება, ისმება ამოცანა: A და B პუნქტებიდან, რომელში უფრო ხელსაყრელია ტვირთის გადაზიდვა ავტოტრანსპორტით, რომ შემდეგ ის გაიგზავნოს რკინიგზით C პუნქტში.



ნახ. 72.

ვთქვათ, ავტოტრანსპორტით 1 კმ-ის მანძილზე ტვირთის გადატანის ღირებულებაა p მან. ხოლო იმავე მანძილზე რკინიგზით, q მან.

მაშინ ტვირთის გამგზავნმა შემდეგნაირად უნდა იანგარიშოს:

1) ტვირთის გადაზიდვა A სადგურამდე ეღირება

$$(p\cdot MA+q\cdot AB+q\cdot BC) \text{ მან.}$$

2) ტვირთის გადაზიდვა B სადგურამდე ეღირება

$$(p\cdot MB+q\cdot BC) \text{ მან.}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ B სადგურამდე უნდა გადაიზიდოს ტვირთი იმ M ადგილებიდან, რომლებისათვისაც

$$p\cdot MA+q\cdot AB>p\cdot MB.$$

ან, რაც იგივეა

$$MA-MB>-\frac{q}{p}\cdot AB. \tag{12}$$

ის M წერტილები (მათთვის A სადგურსა თუ B სადგურამდე გადაზიდვის ღირებულება ერთნაირია) რომლებისათვისაც

$$MA-MB=-\frac{q}{p}AB, \tag{13}$$

მდებარეობენ ჰიპერბოლაზე, რომლის ფოკუსები A და B წერტილებშია და ნამდვილი ღერძია

$$2a=\frac{q}{p}AB.$$

უფრო ზუსტად, M წერტილები, რომლებიც (13) თანაფარდობას აკმაყოფილებენ, მდებარეობენ ხსენებული ჰიპერბოლის იმ შტოზე, რომელიც A* ფოკუსის მხარესაა. გამოდის, რომ ის M წერტილები, რომლებისთვისაც მართებულია (12) ტოლობა მდებარეობენ ამ შტოს „გარეთ" (ე. ი. სიბრტყის იმ ნაწილში, რომელიც გამოყოფილია ხსენებული შტოთი A წერტილიდან).

§ 7. კოორდინატთა გარდაქმნა

1. საკითხის დაყენება

იმისათვის, რომ დავწეროთ რაიმე წირის განტოლება, უპირველეს ყოვლისა საჭიროა ავირჩიოთ გარკვეული კოორდინატთა სისტემა. ამ სისტემის შეცვლით, შეიცვლება წირის განტოლებაც. მაგალითად, თუ სიბრტყეზე დახაზულია R რადიუსიანი წრეწირი, მაშინ კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემისათვის მის განტოლებას აქვს სახე

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

* სწორედ ეს შტოა ნაჩვენები 72-ე ნახაზზე.

განსაკუთრებით მარტივია ეს განტოლება, როცა კოორდინატთა სათავე მოთავსებულია წრეწირის ცენტრში, ვინაიდან მაშინ $a=b=0$ და (1) განტოლება გადაიქცევა შემდეგ განტოლებად

$$x^2+y^2=R^2.$$

ვხედავთ, რომ კოორდინატთა სისტემის მოხერხებული არჩევა გვაძლევს საშუალებას ერთი და იგივე წირისათვის მივიღოთ უფრო მარტივი განტოლება. აი კიდევ უფრო ნათელი მაგალითი იმისა, თუ როგორ გავლენას ახდენს წირის განტოლებაზე კოორდინატთა სისტემის არჩევა. თუ სიბრტყეზე დახაზულია რაიმე წრფე, მაშინ კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემისათვის მისი განტოლება იქნება

$$Ax+By+C=0. \qquad (2)$$

მაგრამ, თუ სისტემა ისეთია, რომ აბსცისათა ღერძი სწორედ ჩვენს წრფეს ემთხვევა, მაშინ ამ წრფის განტოლება იქნება

$$y=0. \qquad (3)$$

ცხადია, რომ (3) განტოლება უფრო მარტივია, ვიდრე (2).

ყოველივე ამას მივყავართ კოორდინატთა ახალი, უფრო მოხერხებული, სისტემის არჩევით წირის განტოლების გამარტივების საკითხამდე.

ეს საკითხი რომ გადავწყვიტოთ, ამისათვის საჭიროა წინასწარ შევისწავლოთ, თუ როგორ იცვლება ცალკეული წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა სისტემის შეცვლით.

აქ სწორედ ამ ამოცანას შევეხებით. ჯერ მას ამოვხსნით კოორდინატთა გარდაქმნის ორი კერძო სახისათვის, ხოლო შემდეგ ზოგადი შემთხვევისათვის.

2. სისტემის პარალელური გადატანა

ვთქვათ, სიბრტყეზე დახაზულია მართკუთხა კოორდინატთა ორი სისტემა, „ძველი“ Oxy სისტემა და „ახალი“ $O_1x_1y_1$ სისტემა; ამასთან, ახალი სისტემის ღერძები პარალელურია ძველი სისტემის სათანადო ღერძების*. უფრო მეტიც, ჩვენ ჩავთვლით რომ ღერძების მიმართულებაც თანხვედნილია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ახალი $O_1x_1y_1$ სისტემა მიღებულია ძველი სისტემისაგან პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი გ ა დ ა ტ ა ნ ი თ, რომლის დროსაც კოორდინატთა სათავე O გადატანილია $O_1(p, q)$ წერტილში. აქ p და q O_1 წერტილის კოორდინატებია

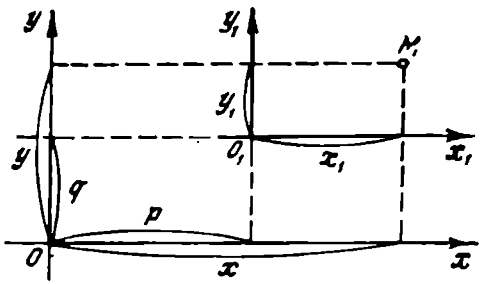
* ანუ აბსცისათა ახალი ღერძი პარალელურია აბსცისათა ძველი ღერძის, ხოლო ორდინატთა ახალი ღერძი—ორდინატთა ძველი ღერძის.

ძ ვ ე ლ ი სისტემის მიმართ. (კოორდინატთა ახალ სისტემაში, ცხადია O_1-ის კოორდინატები ნულის ტოლია). ყოველივე ეს გამოსახულია 73-ე ნახაზზე, სადაც გარკვეულობისათვის მიღებულია, რომ $p>0$, $q>0$.

აავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი M წერტილი და დავუშვათ, რომ კოორდინატთა ძველი სისტემის მიმართ, მისი კოორდინატებია (x, y), ხოლო ახალი სისტემის მიმართ — (x_1, y_1). 73-ე ნახაზიდან უშუალოდ ვხედავთ, რომ

$$\boxed{x=x_1+p, \qquad y=y_1+q.} \tag{4}$$

ეს ნიშნავს, რომ პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი გ ა დ ა ტ ა ნ ი ს დ რ ო ს წ ე რ ტ ი ლ ი ს ძ ვ ე ლ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ი უ დ რ ი ს ა ხ ა ლ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ს დ ა მ ა ტ ე ბ უ ლ ი ა ხ ა ლ ი ს ი ს ტ ე მ ი ს ს ა თ ა ვ ი ს ს ა თ ა ნ ა დ ო კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ი (ძ ვ ე ლ ი ს ი ს ტ ე მ ი ს მ ი მ ა რ თ).



ნახ. 73.

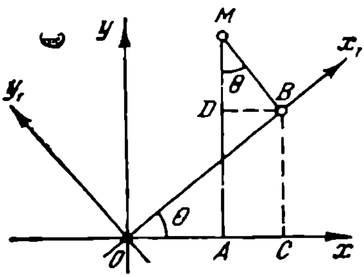
ერთის შეხედვით უფრო სასარგებლო იქნებოდა ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ ახალ კოორდინატებს ძველის საშუალებით, ე. ი. ფორმულები

$$x_1=x-p, \qquad y_1=y-q. \tag{5}$$

ვინაიდან „ძველი კოორდინატები ჩვენთვის ისედაც უკვე ცნობილია და საპოვნელია ახალი“. მაგრამ საქმე ასე არ არის და (4) ფორმულები უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე (5). პრაქტიკაში იშვიათად ხდება ახალი კოორდინატების განსაზღვრა ძველის მიხედვით. უფრო ხშირად წირის „ძველი“ განტოლებიდან გვიხდება „ახალი“ განტოლების შედგენა. ამისათვის კი საჭიროა ძველ განტოლებაში ძ ვ ე ლ ი კოორდინატების შეცვლა ა ხ ა ლ ი კოორდინატებით, ე. ი. უნდა ვისარგებლოთ არა (5) ფორმულებით, არამედ (4) ფორმულებით.

8. სისტემის მობრუნება

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც ახალი Ox_1y_1 სისტემა მიღებულია ძველი Oxy სისტემის რაიმე θ კუთხით მობრუნებით (როგორც ყოველთვის, კუთხეები ითვლება დადებითად, თუ ისინი ათვლილია საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით). ამგვარად, ორივე სისტემას აქვს საერთო სათავე O. ვთქვათ, რომ ისე როგორც ზემოთ, M წერტილის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ არის (x, y), ხოლო ახალი სისტემის მიმართ — (x_1, y_1).



ნახ. 74.

74-ე ნახაზიდან გვაქვს,* რომ $\angle AMB=\theta$, ვინაიდან ამ კუთხის გვერდები მართობულია Ox და Ox_1 ღერძებით შექმნილი კუთხის გვერდების. შემდეგ, იმავე ნახაზიდან გვაქვს

$$x=OA, \quad x_1=OB, \quad y=AM, \quad y_1=BM.$$

მაგრამ

$$OA=OC-AC=OC-DB.$$

OC და DB მონაკვეთები წარმოადგენენ OCB და MDB მართკუთხა სამკუთხედების კათეტებს, მასთან პირველი მათგანი θ კუთხის მიმდებარე გვერდია, ხოლო მეორე, მისი მოპირდაპირეა. მაშასადამე,

$$OC=OB\cdot\cos\theta=x_1\cos\theta, \qquad DB=BM\cdot\sin\theta=y_1\sin\theta.$$

ამგვარად,

$$x=OA=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta. \tag{6}$$

ანალოგიურად გვაქვს

$$AM=AD+DM=CB+DM.$$

ამასთანავე

$$CB=OB\sin\theta=x_1\sin\theta, \quad DM=BM\cos\theta=y_1\cos\theta,$$

საიდანაც

$$y=AM=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta. \tag{7}$$

---

* სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა θ კუთხე მახვილია. მიღებული ფორმულები მართებულია ყოველთვის.

(6) და (7) ფორმულებიდან საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta\\ y&=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta \end{aligned}} \tag{8}$$

ამ ფორმულების დასამახსოვრებლად შევნიშნავთ, რომ x-ის გამოსახულებაში გვაქვს „სრული უწესრიგობა" (სინუსის წინ კოსინუსი, ნიშანი მინუსი!), ხოლო y-ის გამოსახულებაში — სრული „წესრიგი" (კოსინუსის წინ სინუსი და ნიშანი პლუსი).

(8) ფორმულა გვაძლევს ძველი კოორდინატების გამოსახვას ახლის საშუალებით. უკვე ვიცით, რომ სწორედ ასეთი ფორმულებია საჭირო პრაქტიკაში. თუ მაინც მოვინდომებთ წერტილის ახალი კოორდინატების მისი ძველი კოორდინატების საშუალებით გამოსახვას, მაშინ უნდა მოვნახოთ x_1 და y_1 (8) განტოლებებიდან, თუ პირველ მათგანს გავამრავლებთ $\cos\theta$-ზე, ხოლო მეორეს $\sin\Theta$-ზე და შედეგებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$x_1=x\cos\theta+y\sin\theta. \tag{9 ა}$$

ანალოგიურად, თუ (8) განტოლებებიდან პირველს გავამრავლებთ $\sin\theta$-ზე, ხოლო მეორეს $\cos\Theta$-ზე და მეორე შედეგს გამოვაკლებთ პირველს, მივიღებთ

$$y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta. \tag{9 ბ}$$

(9) ფორმულების დამახსოვრება აუცილებელი არ არის. ხოლო (8) ფორმულები შემდეგში მნიშვნელოვან როლს შეასრულებენ, ამიტომ ისინი უნდა დავიმახსოვროთ.

4. კოორდინატთა გარდაქმნა ზოგად შემთხვევაში

ბოლოს განვიხილოთ კოორდინატთა გარდაქმნის ზოგადი შემთხვევა, როდესაც Oxy („ძველი") და $O_1x_1y_1$ სისტემებს არა აქვთ საერთო სათავე და ღერძების მიმართულებაც არ არის თანხვდენილი. ვთქვათ, ახალი სისტემის O_1 სათავის კოორდინატები (ძველის მიმართ) არის $(p,\ q)$, ხოლო O_1x_1 ღერძი ქმნის Ox ღერძთან θ კუთხეს (ნახ. 75).

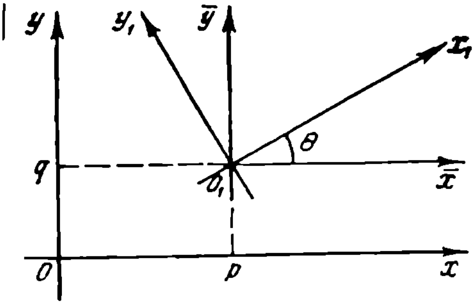
ეს ზოგადი შემთხვევა ადვილად დაიყვანება უკვე განხილულ შემთხვევებზე. ამისათვის შემოვიღოთ კიდევ ერთი „საშუალედო" კოორდინატთა სისტემა $O_1\bar{x}\,\bar{y}$, რომელსაც იგივე O_1 სათავე აქვს, ხოლო $O_1\bar{x}$ და $O_1\bar{y}$ ღერძები პარალელურია ძველი Ox და Oy ღერძების.

ცხადია, რომ ძველი Oxy სისტემიდან ახალ $O_1x_1y_1$ სისტემაზე გადასვლა შეიძლება ორი საფეხურის გავლით 1) პარალელური გადატანის საშუალებით გადავდივართ ძველი Oxy სისტემიდან საშუალედო $O_1\bar{x}\,\bar{y}$

სისტემაზე და 2) ღერძების θ კუთხით მობრუნებით გადავდივართ საშუალედო $O_1\bar{x}\bar{y}$ სისტემიდან ახალ $O_1x_1y_1$ სისტემაზე.

თუ M წერტილის კოორდინატებია Oxy, $O_1\bar{x}\bar{y}$ და $O_1x_1y_1$ სისტემებში შესაბამისად (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$, (x_1, y_1), მაშინ (4) ფორმულების თანახმად

$$x=\bar{x}+p, \qquad y=\bar{y}+q,$$



ნახ. 75.

ხოლო (8) ფორმულების თანახმად

$$\bar{x}=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta,$$
$$\bar{y}=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta.$$

საიდანაც საბოლოოდ

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta+p\\ y&=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta+q \end{aligned}} \qquad (10)$$

როდესაც $p=q=0$, ეს ფორმულები გვაძლევს (8) ფორმულებს, ხოლო თუ $\theta=0$, მაშინ — (4) ფორმულებს.

ალგებრული წირი და მისი რიგი

ზემოთ დამტკიცებული იყო, რომ ყოველ წრფეს შეესაბამება პირველი ხარისხის განტოლება. ეს მართებულია კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემისათვის. ამგვარად, კოორდინატთა სისტემის შეცვლის დროს წრფის განტოლებაც შეიცვლება, მაგრამ განტოლების ხარისხი არ იცვლება.

ზუსტად ასევე, როგორიც უნდა იყოს კოორდინატთა სისტემა, წრეწირის განტოლება მეორე ხარისხის იქნება.

განვაზოგადოთ ეს დაკვირვებანი.

განსაზღვრა. წირს ეწოდება ალგებრული, თუ კოორდინატთა რაიმე სისტემაში* მას შეესაბამება

$$Ax^my^n+Bx^iy^k+Cx^ry^s+\ldots=0 \qquad (11)$$

სახის განტოლება, სადაც A, B, C,... რაიმე (ნებისმიერი) ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო m, n, i, k, r, s,... მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია.

ალგებრული წირების მაგალითებს წარმოადგენს წრფე, ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა. ალგებრული წირია აგრეთვე წირი, რომლის განტოლებაა

$$7x^2y^3+2xy+y^2-10=0 \qquad (12)$$

ან

$$x^3+2xy^6-3=0. \qquad (13)$$

* გავახსენებთ, რომ ჯერჯერობით ჩვენ ვიცნობთ მხოლოდ დეკარტის კოორდინატთა სისტემას. ქვემოთ გავეცნობით პოლარულ კოორდინატთა სისტემას, მაგრამ ეს მსჯელობა ამ სისტემას არ ეხება.

თეორემა 1. თუ კოორდინატთა რაიმე Oxy სისტემაში წირის განტოლებას აქვს (11) სახე მაშინ ნებისმიერ სხვა $O_1x_1y_1$ სისტემაში მის განტოლებას იგივე სახე ექნება.

დამტკიცება. ნებისმიერი M წერტილის (x, y) კოორდინატები Oxy სისტემაში გამოისახება $O_1x_1y_1$ სისტემის კოორდინატებით (10) ფორმულების საშუალებით. თუ სიმარტივისათვის დავუშვებთ, რომ $\cos\theta=u$, $\sin\theta=v$, მივიღებთ

$$x=ux_1-vy_1+p, \qquad y=vx_1+uy_1+q.$$

თუ M წერტილი ძევს მოცემულ წირზე, მაშინ მისი კოორდინატებისათვის მართებულია (11) ტოლობა, რომელიც შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$A(ux_1-vy_1+p)^m(vx_1+uy_1+q)^n+B(ux_1-vy_1+p)^i\times$$
$$\times(vx_1+uy_1+q)^k+\ldots=0 \tag{14}$$

ფრჩხილების გახსნისა და მსგავს წევრთა შეერთების შემდეგ მივიღებთ

$$A_1x_1^{m_1}y_1^{n_1}+B_1x_1^{i_1}y_1^{k_1}+\ldots=0 \tag{15}$$

სადაც მხოლოდ A_1, B_1,... კოეფიციენტებისა და m_1, n_1, i_1, k_1,...ხარისხის მაჩვენებლების რიცხვითი მნიშვნელობები იქნება შეცვლილი. (15) განტოლება კი იგივე ტიპის იქნება, როგორიც (11) განტოლებაა. თეორემა დამტკიცებულია, ვინაიდან (15) განტოლება იმავე წირის განტოლებაა ახალ სისტემაში.

თეორემის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ წირის ალგებრულობა თვით წირის შინაგანი თვისებაა და არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

არაალგებრულ წირებს ეწოდებათ ტრანსცენდენტური წირები, ასეთებია მაგალითად, ჯერ კიდევ სკოლის კურსიდან ცნობილი წირები:

$$y=\sin x$$

სინუსოიდა, ან

$$y=\lg x$$

ლოგარითმული წირი.

შემოვიღოთ ალგებრული წირის რიგის ცნება. (11) განტოლებაში განვასხვავოთ

$$Ax^my^n, \qquad Bx^iy^k, \qquad Cx^ry^s,\ldots$$

შესაკრებები.

ამ შესაკრებებიდან თითოეულს აქვს გარკვეული ხარისხი, x-ის და y-ის ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამი.

მაგალითად Ax^my^n შესაკრების ხარისხი $m+n$ რიცხვის ტოლია. (11) განტოლების შესაკრებების ხარისხებს შორის უდიდესს ეწოდება ამ განტოლების ხარისხი. მაგალითად (12) განტოლების ხარისხია 5, ხოლო (13) განტოლების—7.

თეორემა 2. ალგებრული წირის განტოლების ხარისხი კოორდინატთა ყოველ სისტემაში ერთი და იგივეა.

ამ თეორემის დამტკიცება პირველი თეორემის დამტკიცების მსგავსია, ამიტომ არ შევჩერდებით მასზე. ამ თეორემის აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ ალგებრული წირის განტოლების ხარისხი სავსებით განისაზღვრება ამ წირის გეომეტრიული თვისებებით

და არ არის დამოკიდებული წირის მდებარეობაზე კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამ გარემოების გამო შეიძლება მოვახდინოთ ალგებრული წირების კლასიფიკაცია მათი განტოლებების ხარისხის მიხედვით. ეს თეორემა ამართლებს სახელწოდებას „n რიგის წირი", ანუ ისეთი წირი, რომელსაც შეესაბამება n ხარისხის განტოლება. მაგალითად, ელიფსი არის მეორე რიგის წირი, რადგან მას კოორდინატთა ყოველ სისტემაში შეესაბამება მეორე ხარისხის განტოლება.

§ 8. მეორე რიგის წირების განტოლებების გამარტივება

1. $y=ax^2+bx+c$ განტოლება

ამ პარაგრაფში შევისწავლით კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების გამოყენებას მეორე რიგის წირების განტოლების გასამარტივებლად. დავიწყოთ მაგალითით. ვთქვათ, საჭიროა

$$y=3x^2-12x+9 \tag{1}$$

განტოლების შესაბამისი წირის გამოკვლევა. ამ განტოლებაში დავაჯგუფოთ x-ის შემცველი წევრები ერთად:

$$y=3(x^2-4x)+9.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება შევავსოთ სრულ კვადრატამდე, მივიღებთ

$$y=3(x^2-4x+4)+9-12,$$

ანუ, რაც იგივეა

$$y+3=3(x-2)^2 \tag{2}$$

ეს კი არის გამოსავალი (1) განტოლება, ოღონდ წევრთა სხვანაირი დაჯგუფებით. დავუშვათ ახლა, რომ განხორციელებულია კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანა ისე, რომ სათავე გადატანილია $O_1(p, q)$ა წერტილში. მაშინ სიბრტყის ყველა წერტილის ძველი (x, y) კოორდინატები გამოისახება ახალი (x_1, y_1) კოორდინატების საშუალებით შემდეგი ფორმულებით

$$x=x_1+p, \qquad y=y_1+q.$$

მაშასადამე, ახალ კოორდინატებში ჩვენი წირის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$y_1+q+3=3(x_1+p-2)^2. \tag{3}$$

O_1 წერტილის არჩევა ჩვენს განკარგულებაშია. დავუშვათ, რომ

$$p=2, \quad q=-3.$$

p და q რიცხვების ასეთი არჩევით (3) განტოლება არა მარტო მიიღებს ძალიან მარტივ სახეს*

$$y_1=3x^2{}_1, \tag{4}$$

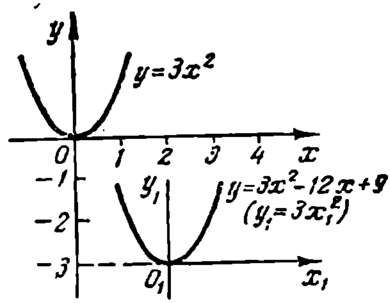
არამედ, რაც უფრო მნიშვნელოვანია, მიიღებს პარაბოლის განტოლების სახეს.

რადგანაც (1) და (4) განტოლებები ერთი და იგივე წირის განტოლებებია, ამიტომ, (1) განტოლება არის პარაბოლის განტოლება. ამ პარაბოლის წვერო ძევს $O_1(2,—3)$ წერტილში, ის სიმეტრიულია O_1y_1 წრფის და მდებარეობს O_1x_1 ღერძის ზემოთ. სასარგებლოა ამ პარაბოლის შედარება

$$y=3x^2 \tag{5}$$

პარაბოლასთან.

ცხადია, რომ ეს ახალი პარაბოლა ფორმისა და ზომის მიხედვით იგივეა, რაც (4) პარაბოლა, ოღონდ მისი წვერო ძევს არა ახალი სისტემის სათავეში, არამედ ძველი სისტემის სათავეში და მისი სიმეტრიის ღერძია არა ახალი სისტემის, არამედ ძველი სისტემის ორდინატთა ღერძი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (4) პარაბოლა მიღებულია (5) პარაბოლის პარალელური გადატანის შედეგად, იმ პირობით, რომ წვერო გადადის O_1 (2, —3) წერტილში. მაგრამ უკვე აღვნიშნეთ, რომ (4) პარაბოლა იგივეა, რაც (1) პარაბოლა (მკითხველი უნდა გაერკვეს იმაში, რომ (1) და (4) განტოლებები წარმოადგენენ ერთი და იგივე წირის განტოლებებს, მხოლოდ კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემაში). მაშასადამე, (1) განტოლება არის იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც მიიღება (5) პარაბოლის პარალელური გადატანით. ყოველივე ეს ნაჩვენებია** 76-ე ნახაზზე.



ნახ. 76.

ამ მაგალითის გარჩევის შემდეგ ადვილი გასაგებია

თეორემა 1. განტოლებას

$$\boxed{y=ax^2+bx+c} \tag{6}$$

* სწორედ ამაშია p და q მნიშვნელობების არჩევის იდეა. მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ p და q-ს სხვა მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ (4) განტოლებაზე უფრო რთულ განტოლებას.

** ნახაზზე (1) და (3) პარაბოლების ფორმა დამახინჯებულია.

ს ა დ ა ც $a \neq 0$ შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ა პ ა რ ა ბ ო ლ ა, რ ო მ ე ლ ი ც მ ი ი ღ ე ბ ა

$$y=ax^2 \tag{7}$$

პ ა რ ა ბ ო ლ ი ს ა გ ა ნ რ ა ღ ა ც პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი გ ა დ ა ტ ა ნ ი ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. წინა მაგალითის მსგავსად, გადავწეროთ (6) განტოლება შემდეგნაირად

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c,$$

ხოლო შემდეგ

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a},$$

ან, რაც იგივეა

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

თუ მეორე შესაკრებს გადავიტანთ მარცხნივ და სიმარტივისათვის დავუშვებთ, რომ

$$\frac{b}{2a}=-p, \quad c-\frac{b^2}{4a}=q,$$

(6) განტოლება საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$y-q=a(x-p)^2. \tag{8}$$

ახლა, თუ მოვახდენთ კოორდინატთა სისტემის პარალელურ გადატანას, ისე, რომ სათავეს გადავიტანთ $O_1(p,\ q)$ წერტილში, მაშინ უნდა დავუშვათ, რომ $x=x_1+p$, $y=y_1+q$. ამით (8) განტოლება გარდაიქმნება შემდეგ განტოლებად

$$y_1=ax_1^2. \tag{9}$$

ამგვარად, (6) განტოლებას შეესაბამება (კოორდინატთა ძველ სისტემაში) ის წირი, რომელიც ახალ სისტემაში შეესაბამება (9) განტოლებას. ეს უკანასკნელი კი ფორმითა და ზომითაც იგივეა, რაც (7) პარაბოლა.

საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (7) პარაბოლის (6) პარაბოლასთან შესათავსებლად საჭიროა, პირველი მათგანი პარალელურად გადავიტანოთ ისე, რომ წვერო მოხვდეს $O_1(p,\ q)$ წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1) $y=ax^2$ პარაბოლის ფორმა სავსებით განისაზღვრება a კოეფიციენტის მნიშვნელობით. რადგანაც $y=ax^2+bx+c$

პარაბოლას აქვს იგივე ფორმა, ამიტომ a, b და c კოეფიციენტებიდან $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის ფორმაზე გავლენას ახდენს მხოლოდ a კოეფიციენტი.

b და c (აგრეთვე a) კოეფიციენტებზე დამოკიდებულია მხოლოდ პარაბოლის წვეროს მდებარეობა.

2) პირველი თეორემის ანალოგიურად მტკიცდება, რომ განტოლებას

$$x=ay^2+by+c \qquad (a\neq 0)$$

შეესაბამება პარაბოლა, რომლის სიმეტრიის ღერძია Ox ღერძი.

2. $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ განტოლება

ჩვენი მთავარი ამოცანაა მეორე ხარისხის ზოგადი განტოლების

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{10}$$

გამოკვლევა.

ეს ამოცანა არსებითად მარტივდება იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $B=0$. ე. ი. როცა (10) განტოლებაში არ შედის xy ნამრავლი.

თეორემა 2. თუ

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \tag{11}$$

განტოლებას შეესაბამება რაიმე მრუდი, მაშინ ეს არის ან ელიფსი, ან პარაბოლა, ან ჰიპერბოლა.

სანამ თეორემას დავამტკიცებდეთ, გავარკვიოთ თუ რატომ იწყება მისი ფორმულირება სიტყვით „თუ". საქმე იმაშია, რომ (11) განტოლებას საზოგადოდ შეიძლება სიბრტყეზე არ შეესაბამებოდეს არავითარი გეომეტრიული ადგილი. ასეთია, მაგალითად განტოლება

$$5x^2+7y^2=-8 \tag{12}$$

შესაძლებელია აგრეთვე ის შემთხვევა, როცა (11) განტოლებას შეესაბამება არა წირი, არამედ—წერტილი. ასეთია თუნდაც განტოლება

$$5x^2+7y^2=0 \tag{13}$$

რომელსაც შეესაბამება კოორდინატთა სათავე. მაგრამ აღნიშნული შემთხვევებით არ ამოიწურება შესაძლო „უსიამოვნებები", რადგან, როცა ვამბობთ „მრუდი", ჩვენ ვგულისხმობთ რაღაც მოღუნულ წირს. მაგრამ განტოლებას

$$9x^2-4y^2=0 \tag{14}$$

შეესაბამება არა მოლუნული წირი, არამედ წ რ ფ ე თ ა წ ყ ვ ი ლ ი:

$$3x-2y=0 \quad \text{და} \quad 3x+2y=0$$

რადგან (14) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$(3x-2y)\ (3x+2y)=0.$$

ცხადია, რომ ეს ნამრავლი ნულის ტოლია; თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი უდრის ნულს. ანალოგიურად,

$$x^2=0 \tag{15}$$

განტოლებას შეესაბამება $x=0$ წრფე, ხოლო

$$x^2-3x+2=0 \tag{16}$$

განტოლებას $x=1$ და $x=2$ წრფეთა წყვილი. სწორედ მსგავსი შემთხვევების გამორიცხვა გვინდა, თეორემის ზემოთ მოცემული ფორმულირებით. ამგვარად, ტერმინი „მრუდი" აღნიშნავს „მოლუნულ წირს".

გადავიდეთ დამტკიცებაზე, ვიგულისხმოთ, რომ A და C კოეფიციენტებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლია. ორივე კოეფიციენტი ერთდროულად არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, რადგანაც მაშინ (11) განტოლება გადაიქცევა პირველი ხარისხის განტოლებად, რომელსაც შეესაბამება არა მრუდი, არამედ წრფე. გარკვეულობისათვის ვთქვათ, $C=0$, $A\neq 0$. მაშინ (11) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0.$$

ის შეიძლება * გადავწეროთ ასე

$$y=-\frac{A}{E}x^2-\frac{D}{E}\ -\frac{F}{E}.$$

ეს კი ზემოთ განხილული

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

ტიპის განტოლებაა და ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მას შეესაბამება პარაბოლა.

ზუსტად ასევე, როცა $A=0$, $C\neq 0$ (11) განტოლებას შეესაბამება პარაბოლა, ოღონდ მისი სიმეტრიის ღერძი იქნება პარალელური არა Oy ღერძის, როგორც განხილულ შემთხვევაში, არამედ Ox ღერძის.

---

* ცხადია, რომ $E\neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში (11) განტოლებას ექნებოდა $Ax^2+Dx+F=0$ სახე, მას კი შეესაბამება წრფეთა წყვილი (მსგავსად (16) განტოლებისა) ან ერთი წრფე (როგორც (15) შემთხვევაში), ან საზოგადოდ არ შეესაბამება არაფერი (მაგალითად $x^2+3=0$).

გადავიდეთ ახლა იმ შემთხვევაზე, როდესაც $A \neq 0$, და $C \neq 0$. ამ შემთხვევაში (11) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=$$

$$=\frac{D^2}{4A}+\frac{F^2}{4C}-F$$

ან, მოკლედ

$$A(x-p)^2+C(y-q)^2=M,$$

სადაც *

$$p=-\frac{D}{2A}, \qquad q=-\frac{E}{2C}, \qquad M=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

თუ მოვახდენთ კოორდინატთა სისტემის პარალელურ გადატანას, ისე, რომ სათავეს გადავიტანთ $O_1(p,\ q)$ წერტილში, მაშინ ახალ სისტემაში (11) წირის განტოლება იქნება

$$Ax_1^2+Cy_1^2=M. \tag{17}$$

გავარჩიოთ ორი შესაძლებლობა: 1) A და C კოეფიციენტებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი და 2) მათ აქვთ სხვადასხვა ნიშანი.

შევჩერდეთ ჯერ პირველ შემთხვევაზე. ვთქვათ, გარკვეულობისათვის**, რომ $A>0$ და $C>0$. მაშინ ცხადია, რომ $M>0$. მართლაც, თუ $M=0$, მაშინ (17) განტოლებას შეესაბამება არა მრუდი, არამედ — წერტილი, როგორც ეს (13) მაგალითში იყო. ხოლო $M<0$ უტოლობის შესრულებისას (17) განტოლებას არაფერი არ შეესაბამება, როგორც (12) მაგალითშია. ამიტომ დარჩა მხოლოდ ერთი შესაძლებლობა $M>0$.

(17) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{Ax_1^2}{M}+\frac{Cy_1^2}{M}=1 \tag{18}$$

ან, თუ დავუშვებთ, რომ $\frac{M}{A}=a^2$, $\frac{M}{C}=b^2$ (ეს დაშვება მართებულია, რადგანაც დაწერილი წილადები დადებითი სიდიდეებია) მივიღებთ:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

ეს არის ელიფსის განტოლება.

---

* მკითხველი ყურადღებით უნდა დააკვირდეს მსჯელობის მსვლელობას. p, q და M გამოსახულებათა დამახსოვრება არ არის საჭირო.

** წინააღმდეგ შემთხვევაში (17) განტოლების ორივე ნაწილს შევუცვლით ნიშანს.

განსახილველი დარჩა შემთხვევა, როცა A და C კოეფიციენტებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ. შეიძლება დავუშვათ, რომ $A>0$, $C<0$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში შევცვლით (17) განტოლების ორივე ნაწილის ნიშანს. როგორც ზემოთ, აქაც შეიძლება შევნიშნოთ, რომ $M\neq0$. მართლაც, ამ შემთხვევაში როდესაც $A>0$; $C<0$ და $M=0$, (17) განტოლება წარმოადგენს არა მრუდს, არამედ წრფეთა წყვილს, როგორც (14) მაგალითშია. ამგვარად, $M\neq0$. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $M>0$. თუ (17) განტოლებას გადავწერთ (18) სახით და დავუშვებთ, რომ $\frac{M}{A}=a^2$, $\frac{M}{C}=-b^2$. მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

ე. ი. მივიღებთ ჰიპერბოლის განტოლებას. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1) თეორემის დამტკიცების ხერხი, თუ ის გამოყენებულია კონკრეტულ განტოლებაზე, ფაქტიურად დაიყვანს მას კანონიკურ სახეზე.

2) თეორემის დამტკიცებიდან ჩანს, რომ მ რ უ დ ი*, რ ო მ ე ლ ი ც

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ა ა რ ი ს:

ა) პ ა რ ა ბ ო ლ ა, რ ო ც ა $AC=0$,
ბ) ე ლ ი ფ ს ი, რ ო ც ა $AC>0$,
გ) ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ა, რ ო ც ა $AC<0$.

მაგალითად**

$5x^2+7x-11y+6=0$ არის პარაბოლა,
$4x^2+5y^2+20x-30y+8=0$ არის ელიფსი,
$2x^2-3y^2+4x+12y-7=0$ არის ჰიპერბოლა.

3. მეორე ხარისხის ზოგადი განტოლება

დავუბრუნდეთ ახლა (10) განტოლებას.

თეორემა 3. თუ

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \tag{10}$$

* იგულისხმება, რომ (11) განტოლებას შეესაბამება მრუდი და არა წერტილი ან წრფეთა წყვილი. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ (11) განტოლებას დავიყვანთ კანონიკურ სახეზე.

** იმაში დასარწმუნებლად, რომ ამ მაგალითებში საქმე გვაქვს ხსენებულ წირებთან, საჭიროა დაწერილი განტოლებები დავიყვანოთ უმარტივეს სახეზე. ამ მარტივ ოპერაციას ვანდობთ მკითხველს.

განტოლებას შეესაბამება მრუდი, მაშინ ის არის ან ელიფსი, ან პარაბოლა, ან ჰიპერბოლა.

დამტკიცება. ეს თეორემა ჩვენს მიერ უკვე დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა $B=0$, ე. ი. როცა განტოლებაში არ შედის xy ნამრავლი.

ჩავთვალოთ, ახლა, რომ $B\neq 0$. თუ კოორდინატთა სისტემას მოვაბრუნებთ ნებისმიერი θ კუთხით, მაშინ (10) განტოლება გარდაიქმნება რაიმე ახალ განტოლებად. დავამტკიცოთ, რომ θ კუთხე შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ ახალ განტოლებაში არ შედიოდეს კოორდინატთა ნამრავლის შემცველი წევრი.

მართლაც, კოორდინატთა სისტემის მობრუნების შემდეგ ძველი (x, y) კოორდინატები გამოისახება ახალი კოორდინატებით შემდეგი ფორმულების საშუალებით

$$x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta; \qquad y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta.$$

თუ (10) განტოლებაში x და y-ს ამ გამოსახულებებით შევცვლით, მივიღებთ ჩვენი მრუდის განტოლებას ახალ კოორდინატებში

$$A(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)^2+B(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta+$$
$$+y_1\cos\theta)+C(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)^2+L=0, \tag{19}$$

სადაც L-ით აღნიშნულია დანარჩენი წევრების ერთობლიობა. ცხადია, რომ L არ შეიცავს მეორე ხარისხის წევრებს x_1 და y_1 კოორდინატების მიმართ. კერძოდ, ის არ შეიცავს x_1y_1 ნამრავლსაც.

ამოვწეროთ (19) განტოლების ყველა წევრი, რომელიც შეიცავს x_1y_1 ნამრავლს. სახელდობრ

$$[-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta]\,x_1y_1.$$

რადგან

$$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta, \qquad \cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,$$

აღნიშნული წევრების ჯგუფი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$[B\cos 2\theta-(A-C)\sin 2\theta]\,x_1y_1.$$

ჩვენი მიზანია ისეთი Θ კუთხის შერჩევა, რომ (19) განტოლებაში არ შედიოდეს x_1y_1 ნამრავლის შემცველი წევრები. ცხადია, რომ საკმარისია, Θ აკმაყოფილებდეს

$$B\cos 2\Theta-(A-C)\sin 2\Theta=0$$

პირობას, ან რაც იგივეა

$$(A-C)\sin 2\Theta=B\cos 2\Theta. \tag{20}$$

საბოლოოდ

$$\boxed{\operatorname{tg}2\theta=\frac{B}{A-C}} \tag{21}$$

რადგანაც ყოველი ნამდვილი რიცხვი არის რაიმე კუთხის ტანგენსი, ამიტომ ყოველთვის (ე. ი. ნებისმიერი A, B, C რიცხვებისათვის) არსებობს Θ კუთხე, რომელიც (21) თანადობას აკმაყოფილებს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ კოორდინატთა სისტემის მობრუნებით (10) განტოლება შეიძლება გარდაიქმნას ისეთ განტოლებად, რომელიც არ შეიცავს კოორდინატთა ნამრავლს. ე. ი. საკითხი დაიყვანება უკვე განხილულ მეორე თეორემაზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი: 1) თუ $A=C$, მაშინ (21) ტოლობა კარგავს აზრს. ამ შემთხვევაში უნდა მივმართოთ (20) ტოლობას, რომელიც მიიღებს სახეს

$$B\cos 2\Theta=0,$$

ანუ $\cos 2\Theta=0$ (ჩვენ ხომ ვთვლით, რომ $B\neq 0$), მაგრამ მაშინ $2\Theta=90°$, ე. ი. $\Theta=45°$. ამგვარად, რ ო ც ა $A=C$, მ ა შ ი ნ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა უ ნ დ ა მ ო ვ ა ბ რ უ ნ ო თ $45°$*-ით.

2) თუ თეორემის დამტკიცების ხერხს გამოვიყენებთ კონკრეტული განტოლებისათვის, მაშინ ეს განტოლება დაიყვანება კანონიკურ სახეზე. მაგრამ ამ მიზნისათვის არსებობს უფრო მოხერხებული მეთოდები. მათ არ განვიხილავთ.

3) ისე როგორც (10) განტოლებისათვის, აქაც ადგილი აქვს შემდეგ ნიშანს: მ რ უ დ ი**, რ ო მ ე ლ ი ც

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ა ა რ ი ს:

ა) პ ა რ ა ბ ო ლ ა, რ ო ც ა $4AC=B^2$,

ბ) ე ლ ი ფ ს ი, რ ო ც ა $4AC>B^2$,

გ) ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ა, რ ო ც ა $4AC<B^2$.

ამ დებულებას არ დავამტკიცებთ.

4. მაგალითები. ჰიპერბოლა, რომელიც მოცემულ ასიმპტოტებს მიეკუთვნება

1) განვიხილოთ განტოლება

$$8x^2-16x+3y^2+12y-4=0.$$

---

* $\cos 2\theta=0$ ტოლობას პირველი წრეწირის ფარგლებში აკმაყოფილებს ო რ ი კუთხე: $\theta=45°$ და $\theta=135°$. ამიტომ ნაცვლად $45°$-ით მობრუნებისა, შეიძლებოდა $135°$-იანი კუთხით მობრუნება.

** იხ. პირველი სქოლიო 94-ე გვერდზე.

გადავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$8(x^2-2x)+3(y^2+4y)=4.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები შევავსოთ სრულ კვადრატამდე

$$8(x^2-2x+1)+3(y^2+4y+4)=24.$$

აქედან

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{8}=1.$$

გადავიტანოთ კოორდინატთა სისტემა პარალელურად ისე, რომ სათავე მოთავსდეს $O_1(1,-2)$ წერტილში. ახალ სისტემაში ჩვენი წირის განტოლება იქნება

$$\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{8}=1.$$

ეს არის ელიფსი, რომლის ნახევარღერძებია $\sqrt{3}$ და $\sqrt{8}$. მისი ფოკუსები მოთავსებულია ორდინატთა (ახალ) ღერძზე.

2) განვიხილოთ უფრო რთული მაგალითი

$$4x^2+24xy+11y^2-24x-82y+15=0. \qquad (22)$$

დავიწყოთ იმ θ კუთხის პოვნით, რომლითაც სისტემის მობრუნება გამოიწვევს განტოლებაში კოორდინატთა ნამრავლის გაქრობას. (21) პირობის თანახმად

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{B}{A-C}.$$

ჩვენთვის $A=4$, $B=24$, $C=11$ და ამიტომ

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{24}{4-11}=-\frac{24}{7}. \qquad (23)$$

მაგრამ

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}.$$

მაშასადამე, $\operatorname{tg}\theta$ აკმაყოფილებს $\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=-\frac{24}{7}$ ან

$$12\operatorname{tg}^2\theta-7\operatorname{tg}\theta-12=0$$

განტოლებას.

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს $\operatorname{tg}\Theta=\frac{4}{3}$ და $\operatorname{tg}\Theta=-\frac{3}{4}$. ამ კუთხეებიდან შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერი. ავიღოთ ის Θ კუთხე, რომლისთვისაც $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$. როგორც ცნობილია

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}.$$

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში

$$\cos\theta=\pm\frac{3}{5} \tag{24}$$

და მაშინ

$$\sin\theta=\operatorname{tg}\theta\cos\theta=\pm\frac{4}{5}. \tag{25}$$

(24) და (25) ტოლობებში ნიშნის არჩევა ჩვენს განკარგულებაშია. მართლაც ნიშნის ნებისმიერად არჩევის შედეგად მივიღებთ $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$. ეს კი უზრუნველყოფს (23) ტოლობის შესრულებას. (24) ტოლობაში ავირჩიოთ „+“ ნიშანი. მაშინ

$$\cos\theta=\frac{3}{5},\ \sin\theta=\frac{4}{5}.$$

და სისტემის ამ θ კუთხით მობრუნების დროს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს ექნება შემდეგი სახე

$$x=\frac{3x_1-4y_1}{5},\qquad y=\frac{4x_1+3y_1}{5}. \tag{26}$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (22) განტოლებაში, მივიღებთ

$$4x_1^2-y_1^2-16x_1-6y_1+3=0. \tag{27}$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ახალი განტოლება არ შეიცავს $x_1\,y_1$ ნამრავლს. შემდგომ გარდაქმნებს გავაგრძელებთ ისე, როგორც წინა მაგალითში, სახელდობრ, (27) განტოლებას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$4(x_1^2-4x_1+4)-(y_1^2+6y_1+9)=4,$$

ან

$$\frac{(x_1-2)^2}{1}-\frac{(y_1+3)^2}{4}=1.$$

თუ მოვახდენთ სისტემის პარალელურ გადატანას ისე, რომ სათავე გადავიდეს $O_1(2,-3)$ წერტილში, ახალ ღერძებს აღვნიშნავთ O_1x_2 და

O_1y_2, მაშინ $x_1=x_2+2$, $y_1=y_2-3$ და $O_1x_2y_2$ სისტემაში წირის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{4}=1.$$

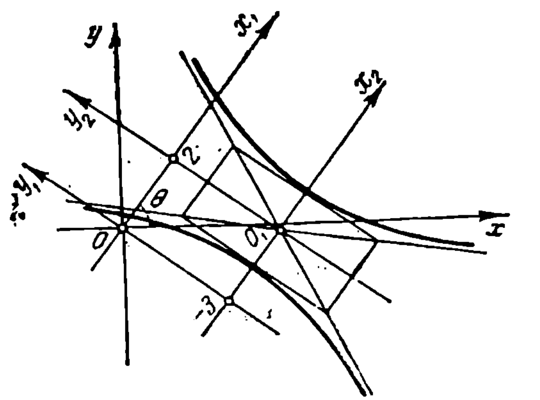
მაშასადამე, ჩვენი წირი არის ჰიპერბოლა, რომლის ნახევარღერძებია 1 და 2. მისი ასიმპტოტების განტოლებებია $y_2=\pm 2x_2$. ჰიპერბოლის სიმეტრიის ცენტრია O_1. Ox_1y_1 სისტემაში მისი კოორდინატებია $x_1=2$, $y_1=-3$. მაშასადამე. (26) ფორმულების თანახმად Oxy სისტემაში O_1 წერტილის კოორდინატები იქნება $x=3{,}6$ და $y=-0{,}2$.

იმისათვის, რომ ჩვენი ჰიპერბოლა გამოვსახოთ ნახაზზე, უპირველეს ყოვლისა მოვაბრუნოთ კოორდინატთა სისტემა Θ კუთხით, რომლისთვისაც $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$. ეს კუთხე მოთავსებულია $0°$ და $90°$-ს შორის და ადვილად შეიძლება აიგოს ტრიგონომეტრიიდან ცნობილი ხერხით. ამგვარად, ვღებულობთ Ox_1y_1 სისტემას, ვპოულობთ $O_1(2, -3)$ წერტილს და ვაგებთ $O_1x_2y_2$ სისტემას. 77-ე ნახაზზე გამოსახულია (22) ჰიპერბოლის მახასიათებელი მართკუთხედი, ასიმპტოტები და თვით ჰიპერბოლაც.

3) განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი, რომელსაც აქვს თეორიული მნიშვნელობა. ვთქვათ, საჭიროა

$$xy=a \tag{28}$$

წირის გამოკვლევა. რადგან ამ განტოლებაში $A=C(=0)$, ამიტომ 1) შენიშვნის თანახმად საჭიროა სისტემა მოვაბრუნოთ 45°-ით. θ კუთხის



ნახ. 77

ამ მნიშვნელობისათვის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები მიიღებს სახეს

$$x=(x_1-y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y=(x_1+y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (28) განტოლებაში მივიღებთ

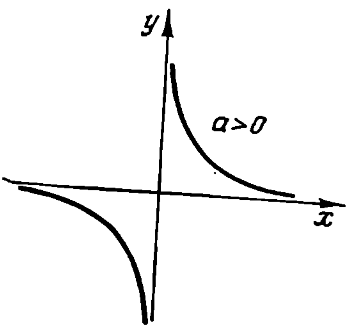
$$x_1^2-y_1^2=2a, \qquad (29)$$

ეს კი (როცა $a\neq0$) არის ტოლფერდა ჰიპერბოლა. მისი ასიმპტოტები ყოფენ სიმეტრიის ღერძებს შორის კუთხეს ტოლ ნაწილებად. მაგრამ (29) ჰიპერბოლის სიმეტრიის ღერძებს წარმოადგენენ კოორდინატთა (ახალი) ღერძები. მაშასადამე, ასიმპტოტები ძველი საკოორდინატო ღერძებია. ამგვარად დამტკიცებულია

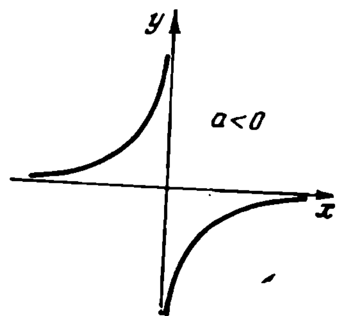
თეორემა 4. განტოლებას

$$\boxed{xy=a} \qquad (28)$$

სადაც $a\neq0$, შეესაბამება ტოლფერდა ჰიპერბოლა, რომელსაც ასიმპტოტებად აქვს საკოორდინატო ღერძები.



ნახ. 78.



ნახ. 79.

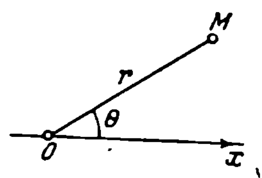
ადვილი გასაგებია, რომ როცა $a>0$ ჰიპერბოლა ძევს პირველ და მესამე, ხოლო როცა $a<0$ მეორე და მეოთხე საკოორდინატო კუთხეებში (ნახ. 78 და 79).

§ 9. პოლარული კოორდინატები

1. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა

აქამდე სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ვსარგებლობდით მისი მართკუთხა კოორდინატებით. ახლა განვიხილოთ სხვა მნიშვნელოვანი სისტემა — პოლარულ კოორდინატთა სისტემა.

ეს სისტემა შედგება რაღაც O (პოლუსი) წერტილისაგან და მასზე გამავალი Ox ღერძისაგან* (პოლარული ღერძი) აღნიშნული ობიექტების საშუალებით შეიძლება ნებისმიერი M წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა სიბრტყეზე. ამისათვის M წერტილი შევაერთოთ O პოლუსთან და ვიპოვოთ θ კუთხე, რომელსაც OM სხივი ადგენს პოლარული Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან და აგრეთვე OM სხივის r სიგრძე** (ნახ. 80). θ და r რიცხვებს ეწოდება M წერტილის არგუმენტი და რადიუს-ვექტორი შესაბამისად. მათი საერთო სახელწოდებაა—M წერტილის პოლარული კოორდინატები. იმ ფაქტს, რომ M წერტილის პოლარული კოორდინატებია r და θ, ჩვეულებრივად ასე წერენ $M(r, \theta)$. ეს ჩაწერა არც თუ ისე კარგია, რადგანაც გაურკვეველია, თუ რას აღნიშნავს. მაგალითად $M(3,2)$ ჩანაწერი: წერტილს, რომლის აბსცისა და ორდინატი არის შესაბამისად 3 და 2; თუ წერტილს, რომლისთვისაც ეს რიცხვები წარმოადგენენ რადიუს-ვექტორს და არგუმენტს. ამ წიგნის შემდეგ ნაწილში ეს გაუგებრობა თავიდან აცილებული იქნება სათანადო განმარტებებით, ხოლო ამ პარაგრაფში ჩვენ შემოვიღებთ აღნიშვნას $M\langle r, \theta\rangle$, თუმცა ასეთი აღნიშვნა საერთოდ მიღებული არ არის.



ნახ. 80.

პოლარულ კოორდინატთა სისტემას, მართკუთხა სისტემასთან შედარებით, აქვს ზოგიერთი ნაკლოვანება. პირველ რიგში, პოლუსის არგუმენტად შეიძლება იყოს აღებული ნებისმიერი რიცხვი. მაგალითად***, $A(0,1)$, $B(0,10)$, $C(0,42°)$ აღნიშვნებით მოცემულია ერთი და იგივე წერტილი — პოლუსი. სიბრტყის ნებისმიერ წერტილს აქვს არგუმენტების უსასრულო სიმრავლე, რადგანაც თუ წერტილის არგუმენტს დავუმატებთ $2\pi=360°$**** კუთხეს, ამით წერტილი არ იცვლება. ამიტომ

---

* ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელზედაც არჩეულია დადებითი მიმართულება. ამიტომ ზემოთაც ვახსენებდით Ox და Oy ღერძებს.

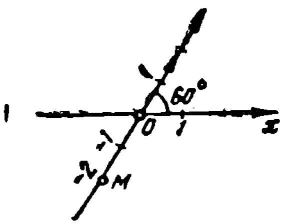
** რა თქმა უნდა, მხედველობაში გვაქვს OM მონაკვეთის სიგრძე, რადგან სხივი არის უსასრულო ნახევარწრფე.

*** $M\langle 2,3\rangle$ წერტილის არგუმენტი სამი რადიანის ტოლია, ხოლო $N\langle 2,3°\rangle$ წერტილის არგუმენტი ტოლია სამი გრადუსისა.

**** ცხადია, $\boxed{2\pi=360°}$ ტოლობა ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ „2π რადიანის კუთხე“ ტოლია „360° კუთხისა“. ამიტომ აღნიშნულ ტოლობაში მარცხენა ნაწილი არ შეიძლება ჩავთვალოთ განყენებულ რიცხვად (ისევე როგორც 1მ=100 სმ ტოლობა არ შეიძლება შევცვალოთ 1=100 სმ ტოლობით). $\boxed{\pi=180°}$ სახის ტოლობები გვხვდება იმიტომ, რომ როცა კუთხე მოცემულია რადიანებში, სახელწოდება „რადიანი“ გამოტოვებულია.

$M(5, 73°)$, $N(5, 443°)$, $P(5, 803°)$, $Q(5, -287°)$ ერთი და იგივე წერტილია.

ზოგჯერ განიხილავენ რადიუს-ვექტორის უარყოფით მნიშვნელობასაც. მაგალითად, $M(-2, 60°)$ გამოსახავს წერტილს (ნახ. 81), რომელიც მიიღება შემდეგი აგებების შედეგად: ჯერ მოაბრუნებენ პოლარულ ღერძს 60°-ით (როგორც ყოველთვის საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით), ამის შემდეგ ღერძზე (ახალი მდებარეობისათვის) უარყოფითი მიმართულებით გადაზომავენ 2 ერთეულის სიგრძის მონაკვეთს. მიღებული წერტილი იქნება $M(-2, 60°)$. იგივე წერტილი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით $M(2, 240°)$ სხვანაირად, იმავე წერტილის მოცემა შეიძლება, თუ ვისარგებლებთ რადიუს-ვექტორის დადებითი მნიშვნელობით. ანალოგიურად, თუ არგუმენტს მივუმატებთ 180°, ყოველთვის შეიძლება უარყოფითი რადიუს-ვექტორი გარდავქმნათ დადებით რადიუს-ვექტორად. ამის გამო, ჩვენ შევთანხმდეთ, რომ ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორი არაუარყოფითია, $r \geqslant 0$.



ნახ. 81.

2. მანძილი ორ წერტილს შორის

ამოცანა. ვიპოვოთ $M_1 < r_1, \Theta_1 >$ და $M_2 < r_2, \Theta_2 >$ წერტილებს შორის მანძილი d.

ამოხსნა: OM_1M_2 სამკუთხედიდან (ნახ. 82) კოსინუსების თეორემის თანახმად, გვაქვს

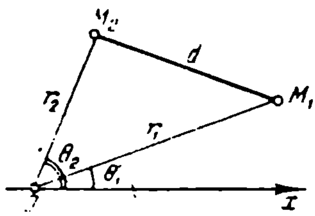
$$\boxed{d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}} \qquad (1)$$

3. კავშირი პოლარულ და მართკუთხა კოორდინატებს შორის

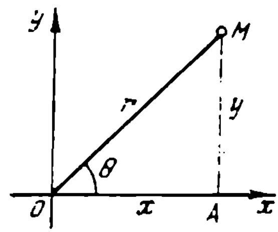
ვთქვათ, სიბრტყეზე აგებულია კოორდინატთა ორი სისტემა: პოლარული და მართკუთხა. ამასთან, პირველი სისტემის პოლუსი და პოლარული ღერძი ემთხვევა მეორე სისტემის სათავეს და აბსცისათა ღერძს. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი M წერტილი (ნახ. 83), და ვთქვათ, რომ მისი პოლარული და მართკუთხა კოორდინატებია შესაბამისად (r, θ) და (x, y). როგორც OMA სამკუთხედიდან ჩანს, მართებულია ფორმულები

$$\boxed{x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta} \qquad (2)$$

რომლებიც გამოსახავენ მართკუთხა კოორდინატებს პოლარული კოორდინატების საშუალებით. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (2) ფორმულები მართებულია M წერტილის არა მარტო იმ უმარტივესი მდებარეობისათვის, რომელიც 83-ე ნახაზზეა გამოსახული, არამედ მისი ნებისმიერი მდებარეობისათვისაც, ამაზე ჩვენ არ შევჩერდებით.



ნახ. 82.



ნახ. 83.

(2) ფორმულებიდან (ან უშუალოდ OMA სამკუთხედიდან) გამომდინარეობს, რომ

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

ამასთან, ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად, რადიკალის წინ ყოველთვის ავიღებთ „+" ნიშანს.

ბოლოს, (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}} \tag{4}$$

(4) ფორმულა არ გვაძლევს θ კუთხის x და y სიდიდეებით პოვნის შესაძლებლობას, რადგან ტანგენსის საშუალებით არ შეიძლება კუთხის ცალსახად განსაზღვრა. მაგრამ, თუ ვიცით x და y, მაშინ გვეცოდინება ის კვადრანტიც, რომელშიც ძევს θ კუთხე. ეს (4) ფორმულასთან ერთად გვაძლევს θ კუთხის 360°-მდე სიზუსტით განსაზღვრის საშუალებას.

4. არქიმედის სპირალი

ვიცით, რომ სიბრტყეზე სხვადასხვა წირი განისაზღვრება იმ განტოლების საშუალებით, რომელსაც აკმაყოფილებს წირის წერტილების მართკუთხა კოორდინატები. იგივე გარემოებას აქვს ადგილი პოლარული კოორდინატების შემთხვევაშიც. წრფის, ელიფსის, პარაბოლის, ჰიპერბოლის შესწავლა უფრო მოსახერხებელია მაშინ, როცა მათი განტოლებე-

ბი მოცემულია მართკუთხა კოორდინატებში. მაგრამ ზოგიერთი წირის შესასწავლად უმჯობესია მათი განტოლებები მოცემული იყოს პოლარულ კოორდინატებში. ასეთი წირია მაგალითად, ა რ ქ ი მ ე დ ი ს ს პ ი- რ ა ლ ი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ა რ ქ ი მ ე დ ი ს ს პ ი რ ა ლ ი ეწოდება წირს, რომელსაც აღწერს იმ სხივზე თანაბრად მოძრავი წერტილი, რომელიც თანაბრად ბრუნავს თავისი სათავის გარშემო.

ვიგულისხმებთ, რომ საწყის მომენტში M წერტილი, რომელიც აღწერს სპირალს, ძევს სხივის სათავეში.

გამოვიყვანოთ არქიმედის სპირალის განტოლება. ამისათვის, პირველ რიგში უნდა ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა. პოლუსად ავირჩიოთ სხივის სათავე, ხოლო პოლარული ღერძის დადებით მიმართულებად— ამ სხივის საწყისი მდებარეობა.

აღვნიშნოთ ω და v სიმბოლოებით შესაბამისად სხივის ბრუნვის სიჩქარე და სიჩქარე, რომლითაც M წერტილი მოძრაობს სხივზე. რადგანაც ორივე მოძრაობა თანაბარია, ამიტომ ω არის კუთხე, რომელზეც დროის ერთეულში მობრუნდება სხივი, ხოლო v—მანძილი, რომელსაც სპირალის აღწერისას დროის ერთეულში გაივლის M წერტილი სხივზე.

M წერტილის მდებარეობას განვსაზღვრავთ მისი პოლარული r და Θ კოორდინატებით. საწყის მომენტში $r=\Theta=0$, ხოლო $t>0$ მომენტში (ანუ იმ მომენტში, რომელიც ათვლის დაწყებიდან t დროის გავლის შემდეგ დგება)

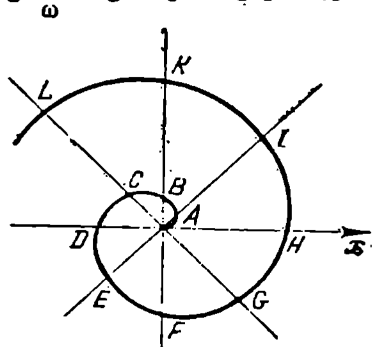
$$\Theta=\omega t, \qquad r=vt.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი t მომენტისათვის

$$\frac{r}{\theta}=\frac{v}{\omega}.$$

თუ $\frac{v}{\omega}$ (მუდმივ!) რიცხვს აღვნიშნავთ k-თი, მივიღებთ, რომ არქიმედის სპირალის განტოლებას აქვს სახე

$$\boxed{r=k\theta.}$$



ნახ. 84.

ამგვარად, როდესაც წერტილი მოძრაობს არქიმედის სპირალზე, მისი რადიუს-ვექტორი არგუმენტის პირდაპირპროპორციულად იცვლება. ეს გვაძლევს საშუალებას ავაგოთ არქიმედის სპირალი. 84-ე ნახაზზე აღნიშნულია სპირალის A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L წერ-

ტილები, რომელთა არგუმენტებია შესაბამისად 45°, 90°, 135°,... 495°. ცხადია,

$$OB=2\cdot OA,\quad OC=3\cdot OA,\quad OD=4\cdot OA,\dots,OL=11\cdot OA.$$

ჰიპერბოლური სპირალი

განსაზღვრა. ჰიპერბოლური სპირალი არის ისეთი წირი, რომლის წერტილების პოლარული კოორდინატები ერთმანეთის უკუპროპორციულად იცვლება.

სხვანაირად, ჰიპერბოლური სპირალი არის წირი, რომელიც შეესაბამება

$$\boxed{r=\frac{k}{\theta}} \qquad (5)$$

განტოლებას.

თუ აგების იმ ხერხს გამოვიყენებთ რომელიც არქიმედის სპირალის შემთხვევაში გვქონდა, ადვილად ავაგებთ ჰიპერბოლური სპირალის წერტილებს. ჰიპერბოლური სპირალი გამოსახულია 85-ე ნახაზზე. ადვილი გასაგებია, რომ M წერტილის θ არგუმენტის უსაზღვროდ ზრდასთან ერთად მისი r რადიუს-ვექტორი უსაზღვროდ უახლოვდება ნულს. ეს გვიჩვენებს, რომ ჰიპერბოლური სპირალი ბრუნავს პოლუსის გარშემო და უსასრულოდ უახლოვდება მას, თუმცა არასოდეს არ აღწევს პოლუსს.

ნახ. 85.

ამ გარემოების აღსანიშნავად ამბობენ, რომ პოლუსი არის ჰიპერბოლური სპირალის ასიმპტოტური წერტილი.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ ჰიპერბოლური სპირალის კიდევ ერთი თვისება, შემოვიღოთ აგრეთვე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომ-

ლის სათავე ემთხვევა პოლუსს, ხოლო აბსცისათა ღერძი — პოლარულ ღერძს. როგორც ვიცით, ნებისმიერი $M(r,\Theta)=M(x,y)$ წერტილისათვის

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta.$$

მაშასადამე, (5) სპირალზე მდებარე წერტილებისათვის

$$y=k\,\frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{6}$$

შემდეგ თავში ნაჩვენები იქნება, რომ როცა θ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ მიისწრაფვის 1-საკენ. მაგრამ თუ θ მიისწრაფვის ნულისაკენ მაშინ (5) ტოლობის თანახმად, $M(r,\Theta)$ წერტილი გადაინაცვლებს სპირალზე უსასრულოდ შორს (რადგან r უსაზღვროდ გაიზრდება). ამგვარად, (6) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ როცა M წერტილი ჰიპერბოლურ სპირალზე გადაინაცვლებს უსასრულობაში, მისი y ორდინატი მიისწრაფვის k რიცხვისაკენ. მაშასადამე, $y=k$ (5) სპირალის ასიმპტოტას წარმოადგენს.

6. ლემნისკატა

როგორც მე-5 ქვეპარაგრაფში იყო ნაჩვენები, ჰიპერბოლური სპირალის შესასწავლად საჭირო გახდა კოორდინატთა ორი სისტემის: პოლარული და მართკუთხა სისტემის, შემოღება. ასეთივე გარემოებაა კიდევ ერთი საინტერესო წირის—ლ ე მ ნ ი ს კ ა ტ ი ს გ ა ნ ხ ი ლ ვ ი ს ა ს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ლ ე მ ნ ი ს კ ა ტ ა ეწოდება ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთაგან ორ მოცემულ წერტილამდე (ფოკუსებამდე) მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა და ტოლია ფოკუსებს შორის მანძილის ნახევრის კვადრატისა.

გამოვიყვანოთ ლემნისკატის განტოლება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის, რომლის აბსცისათა ღერძი გადის ფოკუსებზე, ხოლო სათავე ყოფს ფოკუსებს შორის მანძილს შუაზე. თუ ლემნისკატის ფოკუსებს აღვნიშნავთ F და F' და დავუშვებთ, რომ $FF'=2c$, მაშინ აღნიშნული სისტემისათვის იქნება $F=F(c,0)$ და $F'=F'(-c,0)$. მაშასადამე, ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილისათვის

$$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

და ლემნისკატის განტოლება იქნება

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=c^2.$$

გავამარტივოთ ეს განტოლება, ავახარისხოთ კვადრატში

$$[(x-c)^2+y^2]\,[(x+c)^2+y^2]=c^4,$$

ან

$$[(x^2+y^2+c^2)-2cx][(x^2+y^2+c^2)+2cx]=c^4.$$

აქედან

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=c^4,$$

ან

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(x^2+y^2)+c^4-4c^2x^2=c^4.$$

თუ სიმარტივისათვის აღვნიშნავთ, რომ $2c^2=a^2$, მივიღებთ საბოლოოდ ლემნისკატის განტოლებას

$$\boxed{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} \tag{7}$$

ამგვარად, ეს არის მ ე ო თ ხ ე რ ი გ ი ს წირი. რადგანაც (7) განტოლება შეიცავს x და y მხოლოდ ლუწ ხარისხებში, ამიტომ წირი სიმეტრიულია ორივე საკოორდინატო ღერძის მიმართ. ლემნისკატის ფორმის გამოსარკვევად, საკმარისია გამოვარკვიოთ იმ ნაწილის ფორმა, რომელიც მოთავსებულია პირველ საკოორდინატო კუთხეში.

ამისათვის შემოვიღოთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემა, ისე რომ Ox ღერძი იყოს პოლარული ღერძი, ხოლო კოორდინატთა სათავე O დაემთხვეს პოლუსს. მაშინ

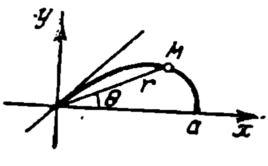
$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta,$$

და (7) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

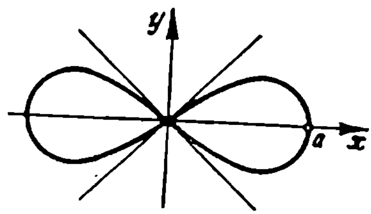
$$r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

ან*

$$\boxed{r^2=a^2\cos 2\theta} \qquad (8)$$



ნახ. 86.



ნახ. 87.

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ როცა $\theta=0$, მივიღებთ $r=a$, ხოლო, როცა θ იზრდება $\theta=0$-დან $\theta=\frac{\pi}{4}$-მდე, მაშინ r მცირდება $r=a$-დან $r=0$-მდე, ხოლო θ-ს იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც $\frac{\pi}{4}$ და $\frac{\pi}{2}$ შორის არიან მოთავსებული შეესაბამება r-ის წარმოსახვითი მნიშვნელობები. ე. ი. ლემნისკატას არ აქვს წერტილები, რომლებსაც θ**-ს აღნიშნული მნიშვნელობები შეესაბამება. მაშასადამე, ლემნისკატის ის ნაწილი, რომელიც პირველ საკოორდინატო კუთხეში მდებარეობს, ისეთია, როგორც ეს 86-ე ნახაზზეა გამოსახული, ხოლო მთელი ლემნისკატა მოცემულია 87-ე ნახაზზე.

---

* განტოლება შეიძლება შეიკვეცოს r^2-ზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში თითქოს დაიკარგებოდა $r=0$ წერტილი, მაგრამ ეს არ მოხდება, რადგან ეს წერტილი (8) წირზე ძევს $\left(\text{ის შეესაბამება } \theta=\frac{\pi}{4} \text{ მნიშვნელობას}\right)$.

** ვთქვათ, რომ $\theta\to\frac{\pi}{4}$ მაშინ $r\to 0$ ე. ი. $M(r, \theta)$ წერტილი უახლოვდება პოლუსს, რომელიც თვითონ ძევს ლემნისკატაზე. OM სხივი (რომელიც ადგენს პოლარულ ღერძთან θ კუთხეს) არის ლემნისკატის მ კ ვ ე თ ი. როცა $\theta\to\frac{\pi}{4}$, ეს მკვეთი მიისწრაფვის $y=x$ ბისექტრისისაკენ. მაშასადამე, ლემნისკატა კოორდინატთა სათავეში ე ხ ე ბ ა ამ ბისექტრისას.

II თავი

ცვლადი. ზღვარი. ფუნქცია

§ 1. ცვლადი და მისი ზღვარი

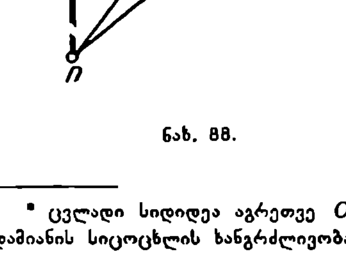
1. დანომრილი ცვლადი

ჯერ კიდევ შესავალში, აღვნიშნეთ, რომ უმაღლესი მათემატიკის შესწავლის საგანს შეადგენს ც ვ ლ ა დ ი სიდიდეები.

რა არის ცვლადი სიდიდე?

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ც ვ ლ ა დ ი ს ი დ ი დ ე ეწოდება ყოველ x სიდიდეს, რომელსაც შეუძლია სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობების მიღება.

მაგალითად, ოთახის ტემპერატურა შეიძლება გახდეს 15 (ცელსიუსის გრადუსი) ან 17 და ა. შ. ზუსტად ასევე ქვაბში ორთქლის წნევა შეიძლება ტოლი გახდეს 30 (ატმოსფერო), ან 31 და ა. შ. მაშასადამე, ეს ცვლადი სიდიდეებია.*



ნახ. 88.

მუდმივი სიდიდე შეიძლება ჩავთვალოთ ცვლადი სიდიდის კერძო შემთხვევად. მ უ დ მ ი ვ ი ი ს ე თ ი ც ვ ლ ა დ ი ა, რ ო მ ლ ი ს ყ ვ ე ლ ა მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ტ ო ლ ი ა.

ასეთი შეთანხმების მოხერხებულობა ჩანს თუნდაც შემდეგი მაგალითიდან: თუ M წერტილი მოძრაობს რაიმე K წირზე, მაშინ ამ წერტილი-

---

* ცვლადი სიდიდეა აგრეთვე Ox ღერძის ნებისმიერი x წერტილის აბსცისა. ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობა არის აგრეთვე ცვლადი სიდიდის ერთი მაგალითი.

დან უძრავ O წერტილამდე მანძილი x არის ცვლადი სიდიდე (ნახ. 88). მაგრამ თუ K წირი წრეწირია, რომლის ცენტრი O წერტილში ძევს, მაშინ x მუდმივი სიდიდეა.

ძალიან მნიშვნელოვანია ცვლადი სიდიდის ერთი სპეციალური სახე, ე. წ. დანომრილი ცვლადი.

უფრო რთული სახის ცვლადების შესწავლა შეიძლება დაყვანილ იქნას ზემოთ ხსენებულ ცვლადებზე.

x ცვლადს ეწოდება დ ა ნ ო მ რ ი ლ ი ცვლადი, თუ მისი ყველა მნიშვნელობა შეიძლება დაინომროს, მთელი დადებითი რიცხვების საშუალებით, ამასთან ის ღებულობს ამ მნიშვნელობებს ნომრების ზრდის მიხედვით. ამგვარად, დანომრილი ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიძლება მიმდევრობის სახით ჩაიწეროს:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \ldots$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) x: 3, 6, 9, 12, 16, 18, ...

ამ მაგალითში

$$x_1=3,\quad x_2=6,\quad x_3=9,\quad x_4=12, \ldots,\quad x_{100}=300$$

და საზოგადოდ

$$\boxed{x_n = 3n.}$$

2) y: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

აქ

$$y_1=2,\quad y_2=4,\quad y_3=8, \ldots, y_{10}=1024$$

და საზოგადოდ

$$\boxed{y_n=2^n.}$$

3) z: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},$

აქ

$$z_1=1,\quad z_5=\frac{1}{5},\quad z_{47}=\frac{1}{47},\quad z_{100}=\frac{1}{100}$$

და საზოგადოდ

$$\boxed{z_n=\frac{1}{n}.}$$

აქ მხოლოდ ცვლადის რამდენიმე მნიშვნელობა ჩავწერეთ x_1, x_2, x_3, ხოლო დანარჩენი მნიშვნელობები მრავალწერტილის ქვეშ ვიგულისხმეთ. ეს ცვლადები არ შეიძლება ჩავთვალოთ მოცემულად, რადგან არ არის ცნობილი მათი სტრუქტურა. მაგრამ, თუ დავწერთ ფორმულებს

$$x_n=3n,$$

ან

$$y_n=2^n,$$

ან

$$z_n=\frac{1}{n},$$

მაშინ ჩვენი ცვლადები ხდებიან მათემატიკური შესწავლის ობიექტები.

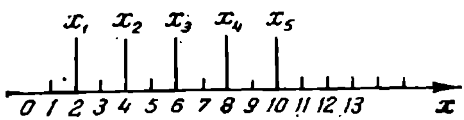
ამგვარად, *დანომრილი ცვლადი ითვლება მოცემულად, თუ მითითებულია წესი, რომლის მიხედვით ცვლადის მნიშვნელობის n ნომრის მიხედვით შეიძლება მოინახოს თვით x_n მნიშვნელობა.*

მაგალითად, x_n მოცემულია ფორმულით

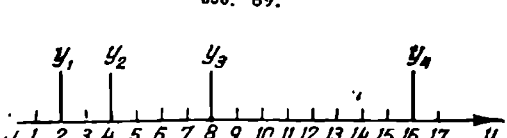
$$x_n=n^3-2.$$

ადვილად მივიღებთ, რომ $x_3=25$, $x_7=341$ და ა. შ.

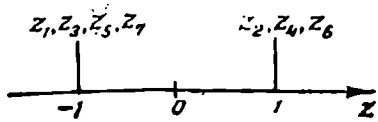
თუ ცვლადის მნიშვნელობებს გადავდებთ რიცხვით ღერძზე, მაშინ მიღებულ სურათს ეწოდება ცვლადის *გრაფიკული გამოსახულება*.



ნახ. 89.



ნახ. 90.



ნახ. 91

რასაკვირველია, რიცხვით ღერძზე შეიძლება გამოვსახოთ ცვლადის მხოლოდ რამდენიმე მნიშვნელობა, მაგრამ ხშირად ეს საკმარისია, ცვლადის ცვლილების თვალსაჩინოებისათვის.

მაგალითები.

1) $\boxed{x_n=2n}$, გრაფიკულად გამოსახულია 89-ე ნახაზზე;

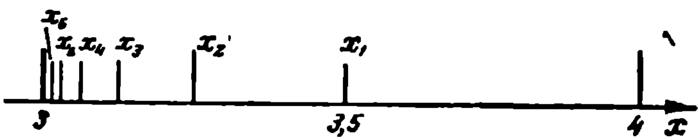
2) $\boxed{y_n=2^n,}$ გრაფიკულად გამოსახულია 90-ე ნახაზზე;

3) $\boxed{z_n=(-1)^n}$, გრაფიკულად გამოსახულია 91-ე ნახაზზე.

2. ზღვარი

განვიხილოთ

$$x_n=3+\frac{1}{2^n} \tag{1}$$



ნახ. 92.

ცვლადი. ის გრაფიკულად გამოსახულია 92-ე ნახაზზე. ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ დაწყებული x_6-დან ჩვენი ცვლადის მნიშვნელობები ძალიან ახლოს არიან მუდმივ რიცხვთან 3. დავახასიათოთ ეს უფრო ზუსტად. ავიღოთ რაიმე დადებითი, მუდმივი მცირე ε რიცხვი. ვთქვათ, მაგალითად რომ $\varepsilon=\frac{1}{100}$. მაშინ მუდმივი რიცხვები: $3-\frac{1}{100}=2,99$ და $3+\frac{1}{100}=3,01$ რიცხვ 3-თან საკმაოდ ახლოს იქნებიან, ერთი მარცხნივ, ხოლო მეორე მარჯვნივ. ამავე დროს ისინი ქმნიან ვიწრო შუალედს, რომლის ცენტრში მოთავსებულია რიცხვი 3. ადვილი გასაგებია, რომ ჩვენი x_n ცვლადის ყველა მნიშვნელობა, რომელთა ნომრები საკმაოდ დიდია, მოთავსდება მითითებულ შუალედში, ანუ დააკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობას

$$3-\frac{1}{100}<x_n<3+\frac{1}{100}. \tag{2}$$

რადგან ყოველი n-ისათვის $x_n>3$. ამიტომ (2) უტოლობის მისაღებად საკმარისია, რომ შესრულდეს პირობა

$$x_n<3+\frac{1}{100},$$

ე. ი.

$$3+\frac{1}{2^n}<3+\frac{1}{100}.$$

ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობისა

$$2^n>100,$$

ხოლო უკანასკნელი მართებულია, თუ $n\geqslant 7$.

ამგვარად, (2) უტოლობა სრულდება x_7, x_8, $x_9, \ldots$ მნიშვნელობებისათვის. ანალოგიურად, სხვა $\varepsilon>0$ რიცხვებისათვის უტოლობა

$$3-\varepsilon<x_n<3+\varepsilon$$

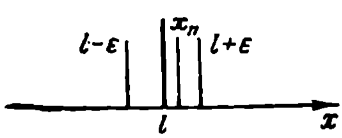
შესრულდება ყველა საკმაოდ დიდი n რიცხვისათვის. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ 3 **არის** x_n **ცვლადის ზღვარი**, ან x_n **მიისწრაფვის** 3-საკენ. ზღვრის ზუსტი განსაზღვრა ასეთია:

განსაზღვრა. მუდმივ l რიცხვს ეწოდება x_n ცვლადის **ზღვარი**, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები: როგორი მცირე, დადებითი, მუდმივი ε რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, x_n ცვლადის ყველა მნიშვნელობა, დაწყებული რომელიღაც მნიშვნელობიდან, დააკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას

$$\boxed{l-\varepsilon<x_n<l+\varepsilon} \qquad (3)$$

(3) უტოლობის გრაფიკულ გამოსახულებას წარმოადგენს 93-ე ნახაზი. ის ფაქტი, რომ x_n ცვლადის ზღვარი არის l რიცხვი ასე ჩაიწერება

$$\boxed{l=\lim x_n}$$



ნახ. 93

იმის ნაცვლად, რომ თქვან: — l არის x_n ცვლადის ზღვარი, ამბობენ: x_n მიისწრაფვის l-საკენ და წერენ

$$\boxed{x_n\to l}$$

8. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები

შევჩერდეთ ცვლადის ორ მნიშვნელოვან სახეზე **უსასრულოდ მცირე** და **უსასრულოდ დიდ** ცვლადებზე.

განსაზღვრა. ცვლად სიდიდეს, რომელსაც ზღვრად 0 აქვს, ეწოდება უსასრულოდ მცირე.

მაშასადამე, თუ $x_n \to 0$ (ან $\lim x_n = 0$), მაშინ x_n ცვლადი იქნება უსასრულოდ მცირე. აი, უსასრულოდ მცირე ცვლადის რამდენიმე მაგალითი:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^3}, \quad z_n = \frac{3}{2^n}, \quad u_n = \frac{1}{n!}.$$

შენიშვნა. ტერმინი „უსასრულოდ მცირე სიდიდე" არ არის მაინცდამაინც კარგი, რადგან ქმნის ისეთ შთაბეჭდილებას, თითქოს განსახილველი სიდიდე ძალიან მცირეა, მაშინ, როცა სინამდვილეში საკითხის არსი მდგომარეობს ამ სიდიდის ცვლილების ხასიათში. სცადეს შეეცვალათ ეს ტერმინი (მაგალითად მოსკოველი მათემატიკოსი ი. ჟეგალკინი გვთავაზობდა ტერმინს „უსასრულოდ კლებადი სიდიდე"), მაგრამ სხვა ტერმინი არ დაინერგა.

უსასრულოდ მცირე სიდიდის საინტერესო მაგალითია ცვლადი

$$x_n = \frac{10\,000\,000}{10^n}.$$

მისი საწყისი მნიშვნელობები საკმაოდ დიდი რიცხვებია, მაგალითად $x_1 = 1000000$, $x_2 = 100000$, მაგრამ ადვილი სანახავია, რომ ის მიისწრაფვის ნულისაკენ, და მაშასადამე, უსასრულოდ მცირეა. საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს შემდეგი სიდიდე

$$y_n = 0{,}00000000001.$$

ეს ძალიან მცირე სიდიდეა, მაგრამ უსასრულოდ მცირე მაინც არ არის, რადგან ის ნულისგან განსხვავებული მუდმივია, რომელიც არ მიისწრაფვის ნულისაკენ.

გადავიდეთ უსასრულოდ დიდ სიდიდეებზე. განვიხილოთ შემდეგი ცვლადი

$$x_n = n^2.$$

ავიღოთ რაიმე დიდი A რიცხვი, მაგალითად $A = 300$. რადგან $18^2 = 324$, ამიტომ ჩვენი ცვლადის მე-18 მნიშვნელობა უკვე მეტია, ვიდრე 300, ხოლო რადგან n ნომრის ზრდასთან ერთად x_n-ის მნიშვნელობა იზრდება, ამიტომ x_n-ის შემდგომი მნიშვნელობები მით უმეტეს დააკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას

$$x_n > 300.$$

შეიძლება ითქვას, რომ ჩვენი x_n ცვლადი აღემატება რიცხვს 300-ს. ასევე აღემატება ის $A = 1000$ რიცხვს, რადგან $x_{32} = 32^2 = 1024 > > 1000$, ხოლო x_n-ის შემდგომი მნიშვნელობები კიდევ უფრო მეტი იქნება.

საზოგადოდ, როგორი დიდი დადებითი მუდმივი A რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, ჩვენი ცვლადი მას აღემატება. სახელდობრ, როგორც კი n ნომერი გახდება $\sqrt{A}$-ზე მეტი, მაშინვე აღმოჩნდება, რომ

$$x_n = n^2 > A.$$

ასეთი ცვლადის დასახასიათებლად ამბობენ, რომ x_n მიისწრაფვის პლუს უსასრულობისაკენ, ან x_n ცვლადის ზღვარი არის პლუს უსასრულობა.

განსაზღვრა. თუ x_n ცვლადი ისეთია, რომ როგორი დიდი დადებითი მუდმივი A რიცხვიც უნდა ავიღოთ, x_n-ის საკმაოდ შორეული მნიშვნელობები A რიცხვზე მეტი აღმოჩნდება

$$\boxed{x_n > A}$$

მაშინ ამბობენ, რომ x_n მიისწრაფვის პლუს უსასრულობისაკენ, ანუ ზღვრად აქვს პლუს უსასრულობა, და წერენ

$$\boxed{x_n \to +\infty,} \quad \text{ან} \quad \boxed{\lim x_n = +\infty}$$

შენიშვნა. მკითხველმა უნდა მიაქციოს ყურადღება იმას, რომ წინადადებას „x_n მიისწრაფვის პლუს უსასრულობისაკენ“ აქვს არსებითი ნაკლი. სახელდობრ, მან შეიძლება შექმნას არასწორი წარმოდგენა, თითქოს x_n მიისწრაფვის რაიმე რიცხვისაკენ, მაშინ როდესაც x_n არ მიისწრაფვის არავითარი რიცხვისაკენ, არამედ იცვლება ისე, რომ ნებისმიერ დადებით დიდ რიცხვს აღემატება.

ასეთივე შენიშვნა უნდა გავაკეთოთ „x_n-ის ზღვარი არის პლუს უსასრულობა“ წინადადების შესახებაც, სინამდვილეში x_n-ს არავითარი ზღვარი არა აქვს.

ანალოგიურად განისაზღვრება ცვლადი, რომელიც მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისაკენ ($x_n \to -\infty$). სახელობრ, თუ x_n ცვლადი ისეთია, რომ ყოველი დადებითი მუდმივი A რიცხვისათვის, x_n-ის ყველა საკმაოდ შორეული მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ

$$x_n < -A$$

უტოლობას, მაშინ ამბობენ, რომ x_n მიისწრაფვის $-\infty$ და წერენ

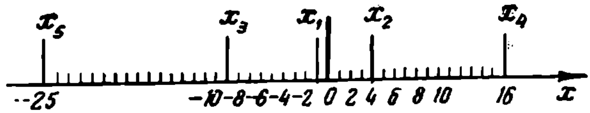
$$x_n \to -\infty \qquad \text{ან} \quad \lim x_n = -\infty.$$

გარდა ისეთი ცვლადებისა, რომლებიც მიისწრაფვიან გარკვეული ნიშნის უსასრულობისაკენ, განიხილავენ კიდევ ისეთ ცვლადებს, რომელთა

მოდული, ანუ აბსოლუტური მნიშვნელობა, უსაზღვროდ იზრდება. სახელდობრ, თუ x_n ცვლადი ისეთია, რომ ყოველი მუდმივი დადებითი A რიცხვისათვის x_n ცვლადის ყველა საკმაოდ შორეული მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ უტოლობას $|x_n|>A$, მაშინ ამბობენ, რომ $|x_n|$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ და წერენ

$$|x_n|\to\infty \quad \text{ან} \quad \lim|x_n|=\infty .$$

აქ ∞-ის წინ არავითარი ნიშანი არ იწერება.



ნახ. 94.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ თუ $x_n\to+\infty$, ან $x_n\to-\infty$, მაშინ $|x_n|\to\infty$, მაგრამ შეიძლება, რომ $|x_n|\to\infty$, მაშინ როდესაც x_n არ მიისწრაფვის არც $+\infty$ და არც $-\infty$.

ასეთია მაგალითად, $x_n=(-1)^n n^2$ ცვლადი.

(ნახ. 94, სადაც მოცემულია x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

მართლაც, x_n ღებულობს მნიშვნელობებს

$$-1,\ 4,\ -9,\ 16,\ -25,\ 36,\ldots$$

ცხადია, რომ x_n არ მიისწრაფვის არც $+\infty$ და არც $-\infty$-ისაკენ, მაგრამ, რადგან $|x_n|=n^2$, ამიტომ $|x_n|\to\infty$.

თუ $x_n\to\infty$, ან მისი მოდული $\to\infty$ მაშინ, x_n-ს ეწოდება უსასრულოდ დიდი სიდიდე.

ამ ტერმინის მიმართ შეიძლება ითქვას იგივე, რაც იყო ნათქვამი ტერმინის „უსასრულოდ მცირე სიდიდე“ მიმართ. სახელდობრ, ტერმინი „უსასრულოდ დიდი სიდიდე“ სრულიად არ ნიშნავს იმას, რომ თითქოს ის ძალიან დიდია, არამედ—იმას, რომ x_n არის ცვლადი, რომელიც უსაზღვროდ იზრდება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, უსასრულოდ დიდის არსი მდგომარეობს მისი ცვლილების ხასიათში.

მაგალითად,

$$x_n=10^{10^{10}}$$

არის კოლოსალური სიდიდე, მაგრამ ეს სიდიდე არის მუდმივი რიცხვი, რომელიც არ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. პირიქით, როგორც უკვე ვნახეთ, $x_n=n^2\to\infty$, თუმცა $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=9$ და ა. შ. ე. ი. მისი პირველი მნიშვნელობები საკმაოდ მცირე რიცხვებია.

უსასრულოდ დიდი სიდიდის მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს კუთხის ტანგენსი, როცა ეს კუთხე მიისწრაფვის 90°-ისაკენ. ტრიგონომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ 90° კუთხისათვის არ შეიძლება ტანგენსის ხაზის აგება, მაშასადამე $\operatorname{tg} 90^\circ$ არ არსებობს. მაგრამ თუ α_n არის ცვლადი კუთხე, ისეთი, რომ $\alpha_n \to 90^\circ$, და $\alpha_n < 90^\circ$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha_n \to +\infty$, ხოლო თუ $\alpha_n \to 90^\circ$, ისე რომ $\alpha_n > 90^\circ$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha_n \to -\infty$.

უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები ერთმანეთთან მჭიდროდ არიან დაკავშირებული. სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. ა) უსასრულოდ დიდი სიდიდის შებრუნებული სიდიდე არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ე. ი. თუ $x_n \to \infty$, მაშინ

$$\frac{1}{x_n} \to 0.$$

ბ) უსასრულოდ მცირე სიდიდის შებრუნებული სიდიდე არის უსასრულოდ დიდი სიდიდე, ე. ი. თუ $x_n \to 0$, მაშინ

$$\frac{1}{x_n} \to \infty.$$

ამ თეორემის მართებულობა თითქმის ცხადია. მართლაც, ვთქვათ, რომ $x_n \to +\infty$. ეს იმას ნიშნავს, რომ x_n გახდება მეტი 1000-ზე. მაშინ დადებითი წილადი $\frac{1}{x_n}$ გახდება ნაკლები $\frac{1}{1000}$-ზე. თავისი ცვლილების პროცესში x_n გახდება მეტი 1 000 000-ზე, მაშინ $\frac{1}{x_n}$ გახდება ნაკლები $\frac{1}{1000000}$-ზე და ა. შ. ამ გზით ჩვენ ვრწმუნდებით, რომ $\frac{1}{x_n}$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშასადამე, $\frac{1}{x_n}$ უსასრულოდ მცირეა. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ნაწილიც.

4. ცვლადი სიდიდეების ძირითადი თვისებები

გადავიდეთ ცვლადი სიდიდეების ძირითადი თვისებების შესწავლაზე.

I. მუდმივი სიდიდის (თუ მას განვიხილავთ როგორც ცვლადი სიდიდის კერძო შემთხვე-

ვას) *ზღვარი თვით ეს მუდმივია.* მართლაც, თუ ყოველი n -ისათვის

$$x_n = c,$$

მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ მუდმივისათვის შესრულდება უტოლობა

$$c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$$

დაწყებული n-ის პირველივე მნიშვნელობიდან, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$x_n \to c.$$

II. **ზღვრის ერთადერთობა.** *ცვლადი სიდიდე არ შეიძლება მიისწრაფოდეს ორი სხვადასხვა ზღვრისაკენ.*

მართლაც, ვთქვათ, $x_n \to a$ და $x_n \to b$, $(a \neq b)$, მაშინ თუ ავიღებთ რიცხვით ღერძზე a და b რიცხვებისათვის ორ ურთიერთარაგადამკვეთ შუალედს* (ნახ. 95), ჩვენ უნდა აღმოვაჩინოთ, რომ x_n ცვლადის შორეული

ნახ. 95.

მნიშვნელობები უნდა მოხვდნენ ერთდროულად ამ ორივე შუალედში, რაც შეუძლებელია, რადგან ეს შუალედები არ იკვეთება. მაშასადამე, *ცვლადს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ზღვარი.*

შენიშვნა. ეს თვისება ისე არ უნდა გავიგოთ, რომ თითქოს ყოველ ცვლადს აქვს ზღვარი.

მაგალითად, $x_n = (-1)^n$ ცვლადს ზღვარი არა აქვს.

III. **თეორემა შეკუმშული ცვლადის შესახებ.** *თუ ორი ცვლადი მიისწრაფვის ერთიდაიმავე ზღვრისაკენ, ხოლო მესამე ცვლადი მოთავსებულია ამ ორ ცვლადს შორის, მაშინ ეს მესამე ცვლადიც მიისწრაფვის იმავე ზღვრისაკენ.* თუ $x_n < y_n < z_n$, ამასთან $x_n \to l$ და $z_n \to l$, მაშინ $y_n \to l$.

---

* ჩვენ მხედველობაში გვაქვს ის შუალედები, რომელთა ცენტრი მოთავსებულია შესაბამისად a და b წერტილებში.

მართლაც, თუ ავიღებთ l-ის შემცველ მცირე შუალედს (რომლის ცენტრია l), მაშინ x_n და z_n ცვლადების შორეული მნიშვნელობები აუცილებლად მოხვდება ამ შუალედში, მაგრამ მაშინ y_n ცვლადის შესაბა მისი მნიშვნელობები (ე. ი. იმავე ნომრის მქონე მნიშვნელობები), მით უმეტეს აღმოჩნდება იმავე შუალედში.

დამტკიცებულ თეორემას, ზოგჯერ ხუმრობით „ორი მილიციელის პრინციპს" უწოდებენ*.

IV. ჯამის ზღვარი. თუ ორი შესაკრებიდან, თითოეულს აქვს ზღვარი, მაშინ მათ ჯამსაც აქვს ზღვარი, რომელიც ტოლია შესაკრებთა ზღვრების ჯამისა.

ვთქვათ, რომ $x_n \to a$ და $y_n \to b$, მაშინ $x_n + y_n \to a + b$.

მართლაც, თუ n საკმაოდ დიდია, მაშინ x_n თითქმის ტოლია a რიცხვისა, ხოლო y_n თითქმის ტოლია b-სი. მაგრამ მაშინ ცხადია, რომ $x_n + y_n$ თითქმის ტოლია $a+b$ ჯამისა.

$$x_n + y_n \approx a + b$$

მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე იქნება რაგინდ მაღალი, თუ x_n და y_n საკმაოდ ახლოს იქნება a და b რიცხვებთან, ეს კი ნიშნავს, რომ

$$x_n + y_n \to a + b.$$

ზოგჯერ ამ თვისებას მოკლედ ასე გამოთქვამენ: ორი ცვლადის ჯამის ზღვარი უდრის შესაკრებთა ზღვრების ჯამს. ეს ფორმულირება არც ისე კარგია, რადგან არ არის სავალდებულო, რომ შესაკრები ცვლადები მიისწრაფოდნენ გარკვეული ზღვრისაკენ. ამიტომ უმჯობესია დავიცვათ პირველი ფორმულირება.

V. ორი უსასრულოდ მცირის ჯამი არის უსასრულოდ მცირე, ე. ი. თუ $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, მაშინ $x_n + y_n \to 0$. ეს თვისება არის წინა თვისების პირდაპირი შედეგი.

VI. სხვაობის ზღვარი. თუ $x_n \to a$ და $y_n \to b$ მაშინ $x_n - y_n \to a - b$. ე. ი. ორი ცვლადის (რომელთაც აქვთ ზღვარი) სხვაობის ზღვარი ტოლია ამ ცვლადების ზღვრების სხვაობისა.

ამ თვისების მართებულება მტკიცდება ისეთივე მსჯელობით, როგორც ჯამის შემთხვევაში. თუ კერძოდ $a = b = 0$, მაშინ ვღებულობთ შემდეგ თვისებას:

VII. ორი უსასრულოდ მცირე სიდიდის სხვაობა არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე.

---

* რა თქმა უნდა, „მილიციელები" აქ x_n და z_n ცვლადებია.

VIII. ც ვ ლ ა დ ს ა დ ა მ ი ს ზ ღ ვ ა რ ს შ ო რ ი ს ს ხ ვ ა ო ბ ა ა რ ი ს უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ე ს ი დ ი დ ე.

მართლაც, ვთქვათ, რომ $x_n \to l$, მაშინ VI თვისების თანახმად $x_n - l \to l - l = 0$, ანუ

$$x_n - l \to 0,$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $x_n - l$ უსასრულოდ მცირეა.

მართებულია შებრუნებული წინადადებაც. სახელდობრ:

IX. თ უ x_n ც ვ ლ ა დ ს ა დ ა რ ა ი მ ე l მ უ დ მ ი ვ ს შ ო რ ი ს ს ხ ვ ა ო ბ ა უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ე ა, მ ა შ ი ნ l ა რ ი ს x_n ც ვ ლ ა დ ი ს ზ ღ ვ ა რ ი, ე. ი. $x_n \to l$. მართლაც, ვთქვათ, რომ $x_n - l = \alpha_n$, და $\alpha_n \to 0$, მაშინ $x_n = l + \alpha_n$. ამიტომ $x_n \to l + 0$, ე. ი. $x_n \to l$.

X. **ნამრავლის ზღვარი.** თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ო რ ი ც ვ ლ ა დ ი, დ ა ყ ო ვ ე ლ მ ა თ გ ა ნ ს ა ქ ვ ს ზ ღ ვ ა რ ი, მ ა შ ი ნ მ ა თ ნ ა მ რ ა ვ ლ ს ა ც ა ქ ვ ს ზ ღ ვ ა რ ი, რ ო მ ე ლ ი ც თ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ლ თ ა ზ ღ ვ რ ე ბ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $x_n \to a$ და $y_n \to b$, მაშინ $x_n y_n \to ab$. კერძოდ,

XI. ო რ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ე ა.

მართებულია აგრეთვე შემდეგი დებულება

XII **შეფარდების ზღვარი.** თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ო რ ი ც ვ ლ ა დ ი დ ა თ ი თ ო ე უ ლ მ ა თ გ ა ნ ს ა ქ ვ ს ზ ღ ვ ა რ ი, მ ა შ ი ნ მ ა თ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ს ა ც ა ქ ვ ს ზ ღ ვ ა რ ი, რ ო მ ე ლ ი ც უ დ რ ი ს მ ა თ ი ზ ღ ვ რ ე ბ ი ს შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ს, თ უ გ ა მ ყ ო ფ ი ს ზ ღ ვ ა რ ი გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი ა ნ უ ლ ი ს ა გ ა ნ.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $x_n \to a$, $y_n \to b$ და $b \neq 0$, მაშინ

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შემთხვევა, როცა $a = 0$ აქ გამორიცხული არ არის. მაგალითად, თუ $x_n \to 0$, $y_n \to 3$, მაშინ $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{0}{3} = 0$,

რაც შეეხება პირობას $b \neq 0$, ის რასაკვირველია, არსებითია. მართლაც, თუ $b = 0$, მაშინ დებულება კარგავს აზრს, რადგან, „წილადს"

$$\frac{a}{0}$$

აზრი არა აქვს. მართლაც $\frac{a}{b}$ სიმბოლო გამოსახავს ისეთ x რიცხვს, რომლის b-სთან ნამრავლი უდრის a-ს

$$bx=a$$

თუ $b=0$, მაშინ ყოველი x-ისათვის $bx=0$. მაშასადამე, თუ $a\neq 0$ (მაგალითად $a=12$), არ არსებობს ისეთი x რომლისთვისაც $0\cdot x=a$ (მაგალითად, $0\cdot x=12$). ხოლო თუ $a=0$, მაშინ ყოველი x-ისათვის $0\cdot x=a$ და ამ შემთხვევაშიც $\frac{a}{0}$ წილადი კვლავ არ არის ცალსახად განსაზღვრული.

ამიტომ საჭიროა ერთხელ და სამუდამოდ შევთანხმდეთ—**არასოდეს ნულზე არ გავყოთ**. ამ წესის დავიწყებამ შეიძლება მიგვიყვანოს უხეშ შეცდომებამდე. აი ერთი ასეთი მაგალითი: ვთქვათ, $a=1$, მაშინ $a^2-a^2=a^2-a^2$. თუ ამ ტოლობის პირველ ნაწილს დავშლით, როგორც კვადრატების სხვაობას, ხოლო მარჯვენა ნაწილში a-ს გავიტანთ ფრჩხილებს გარეთ, მივიღებთ

$$(a+a)(a-a)=a(a-a).$$

$(a-a)$-ზე შეკვეცის შედეგად ვღებულობთ $a+a=a$, ან $2a=a$. მაგრამ $a=1$, მაშასადამე, $2=1$.

ამ მცდარი შედეგის მიზეზი თითქოს უდანაშაულო ოპერაციაში, $(a-a)$-ზე შეკვეცაში, მდგომარეობს. სინამდვილეში $a-a=0$ და $(a-a)$-ზე შეკვეცა ნიშნავს ნულზე გაყოფას. ამიტომ მივედით მცდარ შედეგამდე.

ნათქვამთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ როცა $\frac{x_n}{y_n}$ შეფარდებას ვიხილავთ, წინასწარ ვგულისხმობთ, რომ y_n არ ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობებს, რადგან მაშინ ამ შეფარდებას აზრი არ ექნებოდა.

განვიხილოთ ახლა $\frac{x_n}{y_n}$ წილადის ჩვენს მიერ გამორიცხული შემთხვევა, როდესაც

$$x_n\to a, \qquad y_n\to 0.$$

იმისათვის, რომ ასეთი წილადების განხილვა შესაძლებელი გახდეს, ისე, როგორც ადრე, ვიგულისხმოთ, რომ y_n არ ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობებს. გარკვეული შედეგის მიღების მიზნით, დავუშვათ, რომ $a\neq 0$. მაგალითად ვთქვათ, რომ $a=3$, მაშინ n-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობებისათვის $\frac{x_n}{y_n}$ წილადის მრიცხველი x_n თითქმის ტოლი იქნება

3-ის, ხოლო y_n ძალიან ახლოს იქნება ნულთან (მაგრამ არ უდრის ნულს). ცხადია, რომ მაშინ წილადი ძალიან დიდი რიცხვი იქნება, რადგან მრიცხველი ბევრად მეტი იქნება მნიშვნელზე. ამ მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს შედეგი:

XIII. თ უ რ ა ი მ ე წ ი ლ ა დ ი ს მ რ ი ც ხ ვ ე ლ ი მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ი ს ნ უ ლ ი ს ა გ ა ნ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი ზ ღ ვ რ ი ს ა კ ე ნ, ხ ო ლ ო მ ი ს ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ი მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ი ს ნ უ ლ ი ს ა კ ე ნ, მ ა შ ი ნ თ ვ ი თ წ ი ლ ა დ ი მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ი ს უ ს ა ს რ უ ლ ო ბ ი ს ა კ ე ნ.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $x_n \to a (a \neq 0)$ და $y_n \to 0$, მაშინ

$$\frac{x_n}{y_n} \to \infty .$$

განუსაზღვრელი გამოსახულებები

გავაგრძელოთ $\frac{x_n}{y_n}$ წილადის შესწავლა, რომლის მრიცხველი x_n და მნიშვნელი y_n მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ:

$$x_n \to a, \qquad y_n \to b.$$

ჩვენ უკვე განვიხილეთ შემთხვევა, როცა $b \neq 0$ (მაშინ სულერთია $a \neq 0$, თუ $a=0$), აგრეთვე შემთხვევა, როცა $b=0$, მაგრამ $a \neq 0$. რჩება შემთხვევა, როცა $a=0$ და $b=0$. ერთის შეხედვით თითქოს არ ღირს ამ სპეციალური შემთხვევის დაწვრილებითი შესწავლა. მაგრამ ეს სინამდვილეში ასე არ არის, რადგან როგორც ჩვენ შემდეგ დავინახავთ, დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ოპერაცია „ფუნქციის გაწარმოება" დაიყვანება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდების ზღვრის პოვნაზე, რომელშიც $\Delta x \to 0$ და $\Delta y \to 0$. დავიწყოთ ზოგიერთი მაგალითის განხილვით.

1. თუ $x_n = \frac{1}{n}$ და $y_n = \frac{2n+1}{n^2}$, მაშინ $x_n \to 0$ და $y_n \to 0$, ხოლო $\frac{y_n}{x_n} = \frac{2n+1}{n^2} \cdot n = 2 + \frac{1}{n} \to 2$.

2. თუ $x_n = \frac{1}{n}$ და $y_n = \frac{1}{n^2}$, მაშინ $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, ხოლო $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \to \infty$.

3. თუ $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$, მაშინ $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, ხოლო $\frac{x_n}{y_n}=$ $=\frac{1}{n}\to 0$.

4. თუ $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ და $y_n=\frac{1}{n}$, მაშინ $x_n\to 0$; $y_n\to 0$, ხოლო $\frac{x_n}{y_n}=$ $=(-1)^n$, არავითარი რიცხვისაკენ არ მიისწრაფვის.

ვხედავთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $x_n\to 0$ და $y_n\to 0$, $\frac{x_n}{y_n}$ წილადი შეიძლება მიისწრაფოდეს სხვადასხვა ზღვრისაკენ, მასთან შეიძლება სრულებით არ ჰქონდეს ზღვარი. ამასთან დაკავშირებით მოვიყვანთ შემდეგ განსაზღვრას.

განსაზღვრა. წილადს, რომლის მრიცხველი და მნიშვნელი ცვლადი სიდიდეებია, რომლებიც მიისწრაფვიან ნულისაკენ, ეწოდება $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ასეთი წილადის ზღვრის პოვნას (ან ზღვრის არ არსებობის დადგენას) ეწოდება ამ განუსაზღვრელობის გახსნა.

შენიშვნა. გარდა $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობისა არსებობს კიდევ $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\ \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 სახის განუსაზღვრელობანი.

მაგალითად, $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა ეწოდება $\frac{x_n}{y_n}$ გამოსახულებას, სადაც x_n და y_n ისეთი ცვლადებია, რომ $x_n\to\infty$ და $y_n\to\infty$. ზუსტად ასევე 1^∞ არის $x_n^{y_n}$ გამოსახულება, სადაც x_n და y_n ცვლადებია, მასთან $x_n\to 1$, ხოლო $y_n\to\infty$.

6. ზოგიერთი ტიპის განუსაზღვრელობათა გახსნა

I. $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობანი, მოცემული ორი მრავალწევრის შეფარდების სახით.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-9x+11}{x^4+x^3-5x^2+x+2}.$$

ვიდრე დასმულ ამოცანას ამოვხსნიდეთ, მოკლედ შევჩერდეთ მის არსზე. ზემოთ ჩვენ ვამბობდით, რომ შევისწავლით დანომრილ ცვლადებს, ხოლო დანარჩენ ცვლადებს დავიყვანთ მათზე. დასმულ ამოცანაში ვთვლით რომ x გაირბენს რაიმე x_1, x_2, $x_3,\ldots$ მიმდევრო-

ბის მნიშვნელობებს, სადაც მიმდევრობა მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. თუ რომელ მიმდევრობას გაირბენს x, იქნება ეს $x_n = 2^n$, ან $x_n = 10^n$, ან $x_n = 2n+1$, ჩვენთვის სულ ერთია*. ასე, რომ ჩვენ არამც თუ არ ვწერთ ამ მიმდევრობას, არამედ არც ვწერთ $x_n \to \infty$ და ვიზღუდებით ჩანაწერით $x \to \infty$.**

გადავდივართ ამოცანის ამოხსნაზე, ამისათვის ჩვენი წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ x^4-ზე. მაშინ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x^2-9x+11}{x^4+x^3-5x^2+x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{9}{x^3}+\frac{11}{x^4}}{1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

ჩვენს მიერ გამოყენებულ ხერხს აქვს ზოგადი ხასიათი. სახელდობრ, რეკომენდებულია შემდეგი წესის დამახსოვრება.

წესი. იმისათვის, რომ გავხსნათ $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა, რომელიც მოცემულია ორი მრავალწევრის შეფარდების სახით, საჭიროა მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ მათში შემავალი x-ის უმაღლეს ხარისხზე.

მართლაც, ამ ოპერაციის შემდეგ ჩვენი შეფარდება გარდაიქმნება გამოსახულებად, რომელიც უკვე არ წარმოადგენს განუსაზღვრელობას, ასე,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+5x^2+2x+7}{4x^2+9x+11} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{11}{x^3}} = \infty,$$

---

* x_n-ის მნიშვნელობათა შორის არ უნდა იყოს მნიშვნელის ამონახსნები. მაგალითად $x_n = 1$. რადგან ასეთი x-სათვის მნიშვნელი $x^4+x^3-5x^2+x+2$ გადაიქცევა ნულად, წილადი დაკარგავს აზრს. იგივე ითქმის ყველა ანალოგიური მაგალითის შესახებ.

** რასაკვირველია, აქ ნათქვამი უნდა გავიგოთ მხოლოდ, როგორც მეთოდური ხერხი, რომელიც გვრთავს ნებას გამოვიყენოთ დანომრილი ცვლადისათვის განვითარებული თეორია. შეცდომა იქნება ვიფიქროთ, რომ სინამდვილეში არ არსებობს, გარდა დანომრილისა სხვა ცვლადები. დრო, უწყვეტად მოძრავი წერტილის მიერ გავლილი მანძილი, ღერძის ირგვლივ სხეულის ბრუნვის დროს მიღებული მობრუნების კუთხე, და სხვა, დაუნომრავი ცვლადის მაგალითებია.

რადგან უკანასკნელი წილადის მნიშვნელი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო მრიცხველი მიისწრაფვის ნულისაგან განსხვავებული ზღვრისაკენ. ანალოგიურად,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-13x+7}{3x^2+4x+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}}=\frac{5}{3}.$$

საზოგადოდ, როცა $A\neq 0$ და $L\neq 0$ იქნება

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+Nx^{m-2}+\ldots+R}=\begin{cases}\infty, & \text{თუ } n>m,\\ 0, & \text{თუ } n<m,\\ \frac{A}{L}, & \text{თუ } n=m.\end{cases}$$

II. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობანი, რომელიც მოცემულია ორი მრავალწევრის შეფარდების სახით.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^3-4}:$$

ისე როგორც ზემოთ, ვთვლით, რომ x გაირბენს რაიმე x_n მიმდევრობის მნიშვნელობებს, ამასთანავე $x_n\to 2$. ამოცანაში არაფერია მითითებული იმის შესახებ, თუ როგორია ეს მიმდევრობა, რადგან ეს სულ ერთია. x არ ღებულობს 2-ის* ტოლ მნიშვნელობას, რადგან თუ $x=2$, მაშინ $x^2-4=0$ და წილადი კარგავს აზრს.

მაგალითი უნდა ამოიხსნას ასე:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+8)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+8}{x+2}=$$

$$=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

მოყვანილი ამოხსნის შესახებ სასარგებლოა შევნიშნოთ შემდეგი: თუ წილადს

$$\frac{x^2+6x-16}{x^2-4} \qquad (*)$$

* ზუსტად ასევე $x\neq -2$

გადავწერთ შემდეგი სახით

$$\frac{(x+8)\,(x-2)}{(x+2)\,(x-2)}$$

ამით არ შევცვლით არც მის მრიცხველს, არც მნიშვნელს. ხოლო შემდეგი ჩანაწერი

$$\frac{x+8}{x+2}$$

არსებითად ცვლის მის მრიცხველსაც და მნიშვნელსაც. (x—2) გამოსახულებაზე შეკვეცამდე, მისი მრიცხველი და მნიშვნელი მიისწრაფოდა ნულისაკენ და წილადი წარმოადგენდა განუსაზღვრელობას. ამ „გამაჯანსაღებელი" შეკვეცის შემდეგ (შეკვეცა საესებით შესაძლებელია, რადგან უკვე შევნიშნეთ, რომ $x\neq 2$ და ამიტომ $x-2\neq 0$), უკვე არა გვაქვს საქმე განუსაზღვრელობასთან. ამავე დროს წილადის სიდიდე არ შეიცვალა და ამიტომ $\dfrac{x+8}{x+2}$ წილადის ზღვარი არის მოცემული წილადის ზღვრის ტოლი. ($x-2$) მამრავლს, რომელიც იწვევს (*) წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ნულისაკენ მისწრაფებას უწოდებენ „კრიტიკულ მამრავლს".

მოვიყვანოთ ამ ხერხის გამოყენების კიდევ ორი მაგალითი:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x-2)}{(x-3)\,(x^2+3x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2+3x+9}=\frac{1}{27}.$$

აქ კრიტიკული მამრავლია x—3.

ანალოგიურად,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x^4+x-18}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(x+7)}{(x-2)\,(x^3+2x^2+4x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+7}{x^3+2x^2+4x+9}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}.$$

წესი. იმისათვის, რომ გავხსნათ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა, რომელიც მოცემულია შემდეგი ფორმით

$$\lim_{x\to a}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\ldots+R},$$

საჭიროა, მრიცხველში და მნიშვნელში გამოვყოთ კრიტიკული მამრავლი $x-a$ და წილადი შევკვეცოთ მასზე.

შენიშვნა: 1) $x-a$ კრიტიკული მამრავლი აუცილებლად გამოიყოფა მრიცხველში და მნიშვნელში, რადგან $x=a$ არის ამ ორივე მრავალწევრის ამონახსენი, ამიტომ ბეზუს თეორემის შედეგის თანახმად ორივე მრავალწევრი იყოფა უნაშთოდ $x-a$ სხვაობაზე.

2) შესაძლებელია, რომ კრიტიკულ მამრავლზე შეკვეცა მოგვიხდეს რამდენჯერმე.

ყველა ზემომოყვანილ მაგალითში, ვშლიდით მრიცხველს და მნიშვნელს მამრავლებად ინტუიციის მიხედვით. თუ ასეთი დაშლა ძნელი აღმოჩნდება, მაშინ უბრალოდ უნდა გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი $x-a$ სხვაობაზე ალგებრის ჩვეულებრივი წესისამებრ. ზემო შენიშვნა უზრუნველყოფს უნაშთოდ გაყოფას.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1},$$

აქ თავიდანვე ჩანს, რომ

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

ხოლო მრიცხველის დაშლა მამრავლებად ძნელია, ამიტომ ვყოფთ მას (წინასწარ ცნობილ) კრიტიკულ $x+1$ მამრავლზე.

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+2x^3-x^2+5x+5 & x+1 \\
\underline{3x^4+3x^3} & \overline{3x^3-x^2+5} \\
-x^3-x^2+5x+5 & \\
\underline{-x^3-x^2} & \\
5x+5 & \\
\underline{5x+5} & \\
0 &
\end{array}$$

ამგვარად,

$$3x^4+2x^3-x^2+5x+5=(x+1)\,(3x^3-x^2+5) \quad \text{და}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^3-x^2+5}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}.$$

III. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა, რომელიც

მ ო ც ე მ უ ლ ი ა   ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი   გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ი თ. განხილული ტიპის მაგალითებში „კრიტიკული მამრავლის“ გამოყოფა დამყარებულია ბეზუს თეორემაზე

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+K \tag{4}$$

მთელი მრავალწევრის $x-a$ ორწევრზე გაყოფადობის შესახებ, სადაც a (4) მრავალწევრის ამონახსენია.

ირაციონალური გამოსახულებებისათვის ბეზუს თეორემის გამოყენება არ შეიძლება. მაგალითად, მიუხედავად იმისა, რომ

$$\sqrt{x^2+5}-3$$

გამოსახულება ნულის ტოლი ხდება, როცა $x=2$, მაგრამ ის $(x-2)$-ზე არ იყოფა*.

ამიტომ, $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გასახსნელად, რომელიც მოცემულია

$$\lim_{x\to a}\frac{M}{N}$$

სახით (სადაც M და N რაიმე ირაციონალური გამოსახულებებია, რომლებიც ნულის ტოლი ხდებიან, როცა $x=a$) უ შ უ ა ლ ო დ $(x-a)$-ზე შეკვეცის ხერხი არ გამოდგება. მაგრამ ზოგიერთი გარდაქმნის საშუალებით (ალგებრაში ცნობილი ხერხის — „მნიშვნელში ირაციონალობის მოსპობის“ გამოყენებით) შეიძლება დავიყვანოთ ეს შემთხვევა უკვე განხილულ შემთხვევამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, რომ $x\to 3$ (ე. ი. ისე როგორც წინა შემთხვევებში, x გაივლის x_1, x_2, x_3,.. მნიშვნელობათა გადანომრილ მიმდევრობას, რომლისთვისაც $x_n\to 3$) გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}.$$

(რადგან მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება, როცა $x=3$, ამიტომ x_n-ის მნიშვნელობათა შორის არ არის 3-ის ტ ო ლ ი მნიშვნელობა). შესასწავლი წილადი არ შეიცვლება, თუ მას გადავწერთ შემდეგი სახით

$$\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x+1}-2}. \tag{5}$$

* A-ს B-ზე გაყოფადობის ცნება (სადაც A და B x-ზეა დამოკიდებული) დადგენილია მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როცა A და B მრავალწევრებია. გამოთქმას „$\sin x$ იყოფა (ან არ იყოფა) $\sqrt{x}$-ზე“ აზრი არა აქვს.

ამგვარად, მრიცხველში გამოვყავით კრიტიკული მამრავლი $x-3$. იმისათვის, რომ გამოვყოთ ის მნიშვნელშიც, საჭიროა მნიშვნელი გავათავისუფლოთ ირაციონალობისაგან, ამისათვის გავამრავლოთ (5) წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი $\sqrt{x+1}+2$ ჯამზე, ე. ი. წილადი ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}.$$

ახლა წილადი შეიკვეცება $(x-3)$-ზე და მიიღებს სახეს

$$(x+3)(\sqrt{x+1}+2),$$

საიდანაც ცხადია*, რომ მისი ზღვარი, როცა $x\to 3$ არის 24.

აი კიდევ ასეთი ხასიათის ერთი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}.$$

იმისათვის, რომ მრიცხველი გადავაქციოთ მთელ რაციონალურ მრავალწევრად, უნდა გავამრავლოთ $\sqrt{x}+1$ ჯამზე, ხოლო წილადი, რომ არ შეიცვალოს, საჭიროა მნიშვნელიც გავამრავლოთ ამავე ჯამზე. მნიშვნელის მთელ მრავალწევრამდე დასაყვანად, უნდა გავიხსენოთ ფორმულა

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

და დავუშვათ, რომ

$$a=\sqrt[3]{5x^2+3},\qquad b=2.$$

ჩვენი მაგალითი ამოიხსნება ასე

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\left[(\sqrt[3]{5x^2+3})^2+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4\right]}{(\sqrt[3]{5x^2+3}-2)\left[(\sqrt[3]{5x^2+3})^2+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4\right](\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\frac{x-1}{5x^2-5}\cdot\frac{(\sqrt[3]{5x^2+3})^2+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4}{\sqrt{x}+1}.$$

აქ მეორე მამრავლი არ წარმოადგენს განუსაზღვრელობას (როცა $x\to 1$), არამედ ზღვრად $\frac{12}{2}=6$ აქვს. პირველი მამრავლი

$$\frac{x-1}{5x^2-5}.$$

---

* ვსარგებლობთ იმით, რომ $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$. საზოგადოდ $x\to l$, თანადობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt[k]{x}\to\sqrt[k]{l}$: „ფესვის ზღვარი უდრის ფესვს ზღვრიდან".

ასე გადაიწერება

$$\frac{1}{5(x+1)}$$

და მიისწრაფვის $\frac{1}{10}$-კენ. მაშასადამე, საბოლოოდ ჩვენთვის საინტერესო ზღვარი უდრის

$$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

ამგვარად, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ

წესი. იმისათვის, რომ გავხსნათ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა, რომელშიც მრიცხველი ან მნიშვნელი ირაციონალურია, საჭიროა გავათავისუფლოთ წილადი ირაციონალობისაგან.

ამ წესის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ კიდევ ორი მაგალითი:

1) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{8x}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+3-4)\left(\sqrt[3]{64x^2}+2\sqrt[3]{8x}+4\right)}{(8x-8)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{64x^2}+2\sqrt[3]{8x}+4\right)}{8(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)\left(\sqrt[3]{64x^2}+2\sqrt[3]{8x}+4\right)}{8\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2(4+4+4)}{8(2+2)}=\frac{3}{4}.$$

2) $$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{2x^3-8}-2}{\left(\sqrt{3x^2-3}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+1\right)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{2x^3-8}-2}{\sqrt{3x^2-3}-3}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt[3]{2x^3-8}-2\right)\left[\sqrt[3]{(2x^3-8)^2}+2\sqrt[3]{2x^3-8}+4\right]\left(\sqrt{3x^2-3}+3\right)}{\left(\sqrt{3x^2-3}-3\right)\left(\sqrt{3x^2-3}+3\right)\left[\sqrt[3]{(2x^3-8)^2}+2\sqrt[3]{2x^3-8}+4\right]}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to2}\frac{(2x^3-8-8)\left(\sqrt{3x^2-3}+3\right)}{(3x^2-3-9)\left[\sqrt[3]{(2x^3-8)^2}+2\sqrt[3]{2x^3-8}+4\right]}=$$

$$=\frac{6}{4\cdot12}\lim_{x\to2}\frac{2x^3-16}{3x^2-12}=\frac{1}{12}\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{1}{12}\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{4}=\frac{1}{4}.$$

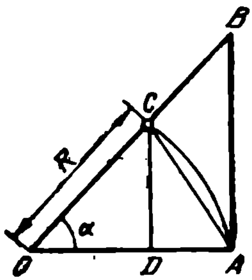
IV. $\frac{0}{0}$ ს ა ხ ი ს ტ რ ი გ ო ნ ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი გ ა ნ უ ს ა ზ ღ ვ რ ე ლ ო ბ ა ნ ი. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობათა გასახსნელად, რომლებიც შეიცავენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, აუცილებელია შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულის დადგენა

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1}$$

ამისათვის წინასწარ დავამტკიცოთ ლემა.

ლემა. თ უ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, მ ა შ ი ნ მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა უ ტ ო ლ ო ბ ა*

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha$$



ნახ. 96.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 96-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ ΔAOB ფართობი მეტია AOC სექტორის ფართობზე, რომელიც თავის მხრივ მეტია ΔAOC ფართობზე. რადგან ეს ფართობებია

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot AB,$$

$$S_{\text{სექტ } AOC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\cdot R,$$

$$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot CD,$$

ამიტომ შეიძლება დავწეროთ

$$\frac{1}{2}\,OA\cdot AB>\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\cdot R>\frac{1}{2}OA\cdot CD$$

ან**

$$\frac{1}{2}\,R\cdot R\operatorname{tg}\alpha>\frac{1}{2}\,\alpha R\cdot R>\frac{1}{2}\,R\cdot R\sin\alpha.$$

---

* აქ α არის განსახილველი კუთხის რ ა დ ი ა ნ უ ლ ი ზომა. გაგახსენებთ, რომ რადიანი ეწოდება კუთხეს, რომელიც როგორც ცენტრალური კუთხე ეყრდნობა რადიუსის ტოლ რკალს.

** $\overset{\frown}{AC}=R\alpha$ ტოლობა მართებულია სწორედ იმიტომ, რომ α არის განსახილველი კუთხის სიდიდე რადიანებით.

თუ ამ ორმაგი უტოლობის ყველა წევრს გავყოფთ $\frac{1}{2}R^2$-ზე, მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha,$$

რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

თეორემა. *მართებულია ფორმულა*

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1}$$

ე. ი. უსასრულოდ მცირე კუთხის სინუსის ამ კუთხის სიდიდესთან შეფარდების ზღვარი ტოლია ერთისა (იგულისხმება, რომ α კუთხე მოცემულია რადიანებში).

დამტკიცება. $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ წილადი არ იცვლება α-ს ნიშნის შეცვლით, ამიტომ შეიძლება დავუშვათ, რომ ცვლადი α კუთხე *დადებითია**, $\alpha>0$. რადგან თეორემის პირობის თანახმად $\alpha\to 0$, ამიტომ გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, აღმოჩნდება, რომ $\alpha<\frac{\pi}{2}$, მაშინ წინა ლემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha$$

ან

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>\alpha>\sin\alpha.$$

თუ გავყოფთ უტოლობის ყველა წევრს $\sin\alpha$-ზე (ეს სიდიდე დადებითია), მივიღებთ $\frac{1}{\cos\alpha}>\frac{\alpha}{\sin\alpha}>1$. თუ გადავალთ შებრუნებულ სიდიდეებზე, მივიღებთ

$$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1.$$

რადგან 96-ე ნახაზიდან** ცხადია, რომ $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$, ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ თეორემა შეკუმშული ცვლადის შესახებ (იხ. მე-4 ქვეპარაგრაფის III თვისება) და მივიღებთ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

* როცა $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ წილადს ვიხილავთ, ბუნებრივია ვთვლით, რომ $\alpha\neq 0$.

** უფრო ზოგადად, ნახაზიდან ადვილი დასანახია, რომ $\lim_{\alpha\to a}\cos\alpha=\cos a$, ე. „კოსინუსის ზღვარი ზღვრის კოსინუსის ტოლია". იგივე ეხება სინუსსაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\quad 3\right)=3.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 25\right]=25.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\quad\frac{1}{1+\cos x}\right]=\frac{1}{2}.$$

ეს მაგალითი შეიძლება კიდევ სხვანაირადაც ამოიხსნას: სახელდობრ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\quad\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

4) $$\lim_{x\to a}\frac{\cos a-\cos x}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a}\right)\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a}=\frac{\sin a}{2a}.$$

აქ ვისარგებლეთ იმით, რომ როცა $x\to a$, მაშინ $\frac{x-a}{2}\to 0$ და ამიტომ

$$\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\to 1.$$

საჭიროა გვახსოვდეს, რომ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ ტოლობა, მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha\to 0$, ხოლო თუ $\alpha\to a(a\neq 0)$, მაშინ

$$\lim_{\alpha\to a}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\sin a}{a}.$$

მაგალითად,

$$5)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}.$$

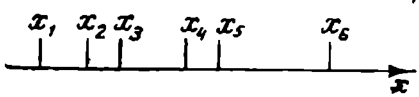
აღვნიშნოთ კიდევ ასეთი ცხადი ტოლობა

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

7. *e* რიცხვი

განსაზღვრა. x_n ცვლადს ეწოდება ზრდადი, თუ მისი ყოველი მნიშვნელობა ნაკლებია მის მომდევნო მნიშვნელობაზე, ე. ი.

$$x_1<x_2<x_3<\dots<x_n<x_{n+1}<\dots$$



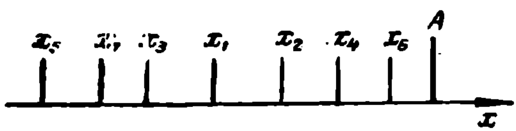
ნახ. 97.

ასეთი ცვლადის გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია 97-ე ნახაზზე.

განსაზღვრა. x_n ცვლადს ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ მისი ყველა მნიშვნელობა ერთსა და იმავე მუდმივ A რიცხვზე ნაკლებია

$$\boxed{x_n<A}$$

98-ე ნახაზზე მოცემულია ასეთი ცვლადის გამოსახულება.



ნახ. 98

თეორემა 1. თუ x_n ცვლადი ზრდადია და არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული, მაშინ $x_n\to\infty$.

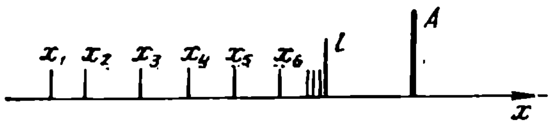
დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე დიდი მუდმივი დადებითი A რიცხვი, x_n-ის ყველა მნიშვნელობა A-ზე ნაკლები რომ აღმოჩნდეს,

მაშინ x_n შემოსაზღვრული იქნება ზემოდან, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. მაშასადამე, მოიძებნება x_n-ის ერთი მაინც მნიშვნელობა, რომელიც მეტი იქნება A-ზე. მაშინ x_n-ის ყველა მომდევნო მნიშვნელობა მით უმეტეს მეტი იქნება A-ზე, რადგან x_n პირობის თანახმად ზრდადი ცვლადია.

ამგვარად, x_n „გადააჭარბებს" ნებისმიერ A რიცხვს, ეს კი ნიშნავს, რომ $x_n \to +\infty$.

თეორემა 2. *თუ x_n ცვლადი ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, მაშინ ის მიისწრაფვის გარკვეული სასრული ზღვრისაკენ.*

ამ თეორემას მივიღებთ დაუმტკიცებლად. მისი მკაცრი დამტკიცება ძნელია, ხოლო თვალსაჩინოდ მისი შინაარსი შედარებით ადვილი გასაგებია. სახელდობრ, თუ 1) $x_1<x_2<x_3<\ldots$ და 2) $x_n<A\,(n=1,2,3,4,\ldots)$ მაშინ x_n წერტილი n-ის ზრდასთან ერთად გადაადგილდება ღერძზე მარცხნიდან მარჯვნივ, ისე რომ სულ მუდამ მუდმივი A წერტილის მარცხნივ რჩება (ნახ. 99).



ნახ. 99

ადვილი გასაგებია, რომ ამ პირობებში x_n მიისწრაფვის რაიმე l ზღვრისაკენ.

$$\boxed{x_n \to l}$$

ამასთანავე ცხადია, რომ

$$l \leqslant A.$$

1 და 2 თეორემების შედარებით ვხედავთ, რომ *ზრდად ცვლადს ყოველთვის აქვს სასრული ან უსასრულო* ზღვარი.*

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ *ზრდადი ცვლადის ყველა მნიშვნელობა ნაკლებია მის ზღვარზე.*

$$\boxed{x_n < \lim x_n}$$

* შეიძლება არ იყოს ზედმეტი იმის გახსენება, რომ „$+\infty$ ზღვრის არსებობა" სინამდვილეში ნიშნავს, რომ $x_n \to +\infty$, ასე რომ ბრჭყალებში მოთავსებული ფრაზა არ უნდა გავიგოთ ისე, თითქოს x_n მიისწრაფვის რაიმე *რიცხვისაკენ*.

მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ვ ა ნ ი მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ,

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

ადვილია შემოწმება იმისა, რომ

$$x_1=2,\ x_2=2{,}25,\ x_3=2{,}370,\ x_4=2{,}441,\ x_5=2{,}488.$$

ვხედავთ, რომ $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ x_n შემდგომშიც იზრდება. ამას გარდა, როცა $n\leqslant 5$, აღმოჩნდება, რომ $x_n<3$. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ეს უტოლობა მართებულია n-ის* ყველა დანარჩენი მნიშვნელობისათვის.

ამგვარად, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ცვლადი ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, ამიტომ მას აქვს სასრული ზღვარი, ე. ი. არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ცვლადის ზღვარს ეწოდება e რ ი ც ხ ვ ი.

ამგვარად,

$$\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \tag{6}$$

e არის ირაციონალური რიცხვი. შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ

$$e=2.718281828459\ldots$$

დაიმახსოვრეთ e -ს შემდეგი (მეტობით) მნიშვნელობა

$$\boxed{e=2{,}72}$$

---

* რომ გავიგოს აღნიშნული მოვლენის მიზეზი, დავუშვათ, $x_{n+1}-x_n=z_n$. მაშინ $z_1=0{,}25$; $z_2=0{,}12$, $z_3=0{,}071$, $z_4=0{,}047$ ე. ი. x_n-ის ნ ა ზ რ დ ე ბ ი თანდათან მცირდება. ამგვარად აღმოჩნდება, რომ ამ ნაზრდების უსაზღვრო დაგროვება (სწორედ ამაშია საქმე: მაგალითად x_1-დან x_{1000}-მდე გადასვლისას უნდა შეიკრიბოს 999 ნაზრდი $z_1+z_2+z_3+\ldots+z_{999}$) არ მიგვიყვანს 3-ზე მეტ რიცხვამდე (არც სამის ტოლამდე).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ (6) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ $\frac{1}{n}=z$, მაშინ ის მიიღებს ასეთ სახეს

$$\boxed{e=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}} \tag{7}$$

აღმოჩნდა, რომ (7) ფორმულა მართებულია არა მარტო მაშინ, როცა z გაირბენს $z_n=\frac{1}{n}$ მნიშვნელობათა მიმდევრობას, არამედ ნებისმიერი z-სათვის, რომელიც მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამგვარად, (7) ფორმულა არის (6) ფორმულის განზოგადებული სახე, ამიტომ საჭიროა მისი დამახსოვრებაც.

e რიცხვის ძირითადი დანიშნულება მათემატიკაში ის არის, რომ e არის ლოგარითმების სისტემის, ე. წ. „ნატურალური" ლოგარითმების, ფუძე. ამას გარდა, e რიცხვი ხშირად ხელსაყრელია 1^{∞} სახის განუსაზღვრელობის გახსნის დროს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}]^5=e^5.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}\right]^{\frac{4x}{3x+1}}=e^{\frac{4}{3}}.$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+7}\right)^{6x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-4}{x^2+3x+7}\right)^{\frac{x^2+3x+7}{2x-4}}\right]^{\frac{(2x-4)(6x+1)}{x^2+3x+7}}=e^{12}.$

8. ნატურალური ლოგარითმები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. რაიმე N რიცხვის ლოგარითმს, გამოთვლილს e-ს ფუძით, ეწოდება ამ რიცხვის ნ ა ტ უ რ ა ლ უ რ ი ლოგარითმი და აღინიშნება სიმბოლოთი $\ln N$. ამგვარად

$$\boxed{\ln N=\log_e N}$$

სხვანაირად, N რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი არის ხარისხის მაჩვენებელი, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ e, რომ მივიღოთ N

$$\boxed{e^{\ln N}=N}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1) $\ln e^3=3$. 2) $\ln\sqrt[4]{e^5}=\frac{5}{4}$, 3) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{1}{2}$.

ალბათ მკითხველს გაუკვირდება, რომ მათემატიკაში, გარდა საშუალო სკოლიდან ცნობილი ათობითი ლოგარითმებისა, განიხილება კიდევ სხვა ლოგარითმები, ამავე დროს იმდენად „მოუხერხებელი" ფუძით, როგორიცაა ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი რიცხვი

$$e=2,7182818\ldots$$

ამის შესახებ შეიძლება შევნიშნოთ, რომ რიცხვი 10 ლოგარითმის ფუძედ მოსახერხებელია მხოლოდ რ ი ც ხ ვ ი თ ი გამოთვლების ჩატარებისას და არავითარი თ ე ო რ ი უ ლ ი ღირებულება ასეთ ლოგარითმს არა აქვს, ხოლო როდესაც გვიხდება არა რიცხვითი, არამედ ა ს ო ი თ ი გამოსახულებების გამოყენება, მრავალი ფორმულა მარტივდება ნატურალური ლოგარითმების საშუალებით.

ეს გარემოება რასაკვირველია არ ამცირებს ათობითი ლოგარითმების მნიშვნელობას რიცხვითი გამოთვლების დროს.

კ ა ვ შ ი რ ი ნ ა ტ უ რ ა ლ უ რ ლ ო გ ა რ ი თ მ ე ბ ს ა დ ა ა თ ო ბ ი თ ლ ო გ ა რ ი თ მ ე ბ ს შ ო რ ი ს. როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ლოგარითმის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$N=e^{\ln N}.$$

თუ გავალოგარითმებთ ამ ტოლობას 10-ის ფუძით, მივიღებთ:

$$\lg N=\lg\left(e^{\ln N}\right).$$

აქედან

$$\lg N=\ln N\lg e.$$

მაგრამ $e=2,71828$. თუ ვისარგებლებთ ათობითი ლოგარითმების ცხრილებით, მივიღებთ

$$\lg e=0,43429.$$

მაშასადამე,

$$\boxed{\lg N=0,43429\ln N} \quad (8)$$

(8) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ N რიცხვის ათობითი ლოგარითმი, თუ ცნობილია მისი ნატურალური ლოგარითმი.

0,43429 რიცხვს ეწოდება ნატურალური ლოგარითმებიდან ათობით ლოგარითმებზე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს მ ო დ უ ლ ი.

(8) ტოლობა შეიძლება ასე გადაიწეროს

$$\ln N = \frac{\lg N}{0,43429}.$$

მაგრამ

$$\frac{1}{0,43429} = 2,302.$$

მაშასადამე,

$$\boxed{\ln N = 2,302 \lg N.} \qquad (9)$$

(9) ფორმულით გამოითვლება N რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი, როცა ცნობილია მისი ათობითი ლოგარითმი.

$\frac{1}{\lg e} = 2,302$ რიცხვს ეწოდება ათობითი ლოგარითმებიდან ნატურალურ ლოგარითმებზე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს მ ო დ უ ლ ი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. რადგან $\lg 2 = 0,30103$, ამიტომ

$$\ln 2 = \frac{0,30103}{0,43429} = 0,69302.$$

9. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები

$\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გასახსნელად ხელსაყრელია ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეების ცნების შემოღება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. α და α^* უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს ეწოდებათ ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი, თუ მათი შეფარდების ზღვარი 1-ის ტოლია

$$\boxed{\lim \frac{\alpha^*}{\alpha} = 1}$$

ორი უსასრულოდ მცირის ეკვივალენტურობას ჩვეულებრივ ასე აღნიშნავენ

$$\alpha \sim \alpha^*.$$

თეორემა (უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ე თ ა შ ე ც ვ ლ ი ს პ რ ი ნ-ც ი პ ი). $\frac{0}{0}$ ს ა ხ ი ს გ ა ნ უ ს ა ზ ღ ვ რ ე ლ ო ბ ი ს გ ა ხ ს ნ ი ს დ რ ო ს შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ა მ გ ა ნ უ ს ა ზ ღ ვ რ ე ლ ო ბ ი ს მ რ ი ც-ხ ვ ე ლ ი დ ა მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ი შ ე ვ ც ვ ა ლ ო თ მ ა თ ი ე ქ ვ ი-ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ე ე ბ ი თ.

სხვანაირად, თუ საჭიროა ორი α და β უსასრულოდ მცირის შეფარდების ზღვრის

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} \tag{10}$$

პოვნა, ხოლო ამის ნაცვლად ვიპოვით სხვა α^* და β^* უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვარს

$$\lim \frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

(სადაც $\alpha \sim \alpha^*$ და $\beta \sim \beta^*$) მივიღებთ სწორედ იმ ზღვარს, რომელიც გვაინტერესებდა თავიდან.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, რომ

$$\lim \frac{\alpha^*}{\beta^*} = l.$$

წარმოვადგინოთ $\frac{\alpha}{\beta}$ შეფარდება შემდეგი სახით

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \cdot \frac{\alpha^*}{\beta^*} \cdot \frac{\beta^*}{\beta}.$$

ახლა გამოვიყენოთ ზღვრის თვისება, რომ ნამრავლის ზღვარი უდრის თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლს და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha^*} = 1 \quad \text{და} \quad \lim \frac{\beta^*}{\beta} = 1.$$

მივიღებთ

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \cdot \frac{\alpha^*}{\beta^*} \cdot \frac{\beta^*}{\beta}\right) = \left(\lim \frac{\alpha}{\alpha^*}\right)\left(\lim \frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)\left(\lim \frac{\beta^*}{\beta}\right) =$$

$$= 1 \cdot l \cdot 1 = l.$$

ამგვარად,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = l.$$

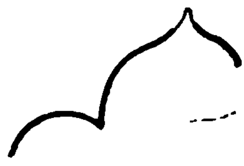
თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. რადგან

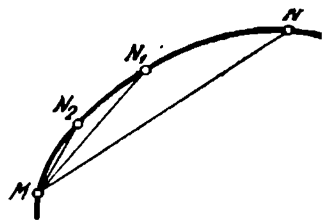
$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

ამიტომ უსასრულოდ მცირე არგუმენტის სინუსი თვით ამ არგუმენტის ეკვივალენტურია (უფრო ზუსტად ამ არგუმენტის სიდიდისა რადიანებში). ამიტომ, მაგალითად

$$\lim_{x\to3}\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}.$$



ნახ. 100.



ნახ. 101.

უკანასკნელი ზღვრის პოვნა ადვილია, რადგან

$$\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\frac{x+3}{x-1}\to3.$$

მოვიყვანოთ ეკვივალენტურ უსასრულოდ მცირეთა ერთი მაგალითი, რომელიც შემდგომში გამოგვადგება მრუდების შესწავლის დროს.

განვიხილოთ რაიმე გლუვი* უწყვეტი წირი (ნახ. 101). ავიღოთ მასზე ორი M და N წერტილი და შევადგინოთ $\overset{\frown}{MN}$ რკალისა და $\overline{MN}$ ქორდის შეფარდება, რადგან რკალი ქორდაზე გრძელია, ამიტომ ეს შეფარდება ერთზე მეტია. ჩვენს ნახაზზე მაგალითად გვაქვს

$$\frac{\overset{\frown}{MN}}{MN}=1,2.$$

* ასეთი წირის ზუსტი განსაზღვრა მოყვანილი იქნება უფრო გვიან (IV თ. §3,5) ჯერ-ჯერობით დავკმაყოფილდეთ თვალსაჩინო წარმოდგენით. გლუვი წირი — ეს არის წირი „გარდატეხის წერტილების“ (ნახ. 100) გარეშე.

მაგრამ, თუ N უახლოვდება M-ს და N-ის N_1 მდებარეობისათვის ხელახლა გამოვთვლით რკალისა და ქორდის შეფარდებას მივიღებთ, რომ

$$\frac{\breve{MN_1}}{\overline{MN_1}}=1,1$$

ე. ი. აღნიშნული შეფარდება აღმოჩნდება უფრო ახლოს ერთთან.

ზუსტად ასევე

$$\frac{\breve{MN_2}}{\overline{MN_2}}=1,01$$

მიახლოებით.

ამგვარად, ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ როცა N უსაზღვროდ უახლოვდება M-ს, ჩვენთვის საინტერესო შეფარდება მიისწრაფვის 1-საკენ.

$$\boxed{\lim_{N\to M}\frac{\breve{MN}}{\overline{MN}}=1}.$$

ე. ი. გლუვი წირის უსასრულოდ მცირე რკალი თავისი ქორდის ეკვივალენტურია.

10. სამი შესანიშნავი ზღვარი

დავამტკიცოთ სამი მნიშვნელოვანი ფორმულა, რომლებიც შემდგომში გამოგვადგება.

თეორემა 1. მართებულია ფორმულა

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1}.$$

დამტკიცება. თუ გავიხსენებთ, რომ (7) ფორმულის თანახმად $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ ცვლადი მიისწრაფვის e რიცხვისაკენ, როცა $z\to 0$, გვექნება*, რომ როცა $z\to 0$

$$\frac{\ln(1+z)}{z}=\ln\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]\to\ln e=1,$$

რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

---

* ვსარგებლობთ იმით, რომ $\lim_{x\to a}(\ln x)=\ln a$: „ლოგარითმის ზღვარი ტოლია ზღვრის ლოგარითმისა".

დამტკიცებული ფორმულა ნიშნავს, რომ თუ z უსასრულოდ მცირეა, მაშინ z და $\ln(1+z)$ ეკვივალენტური სიდიდეებია:

$$z \sim \ln(1+z).$$

ამიტომ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნის დროს, თუ მრიცხველია $\ln(1+z)$ უსასრულოდ მცირე (სადაც $z \to 0$), მაშინ შეგვიძლია ეს უსასრულოდ მცირე შევცვალოთ z-ით.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2-7x+11)}{x-2}. \tag{11}$$

როცა $x \to 2$, მაშინ $x^2-7x+11 \to 1$. მაშასადამე, $x^2-7x+11$ განსხვავდება 1-ისაგან უსასრულოდ მცირით. მართლაც, თუ მას ასე ჩავწერთ

$$x^2-7x+11=1+(x^2-7x+10)$$

ჩვენ უშუალოდ ვხედავთ, რომ $x^2-7x+10$ არის უსასრულოდ მცირე (როცა $x \to 2$). ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარე

$$\ln(x^2-7x+11) \sim x^2-7x+10.$$

ამიტომ ჩვენი (11) ზღვრის ნაცვლად შეიძლება მოვნახოთ ზღვარი

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x-5) = -3.$$

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ ზოგჯერ ხელსაყრელია z უსასრულოდ მცირის $\ln(1+z)$ უსასრულოდ მცირით შეცვლა.

შემდეგი ორი თეორემა ზემონათქვამის კარგი ილუსტრაციაა.

თეორემა 2. მართებულია შემდეგი ფორმულა

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \frac{a^u-1}{u} = \ln a}.$$

დამტკიცება. თუ $u \to 0$, მაშინ* $a^u-1 \to 0$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენთვის საინტერესო წილადის მრიცხველი არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე. თუ ამ მრიცხველს აღვნიშნავთ z-ით, ე. ი. თუ დავუშვებთ, რომ $a^u-1=z$, ზემოთ ნათქვამის საფუძველზე გვექნება

$$z \sim \ln(1+z),$$

---

* საზოგადოდ, თუ $x \to l$, მაშინ $a^x \to a^l$.

ანუ

$$a^u - 1 \sim \ln[1 + (a^u - 1)] = \ln a^u = u \ln a.$$

ამიტომ

$$\lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{u \ln a}{u} = \ln a.$$

რის დამტკიცებაც იყო საჭირო*.

თეორემა 3. მართებულია ფორმულა

$$\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^a - 1}{u} = a}$$

დამტკიცება. ჩვენი წილადის მრიცხველი $(1+u)^a - 1$ არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე (როცა $u \to 0$). ისე როგორც წინა თეორემის დამტკიცების დროს, აქაც აღვნიშნოთ ეს მრიცხველი z-ით, ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$(1+u)^a - 1 = z.$$

ისე, როგორც ზემოთ

$$z \sim \ln(1+z),$$

ე.

$$(1+u)^a - 1 \sim \ln\{1 + [(1+u)^a - 1]\} = \ln(1+u)^a = a\ln(1+u),$$

და ამიტომ

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^a - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{a \ln(1+u)}{u} = a.$$

რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

მოგვყავს დამტკიცებული ფორმულების გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითები.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}} - 1}{x} = \frac{1}{4}.$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

---

* 2 და 3 თეორემების ეს დამტკიცება რეკომენდებულია ი. კუზნეცოვის მიერ.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{2^x-1}{x}\right)=\ln 6-\ln 2=\ln 3$*.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5.$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x^2+3x-26)}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+3x-27}{x^2-7x+12}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+9)}{(x-3)(x-4)}=-15.$$

11. უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შედარება

განვიხილოთ შემდეგი სამი უსასრულოდ მცირე სიდიდე:

$$x_n=\frac{1}{n},\quad y_n=\frac{1}{n^2},\quad z_n=\frac{1}{n!}.$$

ამ უსასრულოდ მცირეთა პირველი მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია:

$$x_1=y_1=z_1$$

მაგრამ, თუ შევადარებთ ერთმანეთს ამ უსასრულოდ მცირეთა უფრო დაშორებულ მნიშვნელობებს, შევნიშნავთ რომ ისინი მიისწრაფვიან ნულისაკენ სხვადასხვა სიჩქარით. მაგალითად:

$$x_5=\frac{1}{5},\quad y_5=\frac{1}{25},\quad z_5=\frac{1}{120},$$

$$x_6=\frac{1}{6},\quad y_6=\frac{1}{36},\quad z_6=\frac{1}{720},$$

$$x_8=\frac{1}{8},\quad y_8=\frac{1}{64},\quad z_8=\frac{1}{40320}.$$

ნათლად ჩანს, რომ y_n მიისწრაფვის ნულისაკენ უფრო ს წ რ ა ფ ა დ ვიდრე x_n, ხოლო z_n-უფრო ს წ რ ა ფ ა დ ვიდრე y_n. შევეცადოთ უფრო ზუსტად განვმარტოთ „ერთი უსასრულოდ მცირე მიისწრაფვის ნულისაკენ უფრო სწრაფად, ვიდრე მეორე“ გამოთქმის შინაარსი. ცხადია, რომ α_n უსასრულოდ მცირე უფრო სწრაფად მიისწრაფვის ნულისაკენ ვიდრე

---

* ეს მაგალითი შეიძლება ასეც ამოიხსნას:

$$\frac{6^x-2^x}{x}=2^x\cdot\frac{3^x-1}{x}\to 2^0\cdot\ln 3=\ln 3.$$

β_n, თუ α_n-ის შორეული მნიშვნელობები უფრო ახლოსაა ნულთან ვიდრე β_n-ის შესაბამისი (ანუ იმავე ნომრის) მნიშვნელობები. სხვანაირად რომ ვთქვათ, α_n მიისწრაფვის ნულისაკენ უფრო სწრაფად, ვიდრე β_n, თუ

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

წილადის შორეული მნიშვნელობები ძალიან მცირე ხდება. ამიტომ შევთანხმდეთ, რომ α_n უფრო სწრაფად მიისწრაფვის ნულისაკენ ვიდრე β_n, თუ

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n}=0.$$

ამ შემთხვევაში ჩვეულებრივად ამბობენ, რომ α_n არის *უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე*, ვიდრე β_n. პირიქით, თუ

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n}=\infty,$$

მაშინ $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ წილადის შორეული მნიშვნელობები ძალიან დიდი ხდება, ანუ α_n ბევრად უფრო დიდია, ვიდრე β_n. ეს ნიშნავს, რომ β_n (საკმაოდ დიდი n-სათვის) უფრო ახლოსაა ნულთან, ვიდრე α_n. ასე რომ α_n მიისწრაფვის ნულისაკენ უფრო ნელა, ვიდრე β_n. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ α_n არის უფრო *დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე*, ვიდრე β_n.

თუ $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ წილადს აქვს *ნულისაგან განსხვავებული სასრული* ზღვარი

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n}=l \quad (l\neq 0, \quad l\neq\infty),$$

მაშინ ამბობენ, რომ α_n და β_n *ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია**.

კერძოდ, თუ α_n და β_n ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ ისინი ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეები არიან.

ამგვარად, თუ გვსურს შევადაროთ ერთმანეთს ორი α_n და β_n უსასრულოდ მცირის ნულისაკენ მისწრაფების სიჩქარე, უნდა ავიღოთ მათი

* უხეშად რომ ვთქვათ, α_n-ის და β_n-ის შორეული მნიშვნელობები თითქმის პროპორციულია $\frac{\alpha_n}{\beta_n}\approx\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}$.

შეფარდება $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ და ვიპოვოთ მისი ზღვარი. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ამ შეფარდებას ზღვარი (სასრული ან უსასრულო) სრულებითაც არა აქვს, მაშინ α_n და β_n უსასრულოდ მცირეები სადარი არ არიან. მაგალითად, თუ

$$\alpha_n=\frac{(-1)^n}{n}, \quad \beta_n=\frac{1}{n},$$

მაშინ

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n}=(-1)^n.$$

ამ სიდიდეს ზღვარი არა აქვს, მაშასადამე, α_n და β_n სადარი არ არიან.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1) ვთქვათ, $x \to 0$ (ეს ნიშნავს, რომ x გაივლის $x_1, x_2, x_3, \ldots$ მნიშვნელობათა მიმდევრობას, რომელიც მიისწრაფვის ნულისაკენ). დავუშვათ, რომ $y=x\sin\frac{1}{x}$, მაშინ

$$\frac{y}{x}=\sin\frac{1}{x},$$

ამ სიდიდეს, როცა $x \to 0$ ზღვარი არა აქვს*. მაშასადამე, x და $y=x\sin\frac{1}{x}$ სადარი არ არიან.

2) $1-\cos x$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $x \to 0$. ის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე x, რადგან $\frac{1-\cos x}{x}$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x \to 0$.

---

* ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში, როცა $x \to 0$, $\sin\frac{1}{x}$ ცვლადს შეიძლება ჰქონდეს ზღვარი. მაგალითად, თუ $x_n=\frac{1}{2\pi n}$, მაშინ $\sin\frac{1}{x_n}=0 \to 0$. მაგრამ არ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ

$$\lim \sin\frac{1}{x}=0,$$

რადგან x_n-ის მნიშვნელობების სხვა მიმდევრობისათვის ეს ტოლობა მართებული არ არის. მართლაც, თუ $x_n=\frac{2}{\pi(4n+1)}$ გვექნება

$$\sin\frac{1}{x_n}=1.$$

მართლაც,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x}=0.$$

3) $\operatorname{tg} 3x$ და x, როცა $x\to 0$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, რადგან

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{x}\to 3.$$

თეორემა. ორი უსასრულოდ მცირის ნამრავლი არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე თითოეული მამრავლი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\alpha\to 0$ და $\beta\to 0$, $\gamma=\alpha\beta$, მაშინ $\frac{\gamma}{\alpha}=\beta$ და $\frac{\gamma}{\alpha}\to 0$; ეს კი ნიშნავს, რომ γ არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე α. ანალოგიურად $\frac{\gamma}{\beta}=\alpha$, ასე რომ $\frac{\gamma}{\beta}\to 0$.

შენიშვნა. ზოგჯერ ერთი უსასრულოდ მცირის რიგი მეორის მიმართ ხასიათდება რიცხვით. ვთქვათ, $x\to 0$. მაშინ x, x^2, $x^3,\ldots$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, რომელთა რიგი ხარისხის ზრდასთან ერთად იზრდება. თუ y რაიმე უსასრულოდ მცირეა, რომლის რიგი უფრო მაღალია, ვიდრე x-ის რიგი, მაშინ ბუნებრივია, რომ y უნდა შევადაროთ x^2-ს, ხოლო თუ y-ის რიგი უფრო მაღალია, ვიდრე x^2-ის რიგი, მაშინ y უნდა შევადაროთ x^3-ს და ა. შ.

თუ y და x^k ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ ამბობენ, რომ y არის k რიგის უსასრულოდ მცირე x-თან შედარებით. ასე მაგალითად, თუ y არის მეშვიდე რიგის უსასრულოდ მცირე x-თან შედარებით, ეს ნიშნავს, რომ y და x^7 ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია.

როცა ვამბობთ, რომ y არის k რიგის უსასრულოდ მცირე x-თან შედარებით, შეიძლება არც კი ვიგულისხმოთ, რომ k მთელი რიცხვია. ასე მაგალითად, $y=2x\sqrt{x^3-2x^6}$ არის $\frac{5}{2}$ რიგის უსასრულოდ მცირე x-თან შედარებით. ამის საჩვენებლად, უნდა დავადგინოთ, რომ y და $x^{\frac{5}{2}}$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია. ამისათვის ვწერთ შეფარდებას

$$\frac{y}{x^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x\sqrt{x^3-2x^6}}{x^{\frac{5}{2}}}=2\sqrt{1-2x^3}.$$

ცხადია, რომ ეს შეფარდება $\to 2$, როცა $x\to 0$.

საზოგადოდ, თუ y არის k რიგის უსასრულოდ მცირე x-თან შედარებით და $k>1$, მაშინ y უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა x-თან შედარებით, ხოლო თუ $k<1$, მაშინ y არის უფრო დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე ვიდრე x. როცა $k=1$, მაშინ x და y ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია.

§ 2. ფუნქცია

1. ფუნქციის ცნება

შესავალში უკვე აღვნიშნეთ, რომ მათემატიკური ანალიზის ძირითად ცნებას, წარმოადგენს ფუნქციის ცნება, რომელიც გამოსახავს ცვლად სიდიდეებს შორის ურთიერთკავშირს. გადავიდეთ ამ ცნების შესწავლაზე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. თუ ორი x და y ცვლადი დაკავშირებულია ერთმანეთთან ისე, რომ x ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის ერთი და მხოლოდ ერთი სავსებით განსაზღვრული მნიშვნელობა, მაშინ ამბობენ, რომ y არის x არგუმენტის ფუნქცია.

იმის აღსანიშნავად, რომ y არის x-ის ფუნქცია, წერენ $y=f(x)$, ან $y=\varphi(x)$, ან $y=F(x)$ და ა. შ. ეს ჩანაწერი ასე იკითხება „იგრეკი უდრის ეფ იქსს" „იგრეკი უდრის ფი იქსს" და ა. შ.

თუ $y=f(x)$, მაშინ $f(a)$ გამოსახავს y-ის იმ მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება $x=a$ მნიშვნელობას.

მაგალითად, თუ
$$f(x)=2x^2+3,$$
მაშინ
$$f(5)=53, \qquad f(0)=3, \qquad f(1)=5.$$
თუ $f(x)=x^2+1$ და $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$, მაშინ
$$f(3)=10, \quad \varphi(0)=0, \quad f(2)=5, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, \quad f(a)=a^2+1,$$
$$\varphi(b)=\operatorname{tg} b, \qquad f(x)+\varphi(x)=x^2+1+\operatorname{tg} x,$$
$$f[\varphi(x)]=\operatorname{tg}^2 x+1, \qquad \varphi[f(x)]=\operatorname{tg}(x^2+1).$$

2. ფუნქციის მოცემის სხვადასხვა ხერხი

$y=f(x)$ ფუნქციის მოსაცემად საჭიროა მივუთითოთ წესი, რომელიც მოგვცემს x-ის მოცემული მნიშვნელობის შესაბამისი y-ის მნიშვნელობის პოვნის საშუალებას. ეს წესი მოცემული შეიძლება იყოს სხვადასხვა ხერხით.

1. *ცხადი ანალიზური ხერხი.* ამბობენ, რომ $y=f(x)$ მოცემულია *ცხადი ანალიზური ხერხით*, თუ მოცემულია *ფორმულა*, რომელიც მიუთითებს, თუ რა გამოთვლითი ოპერაციები* უნდა შევასრულოთ x-ზე, რომ მივიღოთ y.

მაგალითად,

$$y=3x^2+1,\quad y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2},\qquad y=\sin x,\quad y=\frac{5\,\mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{\arcsin x}}.$$

შენიშვნა 1. $y=\sin x$ ფორმულის გამო, მოსწავლე შეიძლება არ დაგვეთანხმოს, რადგან მისთვის უცნობია, თუ „რა გამოთვლითი ოპერაციები უნდა შეასრულოს x-ზე, რომ მიიღოს $y=\sin x$". ამიტომ არ შეიძლება დაეთანხმოს იმას, რომ $y=\sin x$ ტოლობით ფუნქცია მოცემულია ცხადი ანალიზური სახით. მაგრამ ეს აზრი არ არის სწორი. საქმე იმაშია, რომ ამ კურსის შემდეგ ნაწილებში გაშუქებული იქნება, თუ რა გამოთვლითი ოპერაციები უნდა შევასრულოთ x-ზე, რომ მივიღოთ $y=\sin x$ ნებისმიერი სიზუსტით. ის გარემოება, რომ ანალიზის შესწავლის პირველ საფეხურებზე არ არის ცნობილი ეს ოპერაციები, იმდენად მცირედ უშლის ხელს $y=\sin x$ ფორმულას, მის ანალიზურობაში, რამდენადაც ხელს უშლის სკოლის უმცროსი კლასების მოსწავლეებს, რომლებმაც არ იციან კვადრატული ფესვის ამოღება (თუმცა ცნება ამ ფესვის შესახებ მათთვის ცნობილია), ჩათვალონ, რომ $y=\sqrt{x}$ არის ანალიზური ფორმულა.

ეს შენიშვნა უნდა ვიქონიოთ მხედველობაში $y=\mathrm{tg}x$, $y=\arcsin(\ln x)$ და ა. შ. ფორმულების მიმართაც.

შენიშვნა 2. ზოგჯერ განიხილავენ ფუნქციებს, რომლებიც x-ის ცვლილების სხვადასხვა შუალედზე სხვადასხვა ანალიზური ფორმულებითაა მოცემული.

ვთქვათ, მაგალითად.

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+2, & \text{თუ}\ \ x<7,\\ 3x+1, & \text{თუ}\ \ x\geqslant 7.\end{cases}$$

ფუნქციის ასეთი სახით მოცემის შემთხვევაში გვაქვს

$$f(4)=18,\qquad f(0)=2,\qquad f(10)=31,\qquad f(7)=22.$$

ვხედავთ, რომ ყოველ x-ს შეესაბამება y-ის ერთადერთი, სავსებით გარკვეული მნიშვნელობა, ამიტომ $y=f(x)$ არის x-ის გარკვეული ფუნქცია.

---

* „გამოთვლითი ოპერაციების" ქვეშ გვესმის *არითმეტიკულ მოქმედებათა* მიმდევრობა (სასრული), რომელიც გვაძლევს საშუალებას ვიპოვოთ ჩვენთვის საინტერესო რიცხვი ნებისმიერი წინასწარ მოცემული სიზუსტით.

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ რადგან აქ ორი ფორმულაა მოცემული, ამიტომ ფუნქციაც ორია. x-ის ყოველ მნიშვნელობას, ხომ მხოლოდ ერთი ფორმულა „ემსახურება", თუ $x=6$, მაშინ $x<7$ და ამიტომ $f(6)$ გამოითვლება ზედა ფორმულით: $f(6)=6^2+2=38$. ხოლო, თუ $x=8$, მაშინ $x>7$, და ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ ქვედა ფორმულა: $f(8)=3\cdot 8+1=$ $=25$. მაშასადამე, გვაქვს არა ორი, არამედ ე რ თ ი ფუნქცია.

შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ განხილული ფუნქციის მსგავსი ფუნქციები წარმოადგენენ რაღაც ხელოვნურს, ისეთს, რომელიც პრაქტიკაში არ გვხვდება. ეს არ არის სწორი. მაგალითად, სამშენებლო მექანიკაში განიხილება შემთხვევები, როდესაც კოჭზე დატვირთვა მოცემულია კოჭის სხვადასხვა უბნისათვის სხვადასხვა ფორმულით.

აი კიდევ ერთი მაგალითი:

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{თუ } x\leqslant 2, \\ 2x+1, & \text{თუ } 2<x<7, \\ 0, & \text{თუ } x\geqslant 7. \end{cases}$$

მაშინ $f(5)=11$, $f(10)=0$, $f(1)=1$.

2. ა რ ა ც ხ ა დ ი. ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი ხ ე რ ხ ი. ამბობენ, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია არაცხადი ანალიზური ხერხით, თუ მოცემულია განტოლება, რომელიც აკავშირებს y ფუნქციას x არგუმენტთან.

თუ ასეთ განტოლებას ამოვხსნით y-ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ, იგივე ფუნქციას ცხადი სახით.

ვთქვათ, მაგალითად, რომ $y(x^2+3)-2x=0$. ეს არის განტოლება, რომლითაც ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით. თუ მას ამოვხსნით y-ის მიმართ, მივიღებთ იგივე ფუნქციას, ოღონდ ცხადი სახით:

$$y=\frac{2x}{x^2+3}.$$

ზოგჯერ განტოლების y-ის მიმართ ამოხსნის შედეგად, ვღებულობთ y-ის რამდენიმე მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ $y^2-8x=0$, მაშინ

$$y=\pm\sqrt{8x}.$$

ასეთ შემთხვევებში ამბობენ, რომ y არის x-ის მ რ ა ვ ა ლ ს ა ხ ა ფუნქცია. შემდგომში არ განვიხილავთ მრავალსახა ფუნქციებს, შევეცდებით შევცვალოთ ისინი რამდენიმე ცალსახა ფუნქციით. ასე მაგალითად, $y=\pm\sqrt{8x}$ ორსახა ფუნქციის ნაცვლად განვიხილავთ ორ ცალსახა ფუნქციას $y=+\sqrt{8x}$ და $y=-\sqrt{8x}$.

3. *ცხრილური ხერხი*. ამბობენ, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია *ცხრილური* ხერხით, თუ მოცემულია *ცხრილი*, რომელიც x არგუმენტის მნიშვნელობებს შეუსაბამებს $y=f(x)$ ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობებს.

მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	7	$3\frac{1}{2}$	$-\sqrt{2}$	e	0	$\frac{1}{7}$	0,32	11	6

მაშინ $f(2)=7$, $f(5)=e$, $f(6)=0$ და ა. შ.

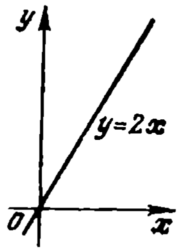
ფუნქციის მოცემის ცხრილურ ხერხს აქვს არსებითი ნაკლი. სახელდობრ, ამ შემთხვევაში არ შეგვიძლია ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტის იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც ცხრილში არ არის მითითებული. სამაგიეროდ, თუ არგუმენტის მნიშვნელობა *მოცემულია* ცხრილში, მაშინ ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობა მოინახება ცხრილიდან ყოველგვარი გამოთვლების გარეშე. ეს არის ფუნქციის ცხრილური ხერხით მოცემის მნიშვნელოვანი ღირსება.

ფუნქციებისათვის, რომლებიც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, შედგენილია დაწვრილებითი ცხრილები. საინჟინრო ცნობარებში მოცემულია შემდეგი ფუნქციების ვრცელი ცხრილები: $y=x^2$ („კვადრატების ცხრილი“), $y=x^3$ („კუბების ცხრილი“), $y=\sqrt{x}$ („კვადრატული ფესვების ცხრილი“) და ა. შ. თუმცა ყველა ამ ფუნქციისათვის არსებობს ანალიზური ფორმულები ($y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$), მაგრამ მაინც ბევრად უფრო მოხერხებულია ცხრილში ამოკითხვა, რომ $27^3=19683$, ვიდრე კუბში ახარისხების შესრულება. ამავე დროს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტის იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც ცხრილში არ გვაქვს. მაგალითად, თუ $y=x^3$, მაშინ ახარისხება გვაძლევს, რომ როცა $x=\frac{3}{2}$, მაშინ $y=\frac{27}{8}=3{,}375$, თუმცა $x=\frac{3}{2}$ შეიძლება ცხრილში არ იყოს მითითებული.

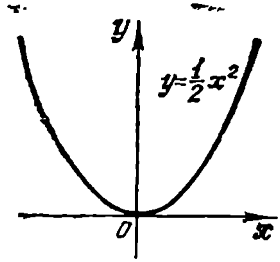
ამგვარად, ძალიან მოხერხებულია, როცა ერთი და იგივე ფუნქცია მოცემულია, როგორც ანალიზური ისე ცხრილური ხერხით.

4. *გრაფიკული ხერხი*. *განსაზღვრა*. ვთქვათ, $y=f(x)$ რაიმე ფუნქციაა. მისი *გრაფიკი* ეწოდება სიბრტყის (x, y) წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები დაკავშირებულია $y=f(x)$ თანადობით. თვით $y=f(x)$ განტოლებას ეწოდება ამ გრაფიკის *განტოლება*.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $y=2x$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს შემდეგ წერტილთა (0,0), (1,2), (—1, —2),... სიმრავლე. როგორც ვიცით ანალიზური გეომეტრიიდან, ეს წერტილები ავსებენ წრფეს (ნახ. 102). სწორედ ეს წრფე არის $y=2x$ ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 102.

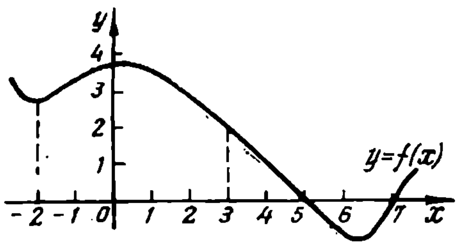


ნახ. 103.

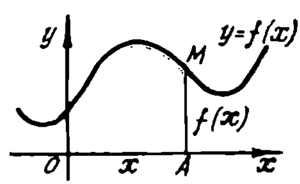
2) განვიხილოთ

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

ფუნქცია. ამ ფუნქციის გრაფიკია წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც მრუდს (პარაბოლას) ავსებენ (ნახ. 103). სწორედ ეს პარაბოლა არის $y=\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 104.



ნახ. 105.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ფუნქციას ეწოდება გ რ ა ფ ი კ უ ლ ა დ მოცემული, თუ დახაზულია მისი გრაფიკი.

ვთქვათ, მაგალითად, $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია გრაფიკით, რომელიც 104-ე ნახაზზეა გამოსახული. ამ გრაფიკის საშუალებით ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ y ფუნქციის მნიშვნელობები x არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობებისათვის.

ასე მაგალითად,

$$f(3)=2, \quad f(5)=0, \quad f(0)=3,7, \quad f(-2)=2,9.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ფუნქციის გრაფიკი დახაზულია, მაშინ, რომ ვიპოვოთ $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც x-ის რაიმე მოცემულ მნიშვნელობას შეესაბამება, საჭიროა გადავზომოთ x-ის ეს მნიშვნელობა აბსცისათა ღერძზე, მიღებული წერტილიდან აღვმართოთ მართობი გრაფიკის გადაკვეთამდე. ამ მართობის სიგრძე (აღებული სათანადო ნიშნით) უდრის $f(x)$-ს. მაგალითად, 105-ე ნახაზზე გვაქვს

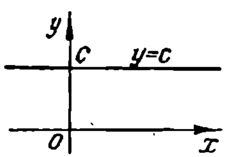
$$OA=x; \quad AM=f(x).$$

ფუნქციის მოცემის გრაფიკულ ხერხს, ისე როგორც ცხრილურ ხერხს, აქვს თავისი, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მხარეები. ამ მეთოდის ღირსებად შეიძლება ჩაითვალოს მისი თვალსაჩინოება, ხოლო ნაკლად—მისი არასიზუსტე.

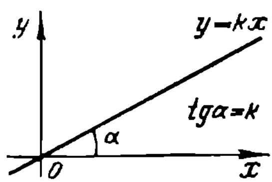
3. ზოგიერთი ფუნქციის გრაფიკი

განვიხილოთ ზოგიერთი, მეტწილად ხმარებული ფუნქციის გრაფიკი.

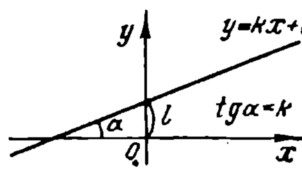
1. $y=c$ (მუდმივი). ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ $y=c$ განტოლებას სიბრტყეზე შეესაბამება აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე (ნახ. 106). სწორედ ეს წრფე არის $y=c$ ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 106.



ნახ. 107.



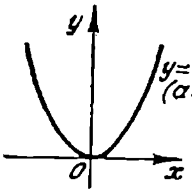
ნახ. 108.

2. $y=kx$ პირდაპირი პროპორციულობა. აქაც ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და მისი კუთხური კოეფიციენტი k რიცხვის ტოლია (ნახ. 107).

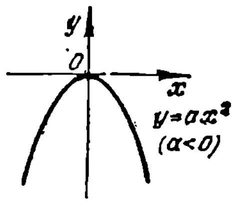
3. $y=kx+l$ (ზოგადი წრფივი ფუნქცია). ამ ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე (ნახ. 108), რომლის კუთხური კოეფიციენტი k რიცხვის ტოლია, ხოლო Oy ღერძზე მოჰკვეთს მონაკვეთს, რომლის სიდიდეა l.

4. $y=ax^2$ (უმარტივესი კვადრატული ფუნქცია). $y=ax^2$ $(a\neq0)$ განტოლებას შეესაბამება პარაბოლა, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია, სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ და მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ, როცა $a>0$, ხოლო როცა $a<0$ მის ქვემოთ (ნახ. 109, 110).

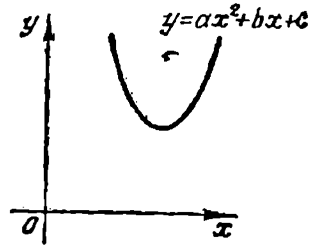
5. $y=ax^2+bx+c$ (ზოგადი კვადრატული ფუნქცია). $y=ax^2+bx+c$ განტოლებას შეესაბამება პარაბოლა, რომელიც მიიღება $y=ax^2$ პარაბოლის პარალელური გადატანით (ნახ. 111).



ნახ. 109.



ნახ. 110.



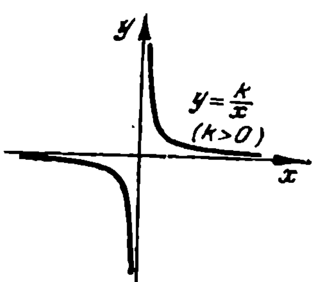
ნახ. 111.

6. $y=\frac{k}{x}$ (უკუპროპორციულობა). $y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია შეიძლება არაცხადი სახით მოცემული იქნეს

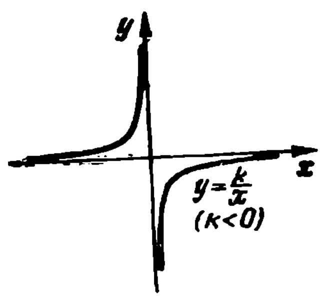
$$xy=k$$

განტოლებით.

ჯერ კიდევ I თავში დავადგინეთ, რომ ამ განტოლებას შეესაბამება ტოლფერდა ჰიპერბოლა, რომლის ასიმპტოტებია კოორდინატთა ღერძები; ის მოთავსებულია I და III კვადრანტებში როცა $k>0$, ხოლო II და IV-ში, როცა $k<0$ (ნახ. 112 და 113).



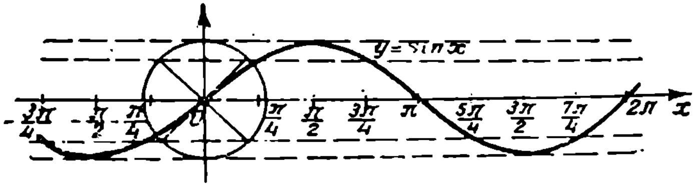
ნახ. 112.



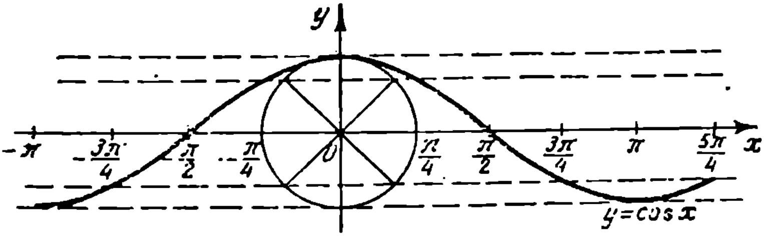
ნახ. 113.

7. $y=\sin x$. ამ ფუნქციის გრაფიკია ტალღისებური წირი, რომელსაც სინუსოიდა ეწოდება (ნახ. 114). რომ ვიპოვოთ $y=\sin x$ ფუნქციის მნიშვნელობა, სადაც x რაიმე განყენებული რიცხვია, საჭიროა ავაგოთ კუთხე, რომელიც x რადიანის ტოლია და გამოვთვალოთ ამ კუთხის სინუსი. მაგალითად, $\sin 2$ არის

$$\sin(2\times 57^\circ 17'45'') = \sin(114^\circ 35'30'').$$



ნახ. 114,



ნახ. 115.

სინუსოიდის ასაგებად შეიძლება ვურჩიოთ შემდეგი ხერხი: ვაგებთ ერთეულრადიუსიან წრეწირს, რომლის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში. მისი ცენტრიდან ვავლებთ სხივებს, რომლებიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ქმნიან კუთხეებს

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi,\ 2\pi+\frac{\pi}{4},$$

ამ სხივების წრეწირთან გადაკვეთის წერტილების ორდინატები მოგვცემს x-ის აღნიშნული მნიშვნელობების შესაბამის $\sin x$-ის მნიშვნელობებს. x-ის ამ მნიშვნელობებს გადავზომავთ აბსცისათა ღერძზე, ვითვალისწინებთ, რომ $\pi=3{,}14$. თუ წერტილებს $(x, \sin x)$ კოორდინატებით აღვნიშნავთ ნახაზზე და შევაერთებთ მათ მრუდით, თუნდაც უხეშად, მივიღებთ მეტნაკლებად დამაკმაყოფილებელ შთაბეჭდილებას სინუსოიდას შესახებ. უსარგებლო არ იქნება გავერკვეთ იმაში, თუ როგორ აისახება სინუსოიდაზე $\sin x$-ის პ ე რ ი ო დ უ ლ ო ბ ა, რომელიც

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

იგივეობით არის მოცემული. კერძოდ, სინუსოიდის იმ წერტილებს, რომელთა აბსცისები 2π სიდიდით განსხვავდება ერთმანეთისაგან, აქვთ ერთნაირი ორდინატები.

3. $y=\cos x$. თუ გავიხსენებთ იგივეობას

$$\cos a=\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right),$$

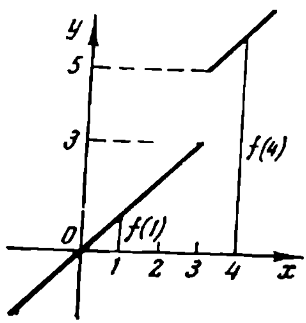
მაშინ ცხადი გახდება, რომ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილის ორდინატი, რომლის აბსცისა a რიცხვია, ტოლია $y=\sin x$ სინუსოიდის იმ წერტილის ორდინატისა, რომლის აბსცისაა $a+\frac{\pi}{2}$, ე. ი. იმ წერტილისა, რომელიც ძევს მოცემული წერტილის მ ა რ ჯ ვ ნ ი ვ $\frac{\pi}{2}$ ერთეულის მანძილზე. აქედან ცხადია, რომ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი არის იგივე სინუსოიდა, რომელიც მოცემულია 114-ე ნახაზზე, მაგრამ რომელიც გადატანილია $\frac{\pi}{2}$ ერთეულით მ ა რ ც ხ ნ ი ვ (ნახ. 115).

4. ფუნქციის უწყვეტობის ცნება.

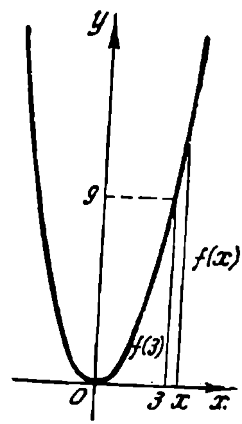
ფუნქციის უ წ ყ ვ ე ტ ო ბ ი ს ცნება ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა. იმისათვის, რომ გავერკვეთ ამ ცნებაში, განვიხილოთ წინასწარ ორი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, რომ

$$f(x)=y=\begin{cases} x, & \text{თუ } x\leqslant 3\\ x+2, & \text{თუ } x>3.\end{cases}$$



ნახ. 116.



ნახ 117.

ჩვენი ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 116-ე ნახაზზე. ამ ნახაზზე ვხედავთ, რომ $f(x)\to f(1)=1$, როცა $x\to 1$, ხოლო როცა $x\to 4$, მაშინ $f(x)\to f(4)=6$.

მაგრამ, როცა $x\to 3$, მაშინ ვერ მივუთითებთ თუ საით მიისწრაფვის $f(x)$. მართლაც, თუ $x\to 3$, ისე რომ ნაკლები რჩება 3-ზე, მაშინ $f(x)$ მიისწრაფვის სამისაკენ, ხოლო, თუ $x\to 3$, ისე რომ მეტი რჩება 3-ზე, მაშინ $f(x)$ მიისწრაფვის ხუთისაკენ. ვხედავთ, რომ ჩვენი ფუნქცია (ასევე მისი გრაფიკი), როცა $x=3$, როგორც ამბობენ, „განიცდის წყვეტას". არავითარ ამის მსგავსს არ ვამჩნევთ, როცა ვიხილავთ მაგალითად $y=x^2$ ფუნქციას.

მაგალითი 2. ვთქვათ,

$$y=x^2.$$

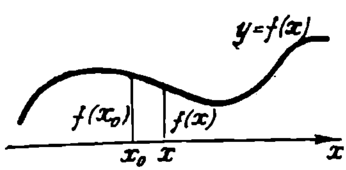
მისი გრაფიკი გამოსახულია 117-ე ნახაზზე. აქ, როცა $x\to 3$ იქნება $f(x)\to f(3)=9$, ანუ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია $x=3$ წერტილში უწყვეტია.

განსაზღვრა. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი* x_0 წერტილში, თუ

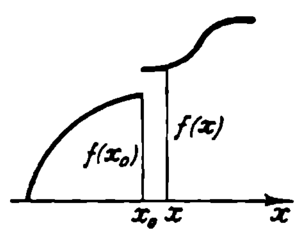
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)} \qquad (1)$$

სხვანაირად, *ფუნქცია უწყვეტია* x_0 *წერტილში, თუ ფუნქციის ზღვარი* (როცა $x\to x_0$) *ტოლია ფუნქციის მნიშვნელობისა არგუმენტის ზღვრული მნიშვნელობიდან*.

თუ (1) შესაბამისობა არ სრულდება, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია $x=x_0$ წერტილში *წყვეტილია*. 118-ე და 119-ე ნახაზზე მოცემულია უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციების გრაფიკები.



ნახ. 118.



ნახ. 119.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$x=0$ წერტილში წყვეტილია. მართლაც, აქ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty,$$

ხოლო $f(0)$ არის გამოსახულება, რომელსაც საერთოდ არა აქვს აზრი. ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

ტოლობას ადგილი არა აქვს. ამის მსგავსად, ფუნქცია

$$f(x)=\frac{x^2+7}{x-4}$$

წყვეტილია, როცა $x=4$.

ფუნქცია $f(x)=\dfrac{x-3}{x-3}$ ტოლია 1-ისა, როცა $x\neq 3$ და მას არა აქვს აზრი, როცა $x=3$, მკაცრად რომ ვთქვათ, წყვეტილია $x=3$ წერტილში. მაგრამ თუ დავუშვებთ, რომ $f(3)=1$, მაშინ ის გახდება უწყვეტი როცა $x=3$. ბუნებრივია, რომ სწორედ ასე იქცევიან ყოველთვის. ანალოგიურად ჩავთვლით, რომ ფუნქცია

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},$$

როცა $x=0$, 1-ის ტოლია. ფუნქცია

$$f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

როცა $z=0$ e-ს ტოლია და ა. შ.

იმისათვის, რომ შემოვიღოთ ფუნქციის უწყვეტობის სხვა, უფრო ხშირად ხმარებული განსაზღვრა, შემოვიღოთ შემდეგი ცნებები და აღნიშვნები.

თუ რაიმე α სიდიდე, ცვლილების დროს რაღაც საწყისი α_0 მნიშვნელობიდან ახალ α^* მნიშვნელობაზე გადადის, მაშინ $\alpha^*-\alpha_0$ (ახალ მნიშვნელობას გამოკლებული ძველი მნიშვნელობა) სხვაობას ეწოდება α სიდიდის ნაზრდი და აღინიშნება $\Delta\alpha$* სიმბოლოთი:

$$\boxed{\Delta\alpha=\alpha^*-\alpha_0}$$

---

* $\Delta\alpha$ არის არა ნამრავლი, არამედ ერთი სიმბოლო (Δ ნიშანი არის ბერძნული ასო დელტა).

კერძოდ, $x-x_0$ სხვაობა არის არგუმენტის ნაზრდი, ხოლო $f(x)-f(x_0)$ სხვაობა—ფუნქციის ნაზრდი:

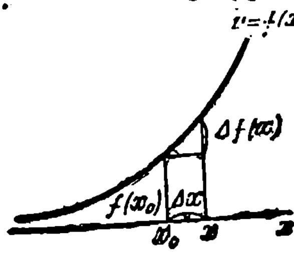
$$x-x_0=\Delta x, \qquad f(x)-f(x_0)=\Delta f(x).$$

თუ ვისარგებლებთ ნაზრდის ცნებით, ფუნქციის უწყვეტობის ცნება შეიძლება ასე განვმარტოთ:

განსაზღვრა. ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი, თუ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x)=0}$$

ამ განსაზღვრისა და ზემოთ მოცემული განსაზღვრის ტოლფასობა ცხადია 120-ე ნახაზიდან. მეორე განსაზღვრა კარგია თავისი სიმოკლით, მაგრამ არ არის სავსებით ზუსტი, რადგან აქ არ არის მითითებული თუ არგუმენტის რომელი მნიშვნელობისათვის არის უწყვეტი ფუნქცია*. მიუხედავად ამისა, ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ ამ განსაზღვრით.



ნახ. 120.

5. ელემენტარული ფუნქციები

აღვნიშნოთ ფუნქციათა ზოგიერთი ტიპები, რომლებიც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში:

1) მთელი ალგებრული მრავალწევრები (ანუ პოლინომები). ე. ი.

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L$$

სახის ფუნქციები.

2) წილადალგებრული ფუნქციები, რომლებსაც კიდევ უწოდებენ რაციონალურ წილადებს. ეს არის შემდეგი სახის ფუნქციები

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L}{Mx^m+Nx^{m-1}+\ldots+Tx+U}.$$

---

* თუმცა, როცა ამბობენ, რომ ფუნქცია უწყვეტია და არ მიუთითებენ არგუმენტის მნიშვნელობას, მაშინ იგულისხმება უწყვეტობა არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის (ბუნებრივია, რომლებშიც ფუნქცია განსაზღვრულია).

3) ხარისხოვანი ფუნქცია x^n.
4) მაჩვენებლიანი ფუნქცია a^x.
5) ლოგარითმული ფუნქცია $\log_a x$.
6) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$$\sin x,\quad \cos x,\quad \mathrm{tg}\, x,\quad \mathrm{ctg}\, x,\quad \sec x,\quad \mathrm{cosec}\, x.$$

7) შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$$\arcsin x,\quad \arccos x,\quad \mathrm{arctg}\, x,\quad \mathrm{arcctg}\, x,\quad \mathrm{arcsec}\, x,\quad \mathrm{arccosec}\, x.$$

ყოველი ამ ფუნქციის მნიშვნელობის პოვნას ვუწოდოთ *გამოთვლითი ოპერაცია**.

განსაზღვრა. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ელემენტარული ფუნქცია*, თუ მისი მნიშვნელობების მონახვა შეიძლება გამოთვლითი ოპერაციების რაიმე თანამიმდევრობის** შედეგად.

ასეთებია მაგალითად, ფუნქციები

$$\sin^3 x,\quad \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\, x}}{e^x+7\ln x},\quad \frac{2x^3+\arcsin x}{5x^2+3},\quad 2^{\arccos \ln x}$$

და სხვა.

კერძოდ, თვით 1—7 სახის ფუნქციებს უწოდებენ *ძირითად* ელემენტარულ ფუნქციებს.

თეორემა. *ყოველი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია იმ წერტილში, სადაც ის განსაზღვრულია.*

ამ თეორემას არ დავამტკიცებთ, მაგრამ ვაჩვენებთ მის ილუსტრაციას მაგალითებზე.

ასე მაგალითად, ფუნქციები

$$3x^3+5x^2+8x-11,\quad \frac{x}{x^2+1},\quad e^x,\quad \sin x,\quad \cos x$$

უწყვეტნი არიან ყოველი ნამდვილი x-სათვის.

ფუნქცია

$$y=\frac{1}{x}$$

---

* შეიძლება დამტკიცდეს, რომ გამოთვლითი ოპერაციის ეს გაგება არ განსხვავდება იმისაგან, რომელიც მოცემული იყო მე-2 ქვეპარაგრაფში.

** ცხადია, *სასრული*.

უწყვეტია ყველგან, გარდა $x=0$ წერტილისა, მაგრამ ამ წერტილში ის არც არის განსაზღვრული.

ზუსტად ასევე $\operatorname{tg} x$ უწყვეტია ყველგან, გარდა $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ წერტილებისა, რომლებშიც ის არ არის განსაზღვრული.

ფუნქცია $y=\ln x$ უწყვეტია ყოველი $x>0$ მნიშვნელობისათვის.

ზემოთ გამოყენებული იყო ფესვის (ანუ ხარისხოვანი ფუნქციის), კოსინუსის, ლოგარითმული ფუნქციის, მაჩვენებლიანი ფუნქციის უწყვეტობა (იხ. გვერდები 130, 134, 143, 144).

0. ფუნქციის მოცემის არე. შუალედების სხვადასხვა ტიპი

აქამდე არ ვაზუსტებდით საკითხს ფუნქციის *მოცემის* (ანუ *განსაზღვრის*) *არეს* შესახებ. ამბობენ, რომ ფუნქცია $y=f(x)$ მოცემულია S სიმრავლეზე (რომელსაც ეწოდება სწორედ ფუნქციის მოცემის არე), თუ S სიმრავლიდან აღებულ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის გარკვეული მნიშვნელობა. x-ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც S სიმრავლეში არ შედის, $f(x)$ ფუნქციის არავითარი მნიშვნელობა არ შეესაბამება.

ცხადი ანალიზური ფუნქციებისათვის განსაზღვრის არეს (თუ არ არის გაკეთებული საწინააღმდეგო შენიშვნა) შეადგენს x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლებისათვისაც აზრი აქვს ფორმულას, რომლითაც მოცემულია ფუნქცია. მაგალითად, ფუნქცია x^2 მოცემულია ყველა ნამდვილი* x-ისათვის, $\ln x$ მოცემულია ყოველი $x>0$ მნიშვნელობისათვის, $\arcsin x$ — ყოველი x-ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ორმაგ უტოლობას $-1\leqslant x\leqslant 1$.

ხშირად ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს *ჩაკეტილი შუალედი*** $[a, b]$, რომელიც შედგება ყველა იმ x წერტილებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a\leqslant x\leqslant b$, ან *ღია შუალედი* $]a, b[$, რომელიც შედგება ყველა იმ x წერტილისაგან, რომლებისთვისაც $a<x<b$. ღია შუალედის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მთელი რიცხვითი ღერძი*** $]-\infty, +\infty[$. ზოგჯერ განიხილავენ აგრეთვე $[a, b[$ და $]a, b]$ შუალედებს. პირველი მათგანი შედგება x

* ის რასაკვირველია მოცემულია კომპლექსური x-ებისათვისაც, მაგრამ ახლა მათ არ განვიხილავთ.

** რომელსაც აგრეთვე მონაკვეთი ეწოდება.

*** რადგან $x=\pm\infty$ მნიშვნელობებს არ განვიხილავთ, ამიტომ $[0, +\infty]$ შუალედები არ შეგვხვდება.

წერტილებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a \leqslant x < b$ უტოლობას, ხოლო მეორე x-წერტილებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a < x \leqslant b$ უტოლობას.

7. თეორემა უწყვეტი ფუნქციის საშუალედო მნიშვნელობის შესახებ

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $[a, b]$ მონაკვეთზე და უწყვეტია მის ყოველ წერტილში (მაშინ უბრალოდ ამბობენ, რომ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ მონაკვეთზე). ასეთ ფუნქციებს ახასიათებთ მნიშვნელოვანი თვისება, რომელიც შემდეგი თეორემით გამოითქმის.

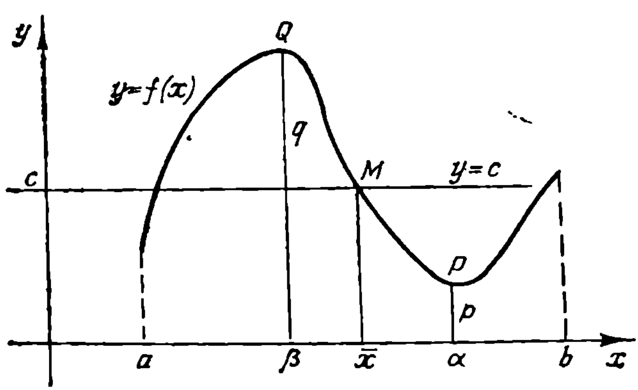
საშუალედო მნიშვნელობის თეორემა. თუ p და q $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობებია, მაშინ ყოველი c რიცხვისათვის, რომელიც მოთავსებულია p და q რიცხვებს შორის, $p < c < q$, მოინახება არგუმენტის ისეთი $\bar{x}$ მნიშვნელობა, რომ

$$\boxed{f(\bar{x}) = c} \tag{2}$$

თეორემის განმარტების მიზნით, მოვიყვანთ თვალსაჩინო გეომეტრიულ მსჯელობას. მკაცრი, წმინდა ანალიზური დამტკიცება ძალიან ვრცელი იქნებოდა.

აღვნიშნოთ α და β არგუმენტის ის მნიშვნელობები, რომლებსაც ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები შეესაბამებათ

$$f(\alpha) = p, \qquad f(\beta) = q.$$



ნახ. 121.

ავაგოთ ჩვენი ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 121) და გავავლოთ ამავე ნახაზზე $y=c$ წრფე.

განვიხილოთ $y=f(x)$ წირზე მდებარე $P(\alpha, p)$ და $Q(\beta, q)$ წერტილები. პირველი მათგანი მოთავსებულია $y=c$ წრფის ქვემოთ, ხოლო მეორე — ზემოთ. მაშასადამე, უწყვეტი $y=f(x)$ წირი სადღაც გადაკვეთს ამ წრფეს. ვთქვათ, M არის $y=f(x)$ წირისა და $y=c$ წრფის გადაკვეთის წერტილი. თუ ამ წერტილის აბსცისას აღვნიშნავთ $\bar{x}$, მაშინ სწორედ ამ წერტილისათვის იქნება მართებული (2) ტოლობა.

8. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება

აქამდე ვიხილავდით მხოლოდ ერთი არგუმენტის ფუნქციას. მაგრამ პრაქტიკაში ხშირად გვაქვს საქმე მრავალი ცვლადის ფუნქციებთან. ასე მაგალითად, ომის კანონის თანახმად

$$I=\frac{E}{R}, \tag{3}$$

სადაც I დენის ძალაა (ამპერობით), E — ელექტრომამოძრავებელი ძალა (ვოლტობით) და R წინაღობა (ომობით). მაშასადამე, I-ს მოსაცემად საჭიროა ორი არგუმენტის E და R მნიშვნელობების მოცემა, მასთან E და R ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია.

ანალოგიურად, თუ x და y იცვლება ერთმანეთისაგან სრულიად დამოუკიდებლად და

$$z=2x+3y,$$

მაშინ x და y მნიშვნელობათა ყოველ სისტემას შეესაბამება z-ის ერთი და მხოლოდ ერთი, სავსებით გარკვეული მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ $x=1$, $y=5$, მაშინ $z=17$.

ასეთი გარემოების დასახასიათებლად ამბობენ, რომ z არის ორი x და y არგუმენტის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში წერენ

$$z=f(x,y), \text{ ან } z=F(x, y) \text{ და ა. შ.}$$

თუ დავუბრუნდებით (3) ფორმულას, შეიძლება ვთქვათ, რომ, I არის E და R არგუმენტების ფუნქცია.

შემდგომი განმარტებების გარეშე უკვე გასაგებია თუ რას ნიშნავს შემდეგი ჩანაწერები

$$u=f(x, y, z), \qquad u=F(x, y, z, t).$$

მოგვიანებით (X თავში) შევუდგებით რამდენიმე ცვლადის ფუნქციების უფრო საფუძვლიან შესწავლას, ჯერჯერობით კი შემოვიფარგლებით აქ მოცემული ზოგადი განსაზღვრით.

III თავი

წარმოებული და დიფერენციალი

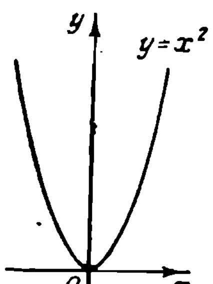
§ 1. წარმოებული

ახლა გავეცნობით მათემატიკური ანალიზის კიდევ ერთ ფუნდამენტურ ცნებას — წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს ცნებას. სრულიად მარტივი და ბუნებრივი ცნებებისაგან განსხვავებით, როგორიცაა ფუნქციისა და ზღვრის ცნებები, წარმოებულის ცნება საკმაოდ რთულია და ამიტომ წარუმძღვარებთ მას ზოგიერთ მოსაზრებას, რომლებიც თანდათანობით მიგვიყვანს ამ ცნებამდე.

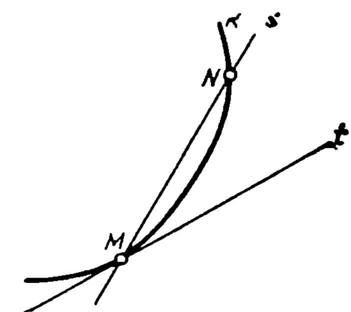
1. მხები წრფე

ელემენტარულ გეომეტრიაში, სადაც შეისწავლება მხოლოდ ერთი მრუდი — წრეწირი, წრეწირის მხები განმარტებულია, როგორც წრფე, რომელსაც წრეწირთან აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი. ნებისმიერი მრუდისათვის ეს განსაზღვრა ნაკლებად ბუნებრივია.

განა შეიძლება დავიჯეროთ, რომ $x=0$ წრფე არის $y=x^2$ პარაბოლის (ნახ. 122) მხები? თუმცა, მათ მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვთ. ამიტომ უმაღლეს მათემატიკაში მიღებულია მხების სხვა განსაზღვრა.



ნახ. 122.



ნახ. 123.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. Mt წრფეს ეწოდება K წირის მხები რაიმე M წერტილში (ნახ. 123), თუ ეს წრფე წარმოადგენს Ms მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას*, სადაც Ms მკვეთი გავლებულია M და N წერტილებზე და N წერტილი მოძრაობს K წირზე ისე, რომ მიისწრაფვის M წერტილისაკენ.

M წერტილს ეწოდება შ ე ხ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, K წირი წარმოადგენს $y=3x^2$ პარაბოლას, ხოლო ამ წირის M წერტილის კოორდინატებია (5, 75). გავავლოთ Mt მხები (ე. ი. შევადგინოთ მისი განტოლება).

ა მ ო ხ ს ნ ა. მხების განტოლებას, როგორც $M(5, 75)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას, ექნება შემდეგი სახე

$$y-75=m_t(x-5),$$

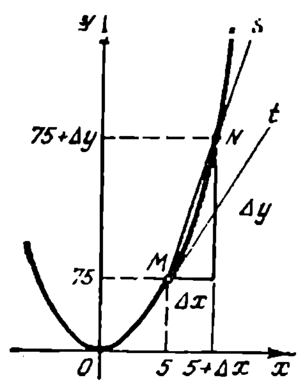
სადაც საჭიროა განისაზღვროს m_t კუთხური კოეფიციენტი. ავიღოთ პარაბოლაზე კიდევ ერთი $N(5+\Delta x,\ 75+\Delta y)$ წერტილი და გავავლოთ M და N წერტილებზე Ms მკვეთი. 124-ე** ნახაზიდან ნათელია, რომ Ms მკვეთის კუთხური კოეფიციენტია $m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. ცხადია, რომ როდესაც N მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, $m_s \to m_t$, ე. ი.

$$m_t=\lim_{N\to M} m_s$$

ანუ, რაც იგივეა

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

რადგან N წერტილი ძევს პარაბოლაზე, მისი კოორდინატები $(5+\Delta x,\ 75+\Delta y)$ აკმაყოფილებს პარაბოლის განტოლებას. ამიტომ გვაქვს



ნახ. 124.

$$75+\Delta y=3(5+\Delta x)^2$$

ან

$$75+\Delta y=75+30\Delta x+3(\Delta x)^2$$

და

$$\Delta y=30\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

* ეს ნიშნავს, რომ ამ წრფეებს შორის კუთხე მიისწრაფვის ნულისაკენ.

** მეტი თვალსაჩინოებისათვის ზომები ამ ნახაზზე დამახინჯებულია.

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ Δx-ზე, მივიღებთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 30 + 3\Delta x.$$

მაშასადამე,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} (30 + 3\Delta x) = 30.$$

ამიტომ მხების განტოლება იქნება

$$y - 75 = 30(x - 5).$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მსგავსი ამოცანა.

ვთქვათ, $y = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ არის K წირის განტოლება და $M(1, 1)$ ამ წირზე მდებარე წერტილია. გავავლოთ M წერტილზე K წირის მხები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი მხების განტოლებაა

$$y - 1 = m_t(x - 1).$$

ვთქვათ, $N(1 + \Delta x,\ 1 + \Delta y)$ K წირის რაიმე სხვა წერტილია. მაშინ

$$1 + \Delta y = 2(1 + \Delta x)^3 - 4(1 + \Delta x)^2 + 6(1 + \Delta x) - 3 \text{ ან } 1 + \Delta y = 2 + 6\Delta x + \\ + 6(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 4 - 8\Delta x - 4(\Delta x)^2 + 6 + 6\Delta x - 3.$$

აქედან

$$\Delta y = 4\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3.$$

რაკი Ms M და N წერტილებზე გამავალი მკვეთია, ამიტომ მისი კუთხური კოეფიციენტი

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ე. ი.

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + 2\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

მაგრამ $m_t = \lim\limits_{N \to M} m_s$. მაშასადამე,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4.$$

და მხების განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$y - 1 = 4(x - 1).$$

განვიხილოთ ახლა შემდეგი ზოგადი ამოცანა: გავავლოთ K წირის მოცემულ $M(x_0, y_0)$ წერტილზე Mt მხები, თუ წირი მოცემულია

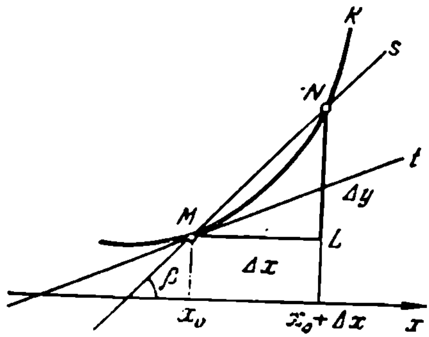
$$y=f(x) \tag{1}$$

განტოლებით.

რადგან საძიებელი მხები გადის მოცემულ $M(x_0, y_0)$ წერტილზე, ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად უნდა მოვნახოთ მისი m_t კუთხური კოეფიციენტი.

ავიღოთ K წირზე $N(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ წერტილი და გავავლოთ M და N წერტილებზე Ms მკვეთი. 125-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი

$$m_s=\operatorname{tg}\beta=\frac{LN}{ML}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



ნახ. 125.

მაგრამ

$$m_t=\lim_{N\to M} m_s,$$

საიდანაც

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

N წერტილი ძევს K წირზე, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს წირის (1) განტოლებას, და გვექნება

$$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x),$$

ხოლო რადგან $y_0=f(x_0)$ ვღებულობთ

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

საიდანაც საბოლოოდ გვაქვს

$$\boxed{m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}} \tag{2}$$

ამგვარად, გეომეტრიულმა ამოცანამ წირისადმი მხების გავლების შესახებ, მიგვიყვანა (2) ზღვრის გამოთვლამდე.

2. სიჩქარე

განვიხილოთ კიდევ ერთი საკითხი, რომლის გადასაჭრელად მოგვიხდება ანალოგიური ზღვრის გამოთვლა. ეს არის წერტილის **სიჩქარის გამოთვლის** საკითხი.

განსაზღვრა. თუ წერტილი მოძრაობს წრფეზე*, მაშინ მისი საშუალო სიჩქარე ეწოდება დროის გარკვეულ მონაკვეთში გავლილი მანძილის შეფარდებას დროის ამ მონაკვეთის ხანგრძლივობასთან.

სხვანაირად, დროის რაიმე მონაკვეთში საშუალო სიჩქარე არის სიდიდე, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$v_{\text{საშ}}=\frac{S}{T},$$

სადაც T დროის ხანგრძლივობაა, ხოლო S დროის ამ მონაკვეთში გავლილი მანძილია.

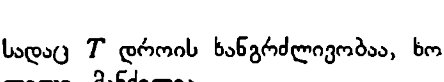
საშუალო სიჩქარე არ ახასიათებს მოძრაობას დროის გარკვეულ მომენტში. ამიტომ მექანიკაში შემოაქვთ მნიშვნელოვანი ცნება, სახელდობრ, მყისი სიჩქარის ცნება.

განსაზღვრა. წერტილის მყისი სიჩქარე ეწოდება დროის მცირე მონაკვეთზე საშუალო სიჩქარის ზღვარს, როდესაც დროის აღნიშნული მონაკვეთი $\to 0$.

მაგალითი. ვთქვათ, რომ M წერტილი მოძრაობს წირზე

$$s=4t^2+3t+1 \qquad (3)$$

კანონით.



ნახ. 126.

აქ t დროა, რომელიც აითვლება რაიმე საწყისი მომენტიდან, ხოლო s— მანძილია რაიმე საწყისი O წერტილიდან $s=OM$ (ნახ. 126).

ვიპოვოთ M წერტილის v სიჩქარე $t=5$ მომენტისათვის.

ამოხსნა. (3) განტოლების საფუძველზე ვპოულობთ, რომ როცა $t=5$, მაშინ $s=116$.

განვიხილოთ გარდა $t=5$ მომენტისა კიდევ სხვა $t+\Delta t=5+\Delta t$ მომენტი. თუ $s+\Delta s$ არის OM მანძილის მნიშვნელობა ამ ახალი მომენტისათვის, მაშინ იმავე (3) განტოლებიდან გვექნება

$$s+\Delta s=4(5+\Delta t)^2+3(5+\Delta t)+1=116+43\Delta t+4(\Delta t)^2.$$

ადვილი წარმოსადგენია, რომ $t=5$ მომენტიდან $t+\Delta t=5+\Delta t$ მომენტამდე წერტილმა გაიარა

$$\Delta s=43\Delta t+4(\Delta t)^2$$

---

*. თუ მოძრაობა არ არის წრფივი, მაშინ სიჩქარე ვექტორულია და მისი განხილვა უფრო რთულია.

მანძილი. ამიტომ დროის ამ მონაკვეთში საშუალო სიჩქარე იქნება

$$v_{\text{საშ}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=43+4\Delta t,$$

ხოლო მყისი სიჩქარე $t=5$ მომენტში არის საშუალო სიჩქარის ზ ღ ვ ა- რ ი, როცა $\Delta t \to 0$, ე. ი.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{საშ}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=43.$$

შევნიშნავთ, რომ სიჩქარე იზომება ერთეულებით, რომლებიც დამოკიდებულია სიგრძისა და დროის ერთეულებზე. მაგალითად, თუ ჩავთვლით, რომ განხილულ მაგალითში s მანძილი იზომება სანტიმეტრობით, ხოლო t დრო—წამობით, მაშინ მიღებული პასუხი გვიჩვენებს, რომ $v=43$ სმ/წმ.

განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარე ზოგადად.

ამოცანა. წ ე რ ტ ი ლ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ს წ რ ფ ე ზ ე კ ა ნ ო ნ ი თ, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო ც ე მ უ ლ ი ა შ ე მ დ ე გ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი თ

$$s=f(t). \tag{4}$$

ვ ი პ ო ვ ო თ წ ე რ ტ ი ლ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს v ს ი ჩ ქ ა რ ე t_0 მ ო მ ე ნ ტ შ ი.

როგორც ზემოთ, აქაც s წარმოადგენს იმ OM მანძილს, რომლითაც მოძრავი წერტილი t მომენტში დაშორებულია უძრავი O წერტილიდან. (4) ტოლობას ეწოდება მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. იმისათვის რომ მოცემული იყოს მოძრაობა, ფაქტიურად უნდა მივუთითოთ $f(t)$ ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩვენთვის საინტერესო t_0 მომენტში OM მანძილი (ნახ. 126) (4) განტოლების თანახმად, იქნება

$$s_0=f(t_0).$$

t_0 მომენტთან ერთად, განვიხილოთ დროის სხვა $t_0+\Delta t$ მომენტი. ამ მომენტში M წერტილი დაშორებულია O წერტილიდან

$$s_0+\Delta s=f(t_0+\Delta t)$$

მანძილით. ამიტომ დროის Δt მონაკვეთში განვლილი Δs მანძილი

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$$

სხვაობის ტოლია, ხოლო საშუალო სიჩქარე დროის აღნიშნულ მონაკვეთში იქნება

$$v_{\text{საშ}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

საძიებელი მყისი სიჩქარე ამ საშუალო სიჩქარის ზღვარია,

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{საშ}},$$

ამიტომ

$$\boxed{v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}} \qquad (5)$$

ამგვარად, ამოცანა სიჩქარის პოვნის შესახებ დაიყვანება (5) ზღვრის პოვნამდე, ეს ზღვარი კი მხოლოდ აღნიშვნებით განსხვავდება იმ (2) ზღვრისაგან, რომელთანაც მიგვიყვანა ამოცანამ მხების გავლების შესახებ.

3. ღეროს სიმკვრივე

განვიხილოთ კიდევ ერთი საკითხი, რომელსაც მივყავართ იმავე ზღვრის პოვნამდე.

განსაზღვრა. ღეროს საშუალო სიმკვრივე ეწოდება მისი მასის და სიგრძის შეფარდებას*.

თუ აღვნიშნავთ ღეროს მასას m-ით, სიგრძეს l-ით, ხოლო საშუალო სიმკვრივეს — $p_{\text{საშ}}$, მივიღებთ

$$p_{\text{საშ}}=\frac{m}{l}.$$

ღეროს საშუალო სიმკვრივე არ გვაძლევს წარმოდგენას იმის შესახებ, თუ როგორ არის განაწილებული მასა ღეროს სხვადასხვა უბანზე. ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს ღეროს სხვადასხვა წერტილში ჭეშმარიტი სიმკვრივის ცნებას.

განსაზღვრა. ღეროს რაიმე წერტილში ჭეშმარიტი სიმკვრივე ეწოდება ღეროს უსასრულოდ მცირე მონაკვეთის საშუალო სიმკვრივის ზღვარს, როდესაც მონაკვეთის სიგრძე $\to 0$ (ანუ უსასრულოდ იკუმშება მოცემულ წერტილამდე)

$$p=\lim p_{\text{საშ}}.$$

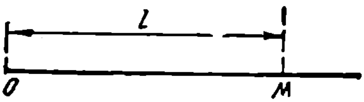
---

* ჩვეულებრივად ფიზიკაში სხეულის საშუალო სიმკვრივე ეწოდება მისი მასისა და მოცულობის შეფარდებას. ზოგჯერ განიხილება ისეთი სხეულები, რომელთა განივი ზომების უგულებელყოფა შესაძლებელია (ღერო, მავთული, ტროსი). ამ შემთხვევაში შემოდის სიმკვრივის ცნება ზემომოყვანილი თვალსაზრისით (ასეთ სიმკვრივეს უწოდებენ წრფივ სიმკვრივეს).

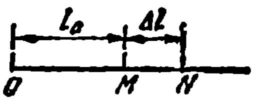
წარმოვიდგინოთ ჰორიზონტალური ღერო (ნახ. 127). თუ მისი მარცხენა ბოლოს O წერტილიდან გადავზომავთ OM მონაკვეთს, რომლის სიგრძე l-ის ტოლია, მაშინ ამ მონაკვეთის m მასა, ცხადია, დამოკიდებული იქნება l-ზე, ე. ი. აღმოჩნდება l არგუმენტის ფუნქცია

$$m=f(l).$$

დავუშვათ, რომ ეს ფუნქცია ჩვენთვის ცნობილია და განვიხილოთ ამოცანა ღეროს M წერტილში ჭეშმარიტი p სიმკვრივის პოვნის შესახებ, რომლისთვისაც $OM=l_0$.



ნახ. 127.



ნახ. 128.

ამოცანის ამოსახსნელად განვიხილოთ M-ის გარდა ღეროს სხვა წერტილი N, რომლისთვისაც $ON=l_0+\Delta l$ (ნახ. 128), მაშინ ON ნაწილის მასა იქნება

$$m_0+\Delta m=f(l_0+\Delta l),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ MN ნაწილის მასა იქნება

$$\Delta m=f(l_0+\Delta l)-f(l_0).$$

ამიტომ ამ MN უბნის საშუალო სიმკვრივე

$$p_{\text{საშ}}=\frac{\Delta m}{\Delta l}=\frac{f(l_0+\Delta l)-f(l_0)}{\Delta l}.$$

ღეროს ჭეშმარიტი p სიმკვრივე M წერტილში არის ამ შეფარდების ზღვარი, როცა N მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, ე. ი. როცა $\Delta l\to 0$. ამგვარად,

$$\boxed{p=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(l_0+\Delta l)-f(l_0)}{\Delta l}} \qquad (6)$$

ამ ამოცანაშიც მივედით ისეთივე ზღვარის განსაზღვრის აუცილებლობამდე, როგორც ამოცანებში მხებისა და სიჩქარის შესახებ. სწორედ ამ ზღვარს ეწოდება წარმოებული.

4. წარმოებულის განსაზღვრა

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $y=f(x)$ ფუნქცია. შევასრულოთ შემდეგი 5 ოპერაცია:

1) მივცეთ არგუმენტს რაიმე მუდმივი x მნიშვნელობა და გამოვთვალოთ ფუნქციის სათანადო $y=f(x)$ მნიშვნელობა.

2) მივცეთ არგუმენტს Δx ნაზრდი, მივიღებთ არგუმენტის ახალ $x+\Delta x$ მნიშვნელობას და გამოვთვალოთ ფუნქციის ახალი მნიშვნელობა

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

3) გამოვთვალოთ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

4) შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

5) მივასწრაფოთ Δx ნულისაკენ და გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

ამ ზღვარს* ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება ასე: y', ან y'_x, ან $f'(x)$, ან კიდევ $(f(x))'$ ამგვარად, წარმოებულის მკაცრი განსაზღვრა ასეთია:

განსაზღვრა. ფუნქციის წარმოებული არის ფუნქციის ნაზრდისა და მისი არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდის შეფარდების ზღვარი.

ფორმულის საშუალებით ეს განსაზღვრა ასე ჩაიწერება

$$\boxed{y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ან დაწვრილებით

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

---

* როცა Δx იცვლება, მაშინ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდება Δx-ის ფუნქციაა (შევახსენებთ, რომ x ფიქსირებულია) მისი ზღვარი შეიძლება არც არსებობდეს. აქ იგულისხმება სასრული ზღვარი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: 1) რაიმე ფუნქციის წარმოებულის მონახვის ოპერაციას, ეწოდება ამ ფუნქციის გ ა წ ა რ მ ო ე ბ ა.

2) იმ წერტილს, რომელიც ფიქსირდება ფუნქციის წარმოებულის პოვნის პირველ საფეხურზე, ეწოდება გ ა წ ა რ მ ო ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი.

3) რადგან ზოგიერთ ცვლადს არა აქვს ზღვარი, ამიტომ ზოგიერთ ფუნქციასაც შეიძლება არ ჰქონდეს წარმოებული. თუ ფუნქციას რომელიმე x-სათვის აქვს წარმოებული, მაშინ ამბობენ რომ ფუნქცია წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ი ა ამ x-ისათვის.

წარმოებულის ცნების საშუალებით წინა პარაგრაფებში მიღებული შედეგები შეიძლება მოკლედ ასე გამოითქვას:

ა) მხების კუთხური კოეფიციენტი არის ორდინატის წარმოებული აბსცისით: *

$$m_l = y_x'$$

ბ) სიჩქარე არის მანძილის წარმოებული დროით**:

$$v = s'_t.$$

გ) სიმკვრივე არის მასის წარმოებული სიგრძით: ***

$$p = m_l'$$

ქვემოთ მოცემულია წარმოებულის გამოთვლის მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული $x = 3$ წერტილში.

$$\text{აქ } y = 9, \quad y + \Delta y = (3 + \Delta x)^2 = 9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

მაშასადამე,

$$\Delta y = 6\Delta x + (\Delta x)^2 \quad \text{და} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

თუ გამოვთვლით მიღებული შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ

$$y' = 6.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ იმავე $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული $x = 4$, $x = 1$, $x = 0$, $x = 7$ წერტილებში.

იმისათვის, რომ არ გავიმეოროთ მსჯელობა თითოეული წერტილისათვის ცალ-ცალკე, განვიხილოთ ეს მაგალითი ზოგადად: აღვნიშნოთ გაწარმოების წერტილი x-ით. მაშინ მივიღებთ

$$y = x^2, \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

---

* გაწარმოების წერტილია შეხების წერტილის x_0 აბსცისა.

** გაწარმოების წერტილია დროის მომენტი, რომელშიც ვანისაზღვრება სიჩქარე.

*** გაწარმოების წერტილია ის წერტილი, რომელშიც განისაზღვრება სიმკვრივე.

საიდანაც

$$\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

და მაშასადამე,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

საბოლოოდ

$$y'=2x.$$

თუ დავუშვებთ, კერძოდ, რომ $x=4$, $x=1$, $x=0$, $x=7$, მივიღებთ

$$y'=8, \quad y'=2, \quad y'=0, \quad y'=14.$$

განხილული მაგალითიდან ჩანს ზოგადი სახით მოცემული ფუნქციის გაწარმოების უპირატესობა, ანუ გაწარმოება, როცა გაწარმოების წერტილი რაიმე ასოთია აღნიშნული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გავაწარმოოთ $y=\sqrt{x}$ ფუნქცია x წერტილში ($x>0$).

მივიღებთ

$$y=\sqrt{x}, \qquad y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x},$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ე. ი.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

იმის გამო, რომ ყოველ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული, დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. თ უ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი ს რ ა ი მ ე მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ა ქ ვ ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი, მ ა შ ი ნ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი ა ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი ს ა მ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მივცეთ x არგუმენტს Δx ნაზრდი, მაშინ y მიიღებს სათანადო Δy ნაზრდს.

ჩავწეროთ Δy ნაზრდი შემდეგი სახით:

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$

თუ $\Delta x \to 0$, მაშინ თეორემის პირობის თანახმად $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდება მიისწრაფვის სასრული y' ზღვრისაკენ, ამიტომ*

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

ე. ი. არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი. ეს კი ნიშნავს, რომ ფუნქცია უწყვეტია, რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციის წარმოებულის არსებობისათვის მისი უწყვეტობა არ წარმოადგენს საკმარის პირობას.

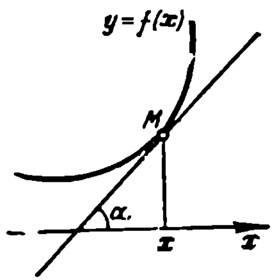
თეორემა 2. წარმოებულის გეომეტრიული აზრი

$y' = f'(x)$ წარმოებული გეომეტრიულად წარმოადგენს, $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილში გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს, რომლის აბსცისა გაწარმოების წერტილია.

თუ ხსენებული მხების მიერ Ox ღერძთან შედგენილ კუთხეს აღვნიშნავთ α-თი, მაშინ (ნახ. 129).

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg} \alpha}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკია რაიმე K წირი და $M(x, y)$ ამ წირის ის წერტილია, რომლის აბსცისა გაწარმოების წერტილია. განვიხილოთ საკითხი წირის M წერტილში მხების გავლების შესახებ. მაშინ მოგვიხდება პირველ ქვეპარაგრაფში ჩატარებული მსჯელობის სიტყვა-სიტყვით გამეორება, რის შედეგადაც ისევ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას**



ნახ. 129.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{2}$$

---

* რადგან ნამრავლის ზღვარი ტოლია თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლისა, გვაქვს

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right) = y' \cdot 0 = 0.$$

** I ქვეპარაგრაფში ჩვენ შეხების წერტილის აბსცისა x_0-ით აღვნიშნეთ, აქ კი — უბრალოდ x-ით. ეს ცხადია, არსებითი არაა.

რომელიც კიდევ ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$m_1 = f'(x),$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

დასასრულს, წარმოებულის ცნება შეიძლება გავიაზროთ სრულიად ზოგადი თვალსაზრისით. ვთქვათ, რაიმე პროცესში განიხილება ორი სიდიდე: x არგუმენტი და მისი y ფუნქცია. თუ არგუმენტის Δx ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის Δy ნაზრდი, მაშინ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდება ბუნებრივია ჩაითვალოს y-ის x-ის მიმართ ცვლილების საშუალო სიჩქარედ. მაშინ ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x \to 0$, ანუ წარმოებული

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

არის y-ის x-ის მიმართ ცვლილების (მყისი) სიჩქარე.

§ 2. ელემენტარულ ფუნქციათა გაწარმოების ტექნიკა

იმ ფუნქციების გასაწარმოებლად, რომლებსაც ჩვეულებრივად ვხვდებით პრაქტიკაში, სარგებლობენ უბრალო, მაგრამ მნიშვნელოვანი ფორმულებით, რომელთა ზეპირად ცოდნა აუცილებელია. ახლა სწორედ გადავდივართ ამ ფორმულების გამოყვანაზე.

1. მუდმივის წარმოებული

ვთქვათ, $y=C$ (მუდმივი სიდიდე შეიძლება ჩაითვალოს x არგუმენტის ფუნქციად). შევასრულოთ ის 5 ოპერაცია, რომლებზეც ლაპარაკი იყო წარმოებულის განსაზღვრის დროს.

თუ არგუმენტის მნიშვნელობაა x, მაშინ $y=C$. თუ განვიხილავთ არგუმენტის ახალ $x+\Delta x$ მნიშვნელობას და აღვნიშნავთ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას $y+\Delta y$ სიმბოლოთი, მაშინ მივიღებთ $y+\Delta y=C$. მაშინ

$$\Delta y = 0 \quad \text{და} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

აქედან

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

ანუ

$$\boxed{C' = 0} \tag{1}$$

მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია.

2. დამოუკიდებელი ცვლადის წარმოებული

ვთქვათ, $y=x$. ვიპოვოთ y'. ამისათვის დავაფიქსიროთ x, მაშინ $y=x$ აგრეთვე დაფიქსირდება. მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx და ვიპოვოთ ფუნქციის ახალი მნიშვნელობა $y+\Delta y=x+\Delta x$. აქედან $\Delta y=\Delta x$ და

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

ამიტომ $y'=1$, ანუ

$$\boxed{x'=1} \tag{2}$$

ამგვარად, დამოუკიდებელი ცვლადის წარმოებული 1-ის ტოლია.

3. ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, $y=x^a$. ვიპოვოთ y'. დავაფიქსიროთ x და ვიპოვოთ ფუნქციის სათანადო $y=x^a$ მნიშვნელობა. მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx და გამოვთვალოთ ფუნქციის ახალი მნიშვნელობა

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^a=\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^a=x^a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a$$

მაშინ

$$\Delta y=x^a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-x^a=x^a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1\right]$$

და

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^a\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\Delta x}=x^{a-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\frac{\Delta x}{x}=u$ და გავიხსენებთ „შესანიშნავ ზღვარს" (II თავი, §1, 10)

$$\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^a-1}{u}=a.$$

მივიღებთ

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{a-1}a,$$

ანუ

$$\boxed{(x^{a})' = ax^{a-1}} \tag{3}$$

მაგალითები.

1) თუ $y=x^7$, მაშინ $y'=7x^6$.

2) თუ $y=\sqrt[5]{x^7}$, მაშინ $y'=\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$.

3) თუ $y=\frac{1}{x^8}$, მაშინ $y'=-8x^{-9}$.

კარგი იქნება ცალკე კვადრატული ფესვის წარმოებულის დამახსოვრება. სახელდობრ, ვთქვათ $y=\sqrt{x}$, მაშინ ზოგადი ფორმულიდან გვაქვს

$$y'=(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ანუ

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}} \tag{4}$$

კვადრატული ფესვის წარმოებული უდრის ერთს შეფარდებულს ფესვის გაორკეცებულ მნიშვნელობასთან.

4. სინუსის და კოსინუსის წარმოებულები

ვთქვათ, $y=\sin x$. ვიპოვოთ y'. ვაფიქსირებთ x-ის მნიშვნელობას, მაშინ $y=\sin x$. მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx, მაშინ $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$. აქედან $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$ და ცნობილი ფორმულის

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

თანახმად ვღებულობთ

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

მაშასადამე,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

საიდანაც*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \cos x.$$

ამგვარად,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \qquad (5)$$

სრულიად ანალოგიურად, კოსინუსების სხვაობის ფორმულის

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

გამოყენებით, დავადგენთ ფორმულას

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \qquad (6)$$

5. ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და შეფარდების წარმოებული

სინუსის და კოსინუსის წარმოებულების განხილვის შემდეგ, ბუნებრივია გადავიდეთ ტანგენსის წარმოებულის ფორმულის გამოყვანაზე. მაგრამ

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

ამიტომ დავდექით უფრო ზოგადი ამოცანის წინაშე: ვთქვათ, u და v x არგუმენტის ფუნქციებია, რომელთა წარმოებულები u' და v' არსებობს და ცნობილია. უნდა ვიპოვოთ

$$y = \frac{u}{v}$$

შეფარდების წარმოებული.

---

* რადგან

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

ასეთივე ამოცანა შეიძლება დაისვას არამარტო შეფარდებისათვის, არამედ ფუნქციათა

$$y = uv$$

ნამრავლისათვის, $y = u + v$ ჯამისათვისაც და ა. შ. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ვსვამთ ამოცანას: ვიპოვოთ u და v ფუნქციების ჯამის, სხვაობის, ნამრავლის და შეფარდების წარმოებულები, როცა ცნობილია მოცემულ ფუნქციათა u' და v' წარმოებულები. ამ ამოცანის ამოხსნის შედეგად, მივიღებთ წესებს, რომელთა ზეპირად ცოდნა აგრეთვე აუცილებელია. ამ წესებს გადავნომრავთ რომაული ციფრებით.

ამგვარად, ვთქვათ, u და v x არგუმენტის ფუნქციებია, რომელთა წარმოებულებია u' და v'

I. ჯამის წარმოებული. ვთქვათ, $y = u + v$. ვიპოვოთ y'.

დავაფიქსიროთ x, მაშინ დაფიქსირდება u და v ფუნქციები და მაშასადამე, y-იც, ამასთანავე

$$y = u + v.$$

განვიხილოთ ახლა არგუმენტის ახალი $x + \Delta x$ მნიშვნელობა, მაშინ ჩვენი ფუნქციების ახალი მნიშვნელობები იქნება $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ და

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v).$$

აქედან

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v,$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

ახლა თუ $\Delta x \to 0$, წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v',$$

საიდანაც (ჯამის ზღვრის გამოთვლის წესის საფუძველზე)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' + v'.$$

ამგვარად, $y' = u' + v'$, ანუ

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'} \qquad \text{(I)}$$

ე. ი. ჯამის წარმოებული უდრის შესაკრებთა წარმოებულების ჯამს.

II. **სხვაობის წარმოებული.** ანალოგიურად მტკიცდება რომ

$$\boxed{(u-v)'=u'-v'} \tag{II}$$

სხვაობის წარმოებული უდრის წარმოებულების სხვაობას.

III. **ნამრავლის წარმოებული.** თუ

$$y=uv$$

ფუნქციისათვის იგივე მსჯელობას გავიმეორებთ, მივიღებთ

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v,$$

საიდანაც

$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

და

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\frac{\Delta v}{\Delta x}u+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

თუ $\Delta x\to 0$, მაშინ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ

$$y'=u'v+uv'+u'\cdot 0.$$

აქ ვისარგებლეთ იმით, რომ $\Delta v\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$. ეს ცხადია იმიტომ, რომ v ფუნქციას აქვს წარმოებული v', მაშასადამე, ის x-ის უწყვეტი ფუნქციაა.

ამგვარად,

$$\boxed{(uv)'=u'v+uv'} \tag{III}$$

ნამრავლის წარმოებული უდრის პირველი თანამამრავლის წარმოებულის მეორე თანამამრავლზე ნამრავლისა და მეორე თანამამრავლის წარმოებულის პირველზე ნამრავლის ჯამს.

მაგალითი. თუ $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$,
მაშინ

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x.$$

IV. მუდმივი მამრავლის გამოტანა წარმოებულის ნიშნის გარეთ. განვიხილოთ ნამრავლის წარმოებულის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როცა ერთ-ერთი თანამამრავლი მუდმივია. ვთქვათ, $y=Cu$, სადაც C მუდმივია. თუ ვისარგებლებთ წინა ფორმულით, მივიღებთ

$$y'=C'u+Cu'$$

მაგრამ, რადგან $C'=0$, ამიტომ $y'=Cu'$, ანუ

$$\boxed{(Cu)'=Cu'} \qquad \text{(IV)}$$

მ უ დ მ ი ვ ი მ ა მ რ ა ვ ლ ი შ ე ი ძ ლ ე ბ ა გ ა ვ ი ტ ა ნ ო თ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს ნ ი შ ნ ი ს გ ა რ ე თ.

V. სამი თანამამრავლის ნამრავლის წარმოებული.

ვთქვათ,

$$y=uvw,$$

სადაც w აგრეთვე x არგუმენტის ფუნქციაა და აქვს წარმოებული w'. გამოვთვალოთ y'.

ამისათვის $y=uvw$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე $y=(uv)w$ და გამოვიყენოთ მისთვის III წესი.
მაშინ

$$y'=(uv)'w+(uv)w',$$

ანუ

$$y'=(u'v+uv')w+(uv)w',$$

საიდანაც

$$y'=u'vw+uv'w+uvw',$$

ე. ი.

$$\boxed{(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'} \qquad \text{(V)}$$

ანალოგიურად,

$$(uvwz)'=u'vwz+uv'wz+uvw'z+uvwz'.$$

ამგვარად, რომ მივიღოთ რამდენიმე ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული, საჭიროა პირველი თანამამრავლის წარმოებული გავამრავლოთ ყველა დანარჩენ ფუნქციაზე, შემდეგ მეორე თანამამრავლის წარმოებული გავამრავლოთ ყველა დანარჩენ ფუნქციაზე და ა. შ. უკანასკნელ ფუნქციამდე, შემდეგ მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ.

VI. შეფარდების წარმოებული. ვთქვათ, $y=\dfrac{u}{v}$, სადაც წინანდებურად u და v x არგუმენტის ფუნქციებია, რომლებსაც აქვთ u' და v' წარ-

მოებულები. დავაფიქსიროთ გაწარმოების x წერტილი, მაშინ u და v აგრეთვე ფიქსირებული იქნება. მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx, მაშინ u, v და y ფუნქციები მიიღებენ შესაბამისად Δu, Δv და Δy ნაზრდებს. რადგან

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

ამიტომ

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-(v+\Delta v)u}{(v+\Delta v)v}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{(v+\Delta v)v}.$$

შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$$

და დავუშვათ, რომ $\Delta x\to 0$. მაშინ (თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ $\Delta v\to 0$) მივიღებთ

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

ამგვარად,

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}} \qquad \text{(VI)}$$

წილადის წარმოებული არის წილადი, რომლის მნიშვნელია მოცემული წილადის მნიშვნელის კვადრატი, მრიცხველი არის მოცემული წილადის მრიცხველის წარმოებული გამრავლებული იმავე წილადის მნიშვნელზე გამოკლებული მნიშვნელის წარმოებული გამრავლებული მრიცხველზე.

დავუბრუნდეთ ახლა გაწარმოების სხვა ფორმულების გამოყვანას.

8. ტანგენსის და კოტანგენსის წარმოებულები

ვთქვათ, $y=\operatorname{tg} x$, მაშინ

$$y=\frac{\sin x}{\cos x},$$

და წილადის გაწარმოების წესის თანახმად (VI წესი)

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

ამგვარად,

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}} \tag{7}$$

ასევე მივიღებთ $y=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ წარმოებულს:

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}} \tag{8}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $\sec x$ და $\operatorname{cosec} x$ ფუნქციებზე არ შევჩერდებით, რადგან ეს ფუნქციები იშვიათად გვხვდება (გარდა ამისა ცნობილია, რომ ეს ფუნქციები დაიყვანება უკვე განხილულ ფუნქციებზე

$$\left.\sec x=\frac{1}{\cos x},\qquad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}\right).$$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, $y=a^x$ (ამ ფუნქციას, როგორც უკვე იყო ნათქვამი, ეწოდება მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ფუნქცია, არ უნდა ავურიოთ ის x^a ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ფუნქციაში). ამ ფუნქციის წარმოებულის საპოვნელად, ვატარებთ ჩვეულებრივ გარდაქმნებს

$$y=a^x,\quad y+\Delta y=a^{x+\Delta x}=a^x\cdot a^{\Delta x},$$

საიდანაც

$$\Delta y=a^x a^{\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1).$$

შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

დავუშვათ, რომ $\Delta x \to 0$. მაშინ თუ გავიხსენებთ „შესანიშნავ ზღვარს“ (თ. II, §1, 10)

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\ln a,$$

მივიღებთ

$$y'=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

რის შედეგადაც

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.} \tag{9}$$

საინტერესოა მიღებული ფორმულის კერძო შემთხვევა: როცა $a=e$. სახელდობრ $(e^x)'=e^x\ln e$, მაგრამ, რადგან $\ln e=1$, ვღებულობთ

$$\boxed{(e^x)'=e^x} \tag{10}$$

8. ლოგარითმის წარმოებული

ვთქვათ, $y=\ln x$. დავაფიქსიროთ x და მივცეთ მას Δx ნაზრდი. გვექნება

$$y+\Delta y=\ln(x+\Delta x),$$

საიდანაც

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x$$

ან

$$\Delta y=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

მაშინ, თუ ვისარგებლებთ „შესანიშნავი ზღვრით“ (თ. II, §1, 10), სახელდობრ, ტოლობით

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1,$$

გვექნება

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right]=\frac{1}{x}$$

ამგვარად,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \qquad (11)$$

ნატურალური ლოგარითმის წარმოებული უდრის ერთისა და თავისი არგუმენტის შეფარდებას.

ახლა გამოვთვალოთ იმ ლოგარითმის წარმოებული, რომლის ფუძე ნებისმიერი a რიცხვია.

ვთქვათ, $y = \log_a x$. მაშინ ლოგარითმის განსაზღვრის თანახმად $a^y = x$. გავალოგარითმოთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი e ფუძით. მივიღებთ

$$y \ln a = \ln x$$

ან

$$y = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x.$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით, თუ $\frac{1}{\ln a}$ მამრავლს გავიტანთ, მივიღებთ

$$y' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

ამგვარად,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}} \qquad (12)$$

კერძოდ,

$$(\lg x)' = (\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{0{,}43429}{x}.$$

ვხედავთ, რომ ათობითი ლოგარითმის წარმოებული გამოისახება უფრო რთული ფორმულით, ვიდრე ნატურალური ლოგარითმის წარმოებული. უფრო მეტიც, ყოველი $a \neq e$ -სათვის

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

ფორმულა გამოიყურება უფრო რთულად, ვიდრე შემდეგი ფორმულა

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

ამით არის გამართლებული ზემოთ გაკეთებული შენიშვნა (თ. II, §1, 8) იმის შესახებ, რომ ასითი ფორმულები მარტივდება ნატურალური ლოგარითმების გამოყენებით.

ქვემოთ მოცემულია გამოყვანილი ფორმულებისა და წესების ილუსტრაცია რამდენიმე მაგალითზე.

$$1)\quad y=7x^4+2x^3-9x^2+6x-13.$$

აქ ჯამისა და სხვაობის გაწარმოების წესის, აგრეთვე მუდმივი მამრავლის წარმოებულის ნიშნის გარეთ გატანის წესის გამოყენებით თანმიმდევრულად ვპოულობთ

$$y'=(7x^4)'+(2x^3)'-(9x^2)'+(6x)'-(13)'$$

$$y'=7(x^4)'+2(x^3)'-9(x^2)'+6(x)'-(13)'$$

1, 2 და 3 ფორმულების საფუძველზე ვღებულობთ

$$y'=28x^3+6x^2-18x+6.$$

პრაქტიკაში ყველა საშუალედო გამოთვლებს აკეთებენ ზეპირად და შედეგს წერენ შემდეგ.

$$2)\quad y=\sqrt{x}-\frac{6}{x^8}+9\sqrt[5]{x^3}-3x+2.$$

განმარტებების გარეშე ვღებულობთ

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+48x^{-9}+\frac{27}{5}x^{-\frac{2}{5}}-3.$$

$$3)\quad y=5\operatorname{ctg}x+2\sqrt{x}\sin x+\frac{x^5}{\ln x}.$$

აქ

$$y'=-\frac{5}{\sin^2 x}+2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x\right)+\frac{5x^4\ln x-x^4}{\ln^2 x}.$$

$$4)\quad y=7\ln x\operatorname{tg}x\sin x+3^x.$$

$$y'=\frac{7}{x}\operatorname{tg}x\sin x+7\ln x\frac{1}{\cos^2 x}\sin x+7\ln x\operatorname{tg}x\cos x+3^x\ln 3.$$

$$5)\quad y=\frac{15x^8\cos x-3^x\frac{5}{\sqrt{x}}+1}{\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}}.$$

$$y' = \frac{\left(120x^7\cos x - 15x^8\sin x - 3^x\ln 3\frac{5}{\sqrt{x}} + 3^x\,\frac{5}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right)}{\left(\operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(15\,x^8\cos x - 3^x\,\frac{5}{\sqrt{x}} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)}{\left(\operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right)^2}.$$

ახლა გადავდივართ ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი წესის — რ თ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს გ ა წ ა რ მ ო ე ბ ი ს წ ე ს ი ს — გამოყვანაზე, რომელსაც აგრეთვე უწოდებენ „ჯაჭვურ წესს“.

9. ჯაჭვური წესი

ვთქვათ, $y=f(z)$, სადაც $z=\varphi(x)$. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში y არის x ცვლადის ფუნქცია. მაგალითად,

თუ

$$y=\sin z, \qquad z=2x+5,$$

მაშინ

$$y=\sin(2x+5).$$

იმ შემთხვევებში, როდესაც y და x ცვლადებს შორის დამოკიდებულება მოცემულია ჯაჭვური სახით ორი ფუნქციონალური დამოკიდებულების საშუალებით, სახელდობრ

$$y=f(z), \qquad z=\varphi(x)$$

განტოლებებით, ამბობენ, რომ y არის x-ის რ თ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა, z-ს ეწოდება ს ა შ უ ა ლ ე დ ო ცვლადი.

ა მ ო ც ა ნ ა. ვ თ ქ ვ ა თ, $y=f(z)$ დ ა $z=\varphi(x)$. ვ ი გ უ ლ ი ს ხ მ ო თ, რ ო მ ა რ ს ე ბ ო ბ ს დ ა ც ნ ო ბ ი ლ ი ა $y'_z=f'(z)$ დ ა $z'_x=\varphi'(x)$ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი. ვ ი პ ო ვ ო თ y'_x წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავაფიქსიროთ x არგუმენტი, მაშინ z და y შესაბამისად მიიღებენ $z=\varphi(x)$, $y=f(z)$ მნიშვნელობებს. მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx, მაშინ z მიიღებს Δz ნაზრდს, ეს კი თავის მხრივ გამოიწვევს Δy ნაზრდს.

ჩვენთვის საინტერესო წარმოებული y'_x არის

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

შეფარდების ზღვარი, როდესაც $\Delta x \to 0$. ეს შეფარდება შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

რაც შეეხება მეორე თანამამრავლს $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, წარმოებულის განსაზღვრიდან გამომდინარე ცხადია, რომ ის მიისწრაფვის z'_x-საკენ, როცა $\Delta x \to 0$.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}\to z'_x.$$

რაც შეეხება პირველ თანამამრავლს, უნდა ვიფიქროთ, რომ ანალოგიური მოსაზრებით ის მიისწრაფვის y_z'-საკენ. მაგრამ ეს უშუალოდ ცხადი არ არის. მართლაც

$$y_z'=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z},$$

ჩვენ კი მოცემული გვაქვს რომ $\Delta x \to 0$ და არა $\Delta z \to 0$. მაგრამ ეს აიხსნება მარტივად, თუ ასე ვიმსჯელებთ: პირობის თანახმად z არის x არგუმენტის ფუნქცია, რომელსაც აქვს z'_x წარმოებული. მაშასადამე, ეს ფუნქცია უწყვეტია. ამიტომ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე Δx ნაზრდს შეესაბამება z ფუნქციის უსასრულოდ მცირე Δz ნაზრდი.

ამიტომ $\Delta z \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$ და

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}=y'_z.$$

რადგან ნამრავლის ზღვარი ტოლია თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლისა, ამიტომ როცა $\Delta x \to 0$ გვაქვს:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\to y'_z\cdot z'_x.$$

საიდანაც საბოლოოდ

$$\boxed{y'_x=y_z'\cdot z_x'}. \qquad \text{(VII)}$$

ამგვარად, რთული ფუნქციის წარმოებული დამოუკიდებელი ცვლადით, უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულს საშუალედო ცვლადით, გამრავლებულს საშუალედო ცვლადის წარმოებულზე დამოუკიდებელი ცვლადით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჯაჭვური წესი გახდება სავსებით ნათელი, თუ გავიხსენებთ, რომ y'_x არის y-ის ც ვ ლ ი ლ ე ბ ი ს ს ი ჩ ქ ა რ ე x-ის მ ი მ ა რ თ. მართლაც, თუ y ორჯერ უფრო სწრაფად იცვლება ვიდრე z, ხოლო z სამჯერ უფრო სწრაფად, ვიდრე x, მაშინ

$$y_z'=2, \qquad z_x'=3.$$

ამავე დროს ცხადია, რომ y იცვლება 6-ჯერ უფრო სწრაფად, ვიდრე x. ე. ი. $y'_x=6$. მაშასადამე,

$$y_x'=6=2\cdot 3=y'_z\cdot z'_x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ვთქვათ, $y=\sin z$, ხოლო $z=\sqrt{x}$, მაშინ

$$y_x'=\cos z\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) თუ $y=\ln z$, $z=\operatorname{tg} x$, მაშინ $y'_x=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3) თუ $y=z^8$, $z=\dfrac{x}{\sin x}$, მაშინ

$$y'_x=8z^7\,\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}.$$

გარჩეულ მაგალითებში საშუალედო ცვლადი თავიდანვე მოცემულია. შემდეგ მაგალითებში საშუალედო ცვლადს ჩვენ თვითონ შემოვიღებთ.

4) $y=3^{\operatorname{tg} x}$, ვიპოვოთ y'*.

დავუშვათ, რომ $z=\operatorname{tg} x$, მაშინ $y=3^z$ და

$$y'_x=3^z\ln 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

თუ z-ს შევცვლით $\operatorname{tg} x$**-ით, მივიღებთ საბოლოოდ

$$y'=3^{\operatorname{tg} x}\ln 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

5) $y=\sqrt{5x^3+3x^2+8x-2}$. ვიპოვოთ y'

---

* რადგან სხვა ცვლადები გარდა x და y-ისა არა გვაქვს, შეიძლება y_x'-ის მაგივრად დავწეროთ, უბრალოდ y'.

** 1—3 მაგალითებში ასეთი შეცვლა არ მოგვიხდენია, რადგან იქ თავიდანვე იყო მოცემული z ცვლადი.

დავუშვათ, რომ $z=5x^3+3x^2+8x-2$, მაშინ $y=\sqrt{z}$ და

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot(15x^2+6x+8),$$

ანუ

$$y'=\frac{15x^2+6x+8}{2\sqrt{5x^3+3x^2+8x-2}}.$$

6) $y=\cos^5 x$, ვიპოვოთ y'

დავუშვათ $z=\cos x$, მაშინ $y=z^5$ და $y'_x=5z^4\cdot(-\sin x)$,

ანუ

$$y'=-5\cos^4 x\sin x.$$

შემდეგ მაგალითებში საშუალედო ცვლადს შემოვიღებთ ზეპირად.

7) $y=\sin e^x$, $\qquad y'=\cos e^x\cdot e^x$.

8) $y=\ln\operatorname{tg}x$, $\qquad y'=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

9) $y=\operatorname{tg}^8 x$, $\qquad y'=8\operatorname{tg}^7 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

ჩვეულებრივად ასეც იქცევიან, საშუალედო ცვლადს არ წერენ.

აქამდე ვიხილავდით შემთხვევებს, როდესაც y-სა და x-ს შორის დამოკიდებულება მოცემულია ერთი საშუალედო z ცვლადის საშუალებით. პრაქტიკაში გვხვდება შემთხვევები, სადაც საშუალედო ცვლადების რიცხვი ერთზე მეტია.

მაგალითად,

$$y=\sqrt{\sin(\ln x)}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\sin(\ln x)=z$, მაშინ $y=\sqrt{z}$ და

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z_x'=\frac{1}{2\sqrt{\sin\ln x}}\cdot z_x'.$$

გვრჩება ვიპოვოთ z'_x. მაგრამ აქ z არის x-ის რთული ფუნქცია, ამიტომ z'_x-ის საპოვნელად საჭიროა ხელახლა გამოვიყენოთ ჯაჭვური წესი.. სახელდობრ დავუშვათ, რომ $\ln x=u$, მივიღებთ $z=\sin u$ და

$$z'_x=z_u'\cdot u_x'=\cos u\cdot\frac{1}{x}=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

საბოლოოდ

$$y_x' = \frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln x)}} \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, საშუალედო ცვლადს ჩვენ არ ვწერთ, არამედ მას გონებაში წარმოვიდგენთ ხოლმე. ეს საშუალებას გვაძლევს თავიდან ავიცილოთ ბევრი ასოითი აღნიშვნის შემოღება. კერძოდ, z ასოთი მიმდევრობით შეგვიძლია აღვნიშნოთ სხვადასხვა სიდიდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ,

$$y = \operatorname{tg} e^{\sqrt{x}}$$

ვიპოვოთ y'. $e^{\sqrt{x}}$ უნდა აღვნიშნოთ z-ით (გონებაში) და წარმოვიდგინოთ, რომ y გამოსახულია $\operatorname{tg} z$-ის საშუალებით, საიდანაც ადვილად გამოვა, რომ

$$y' = \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt{x}}} \cdot z_x' = \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt{x}}} \cdot \left(e^{\sqrt{x}}\right)',$$

$(e^{\sqrt{x}})'$-ის საპოვნელად, საჭიროა ხელახლა შემოვიღოთ z ცვლადი, რომელიც ახლა უკვე გამოსახავს $\sqrt{x}$-ს. მაშინ

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = (e^z)'_x = e^z \cdot z' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

და

$$y' = \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt{x}}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

გარკვეული ვარჯიშის შემდეგ ამ ხერხის გამოყენება გაადვილდება და გაწარმოების შედეგი შეიძლება ჩაიწეროს მყისვე. მაგალითად, თუ

$$y = \ln[\cos(x^2 + x + 1)];$$

მაშინ

$$y' = \frac{1}{\cos(x^2 + x + 1)} [-\sin(x^2 + x + 1)] \quad (2x + 1)$$

ან, თუ

$$y = 4^{\operatorname{tg}(x^3)},$$

მაშინ

$$y' = 4^{\operatorname{tg}(x^3)} \ln 4 \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3)} \quad 3x^2.$$

იმისათვის, რომ რთულ შემთხვევებში ადვილად გავერკვეთ, რეკომენდებულია შემდეგი

წესი. თუ **გასაწარმოებული ფუნქცია არის** x **არგუმენტზე მთელი რიგი მოქმედებების მოხდენის შედეგი, მაშინ საშუალედო** z **არგუმენტით უნდა აღვნიშნოთ ყველა მოქმედების შედეგი, გარდა უკანასკნელისა.**

მაგალითად, თუ

$$y=\mathrm{tg}^3\sqrt[5]{\ln\sin x},$$

მაშინ*

$$z=\mathrm{tg}\sqrt[5]{\ln\sin x}$$

და

$$y=z^3.$$

ხოლო, თუ

$$y=e^{\mathrm{ctg}^2\frac{x}{\sqrt{x+2}}}$$

მაშინ

$$z=\mathrm{ctg}^2\frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

და

$$y=e^z.$$

მოცემული მითითებების გამოყენებით, ამოვხსნათ კიდევ რამდენიმე უფრო რთული მაგალითი.

1) თუ $y=\mathrm{tg}\sqrt[3]{\ln x}$, მაშინ

$$y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{3}(\ln x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}.$$

2) თუ $y=\ln^6\sin x$, მაშინ

$$y'=6\ln^5\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

3) თუ $y=e^{\mathrm{ctg}^4x}$, მაშინ

$$y'=-e^{\mathrm{ctg}^4x}\cdot 4\,\mathrm{ctg}^3x\cdot\frac{1}{\sin^2x}.$$

* რადგან y-ის გამოსათვლელი **უკანასკნელი** მოქმედება **კუბში ახარისხება.**

4) თუ $y=2^{\sqrt{\operatorname{ctg}\ln\sin x}}$ მაშინ

$$y'=2^{\sqrt{\operatorname{ctg}\ln\sin x}}\cdot\ln2\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}\ln\sin x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2\ln\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

5) თუ $y=\cos^8\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}$ მაშინ

$$y'=8\cos^7\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot(-\sin\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}})\cdot3\operatorname{tg}^2 e^{\sqrt[4]{x}}\times$$

$$\times\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}}\cdot e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

10. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი გაწარმოება

იმისათვის, რომ დავასრულოთ ელემენტარულ ფუნქციათა გაწარმოების შესწავლა, დაგვრჩა შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განხილვა., გაგახსენებთ მოკლედ მათ განსაზღვრას.

I. არკსინუსი.

განსაზღვრა. კუთხეს, რომლის სინუსი მოცემული m რიცხვის ტოლია, ეწოდება m რიცხვის არკსინუსი და აღინიშნება $\operatorname{Arcsin} m$ სიმბოლოთი.

ამგვარად, ტოლობა

$$\operatorname{Arcsin} m=\alpha$$

სავსებით ტოლფასია

$$\sin\alpha=m$$

ტოლობისა.

მაგალითი რას უდრის $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$. განსაზღვრის თანახმად $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, ასევე $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=150^\circ=\frac{5\pi}{6}$, ან $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=$ $=390^\circ$, ან $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=510^\circ$. რადგან

$$\sin30^\circ=\frac{1}{2},\quad \sin150^\circ=\frac{1}{2}\quad \text{და ა. შ.}$$

რადგან ყოველი m-ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს

$$-1 \leqslant m \leqslant 1$$

უტოლობებს, არსებობს α კუთხის მნიშვნელობათა უ ს ა ს რ უ ლ ო ს ი მ რ ა ვ ლ ე, რომლებისათვისაც

$$m = \sin \alpha,$$

ამიტომ

$$\text{Arcsin } m$$

სიმბოლოს აქვს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე.

α კუთხის იმ მნიშვნელობას, რომლის სინუსი ტოლია მოცემული m რიცხვისა, და

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(ასეთი კუთხე ერთადერთია!), ეწოდება Arcsin m-ის მთავარი მნიშვნელობა და აღინიშნება $\arcsin m$ სიმბოლოთი ეს უკანასკნელი ცალსახაა.

ამგვარად,

$$\alpha = \text{Arcsin } m$$

ტოლობა ტოლფასია

$$\sin \alpha = m$$

ტოლობისა, ხოლო

$$\alpha = \arcsin m$$

ტოლობა ტოლფასია სისტემისა, რომელიც შედგება

$$\sin \alpha = m$$

ტოლობისა და
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

უტოლობისაგან.

ამგვარად,

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

მაშინ, როდესაც

$$\text{Arcsin } 0 = 0, \quad \text{Arcsin } 0 = \pi, \quad \text{Arcsin } 0 = -3\pi \text{ და ა. შ.}$$

$$\text{Arcsin } 1 = 90^\circ, \quad \text{Arcsin} 1 = -270^\circ, \quad \text{Arcsin} 1 = 450^\circ \text{ და ა. შ.}$$

II. **არკკოსინუსი.** Arccos m სიმბოლოთი აღინიშნება α კუთხის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლიდან ნებისმიერი, რომლის კო-

სინუსი მოცემული m რიცხვის ტოლია. ამ მნიშვნელობებიდან მას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

უტოლობას, ეწოდება $\operatorname{Arccos} m$-ის მ თ ა ვ ა რ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა და აღინიშნება $\arccos m$ სიმბოლოთი. ამგვარად,

$$\alpha = \operatorname{Arc} \cos m$$

ტოლობა ტოლფასია

$$\cos \alpha = m$$

ტოლობისა, ხოლო

$$\alpha = \arccos m$$

ტოლობა ტოლფასია სისტემისა, რომელიც შედგება

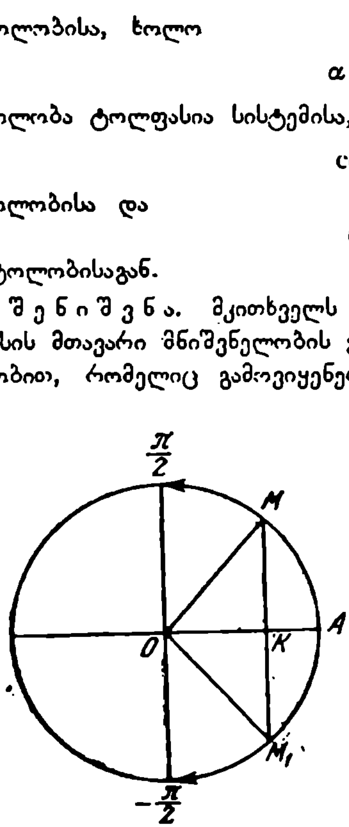
$$\cos \alpha = m$$

ტოლობისა და

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

უტოლობისაგან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მკითხველს შეიძლება გაუკვირდეს, რომ არკკოსინუსის მთავარი მნიშვნელობის გამოსაყოფად არ ვისარგებლეთ იმ უტოლობით, რომელიც გამოვიყენეთ არკსინუსისათვის. საქმე იმაშია რომ (როგორც ეს ჩანს 130-ე ნახაზიდან) AOM და AOM_1 კუთხეები ორივე მოთავსებულია $-\frac{\pi}{2}$ და $+\frac{\pi}{2}$ რიცხვებს შორის და აქვთ ერთი და იგივე კოსინუსი (რომელიც ტოლია OK მონაკვეთის სიდიდისა და რადიუსის შეფარდებისა).



ნახ. 130.

ამგვარად სისტემა; რომელიც შედგება

$$\cos \alpha = m$$

ტოლობისა და

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

უტოლობისაგან, არ განსაზღვრავს α კუთხეს ც ა ლ ს ა ხ ა დ (თუ არ ვილაპარაკებთ აგრეთვე იმაზე, რომ $-\frac{\pi}{2}$ და $+\frac{\pi}{2}$ საზღვრებში საზოგა-

დოდ ვერ ვპოულობთ კუთხეებს, რომლებსაც აქვთ უარყოფითი კოსინუსი). პირიქით,

$$\cos\alpha = m, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

სისტემა (როცა $-1 \leqslant m \leqslant 1$) გვაძლევს არკკოსინუსის ცალსახად განსაზღვრის საშუალებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30° = \frac{\pi}{6} \quad \text{და} \quad \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} = -30° = -\frac{\pi}{6}$$

(ორივე კუთხე მოთავსებულია $-\frac{\pi}{2}$ და $+\frac{\pi}{2}$ შორის)

$$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} = 330° = \frac{11\pi}{6} \text{ და ა. შ.}$$

მაშინ; როდესაც

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30° = \frac{\pi}{6},$$

ე. ი. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ სიმბოლო განსაზღვრავს ე რ თ ა დ ე რ თ კუთხეს. ზუსტად ასევე $\arccos(-1) = 180° = \pi$.

ანალოგიურად, Arctg m-ით აღინიშნება α კუთხეებიდან ნებისმიერი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\operatorname{tg}\alpha = m,$$

ხოლო მათ შორის ის, რომელიც აკმაყოფილებს

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

უტოლობას, აღინიშნება arctg m*-ით.

---

* ვხედავთ, რომ არკტანგენსის მთავარი მნიშვნელობის გამოსაყოფად სარგებლობენ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ უტოლობით, ის მსგავსია $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ უტოლობისა, რომელიც ზემოთ გამოყენებული იყო არკსინუსის განსაზღვრისათვის. ახლა კი ტოლობის ნიშნებს არ ვწერთ. ეს აიხსნება იმით, რომ $-\frac{\pi}{2}$ და $+\frac{\pi}{2}$ კუთხეებს არა აქვთ ტანგენსი.

ბოლოს, $\operatorname{arcctg} m$ არის ისეთი (ერთადერთი) α კუთხე, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\operatorname{ctg} \alpha = m, \quad 0 < \alpha < \pi$$

შესაბამისობებს. ხოლო $\operatorname{Arcctg} m$ არის ნებისმიერი იმ კუთხეებიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ მხოლოდ პირველ შესაბამისობას.

გადავიდეთ ახლა შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გაწარმოების საკითხზე. მივიღებთ გაწარმოების კიდევ 4 ფორმულას, რომლებიც ზემოთ მიღებულ 12 ფორმულასთან ერთად უნდა ვიცოდეთ ზეპირად.

$\arcsin x$-ის წარმოებული. ვთქვათ,

$$y = \arcsin x,$$

მაშინ

$$\sin y = x.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს იგივეობას x-ის მიმართ, რადგან ის მართებულია ყოველი x-ისათვის (რომელიც აკმაყოფილებს $-1 \leqslant x \leqslant 1$ უტოლობას), თუ იგულისხმება, რომ y არის სწორედ $\arcsin x$.

იგივეობა შეიძლება გავაწარმოოთ.

ამგვარად, გავაწარმოოთ $\sin y = x$ იგივეობა x არგუმენტის მიმართ. ამასთან, უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს x-ის რ თ უ ლ ფუნქციას (y ასრულებს საშუალედო ცვლადის როლს). რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით მივიღებთ*

$$\cos y \cdot y' = 1.$$

აქედან

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

გამოვსახოთ მიღებული შედეგი x-ით, რადგან $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ და $\sin^2 y = x^2$, გვაქვს

$$\cos^2 y = 1 - x^2$$

და

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

რადიკალის წინ დავტოვოთ „+“ ნიშანი, რადგან y, როგორც $\arcsin x$-ის მ თ ა ვ ა რ ი მნიშვნელობა, აკმაყოფილებს უტოლობას

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

ხოლო ასეთი კუთხეების კოსინუსი არაუარყოფითია $\cos y \geqslant 0$.

---

* ეს გამოყვანა (ისევე როგორც შემდეგი სამის) არ არის სავსებით მკაცრი, თავიდანვე იგულისხმება y'-ის არსებობა.

ამგვარად,

$$y'=\frac{1}{\cos y}, \qquad \cos y=\sqrt{1-x^2},$$

საბოლოოდ,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ანუ

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{13}$$

arccos x-ის წარმოებული.

ვთქვათ: $y=\arccos x$, მაშინ $\cos y=x$.

გავაწარმოოთ ეს იგივეობა x-ით.

$$-\sin y\cdot y'=1.$$

აქედან

$$y'=-\frac{1}{\sin y}.$$

გამოვსახოთ ეს შედეგი x-ის საშუალებით; რადგან $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ და $\cos^2 y=x^2$: ამიტომ

$$\sin y=\sqrt{1-x^2}.$$

რადიკალის წინ აღებულია „+" ნიშანი, რადგანაც y არის arccos x-ის მთავარი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$0\leqslant y\leqslant\pi$$

უტოლობას, ხოლო ამ კუთხეების სინუსი არაუარყოფითია: $\sin y\geqslant 0$.

ამგვარად,

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\boxed{(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{14}$$

arc tg x-ის წარმოებული. ვთქვათ, $y=\operatorname{arctg} x$, მაშინ $\operatorname{tg} y=x$.

გავაწარმოოთ ეს იგივეობა x-ით:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\cdot y'=1$$

ან

$$y'=\cos^2 y.$$

y' გამოვსახოთ x-ის საშუალებით.

$$y'=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

ამგვარად,

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}} \tag{15}$$

arc ctg x-ის წარმოებული. ვთქვათ, რომ $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, მაშინ

$$\operatorname{ctg} y=x.$$

გავაწარმოოთ ეს იგივეობა x-ით:

$$\frac{-1}{\sin^2 y}\cdot y'=1.$$

აქედან

$$y'=-\sin^2 y.$$

y' გამოვსახოთ x-ის საშუალებით:

$$y'=\frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y}=\frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=\frac{-1}{1+x^2}.$$

რის შედეგადაც

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}} \tag{16}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) თუ $y=\dfrac{\ln^2 x}{\arcsin x}$, მაშინ

$$y'=\frac{2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\arcsin x-\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

2) თუ $y=e^{\operatorname{arctg}^5\sqrt{x}}$, მაშინ

$$y'=e^{\operatorname{arctg}^5\sqrt{x}}\cdot 5\operatorname{arctg}^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3) თუ $y=\arccos^6\ln(3x+2)$, მაშინ

$$y'=6\arccos^5\ln(3x+2)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\ln^2(3x+2)}}\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3.$$

11. გაწარმოების განსაკუთრებული შემთხვევები

I. ვიპოვოთ

$$y=\log_{\sin x}\operatorname{tg}x$$

წარმოებული.

რადგან გაწარმოების არცერთი ფორმულა უშუალოდ არ გამოდგება, გარდავქმნათ ეს ტოლობა ლოგარითმის განსაზღვრის გამოყენებით. მაშინ მივიღებთ

$$(\sin x)^y=\operatorname{tg}x.$$

ეს ტოლობა გავალოგარითმოთ e-ს ფუძით:

$$y\ln\sin x=\ln\operatorname{tg}x.$$

აქედან

$$y=\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\ln\sin x}.$$

თუ გამოვიყენებთ წილადის გაწარმოების წესს, მივიღებთ

$$y'=\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}\cdot\ln\sin x-\ln\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\ln^2\sin x}.$$

ანალოგიურად შეიძლება გავაწარმოოთ

$$y=\log_v u$$

სახის ყოველი ფუნქცია, სადაც u და v x-ის მოცემული ფუნქციებია.

II. $y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}x}$

ვიპოვოთ y'

გავალოგარითმოთ მოცემული ტოლობა. მაშინ მივიღებთ

$$\ln y=\operatorname{arctg}x\cdot\ln\sin x.$$

უკანასკნელი ტოლობა გავაწარმოოთ x-ით. ჯაჭვური წესის გამოყენებით ვპოულობთ

$$\frac{1}{y}\, y' = \frac{1}{1+x^2} \ln \sin x + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

აქედან

$$y' = \left(\frac{\ln \sin x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x\right) (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}.$$

ეს ხერხი საშუალებას გვაძლევს გავაწარმოოთ

$$y = u^v$$

სახის ყოველი ფუნქცია, სადაც u და v x ცვლადის მოცემული ფუნქციებია

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) თუ $y = \log_x \cos x$, მაშინ $x^y = \cos x$, აქედან

$$y \ln x = \ln \cos x \quad \text{და} \quad y = \frac{\ln \cos x}{\ln x}.$$

თუ გავაწარმოებთ მიღებულ წილადს, მივიღებთ

$$y' = \frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x} \ln x - \dfrac{\ln \cos x}{x}}{\ln^2 x}.$$

2) თუ $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$, მაშინ $\ln y = \sqrt{x} \ln \operatorname{arctg} x$,

საიდანაც

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \operatorname{arctg} x + \sqrt{x}\, \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

და საბოლოოდ

$$y' = \left(\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2) \operatorname{arc\,tg} x}\right) (\operatorname{arc\,tg} x)^{\sqrt{x}}$$

ბოლოს მოგვყავს მიღებული ფორმულების ცხრილი და გაწარმოების წესები.

გაწარმოების ფორმულები

1. $c'=0$
2. $(x)'=1$
3. $(x^{a})'=ax^{a-1}$
4. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\sin x)'=\cos x$
6. $(\cos x)'=-\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(a^x)'=a^x \ln a$
10. $(e^x)'=e^x$
11. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
12. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
13. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

გაწარმოების წესები

I. $(u+v)'=u'+v'$

II. $(u-v)'=u'-v'$

III. $(uv)'=u'v+v'u$

IV. $(cu)'=cu'$

V. $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

VI. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

VII. $y'_x=y'_z\cdot z'_x$

§ 3. დიფერენციალი

1. დიფერენციალის განსაზღვრა

წარმოებულის ცნებასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული დიფერენციალის* ცნება, რომლის შესწავლაზე ახლა გადავდივართ.

ვთქვათ, $y=f(x)$ არის რაიმე ფუნქცია, რომელსაც გარკვეულ x წერტილში აქვს $f'(x)$ წარმოებული.

* სიტყვიდან „დიფერენციალი" (ლათინური *differentia* რაც ნიშნავს „სხვაობას") წარმოდგება სახელწოდება დიფერენციალური აღრიცხვა. მაგრამ ძირითადი ამ აღრიცხვაში მაინც არის წარმოებულის ცნება.

მივცეთ არგუმენტს (გამომდინარე ხსენებული x მნიშვნელობიდან) Δx ნაზრდი და Δy იყოს ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდი.
წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'.$$

რადგან ცვლადსა და მის ზღვარს შორის სხვაობა უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $\Delta x \to 0$. დავუშვათ, რომ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha,$$

მაშინ $\alpha \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$ და $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, საიდანაც

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x.$$

$\alpha \Delta x = \rho$, სიდიდე უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე მისი მამრავლები (კერძოდ, ვიდრე Δx), როგორც ორი უსასრულოდ მცირის ნამრავლი.
ამგვარად,

$$\boxed{\Delta y = y' \Delta x + \rho}$$

თუ $y' \neq 0$, მაშინ მარჯვენა ნაწილში პირველი შესაკრები იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეა, როგორიც Δx, ხოლო მეორე შესაკრები უფრო მაღალი რიგისაა. ამიტომ მცირე Δx ნაზრდის შემთხვევაში მეორე შესაკრები ნაკლები მნიშვნელობისაა, ვიდრე პირველი. ამ პირველ შესაკრებს (მიუხედავად იმისა $y' \neq 0$, თუ არა) უწოდებენ ფუნქციის დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ს. უფრო ზუსტად ამ ცნებას აქვს ასეთი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. $y = f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში ეწოდება ამ x წერტილში ფუნქციის $y' = f'(x)$ წარმოებულისა და არგუმენტის ნებისმიერი Δx ნაზრდის ნამრავლს.

დიფერენციალი აღინიშნება dy, ან $df(x)$ სიმბოლოთი

$$\boxed{dy = y' \Delta x}$$

ამგვარად, dy დიფერენციალი დამოკიდებულია ორ სიდიდეზე: x წერტილზე და Δx ნაზრდზე.

რადგან
$$\Delta y = dy + \rho,$$
ამიტომ ფუნქციის დიფერენციალი და მისი ნაზრდი განსხვავდება ერთმანეთისაგან ρ უსასრულოდ მცირით, რომელიც უფრო მაღალი რიგისაა, ვიდრე Δx. თუ ამ უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეს უგულებელვყოფთ, მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობას
$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$
ანუ მცირე Δx ნაზრდის შემთხვევაში ფუნქციის ნაზრდი მიახლოების დიდი სიზუსტით შეიძლება შეიცვალოს მისი დიფერენციალით.

მაგალითები. 1) ვთქვათ, $y = x^2 + 2x + 5$. გამოვთვალოთ Δy ნაზრდი და dy დიფერენციალი, თუ $x = 2$ და $\Delta x = 0{,}001$.

როცა $x = 2$, მაშინ $y = 13$, ხოლო როცა არგუმენტი ღებულობს $x + \Delta x = 2{,}001$ მნიშვნელობას, მაშინ
$$y + \Delta y = (2{,}001)^2 + 4{,}002 + 5 = 13{,}006001,$$
საიდანაც
$$\Delta y = 0{,}006001.$$
გამოვთვალოთ dy:
$$dy = y' \Delta x = (2x + 2)\Delta x = (2 \cdot 2 + 2)0{,}001 = 0{,}006.$$
ამგვარად, $\rho = 0{,}000001$ და დაშვებული აბსოლუტური ცდომილება, როცა Δy იცვლება dy-ით, ტოლია $0{,}000001$. მაგრამ აბსოლუტური ცდომილება არ იძლევა გამოთვლის სიზუსტის სრულ დახასიათებას. ამიტომ გამოვთვალოთ ფარდობითი ცდომილებაც
$$\delta = \frac{\rho}{\Delta y} = \frac{0{,}000001}{0{,}006001} < 0{,}02\%.$$
ამგვარად, Δy-ის dy-ით შეცვლისას ფარდობითი ცდომილება ნაკლებია $0{,}02\%$. ეს სიზუსტე ჩვეულებრივად საკმარისია გამოთვლებისათვის, რომელიც ტექნიკაში წარმოებს.

2) მეორე მაგალითის სახით განვიხილოთ ჩვივე $y = x^2 + 2x + 5$ ფუნქცია არგუმენტის იგივე საწყისი $x = 2$ მნიშვნელობისათვის, მაგრამ ავიღოთ $\Delta x = 3$.

ამ შემთხვევაში ფუნქციის ძველი მნიშვნელობა კვლავ 13-ის ტოლია, ხოლო ახალი მნიშვნელობა
$$y + \Delta y = 5^2 + 10 + 5 = 40,$$

ასე, რომ

$$\Delta y = 27.$$

მეორე მხრივ

$$dy = (2x+2)\Delta x = (2 \quad 2+2) \quad 3 = 18$$

და ამიტომ

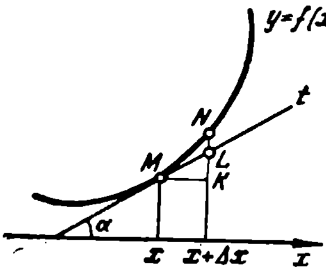
$$\rho = 27 - 18 = 9.$$

მაშასადამე, Δy-ის dy-ით შეცვლისას ფარდობითი ცდომილება ტოლია $\frac{9}{27} > 30\%$. თვალსაჩინოდ ვხედავთ, რომ Δy-ის შეცვლა dy-ით კანონიერია მხოლოდ მაშინ, როდესაც Δx საკმაოდ მცირეა.

2. დიფერენციალის გეომეტრიული აზრი

ვთქვათ, $y = f(x)$ რაიმე ფუნქციაა, რომელსაც x წერტილში აქვს წარმოებული $y' = f'(x)$. მისი გრაფიკი გამოსახულია 131-ე ნახაზზე. ნახაზიდან ჩანს, რომ $KN = \Delta y$, ხოლო $KL = MK \operatorname{tg} \alpha$, ანუ $KL = y'\Delta x$, საიდანაც $dy = KL$ და $\rho = LN$. ამგვარად, **დიფერენციალი** გეომეტრიულად **წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკისადმი მხებზე მოძრავი წერტილის ორდინატის ნაზრდს**, ამიტომ Δy-ის dy-ით შეცვლა გეომეტრიულად ნიშნავს წირის ნაწილის მხების სათანადო ნაწილით შეცვლას.

ნახაზიდან ჩანს, რომ dy პირდაპირპროპორციულია Δx-ისა. ეს ჩანს $dy = y'\Delta x$ ფორმულიდანაც, სადაც y' პროპორციულობის კოეფიციენტია.



ნახ. 131.

ამგვარად, თუ Δy-ს ვცვლით dy-ით, ამით ფუნქციის მცირე ცვლილებას ვთვლით არგუმენტის ცვლილების პროპორციულად. ამ იდეას მკითხველი ჯერ კიდევ სკოლის კურსიდან იცნობს ლოგარითმული ცხრილების გამოყენებასთან დაკავშირებით.

შეიძლება ითქვას, რომ მცირე უბანზე ყოველი ფუნქცია წრფივი ფუნქციის ყოფაქცევისაა. მექანიკის ენაზე ეს ნიშნავს, რომ დროის მცირე შუალედში ყოველგვარი მოძრაობა შეიძლება ჩაითვალოს თანაბარ მოძრაობად.

3. ფუნქციის დიფერენციალის მონახვა

1) ვთქვათ, $y=x^2+x+1$. ვიპოვოთ dy, როცა $x=2$ და $\Delta x=0{,}1$.

გამოვთვალოთ $dy=y'\Delta x$ ფორმულით, რადგან $y'=2x+1$, ამიტომ, როცა $x=2$, იქნება $y'=5$ და $dy=0{,}5$.

2) ვთქვათ, $y=x^3$. ვიპოვოთ dy, როცა $x=4$.

$$y'=3x^2=48, \quad dy=48\Delta x.$$

ამ მაგალითში dy-ს არა აქვს გარკვეული მნიშვნელობა, რადგან Δx არ არის მოცემული.

3) ვთქვათ, $y=\sqrt{x}$. ვიპოვოთ dy, როცა $\Delta x=0{,}01$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dy=\frac{0{,}005}{\sqrt{x}}.$$

აქაც dy-ს არა აქვს გარკვეული მნიშვნელობა, რადგან x არ არის მოცემული.

4) ვთქვათ, $y=8x^2$, ვიპოვოთ dy.

$$y'=16x, \quad dy=16x\Delta x.$$

5) $d\operatorname{arctg}x=\dfrac{\Delta x}{1+x^2}$.

6) $d\ln x=\dfrac{\Delta x}{x}$.

7) $de^{\sqrt{\operatorname{arctg}\ln x}}=e^{\sqrt{\operatorname{arctg}\ln x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\ln x}}\cdot\dfrac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\Delta x$.

8) $dx=1\cdot\Delta x$, ანუ დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალი ემთხვევა მის ნაზრდს:

$$\boxed{dx=\Delta x}$$

ეს ფაქტი მეტად მნიშვნელოვანია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $dy=y'\Delta x$ ფორმულა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\boxed{dy=y'dx}$$

მაგალითად,

$$d\cos x=-\sin x dx, \quad de^x=e^x dx$$

$dy = y'dx$ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $y' = \frac{dy}{dx}$, ე. ი. წარმოებული შეიძლება აღინიშნოს ასე

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

ტექნიკურ ლიტერატურაში უფრო ხშირად გვხვდება $\frac{dy}{dx}$ აღნიშვნა, ვიდრე y'

4. დიფერენციალის ჩანაწერის ინვარიანტობა

$dy = y_x'dx$ ფორმულა, რომელიც დადგენილია იმ შემთხვევისათვის, როცა x დამოუკიდებელი ცვლადია, მართებულია მაშინაც, როდესაც x თავის მხრივ რაიმე t ცვლადის ფუნქციაა.

მართლაც, ვთქვათ $y = f(x)$, ხოლო $x = \varphi(t)$. მაშინ y დამოკიდებულია t ცვლადზე და dy უნდა გამოითვალოს ფორმულით.

$$dy = y'_t \Delta t.$$

მაგრამ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$y'_t = y_x' \cdot x'_t,$$

ამიტომ

$$dy = y_x' \cdot x'_t \Delta t.$$

x არის t-ს ფუნქცია, ამიტომ $x'_t \Delta t = dx$.

საბოლოოდ გვაქვს

$$dy = y_x' dx.$$

ამგვარად, dy-ის ჩანაწერის ფორმა უცვლელია მიუხედავად იმისა x დამოუკიდებელი ცვლადია, თუ თვითონ არის რაიმე სხვა ცვლადზე დამოკიდებული. ამ თვისებას უწოდებენ დიფერენციალის ჩაწერის ფორმის ინვარიანტობას*.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ფორმულა $dy = y'_x \cdot \Delta x$, მართებულია, როცა x დამოუკიდებელი ცვლადია, მაგრამ როცა $x = \varphi(t)$, მაშინ მცდარია, რადგან ამ შემთხვევაში Δx არ უდრის dx-ს.

5. დიფერენციალის გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში

უკვე აღვნიშნეთ, რომ საკმაოდ მცირე Δx ნაზრდის შემთხვევაში

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

---

* „ინვარიანტობა" ნიშნავს „უცვლელობას".

მიახლოებითი ტოლობა იძლევა სიზუსტის კარგ ხარისხს. ეს გარემოება გვაძლევს საშუალებას გამოვიყენოთ დიფერენციალი, როცა საჭიროა ფუნქციის ნაზრდის გამოთვლა, თუ არგუმენტის ნაზრდი საკმაოდ მცირეა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) გამოვთვალოთ $\sqrt{16,06}$.

ვთქვათ, $y=\sqrt{x}$; თუ $x=16$, მაშინ $y=4$. უნდა გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობა, როდესაც არგუმენტი ტოლია 16,06. ამისათვის საკმარისია გავიგოთ, თუ რა Δy ნაზრდს ღებულობს $y=\sqrt{x}$ ფუნქცია, როცა არგუმენტის $x=16$ მნიშვნელობა ღებულობს $\Delta x=0,06$ ნაზრდს. რადგან 0,06 საკმაოდ მცირეა, ამიტომ შეიძლება Δy-ის ნაცვლად გამოვთვალოთ dy დიფერენციალი. ამ სიდიდის გამოთვლა ადვილია:

$$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{0,06}{2\sqrt{16}}=\frac{0,06}{8}=0,0075.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta y=dy$ და გავითვალისწინებთ, რომ $y=4$, მივიღებთ მიახლოებით ტოლობას

$$\sqrt{16,06}\approx y+dy=4,0075.$$

სინამდვილეში

$$\sqrt{16,06}=4,00749\ldots$$

2) ვთქვათ, საჭიროა $\sqrt[n]{1+\sigma}$ სიდიდის გამოთვლა, სადაც σ საკმაოდ მცირეა.

განვიხილოთ $y=\sqrt[n]{x}$ ფუნქცია. მაშინ, როცა $x=1$, $y=1$, ხოლო ჩვენ გვაინტერესებს $\sqrt[n]{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობა, როდესაც $x=1+\sigma$. ამ მნიშვნელობის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ Δy ნაზრდი, რომელსაც ღებულობს $y=\sqrt[n]{x}$ ფუნქცია, როცა არგუმენტის $x=1$ მნიშვნელობა ღებულობს $\Delta x=\sigma$ მცირე ნაზრდს. Δy-ის ნაცვლად გამოვთვალოთ dy:

$$dy=y'\Delta x=\frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}\,\Delta x=\frac{\sigma}{n}.$$

თუ დავუშვებთ (ეს არ არის ზუსტი, მაგრამ ცდომილება საკმაოდ მცირეა), რომ

$$\Delta y=\frac{\sigma}{n}.$$

ვღებულობთ სასარგებლო მიახლოებით ფორმულას

$$\boxed{\sqrt[n]{1+\sigma}\approx 1+\frac{\sigma}{n}}$$

რომელიც მით უფრო ზუსტია, რაც ნაკლებია σ.

3) ვთქვათ, რომ b საკმაოდ მცირეა a^n-თან შედარებით. მაშინ წინა მაგალითის საფუძველზე გვაქვს

$$\sqrt[n]{a^n+b}=\sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{b}{a^n}\right)}=a\sqrt[n]{1+\frac{b}{a^n}}\approx a\left(1+\frac{b}{na^n}\right)$$

და ვღებულობთ მიახლოებით ფორმულას

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n+b}\approx a+\frac{b}{n\,a^{n-1}}}$$

განსაკუთრებით მარტივ სახეს ღებულობს ეს ფორმულა, როცა $n=2$

$$\boxed{\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}}$$

და როცა $n=3$

$$\boxed{\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}}$$

ასე მაგალითად

$$\sqrt{67}=\sqrt{8^2+3}\approx 8+\frac{3}{2\cdot 8}=8\,\frac{3}{16}.$$

მიღებული შედეგის აბსოლუტური ცდომილება ტოლია 0,0021..., ხოლო ფარდობითი ცდომილება $\delta<0{,}03\%$.

4) ბირთვის R რადიუსი გაიზარდა მცირე dR სიდიდით. ვიპოვოთ ბირთვის მოცულობის ნაზრდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან ბირთვის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V=\frac{4}{3}\,\pi R^3,$$

ამიტომ $dV=4\pi R^2dR$. ეს სიდიდე შეიძლება ჩავთვალოთ საძიებელი ΔV ნაზრდის ტოლად, რადგან პირობის თანახმად dR საკმაოდ მცირეა.

თუ dV-ს გავყოფთ V-ზე, მივიღებთ

$$\frac{dV}{V}=3\frac{dR}{R}.$$

თუ რადიუსის ნაზრდსა და ბირთვის მოცულობის ნაზრდს გამოვსახავთ პროცენტობით, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს: რადიუსის $p\%$-ით გადიდებისას ბირთვის მოცულობა იზრდება $3p\%$-ით.

5) გამოვთვალოთ $\operatorname{tg} 46°$.

ვთქვათ, $y=\operatorname{tg} x$. თუ $x=45°$, მაშინ $y=1$. ჩვენ კი გვაინტერესებს $\operatorname{tg} x$-ის მნიშვნელობა ამ არგუმენტის ახალი მნიშვნელობისათვის, სახელდობრ $46°$-სათვის. ცხადია, რომ ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ ნაზრდი, რომელსაც ღებულობს ფუნქცია $\operatorname{tg} x$, როცა არგუმენტის $x=45°$ მნიშვნელობა ღებულობს მცირე $\Delta x=1°$ ნაზრდს. იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ დიფერენციალური აღრიცხვის ფორმულები საჭიროა კუთხის გამოსახვა რადიანებით*.

$$45°=\frac{\pi}{4}, \qquad 1°=\frac{\pi}{180}.$$

თუ $\operatorname{tg} x$-ის ნაზრდს შევცვლით ამ ფუნქციის დიფერენციალით,

$$d\operatorname{tg} x=\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{90}=\frac{3,14}{90}=0,035$$

მივიღებთ

$\operatorname{tg} 46°=1,035.$

ამ ტოლობის აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია 0,0006. ფარდობითი ცდომილება $\delta<0,06\%$.

6) გამოვთვალოთ $\sin 29°$.

ვთქვათ, $y=\sin x$. წინა მაგალითების მსგავსად, დავუშვათ $x=\frac{\pi}{6}$ (მაშინ $y=0,5$). $\Delta x=-\frac{\pi}{180}$. მაშინ

$$dy=\cos x\cdot\Delta x=\cos\frac{\pi}{6}\left(-\frac{\pi}{180}\right)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{360}=-0,015$$

---

* რადგან ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებულების გამოყვანის დროს ვეყრდნობით ტოლობას

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

რომელიც მართებულია მაშინ, როცა α გამოსახავს განსახილველი კუთხის სიდიდეს რ ა დ ი ა ნ ე ბ ი თ.

თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta y = dy$, ვპოულობთ

$$\sin 29^\circ = 0{,}485.$$

X თავში, რომელიც ეძღვნება მრავალი ცვლადის ფუნქციებს, ისევ დავუბრუნდებით საკითხს დიფერენციალური აღრიცხვის მიახლოებით გამოთვლებში გამოყენების შესახებ და უფრო დაწვრილებით ვუჩვენებთ, თუ როგორ შეიძლება ცდომილებათა შეფასებაში დიფერენციალის გამოყენება.

შევნიშნავთ, რომ მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება წარმოადგენს საიმედო ოპერაციას მხოლოდ მაშინ, როცა როგორღაც შესაძლებელია დაშვებული ცდომილების შეფასება.

ზემოთ განხილულ მაგალითებში ჩვენ ან არ ვიძლეოდით ცდომილების შეფასებას, ან ვახდენდით შეფასებას იმ დროს, როდესაც რაიმე სხვა გზით ვპოულობდით საძიებელი სიდიდის ზ უ ს ტ მნიშვნელობას. პრაქტიკაში კი საძიებელი სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობა ხშირად უცნობია. ამიტომ ზემოთ მოცემული ხერხი არ იძლევა მიახლოებითი გაგამოთვლის სიზუსტის ხარისხის შეფასების საშუალებას, როცა Δy-ს ვცვლით dy-ით. ქვემოთ (§6,6) მოცემული იქნება ასეთი შეფასების შესაძლებლობა. ჯერჯერობით კი აღვნიშნოთ, რომ მართებულია უტოლობა

$$|\Delta y - dy| \leqslant M(\Delta x)^2,$$

სადაც M რაიმე მუდმივაა, რომლის ზუსტი მნიშვნელობა იქნება მოცემული მითითებულ პარაგრაფში.

§ 4. უმაღლესი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები

1. უმაღლესი რიგის წარმოებულები

ვთქვათ, $y=f(x)$ არის რაიმე ფუნქცია განსაზღვრული $a \leqslant x \leqslant b$ შუალედში. დავუშვათ, რომ ამ შუალედის ყოველი x მნიშვნელობისათვის არსებობს ჩვენი ფუნქციის წარმოებული $y' = f'(x)$. მაშინ ეს წარმოებული თვითონ არის დამოკიდებული გაწარმოების x წერტილზე, ანუ არის x-ის ფუნქცია. ამიტომ შეიძლება დაისვას საკითხი $f'(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მონახვის შესახებ. წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს (ან მ ე ო რ ე) წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი და აღინიშნება სიმბოლოებით y'' ან $f''(x)$.

მაგალითად, თუ

$$y=f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+6x-8,^{*}$$

მაშინ

$$y'=f'(x)=8x^3+9x^2-10x+6,$$

და

$$y''=f''(x)=24x^2+18x-10.$$

ხოლო თუ

$$z=g(x)=\sin x,$$

მაშინ

$$z'=g'(x)=\cos x$$

და

$$z''=g''(x)=-\sin x.$$

ზუსტად ასევე მეორე რიგის წარმოებულის $y''=f''(x)$-ის წარმოებულს ეწოდება მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის მ ე ს ა მ ე რ ი გ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი (მ ე ს ა მ ე წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი) და აღინიშნება სიმბოლოებით y''' ან $f'''(x)$.

ზემოთ მოყვანილი ორი მაგალითისათვის გვექნება

$$y'''=f'''(x)=48x+18, \qquad z'''=g'''(x)=-\cos x.$$

საზოგადოდ, $n+1$ რიგის წარმოებული ეწოდება n რიგის წარმოებულის წარმოებულს.

მეოთხე რიგის წარმოებულიდან დაწყებული მიღებულია აღნიშვნები

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x), \quad y^{(5)}=f^{(5)}(x), \quad y^{(n)}=f^{(n)}(x).$$

ფრჩხილები იწერება იმისათვის, რომ განვასხვაოთ $y^{(n)}$ n რიგის წარმოებული y^n ხარისხისაგან.

უმაღლესი რიგის წარმოებულების კონკრეტულ აზრზე ჩვენ არ შევჩერდებით.**

2. უმაღლესი რიგის დიფერენციალები

თუ $y=f(x)$ და $\Delta x=dx$ x არგუმენტის ნაზრდია, მაშინ

$$y^{(n)}(dx)^n$$

---

* ეს ფუნქცია მოცემულია არა $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში, არამედ მთელ რიცხვით $-\infty<x<+\infty$ ღერძზე, რასაკვირველია საკითხის შესწავლისას ეს არაფერს არ ცვლის.

** აღვნიშნავთ მხოლოდ შემდეგს. თუ წერტილი მოძრაობს წრფეზე $s=f(t)$ განტოლებით მოცემული კანონით, მაშინ მეორე რიგის წარმოებული $s''=f''(t)$ არის ამ წერტილის ა ჩ ქ ა რ ე ბ ა.

ნამრავლს ეწოდება $y=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს n რ ი გ ი ს დ ი ფ ე - რ ე ნ ც ი ა ლ ი და აღინიშნება $d^n y$ ან $d^n f(x)$ სიმბოლოთი

$$\boxed{d^n y=y^{(n)}\,(dx)^n}$$

$(dx)^n$-ს ჩვეულებრივად წერენ ფრჩხილების გარეშე, ანუ dx^n სახით, ასე რომ $d^n y$-ის განსაზღვრა ღებულობს შემდეგ სახეს

$$\boxed{d^n y=y^{(n)}\,dx^n}$$

აქედან გამომდინარეობს n რიგის წარმოებულის აღნიშვნა

$$\boxed{y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}}$$

მაგალითად,

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

შემდგომში არ გამოვიყენებთ უმაღლესი რიგის დიფერენციალებს, ამიტომ ამ ცნების შესახებ ზემოთ ნათქვამით შემოვიფარგლებით.

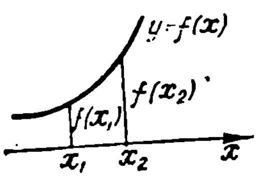
§ 6. ფუნქციათა გამოკვლევა

1. ფუნქციათა ზრდა და კლება

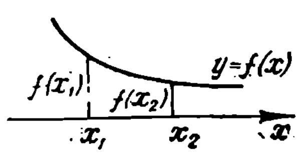
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ფუნქციას ეწოდება ზ რ დ ა დ ი (კ ლ ე ბ ა დ ი), თუ არგუმენტის ზრდასთან ერთად ფუნქციის მნიშვნელობები იზრდება (კლებულობს).

132-ე და 133-ე ნახაზებზე ნაჩვენებია ზრდადი და კლებადი ფუნქციების გრაფიკები.

ვხედავთ, რომ პირველი ფუნქციისათვის, როცა $x_1<x_2$, მაშინ $f(x_1)<f(x_2)$, ხოლო მეორე ფუნქციისათვის $f(x_1)>f(x_2)$.



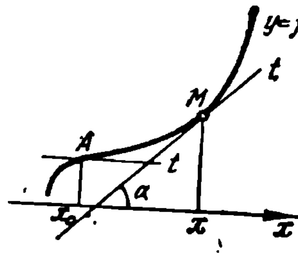
ნახ. 132.



ნახ. 133.

ზოგჯერ გვჭირდება იმის გაგება, თუ როგორია ანალიზური ფორმულით მოცემული ფუნქცია ზრდადი თუ კლებადი? ამ საკითხის გასარკვევად საჭიროა გავიხსენოთ ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული აზრი. როგორც ზემოთ (§1.4) იყო ნაჩვენები $y'=f'(x)$ წარმოებული არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხების კუთხური კოეფიციენტი, სადაც შეხების წერტილის აბსცისა გაწარმოების წერტილია:

$$\boxed{f'(x)=\operatorname{tg}\alpha}$$



ნახ. 134.

გავიხსენებთ რა ამ ფაქტს, განვიხილოთ ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 134).

თუ ამ გრაფიკზე ავიღებთ ნებისმიერ M წერტილს და გავავლებთ ამ წერტილზე მხებს, მაშინ ნახაზზე ვხედავთ უშუალოდ, რომ ამ მხების მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე *მახვილია*, ამიტომ მისი ტანგენსი დადებითია:

$$\operatorname{tg}\alpha>0.$$

რადგან $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$, ამიტომ ნებისმიერი x-ისათვის აღმოჩნდება, რომ

$$f'(x)>0.$$

გამონაკლისს შეადგენს ცალკეული x წერტილები, როგორც მაგალითად A წერტილის x_0 აბსცისა, რომელშიც At მხები პარალელურია Ox ღერძის და ამიტომ მისი კუთხური კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$f'(x_0)=0.$$

ამგვარად, *ზრდადი ფუნქციის წარმოებული არასოდეს არ არის უარყოფითი.*

ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ კლებადი ფუნქციის გრაფიკს (ნახ.135), დავინახავთ, რომ α კუთხე ბლაგვია, ამიტომ მისი ტანგენსი უარყოფითია:

$$\operatorname{tg}\alpha<0,$$

ან, რაც იგივეა

$$f'(x)<0.$$

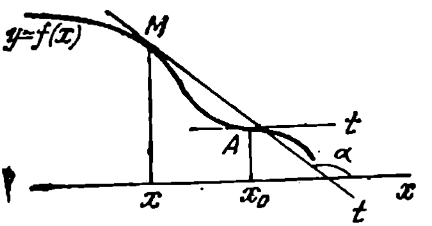
აქაც გამონაკლისს შეადგენს ცალკეული x წერტილები (x_0-ის მსგავსად), რომელშიც

$$f'(x)=0.$$

ამგვარად კ ლ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ა რ ა-ს ო დ ე ს ა რ ა რ ი ს დ ა დ ე ბ ი თ ი.

მიღებული შედეგების დამტკიცება შეიძლება ნახაზების გარეშე, ანალიზურად. დავამტკიცოთ მაგალითად, რომ ზრდადი $f(x)$ ფუნქციისათვის ყოველ x წერტილში* $f'(x)\geqslant 0$. ეს, რომ ასე არ იყოს, მაშინ მოიძებნება ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$y'=f'(x_0)<0,$$



ნახ. 135.

მაგრამ

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ხოლო იმ ცვლადის შორეული მნიშვნელობები, რომლებიც ზღვრისაკენ მისწრაფვიან, თითქმის ტოლია ამ ზღვრის. მაშასადამე, საკმაოდ მცირე Δx-სათვის გვექნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$$

ან, დაწვრილებით,

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0,$$

მაშასადამე, მცირე დ ა დ ე ბ ი თ ი Δx-სათვის

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0,$$

ანუ

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0).$$

ეს კი ეწინააღმდეგება $f(x)$-ის ზრდადობის პირობას, ვინაიდან, როცა $\Delta x>0$, ცხადია $x_0+\Delta x>x_0$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზრდადი (კლებადი) ფუნქციის წარმოებული შეიძლება გახდეს ნულის ტოლი, მიღებული შედეგები მოკლედ ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ფუნქციის უომაქცევის ანალიზური ნიშანი. თ უ ფ უ ნ ქ ც ი ა ზ რ დ ა დ ი ა (კ ლ ე ბ ა დ ი ა), მ ა შ ი ნ მ ი ს ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი დ ა დ ე ბ ი თ ი ა (უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი ა).

---

* ბუნებრივია, რომ $f'(x)$-ის ა რ ს ე ბ ო ბ ა იგულისხმება ყოველი x-ისათვის.

ეს ნიშანი შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სქემით:

$f(x)$	$f'(x)$-ის ნიშანი
ზრდადი	+
კლებადი	−

იმავე ნახაზებიდან მკითხველი ადვილად დარწმუნდება შებრუნებული დებულების მართებულობაში: თუ რაიმე ფუნქციის წარმოებული დადებითია (უარყოფითია), მაშინ ეს ფუნქცია ზრდადია (კლებადია).

მაგალითი. ვთქვათ, $y=\operatorname{arctg} x$. რადგან

$$y'=\frac{1}{1+x^2}>0,$$

ამიტომ y x-ის ზრდადი ფუნქციაა.

საჭიროა გავაფრთხილოთ მკითხველი, რომ ხშირად ადგილი აქვს გაურკვევლობას. სახელდობრ, არ უნდა ვიფიქროთ, რომ დადებითი ფუნქციის წარმოებული აუცილებლად დადებითი იქნება. მაგალითად ფუნქცია, რომლის გრაფიკი მოცემულია 133-ე ნახაზზე, დადებითია (ვინაიდან მისი გრაფიკი Ox ღერძის ზემოთ არის მოთავსებული, ასე რომ გრაფიკის წერტილების ორდინატები დადებითია), მაგრამ ის კლებადია და მისი წარმოებული უარყოფითია.

ამგვარად, რაიმე ფუნქციის წარმოებულის ნიშანი არ არის დამოკიდებული თვით ფუნქციის ნიშანზე, არამედ იმაზე ზრდადია თუ კლებადი ეს ფუნქცია*.

2. ფუნქციის ექსტრემუმი

ფუნქციები, რომლებიც ჩვეულებრივად გვხვდება პრაქტიკაში, საზოგადოდ არ არიან ზრდადი ან კლებადი მათი განსაზღვრის მთელს არეში. ხშირად ფუნქციის განსაზღვრის არე იყოფა რამდენიმე ნაწილად, ისე, რომ ზოგ ნაწილში ფუნქცია ზრდადია, ზოგში კი—კლებადი.

განვიხილოთ მაგალითად ფუნქცია, რომელიც გამოსახულია 136-ე ნახაზზე.

---

* აი კიდევ მაგალითი. ვთქვათ, რომ შეისწავლება რაიმე ცხელი სხეულის ტემპერატურა, რომელიც შემდეგ ცივდება. რადგან სხეული ცხელია, მისი ტემპერატურა დადებითია, მაგრამ ეს ტემპერატურა კლებულობს, მაშასადამე მისი წარმოებული (დროით) უარყოფითია..

მთელი $a \leqslant x \leqslant h$ შუალედი, რომელზედაც მოცემულია ეს ფუნქ-ცია, დაყოფილია შემდეგ ნაწილებად:

[a, b] სადაც ფუნქცია ზრდადია,

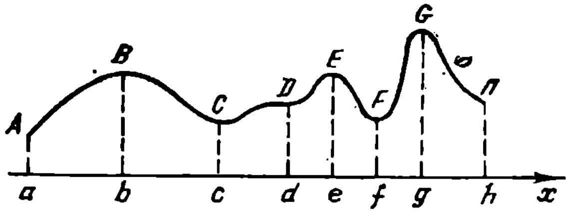
[b, c], სადაც ფუნქცია კლებადია,

[c, e], სადაც ფუნქცია ზრდადია,

[e, f], სადაც ფუნქცია კლებადია,

[f, g], სადაც ფუნქცია ზრდადია,

[g, h], სადაც ფუნქცია კლებადია.



ნახ. 136.

განსაკუთრებით საინტერესოა b, c, e, f, g წერტილები, რომლებიც ყოფენ აღნიშნულ შუალედს ისეთ ნაწილებად, რომ თითოეულ მათგანზე ფუნქცია სხვადასხვა ყოფაქცევისაა. ამ წერტილებს *ფუნქციის ექსტრემუმის* წერტილები ეწოდება (ამბობენ აგრეთვე, რომ ფუნქციას ამ წერტილებში აქვს ექსტრემუმი). თუ ექსტრემუმის წერტილის მარცხენა ნაწილში ფუნქცია ზრდადია, ხოლო მარჯვენაში-კლებადი, მაშინ ამ წერტილს ეწოდება *ფუნქციის მაქსიმუმის* წერტილი (ამბობენ აგრეთვე, რომ ფუნქციას ამ წერტილში აქვს მაქსიმუმი). 136-ე ნახაზზე მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია: b, e და g. თუ ექსტრემუმის წერტილის მარცხნივ ფუნქცია კლებადია, ხოლო მარჯვნივ ზრდადი, მაშინ ამ წერტილს ეწოდება *ფუნქციის მინიმუმის* წერტილი (136-ე ნახ. ასეთი წერტილებია c და f).

ამგვარად, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

განსაზღვრა. თუ ფუნქცია, არგუმენტის რაიმე x_0 მნიშვნელობის გავლისას (მარცხნიდან მარჯვნივ), ზრდიდან გადადის კლებაზე, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქციას $x=x_0$ წერტილში აქვს *მაქსიმუმი*, ხოლო, თუ ფუნქცია კლებიდან გადადის ზრდაზე, მაშინ მას ამ წერტილში აქვს *მინიმუმი*.

მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილებს ეწოდება *ექსტრემუმის* წერტილები.

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ მაქსიმუმის ყოველი წერტილი არის ფუნქციის გრაფიკის ისეთი წერტილის აბსცისა, რო-

მელიც მდებარეობს გრაფიკის ამ წერტილის მახლობლად მდებარე ყვე-ლა წერტილზე მაღლა. მაგალითად e წერტილი არის E წერტილის აბსცისა, რომელიც მდებარეობს CF რკალის ყველა წერტილის ზემოთ. ასეთივე დაკვირვება შეიძლება ვაწარმოოთ მინიმუმის წერტილების მიმართ. აქედან გამომდინარე მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილები შეიძლება სხვანაირად განვსაზღვროთ:

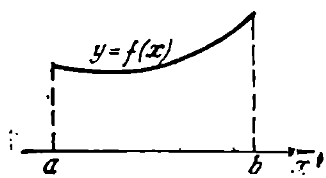
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. x_0 წერტილი არის $f(x)$ ფუნქციის მ ა ქ ს ი მ უ მ ი ს წერტილი, თუ ის მდებარეობს ისეთი $p<x_0<q$ შუალედის შიგნით, რომ ამ შუალედის ნებისმიერი x წერტილისათვის, რომელიც განსხვავებულია x_0 წერტილისაგან, გვაქვს

$$f(x)<f(x_0).$$

მინიმუმისათვის გვაქვს ანალოგიური განსაზღვრა იმ განსხვავებით, რომ ნაცვლად $f(x)<f(x_0)$ უტოლობისა უნდა დავწეროთ $f(x)>f(x_0)$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: 1) თვით სახელწოდებანი „მაქსიმუმი“, „მინიმუმი“, „ექსტრემუმი“ დაკავშირებულია ამ განსაზღვრასთან. სახელდობრ „მაქსიმუმი“ ლათინურად ნიშნავს „მეტს“, „მინიმუმი“ — „ნაკლებს“, „ექსტრემუმი“ — „უკიდურესს“ (იგულისხმება ფუნქციის მნიშვნელობა).

2) მაქსიმუმის წერტილის განსაზღვრის დროს არსებითია, რომ ფუნქცია განსაზღვრული იყოს ამ წერტილის, როგორც მარცხნივ ისე მარჯვნივ, ანუ ეს წერტილი უნდა იყოს ფუნქციის მოცემის არის შიგა და არა სასაზღვრო წერტილი. 137-ე ნახაზზე მოცემული ფუნქციისათვის b წერტილი არ არის მაქსიმუმის წერტილი.



ნახ. 137.

3) თუ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ეს სრულიად არ ნიშნავს იმას, რომ $f(x_0)$ არის ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. მაგალითად, 136-ე ნახაზზე e წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, მაგრამ $f(e)$ ნაკლებია, ვიდრე ფუნქციის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება g წერტილის მახლობლად მდებარე წერტილების აბსცისებს.

3. ფერმას პრინციპი

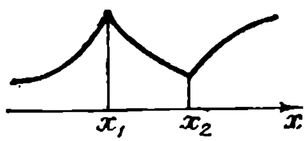
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. რაიმე $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ გ ლ უ ვ ი, თუ ის უწყვეტია აღნიშნულ შუალედში და აქვს უწყვეტი წარმოებული ამავე შუალედში. ასეთი ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება გ ლ უ ვ ი წ ი რ ი*.

* ქვემოთ განზოგადებული იქნება გლუვი წირის ცნება.

138-ე და 139-ე ნახაზებზე ნაჩვენებია გლუვი და არაგლუვი ფუნქციების გრაფიკები. 139-ე ნახაზზე x_1 და x_2 წარმოებულის* წყვეტის წერტილებია (მხები ნახტომით იცვლის მიმართულებას).

გლუვი ფუნქციისათვის მართებულია შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც აღმოჩენილი იყო მე-17 საუკუნის ფრანგი მათემატიკოსის პ. ფერმას მიერ.

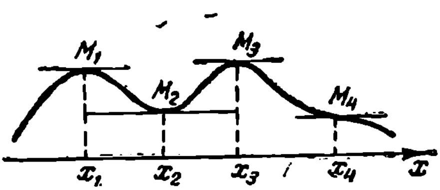
ნახ. 138.



ნახ. 139.

ფერმას თეორემა. თუ გლუვ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ მისი წარმოებული ამ წერტილში ნულის ტოლია

$$\boxed{f'(x_0)=0}$$



ნახ. 140.

დამტკიცება. 140-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ ფუნქციის გრაფიკის M_1, M_2 და M_3 წერტილებში გავლებული მხებები Ox ღერძის პარალელურია. მაშასადამე, მათი კუთხური კოეფიციენტები ნულის ტოლია:

$$f'(x_1)=0, \qquad f'(x_2)=0, \qquad f'(x_3)=0.$$

ვინაიდან, ამ თეორემას დიდი მნიშვნელობა აქვს, მოვიყვანთ მის სხვა დამტკიცებასაც.

განვიხილოთ 140-ე ნახ. მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმის რომელიმე წერტილი, მაგალითად, მაქსიმუმის x_1 წერტილი.

ვხედავთ, რომ ამ წერტილის მარცხნივ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო მარჯვნივ კლებადი. მაშასადამე, x_1 წერტილის მარცხნივ ფუნქციის წარმოებული დადებითია, ხოლო მარჯვნივ—უარყოფითი. მაგრამ $f'(x)$ წარმოებული (რადგან ფუნქცია გლუვია) უწყვეტად იცვლება, ამიტომ დადებითი მნიშვნელობებიდან უარყოფითზე გადასვლის დროს უნდა გახდეს ნულის ტოლი.

---

* არაგლუვ ფუნქციას (უწყვეტსაც კი) შეიძლება წარმოებული საზოგადოდ არც კი ჰქონდეს. სწორედ ასეთი გარემოებაა x_1 და x_2 წერტილებში (ნახ. 139).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აუცილებლად უნდა მიექცეს ყურადღება იმას, რომ დამტკიცებული თეორემის შებრუნება არ შეიძლება. ე. ი.

$$f'(x_0)=0$$

ტოლობიდან არ გამომდინარეობს, რომ x_0 ექსტრემუმის წერტილია. მაგ. (ნახ. 140) M_4 წერტილში გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია, ამიტომ

$$f'(x_4)=0,$$

მაგრამ x_4 წერტილის მარცხნივაც და მარჯვნივაც ფუნქცია კლებადია.

ისეთ x_0 წერტილს, რომელშიაც $f'(x_0)=0$, მაგრამ მის მარცხნივ და მარჯვნივ ფუნქცია კლებადია (ზრდადია) ეუწოდოთ კლების (ზრდის) შ ე ჩ ე რ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი. 140-ე ნახაზზე x_4 არის კლების შეჩერების წერტილი, ხოლო 136-ე ნახაზზე d წერტილი არის ზრდის შეჩერების წერტილი.

ბოლოს, $f(x)$ ფუნქციის ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ი წერტილი ვუწოდოთ ყოველ x_0 წერტილს, რომელშიაც ამ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია

$$f'(x_0)=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ ფუნქცია $y=2x^3-12x^2+18x$.

გამოვარკვიოთ აქვს თუ არა ამ ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები და თუ აქვს ასეთი წერტილები, როგორ ვიპოვოთ ისინი. ფერმას თეორემის თანახმად ექსტრემუმის წერტილებს წარმოადგენენ მხოლოდ ის წერტილები, რომლებშიც ჩვენი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია (ე. ი. სტაციონარული წერტილები). ამიტომ პირველ რიგში ვპოულობთ ამ ფუნქციის წარმოებულს:

$$y'=6x^2-24x+18,$$

სტაციონარული წერტილების საპოვნელად უნდა დავუშვათ, რომ

$$y'=0$$

და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება

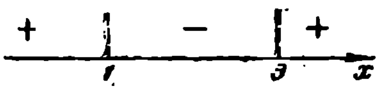
$$6x^2-24x+18=0,$$

$$x^2-4x+3=0,$$

საიდანაც $x_1=1$, $x_2=3$.

ახლა უნდა გამოვარკვიოთ ფუნქციის ყოფაქცევა ამ ორ წერტილში. შევნიშნავთ, რომ $x_1=1$ და $x_2=3$ წერტილები ყოფენ მთელს რიცხვით ღერძს $]-\infty,1[$, $]1,3[$ და $]3,+\infty[$ შუალედებად (ნახ. 141). ამ შუალედებში ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმის წერტილები (რადგან ექსტრე-

ნულის წერტილები წარმოებულის ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ე ბ ი ა). ამიტომ ეს შუალედები ფუნქციის ზრდის ან კლების შუალედებია. იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ თუ როგორი ყოფაქცევისაა ფუნქცია $]-\infty, 1[$ შუალედში, ავირჩიოთ ამ შუალედში ნებისმიერი წერტილი, მაგალითად $x=0$ წერტილი. გამოვთვალოთ y' წარმოებულის მნიშვნელობა ამ წერტილში, მივიღებთ $y'=18$, ე. ი. $y'>0$. მაშასადამე, $]-\infty, 1[$ შუალედში ფუნქცია ზრდადია. ანალოგიურად $]1,3[$ შუალედში თუ ავირჩევთ რაიმე წერტილს, მაგალითად, $x=2$ წერტილს და გამოვთვლით y' მნიშვნელობას ამ წერტილში, მივიღებთ $y'=-6$. ე. ი. $y'<0$, მაშასადამე, ფუნქცია კლებადია $]1,3[$ შუალედში. ბოლოს თუ $]3, +\infty[$ შუალედიდან ავირჩევთ რაიმე x წერტილს (თუნდაც $x=1000$), დავინახავთ, რომ ამ წერტილში $y'>0$ ე. ი. $]3,+\infty[$ შუალედში ფუნქცია ზრდადია*. 141-ე ნახ. სქემატურად ნაჩვენებია y'-ის ნიშნები ხსენებულ შუალედებში.



ნახ. 141.

ზემონათქვამიდან ცხადია, რომ $x_1=1$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ხოლო $x_2=3$ წერტილში — მინიმუმი.

ჩატარებული გამოკვლევის შედეგები შეიძლება შემდეგი სქემით გამოვსახოთ

x	y	დახასიათება
1	8	მაქსიმუმი
3	0	მინიმუმი

იმისათვის, რომ მივიღოთ სრული წარმოდგენა ფუნქციის გამოკვლევის შესახებ, ავაგოთ მისი გრაფიკი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y=0$, როცა $x=0$ ე. ი. გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეში, მაშინ შემდგომი განმარტების გარეშე გასაგებია, რომ გრაფიკს აქვს 142-ე ნახაზზე მოცემული სახე**.

განხილულ მაგალითში მოცემული მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

წესი. რ ა ი მ ე $y=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ყ ო ფ ა ქ ც ე ვ ი ს გ ა მ ო კ ვ ლ ე ვ ი ს ა თ ვ ი ს ს ა ჭ ი რ ო ა:

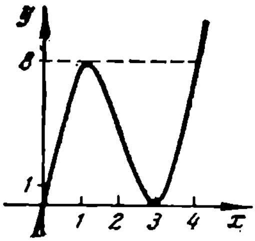
1. ვ ი პ ო ვ ო თ მ ი ს ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი $y'=f'(x)$.

---

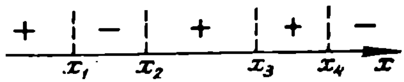
* y' ნიშანი $]-\infty, 1[$ და $]3,+\infty[$ შუალედებში უმჯობესია გამოვარკვიოთ შემდეგნაირად. როგორც ვიცით $y'=6x^2-24x+18$, როცა x საკმაოდ დიდია აბსოლუტური მნიშვნელობით, $6x^2$ მეტი აღმოჩნდება დანარჩენ შესაკრებებზე. რადგან ეს შესაკრები დადებითია, მთელი ჯამიც დადებითი იქნება. მაშასადამე, ხსენებულ შუალედებში $y'>0$.

** ნახაზის ზომების შემცირების მიზნით, Ox და Oy ღერძებზე არჩეულია სხვადასხვა მასშტაბები.

2. გავუტოლოთ ეს წარმოებული ნულს და ამოვხსნათ მიღებული $f'(x)=0$ განტოლება. ამ განტოლების ამონახსნები $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$ წარმოადგენენ სტაციონარულ წერტილებს.

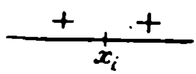


ნახ. 142.

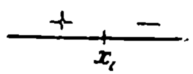


ნახ. 143.

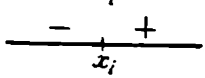
3. ჩავატაროთ სტაციონარული წერტილების მიმართ დამატებითი გამოკვლევა. ამისათვის გადავიტანოთ ისინი რიცხვით ღერძზე და გამოვარკვიოთ $y'(x)$ წარმოებულის ნიშანი ღერძის ცალკეულ უბნებზე (ნახ. 143). ამ ნიშნების მიხედვით შეიძლება გამოვარკვიოთ ყოველი სტაციონარული x_i წერტილის ხასიათი შემდეგი სქემით



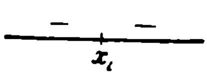
x_i — ზრდის შეჩერების წერტილია,



x_i — მაქსიმუმის წერტილია,



x_i — მინიმუმის წერტილია,



x_i — კლების შეჩერების წერტილია.

4. მიღებული შედეგები გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

x	y	დახასიათება
x_1	$f(x_1)$	მაქსიმუმი
x_2	$f(x_2)$	მინიმუმი
x_3	$f(x_3)$	ზრდის შეჩერება

ჩატარებულ გამოკვლევას უნდა დავურთოთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელზეც სტაციონარული წერტილების გარდა უნდა ვუჩვენოთ საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები, აგრეთვე ფუნქციის ყოფაქცევა არგუმენტის უსასრულოდ ზრდის და კლების დროს, რისთვისაც საჭიროა გამოითვალოს ზღვრები

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \quad \text{და} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

განვიხილოთ კიდევ სამი მაგალითი. შემოვიზღუდებით მოკლე განმარტებებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია

$$y=x^3(x-5)^2$$

1. $y'=3x^2(x-5)^2+x^3 2(x-5)=x^2(x-5)(5x-15)=5x^2(x-3)(x-5)$.

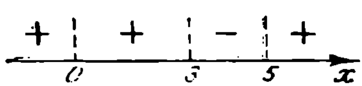
2. $y'=0$ ანუ $5x^2(x-3)(x-5)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=5$.

3. გამოვარკვიოთ ფუნქციის ყოფაქცევა მიღებულ წერტილებს შორის. y'-ის ნიშნები $]-\infty, 0[$, $]0, 3[$ $]3, 5[$ და $]5, +\infty[$ შუალედებში ნაჩვენებია 144-ე ნახაზზე.

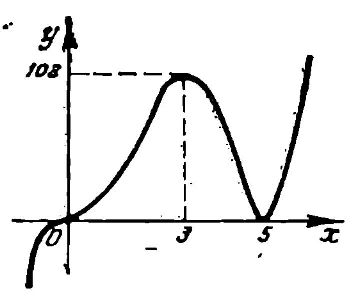
4. შედეგები შეგვაქვს ცხრილში

x	y	დახასიათება
0	0	ზრდის შეჩერება
3	108	მაქსიმუმი
5	0	მინიმუმი

და ვაგებთ ფუნქციის გრაფიკს* (ნახ. 145).



ნახ. 144.



ნახ. 145.

* მასშტაბები ღერძებზე სხვადასხვაა.

უნდა აღინიშნოს, რომ აგებული გრაფიკი გვაძლევს ფუნქციის მხოლოდ **ხარისხობრივ** სურათს: მასზე ნაჩვენებია გადახვევის (ე. ი. ექსტრემუმის) წერტილები, ფუნქციის შეჩერების წერტილები და წერტილები, რომლებშიც ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება (ეს ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია) და ა. შ. ამავე დროს საქმის **რაოდენობრივი** მხარე ჩვენი გრაფიკით ცუდად გამოიყურება. გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა ან სრულიად შეუძლებელია, ან შესაძლებელია ძალიან უხეში ცდომილებით. იმისათვის, რომ გავაუმჯობესოთ ფუნქციის დახასიათება მისი გრაფიკის მიხედვით, საჭიროა ნახაზზე მივუთითოთ საკონტროლო წერტილების საკმაო რაოდენობა.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია

$$y=\frac{x}{x^2+4}.$$

1. $y'=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.

2. $y'=0,\ x_1=-2,\ x_2=2.$

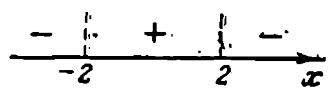
3. ვაგებთ ნახ. 146 გამოსახულ სქემას.

4.

x	y	დახასიათება
-2	$-\frac{1}{4}$	მინიმუმი
$+2$	$+\frac{1}{4}$	მაქსიმუმი

5. ვპოულობთ

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to-\infty} y=0$$



ნახ. 146.

ბოლოს, თუ შევნიშნავთ, რომ $y=0$, როცა $x=0$, მაშინ დავინახავთ, რომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს 147-ე ნახაზზე მოცემული სახე*. ცხადია, რომ Ox ღერძი აგებული წირის ასიმპტოტია.

მაგალითი 3. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია

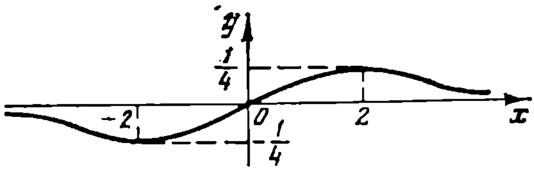
$$y=\frac{\sin x}{2+\cos x}. \tag{1}$$

---

*ღერძებზე მასშტაბი სხვადასხვაა.

აქ ვლინდება რაღაც ახალი მომენტი, რომელსაც არ ჰქონდა ადგილი წინა მაგალითებში. სახელდობრ, გამოსაკვლევ $y=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ა ქ ვ ს 2π პ ე რ ი ო დ ი, ანუ აკმაყოფილებს თანადობას

$$f(x+2\pi)=f(x)$$



ნახ. 147.

ამასთან დაკავშირებით, საკმარისია შევისწავლოთ ჩვენი ფუნქცია 2π სიგრძის რაიმე მონაკვეთზე, რომ მივიღოთ სრული წარმოდგენა მის შესახებ. $f(x)$ ფუნქციისყოფაქცევის შესწავლა, როცა $x \to \pm\infty$, საჭირო არ არის. შევისწავლოთ (1) ფუნქცია, მაგალითად, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ მონაკვეთზე. (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$y'=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}.$$

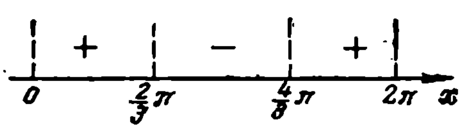
თუ დავუშვებთ, რომ $y'=0$, მივიღებთ

$$\cos x=-\frac{1}{2}.$$

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ შუალედში გვაქვს x-ის ორი მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებს უკანასკნელ განტოლებას:

$$x_1=\frac{2\pi}{3}, \quad x_2=\frac{4\pi}{3}.$$

თუ გამოვთვლით y' მნიშვნელობას $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$ წერტილებში, გამოვარკვევთ y' ნიშანს $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ უბნებზე (ნახ. 148) ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს არის (1) ფუნქციის ზრდადობის, კლებადობის და კვლავ ზრდა-

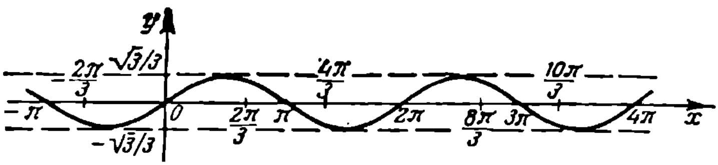


ნახ. 148.

შუალედები. ამგვარად, შეიძლება შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი

x	y	დახასიათება
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,58$	მაქსიმუმი
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}\approx -0,58$	მინიმუმი

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ $y=0$, როცა $x=0$ (და მაშასადამე, მაშინაც, როცა $x=2\pi$). ამას გარდა $y=0$, როცა $x=\pi$-საც. ყოველივე ეს გვიჩვენებს, რომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს 149-ე ნახაზზე მოცემული სახე.



ნახ. 149.

4. სტაციონარული წერტილების გამოკვლევის მეორე ხერხი

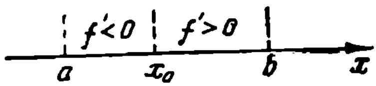
ვიგულისხმოთ, რომ გამოსაკვლევი $f(x)$ ფუნქცია არის არა მარტო გლუვი, არამედ მას აქვს უწყვეტი მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$. მაშინ მართებულია

თეორემა. *ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს სტაციონარული x_0 წერტილი, რომელიც მოთავსებულია $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის შიგნით. ამასთან, $f''(x_0)\neq 0$. თუ $f''(x_0)>0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი, ხოლო თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი.*

დამტკიცება. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $f''(x_0)>0$. $f''(x)$-ის უწყვეტობის გამო x_0 წერტილი შეიძლება მოვათავსოთ იმდენად მცირე $a<x_0<b$ შუალედში, რომ ამ შუალედის ნებისმიერ x წერტილში $f''(x)>0$*. მაშინ მთელს $]a, b[$ შუალედში პირველი რიგის წარ-

* რადგან x_0-ის მახლობლად მდებარე x წერტილებისათვის $f''(x)$-ის მნიშვნელობები ახლოს იქნებიან $f''(x_0)$ დადებით რიცხვთან, მაშასადამე, თვითონაც დადებითი იქნებიან.

მოებული $f'(x)$ ი ზ რ დ ე ბ ა. მაგრამ $f'(x_0)=0$. მაშასადამე, $]a, x_0[$ შუალედში $f'(x)<0$, ხოლო $]x_0, b[$ შუალედში $f'(x)>0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი. მაქსიმუმის შემთხვევაში დამტკიცება ანალოგიურია.



ნახ. 150.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიკვლიოთ $y=2x^3+3x^2$ ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $y' = 6x^2+6x= 6x(x+1)$,

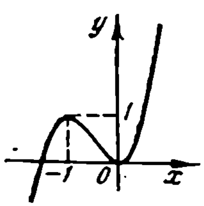
$$y''=12x+6.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $y'=0$, მივიღებთ $x_1=-1$, $x_2=0$. რადგან $y''(-1)=-6<0$, $x=-1$ წერტილში გვაქვს მაქსიმუმი, ხოლო რაკი $y''(0)=+6>0$, $x=0$ წერტილში — მინიმუმი.

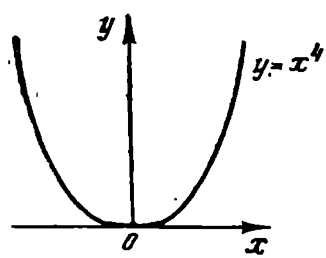
x	y	დახასიათება
-1	$+1$	მაქსიმუმი
0	0	მინიმუმი

გრაფიკის ასაგებად საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ის ჰკვეთს Ox ღერძს $x=-\frac{3}{2}$ და $x=0$ წერტილებში (ნახ. 151).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ აღმოჩნდება, რომ $f''(x_0)=0$, მაშინ მეორე ხერხი არ გამოდგება. მაშინ უნდა გამოვიყენოთ მე-3 ქვეპარაგრაფში განხილული ხერხი, რადგან ამ შემთხვევაში x_0 შეიძლება აღმოჩნდეს ექსტრემუმის წერტილი.



ნახ. 151.



ნახ. 152.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $y=x^4$, მაშინ $y'=4x^3$, $y''=12x^2$. თუ დავუშვებთ, რომ $y'=0$, მივიღებთ $x=0$. რადგან $y''(0)=0$, მეორე ხერხი გამოუსადეგარია. თუ ჩვენს ფუნქციას გამოვიკვლევთ მე-3 ქვეპარაგრაფ-

ში განხილული ხერხით, დავადგენთ, რომ $x=0$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი. ასე რომ, ფუნქციის გრაფიკს აქვს 152-ე ნახაზზე მოცემული სახე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ x_0 შეჩერების წერტილია, მაშინ $f''(x_0)=0$. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს დამტკიცებული თეორემიდან. ამასთან, წინა მაგალითი გვიჩვენებს, რომ უკანასკნელი დებულების შებრუნება არ შეიძლება, ე. ი. $f''(x_0)=0$ ტოლობიდან არ გამომდინარეობს, რომ x_0 არის შეჩერების წერტილი (წინა მაგალითში $x=0$ სტაციონარულ წერტილში აღმოჩნდა, რომ $y''(0)=0$ და მაინც იქ გვქონდა მინიმუმი და არა შეჩერება).

5. უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის პოვნა

ვთქვათ, $y=f(x)$ არის რაიმე $a\leqslant x\leqslant b$ შუალედში მოცემული უწყვეტი* ფუნქცია. როგორც უკვე იყო აღნიშნული ასეთი შუალედი აღინიშნება $[a, b]$ სიმბოლოთი. გამოყენებით დარგებში ხშირად საჭიროა არგუმენტის იმ მნიშვნელობათა პოვნა, რომლებსაც ფუნქციის უ დ ი დ ე ს ი და უ მ ც ი რ ე ს ი მნიშვნელობები შეესაბამება. რადგან ეს ორი ამოცანა ერთნაირად ამოიხსნება, ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის პოვნის ამოცანაზე.

ვთქვათ, ყველა იმ მნიშვნელობათა შორის, რომელსაც ჩვენი ფუნქცია ღებულობს $[a, b]$ შუალედზე, უდიდესი არის $f(x^*)$. თუ x^* ძევს $[a, b]$ შუალედის შ ი გ ნ ი თ, ე. ი. ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობას, მაშინ x^* იქნება $f(x)$ ფუნქციის მ ა ქ ს ი მ უ მ ი ს წერტილი (ნახ. 153). მაგრამ შესაძლებელია x^* დაემთხვეს $[a, b]$ შუალედის a და b ბოლოებიდან ერთ-ერთს ((ნახ. 154), სადაც $x^*=b$). ამ შემთხვევაში x^* შეიძლება არ აღმოჩნდეს $f(x)$ ფუნქციის** მაქსიმუმის წერტილი. 154-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სწორედ ასეთი შემთხვევა.

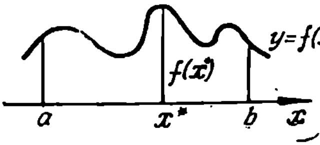
---

* სინამდვილეში აქ განვიხილავთ მხოლოდ გ ლ უ ვ ფუნქციებს.

** თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია მ ხ ო ლ ო დ $[a, b]$ შუალედზე, მაშინ (მაქსიმუმის წერტილის განსაზღვრიდან გამომდინარე) ბოლო წერტილები $x=a$ და $x=b$ არ შეიძლება იყვნენ მაქსიმუმის წერტილები. ამავე დროს, მაშინაც კი როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია უფრო ფართო არეში, ვიდრე $[a, b]$, უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიღწეული იქნეს $x=b$ წერტილში, მიუხედავად იმისა, რომ ის არ არის მაქსიმუმის წერტილი (ნახ. 154).

ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს შემდეგი

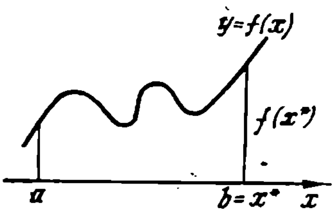
წესი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $[a, b]$ შუალედზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, საჭიროა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილები $x_1, x_2, \dots x_n$, რომლებიც მდებარეობენ $[a, b]$ შუალედის შიგნით და



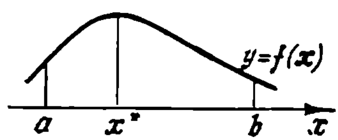
ნახ. 153.

$$f(x_1),\ f(x_2), \dots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)$$

რიცხვებიდან ავირჩიოთ უდიდესი.



ნახ. 154.



ნახ. 155.

შენიშვნები. 1) თუ $[a, b]$ შუალედის შიგნით ძევს $f(x)$ ფუნქციის მხოლოდ ერთი ექსტრემუმის წერტილი და ის მაქსიმუმის წერტილია (ნახ. 155), მაშინ სწორედ ამ წერტილში აღწევს ფუნქცია თავის უდიდეს მნიშვნელობას.

2) უფრო მარტივია (და ამავე დროს განსაკუთრებით ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში) ის შემთხვევა, როდესაც საჭიროა გლუვი $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის პოვნა, როდესაც ის მოცემულია $[a, b]$ შუალედზე და აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

ა. თუ $a<x<b$, მაშინ $f(x)>0$.
ბ. $f(a)=f(b)=0$.
გ. a და b შორის გვაქვს $f(x)$ ფუნქციის ერთადერთი სტაციონარული $x=x^*$ წერტილი. (*)

მაშინ ყოველგვარი დამატებითი გამოკვლევების გარეშე, შეიძლება დავასკვნათ, რომ $f(x^*)$ იქნება $f(x)$ ფუნქციის საძიებელი უდიდესი მნიშვნელობა. მართლაც, საძიებელი მნიშვნელობა აუცილებლად დადე-

ბ ი თ ი ა და ამიტომ იგი მიიღება $[a, b]$ შუალედის მკაცრად შიგა წერტილში, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილში, მაგრამ $f(x)$ ფუნქციას, გარდა x^* წერტილისა, მაქსიმუმის სხვა წერტილი არა აქვს, რადგან ფერმას თეორემის თანახმად მაქსიმუმის წერტილები ამავე დროს სტაციონარული წერტილებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ვიპოვოთ

$$y=x^3+6x^2$$

ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[-3, 1]$ შუალედზე.

ჩვენს შემთხვევაში

$$y'=3x^2+12x, \quad y''=6x+12.$$

დავუშვათ, $y'=0$ და ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები $x_1=-4$, $x_2=0$. პირველი წერტილი ძევს ჩვენთვის საინტერესო შუალედის გარეთ, ამიტომ მას არ ვაქცევთ ყურადღებას. მეორე წერტილისათვის გვაქვს

$$y''(0)=12>0,$$

ამიტომ ამ წერტილში გვაქვს მინიმუმი. 1) შენიშვნის თანახმად $y(0)=0$ არის ჩვენი ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[-3, 1]$ შუალედზე. ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის საპოვნელად გამოვთვალოთ

$$y(-3)=27, \quad y(1)=7.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$y_{\text{უდ}}=y(-3)=27$$

2) ვიპოვოთ

$$y=x^2e^{-x}$$

ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[-1, 3]$ შუალედზე. აქ

$$y'=(2x-x^2)e^{-x}, \quad y''=(2-4x+x^2)e^{-x}$$

დავუშვათ, $y'=0$, მივიღებთ $x_1=0$, $x_2=2$. ორივე წერტილი მოცემული შუალედის შიგნით მდებარეობს. რადგან

$$y''(0)=2, \quad y''(2)=-2e^{-2},$$

ამიტომ ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს $x=2$ წერტილში. გამოვთვალოთ შემდეგი სიდიდეები*

$$y(-1)=e, \quad y(2)=4e^{-2}, \quad y(3)=9e^{-3}.$$

---

* რადგან მაქსიმუმის წერტილის მარჯვნივ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ გამოთვლების გარეშე ცხადია, რომ $x=3$ წერტილში არ შეიძლება გვქონდეს უდიდესი მნიშვნელობა; ამიტომ შეიძლებოდა არც კი მოგვეძებნა $y(3)$ მნიშვნელობა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $e \approx 2,72$, მივიღებთ

$$y_{უდ} = y(-1) = e.$$

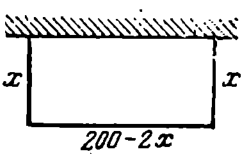
6. კონკრეტული ხასიათის ამოცანები

ვუჩვენოთ ზემოთ მოცემული თეორიის გამოყენება კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად.

ამოცანა 1. არსებული ფიცრებისაგან შეიძლება ავაგოთ 200 მ სიგრძის ღობე. საჭიროა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის ეზო, ისე რომ ეზოს ფართობი იყოს მაქსიმალური. ეზოს ერთ მხარედ გამოყენებული უნდა იყოს უახლოესი შენობის კედელი.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ x-ით ღობის იმ ნაწილის სიგრძე, რომელიც შენობის კედლის მართობულია (ნახ. 156). მაშინ კედლის პარალელური გვერდის სიგრძე ტოლი იქნება $200-2x$, ხოლო ეზოს ფართობი

$$F = x(200-2x) = 200x - 2x^2.$$



ნახ. 156.

ეს არის x არგუმენტის ფუნქცია. ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე x იცვლება [0, 100] შუალედზე*. ამოცანა დაიყვანება ჩვენი ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის პოვნაზე მოცემულ შუალედში. თუ გამოვიყენებთ ზემოთ გამოთქმულ დებულებებს, მივიღებთ

$$F' = 200-4x, \quad F'' = -4.$$

დავუშვათ, $F'=0$, მივიღებთ სტაციონარულ წერტილს $x=50$. რადგან $F''<0$, გვაქვს მაქსიმუმი. რადგანაც ეს არის ერთადერთი ექსტრემუმი [0, 100] შუალედის შიგნით, ამიტომ სწორედ ეს არის F-ის უდიდესი მნიშვნელობა.

ამგვარად, ეზოს ზომებია 50მ × 100 მ, ფართობი ტოლია 5000 კვ. მ. თუ ავიღებთ სხვა ზომებს, მაგალითად 45 მ × 110 მ ან 55 მ × 90 მ, მივიღებთ ნაკლები ფართობის ეზოებს.

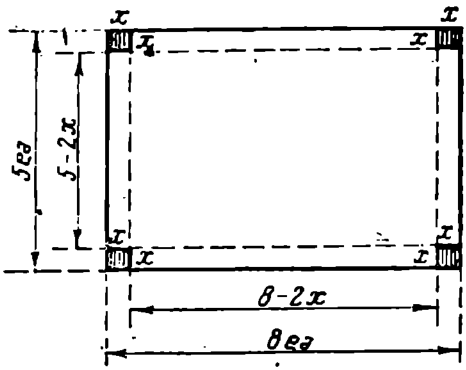
შენიშვნა. თუ გამოვიყენებთ მე-5 ქვეპარაგრაფის 2) შენიშვნას, მაშინ ამოცანა შეიძლება უფრო სწრაფად ამოვხსნათ. მართლაც, ყოველგვარი გამოთვლების გარეშე ცხადია, რომ როცა $x=0$ და $x=100$, მაშინ $F=0$, ხოლო როცა $0<x<100$, $F>0$. ამგვარად, გამოსაკვლევი F ფუნქცია აკმაყოფილებს მე-5 ქვეპარაგრაფის (*) პირობებიდან პირველ ორს (ა და ბ). ამას გარდა, როგორც უკვე ვნახეთ, ჩვენთვის საინტერესო [0, 100] შუალედის შიგნით ამ ფუნქციას აღმოაჩნდა მხოლოდ ერთი სტაციონარული წერტილი $x=50$. მაშასადამე, $x=50$ წერტილში ფუნქცია აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას.

* $x=0$ და $x=100$ გადაგვარების შემთხვევებია. გამოკვლევის სისრულისათვის ჩვენ მათ არ გამოვრიცხავთ.

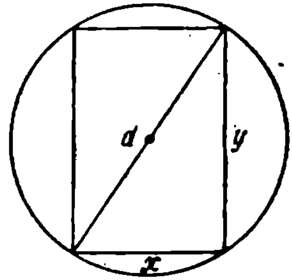
ამოცანა 2. მართკუთხედის ფორმის თუნუქის ფურცლის ზომებია 8 დმ × 5 დმ. საჭიროა ამ ფურცლის კუთხეებში ამოიჭრას კვადრატები ისე, რომ დარჩენილი ნაწილიდან გაკეთდეს უდიდესი მოცულობის კოლოფი (ნახ. 157).

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ამოსაჭრელი კვადრატის გვერდი x-ით. ამოცანის შინაარსიდან ცხადია, რომ $0 \leqslant x \leqslant 2{,}5$. რადგან დარჩენილი მართკუთხედის გვერდები იქნება $8-2x$ და $5-2x$, ამიტომ კოლოფის მოცულობა

$$V = x(8-2x)(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$



ნახ. 157.



ნახ. 158.

საჭიროა ვიპოვოთ V-ს უდიდესი მნიშვნელობა $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ შუალედში.

რადგან

$$V' = 12x^2 - 52x + 40,$$

ამიტომ $V'=0$ განტოლების ამონახსნებია $x_1 = 1$ და $x_2 = \frac{10}{3}$. მეორე ამონახსნი ძევს შუალედის გარეთ, ამიტომ ის უნდა უკუვაგდოთ. ხოლო როცა $x=0$ და $x = \frac{5}{2}$, მაშინ $V=0$ და როცა $0 < x < \frac{5}{2}$, მაშინ $V > 0$, მე-5 ქვეპარაგრაფის 2) შენიშვნის საფუძველზე V აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას, როცა $x=1$.

ამოცანა 3. მრგვალი ძელისგან უნდა გამოიჭრას კოჭი, რომლის კვეთა მართკუთხედია. ისე, რომ ნარჩენების რაოდენობა მინიმალური იყოს.

ცხადია, რომ ეს პრაქტიკული ამოცანა სავსებით ტოლფასია სუფთა გეომეტრიული ამოცანისა. სახელდობრ: წრეში ჩავხაზოთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი (ნახ. 158).

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი x-ით, მეორე y-ით. მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$F=xy.$$

ამგვარად, F გამოისახება, როგორც ო რ ი ცვლადის ფუნქცია. მაშინ, როდესაც ჩვენს მიერ შესწავლილი თეორია ეხება ე რ თ ი არგუმენტის ფუნქციას. ეს სიძნელე შეიძლება ადვილად გადავლახოთ, რადგან აქ y შეიძლება გამოვსახოთ x-ის საშუალებით. მართლაც, თუ d-თი აღვნიშნავთ წრის დიამეტრს, მაშინ პითაგორას თეორემის თანახმად

$$y=\sqrt{d^2-x^2}$$

და F აღმოჩნდება ერთი x არგუმენტის ფუნქცია:

$$F=x\sqrt{d^2-x^2}.$$

ამოცანა დაყვანილია ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის პოვნაზე $[0, d]$ შუალედში.

ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ჩვეულებრივი ხერხებით, მაგრამ გამოთვლების გამარტივების მიზნით ჩვენ გავყვებით სხვა გზას. სახელდობრ F ფუნქციის ნაცვლად განვიხილავთ

$$z=F^2$$

ფუნქციას. ცხადია, რომ z აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას, იმავე x წერტილში, რომელშიც—თვით F ფუნქცია. ამავე დროს z გამოისახება

$$z=d^2x^2-x^4$$

ფორმულით, რომელიც არ შეიცავს არავითარ ირაციონალობას.

რადგან

$$z'=2d^2x-4x^3,$$

ამიტომ $z'=0$, როცა

$$x_1=-\frac{d}{\sqrt{2}}, \quad x_2=0, \quad x_3=\frac{d}{\sqrt{2}}.$$

x_1 წერტილი $[0, d]$ შუალედის გარეთ ძევს, ამიტომ ის უნდა უკუვაგდოთ. x_2 წერტილი ძევს შუალედში, მაგრამ არ არის შ ი გ ა წერტილი, ამიტომ ისიც უნდა უკუვაგდოთ (გავიხსენოთ, რომ $[a, b]$ შუალედზე

$f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობის საპოვნელად უნდა ავირჩიოთ უდიდესი შემდეგი ორი ჯგუფიდან 1) $f(x_i)$, სადაც x_i $[a, b]$ შუალედში მდებარე მაქსიმუმის წერტილებია და 2) $f(a)$ და $f(b)$. რადგან $f(a)$ და $f(b)$ თავიდანვე მეორე ჯგუფის წერტილებია, ამიტომ ისინი პირველ ჯგუფს არ უნდა მივაკუთვნოთ მაშინაც კი, როცა $x=a$ ან $x=b$ მაქსიმუმის წერტილია. სხვანაირად, ჩვენ გვაინტერესებს მაქსიმუმის მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც $[a,b]$ შუალედის შ ი გ ა წერტილებია).

დაგვრჩა $x_3=\frac{d}{\sqrt{2}}$ წერტილი. მე-5 ქვეპარაგრაფის 2) შენიშვნის თანახმად, დამატებითი გამოკვლევების გარეშე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ამ წერტილში z და მაშასადამე, F-იც ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას (ვინაიდან, როცა $x=0$, და $x=d$, გვექნება $z=0$).

რადგან $y=\sqrt{d^2-x^2}$, ამიტომ, როცა $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$, მაშინ $y=\frac{d}{\sqrt{2}}$, ე.ი. $y=x$. ამგვარად, ამოცანის ამოხსნასთან ერთად დავამტკიცეთ აგრეთვე შემდეგი

თეორემა. ე რ თ ს ა და ი მ ა ვ ე წ რ ე შ ი ჩ ა ხ ა ზ უ ლ ი ყ ვ ე ლ ა მ ა რ თ კ უ თ ხ ე დ ე ბ ი დ ა ნ, უ დ ი დ ე ს ი ფ ა რ თ ო ბ ი ა ქ ვ ს კ ვ ა დ რ ა ტ ს.

წარმოების პირობებში მრგვალი მორისაგან კვადრატული კვეთის მქონე ძელის გამოსაჭრელად, საჭიროა გულის ცენტრში გავავლოთ ორი ურთიერთმართობი დიამეტრი. თავის მხრივ ცენტრის მოსაძებნად, საჭიროა მისი კონტურის ნებისმიერ წერტილში ავაგოთ კუთხედის საშუალებით მართი კუთხე. რადგან, ჩახაზული მართი კუთხე ეყრდნობა დიამეტრს, ამიტომ აგების მითითებული ხერხი გვაძლევს ერთ-ერთი დიამეტრის პოვნის საშუალებას. ამ აგების გამეორებით მოვნახავთ მეორე დიამეტრსაც. ეს მოგვცემს ძელის ცენტრს. თუ ძელის ცენტრში გავავალებთ ერთ-ერთი დიამეტრისადმი მართობს აგება დამთავრებული იქნება.

ამოცანა 4. სამშენებლო საქმეში კვადრატული კვეთის ძელები შედარებით იშვიათად გამოიყენება, რაძგანაც მერქნის ნარჩენების შესამცირებლად ხელმძღვანელობენ კონსტრუქციული ხასიათის მოსაზრებებით *.

შევჩერდეთ ზოგიერთ მოსაზრებაზე. კოჭის მნიშვნელოვანი მექანიკური მახასიათებლებია: მისი ს ი მ ტ კ ი ც ე და ს ი ხ ი ს ტ ე.

---

* თუ ძელს იყენებენ ვერტიკალურ საყრდენად, მაშინ კონსტრუქციული მოსაზრებებით ხელსაყრელია კვეთს ჰქონდეს კვადრატის ფორმა.

კოჭის სიმტკიცე არის მისი თვისება — გაუძლოს დატვირთვას, ხოლო სიხისტე—თვისება ნაკლებად მოიღუნოს დატვირთვისას.

მასალათა გამძლეობაში მტკიცდება, რომ x ფუძისა და y სიმაღლის ჰორიზონტალური მართკუთხოვანი კოჭის დასაშვები უდიდესი ვერტიკალური დატვირთვა

$$\alpha = xy^2$$

სიდიდის პროპორციულია; ხოლო იმავე კოჭის სიხისტე, რომელიც იზომება გაღუნვის სიდიდით *

$$\beta = xy^3$$

სიდიდის პროპორციულია.

ვიპოვოთ უდიდესი სიმტკიცის მქონე მართკუთხოვანი კოჭის ზომები, რომელიც შეიძლება გამოიჭრას მრგვალი მორისაგან. 158-ე ნახაზზე მოცემული აღნიშვნების მიხედვით, ამოცანა დაიყვანება ისეთი x და y სიდიდეების პოვნამდე, რომლისთვისაც

$$\alpha = xy^2$$

სიდიდეს ექნება უდიდესი მნიშვნელობა.

რადგან $y^2 = d^2 - x^2$, ამიტომ

$$\alpha = d^2x - x^3.$$

ამასთან,

$$0 \leqslant x \leqslant d.$$

გაწარმოებით ვპოულობთ

$$\alpha' = d^2 - 3x^2.$$

α'-ის ორი ამონახსნიდან უნდა განვიხილოთ მხოლოდ დადებითი

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

რადგან, როცა $x=0$ და $x=d$, გვექნება $\alpha=0$, ხოლო x-ის საშუალედო მნიშვნელობისათვის α დადებითია, ამიტომ α-ს უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება, თუ $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

x-ის ამ მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$y = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d.$$

---

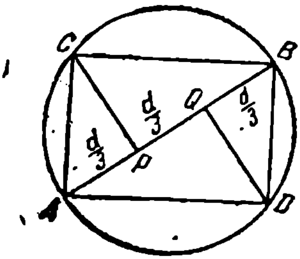
* რაც ნაკლებია გაღუნვა, მით მეტია სიხისტე.

მაშასადამე, უდიდესი სიმტკიცის კოჭისათვის

$$\frac{y}{x}$$

შეფარდება $\sqrt{2}$-ის ტოლია, რაც მიახლოებით უდრის 1,4-ს.

პრაქტიკაში სარგებლობენ შემდეგი მარტივი ხერხით. AB დიამეტრს P და Q წერტილებით ყოფენ სამ ტოლ ნაწილად (ნახ. 159). ამ წერტილებიდან აღმართავენ PC და QD მართობებს. საძიებელი მართკუთხედი იქნება $ACBD$. მართლაც, თუ მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებულია მართობი, მაშინ თითოეული კათეტი საშუალო გეომეტრიულია ჰიპოტენუზისა და მასზე ამ კათეტის გეგმილისა. ამიტომ



ნახ. 159.

$$d:AC=AC:\frac{d}{3},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$AC=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

იმავე მორიდან უდიდესი სიხისტის კოჭის გამოსაჭრელად განვიხილოთ

$$\beta=xy^3=y^3\sqrt{d^2-y^2}$$

სიდიდე.

ირაციონალობისაგან თავის დასაღწევად, დავუშვათ, რომ $\beta^2=z$ და ვიპოვოთ y-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$z=d^2y^6-y^8 \qquad (0\leqslant y\leqslant d)$$

ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას.

აქ

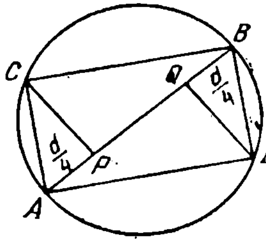
$$z'=6d^2y^5-8y^7.$$

$y_1=0$ ამონახსენი, რომელიც $[0, d]$ შუალედის ბოლოს ემთხვევა, უნდა უკუვაგდოთ, ისევე როგორც $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}d$ უარყოფითი ამონახსენი. გვრჩება

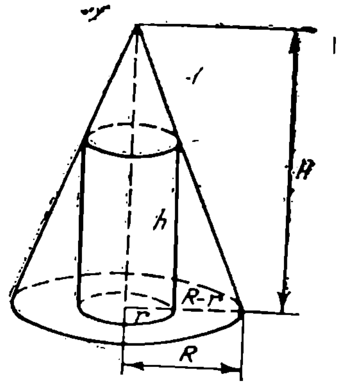
$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}d$$

ამონახსენი. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის მსგავსად, აქაც y-ის ამ მნიშვნელობას შეესაბამება β-ს უდიდესი მნიშვნელობა. შესაბამისად $x=\frac{d}{2}$. საძიებელი მართკუთხედის აგება მოცემულია 160-ე ნახაზზე, სადაც

$$AP=BQ=\frac{1}{4}\,d.$$



ნახ. 160.



ნახ. 161.

ამოცანა 6. მოცემულ კონუსში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის ცილინდრი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ ცილინდრის ფუძის რადიუსი r-ით, ხოლო სიმაღლე h-ით. გვაქვს

$$V=\pi r^2 h.$$

აქ V ორი არგუმენტის ფუნქციაა. მაგრამ, როგორც 161-ე ნახაზიდან ჩანს, მართებულია თანადობა

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R},$$

სადაც R არის კონუსის ფუძის რადიუსი, ხოლო H-სიმაღლე. აქედან

$$V=\frac{\pi H}{R}(R-r)\,r^2,$$

ე. ი. V ერთი r არგუმენტის ფუნქციაა. ცხადია, რომ $0\leqslant r\leqslant R$.

რადგანაც

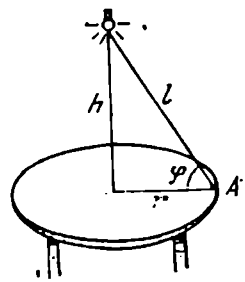
$$V'=\frac{\pi H}{R}\,(2Rr-3r^2),$$

ამიტომ გვაქვს ორი სტაციონარული წერტილი $r=0$ და $r=\frac{2}{3}R$. პირველი წერტილი უნდა უკუვაგდოთ, რადგან ის $[0, R]$ შუალედის მარცხენა ბოლოს ემთხვევა, ხოლო მეორე წერტილში V აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას,

$$V_{უდ}=\frac{4}{27}\pi R^2H.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ კონუსის მოცულობა ტოლია $\frac{1}{3}\pi R^2H$, დავინახავთ, რომ საძიებელი ცილინდრის მოცულობა შეადგენს კონუსის მოცულობის $\frac{4}{9}$ ნაწილს, ანუ მიახლოებით 44%-ს.

ამოცანა 8. მრგვალი მაგიდის ცენტრის თავზე უნდა დაიკიდოს ნათურა. გამოვარკვიოთ, თუ რა სიმაღლეზე უნდა დაიკიდოს ნათურა, რომ მაგიდის ნაპირები მაქსიმალურად იყოს განათებული.



ნახ. 162.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ის აღნიშვნები რომელიც მოცემულ 162-ე ნახაზზეა. ფიზიკიდან ცნობილია, რომ A წერტილში განათებულობა I გამოითვლება ფორმულით

$$I=k\frac{\sin\varphi}{l^2},$$

სადაც k პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტია. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\cos\varphi=\frac{r}{l},$$

მივიღებთ

$$I=\frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

საჭიროა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედზე.

რადგან

$$I'=\frac{k}{r^2}(\cos^3\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi),$$

ამიტომ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედის შიგნით l'-ს აქვს მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ი ამონახსენი, ეს არის φ_0 კუთხე, რომლისთვისაც

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ვინაიდან, როცა $\varphi=0$ და $\varphi=\frac{\pi}{2}$, მაშინ $l=0$, ხოლო როცა $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, მაშინ $l>0$. ცხადია. რომ φ_0-ს შეესაბამება l-ს უდიდესი მნიშვნელობა.

საძიებელი სიმაღლე იქნება

$$h=r\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{r\sqrt{2}}{2}\approx 0,7\,r.$$

წყვეტილ ფუნქციათა გრაფიკები

ამ თავში შევისწავლეთ უ წ ყ ვ ე ტ ფუნქციათა გამოკვლევა. მაგრამ პრაქტიკაში გვხვდება წყვეტილი ფუნქციებიც.

უფრო ხშირად ასეთებია წილად-რაციონალური ფუნქციები, რომლებიც განიცდიან წყვეტას იმ წერტილებში, სადაც მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება.

ასეთი ფუნქციების გამოკვლევა უნდა დავიწყოთ მნიშვნელის ნულების პოვნით: როდესაც ვიპოვით მნიშვნელის ამონახსნებს, ანუ ფუნქციის წყვეტის წერტილებს, შემდეგ საჭიროა გადავიტანოთ ისინი აბსცისათა ღერძზე და გამოვარკვიოთ თუ როგორი ყოფაქცევისაა ფუნქცია ამ წერტილების მახლობლობაში. შედეგები უნდა აისახოს გრაფიკზე. ამის შემდეგ, ფუნქციის გამოკვლევა გრძელდება ისე, როგორც უწყვეტი ფუნქციის შემთხვევაში, იმ განსხვავებით, რომ რიცხვითი ღერძის ცალკეულ უბნებზე ფუნქციის წარმოებულის ნიშნის გამოსარკვევად, ღერძზე უნდა აღვნიშნოთ არა მარტო სტაციონარული წერტილები, არამედ წყვეტის წერტილებიც.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1) გამოვიკვლიოთ ფუნქცია

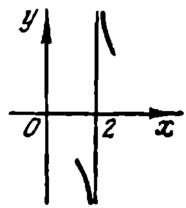
$$y=\frac{x^2}{x-2}$$

და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვპოულობთ წყვეტის წერტილებს. ამისათვის გავუტოლოთ მნიშვნელი ნულს:

$$x-2=0$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ წყვეტის წერტილია $x=2$. გამოვიკვლიოთ ფუნქციის ყოფაქცევა $x=2$ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ. როცა $x\to 2+0$*, მაშინ $y\to+\infty$, ხოლო, როცა $x\to 2-0$, მაშინ $y\to-\infty$. ეს შედეგები უნდა ავსახოთ ნახაზზე (ნახ. 163). $x=2$ წრფე არის ჩვენი ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტა.



ნახ. 163.

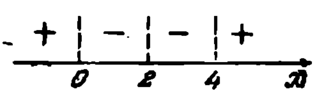
ვპოულობთ სტაციონარულ წერტილებს, რადგან

$$y'=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2},$$

ამიტომ, თუ დავუშვებთ, რომ $y'=0$, მივიღებთ თანამიმდევრულად

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0,\quad x^2-4x=0.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სტაციონარული წერტილებია $x_1=0$ და $x_2=4$. ამ წერტილების გამოკვლევის მიზნით, რიცხვით ღერძს ვყოფთ ნაწილებად $x=0$, $x=2$ და $x=4$ წერტილებით, ანუ დაყოფის წერტილად ვიღებთ $x=2$ წყვეტის წერტილსაც. ფუნქციის წარმოებულის ნიშნები მოცემულია 164-ე ნახაზზე. ასე, რომ გამოკვლევის შედეგები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილის საშუალებით:



ნახ. 164.

x	y	დახასიათება
0	0	მაქსიმუმი
2	—	წყვეტის წერტილი
4	8	მინიმუმი

შემდეგ ვპოულობთ

$$\lim_{x\to\infty} y=+\infty \text{ და } \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$$

ზღვრებს და ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ ფუნქციის გრაფიკი ჰკვეთს საკოორდინატო ღერძებს მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში.

---

* სიმბოლო $x\to 2+0$ ნიშნავს, რომ x მიისწრაფვის 2-საკენ ისე, რომ მეტი რჩება 2-ზე. ანალოგიურია $x\to 2-0$ სიმბოლო.

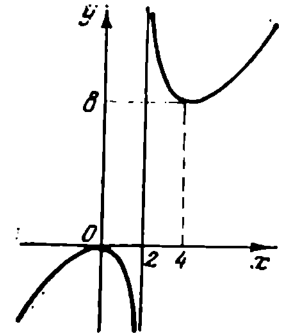
ზემოთ ნათქვამის საფუძველზე ვაგებთ გრაფიკს* (ნახ. 165).

2) გამოვიკვლიოთ ფუნქცია

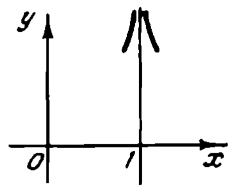
$$y=\frac{x}{(x-1)^2}$$

და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გავუტოლოთ $(x-1)^2$ მნიშვნელი ნულს, მივიღებთ წყვეტის წერტილს $x=1$. როცა $x\to 1+0$ და $x\to 1-0$, მაშინ $y\to\infty$. ეს ფაქტი ავსახოთ ნახაზზე (ნახ. 166) და შემდეგ გავაგრძელოთ გამოკვლევა.



ნახ. 165.

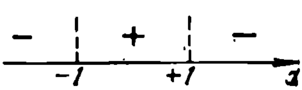


ნახ. 166.

ფუნქციის გაწარმოებით, მივიღებთ

$$y'=-\frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

სტაციონარული წერტილია $x=-1$. თუ ღერძზე აღვნიშნავთ $x=-1$ და $x=+1$ წერტილებს, მივიღებთ y' წარმოებულის ნიშნებს, რომელიც ნაჩვენებია 167-ე ნახაზზე**. ეს გვაძლევს საშუალებას შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი



ნახ. 167.

x	y	დახასიათება
-1	$-\frac{1}{4}$	მინიმუმი
$+1$	—	წყვეტა

* თუ მოცემულ ფუნქციას $y(x-2)-x^2=0$ სახით ჩავწერთ, მივიღებთ, რომ გრაფიკი არის მეორე რიგის წირი. I თავში მოცემული მეთოდებით ეს წირი შეიძლება აიგოს უფრო ზუსტად (მაგალითად მოინახოს მეორე ასიმპტოტაც).

** შეგვეძლო $x=-1$ წერტილში გამოკვლევა ჩაგვეტარებია მეორე რიგის წარმოებულის საშუალებით, რადგან მის მახლობლობაში არა გვაქვს წყვეტის წერტილები.

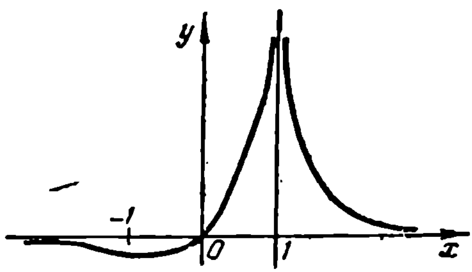
ახლა საკმარისია შევნიშნოთ, რომ გრაფიკი ჰკვეთს საკოორდინატო ღერძებს მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში, ამას გარდა, როცა $x \to +\infty$, და $x \to -\infty$ მაშინ $y \to 0$. საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ გრაფიკს აქვს 168-ე ნახაზზე მოცემული სახე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამ მაგალითზე ვხედავთ, რომ რიცხვითი ღერძის ცალკეულ უბნებად-დაყოფის დროს, ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა წყვეტის წერტილის აღნიშვნა.

მართლაც, ეს წერტილი რომ არ მიგვეღო მხედველობაში, შეიძლებოდა ასე გვემსჯელა. „იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ y'-ის ნიშანი $x=-1$ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ, ვიპოვოთ $y'(-2)$ და $y'(+2)$. რადგან

$$y'(-2)=-\frac{1}{27}, \quad y'(+2)=-3.$$

გამოდის, რომ $x=-1$ არის კლების შეჩერების წერტილი". როგორც ვხედავთ, ასეთ მსჯელობას მივყავართ შეცდომამდე (სინამდვილეში $x=-1$ არის არა კლების შეჩერების წერტილი, არამედ მინიმუმის წერტილი!).



ნახ. 168.

8. მახვილი ექსტრემუმი

ახლა განვიხილოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც თავად უწყვეტია, მაგრამ მისი წარმოებული განიცდის წყვეტას. თუ ასეთ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი წარმოებულის წყვეტის წერტილში, მაშინ ასეთ ექსტრემუმს ეწოდება მ ა ხ ვ ი ლ ი ექსტრემუმი.

პირიქით, ზემოთ შესწავლილ ექსტრემუმს, ანუ ექსტრემუმს იმ წერტილებში, სადაც წარმოებული უწყვეტია, ეწოდება გ ლ უ ვ ი ე ქ ს ტ რ ე მ უ მ ი.

169-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მახვილი ექსტრემუმი.

თუ ამ მახვილ ექსტრემუმსაც გავითვალისწინებთ, მაშინ ფუნქციის გამოკვლევა შემდეგნაირად უნდა ჩავატაროთ:

1. ვიპოვოთ y'

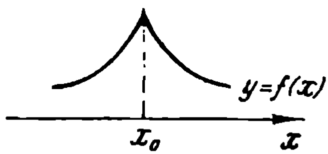
2. ვიპოვოთ წერტილები, სადაც $y'=0$ (მათ შორის შეიძლება იყოს გლუვი ექსტრემუმის წერტილები). ვიპოვოთ აგრეთვე y'-ის წყვე-

ტის წერტილები (მათ შორის შეიძლება იყოს მახვილი ექსტრემუმის წერტილები).

3. ნაპოვნი წერტილები აღვნიშნოთ რიცხვით ღერძზე და გამოვარკვიოთ ფუნქციის წარმოებულის ნიშნები ღერძის უბნებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, რომ

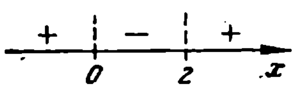
$$y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}.$$



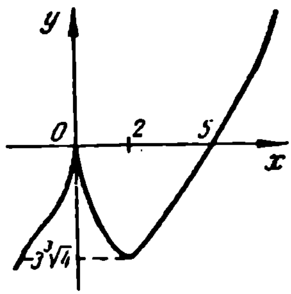
ნახ. 169.

ეს ფუნქცია უწყვეტია. მისი წარმოებულია

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$



ნახ. 170.



ნახ. 171.

თუ დავუშვებთ, რომ $y'=0$, მივიღებთ $x_1=2$; ხოლო თუ დავუშვებთ, რომ $\sqrt[3]{x}=0$, მივიღებთ $x_2=0$. $x_2=0$ წერტილში y' წარმოებული განიცდის წყვეტას. ამიტომ გამოსაკვლევი წერტილებია $x=0$ და $x=2$. $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ და $]2, +\infty[$ შუალედებში წარმოებულის ნიშნები მოცემულია, 170-ე ნახაზზე. აქედან ჩანს რომ $x=2$ წერტილში ფუნქციას აქვს გლუვი მინიმუმი, ხოლო $x=0$ წერტილში მახვილი მაქსიმუმი. ეს შედეგები გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილით:

x	y	დახასიათება
0	0	მახვილი მაქსიმუმი
2	$-3\sqrt[3]{4}\approx-4,76$	მინიმუმი

შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ როცა $x=0$ და $x=5$, მაშინ $y=0$. ბოლოს

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty.$$

ამგვარად, ჩვენი ფუნქციის გრაფიკს აქვს 171-ე ნახაზზე მოცემული სახე.

§ 4. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები

1. როლის თეორემა

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ რიგ მნიშვნელოვან თეორემებს. დავიწყოთ თეორემით, რომელიც ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოს მ. როლს [*M. Rolle*, 1652—1719].

თეორემა. ვთქვათ $f(x)$ $[a, b]$ შუალედზე განსაზღვრული გლუვი* ფუნქციაა. თუ

$$f(a)=0, \qquad f(b)=0$$

მაშინ a და b წერტილებს შორის უსათუოდ მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი c წერტილი $(a<c<b)$, რომ

$$\boxed{f'(c)=0}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, გლუვი ფუნქციის ყოველ ორ ამონახსენს შორის აუცილებლად მოიძებნება მისი წარმოებულის ამონახსენი.

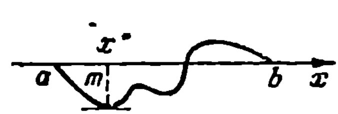
დამტკიცება. ვთქვათ, რომ m და M ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობებია $[a, b]$ შუალედზე. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $m=M$. ეს ნიშნავს, რომ $f(x)=\text{const}$ და $f'(x)\equiv 0$, ანუ საძიებელი c წერტილი იქნება a და b წერტილებს შორის მდებარე ყოველი წერტილი.

ვთქვათ, $m\neq M$. მაშინ m და M რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $m\neq 0$ და დავუშვათ, რომ x^* არის x არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)$ ღებულობს m მნიშვნელობას

$$f(x^*)=m.$$

ცხადია, რომ x^* არ შეიძლება დაემთხვეს არც a-ს და არც b-ს, რადგან $f(a)=f(b)=0$. ხოლო $f(x^*)=m\neq 0$, ამიტომ x^* (ნახ. 172) a და b წერტილებს შორის ძევს

$$a<x^*<b.$$



ნახ. 172.

* შევახსენებთ, რომ ფუნქციას ეწოდება გლუვი, თუ ის უწყვეტია და აქვს უწყვეტი წარმოებული.

ამგვარად, გლუვი $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას $[a, b]$ შუალედის შიგა წერტილში, ე. ი. x^* წერტილში ფუნქციას აქვს გლუვი მინიმუმი, ამიტომ ფერმას პრინციპის თანახმად $f'(x^*)=0$. ამიტომ x^* არის საძიებელი c წერტილი.

თეორემა დამტკიცებულია.

სასრულ ნაზრდთა ფორმულა

ლაგრანჟის თეორემა. თუ $[a, b]$ შუალედზე მოცემულია გლუვი $f(x)$ ფუნქცია, მაშინ a და b წერტილებს შორის მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი c წერტილი ($a<c<b$), რომ მართებულია ფორმულა

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

რომელსაც ეწოდება სასრულ ნაზრდთა ფორმულა, ანუ ლაგრანჟის* ფორმულა.

დამტკიცება. შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციიდან $\varphi(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\varphi(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-[f(b)-f(a)](x-a).$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და აქვს უწყვეტი წარმოებული

$$\varphi'(x)=f'(x)(b-a)-[f(b)-f(a)].$$

ამიტომ $\varphi(x)$ გლუვი ფუნქციაა. ამას გარდა, $\varphi(x)$-ის განსაზღვრიდან ჩანს, რომ

$$\varphi(a)=0, \quad \varphi(b)=0.$$

ამგვარად, $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას, ამიტომ a და b წერტილებს შორის მოიძებნება ისეთი c წერტილი, რომ $\varphi'(c)=0$, ან რაც იგივეა

$$f'(c)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0,$$

მაშინ

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ე. ი. c არის საძიებელი წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

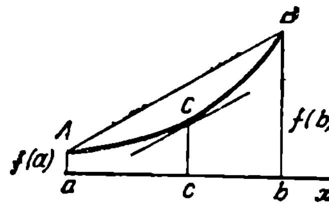
---

* J. L. *Lagrange* (1736—1813) — ფრანგი მათემატიკოსი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 173-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ წილადი არის AB ქორდის კუთხური კოეფიციენტი. მეორე მხრივ, $f'(c)$ არის $C(c, f(c))$ წერტილში გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტი. აქედან გამომდინარეობს

ლაგრანჟის ფორმულის გეომეტრიული მნიშვნელობა

გ ლ უ ვ ი წ ი რ ი ს ყ ო ვ ე ლ რ კ ა ლ ზ ე მ ო ი ძ ე ბ ნ ე ბ ა წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ ე ლ ზ ე ც გ ა ვ ლ ე ბ უ ლ ი მ ხ ე ბ ი ა მ რ კ ა ლ ი ს მ ო მ ჭ ი მ ა ვ ი ქ ო რ დ ი ს პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი ა.



ნახ. 173.

3. სასრულ ნაზრდთა განზოგადებული ფორმულა

ლაგრანჟის თეორემა გვაძლევს შემდეგი განზოგადების საშუალებას.

კოშის* თეორემა. თ უ $[a, b]$ შ უ ა ლ ე დ ზ ე მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ო რ ი გ ლ უ ვ ი $f(x)$ დ ა $g(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა, მ ა შ ი ნ a დ ა b წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ს შ ო რ ი ს მ ო ი ძ ე ბ ნ ე ბ ა ე რ თ ი მ ა ი ნ ც ი ს ე თ ი c წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

რ ო მ ე ლ ს ა ც ე წ ო დ ე ბ ა ს ა ს რ უ ლ ნ ა ზ რ დ თ ა გ ა ნ ზ ო გ ა დ ე ბ უ ლ ი ფ ო რ მ უ ლ ა, ა ნ უ კ ო შ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\Psi(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)].$$

ეს ფუნქცია, ისე როგორც მისი წარმოებული

$$\Psi'(x)=f'(x)[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]g'(x);$$

უწყვეტია. ამას გარდა $\Psi(a)=0$ და $\Psi(b)=0$. მაშასადამე, $\Psi(x)$ -სათვის შესრულებულია როლის თეორემის პირობები, ამიტომ a და b წერტილებს

* *A. Cauchy* (1789—1857) — ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი.

შორის მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $\Psi'(c)=0$ ან რაც, იგივეა

$$f'(c)[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]g'(c)=0,$$

აქედან

$$f'(c)[g(b)-g(a)]=[f(b)-f(a)]g'(c)$$

და*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ სასრულ ნაზრდთა განზოგადებულ ფორმულას დავწერთ იმ კერძო შემთხვევისათვის, როდესაც $g(x)=x$, მაშინ ის მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1},$$

ე. ი. გადაიქცევა სასრულ ნაზრდთა ჩვეულებრივ ფორმულად.

4. ფუნქციის მუდმივობის ნიშანი

ვიცით, რომ თუ ფუნქცია მუდმივია, მისი წარმოებული ნულის ტოლია. მართებულია შებრუნებული

თეორემა. ვ თ ქ ვ ა თ, $[a, b]$ შ უ ა ლ ე დ ზ ე მ ო ც ე მ უ ლ ი ა $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა, რ ო მ ე ლ ს ა ც ა ქ ვ ს $f'(x)$ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი თ უ $[a, b]$ შ უ ა ლ ე დ ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ x წ ე რ ტ ი ლ შ ი $f'(x)$ ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\boxed{f(x)=\text{const}}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავირჩიოთ და დავაფიქსიროთ $[a, b]$ შუალედის რაიმე x წერტილი. $[a, x]$ შუალედისათვის გამოვიყენოთ ლაგრანჟის თეორემა. ამ თეორემის თანახმად a და x წერტილებს შორის მოიძებნება ისეთი c წერტილი, რომ

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

* ეს გარდაქმნა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $g'(c)\neq 0$ და $g(b)-g(a)\neq 0$. ამიტომ მეტი სიმკაცრისათვის თეორემის ფორმულირება ისე უნდა ყოფილიყო მოცემული, რომ გარანტირებული იყოს ამ უტოლობათა შესრულება.

მაგრამ c $[a, b]$ შუალედის შიგა წერტილია. მაშასადამე, $f'(c)=0$. ამიტომ

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0,$$

ანუ $f(x)-f(a)=0$ და $f(x)=f(a)$, ხოლო რადგანაც x ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი წერტილია, თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $-1<x<1$ და $\varphi(x)=\arcsin x+\arccos x$. მაშინ

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

ამიტომ $\varphi(x)=\text{const}$. მაგრამ $\varphi(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$. მაშასადამე, საზოგადოდ, ყოველი x-ისათვის $[-1, +1]$ შუალედიდან $\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$ ე. ი.

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

5. განუსაზღვრელობათა გახსნა

აქ გავარჩევთ განუსაზღვრელობათა გახსნის ხერხს წარმოებულების საშუალებით. ამ ხერხს უწოდებენ „ლოპიტალის წესს" (მე-17 საუკუნის ფრანგი მათემატიკოსის* გვარის მიხედვით).

თეორემა. ვ თ ქ ვ ა თ, $f(x)$ და $g(x)$ ო რ ი გ ლ უ ვ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ხ დ ე ბ ი ა ნ ე რ თ ს ა და ი მ ა ვ ე $x=a$** წ ე რ ტ ი ლ შ ი,

$$f(a)=0, \qquad g(a)=0.$$

თ უ ა რ ს ე ბ ო ბ ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი ს შ ე ფ ა რ დ ე ბ ი ს (ს ა ს რ უ ლ ი ა ნ უ ს ა ს რ უ ლ ო) ზ ღ ვ ა რ ი

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

---

* *G. F. de l'Hospital* (1661—1704).

** მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადი, როცა $x\to a$ წარმოადგენს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობას.

მაშინ ამავე ზღვარისაკენ მიისწრაფვის თვით ფუნქციათა შეფარდებაც, ე. ი.

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} A}$$

დამტკიცება. რადგან $f(a)=g(a)=0$, ამიტომ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ წილადი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

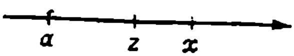
სასრულ ნაზრდთა განზოგადებული ფორმულის თანახმად, a და x წერტილებს შორის აუცილებლად მოიძებნება ისეთი z წერტილი, რომ

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}. \qquad (1)$$

ამასთან, z მოთავსებულია a და x წერტილებს შორის (ნახ. 174).



ნახ. 174.

ვთქვათ, რომ x მიისწრაფვის a-საკენ, მაშინ z აგრეთვე მიისწრაფვის a-სკენ და რადგან თეორემის თანახმად

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} \xrightarrow[x\to a]{} A,$$

(1) ტოლობის ძალით გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} A,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

მაგალითები.

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{2x}=-\frac{3}{4}.$$

2) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{1}=\frac{1}{6}.$$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{\ln x - \ln a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\sin x \cos x}{\dfrac{1}{x}} = 2a \sin a \cos a.$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}.$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ამავე ხერხით შეიძლება $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty.$

2) ვთქვათ, $a>1$, მაშინ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = +\infty.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $b>0$. რადგან

$$\frac{a^x}{x^b} = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^x}{x}\right]^b,$$

ხოლო უკვე დამტკიცებულის გამო

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^x}{x} = +\infty,$$

ამიტომ

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ზ რ დ ე ბ ა უ ფ რ ო ს წ რ ა ფ ა დ, ვ ი დ რ ე ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა.

6. $\Delta y = dy$ ტოლობის სიზუსტის შეფასება

ვთქვათ, $[a, b]$ შუალედზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს $f'(x)$ და $f''(x)$ უწყვეტი წარმოებულები. ვთქვათ, x_0 და $x_0+\Delta x$ $[a, b]$ შუალედის ორი წერტილია. ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(\overline{x})\Delta x,$$

სადაც $\overline{x}$ ძევს x_0 და $x_0+\Delta x$ წერტილებს შორის.

მეორე მხრივ

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x.$$

აქედან

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)=[f'(\overline{x})-f'(x_0)]\Delta x.$$

ლაგრანჟის ფორმულის მეორედ გამოყენება გვაძლევს

$$f'(\overline{x})-f'(x_0)=f''(x^*)\quad(\overline{x}-x_0),$$

სადაც x^* ძევს x_0 და $\overline{x}$ შორის. მაშასადამე,

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)=f''(x^*)\quad(\overline{x}-x_0)\Delta x.$$

აღვნიშნოთ M-ით $|f''(x)|$-ის უდიდესი მნიშვნელობა. რადგან $|\overline{x}-x_0|<|\Delta x|$, ამიტომ თუ სიმარტივისათვის x_0 შევცვლით x-ით, მივიღებთ შეფასებას

$$|\Delta f(x)-df(x)|\leqslant M(\Delta x)^2,$$

რის შესახებაც გვქონდა ლაპარაკი ჯერ კიდევ §4 მე-5 ქვეპარაგრაფში.

§ 7. ტეილორის ფორმულა

1. საკითხის დაყენება

გავიხსენოთ ფუნქციის განსაზღვრა, რომელიც მოცემული იყო II თავში: „y ცვლადი არის x ცვლადის ფუნქცია, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის გარკვეული მნიშვნელობა".

ამ განსაზღვრაში არ არის ლაპარაკი იმაზე, თუ როგორ უნდა მოვნახოთ y-ის მნიშვნელობები, რომლებიც x-ის მოცემულ მნიშვნელობებს შეესაბამება. იმ შემთხვევებში, როცა მოცემულია გამოსათვლელი ფორმულა, მაგალითად

$$y=x^2$$

ან

$$y=\frac{x^3-4x^2+3x-7}{x^2+6}.$$

საკითხი ნათელია, მაშინ როდესაც უფრო რთულ შემთხვევებში საქმე ასე არ არის. მაგალითად ტოლობა

$$y=\sin x$$

იმისათვის, ვინც იცნობს ტრიგონომეტრიის მხოლოდ სასკოლო კურსს, არ წარმოადგენს გამოსათვლელ ფორმულას. იგივე ითქმის

$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\qquad y=\ln x$$

ტოლობების შესახებ და ა. შ. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ საჭიროა შეიქმნას ანალიზური საშუალებები, რომლებიც მოგვცემს საშუალებას გამოვთვალოთ არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობის მიხედვით ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობა. ტეილორის ფორმულა, რომელიც გადმოცემული იქნება ამ პარაგრაფში, წარმოადგენს დასმული ამოცანის ერთ-ერთ ამოხსნას.

ტეილორის ფორმულა მრავალწევრისათვის

ლემა. ვთქვათ, რომ $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ არის რაიმე მრავალწევრი. როგორი a რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, ეს მრავალწევრი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_n(x-a)^n,$$

სადაც $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — რაღაც მუდმივი რიცხვებია.

დამტკიცება. $f(x)$ მრავალწევრი არის x^k ხარისხების მუდმივ c_k რიცხვებზე ნამრავლთა ჯამი. ამიტომ, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ შესაძლებელია ცალკეული x^k ხარისხების წარმოდგენა ჯამის სახით:

$$x^k=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_k(x-a)^k.$$

უკანასკნელი, სავსებით ცხადია, რადგან x შეიძლება ჩაიწეროს ჯამის სახით შემდეგნაირად

$$x=a+(x-a).$$

და გამოვიყენოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა.

$$(p+q)^k=p^k+kp^{k-1}q+\frac{k(k-1)}{2}p^{k-2}q^2+\ldots+q^k,$$

ვიგულისხმოთ, რომ $p=a$ და $q=x-a$.

ამგვარად, ლემა დამტკიცებულია.

ამოცანა. მოცემულია $f(x)$ მრავალწევრი და a რიცხვი. ვიპოვოთ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვები.

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_n(x-a)^n. \tag{1}$$

1) თუ დავუშვებთ, რომ $x=a$, მივიღებთ $f(a)=A_0$. ამგვარად,

$$A_0=f(a).$$

2) გავაწარმოოთ (1) ტოლობა

$$f'(x)=A_1\cdot 1+A_2\cdot 2(x-a)+\ldots+A_n n(x-a)^{n-1}. \qquad (2)$$

თუ აქ დავუშვებთ, რომ $x=a$, მივიღებთ $f'(a)=A_1\cdot 1$ და

$$A_1=\frac{f'(a)}{1!}.$$

3) გავაწარმოოთ (2) ტოლობა

$$f''(x)=A_2\cdot 2\cdot 1+A_3\cdot 3\cdot 2(x-a)+\ldots+A_n n(n-1)(x-a)^{n-2}.$$

და დავუშვათ, რომ $x=a$. მაშინ $f''(a)=A_2\cdot 1\cdot 2$ და

$$A_2=\frac{f''(a)}{2!}.$$

თუ ამ მსჯელობას გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$$A_3=\frac{f'''(a)}{3!},$$

და საზოგადოდ

$$A_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

ამგვარად, ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისა და ნებისმიერი a რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} \qquad (3)$$

რომელსაც ეწოდება ტეილორის* ფორმულა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $f(x)=x^3-3x^2+4x-8$. დავშალოთ $f(x)$ $(x-2)$-ის ხარისხების მიხედვით.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$f(x)=x^3-3x^2+4x-8,\qquad f(2)=-4.$

$f'(x)=3x^2-6x+4,\qquad f'(2)=4,$

$f''(x)=6x-6,\qquad f''(2)=6,$

$f'''(x)=6,\qquad f'''(2)=6.$

ამიტომ

$$x^3-3x^2+4x-8=-4+4(x-2)+3(x-2)^2+(x-2)^3.$$

---

* *B. Taylor* (1685—1731) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

3. ტეილორის ფორმულა ნებისმიერი ფუნქციისათვის

ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც უწყვეტია და აქვს ყველა რიგის უწყვეტი წარმოებულები. ავირჩიოთ რაიმე a და n რიცხვები და შევადგინოთ მრავალწევრი

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

რომელსაც ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის ტ ე ი ლ ო რ ი ს მ რ ა ვ ა ლ- წ ე ვ რ ი. რადგანაც არ ვგულისხმობთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრია*, ამიტომ არ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ $f(x) = T(x)$. მაგრამ, ძალიან ხშირად, $f(x)$ და $T(x)$ შორის სხვაობა ს ა კ მ ა ო დ მ ც ი რ ე ა. მაშინ $T(x)$ არის $f(x)$-ის კარგი მიახლოებითი გამოსახულება. ჩვეულებრივ

$$f(x) \approx T(x)$$

მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე მით უფრო მაღალია, რაც მეტია n რიცხვი. რადგან $T(x)$ არის ჩვეულებრივი ალგებრული მრავალწევრი, რომლის გამოთვლა არ არის ძნელი, ამიტომ, $f(x) \approx T(x)$ ფორმულა გვაძლევს $f(x)$-ის გამოთვლის საშუალებას.

იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს $f(x) \approx T(x)$ ტოლობის ცდომილების შეფასება, საჭიროა

$$f(x) - T(x)$$

სხვაობას მივცეთ მოხერხებული სახე.

ზოგადად გამოთვლები საკმაოდ რთულია. საქმის გასამარტივებლად, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $n=2$, ანუ როცა ტეილორის მრავალწევრს აქვს სახე

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

ჩვენთვის საინტერესო საკითხი ამოიხსნება ხელოვნური ხერხით**. დავაფიქსიროთ x და შემოვიღოთ t არგუმენტის $\varphi(t)$ ფუნქცია, რომელიც მიიღება $T(x)$-იდან, თუ a მუდმივს შევცვლით t ცვლადით:

$$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2.$$

---

* მრავალწევრის (ზოგჯერ ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი მრავალწევრის) ქვეშ როგორც ზემოთ, ვგულისხმობთ $A + Bx + \dots + Kx^m$ სახის ფუნქციას.

** არსებობს კიდევ სხვა ხერხიც, რომელიც მოცემული იქნება XIII თავში (§ 1,1). ის უფრო მარტივია, მაგრამ მოითხოვს ინტეგრალური აღრიცხვის ცოდნას.

გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია t ცვლადით (გავიხსენოთ, რომ x ფიქსირებულია). მივიღებთ

$$\varphi'(t)=f'(t)+f''(t)(x-t)-f'(t)+\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2-f''(t)(x-t).$$

გამარტივების შემდეგ ვღებულობთ

$$\varphi'(t)=\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2.$$

შემდეგ შემოვიღოთ

$$\psi(t)=\frac{(x-t)^3}{3!}$$

ფუნქცია.

ცხადია,

$$\psi'(t)=-\frac{(x-t)^2}{2}.$$

$[a, x]$ შუალედზე $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციების მიმართ გამოვიყენოთ სასრულ ნაზრდთა განზოგადებული ფორმულა

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\bar{x})}{\psi'(\bar{x})},$$

სადაც $\bar{x}$ ძევს a და x წერტილებს შორის. $\varphi(t)$-ს განსაზღვრიდან გამომდინარე, გვაქვს:

$$\varphi(x)=f(x), \qquad \varphi(a)=T(x).$$

აგრეთვე

$$\psi(x)=0, \quad \psi(a)=\frac{(x-a)^3}{3!},$$

თუ გავითვალისწინებთ $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ გამოსახულებებს, უკანასკნელ ტოლობას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე

$$\frac{f(x)-T(x)}{-\frac{(x-a)^3}{3!}}=\frac{\frac{f'''(\bar{x})(x-\bar{x})^2}{2}}{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}}$$

ან

$$\frac{f(x)-T(x)}{\frac{(x-a)^3}{3!}}=f'''(\bar{x}).$$

აქედან, თუ ვისარგებლებთ $T(x)$ გამოსახულებით, ვღებულობთ ფორმულას

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x-a)^3} \qquad (4)$$

სიმარტივისათვის ვგულისხმობდით, რომ $n=2$. ზოგად შემთხვევაში ანალოგიური მსჯელობით მიიღება შემდეგი ფორმულა

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \qquad (5)$$

სადაც $\bar{x}$ ძევს a და x შორის. ამ ფორმულას ეწოდება ტეილორის ფორმულა ლაგრანჟის სახის ნაშთით. „ნაშთი" ეწოდება (5) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში უკანასკნელ წევრს, ანუ

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \qquad (6)$$

გამოსახულებას. მისი ზუსტი მნიშვნელობა არ არის ცნობილი, რადგანაც უცნობია $\bar{x}$ წერტილი. ამასთან, მრავალ შემთხვევაში შესაძლებელია $R_n(x)$-ის შეფასება. თუ აღმოჩნდება, რომ ნაშთი საკმაოდ მცირეა, მაშინ შესაძლებელია მისი უგულებელყოფა და მიიღება მიახლოებითი ფორმულა

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა

$$f(x)=\sin x$$

ფუნქციისათვის იმ პირობით,* რომ $a=0$, და $n=8$.

---

* ტეილორის ფორმულის კერძო სახეს, როცა $a=0$, ანუ $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}$ ფორმულას ეწოდება მაკლორენის ფორმულა. ეს უსაფუძვლოა რადგან ტეილორმა გამოაქვეყნა თავისი ფორმულა (ნაშთის გარეშე) 1715 წ. ხოლო მაკლორენის (*C. Maclaurin*) შრომა გამოქვეყნდა 1748 წ. სახელწოდება „ტეილორის ფორმულა" ისტორიულად გაუმართლებელია, რადგან იგი გამოაქვეყნა შვეიცარიელმა მეცნიერმა ი. ბერნულიმ ჯერ კიდევ 1694 წ.

ჩვენ შემთხვევაში:

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0,$$
$$f'(x)=\cos x, \qquad f'(0)=1,$$
$$f''(x)=-\sin x, \qquad f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=-\cos x, \qquad f'''(0)=-1,$$
$$f^{\text{IV}}(x)=\sin x, \qquad f^{\text{IV}}(0)=0.$$
$$\cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot$$

თუ აღვნიშნავთ $\bar{x}$-ით 0 და x შორის მოთავსებულ წერტილს, მივიღებთ

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{\cos\bar{x}}{9!}x^9.$$

თუ უგულებელვყოფთ ნაშთს, მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობას

$$\boxed{\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}} \tag{7}$$

ამ ტოლობის ცდომილებაა $\frac{\cos\bar{x}}{9!}x^9$, მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება $\frac{|x|^9}{9!}$ რიცხვს. მაგალითად, თუ გამოვთვლით უკანასკნელი ფორმულით $\sin\frac{1}{2}$, მაშინ ვუშვებთ შეცდომას, რომელიც არ აღემატება

$$\frac{1}{2^9\cdot 9!}<10^{-8}.$$

როცა ვითვლით გრადუსებით გამოსახულ რაიმე კუთხის სინუსს, წინასწარ ეს კუთხე უნდა გამოვსახოთ რადიანებით და (7) ფორმულაში x-ის მაგივრად ჩავსვათ მისი რადიანული ზომა. გაგახსენებთ, რომ თუ x კუთხე შეიცავს n გრადუსს, მისი რადიანული ზომა იქნება:

$$x=\frac{n\pi}{180}=\frac{3,14159}{180}n=0,0174\,n.$$

2) გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა

$$f(x)=e^x$$

ფუნქციისათვის იმ პირობით, რომ $a=0$ და $n=7$.

რადგან ყოველი k-სათვის $f^{(k)}(x)=e^x$, ამიტომ

$$f^{(k)}(0)=1$$

და ვღებულობთ:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{e^{\bar{x}}}{8!} x^8.$$

კერძოდ, როცა $x=1$ და უგულებელვყოფთ ნაშთს, მივიღებთ

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}. \tag{8}$$

ამ ტოლობის ცდომილებაა $\frac{e^{\bar{x}}}{8!}$. მაგრამ $0 < e^{\bar{x}} < e < 3$. ამიტომ (8) ტოლობის ცდომილება დადებითია და ნაკლებია $\frac{3}{8!} = \frac{3}{40320} < 0{,}00008$.

თუ (8) ტოლობაში ყველა წილადს ჩავწერთ ათწილადის სახით და შევინარჩუნებთ მძიმის შემდეგ 6 ნიშანს, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2!} = 0{,}500000$$

$$\frac{1}{3!} = 0{,}166667$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}041667$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}008333$$

$$\frac{1}{6!} = 0{,}001389$$

$$\frac{1}{7!} = 0{,}000198$$

$$\overline{\phantom{0{,}000000}}$$

$$0{,}718254$$

აქედან 0,0001 სიზუსტით ვღებულობთ

$$e = 2{,}7183.$$

4. ტეილორის ფორმულის სხვა სახეები

თუ ტეილორის ფორმულაში

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

x-ს შეცვლით $(x+\Delta x)$-ით, ხოლო a-ს x-ით, მივიღებთ

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\Delta x+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}.$$

თუ გადავიტანთ $f(x)$ მარცხნივ და შევნიშნავთ, რომ

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x),$$

მივიღებთ

$$\boxed{\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}} \qquad (9)$$

ეს ფორმულა გვაძლევს $\Delta f(x)$-ის დაშლას Δx-ის ხარისხების მიხედვით. თუ Δx პირველი რიგის უსასრულოდ მცირეა, მაშინ

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x$$

ტოლობის ცდომილება მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეა, ხოლო

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2$$

ტოლობის ცდომილება მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეა.

თუ გავიხსენებთ, რომ ნამრავლი

$$f^{(k)}(x)(\Delta x)^k$$

არის k რიგის დიფერენციალი $d^kf(x)$, შეიძლება დავწეროთ ტეილორის 9) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$\boxed{\Delta f(x)=df(x)+\frac{d^2f(x)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(x)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(\bar{x})}{(n+1)!}}$$

IV თავი

დიფერენციალური გეომეტრიის ზოგიერთი საკითხი

§ 1. მხები და ნორმალი

1. მხების გავლება

ანალიზური გეომეტრია თავის ამოცანად ისახავდა გეომეტრიის საკითხების შესწავლას გამოთვლითი ხერხების საშუალებით. ამ ხერხების რაოდენობა მცირეა და შემოისაზღვრება ელემენტარული ალგებრით და ტრიგონომეტრიით. მათემატიკის დარგს, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიულ ამოცანებს *დიფერენციალური აღრიცხვის* საშუალებით, ეწოდება *დიფერენციალური გეომეტრია*. ჩვენ შევისწავლით ამ დარგის უმარტივეს საკითხებს, შემოვიზღუდებით გეომეტრიით სიბრტყეზე.

რადგანაც მოგვიხდება სარგებლობა განსახილველი ფუნქციის წარმოებულებით (სხვადასხვა რიგის), შევთანხმდეთ, რომ ამ თავში ხსენებული წარმოებულები $f'(x)$, $f''(x)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\psi'(t)$ და სხვა, არსებობენ და უწყვეტნი არიან.

პირველ რიგში განვიხილოთ საკითხი

$$y=f(x) \tag{1}$$

წირის $M(x_0, y_0)$ წერტილში ამ წირისადმი *მხების გავლების* შესახებ. ჯერ კიდევ III თავში (§1,1) მოცემული იყო მხების განსაზღვრა და დავადგინეთ, რომ ხსენებული მხების კუთხური კოეფიციენტი $f'(x_0)$-ის ტოლია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს არის წარმოებულის მნიშვნელობა, როცა $x=x_0$*, თუ სიმარტივისათვის დავუშვებთ, რომ $f'(x_0)=y_0'$, მივიღებთ *მხების* შემდეგ *განტოლებას*

$$\boxed{y-y_0=y_0'(x-x_0)} \tag{2}$$

---

* მკითხველის ყურადღებას ვაქცევთ $f'(x_0)$ და $[f(x_0)]'$ შორის განსხვავებაზე. პირველი არის $f'(x)$ წარმოებულის მნიშვნელობა $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის, ხოლო მეორე 0-ის ტოლია, რადგან $f(x_0)$ მუდმივია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) გავავლოთ $y=\ln x$ წირის მხები იმ წერტილში, სადაც ეს წირი ჰკვეთს აბსცისათა ღერძს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ხსენებული წერტილისათვის $y=0$. მაშინ $\ln x=0$ ტოლობიდან ვპოულობთ, რომ $x=1$. ამგვარად შეხების წერტილია $M(1,0)$. ამას გარდა,

$$y'=\frac{1}{x},$$

საიდანაც $y_0'=1$. მაშასადამე, მხების განტოლება იქნება

$$y=x-1.$$

2. ვიპოვოთ $y=2x^2-5x+1$ წირის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები $y=3x+11$ წრფის პარალელურია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ვიცით მხების კუთხური კოეფიციენტი $y_0'=4x_0-5$, სადაც x_0 შეხების წერტილის აბსცისაა. მეორე მხრივ, მოცემული წრფის კუთხური კოეფიციენტი 3-ის ტოლია. მაშასადამე,

$$4x_0-5=3,$$

საიდანაც $x_0=2$. ასეთ შემთხვევაში წირის განტოლებიდან გვაქვს $y_0=-1$ ამგვარად საძიებელი წერტილია $(2, -1)$.

3) გავიგოთ, თუ რა კუთხით იკვეთება $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლები*.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩვენი პარაბოლები იკვეთება $A(0,0)$ და $B(1,1)$ წერტილებში. $A(0,0)$ წერტილში $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლების მხებებს წარმოადგენენ Ox და Oy ღერძები შესაბამისად. მაშასადამე, ამ წერტილში პარაბოლები იკვეთება 90°-იანი კუთხით. ეს შედეგი შეიძლება მივიღოთ (2) განტოლებიდანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ განსახილველი წირებიდან პირველისათვის გვაქვს

$$y'=2x$$

და ამიტომ $y_0'=0$. რაც შეეხება $y^2=x$ წირს, ის იშლება ორ წირად $y=\sqrt{x}$ და $y=-\sqrt{x}$, თითოეულ მათგანს აქვს ცხადი განტოლება. ამ წირებისათვის გვაქვს $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ და $y'=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$. $x=0$ წერტილში ეს

* ორ წირს შორის კუთხე ეწოდება მათი გადაკვეთის წერტილში გამავალ მ ხ ე ბ ე ბ ს შორის კუთხეს.

ორივე გამოსახულება უსასრულოდ დიდი ხდება. ეს ნიშნავს, რომ Ox ღერძსა და მხებს შორის კუთხე მართია. მივიღეთ იგივე შედეგი. $B(1,1)$ წერტილისათვის $x=1$, და ამიტომ ჩვენი პარაბოლების მხებების კუთხური კოეფიციენტები ტოლია 2 და $\frac{1}{2}$ შესაბამისად (ცხადია, რომ (1,1) წერტილზე გადის $y=\sqrt{x}$ და $y=-\sqrt{x}$ წირებიდან პ ი რ ვ ე ლ ი). I თავიდან ცნობილი ფორმულის $\operatorname{tg}\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ თანახმად იქნება $\operatorname{tg}\theta=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{3}{4}$. ცხრილებში ადვილად ვიპოვით, რომ $\theta=36°52'$

4) ელიფსის

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

$M(x_0, y_0)$ წერტილში გავავლოთ მხები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3) განტოლება არის ა რ ა ც ხ ა დ ი განტოლება ის იშლება ორ ცხად განტოლებად

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{4}$$

აქედან, უნდა ავირჩიოთ პირველი, თუ $y_0>0$ და მეორე, თუ $y_0<0$. მაშინ შეიძლება ვისარგებლოთ (2) ფორმულით. ამის ნაცვლად ჩავატარებთ სხვა მსჯელობას, რომელიც წარმატებით გამოიყენება ნებისმიერი წირისათვის, რომელიც მოცემულია არაცხადი განტოლებით. სახელდობრ, თუ (3) განტოლებიდან ვიპოვით y-ის გამოსახულებას ცხადი სახით [ეს იქნება (4) განტოლებებიდან ერთ-ერთი] და მიღებულ შედეგს ჩავსვამთ (3) განტოლებაში, მივიღებთ ი გ ი ვ ე ო ბ ა ს (x-ის მიმართ). ეს იგივეობა ჩავწეროთ ისევ (3) სახით, და y-ის ქვეშ ვიგულისხმოთ x-ის სწორედ ის ფუნქცია, რომელიც მოიძებნება (3) განტოლების ამოხსნით*. თუ ამ იგივეობას გავაწარმოებთ x-ით და გავითვალისწინებთ, რომ $(y^2)'=2yy'$, მივიღებთ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,$$

---

* ამ მსჯელობის ასახსნელად შევნიშნოთ, რომ $2x-6=0$ ტოლობა არის გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. მისი ამოხსნით ვპოულობთ $x=3$. ახლა თუ დავწერთ ამ განტოლებას და ვიგულისხმებთ x-ის მაგივრად 3-ს, მაშინ იგივეობას მივიღებთ.

საიდანაც

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

მაშასადამე,

$$y'_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

თუ ახლა ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (2) განტოლებაში, მივიღებთ ჩვენთვის საინტერესო მხების განტოლებას

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

აქედან

$$\frac{yy_0 - y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2 - xx_0}{a^2}$$

ან

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \qquad (5)$$

რადგან $M(x_0, y_0)$ წერტილი ძევს (3) ელიფსზე, ამიტომ (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი 1-ის ტოლია და საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

მკითხველს ვურჩევთ, იმავე მეთოდით უჩვენოს, რომ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლის და $y^2 = 2px$ პარაბოლის მხებების განტოლებები იქნება შესაბამისად

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad yy_0 = p(x + x_0),$$

სადაც (x_0, y_0) შეხების წერტილია.

2. ნორმალი

წირის ნ ო რ მ ა ლ ი ეწოდება წირისადმი გავლებულ მართობს. ამ ცნების ზუსტი განსაზღვრა ასეთია: K წ ი რ ი ს ნ ო რ მ ა ლ ი, მ ი ს რ ა ი მ ე M წ ე რ ტ ი ლ შ ი, ე წ ო დ ე ბ ა ამ წ ე რ ტ ი ლ- შ ი გ ა ვ ლ ე ბ უ ლ ი მ ხ ე ბ ი ს მ ა რ თ ო ბ უ ლ წ რ ფ ე ს (ნახ. 175).

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y=f(x)$ წირის $M(x_0, y_0)$ წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი არის $f'(x_0)=y'_0$, მაშინ ორი წრფის ურთიერთმართობულობის პირობის თანახმად (1) წირის $M(x_0, y_0)$ წერტილში გავლებული ნორმალის განტოლება იქნება

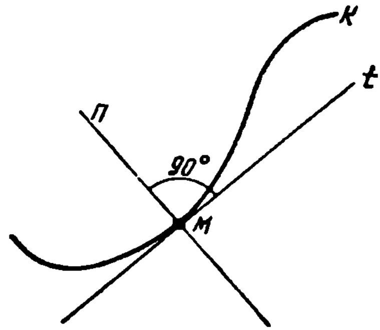
$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)} \qquad (6)$$

ამ განტოლებით არ შეიძლება ვისარგებლოთ, როცა $y_0'=0$. ამ შემთხვევაში მხები Ox ღერძის პარალელურია, მაშასადამე, ნორმალი Ox ღერძის მართობულია და (რადგან ის გადის $M(x_0, y_0)$ წერტილში) მისი განტოლება იქნება

$$\boxed{x=x_0} \qquad (7)$$

შეიძლება ეს შემთხვევები არ განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან, თუ (6) განტოლებას თავიდანვე ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$y_0'(y-y_0)=x_0-x.$$



ნახ. 175.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გავატაროთ $y=3x^2-12x+8$ პარაბოლისადმი ნორმალები $A(x=5)$ და $B(x=2)$ წერტილებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა, A და B წერტილების ორდინატები მოინახება პარაბოლის განტოლებიდან. შესაბამისად გვაქვს $y_A=23$, $y_B=-4$. ამას გარდა $y'=6x-12$, საიდანაც $y'_A=18$, $y'_B=0$. ამიტომ A წერტილში გავლებული ნორმალის განტოლებაა.

$$y-23=-\frac{1}{18}(x-5),$$

ხოლო B წერტილში გამავალი ნორმალის განტოლებაა

$$x=2.$$

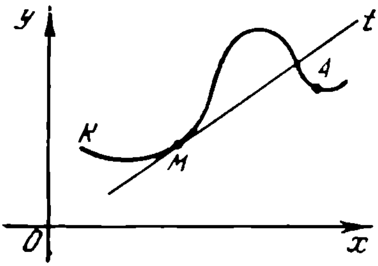
§ 2. წირის ჩაზნექილობის მიმართულება

1. ჩაზნექილობის მიმართულება

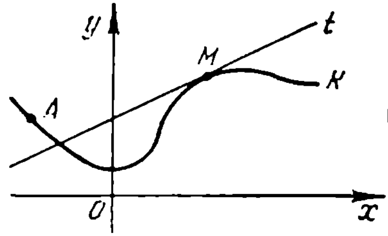
მასალათა გამძლეობის თეორიის ზოგიერთ საკითხში გარკვეულ როლს ასრულებს წირის „ჩაზნექილობის მიმართულების" ცნება. წარმოვიდგინოთ K წირი, მოცემული $y=f(x)$ განტოლებით, რომელსაც $M(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს Ml მხები. თუ წირის M წერტილთან საკმაოდ ახლოს მდებარე ყველა წერტილი Ml მხების ზ ე მ ო თ* ძევს (ნახ. 176),

* აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ წირის წერტილთა ორდინატები მეტია, ვიდრე მხების იმავე აბსცისის მქონე წერტილთა ორდინატები, ვინაიდან, როგორც ჩვეულებრივად ანალიზურ გეომეტრიაში სიბრტყეზე, წარმოვიდგენთ, რომ Oy მიმართულია ქვემოდან ზემოთ.

მაშინ ამბობენ რომ წირი M წერტილში მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ (ხოლო ამოზნექილობით ქვემოთ). თუ პირიქით, წირის M წერტილთან საკმაოდ ახლოს მდებარე წერტილები მოთავსებული არიან Mt მხების ქვემოთ, მაშინ ამბობენ, რომ წირი M წერტილში მიმართულია ჩაზნექილობით ქვემოთ (ხოლო ამოზნექილობით ზემოთ) (ნახ. 177).

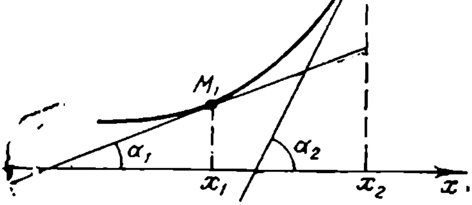


ნახ. 176.



ნახ. 177.

შენიშვნა. მკითხველი მიაქცევს ყურადღებას იმ გარემოებას, რომ ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც შეხების M წერტილთან საკმაოდ ახლოს მდებარეობენ. ხოლო M-ისაგან დაშორებული წერტილები ჩვენ არ გვაინტერესებს. მაგალითად 176-ე ნახაზზე გამოსახული წირი M წერტილში მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ, თუმცა ამ წირის A წერტილი მდებარეობს Mt მხების ქვემოთ. ანალოგიური გარემოებაა 177-ე ნახაზზე.



ნახ. 178.

განვიხილოთ საკითხი წირის ჩაზნექილობის მიმართულების ანალიზური ნიშნის შესახებ. დავუშვათ, რომ წირი ყოველ $M(x, y)$ წერტილში მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ. მაშინ წირს აქვს 178-ე ნახაზზე გამოსახული სახე. ავილოთ ამ წირზე ორი $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილი, სადაც $x_1 < x_2$ და გავავლოთ ამ წერტილებში მოცემული წირის მხებები. ვთქვათ, α_1

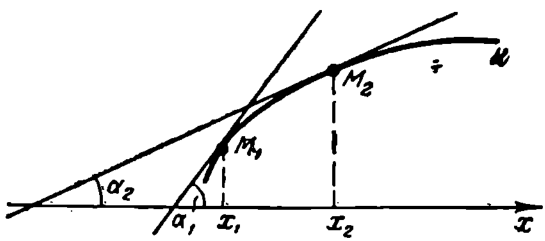
და α_2 ამ მხებების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხეებია. ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $\alpha_1<\alpha_2$ მაგრამ მაშინ $tg\alpha_1<tg\alpha_2$. მეორე მხრივ, ვიცით, რომ $tg\alpha_1=f'(x_1)$, $tg\alpha_2=f'(x_2)$. ამგვარად, მივიღებთ, რომ

$$f'(x_1)<f'(x_2).$$

რადგან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $x_1<x_2$, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღეთ, რომ $f'(x)$ არის ზ რ დ ა დ ი ფუნქცია. მაშინ მისი წარმოებული, ე. ი. მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$, მ ე ტ ი უ ნ დ ა ი ყ ო ს ნ უ ლ ზ ე* არგუმენტის ცვლილებების განხილულ შუალედში.

სრულიად ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ $y=f(x)$ წირს, რომელიც მიმართულია ჩაზნექილობით ქვემოთ და ავიღებთ მასზე $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილებს, სადაც $x_1<x_2$, 179-ე ნახაზზე მოცემული აღნიშვნების თანახმად, მივიღებთ

$$\alpha_1>\alpha_2,$$
$$tg\alpha_1>tg\alpha_2,$$
$$f'(x_1)>f'(x_2).$$



ნახ. 179.

ამით ვასკვნით, რომ $f'(x)$ კ ლ ე ბ ა დ ი ა x-ის ცვლილების განხილულ შუალედში და მაშასადამე,

$$f''(x)\leqslant 0.$$

ამგვარად, მივიღეთ

თეორემა. თ უ წ ი რ ი მ ი მ ა რ თ უ ლ ი ა ჩ ა ზ ნ ე ქ ი ლ ო ბ ი თ ზ ე მ ო თ (ქ ვ ე მ ო თ), მ ა შ ი ნ მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი $y''=f''(x)$ დ ა დ ე ბ ი თ ი ა (უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი ა).

შესაძლებელია ამ თეორემის შებრუნება, ეს ნიშნავს, რომ, თუ ვიცით მეორე წარმოებულის ნიშანი, გვეცოდინება წირის ჩაზნექილობის მი-

* ცალკეულ წერტილებში $f''(x)$ შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს.

მართულება. მართლაც, თუ მაგალითად $f''(x)>0$, მაშინ პირველი წარმოებული $f'(x)$ იზრდება x-თან ერთად. ეს იმას ნიშნავს, რომ x აბსცისის ზრდასთან ერთად იზრდება $M(x,y)$ წერტილში წირის მხების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხე. ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ადგილი ექნება წირის დახრილობის სიმრუდის ზრდას. მაშინ იგივე 178-ე ნახაზი გვიჩვენებს, რომ წირი მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ.

ზემოთ ნათქვამი შეიძლება შევაჯამოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

წირის ჩაზნექილობის მიმართულება	$f''(x)$-ის ნიშანი
ზემოთ	$+$
ქვემოთ	$-$

2. გადაღუნვის და გაწრფევების წერტილები

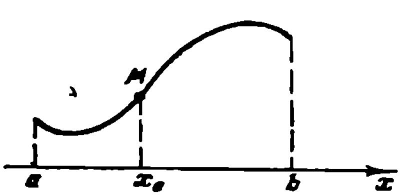
არ უნდა ვიფიქროთ, რომ წირი ყოველთვის მიმართულია ჩაზნექილობით ერთსა და იმავე მხარეს. ჩვეულებრივად გვაქვს უფრო რთული მდგომარეობა: x აბსცისის ცვლილების შუალედი იყოფა ნაწილებად, რომლებშიც წირი მიმართულია ჩაზნექილობით ხან ზემოთ, ხან ქვემოთ.

განსაზღვრა. წირის M წერტილს, რომელიც გამოყოფს წირის ჩაზნექილობის სხვადასხვა მიმართულების უბნებს, ეწოდება წირის **გადაღუნვის წერტილი**. ზოგჯერ გადაღუნვის წერტილს უწოდებენ არა მარტო წირზე მდებარე M წერტილს, არამედ მის x_0 აბსცისასაც.

ვთქვათ, მაგალითად, $y=f(x)$ წირი განიხილება არგუმენტის $a\leqslant x\leqslant b$ მნიშვნელობებისათვის და $[a, b]$ შუალედი x_0 წერტილით იყოფა $a\leqslant x\leqslant x_0$ და $x_0\leqslant x\leqslant b$ ნაწილებად. პირველ მათგანზე წირი მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ, ხოლო მეორეზე — ქვემოთ (ნახ. 180). მაშინ მეორე წარმოებულმა, $y''=f''(x)$ x-ის $[a, x_0]$ შუალედიდან $[x_0, b]$ შუალედში გადასვლისას უნდა შეიცვალოს ნიშანი $+$-დან $-$. რადგან მეორე წარმოებული უწყვეტია, ცხადია, რომ $x=x_0$ წერტილში ის უნდა გაუტოლდეს ნულს:

$$\boxed{f''(x_0)=0} \qquad (1).$$

ანალოგიურ გარემოებას აქვს ადგილი გადაღუნვის ნებისმიერი წერტილისათვის. ამგვარად, მართებულია



ნახ. 180.

თეორემა. *გადაღუნვის წერტილებში y ორდინატის მეორე წარმოებული x აბსცისით ნულის ტოლია.*

ამ თეორემის შებრუნება არ შეიძლება. (1) ტოლობიდან არ გამომდინარეობს, რომ x_0 გადაღუნვის წერტილია. განვიხილოთ, მაგალითად $y=x^4$ წირი. აქ $y''=12x^2$ და ამიტომ $y''>0$ ყოველი x-ისათვის, გარდა $x=0$ წერტილისა, რომლისთვისაც $y''=0$. მაშასადამე, ჩვენი წირი მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ და $x=0$ წერტილში არავითარ გადაღუნვას არა აქვს ადგილი, თუმცა ამ x-ისათვის $y''=0$.

წერტილები, რომლებიც (1) პირობას აკმაყოფილებენ, საინტერესოა წმინდა გეომეტრიული თვალსაზრისით. $M(x_0, y_0)$ წერტილს (და აგრეთვე x_0 აბსცისასაც), რომელშიც (1) პირობა სრულდება ვუწოდოთ $y=f(x)$ წირის გაწრფევების წერტილი. (ამ გამოთქმის წარმოშობა მკითხველისათვის ნათელი გახდება § 4-ის წაკითხვის შემდეგ). ამგვარად, წირის გადაღუნვის ყოველი წერტილი არის მისი გაწრფევების წერტილი, მაგრამ შებრუნებულ წინადადებას ადგილი არა აქვს.

წირის ჩაზნექილობის საკითხის შესწავლა ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევის მსგავსია, მხოლოდ ნაცვლად პირველი წარმოებულის $f'(x)$ ნიშნისა აქ უნდა მივაქციოთ ყურადღება მეორე წარმოებულის $f''(x)$ ნიშანს*. რეკომენდებულია შემდეგი

წესი. იმისათვის, რომ შევისწავლოთ $y=f(x)$ წირის ჩაზნექილობის ხასიათი საჭიროა:

1) ვიპოვოთ $f''(x)$.

2) დავუშვათ, $f''(x)=0$ და ამოვხსნათ ეს განტოლება. მისი ამონახსნები $x_1<x_2<\dots<x_m$ წირის გაწრფევების წერტილებია.

3) აღვნიშნოთ რიცხვით ღერძზე $x_1, x_2, \dots, x_n$ წერტილები და განვსაზღვროთ $f''(x)$-ის ნიშანი რიცხვითი ღერძის მიღებულ უბნებზე.

მაგალითი. გამოვიკვლიოთ

$$y=x^4-14x^3+60x^2+8x-9$$

წირის ჩაზნექილობის საკითხი.

ამოხსნა. თანამიმდევრულად ვპოულობთ

$$y'=4x^3-42x^2+120x+8,$$

$$y''=12x^2-84x+120.$$

---

* კერძოდ, ადვილი შესამჩნევია, რომ გადაღუნვის წერტილები $f'(x)$ წარმოებულის ექსტრემუმის წერტილებია.

თუ დავუშვებთ, რომ $y''=0$ და გავყოფთ მიღებული განტოლების ორივე ნაწილს 12-ზე მივიღებთ

$$x^2-7x+10=0,$$

რომლის ამონახსნებია $x_1=2$, $x_2=5$. Ox ღერძი იყოფა $]-\infty,2[$, $]2,5[$, $]5, +\infty[$ უბნებად. ამ უბნებზე y''-ის ნიშნის დასადგენად ასე უნდა ვიმსჯელოთ: როცა x აბსოლუტური მნიშვნელობით ძალიან დიდია, მაშინ x^2 მნიშვნელოვნად გადააჭარბებს x-ს ამიტომ y''-ის გამოსახულებაში მთავარი მნიშვნელობა აქვს $12x^2$ შესაკრებს. ის კი მეტია 0-ზე, მაშასადამე, $]-\infty, 2[$ და $]5, +\infty[$ უბნებზე $y''>0$.* თუ დავუშვებთ, რომ $x=3$, ვპოულობთ $y''(3)=-24$. საიდანაც ჩანს, რომ $]2, 5[$ შუალედში $y''<0$). ამგვარად, წირი მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ $x<2$ და $x>5$ მნიშვნელობებისათვის და ქვემოთ $2<x<5$ მნიშვნელობებისათვის. $x=2$, $x=5$ გადაღუნვის წერტილებია.

§ 3. წირის მოცემა პარამეტრული სახით

1. საკითხის დაყენება

აქამდე განვიხილავდით წირის მოცემის მხოლოდ ორ სახეს: ან $y=f(x)$ ცხადი სახით, ან $F(x, y)=0$ არაცხადი განტოლებით**. მაგრამ თეორიულ მექანიკაში ბუნებრივად მივდივართ წირის მოცემის სხვა სახემდე. მართლაც, წერტილის მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს მოცემა ნიშნავს — მისი მდებარეობის (ე. ი. მისი კოორდინატების) განსაზღვრას t დროის მომენტში. ამიტომ, მაგალითად

$$x=2t \text{ და } y=3t-2 \tag{1}$$

ტოლობები სავსებით განსაზღვრავენ წერტილის მდებარეობას და მაშასადამე, წირს, რომელზედაც ეს წერტილი მოძრაობს. ამგვარად, ამ მაგალითში წირი მოცემულია ორი განტოლების საშუალებით. რასაკვირველია ძალიან ადვილია იმავე წირის განტოლების მიღება ჩვენთვის ჩვეული სახით. სახელდობრ, დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის $t=\frac{x}{2}$ და მაშასადამე, $y=\frac{3}{2}x-2$. x და y სიდიდეებს შორის ეს დამოკიდებუ-

* რასაკვირველია, შეიძლებოდა უბრალოდ დაგვეშვა, რომ $x=0$, მაშინ $y''=120$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $y''>0$ $]-\infty,2[$ შუალედში. ასევე $y''(6)=48$ გვაძლევს, რომ $y''>0$ $]5,+\infty[$ შუალედში. მაგრამ, როგორც III თავში (§ 5,3) აღვნიშნავდით ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა უფრო გონივრულია.

** აქ ვლაპარაკობთ წირის მოცემის შესახებ დეკარტის კოორდინატებში. ანალოგიური მდგომარეობაა პოლარული კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში. აქაც წირი შეიძლება იყოს მოცემული ცხადი სახით $r=f(\Theta)$ და არაცხადი სახით $F(r, \Theta)=0$.

ლება გვაძლევს ჩვენს წირს ცხადი ანალიზური სახით*. ვხედავთ, რომ უკანასკნელი დამოკიდებულება მიიღება (1) განტოლებებიდან t დროის გამორიცხვით.

ის გარემოება, რომ განხილულ მაგალითში t ცვლადით აღნიშნულია დრო, არავითარ როლს არ ასრულებს.

ვთქვათ, მაგალითად, რომ x და y დამოკიდებულია t დამხმარე ცვლადზე შემდეგი სახით

$$x=t+1, \qquad y=t^2.$$

t-ს ცვლილებით მივიღებთ სხვადასხვა (x, y) წერტილებს, რომელთა ერთობლიობა შეადგენს რაიმე წირს. რადგანაც t-ს ყოველი მნიშვნელობა გამოისახება x-ის შესაბამისი მნიშვნელობით $t=x-1$ ტოლობის საშუალებით, ამიტომ წირის ყოველი წერტილისათვის $y=(x-1)^2$. მივიღეთ წირი, მოცემული ცხადი სახით, საიდანაც ჩანს, რომ საქმე გვაქვს პ ა რ ა ბ ო ლ ა ს თ ა ნ.

საზოგადოდ, შეიძლება ვთქვათ, რომ

$$\boxed{x=\varphi(t), \qquad y=\Psi(t)} \qquad (*)$$

განტოლებები, სადაც t დამხმარე ცვლადია, გვაძლევს რაღაც წირს. წირის მოცემის ამ ხერხს ეწოდება პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი ხერხი, ხოლო t ცვლადს — პ ა რ ა მ ე ტ რ ი. t-ს გამორიცხვით ვღებულობთ იმავე წირის (ცხად ან არაცხად) განტოლებას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ (*) განტოლებებში $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები განსაზღვრულია და უწყვეტია რაიმე $[p,q]$ შუალედზე, მაშინ ამ განტოლებებით განსაზღვრულ წირს ეწოდება უ წ ყ ვ ე ტ ი წ ი რ ი. კერძოდ, წირი, რომელიც მოცემულია $y=f(x)$ განტოლებით, სადაც $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ შუალედზე, წარმოადგენს უწყვეტ წირს რადგან მისი წარმოდგენა შეიძლება

$$x=t, \qquad y=f(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

სახით.

2. წრეწირის და ელიფსის პარამეტრული განტოლებები

განვიხილოთ R-რადიუსიანი წრეწირი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია (ნახ. 181). წრეწირის ნებისმიერი M წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება Ox ღერძთან შექმნილი t კუთხით და OM რადი-

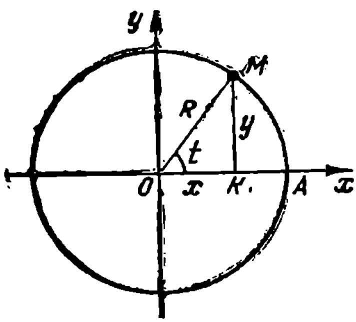
---

$y=\frac{3x}{2}-2$ განტოლება გვიჩვენებს, რომ (1) წირი წ რ ფ ე ა.

უსით. ბუნებრივია გამოისახოს M წერტილის x და y კოორდინატები ამ t კუთხის საშუალებით. ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ

$$\boxed{x=R\cos t, \quad y=R\sin t} \tag{2}$$

ეს ტოლობები* წარმოადგენს ჩვენი წრეწირის პარამეტრულ განტოლებებს. t პარამეტრი შეიძლება ვცვალოთ $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. მაგრამ, თუ გვინდა წრეწირის ყველა წერტილის შემოვლა მხოლოდ ერთხელ, მაშინ t პარამეტრი უნდა ვცვალოთ $0 \leqslant t < 2\pi$ შუალედში. უმჯობესია საქმე გვქონდეს ჩაკეტილ შუალედთან. ამიტომ ჩვეულებრივ t-ს ცვლიან $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ საზღვრებში, თუმცა ამ შემთხვევაში A წერტილი მიიღება ორჯერ, სახელდობრ, როცა $t=0$ და $t=2\pi$.



ნახ. 181.

წრეწირის ჩვეულებრივი განტოლების მისაღებად (2) განტოლებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი. ამისათვის ავახარისხოთ ეს განტოლებები კვადრატში და შედეგები შევკრიბოთ. ცხადია, ეს მიგვიყვანს ჩვენთვის კარგად ცნობილ განტოლებამდე

$$x^2+y^2=R^2.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

ელიფსის პარამეტრული განტოლება, გავიხსენოთ, რომ ის მიიღება

$$x^2+y^2=a^2, \tag{4}$$

წრეწირისაგან, რომლის დიამეტრი ელიფსის დიდი ღერძის ტოლია, ამ წრეწირის $\frac{a}{b}$-ჯერ შეკუმშვით. ე. ი. (3) ელიფსის M ყოველი წერტილი მიიღება (4) წრეწირის N წერტილისაგან, მათ ერთნაირი აბსცისები აქვთ, ხოლო M წერტილის ორდინატი მიიღება N-ის ორდინატის $\frac{b}{a}$ რიცხვზე გამრავლებით.

---

* ადვილი გასაგებია, რომ ეს ტოლობები მართებულია არა მარტო მაშინ, როდესაც M წერტილი ძევს პირველ საკოორდინატო კუთხეში, არამედ ამ წერტილის ნებისმიერი მდებარეობისათვის.

ზემოთ ნათქვამის თანახმად, (4) წრეწირის პარამეტრული განტოლებებია $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, მაშინ ცხადია, რომ (3) ელიფსის პარამეტრული განტოლებები მიიღება ამ განტოლებებიდან y ორდინატის $\frac{b}{a}$ გამრავლებით. ამიტომ მათ აქვთ სახე*

$$\boxed{x=a\cos t, \qquad y=b\sin t} \tag{5}$$

ელიფსის ყველა წერტილის მისაღებად საკმარისია t იცვლებოდეს $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ შუალედში. ამასთან, ელიფსის ყოველი წერტილი გარდა $(a,0)$ წერტილისა, მიიღება მხოლოდ ერთხელ, ხოლო $(a,0)$ წერტილი ორჯერ (როცა $t=0$ და $t=2\pi$). თუ (5) ტოლობებიდან პირველს გავყოფთ a-ზე, ხოლო მეორეს b-ზე, შედეგებს კვადრატში ავახარისხებთ და შევკრებთ, მივიღებთ ელიფსის კანონიკურ (3) განტოლებას.

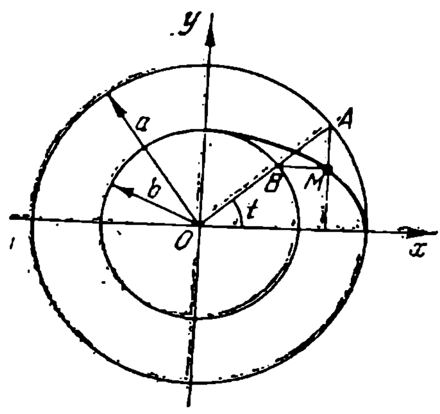
წრეწირის და ელიფსის პარამეტრული განტოლებების შედარება გვაძლევს ელიფსის წერტილების აგების კარგ ხერხს. სახელდობრ,

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t \tag{6}$$

განტოლებათა წყვილი გვაძლევს წრეწირს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, და რადიუსი a-ს ტოლია, ხოლო

$$x=b\cos t, \qquad y=b\sin t \tag{7}$$

განტოლებათა წყვილი გვაძლევს წრეწირს იგივე ცენტრით და b რადიუსით. როგორც (5) განტოლებებიდან ჩანს, ელიფსზე მდებარე (x, y) წერტილის საპოვნელად, საჭიროა x ვიპოვოთ (6) განტოლებებიდან პირველის საშუალებით. ხოლო y — (7) განტოლებებიდან მეორეს საშუალებით. ეს x და y ადვილად მოინახება გრაფიკულად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ (6) და (7) განტოლებებში t პარამეტრი არის წერტილის რადიუს-ვექტორის Ox ღერძისადმი დახრის კუთხე, ამიტომ (5) ელიფსის $M(x, y)$ წერტილის ასაგებად ვაგებთ (6) და (7) წრეწირებს და კოორდინატთა სათავიდან ვავლებთ სხივს, რომელიც დახრილია Ox ღერძისადმი t კუთხით. ამ სხივის მოცემულ წრეწირებთან გადაკვეთის A და B წერტილებზე გავავლებთ საკოორდინატო ღერძების პარალელურ წრფეებს. მივიღებთ M წერტილს (ნახ. 182).



ნახ. 182.

---

* რასაკვირველია აქ t უკვე აღარ არის კუთხე (x, y) წერტილის რადიუს-ვექტორსა და Ox ღერძს შორის. თუ ეს კუთხე არის φ, მაშინ (5) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

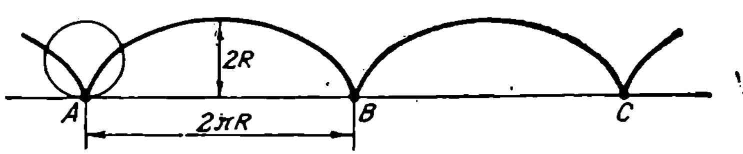
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\operatorname{tg}t \quad \text{და} \quad \varphi\neq t.$$

8. ციკლოიდი

გავეცნოთ მნიშვნელოვან წირს — ც ი კ ლ ო ი დ ს, რომელიც წარმოადგენს პარამეტრული სახით მოცემული წირის კარგ მაგალითს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ც ი კ ლ ო ი დ ი ეწოდება წირს, რომელსაც აღწერს წრეწირის წერტილი, როცა წრეწირი მიგორავს წრფეზე, სრიალის გარეშე.

ამ განსაზღვრიდან ცხადია, რომ ციკლოიდი შედგება რიგი თაღებისაგან, როგორც ეს 183-ე ნახაზზეა ნაჩვენები, ამასთან ამ თაღების სიმაღლე $2R$-ის ტოლია, სადაც R იმ წრეწირის რადიუსია, რომელიც მიგორავს წრფეზე. ქვემოთ ჩვენ ვუჩვენებთ, რომ მეზობელ „საყრდენ წერტილებს“ შორის მანძილები AB, BC,... $2\pi R$-ის ტოლია.



ნახ. 183.

ვიპოვოთ ციკლოიდის პარამეტრული განტოლება. Ox ღერძად მივიჩნიოთ წრფე, რომელზედაც მიგორავს წრეწირი, ხოლო კოორდინატთა სათავედ — ციკლოიდის აღმწერი M წერტილი Ox ღერძზე მდებარეობის მომენტში. ეს მომენტი მივიჩნიოთ საწყისად და წარმოვიდგინოთ მგორავი წრეწირი საწყის მომენტში და რაიმე მომდევნო τ მომენტში. აღვნიშნოთ t-თი კუთხე, რომელსაც τ მომენტში ადგენს მგორავი წრეწირის M წერტილის რადიუსი ამ წრეწირის Ox ღერძთან შეხების A წერტილის რადიუსთან, ანუ კუთხე C_1M და C_1A რადიუსებს შორის (ნახ. 184). t კუთხე ჩავთვალოთ პარამეტრად და ციკლოიდის x და y კოორდინატები გამოვსახოთ ამ პარამეტრის საშუალებით. y ორდინატი გამოითვლება მარტივად:

$$y=BM=AD=AC_1-C_1D=R-R\cos t. \qquad (8)$$

x აბსცისის მოსაძებნად, აუცილებლად უნდა გავითვალისწინოთ OA მონაკვეთისა და $\overset{\smile}{AM}$ რკალის ტოლობა

$$OA=\overset{\smile}{AM}. \qquad (9)$$

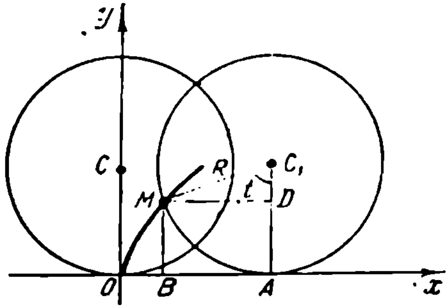
ამ ტოლობაში ვლინდება სწორედ, რომ წრეწირი გორავს სრიალის გარეშე. (9) ტოლობის მართებულობაში ადვილად დავრწმუნდებით თვალსაჩინოდ. წარმოვიდგინოთ მგორავი წრეწირი ხის გვერგვის სახით. გადავჭიმოთ ამ გვერგვზე უჭიმარი ლენტი, რომლის მარჯვენა ბოლო დავამაგროთ Ox ღერძის O წერტილში, ხოლო მარცხენა — თვით გვერგვზე. როცა გვერ-

გვი გაგორდება, მაშინ ლენტი გაიშლება Ox ღერძზე და τ მომენტში ღერძის OA მონაკვეთი აღმოჩნდება დაფარული ლენტის იმ ნაწილით, რომელიც გვერგვის $\breve{AM}$ რკალიდან გამოვიდა* ამით მტკიცდება (9) ტოლობის მართებულობა. რადგან t AC_1M კუთხის სიდიდეა რ ა დ ი ა ნ ე ბ შ ი, ამიტომ

$$\breve{AM} = Rt.$$

მაშასადამე,

$$x = OB = OA - BA = \breve{AM} - MD = Rt - R\sin t. \quad (10)$$



ნახ. 184.

თუ შევადარებთ (8) და (10) განტოლებებს, მივიღებთ ციკლოიდის განტოლებებს

$$\boxed{x = R(t - \sin t), \qquad y = R(1 - \cos t)} \quad (11)$$

t პარამეტრი იცვლება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. ციკლოიდის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, რომელიც სათავის მარჯვნივ ძევს და მასთან უახლოესია, $t = 2\pi$ მნიშვნელობას შეესაბამება, რადგან ის მიიღება მგორავი წრეწირის ერთი სრული ბრუნვის შემდეგ. t-ს ამ მნიშვნელობისათვის $x = 2\pi R$. ამას გარდა (11) განტოლებებიდან ჩანს, რომ ციკლოიდის უმაღლესი წერტილის (რომელიც $t = \pi$ მნიშვნელობას შეესაბამება) კოორდინატებია (πR, $2R$). დასასრულს შევნიშნავთ, რომ აქ y-ის გამოსახვა x-ის საშუალებით ელემენტარული სახით არ შეიძლება, მაგრამ პირიქით, x შეიძლება გამოვსახოთ y-ის საშუალებით $\left[\text{რადგან } t = \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{y}{R}\right)\right]$, ოღონდ მიღებული ფორმულა იქნება ძალიან ვრცელი. პარამეტრული განტოლება უფრო მარტივია.

4. წრეწირის ევოლვენტა

კბილა მოდების თეორიაში გამოიყენება წირი, რომელსაც წ რ ე წ ი რ ი ს ე ვ ო ლ ვ ე ნ ტ ა ეწოდება.

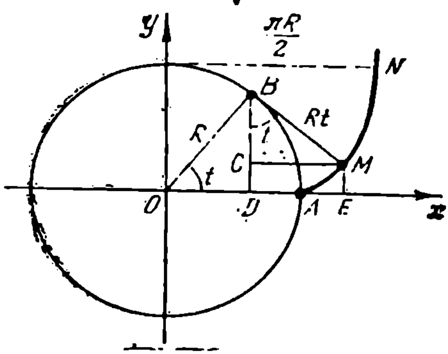
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. წ რ ე წ ი რ ი ს ე ვ ო ლ ვ ე ნ ტ ა არის წირი, რომელსაც აღწერს წრეწირზე გადაჭიმული ძაფის წერტილი, როცა ის გადმოდის ამ წრეწირიდან.

იგულისხმება, რომ ძაფი უჭიმარია.

---

* ეს მსჯელობა ნათელს ხდის შენიშვნასაც იმის შესახებ, რომ ციკლოიდის Ox ღერძთან გადაკვეთის ორ მეზობელ წერტილს შორის მანძილი $2\pi R$-ის ტოლია.

ვიპოვოთ წრეწირის ევოლვენტის პარამეტრული განტოლებები. ამისათვის კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ წრეწირის ცენტრში და Ox ღერძი გავატაროთ წრეწირის იმ წერტილში, სადაც ძევს ევოლვენტის აღმწერი წერტილი, ჯერ კიდევ მაშინ, როცა ძაფი მთლიანად დახვეულია წრეწირზე. 185-ე ნახაზზე ეს წერტილი აღნიშნულია A ასოთი. ვთქვათ, 185-ე ნახაზი გამოსახავს BM ძაფის მდებარეობას დროის რაიმე მომენტში. აქ B არის ძაფის წრეწირიდან გამოსვლის წერტილი, ხოლო M ის წერტილია, რომელიც აღწერს ევოლვენტას. წრეწირის რადიუსი აღვნიშნოთ R-ით, ხოლო OB სხივსა და Ox ღერძს შორის კუთხე t-თი.



ნახ. 185.

რადგან ძაფი უჭიმარია, ამიტომ მისი BM მონაკვეთი წრეწირის $\breve{AB}$ რკალის ტოლია, ანუ $BM=Rt$. შევნიშნოთ ახლა, რომ ძაფი დაჭიმული რჩება, ამიტომ ის გამოდის წრეწირიდან მხების გასწვრივ. მაშასადამე, ძაფის BM მონაკვეთი OB რადიუსის მართობია. AOB და MBD კუთხეები ტოლია, რადგან მათი გვერდები ურთიერთმართობულია. $\angle MBD=t$ და MBC სამკუთხედიდან ვპოულობთ

$$CM=Rt\sin t, \qquad CB=Rt\cos t.$$

ახლა ადვილად მოიძებნება M წერტილის x და y კოორდინატები. სახელდობრ

$$x=OE=OD+DE=OD+CM=R\cos t+Rt\sin t,$$
$$y=EM=DC=DB-CB=R\sin t-Rt\cos t.$$

საბოლოოდ,

$$\boxed{\begin{aligned} x&=R(\cos t+t\sin t)\\ y&=R(\sin t-t\cos t)\end{aligned}} \qquad (12)$$

სადაც $0\leqslant t<+\infty$.

ადვილი დასანახია, რომ წრეწირის ევოლვენტა არის რაღაც სპირალი. 185-ე ნახაზზე მოცემული N წერტილი $t=\dfrac{\pi}{2}$ მნიშვნელობას შეესაბამება, ამიტომ მისი კოორდინატებია $x=\dfrac{\pi R}{2}$, $y=R$, რაც ცხადია უშუალოდაც.

საინტერესოა, რომ წრეწირის ევოლვენტის განსაზღვრა გარკვეული აზრით ციკლოიდის განსაზღვრის მსგავსია. სახელდობრ, თუ A წერტილში გავატარებთ ჩვენი წრეწირის მხებს და ვაგორებთ მას წრეწირზე, მაშინ როცა შეხების წერტილი B წერტილში გადაინაცვლებს, A (განხილული როგორც მხების წერტილი) აღმოჩნდება M წერტილში. ამგვარად, წრეწირის ევოლვენტა არის წირი, რომელსაც აღწერს ძაფის წერტილი, როცა უკანასკნელი (სრიალის გარეშე) გორავს წრეწირზე.

ნ. პარამეტრული გაწარმოება

ვთქვათ, საჭიროა გავავლოთ

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{13}$$

წირისადმი მხები $M(x,y)$ წერტილში, რომელიც t პარამეტრის მნიშვნელობას შეესაბამება. ამისათვის მივცეთ t-ს Δt ნაზრდი, მივიღებთ იმავე (13) წირის $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ წერტილს. MN მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი m^* იქნება $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ანუ რაც იგივეა

$$m^*=\frac{\Delta y}{\Delta t} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{14}$$

ხოლო მხების კუთხური კოეფიციენტი m ტოლია (14) გამოსახულების ზღვრისა, როცა $N\to M$, ანუ $\Delta t\to 0$. ამიტომ როცა $\Delta t\to 0$, გვექნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}\to y_t', \quad \frac{\Delta x}{\Delta t}\to x_t'.$$

გამოდის, რომ

$$\boxed{m=\frac{y_t'}{x_t'}} \tag{15}$$

(15) ტოლობაში y_t' და x_t' წარმოებულები უნდა გამოითვალოს t-ს იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც შეხების M წერტილს განსაზღვრავს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გავავლოთ

$$\begin{aligned} x&=t^3+2t^2+1 \\ y&=t^4-7t, \end{aligned} \tag{16}$$

წირის მხები $M(2)$ წერტილში.*

ა მ ო ხ ს ნ ა. M წერტილის კოორდინატებს ვპოულობთ (16) განტოლებებიდან. გვაქვს $x_0=17$, $y_0=2$. ამის გარდა, $x_t'=3t^2+4t$, $y_t'=4t^3-7$. როცა $t=2$, გვექნება $x_t'=20$, $y_t'=25$, საიდანაც საძიებელი მხების კუთხური კოეფიციენტი

$$m=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}.$$

---

* როცა წირი მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ წერტილის მდებარეობა ამ წირზე განისაზღვრება პარამეტრის მნიშვნელობით. ამიტომ M წერტილი, რომელიც $t=t_0$ მნიშვნელობას შეესაბამება, აღინიშნება $M(t_0)$ სიმბოლოთი.

მხების განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$y-2=\frac{5}{4}(x-17).$$

შენიშვნა. ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ წირს ეწოდება უწყვეტი წირი, თუ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია. თუ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ არამარტო უწყვეტი ფუნქციებია, არამედ მათ აქვთ უწყვეტი წარმოებულებიც, ამასთან $\varphi'(t)\neq 0$, მაშინ როგორც ამას (15) ფორმულა გვიჩვენებს, წირს ექნება ყოველ წერტილში გარკვეული მხები, რომლის მდებარეობა იცვლება შეხების წერტილის უწყვეტად ცვლასთან ერთად. ამ დროს ხსენებული მხები არასოდეს არ გახდება Oy ღერძის პარალელური. x და y კოორდინატების სრული თანასწორუფლებიანობის გამო, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ წირს, სადაც $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი წარმოებულები და $\psi'_t\neq 0$, აქვს ყოველ წერტილში მხები, რომელიც უწყვეტად იცვლება, მაგრამ არასოდეს არ გახდება Ox ღერძის პარალელური.

ეს გვაძლევს *გლუვი წირის* ცნების განზოგადების საფუძველს. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ *წირს ეწოდება გლუვი წირი*, თუ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ *ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი წარმოებულები, ამასთან*

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0.$$

კერძოდ, იგივე ითქმის $y=f(x)$ წირის შესახებ, რადგან აქ t პარამეტრის როლს ასრულებს თვით x აბსცისა და

$$x_x'^2+y_x'^2=1+y_x'^2>0.$$

განვიხილოთ ახლა ზოგადი საკითხი. ვთქვათ, x და y ცვლადები დამოკიდებულია დამხმარე t ცვლადზე ისე, როგორც (13) განტოლებებითაა მოცემული. თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს, მივიღებთ, რომ y არის x-ის ფუნქცია, ანუ $y=f(x)$. მოვძებნოთ ამ ფუნქციის y'_x წარმოებული. ამისათვის საკმარისია გავიხსენოთ, რომ წარმოებული არის $y=f(x)$ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი. ამ წირის პარამეტრული სახის განტოლებებია (13) განტოლებები. გამოდის, რომ საძიებელი კუთხური კოეფიციენტი მოცემულია (15) ფორმულით, რომელსაც შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე

$$\boxed{y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}} \tag{17}$$

ამ ფორმულის სწორად გასაგებად უნდა გვახსოვდეს, რომ (17) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში გაწარმოების t წერტილი არის პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელსაც შეესაბამება $x=\varphi(t)$ ფორმულით მოცემული ის x წერტილი, რომლისთვისაც ვეძებთ $y'(x)$.

(17) ფორმულა ადვილად მიიღება მარტივი გამოთვლითაც

$$y_x'=\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'\,dt}{x_t'\,dt}=\frac{y_t'}{x_t'}.$$

ახლა მოვძებნოთ $y=f(x)$ ფუნქციის მ ე ო რ ე რიგის წარმოებული y_x''. ის ადვილად მოიძებნება (17) ფორმულის საშუალებით. სახელდობრ, აღვნიშნოთ y'_x z-ით. მაშინ

$$y_x''=z_x'$$

(17) ფორმულის ძალით

$$z'_x=\frac{z'_t}{x'_t}.$$

მაშასადამე,

$$y''_x=\frac{z'_t}{x'_t}. \tag{18}$$

მაგრამ $z=y_x'=\frac{y'_t}{x'_t}$ და ამიტომ

$$z'_t=\frac{y''_t x'_t-y'_t x''_t}{x'^2_t} \tag{19}$$

(18) და (19) ფორმულების საფუძველზე საბოლოოდ გვაქვს

$$\boxed{y_x''=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{x_t'^3}} \tag{20}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავადგინოთ

$$x=t^2+3t+1, \quad y=2t^3-1 \tag{21}$$

წირის ჩაზნექილობის მიმართულება $M(1)$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (21) ტოლობიდან ვპოულობთ

$$x_t'=2t+3, \quad x_t''=2, \quad y_t'=6t^2, \quad y_t''=12t.$$

მაშასადამე, $t=1$ მნიშვნელობისათვის გვაქვს

$$x'_t=5, \quad x_t''=2, \quad y_t'=6, \quad y_t''=12.$$

(20) ფორმულის თანახმად M წერტილში გვექნება

$$y_x''=\frac{12\cdot5-6\cdot2}{5^3}=\frac{48}{125}.$$

რადგან $y_x''>0$, ამიტომ (21) წირი M წერტილში მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ.

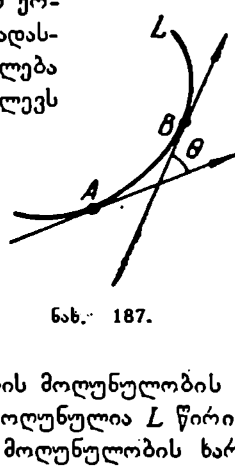
§ 4. სიმრუდე

1. საშუალო და ჭეშმარიტი სიმრუდე

აქ გავეცნობით მრუდი წირების მნიშვნელოვან მახასიათებელს, მათ **სიმრუდეს**. წირის სიმრუდე არის მისი **მოღუნულობის ხარისხის საზომი**.

ავიღოთ რაიმე L წრფე (ნახ. 186). ის არის თავისივე მხები მის ნებისმიერ წერტილში. ამიტომ, თუ L-იდან გამოვყოფთ ნებისმიერ AB მონაკვეთს, მაშინ A და B წერტილებში მხებები ერთმანეთს დაემთხვევა. ეს ფაქტი შეიძლება შემდეგნაირად გამოვთქვათ: წრფის მიმართულება არ იცვლება მისი ერთი წერტილიდან მეორეზე გადასვლისას. ასე არ ხდება **მრუდი** წირების შემთხვევაში. თუ L მრუდი წირის A და B წერტილებზე გავავლებთ მხებებს, ისინი შექმნიან რაღაც Θ კუთხეს (ნახ. 187). შეიძლება ვთქვათ, რომ L წირის მხები (მასთან ერთად თვით L წირიც) A-დან B წერტილში გადასვლისას **მობრუნდება** θ კუთხით. შეიძლება ითქვას, რომ მობრუნების კუთხის სიდიდე გვაძლევს

ნახ. 186.



ნახ. 187.

გარკვეულ წარმოდგენას L წირის $\breve{AB}$ რკალის მოღუნულობის ხარისხზე: რაც უფრო მეტია θ კუთხე, მით მეტად მოღუნულია L წირი. მაგრამ თვითონ θ კუთხის სიდიდე არ წარმოადგენს მოღუნულობის ხარისხის საზომს. მართლაც, ერთია—თუ წირი შემობრუნდება 100 სმ სიგრძის უბანზე $50°$-ით და მეორე, თუ იგივე კუთხით შემობრუნდება 200 სმ სიგრძის უბანზე. პირველ შემთხვევაში 1 სმ-ზე მოდის საშუალოდ $0{,}5°$, მეორე შემთხვევაში კი — ორჯერ ნაკლები.*

ამგვარად, მნიშვნელოვანია არა θ კუთხის სიდიდე თავისთავად, არამედ, $\breve{AB}$ რკალის სიგრძის ერთეულზე ამ კუთხის რა ნაწილი მოდის საშუალოდ. ამ მოსაზრებას მივყავართ შემდეგ განსაზღვრამდე:

---

* ისევე როგორც, მაგალითად, თუ ორი მსროლელი მიზანში მოხვდა 50-ჯერ თითოეული, არ ნიშნავს რომ ისინი ერთნაირი მსროლელებია. უნდა გავითვალისწინოთ თუ თითოეულმა მათგანმა რამდენჯერ გაისროლა. თუ პირველმა გაისროლა 100-ჯერ, ხოლო მეორემ 200-ჯერ, მაშინ პირველი მიზანში საშუალოდ 0,5-ჯერ ხვდება, ხოლო მეორე კი — ორჯერ ნაკლებ, უნდა დავასკვნათ, რომ მეორე უფრო ცუდი მსროლელია.

განსაზღვრა. L წირის $\overset{\frown}{AB}$ რკალის **საშუალო სიმრუდე** ეწოდება ამ წირის A წერტილიდან B წერტილში გადასვლისას მხების მობრუნების θ კუთხის შეფარდებას $\overset{\frown}{AB}$ რკალის სიგრძესთან

$$\boxed{K_{\text{საშ}}=\frac{\theta}{\overset{\frown}{AB}}} \qquad (1)$$

შენიშვნა. 1) (1) ფორმულაში θ კუთხის ნიშანი არ მიიღება მხედველობაში, კუთხე აიღება აბსოლუტური მნიშვნელობით. ამიტომ საშუალო სიმრუდე ყოველთვის არაუარყოფითია.

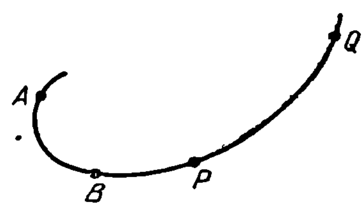
2) $K_{\text{საშ}}$ გამოთვლის დროს კუთხის განზომილების ერთეულად ყოველთვის აიღება რადიანი*. რადგან ფორმულებში, სადაც კუთხე რადიანებშია მოცემული, კუთხის სახელწოდება არ იწერება, ამიტომ სიმრუდის განზომილება იქნება 1: სიგრძეზე.**

3) θ კუთხეს, რომლის შესახებაც ზემოთ იყო ლაპარაკი (გაურკვეველი მიზეზის გამო) ზოგჯერ უწოდებენ $\overset{\frown}{AB}$ რკალის მოსაზღვრე კუთხეს.

ადვილი მისახვედრია (როგორც ამას თვით ტერმინიც **საშუალო სიმრუდე** გვიკარნახებს), რომ ერთსა და იმავე წირს სხვადასხვა უბნებზე აქვს სხვადასხვა საშუალო სიმრუდე. ასე მაგალითად, 188-ე ნახაზზე $\overset{\frown}{AB}$ რკალის საშუალო სიმრუდე ბევრად უფრო მეტია, ვიდრე $\overset{\frown}{PQ}$ რკალის საშუალო სიმრუდე. იმისათვის, რომ დავახასიათოთ L წირის მოღუნულობის ხარისხი **მის მოცემულ M წერტილში**, შემოაქვთ

განსაზღვრა. L წირის M წერტილში **ჭეშმარიტი სიმრუდე ეწოდება** უსასრულოდ მცირე რკალის საშუალო სიმრუდის **ზღვარს**, როცა ეს რკალი იკუმშება M წერტილში.

როცა ლაპარაკობენ წირის სიმრუდის შესახებ M წერტილში, სიტყვას „ჭეშმარიტი" არ ხმარობენ.



ნახ. 188.

---

* მაშასადამე, თუ $\overset{\frown}{AB}=100$ სმ და A-დან B-ზე გადასვლისას მხები მობრუნდება 50°-იანი კუთხით, მაშინ

$$K_{\text{საშ}}=\frac{50\left(\frac{\pi}{180}\right)}{100}=\frac{\pi}{360}=0,0087.$$

** მაშასადამე, წინა სქოლიოში უნდა დავწეროთ

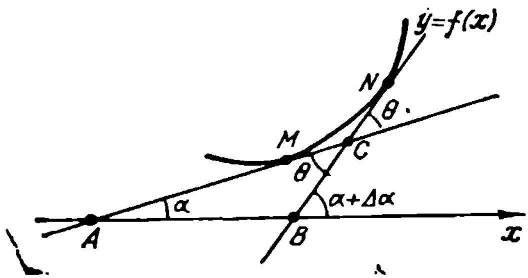
$$K_{\text{საშ}}=\frac{\pi}{360}\ \frac{1}{\text{სმ}}=0,0087\ \frac{1}{\text{სმ}}.$$

2. სიმრუდის გამოსათვლელი ფორმულა

ა მ ო ც ა ნ ა. ვიპოვოთ $y=f(x)$ წირის ჭეშმარიტი K სიმრუდე მის მოცემულ $M(x, y)$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავიღოთ წირზე M-ისგან განსხვავებული $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ წერტილი. კუთხე, რომელსაც წირის მხები ადგენს აბსცისთა ღერძთან, დამოკიდებულია შეხების წერტილის აბსცისაზე. ვთქვათ, ამ კუთხის მნიშვნელობებია M და N წერტილებში α და $\alpha+\Delta\alpha$ სათანადოდ. 189-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ θ კუთხე, რომლითაც შემობრუნდება მხები M წერტილიდან N წერტილზე გადასვლისას, უდრის ABC სამკუთხედის შიგა C კუთხეს. ამ სამკუთხედის მეორე შიგა კუთხე (A კუთხე), არის α კუთხე, ხოლო $\alpha+\Delta\alpha$ არის იმავე სამკუთხედის A და C კუთხეების არამოსაზღვრე გარე კუთხე. მაშასადამე, $\alpha+\Delta\alpha=\theta+\alpha$, საიდანაც

$$\theta=\Delta\alpha$$



ნახ. 189.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overset{\smile}{MN}$ რკალის საშუალო სიმრუდე

$$K_{\text{საშ}}=\frac{\Delta\alpha}{\overset{\smile}{MN}},$$

ხოლო საძიებელი ჭეშმარიტი K სიმრუდე უდრის ამ გამოსახულების ზღვარს, როდესაც N წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, ე. ი. როდესაც $\Delta x \to 0$:

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\overset{\smile}{MN}}. \tag{2}$$

ამ ზღვრის გამოსათვლელად გავითვალისწინოთ შემდეგი:

1) როცა $\Delta x\to 0$, მაშინ $\frac{\Delta\alpha}{\overset{\smile}{MN}}$ წილადი წარმოადგენს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობას.

2) ასეთი განუსაზღვრელობის გასახსნელად შეიძლება მრიცხველი და მნიშვნელი შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური სიდიდეებით.

3) უსასრულოდ მცირე რკალი მისი ქორდის ეკვივალენტურია*

$$\lim_{N \to M} \frac{\breve{MN}}{\overline{MN}} = 1.$$

ამის საფუძველზე, შეიძლება (2) ტოლობაში $\breve{MN}$ რკალი შევცვალოთ $\overline{MN}$ ქორდით. $\overline{MN}$ არის $M(x, y)$ და $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ წერტილებს შორის მანძილი. მაშასადამე,

$$\overline{MN} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

და

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

ეს ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta \alpha}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}.$$

(აქ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\Delta x > 0$. თუმცა ეს არ არის მნიშვნელოვანი, რადგან K-ს გამოსახულებაში გვაინტერესებს K-ს აბსოლუტური მნიშვნელობა).

მაგრამ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \alpha_x'.$$

მაშასადამე,

$$K = \frac{\alpha_x'}{\sqrt{1 + y_x'^2}}. \tag{3}$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ $\operatorname{tg} \alpha = y_x'$, ეს გვაძლევს

$$\alpha = \operatorname{arctg} y_x'.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\alpha_x' = \frac{y_x''}{1 + y_x'^2}.$$

ტოლობას.

---

* როგორც ნათქვამი იყო ამ თავის დასაწყისში, იგულისხმება უწყვეტი $f'(x)$ წარმოებულის არსებობა (და უფრო მაღალი რიგის წარმოებულებისაც). მაშასადამე, ჩვენი წირი გ ლ უ ვ ი წირია.

თუ α_x'-ის მნიშვნელობას შევიტანთ (3) ტოლობაში, მივიღებთ საბოლოოდ

$$\boxed{K=\frac{y_x''}{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{4}$$

უნდა გვახსოვდეს, რომ y_x'' უნდა ავიღოთ აბსოლუტური მნიშვნელობით. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ ორივე წარმოებული y_x' და y_x'' უნდა გამოითვალოს იმ M წერტილის x აბსცისის მნიშვნელობისათვის, რომელშიც ვეძებთ სიმრუდეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1) ვიპოვოთ $y=\sin x$ სინუსოიდის სიმრუდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $y_x'=\cos x$, $y_x''=-\sin x$ და (4) ფორმულა გვაძლევს

$$K=\frac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$

რადგან სიმრუდე ყოველთვის არაუარყოფითია, ამიტომ უფრო ზუსტი იქნება ფორმულა:

$$K=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

ის გარემოება, რომ K დამოკიდებულია x-ზე, გვიჩვენებს რომ სინუსოიდის სიმრუდე იცვლება წერტილიდან წერტილამდე.

2) ვიპოვოთ წრფის სიმრუდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წრფის განტოლებას აქვს $y=mx+b$ სახე. მაშასადამე, $y_x'=m$, $y_x''=0$. (4) ფორმულის თანახმად $K=0$. ეს გამოთვლების გარეშეც ცხადია **წ რ ფ ი ს ყ ო ვ ე ლ წ ე რ ტ ი ლ შ ი ს ი მ რ უ დ ე ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.**

თუ განიხილება რაიმე მრუდი, ამ მრუდზეც შეიძლება აღმოჩნდეს ცალკეული წერტილები, რომლებშიც სიმრუდე ნულის ტოლია. მაგალითად (5) ფორმულიდან ჩანს, იმ წერტილებში, სადაც $\sin x=0$, ანუ წერტილებში, სადაც სინუსოიდა ჰკვეთს Ox ღერძს, $K=0$. ზოგადი (4) ფორმულიდან ცხადია, რომ ნებისმიერი წირის სიმრუდე ნულის ტოლი ხდება იმ წერტილებში, სადაც $y''_x=0$. ამით აიხსნება სწორედ ის, თუ რატომ ვუწოდეთ ზემოთ, ასეთ წერტილებს **გ ა წ რ ფ ი ვ ე ბ ი ს** წერტილები. ამ წერტილებში მრუდი თითქოს **წ რ ფ ე ს ე მ ს გ ა ვ ს ე ბ ა.** უფრო ზუსტად: ის ფაქტი, რომ წირის რაიმე წერტილში სიმ-

რუდე ნულის ტოლია, ნიშნავს იმას, რომ წირი ამ წერტილში განსაკუთრებით მჭიდროდ უახლოვდება თავის მხებს. ადვილი შესამჩნევია, რომ გადაღუნვის წერტილებში სწორედ ასეთი გარემოება გვაქვს (ნახ. 190).

3) ვიპოვოთ წრეწირის სიმრუდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ წრეწირის ცენტრს მოვათავსებთ კოორდინატთა სათავეში, მაშინ მისი განტოლება იქნება

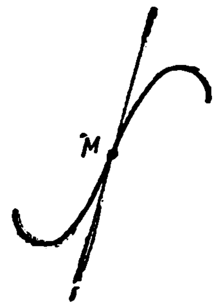
$$x^2+y^2=R^2.$$

აქედან $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ ზედა ნახევარწრეწირი, რომლის წერტილებისათვის $y>0$, ამიტომ რადიკალის წინ გვექნება „+“ ნიშანი.

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

აქედან

$$y_x'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$



ნახ. 190.

მეორე გაწარმოებით მივიღებთ

$$y_x''=\frac{-\sqrt{R^2-x^2}+x\cdot\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}=\frac{-R^2}{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

რადგანაც y''_x უნდა ავიღოთ აბსოლუტური მნიშვნელობით, ამიტომ უკანასკნელ გამოსახულებაში მინუს* ნიშანს უკუვაგდებთ. მაშინ (4) ფორმულიდან მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$\boxed{K=\frac{1}{R}} \qquad (6)$$

ე. ი. *წრეწირის ყოველ წერტილში სიმრუდე ერთიდაიგივეა და ტოლია წრეწირის რადიუსის შებრუნებული სიდიდის***.

---

* მისი წარმოშობა სავსებით ნათელია. ზედა ნახევარწრეწირი მიმართულია ჩაზნექილობით ქვემოთ და $y_x''<0$.

** მკითხველს ვურჩევთ მიიღოს (6) ტოლობა არა (4) ფორმულის საშუალებით, არამედ თვით სიმრუდის განსაზღვრაზე დაყრდნობით.

3. პარამეტრული სახით მოცემული წირის შემთხვევა

ვთქვათ, წირი მოცემულია პარამეტრული სახით განტოლებებით

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t). \tag{7}$$

როგორც ვნახეთ ზემოთ (§3, 5), თუ ჩავთვლით, რომ (7) განტოლებებში y დამოკიდებულია x-ზე, მაშინ

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}, \quad y_x''=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{x_t'^3}.$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (4) ფორმულაში ვიპოვით

$$K=\frac{\dfrac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{x_t'^3}}{\left[1+\left(\dfrac{y_t'}{x_t'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$\boxed{K=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{(x_t'^2+y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{8}$$

ასეთია სიმრუდის ფორმულა, როცა წირი მოცემულია პარამეტრული სახით. ისე როგორც ზემოთ, (8) წილადის მრიცხველში უნდა დაიწეროს $|y_t''x_t'-y_t'x_t''|$, რადგან $K\geqslant 0$ ყოველთვის. (7) წირის გაწრფივების წერტილი ხასიათდება კვლავ $K=0$ ტოლობით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t. \tag{9}$$

ელიფსის სიმრუდე მის ნებისმიერ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (9) განტოლებებიდან ვპოულობთ

$$x_t'=-a\sin t, \qquad y_t'=b\cos t,$$
$$x_t''=-a\cos t, \qquad y_t''=-b\sin t.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (8) ფორმულაში, მივიღებთ

$$K=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

კერძოდ, $(a, 0)$ წერტილში, რომელიც $t=0$ მნიშვნელობას შეესაბამება, გვაქვს

$$K=\frac{a}{b^2}.$$

4. პოლარულ კოორდინატთა შემთხვევა

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე წირი

$$r=f(\Theta) \tag{10}$$

განტოლებით პოლარულ კოორდინატებში. ავიღოთ ამ წირზე ნებისმიერი წერტილი. თუ x და y ამ წერტილის დეკარტის კოორდინატებია, მაშინ

$$x=r\cos\Theta, \qquad y=r\sin\theta. \tag{11}$$

მაგრამ θ კუთხის მოცემა (10) ტოლობის თანახმად განსაზღვრავს r-ის მნიშვნელობასაც. ამგვარად Θ კუთხე სავსებით განსაზღვრავს x და y კოორდინატებს. მაშასადამე, (11) ტოლობები, რომლებშიც იგულისხმება, რომ r არის θ-ს ფუნქცია, წარმოადგენენ წირის პარამეტრული სახით მოცემულ განტოლებებს. მაშინ ამ წირის სიმრუდე მოიძებნება (8) ფორმულით. გამოვთვალოთ ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები.

რადგან r არის θ-ს ფუნქცია, ამიტომ

$$x_\theta'=r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta, \qquad y'_\theta=r_\theta'\sin\theta+r\cos\theta.$$

$$x_\theta''=r_\theta''\cos\theta-2r'_\theta\sin\theta-r\cos\theta, \qquad y_\theta''=r_\theta''\sin\theta+2r_\theta'\cos\theta-r\sin\theta.$$

აქედან, თუ სიმარტივისათვის r_θ' და r_θ'' გამოსახულებებში გამოვტოვებთ θ ნიშნავს, ვპოულობთ

$$x_\theta'^2+y_\theta'^2=r'^2+r^2,$$

$$y_\theta''x_\theta'-y_\theta'x_\theta''=r^2+2r'^2-rr''.$$

საბოლოოდ,

$$\boxed{K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{12}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $r=e\theta$ წირის სიმრუდე. აქ $r'=r''=e\theta$. მაშასადამე,

$$K=\frac{2e^{2\theta}}{(2e^{2\theta})^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}}$$

5. წრეწირი, ცენტრი და სიმრუდის რადიუსი

მრუდე წირის მცირე რკალი მიახლოებით შეიძლება შეიცვალოს წრფის მონაკვეთით, რომელიც ამ წირს ეხება განსახილველი რკალის რომელიმე წერტილში. იმ საკითხების შესწავლის დროს, როცა ჩვენ გვაინტერესებს რკალის ს ი გ რ ძ ე ან მისი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა, ასეთი შეცვლა შესაძლებელია. მაგრამ ცხადია, რომ ის შეუძლებელია რკალის ს ი მ რ უ დ ი ს შესწავლის დროს, რადგან ყოველი წრფის სიმრუდე ნულის ტოლია. თუ გვსურს L წირის რკალის შეცვლა მიახლოებით უფრო მარტივი წირის რკალით, მაშინ L წირის სიმრუდესთან დაკავშირებული საკითხების შემთხვევაში, გვიხდება წრფის მაგივრად, სხვა უფრო რთული წირის აღება. სავსებით ბუნებრივია, რომ ამ

მიზნით მივმართავთ წ რ ე წ ი რ ს. ამ მოსაზრებებთან დაკავშირებით შემოგვაქვს.

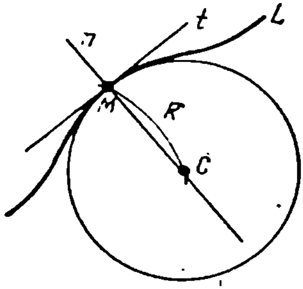
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. L წირის მოცემულ M წერტილში ს ი მ რ უ-დ ი ს წ რ ე წ ი რ ი ეწოდება ისეთ წრეწირს, რომელიც (ნახ. 191)

1) გადის M წერტილში;

2) M წერტილში აქვს L წირთან საერთო მხები;

3) M წერტილში აქვს იგივე K სიმრუდე, რაც L-წირს.

4) მისი C ცენტრი მოთავსებულია L წირის ჩაზნექილობის მიმართულების მხარეს (M წერტილში).



ნახ. 191.

შევჩერდეთ დაწვრილებით ამ განსაზღვრაზე. როდესაც ლაპარაკია L წირის სიმრუდეზე, იგულისხმება სიმრუდე M წერტილში, რადგან ნემისმიერი წირისათვის სიმრუდე იცვლება წერტილიდან წერტილამდე. წრეწირის ყოველ წერტილში სიმრუდე ერთი და იგივეა, ამიტომ წრეწირის შემთხვევაში, არ ვლაპარაკობთ სიმრუდეზე M წერტილში. შემდეგ, რადგანაც წრეწირი ეხება L წირს M წერტილში, ამიტომ მ ი ს ი C ც ე ნ ტ რ ი ძ ე ვ ს L წ ი რ ი ს M წ ე რ ტ ი ლ შ ი გ ა-ვ ლ ე ბ უ ლ ნ ო რ მ ა ლ ზ ე. ადვილი მისახვედრია, თუ როგორი უნდა იყოს სიმრუდის წრეწირის R რადიუსი. სახელდობრ, ერთი მხრივ ამ წრეწირის სიმრუდე ტოლი უნდა იყოს L წირის K სიმრუდისა M წერტილში, და მეორე მხრივ, როგორც ყოველი წრეწირისათვის სიმრუდე ტოლია $\frac{1}{R}$-ის. მაშასადამე, $K=\frac{1}{R}$ და

$$\boxed{R=\frac{1}{K}} \tag{13}$$

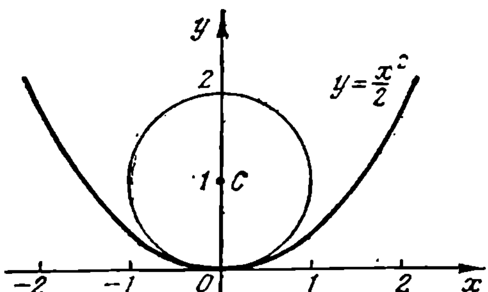
ამ სიდიდეს ეწოდება L წირის ს ი მ რ უ დ ი ს რ ა დ ი უ ს ი M წერტილში (წერტილის დასახელება აუცილებელია, რადგან L წირს სხვადასხვა წერტილში აქვს სიმრუდის ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა რადიუსი!). სიმრუდის წრეწირის C ცენტრს მოკლედ უწოდებენ L წირის ს ი მ რ უ-დ ი ს ც ე ნ ტ რ ს M წერტილში.

რასაკვირველია, ყოველივე ნათქვამი ეხება იმ შემთხვევას, როდესაც M წერტილი არ არის L წირის გაწრფივების წერტილი. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $K=0$ და არ არსებობს ასეთი სიმრუდის მქონე წრე-

წირი. ამ შემთხვევაში პირობით ამბობენ, რომ L წირის გაწრფევების წერტილში სიმრუდის წრეწირი გადაგვარდება წრფედ (სახელდობრ, მხებად განსახილველ წერტილში). ამის შესაბამისად ამბობენ აგრეთვე, რომ გაწრფევების წერტილში სიმრუდის რადიუსი „უსასრულობის ტოლია", ხოლო სიმრუდის ცენტრი „გადაინაცვლებს უსასრულობაში".

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ავაგოთ $y=\frac{1}{2}x^2$ პარაბოლის სიმრუდის ცენტრი მის (0,0) წვეროში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პარაბოლის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $y'_x=x$, $y''_x=1$. მაშასადამე, $K=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, ხოლო როცა $x=0$, $K=1$. აქედან და (13) ფორმულიდან გამომდინარეობს რომ $R=1$. ცნობილია, რომ პარაბოლა წვეროში ეხება Ox ღერძს, ამიტომ სიმრუდის ცენტრი C ძევს Oy ღერძზე, Ox ღერძის ზ ე მ ო თ, რადგან განსახილველი პარაბოლა ჩაზნექილობით მიმართულია ზემოთ. ამგვარად, სიმრუდის წრეწირის C ცენტრი არის C (0,1) წერტილი და რადიუსი $R=1$. 192-ე ნახაზზე ვხედავთ, თუ როგორ მჭიდროდ ეხებიან ერთმანეთს პარაბოლა და მისი სიმრუდის წრეწირი.



ნახ. 192.

თუ ჩვენ განვიხილავთ L წირის მცირე რკალს, რომელიც M წერტილს შეიცავს, მაშინ შეიძლება მიახლოებით ეს რკალი ჩავთვალოთ სიმრუდის წრეწირის რკალად (L წირის M წერტილში). მაშასადამე, თუ ხსენებულ რკალზე ავიღებთ M-ისაგან განსხვავებულ მაგრამ მასთან ძალიან ახლოს მდებარე სხვა N წერტილს (რადგან იგულისხმება მცირე რკალი), შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ M და N წერტილები მდებარეობენ ერთი და იგივე წრეწირზე, რომელიც ეხება L წირს M (ზუსტად) და N

(მიახლოებით) წერტილებში. მაშინ ამ წრეწირის ცენტრი უნდა მდებარეობდეს L წირისადმი M და N წერტილებში გავლებულ ორ ნორმალზე ერთდროულად, ე. ი. უნდა წარმოადგენდეს ამ ნორმალების გადაკვეთის წერტილს. ეს მოსაზრება არა მარტო გვაძლევს ნახაზზე ცენტრის მიახლოებით მონახვის მარტივ ხერხს, არამედ გვაძლევს სიმრუდის ცენტრის სხვა განსაზღვრის საშუალებას. სახელდობრ, წირის მცირე რკალის სიმრუდის წრეწირის რკალით შეცვლის დროს ცდომილება მით ნაკლებია, რაც უფრო მოკლეა რკალი. სხვანაირად, თუ L წირზე ავიღებთ M წერტილს და მასთან ახლოს მდებარე N წერტილს, და ვიპოვით M და N წერტილებში L წირისადმი გავლებული ნორმალების გადაკვეთის წერტილს, მივიღებთ სიმრუდის C ცენტრს (M წერტილში) იმდენად დიდი სიზუსტით, რამდენადაც ახლოს მდებარეობს N წერტილი M-თან. ამიტომ შეიძლება შემოვიღოთ

განსაზღვრა. L წირის მოცემულ M წერტილში სიმრუდის ცენტრი C ეწოდება M წერტილში და მასთან უსასრულოდ ახლოს მდებარე N წერტილში L წირისადმი გავლებული ნორმალების გადაკვეთის წერტილის ზღვრულ მდებარეობას.

ეს განსაზღვრა გვაძლევს სიმრუდის თეორიის ახლებურად დასაბუთების საშუალებას. სახელდობრ, როცა გვეცოდინება, თუ რა არის L წირის სიმრუდის ცენტრი M წერტილში, შეიძლება განვსაზღვროთ L წირის სიმრუდის R რადიუსი M წერტილში ფორმულით

$$R = CM,$$

ხოლო შემდეგ შემოვიღოთ K სიმრუდის ცნება

$$K = \frac{1}{R}.$$

6. ევოლუტის და ევოლვენტის ცნება

ზემოთ მკითხველის ყურადღება შევაჩერეთ იმ გარემოებაზე, რომ როცა ლაპარაკია რაიმე წირის სიმრუდის ცენტრის შესახებ, საჭიროა მივუთითოთ, თუ წირის რომელი M წერტილისათვის არის C სიმრუდის ცენტრი, რადგან M წერტილის ცვლილებასთან ერთად იცვლის თავის მდებარეობას C წერტილიც. ამას მივყავართ შემდეგ განსაზღვრამდე.

განსაზღვრა. L წირის სიმრუდის ცენტრების გეომეტრიულ ადგილს ეწოდება ამ წირის ევოლუტა. თვით L წირს კი ეწოდება თავისი ევოლუტის ევოლვენტა*.

---

* ევოლუტა და ევოლვენტა ბერძნული სიტყვებია და აღნიშნავენ შესაბამისად შლილი და გაშლადი.

ცხადია, რომ წრფეს არა აქვს ევოლუტა, ხოლო წრეწირის ევოლუტა არის წერტილი — მისი ცენტრი. დანარჩენ შემთხვევებში ევოლუტა არის რაიმე წირი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. § 3-ის მე-4 ქვეპარაგრაფში განვსაზღვრეთ წრეწირის ევოლვენტა. ვუჩვენოთ, რომ ეს წირი მართლაც არის ევოლვენტა ახლახან შემოღებული აზრითაც, ანუ წრეწირი არის ამ წირისათვის ევოლუტა.

ამისათვის, ავიღოთ წრეწირის ევოლვენტის რაიმე $M(t)$ წერტილი. ვიპოვოთ M წერტილში ევოლვენტის ნორმალი. ევოლვენტის პარამეტრული განტოლებებია.

$$x=R(\cos t+t\sin t),\qquad y=R(\sin t-t\cos t).$$

აქედან

$$x_t'=Rt\cos t,\qquad y_t'=Rt\sin t. \tag{14}$$

მაშასადამე,

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\operatorname{tg} t.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ t არის OB სხივის Ox ღერძისადმი დახრის კუთხე (ნახ. 185), მაშინ გასაგები იქნება, რომ ევოლვენტის M წერტილში გავლებული მხები OB რადიუსის პარალელურია, ამიტომ, ნორმალი OB-ს მართობია. მაგრამ M წერტილიდან OB-ზე შეიძლება მხოლოდ ერთი მართობის დაშვება და ის არის MB. მაშასადამე, MB არის საძიებელი ნორმალი, რომელზეც ძევს ევოლვენტის სიმრუდის ცენტრი M წერტილში.

ვიპოვოთ ახლა ევოლვენტის სიმრუდის რადიუსი. (8) ფორმულის თანახმად სიმრუდე

$$K=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{(x_t'^2+y_t'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{15}$$

მაგრამ (14) ტოლობიდან გვაქვს

$$x_t''=R(\cos t-t\sin t),\qquad y_t''=R(\sin t+t\cos t).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (15) ტოლობაში, მივიღებთ

$$K=\frac{R^2t^2}{(R^2t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{Rt}.$$

მაშასადამე, ევოლვენტის სიმრუდის რადიუსი M წერტილში უდრის Rt-ს, ანუ MB-სიგრძეს. რადგან ნახაზიდან ჩანს, რომ B წერტილი ევოლვენტის იმ მხარეს ძევს, საითკენაც უკანასკნელი მიმართულია ჩაზნექილობით, ცხადია, რომ B წერტილი იქნება სწორედ ევოლვენტის სიმრუდის ცენტრი M წერტილში. B წერტილის სხვადასხვა მდებარეობა ავსებს წრეწირს, გამოდის რომ წრეწირი არის თავისი ევოლვენტის ევოლუტა. პარალელურად დავადგინეთ, რომ ევოლვენტის MB ნორმალი ეხება ევოლუტას შესაბამის სიმრუდის ცენტრში. ქვემოთ ვუჩვენებთ, რომ ეს ასეა ყოველთვის.

7. სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები

განვიხილოთ ამოცანა $y=f(x)$ წირის $M(x_0, y_0)$ წერტილში სიმრუდის C ცენტრის (x_c, y_c) კოორდინატების პოვნის შესახებ. ამ ამოცანის ამოხსნა ემყარება ორ მოსაზრებას: 1) C წერტილი ძევს $y=f(x)$ წირის M წერტილში გავლებულ ნორმალზე, 2) მანძილი C წერტილიდან M წერტილამდე სიმრუდის R რადიუსის ტოლია. რადგან, ხსენებული ნორმალის განტოლებაა

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}\,(x-x_0),$$

პირველი მოსაზრებიდან გვაქვს

$$x_c-x_0=-y_0'(y_c-y_0). \tag{16}$$

მეორე მოსაზრება გვიჩვენებს, რომ

$$(x_c-x_0)^2+(y_c-y_0)^2=R^2, \tag{17}$$

სადაც სიმრუდის რადიუსი R მოიძებნება (13) და (14) ფორმულებით

$$R=\frac{1}{K},\quad K=\frac{y_0''}{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ე. ი.

$$R=\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}.$$

მაშინ (17) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$(x_c-x_0)^2+(y_c-y_0)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}.$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ (x_c-x_0)-ის გამოსახულებას ტოლობიდან (16), მივიღებთ

$$(y_c-y_0)^2\,y_0'^2+(y_c-y_0)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}.$$

საიდანაც $(1+y_0'^2)$-ზე შეკვეცის შემდეგ ვღებულობთ

$$(y_c-y_0)^2=\left(\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\right)^2$$

მაშასადამე,

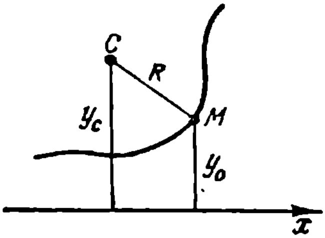
$$y_c-y_0=\pm\frac{1+y_0'^2}{y_0''}. \tag{18}$$

გავარკვიოთ, რომელი უნდა ავირჩიოთ მიღებული ორი ნიშნიდან.

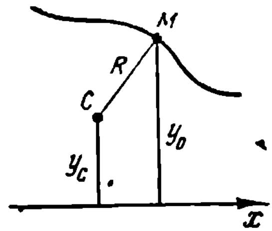
განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) $y=f(x)$ წირი M წერტილში მიმართულია ჩაზნექილობით ზემოთ, 2) ის მიმართულია ჩაზნექილობით ქვემოთ. პირველ შემთხვევაში $y_0''>0$ და ამას გარდა 193-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ C წერტილი ძევს M წერტილის ზ ე მ ო თ, ე. ი. $y_c>y_0$, საიდანაც $y_c-y_0>0$. რადგან (18) ტოლობაში წილადის მრიცხველი $1+y_0'^2$ ყოველთვის დადებითია, ამიტომ ამ წილადის ნიშანი ემთხვევა მისი მნიშვნელის ნიშანს, ე. ი. წილადი >0. (18) ტოლობის მარცხენა ნაწილი, როგორც ახლა დავადგინეთ, აგრეთვე მეტია ნულზე. მაშასადამე, ორი $\pm$ ნიშნიდან, უნდა ავირჩიოთ $+$ ნიშა-

ნი. ასეთივე მოსაზრებებს გამოვიყენებთ, როცა მრუდი მიმართულია ჩაზნექილობით ქვემოთ: ამ შემთხვევაში $y_0''<0$ და $y_c-y_0<0$ (ნახ. 194). მაშასადამე, მეორე შემთხვევაშიც უნდა ავირჩიოთ $+$ ნიშანი. ამგვარად,

$$y_c-y_0=\frac{1+y_0'^2}{y_0''}.$$



ნახ. 193.



ნახ. 194.

აქედან და (16) ტოლობიდან საბოლოოდ გვაქვს

$$\boxed{\begin{aligned} x_c&=x_0-y_0'\,\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\\ y_c&=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\end{aligned}} \tag{19}$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით

მაშინ

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'},\qquad y_x''=\frac{y_t''x_t'-y_t'\,x_t''}{x_t'^3}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (19) ფორმულებში, და x_0, y_0, y_0', y_0'' გამოსახულებებ-ში სიმარტივისათვის გამოვტოვებთ ინდექსებს, მივიღებთ

$$x_c=x-\frac{x_t'^2+y_t'^2}{y_t''x_t'-y_t'x_t''}\,y_t',$$

$$y_c=y+\frac{x_t'^2+y_t'^2}{y_t''x_t'-y_t'x_t''}\cdot x_t'.$$

(19) ფორმულების საფუძველზე მტკიცდება

თეორემა. ე ვ ო ლ ვ ე ნ ტ ი ს ნ ო რ მ ა ლ ი ე ხ ე ბ ა ე ვ ო ლ უ ტ ა ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ს ი მ რ უ დ ი ს ც ე ნ ტ რ შ ი.

მართლაც, თუ M წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x და y, ხოლო C წერტილის კოორდინატებს ξ და η, მაშინ (19) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\xi=x-y'Q,$$
$$\eta=y+Q. \tag{20}$$

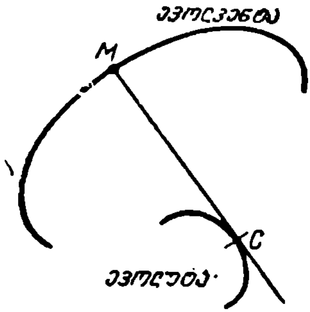
სადაც

$$Q=\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{21}$$

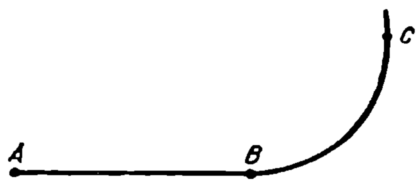
(20) ტოლობები წარმოადგენს ევოლუტის პარამეტრული სახის განტოლებებს (ξ და η ევოლუტის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია), x პარამეტრია.

ევოლუტის მხების კუთხური კოეფიციენტი არის η_ξ', ანუ (შტრიხით აღნიშნულია გაწარმოება x პარამეტრით)

$$m=\frac{\eta'}{\xi'}=\frac{y'+Q'}{1-y''Q-y'Q'}.$$



ნახ. 195.



ნახ. 196.

მაგრამ (21) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $y''Q=1+y'^2$, მაშასადამე,

$$m=\frac{y'+Q'}{-y'^2-y'Q'}=-\frac{1}{y'}.$$

ეს ნიშნავს, რომ ევოლუტის მხები სიმრუდის C ცენტრში პარალელურია ევოლვენტის ნორმალისა შესაბამის M წერტილში. მაგრამ ორივე ეს წრფე (ნახ. 195) C წერტილში გადის, ამიტომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან. რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

8. რკინიგზის მოსახვევები

შევჩერდეთ სიმრუდის ცნების გამოყენებაზე ერთ ტექნიკურ საკითხში.

მექანიკიდან ცნობილია, რომ:

1) M წერტილს, რომელიც თანაბრად მოძრაობს რაიმე ბრტყელ L წირზე v სიჩქარით, დროის ყოველ მომენტში აქვს $w=Kv^2$ აჩქარება, სადაც K, L წირის სიმრუდეა იმ წერტილში, რომელშიც განსახილველ მომენტში მდებარეობს M წერტილი. ეს აჩქარება (ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი აჩქარება) მიმართულია L წირის ნორმალის გასწვრივ M წერტილიდან წირის სიმრუდის ცენტრისაკენ. თუ L წირი წარმოადგენს წრფეს მაშინ $K=0$ და მოძრავ წერტილს ნორმალური აჩქარება არ აქვს.

2) თუ მოძრავი M წერტილის მასა m-ის ტოლია და რაიმე მომენტში აქვს w აჩქარება, მაშინ ამ მომენტში M წერტილზე მოქმედებს $F=mw$ ძალა, რომელსაც აქვს w აჩქარების მიმართულება.

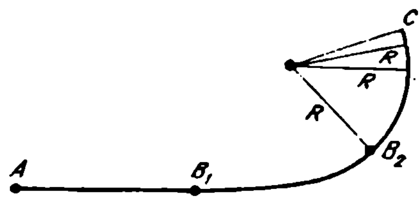
3) თუ რაიმე სხეული მოქმედებს M წერტილზე F ძალით, მაშინ M წერტილი მოქმედებს ხსენებულ სხეულზე ძალით, რომელიც სიდიდით F ძალის ტოლია, ხოლო მიმართულებით, მისი მოპირდაპირე.

ახლა განვიხილოთ მატარებლის თანაბარი მოძრაობა (v სიჩქარით). მატარებელი ჩავთვალოთ m მასის მქონე მატერიალურ წერტილად.

ვთქვათ, მატარებელი მოძრაობს ჯერ AB წრფეზე, ხოლო შემდეგ გადადის მოსახვევში, რომელიც წარმოადგენს R რადიუსიანი წრეწირის BC რკალს (ნახ. 196). ცხადია, რომ AB წრფე BC რკალის მხებია. მაგრამ ეს გარემოება არ განაპირობებს მოძრაობის სიმდოვრეს. მართლაც, AB უბანზე გზის სიმრუდე ნულის ტოლია, ხოლო BC რკალზე კი $\frac{1}{R}$ სიდიდის ტოლი. მაშასადამე, სანამ მატარებელი მიდიოდა AB გზაზე მას არ ჰქონდა აჩქარება, ხოლო B პირაპირზე გადასვლის შემდეგ მ ყ ი ს ე ე შეიძინა $\frac{v^2}{R}$ აჩქარება. აქედან გამომდინარეობს, რომ B პირაპირზე გადასვლისას მატარებელზე მყისვე იწყებს მოქმედებას

$$F = m\,\frac{v^2}{R}$$

ძალა. ძალის ასეთ მყისიერ გაჩენას ეწოდება დ ა რ ტ ყ მ ი ს მოვლენა. ამგვარად, B პირაპირზე გასვლისას, მატარებელი რელსების მხრიდან ღებულობს F დარტყმას, მაშასადამე, თვითონაც ავითარებს რელსებზე ასეთივე დარტყმას. რადგან მატარებლის m მასა და v სიჩქარე საკმაოდ დიდია, ამიტომ ზემოთ აღწერილი მოვლენა აფუჭებს ლიანდაგს და შეიძლება გამოიწვიოს მატარებლის დამსხვრევა.



ნახ. 197.

ამ გარემოების გამო, გზის წრფივ და წრიულ ნაწილებს უშუალოდ კი არ აერთებენ, არამედ მათ შორის ათავსებენ 197-ე ნახაზზე ნაჩვენები B_1B_2 წირის მსგავს „გადასასვლელ წირს". ამ წირს ირჩევენ ისე, რომ მისი K სიმრუდე უწყვეტად იზრდებოდეს $K=0$-დან (რომელსაც ადგილი აქვს B_1 წერტილში) $K=\frac{1}{R}$-მდე (B_2 წერტილში). ამით მიიღწევა მატარებლის მდოვრე მოძრაობა.

რადგან B_1 წერტილი B_1B_2 წირის გაწრფევების წერტილი უნდა იყოს, ამიტომ გადასასვლელ წირად უნდა ავირჩიოთ არა ნებისმიერი წირი, არამედ მხოლოდ ისეთი, რომელსაც აქვს გაწრფევების წერტილები. მაგალითად ჩვეულებრივი $y=ax^2$ პარაბოლა ამ მიზნისათვის არ გამოდგება, რადგან აქ $y''=2a\neq 0$ და გაწრფევების წერტილები არა გვაქვს. პირიქით, $y=ax^3$ კ უ ბ უ რ პ ა რ ა ბ ო ლ ა ს აქვს ასეთი წერტილი, ეს არის $x=0$. ამიტომ ამ წირს იყენებენ გადასასვლელ წირად.

საინტერესოა, რომ ისეთ თითქოს განყენებულ ცნებას, როგორიც არის გაწრფევების წერტილი, აქვს მნიშვნელოვანი პრაქტიკული გამოყენება.

V თავი

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§. 1. ინტეგრების ზოგადი ხერხები

1. პირველადი

დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს დიფერენცირება, ე. ი. ამოცანა რაიმე ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის პოვნის შესახებ. პრაქტიკაში ხშირად გვიხდება შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა. სახელდობრ, ვიპოვოთ ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი ცვლილების სიჩქარე არგუმენტის მიმართ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ — ვიპოვოთ ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი წარმოებული. ამ ოპერაციას ეწოდება ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა. განვმარტოთ ეს ტერმინი უფრო დაწვრილებით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პ ი რ ვ ე ლ ა დ ი, თუ ეს უკანასკნელი არის $F(x)$-ის წარმოებული

$$\boxed{f(x)=F'(x)}$$

მაგალითად, x^3 არის $3x^2$-ის პირველადი, რადგან $(x^3)'=3x^2$. ასევე $\ln x$ არის $\frac{1}{x}$-ის პირველადი.

მოქმედებას, რომლის საშუალებით ვპოულობთ $f(x)$ ფუნქციის პირველადს, ეწოდება ამ ფუნქციის ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა. ამგვარად, ზემოთ გვქონდა $3x^2$ და $\frac{1}{x}$ ფუნქციების ინტეგრება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგჯერ საჭიროა სპეციალურად მივუთითოთ შუალედი, რომელზეც მოცემულია საინტეგრო ფუნქცია. მაგალითად, თუ $\frac{1}{x}$ ფუნქციას განვიხილავთ $]0, +\infty[$ შუალედში, მაშინ მისი პირველადი ფუნქცია იქნება $\ln x$. მაგრამ იმავე ფუნქციისათვის, რომელიც $]-\infty,0[$

შუალედში განიხილება, პირველადი იქნება არა $\ln x$. (რომელიც განსაზღვრული არ არის, როცა $x<0$), არამედ $\ln(-x)$, რადგან

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

პირიქით, x^3 არის $3x^2$-ის პირველადი მთელ ნამდვილ $]-\infty, +\infty[$ ღერძზე (მაშასადამე, მის ნებისმიერ შუალედზე).

ბუნებრივად ისმება კითხვა: ყოველ $f(x)$ ფუნქციას აქვს, თუ არა პირველადი, ანუ ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, არის თუ არა, რაიმე სხვა ფუნქციის წარმოებული. პასუხს გვაძლევს

თეორემა. თუ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე შუალედში, მაშინ მას აქვს პირველადი ამ შუალედში.

ამ თეორემას არ დავამტკიცებთ.

2. ნებისმიერი მუდმივი. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ფუნქცია $y=x^3$ არის $3x^2$-ის პირველადი, რადგან $y'=3x^2$. მაგრამ $z=x^3+5$ აგრეთვე $3x^2$-ის პირველადია, რადგან $z'=3x^2$. საზოგადოდ, ყოველი $z=x^3+C$ ფუნქციის წარმოებული არის $3x^2$, ამიტომ ის არის $3x^2$-ის პირველადი. საზოგადოდ, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $F(x)$-თან ერთად, რომელიც $f(x)$-ის პირველადია, ყოველი $F(x)+C$ ფუნქცია არის აგრეთვე $f(x)$-ის პირველადი, რადგან

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x).$$

ბუნებრივია ისმება კითხვა: ამოიწურება, თუ არა $f(x)$-ის პირველადთა სიმრავლე

$$F(x)+C \tag{1}$$

გამოსახულებით, სადაც $F(x)$ ერთ-ერთი პირველადია, თუ $f(x)$-ს აქვს სხვა პირველადებიც, რომლებიც არ მიიღება (1) გამოსახულებისაგან C მუდმივის არცერთი მნიშვნელობისათვის. პასუხს გვაძლევს

თეორემა. $f(x)$ ფუნქციას არ აქვს არავითარი სხვა პირველადი ფუნქცია, გარდა (1)-ისა.

მართლაც, ვთქვათ $F_1(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადი, მაშინ $F_1'(x)=f(x)$. მაგრამ $F(x)$ (1) ტოლობიდან აგრეთვე პირველადია, $f(x)$-ისა და ამიტომ $F'(x)=f(x)$. განვიხილოთ $F_1(x)-F(x)$ სხვაობა აღვნიშნოთ ის $R(x)$-ით. მაშინ

$$R'(x) = F'_1(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

ფუნქციის მუდმივობის კრიტერიუმის საფუძველზე, $R'(x)=0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $R(x)$ მუდმივი სიდიდეა. აღვნიშნოთ ის A-თი. $R(x)=A$, მაშინ

$$F_1(x)-F(x)=A \quad \text{და} \quad F_1(x)=F(x)+A.$$

სხვანაირად, რომ ვთქვათ, $F_1(x)$ მიიღება (1) გამოსახულებიდან, როცა $C=A$. რის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

ამგვარად (1) გამოსახულება წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველადთა ზ ო გ ა დ ს ა ხ ე ს, ანუ როგორც ამბობენ — პირველადთა ს რ უ ლ ო ჯ ა ხ ს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადი, მაშინ

$$F(x)+C$$

გამოსახულებას, სადაც C ღებულობს ნებისმიერ მუდმივ მნიშვნელობებს, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის გ ა ნ უ ს ა ზ ღ ვ რ ე ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int f(x)dx. \tag{2}$$

ამგვარად, ტოლობა

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{3}$$

არის $F'(x)=f(x)$ თანადობის, ანუ $dF(x)=f(x)dx$ თანადობის სხვანაირი ჩაწერა. ქვემოთ ვუჩვენებთ, თუ რატომ შემოაქვთ (2) სიმბოლოში dx მამრავლი. აღვნიშნავთ აგრეთვე, რომ (3) ტოლობაში შემავალ C შესაკრებს უწოდებენ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ მ უ დ მ ი ვ ს, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას — ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ქ ვ ე შ ა ფ უ ნ ქ ც ი ა ს.

მკითხველი ადვილად დარწმუნდება შემდეგი ტოლობების

$$\int e^x dx=e^x+C, \quad \int \cos x dx=\sin x+C, \quad \int x dx=\frac{x^2}{2}+C$$

მართებულობაში, რომლებიც წარმოადგენენ ზემოთ მოცემული განსაზღვრის ილუსტრაციას. ტოლობა

$$\int \frac{dx}{x}=\ln x+C,$$

როცა $x>0$, აგრეთვე იმავე განსაზღვრის ილუსტრაციაა. თუ $x<0$, მაშინ

$$\int \frac{dx}{x}=\ln(-x)+C.$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს

თეორემა. განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული ტოლია ინტეგრალქვეშა ფუნქციისა, ანუ

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)} \tag{4}$$

მართლაც, ტოლობა $y=\int f(x)dx$ ნიშნავს, რომ $y=F(x)+C$, სადაც $F(x)$, $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადია, ხოლო $C=\mathrm{const}$. მაგრამ მაშინ $y'=F'(x)=f(x)$. რის დამტკიცებაც იყო საჭირო*.

იმავე განსაზღვრიდან გამომდინარეობს

წესი. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ

$$\int f(x)dx = H(x)+C \tag{5}$$

ტოლობის მართებულობაში, საჭიროა გავაწარმოოთ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი: თუ მივიღებთ მარცხენა ნაწილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციას, მაშინ (5) ტოლობა მართებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი არა.

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln(x+\sqrt{x^2+m})+C} \tag{6}$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C$$

ვიპოვით,

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+m}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+m}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+m}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+m}+x}{\sqrt{x^2+m}}.$$

აქედან

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+m}},$$

ამით (6) დამტკიცებულია.

---

* შეიძლება ასეც ვიმსჯელოთ: C-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $y=F(x)+C$ გამოსახულება $f(x)$-ის პირველადია. მაშასადამე,

$$y'=f(x).$$

ვ. ძირითად ინტეგრალთა ცხრილი

ინტეგრების ჩვევების გამოსამუშავებლად აუცილებელია შემდეგი ფორმულების ცოდნა:

I. $\int dx = x + C.$	VII. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
II. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$	VIII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
III. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$	IX. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
IV. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	X. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
V. $\int e^x dx = e^x + C.$	XI. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
VI. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	XII. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C.$
XIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + m}) + C.$	

ამ ფორმულების შემოწმება შეიძლება მარჯვენა ნაწილის გაწარმოებით. გაწარმოების შედეგად უნდა მივიღოთ მარცხენა ნაწილში მყოფი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია. შემოწმებას ვანდობთ მკითხველს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1. II ფორმულა მართებულია, როცა $\alpha \neq -1$. მართლაც, თუ $\alpha = -1$, მაშინ ფორმულის მარჯვენა ნაწილი კარგავს აზრს. როცა $\alpha = -1$, მართებულია III ფორმულა.

2. III ფორმულაში იგულისხმება, რომ $x > 0$. თუ $x < 0$, მაშინ მართებულია ფორმულა

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

ორივე ეს ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს ერთით, შემდეგნაირად:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

ასევე XII და XIII ფორმულები უფრო ზოგადი სახით შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln|x+\sqrt{x^2+m}| + C.$$

3. X ფორმულაში იგულისხმება, რომ $a>0$. მართლაც, თუმცა ნებისმიერი $a\neq 0$ გვაქვს:

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}},$$

მიუხედავად ამისა, გარდაქმნა

$$a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-x^2}$$

მართებულია მ ხ ო ლ ო დ* მაშინ, როცა $a>0$.

4. XI და XII ფორმულებში იგულისხმება, რომ $a\neq 0$.

5. X და XI ფორმულების ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

6. ყველა ფორმულაში დამოუკიდებელი ცვლადი აღნიშნულია x-ით. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ III, V, VI, VII ფორმულები ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\int \frac{dz}{z} = \ln z + C, \qquad \int e^t\,dt = e^t + C,$$

$$\int \cos y\,dy = \sin y + C, \quad \int \sin u\,du = -\cos u + C.$$

და ა. შ. ასევე I ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირადაც:

$$\int dz = z + C, \quad \int dt = t + C, \quad \int dy = y + C, \quad \int du = u + C.$$

ზემოთ აღნიშნულის თანახმად ადვილად წარმოვიდგენთ, რომ განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ შეიძლება ჩაიწეროს

$$\int f(x) \quad \text{სახით.} \tag{7}$$

---

* თუ $a<0$, მაშინ $a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\sqrt{a^2-x^2}$.

მართლაც, მაშინ გაუგებარი იქნება თუ x, y, z, t გამოსახულებებიდან რომელს უდრის $\int 1$. ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელი ასოთია აღნიშნული დამოუკიდებელი ცვლადი. (2) გამოსახულებაში dx-ის მნიშვნელობა სწორედ ამაში მდგომარეობს.

4. ჯამის ინტეგრება და მუდმივი მამრავლის გამოტანა

ინტეგრების დროს თითქმის ყოველთვის საჭიროა ვისარგებლოთ თეორემებით, რომლებსაც აქ დავამტკიცებთ.

თეორემა. 1. რამდენიმე ფუნქციის ალგებრული ჯამის ინტეგრალი ტოლია ამ ფუნქციების ინტეგრალების ალგებრული ჯამისა, ე. ი.

$$\boxed{\int [f(x)+g(x)-h(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx-\int h(x)dx} \tag{8}$$

დამტკიცება. რომ დავრწმუნდეთ (8) ტოლობის მართებულობაში, ამისათვის გავაწარმოოთ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი. მაგრამ იგი არის რამდენიმე შესაკრების ალგებრული ჯამი, ამიტომ გაწარმოების შედეგად მივიღებთ

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'+\left(\int g(x)\,dx\right)'-\left(\int h(x)\,dx\right)' \tag{9}$$

მე-2 ქვეპარაგრაფის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x), \quad \left(\int g(x)\,dx\right)'=g(x), \quad \left(\int h(x)\,dx\right)'=h(x).$$

მაშინ (9) გამოსახულება გვაძლევს $f(x)+g(x)-h(x)$ ჯამს. ამგვარად (8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის გაწარმოებით ვღებულობთ მისი მარცხენა ნაწილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციას, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის წინ, ე. ი.

$$\boxed{\int af(x)dx=a\int f(x)dx} \tag{10}$$

დამტკიცება წინა თეორემის დამტკიცების ანალოგიურია. სახელდობრ, თუ დავუშვებთ, რომ

$$y=a\int f(x)dx,$$

მივიღებთ

$$y'=\left(a\int f(x)\,dx\right)'=a\left(\int f(x)\,dx\right)'=af(x).$$

რაც ამტკიცებს (10) ტოლობის მართებულობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

$$1) \quad I=\int (2x^2+9x-5)\,dx=2\int x^2dx+9\int x\,dx-5\int dx.$$

მარჯვენა ნაწილში მივიღეთ ცხრილის ინტეგრალები. მაშასადამე,

$$I=2\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)+9\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)-5(x+C_3),$$

ანუ

$$I=\frac{2}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-5x+C,$$

სადაც

$$C=2C_1+9C_2-5C_3.$$

ჩვეულებრივად

$$\int [af(x)+bg(x)-ch(x)]\,dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx-c\int h(x)dx$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ცალკეულ ინტეგრალების გამოთვლისას ნებისმიერი მუდმივები არ შემოაქვთ, არამედ მიაწერენ ერთ საერთო მუდმივს, ყველა გამოთვლის შემდეგ.

$$2) \int\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int\left(4x+12+\frac{9}{x}\right)dx=2x^2+12x+9\ln x+C.$$

$$3) \quad I=\int\frac{dx}{\sin^2 2x}.$$

შემდეგში გავეცნობით ამ ინტეგრალის გამოთვლის სრულიად მარტივ ხერხს. ინტეგრების ტექნიკის ცოდნის იმ მცირე მოცულობის გამო, რომელსაც ჯერჯერობით ვფლობთ, საჭიროა მივმართოთ ხელოვნურ ხერხს. სახელდობრ,

$$I=\int\frac{dx}{4\sin^2x\cos^2x}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\,dx$$

შემდეგ გვაქვს

$$I=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\frac{1}{4}\,(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)+C.$$

5. ჩასმის ხერხი

აქ გავეცნობით ინტეგრების მეტად მნიშვნელოვან ხერხს — ჩ ა ს მ ი ს ხერხს (ანუ ც ვ ლ ა დ ი ს შ ე ც ვ ლ ი ს ხ ე რ ხ ს). განვიხილოთ წინასწარ რამდენიმე მაგალითი.

ვთქვათ, გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$I=\int e^{\sin x}\cos x dx. \tag{11}$$

რადგან $\cos x dx=d(\sin x)$, ინტეგრალი შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$I=\int e^{\sin x}d(\sin x)$$

შემოვიღოთ ახალი z ცვლადი; დავუშვათ, რომ $\sin x=z$, მაშინ

$$I=\int e^z dz.$$

მარჯვენა ნაწილში მივიღეთ ცხრილის ინტეგრალი (ფორმულა V), მაშინ

$$I=e^z+C.$$

დავუბრუნდეთ ძველ x ცვლადს, მივიღებთ

$$I=e^{\sin x}+C.$$

მიღებული შედეგის მართებულობა ადვილად შემოწმდება გაწარმოებით.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. ვთქვათ

$$I=\int e^{\operatorname{arctg} x}\frac{dx}{1+x^2}. \tag{12}$$

მაშინ

$$I=\int e^{\operatorname{arc tg} x}d(\operatorname{arctg} x),$$

ან

$$I=\int e^z dz,$$

სადაც

$$z=\operatorname{arctg} x.$$

აქედან

$$I=e^z+C=e^{\operatorname{arctg} x}+C.$$

ვხედავთ, რომ გამოყენებული ხერხი გვაძლევს საშუალებას სხვადასხვა ინტეგრალი, ერთი, V ფორმულით, გამოვთვალოთ.

ჩასმის ხერხის გამოყენების კიდევ ერთი მაგალითი.

$$I=\int \sin^8 x\cos x dx=\int \sin^8 x d(\sin x)$$

დავუშვათ $\sin x=z$, ვპოულობთ

$$I=\int z^8 dz=\frac{z^9}{9}+C=\frac{\sin^9 x}{9}+C.$$

განხილული მაგალითებიდან ვღებულობთ შემდეგ წესს:

ჩასმის წესი. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ

$$I=\int f[\varphi(x))]\,\varphi'(x)dx$$

ინტეგრალი, საჭიროა

1) I გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$I=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x);$$

2) შევცვალოთ $\varphi(x)$ z-ით, რასაც მივყავართ

$$I=\int f(z)\mathrm{d}z$$

ტოლობამდე;

3) გამოვთვალოთ უკანასკნელი ინტეგრალი;

4) მიღებულ შედეგში z შევცვალოთ $\varphi(x)$-ით;

დავამტკიცოთ, რომ ამ წესს მართლაც მივყავართ I ინტეგრალის ჭეშმარიტ მნიშვნელობამდე. ამისათვის დავუშვათ, რომ

$$\int f(z)dz=F(z)+C. \tag{13}$$

მაშინ ზემოთ მოყვანილი წესი გვაძლევს

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C. \tag{14}$$

(14) ტოლობის მართებულობის დასამტკიცებლად გავაწარმოოთ მისი მარჯვენა ნაწილი

$$y=F[\varphi(x)]+C\cdot$$

ამისათვის დავუშვათ, რომ $\varphi(x)=z$, მაშინ

$$y=F(z)+C$$

და

$$y'_x=y'_z\cdot z_x'=y'_z\cdot\varphi'(x).$$

მაგრამ $y_z'=F'(z)$, ხოლო (13) ტოლობა გვაძლევს $F'(z)=f(z)$, გამოდის, რომ

$$y'_x=f(z)\cdot\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

რადგან მივიღეთ (14) ტოლობის მარცხენა ნაწილის ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ეს ტოლობა მართებულია.

მარტივ შემთხვევებში შეიძლება ახალი ცვლადი შემოვიღოთ გონებაში. მაგალითად,

$$\int \operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x},$$

საიდანაც ჩანს, რომ

$$\boxed{\int \operatorname{tg}x\,dx=-\ln\cos x+C} \tag{15}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}.$$

მაშასადამე,

$$\boxed{\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \sin x + C} \tag{16}$$

სასარგებლოა (15) და (16) ფორმულების დამახსოვრება. მსგავსი ხერხით ვპოულობთ:

$$\int \frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x+8} dx = \int \frac{d(x^3+3x^2+2x+8)}{x^3+3x^2+2x+8} =$$
$$= \ln(x^3+3x^2+2x+8)+C$$

უფრო ზოგადად გვაქვს

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln \varphi(x) + C.$$

ამგვარად, ი მ წ ი ლ ა დ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი, რ ო მ ლ ი ს მ რ ი ც ხ ვ ე ლ ი წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ს, ტ ო ლ ი ა მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ი ს ლ ო გ ა რ ი თ მ ი ს ა.

მკითხველისათვის სასარგებლო იქნება შემდეგი მაგალითების განხილვა:

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^8} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x^4) + C.$$

$$\int \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

$$\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{2}{3} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

დავუბრუნდეთ ჩასმის წესს. ის ზოგადად შეიძლება ასე გამოითქვას: ი მ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ გ ა მ ო ვ თ ვ ა ლ ო თ ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი, რ ო მ ე ლ შ ი ც დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ც ვ ლ ა დ ი ა x, შ ე ი ძ ლ ე ბ ა გ ა დ ა ვ ი დ ე თ ს ხ ვ ა z ც ვ ლ ა დ ზ ე, რ ო მ ე ლ ი ც გ ა რ კ ვ ე უ ლ ი პ ი რ ო ბ ი თ დ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი ა x ც ვ ლ ა დ თ ა ნ, ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ქ ვ ე შ ა ფ უ ნ ქ ც ი ა (dx-ი ს ჩ ა თ ვ ლ ი თ) გ ა მ ო ვ ს ა ხ ო თ z ც ვ ლ ა დ ი თ. მ ი ღ ე ბ უ ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს გ ა მ ო თ ვ ლ ი ს შ ე მ დ ე გ ს ა ჭ ი რ ო ა დ ა ვ უ ბ რ უ ნ დ ე თ ი ს ე ვ ძ ვ ე ლ x ც ვ ლ ა დ ს.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$I=\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

დავუშვათ, $x=R\sin z$, მაშინ $\sqrt{R^2-x^2}=R\cos z$ და $dx=R\cos z dz$, საიდანაც

$$I=R^2\int\cos^2 z dz.$$

ტრიგონომეტრიიდან ცნობილი ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$I=R^2\int\frac{1+\cos 2z}{2}dz=\frac{R^2}{2}\left[z+\int\cos 2z dz\right]$$

მაგრამ

$$\int\cos 2z\,dz=\frac{1}{2}\int\cos 2z\,d(2z)=\frac{\sin 2z}{2}+C.$$

მაშასადამე,

$$I=\frac{R^2}{2}z+\frac{R^2\sin 2z}{4}+C.$$

დავუბრუნდეთ ძველ x ცვლადს. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$z=\arcsin\frac{x}{R},\quad R^2\sin 2z=2(R\sin z)(R\cos z)=2x\sqrt{R^2-x^2}.$$

ამგვარად,

$$I=\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+C.$$

ბოლოს ვუჩვენოთ, თუ როგორ მიიღება ჩასმის ხერხით ცხრილის XIII ფორმულა

ვთქვათ,

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

დავუშვათ

$$\sqrt{x^2+m}=z.$$

მაშინ

$$dz=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+m}}=\frac{xdx}{z},$$

საიდანაც

$$\frac{dz}{x}=\frac{dx}{z}.$$

პროპორციის ერთ-ერთი თვისების თანახმად მივიღებთ

$$\frac{dx}{z}=\frac{dx+dz}{z+x}=\frac{d(x+z)}{x+z}.$$

ამგვარად,

$$I=\int\frac{dx}{z}=\int\frac{d(x+z)}{x+z}=\ln(x+z)+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)+C$$

6. წრფივი ჩასმები

განვიხილოთ ცვლადის შეცვლის ორი კერძო შემთხვევა.

1. დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ მუდმივის დამატება.

ნებისმიერი a მუდმივისათვის გვაქვს

$$d(x+a)=dx$$

და პირიქით $dx=d(x+a)$, ამიტომ

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(x)d(x+a)} \qquad (17)$$

ანუ ინტეგრალში მყოფი დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეიძლება ნებისმიერი მუდმივი შესაკრების შეტანა*.

ქვემოთ განხილულია მაგალითები ამ წესის გამოყენებით.

$$\int\frac{dx}{x+5}=\int\frac{d(x+5)}{x+5}=\ln(x+5)+C.$$

$$\int\sqrt{x-3}\,dx=\int\sqrt{x-3}\,d(x-3)=\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

$$\int(x+2)^{36}dx=\int(x+2)^{35}d(x+2)=\frac{(x+2)^{36}}{36}+C.$$

II. დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ მუდმივი მამრავლის შეტანა.

როგორც ცნობილია, თუ a მუდმივია, მაშინ $d(ax)=adx$. აქედან, როცა $a\neq 0$ გვაქვს

$$dx=\frac{1}{a}\,d(ax).$$

* აგრეთვე ნებისმიერი დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ.

მაშასადამე,

$$\boxed{\int f(x)dx=\frac{1}{a}\int f(x)\,d(ax)} \qquad (18)$$

ე. ი. ინტეგრალის ქვეშ მდგომი დიფერენციალის ნიშნის შიგნით შეიძლება შევიტანოთ ნებისმიერი მუდმივი მამრავლი, თუ ინტეგრალს გავყოფთ ამ მამრავლზე.

მაგალითად,

$$\int \sin 7x\,dx=\frac{1}{7}\int \sin 7x\,d(7x)=-\frac{1}{7}\cos 7x+C,$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x+C.$$

საინტერესოა უკანასკნელი მაგალითის მარტივი ამოხსნის შედარება იმ ამოხსნასთან, რომელიც მოცემული იყო მე-4 ქვეპარაგრაფში.

ზოგჯერ საჭიროა ზემოთ მოყვანილი ორივე ხერხის გამოყენება. მაგალითად*,

$$\int\frac{dx}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x+7)}{4x+7}=\frac{1}{4}\ln(4x+7)+C.$$

$$\int\cos(5x+2)\,dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x+2)d(5x)=\frac{1}{5}\int\cos(5x+2)d(5x+2)=$$

$$=\frac{\sin(5x+2)}{5}+C.$$

* პირველი მაგალითი შეიძლება ამოხსნას ასეც

$$\int\frac{dx}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+7/4}=\frac{1}{4}\int\frac{d(x+7/4)}{x+7/4}=\frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{7}{4}\right)+C.$$

თითქოს ერთი შეხედვით აქ პასუხი სხვა არის, მაგრამ $4x+7=\left(x+\frac{7}{4}\right)4$. ამიტომ $\frac{1}{4}\ln(4x+7)=\frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}\ln 4$ და განსხვავება C და C' მუდმივების შორისაა, რადგან. $C'=\frac{1}{4}\ln 4+C$.

არსებობს ინტეგრალის გამოთვლის კიდევ ერთი ფართოდ ცნობილი ხერხი, ე. წ. „ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი“.

ვთქვათ, u და v x არგუმენტის ფუნქციებია, რომელთა წარმოებულებია u' და v' შესაბამისად. როგორც ცნობილია:

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ uv ნამრავლი არის $u'v+uv'$ ჯამის პირველადი ფუნქცია. გამოდის, რომ

$$\int (u'v+uv')dx=uv+C,$$

საიდანაც

$$\int u'vdx+\int uv'dx=uv+C. \qquad (19)$$

მაგრამ, რადგან $u'dx=du$, $v'dx=dv$, ამიტომ (19) ტოლობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\int vdu+\int udv=uv+C.$$

გადავიტანოთ პირველი ინტეგრალი მარჯვენა ნაწილში. მივიღებთ

$$\int udv=uv-\int vdu+C. \qquad (20)$$

რადგან $\int vdu$ ინტეგრალი შეიცავს ნებისმიერ მუდმივს, C შესაკრებიც შეიძლება ამ მუდმივს მივუერთოთ. ვღებულობთ **ნაწილობითი ინტეგრების** შემდეგ **ფორმულას**

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu} \qquad (21)$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს იგივეობას, რომელიც მართებულია u და v ფუნქციების ნებისმიერი წყვილისათვის, ზოგიერთ შემთხვევაში (21) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი ინტეგრალი უფრო მარტივია, ვიდრე მარცხენა ნაწილში მოთავსებული ინტეგრალი. მაშინ (21) ფორმულის გამოყენება ხელსაყრელია.

დავუკვირდეთ (21) ფორმულის სტრუქტურას. მარცხენა ინტეგრალიდან მარჯვენა ინტეგრალზე გადასვლის დროს u მამრავლი იცვლება du დიფერენციალით. ე. ი. ხდება u-ს **გაწარმოება**. ხოლო dv დიფერენციალი იცვლება v ფუნქციით ე. ი. ხდება dv-ს **ინტეგრება***. აბსტრაქტული მსჯელობით მოსალოდნელია, რომ მოცემული ინტეგრა-

* აქ ხდება არა მთელი ინტეგრალქვეშა გამოსახულების udv-ს ინტეგრება. არამედ მხოლოდ **მისი** dv **ნაწილისა**. სწორედ ამით აიხსნება ტერმინი „**ნაწილობითი** ინტეგრება“.

ლის გამარტივება შეიძლება მოხდეს აღნიშნული ოპერაციებიდან ნებისმიერი მათგანის გამოყენებით. სინამდვილეში, უმეტეს შემთხვევაში, გამარტივება ხდება u-ს გაწარმოების შედეგად. ამგვარად, თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეიცავს მამრავლს, რომელიც მარტივდება გაწარმოებით, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ (21) ფორმულა. ამ შემთხვევაში u-თი უნდა აღინიშნოს ეს მამრავლი, ხოლო ყველა დანარჩენი (dx-ის ჩათვლით), აღინიშნოს dv-თი.

მაგალითად, ვთქვათ,

$$I=\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეიცავს $\ln x$ მამრავლს, რომლის წარმოებული $\frac{1}{x}$ ბევრად უფრო მარტივია, ვიდრე $\ln x$. ამიტომ უნდა დავუშვათ რომ $\ln x=u$, $\sqrt[3]{x^2}\,dx=dv$. აქედან ვღებულობთ $du=\frac{dx}{x}$, შემდეგ უნდა ვიპოვოთ v. ე. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$dv=\sqrt[3]{x^2}dx \tag{22}$$

გამოსახულებიდან.

როგორც ყოველთვის, გვაქვს v ფუნქციათა უსასრულო სიმრავლე, რომელთა დიფერენციალია (22). ამ ფუნქციათა ზოგადი სახეა

$$v=\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C\,. \tag{23}$$

მაგრამ უნდა ვისარგებლოთ (21) იგივეობით. ამისათვის არაა აუცილებელი (23) ტოლობით გამოსახული ფუნქციების მთელი სიმრავლის მოყვანა, არამედ საკმარისია გამოვიყენოთ v ფუნქციის ერთ-ერთი მნიშვნელობა. ცხადია, ყველაზე მარტივია ის, რომელიც შეესაბამება $C=0$ მნიშვნელობას. ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$v=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$$

საზოგადოდ, ნაწილობითი ინტეგრების დროს dv-ს მიხედვით v ფუნქციის პოვნისას ნებისმიერი მუდმივი არ შემოაქვთ. დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ მაგალითს. (21) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$I=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\int\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\,\frac{dx}{x}. \tag{24}$$

რადგან

$$\int \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\,\frac{dx}{x}=\frac{3}{5}\int \sqrt[3]{x^2}dx=\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5}+C, \tag{25}$$

(24) ფორმულა გვაძლევს*

$$I=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

აი კიდევ ერთი მაგალითი:

$$I=\int xe^x\,dx.$$

აქ ერთადერთი მამრავლი, რომელიც მარტივდება გაწარმოებით არის x. აღვნიშნოთ ის u-თი, მაშინ

$$x=u, \qquad du=dx.$$
$$e^x dx=dv, \quad v=e^x.$$

(21) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

ანალოგიურად გამოითვლება

$$I=\int x^2\cos x dx$$

ინტეგრალი.

აქ

$$x^2=u, \qquad du=2xdx.$$
$$\cos xdx=dv, \quad v=\sin x$$

და

$$I=x^2\sin x-2\int x\sin xdx. \tag{26}$$

$$I_1=\int x\sin xdx$$

ინტეგრალი უფრო მარტივია, ვიდრე მოცემული ინტეგრალი ($\sin x$-ით $\cos x$-ის შეცვლას არა აქვს მნიშვნელობა, მაგრამ x^2-ის ნაცვლად გაჩნდა უფრო მარტივი მამრავლი x).

I_1 ინტეგრალისათვის კვლავ უნდა გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი. დავუშვათ,

$$x=u, \qquad du=dx,$$
$$\sin xdx=dv, \quad v=-\cos x.$$

---

* (24) და (25) ტოლობების საფუძველზე უნდა დავწეროთ არა „$+C$", არამედ „$-C$". მაგრამ C მუდმივის ნებისმიერობის გამო ნიშანს მნიშვნელობა არა აქვს.

ეს გვაძლევს

$$I_1=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

(26) ფორმულაში ამ გამოსახულების ჩასმით საბოლოოდ ვპოულობთ

$$I=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

სასარგებლოა შემდეგი 6 ტიპის ინტეგრალის დამახსოვრება, რომელთა გამოთვლა ხელსაყრელია ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით:

I. $\int x^n e^x dx$,	VI. $\int x^n \ln x\,dx$,
II. $\int x^n \sin x\,dx$,	V. $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$,
III. $\int x^n \cos x\,dx$,	VI. $\int x^n \arcsin x\,dx$.

I, II და III ინტეგრალებში u-დ უნდა ჩავთვალოთ x^n მამრავლი. ეს მოგვცემს მსგავს ინტეგრალს, რომელშიც x-ის ხარისხის მაჩვენებელი დაწეულია ერთი ერთეულით. n-ჯერ ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად, მივიღებთ ერთ-ერთს ცხრილის ინტეგრალებიდან:

$$\int e^x dx, \qquad \int \sin x\,dx, \qquad \int \cos x\,dx.$$

IV, V, VI ინტეგრალებში გაწარმოებით მარტივდება ტრანსცენდენტური მამრავლი (ე. ი. $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ $\arcsin x$), ამიტომ ის უნდა ჩავთვალოთ u-დ.

საილუსტრაციოდ გავარჩიოთ რამდენიმე მაგალითი.

1) $$I=\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$$

აქ

$$\operatorname{arctg} x=u, \qquad du=\frac{dx}{1+x^2},$$

$$x\,dx=dv, \qquad v=\frac{x^2}{2},$$

საიდანაც

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ასე გამოითვლება:

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arctg} x+C.$$

---

* კვლავ ვწერთ—$2C$-ს მაგიერად C-ს. შემდეგში ასეთ განმარტებებს გამოვტოვებთ.

მაშასადამე, .

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

2)

$$I=\int \operatorname{arctg}x\,dx.$$

აქ

$$\operatorname{arctg} x=u, \qquad du=\frac{dx}{1+x^2},$$

$$dx=dv, \qquad v=x.$$

ამ მაგალითის საინტერესო თავისებურებას წარმოადგენს ის, რომ u-თი აღნიშნულია მთელი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ოლო du-თი კი მხოლოდ—dx.

(21) ფორმულა გვაძლევს

$$I=x \operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}.$$

მაგრამ

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

საიდანაც

$$I=x \operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

აი კიდევ ორი მაგალითი იგივე თავისებურებით.

3)

$$I=\int \ln x\,dx.$$

დავუშვათ,

$$\ln x=u, \quad du=\frac{dx}{x},$$

$$dx=dv, \qquad v=x.$$

აქედან

$$I=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$$

4)

$$I=\int \arcsin x\,dx.$$

დავუშვათ,

$$\arcsin x = u, \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$dx = dv, \qquad v = x.$$

აქედან

$$I = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

მაგრამ

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

მაშასადამე,

$$I = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

ყველა განხილულ მაგალითში მივყვებოდით ზოგად მითითებას: u-თი აღნიშნული იყო მამრავლი, რომელიც მარტივდება გაწარმოებით. ახლა გადავუხვიოთ ამ მითითებას. ვთქვათ,

$$I = \int xe^x dx.$$

ზემოთ ეს ინტეგრალი გამოვთვალეთ იმ პირობით, რომ $u = x$, $dv = e^x dx$. ახლა u-თი აღვნიშნოთ e^x, თუმცა ის არ მარტივდება გაწარმოებით, მაშინ

$$e^x = u, \qquad du = e^x dx,$$

$$xdx = dv, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

და

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx.$$

მართალია ეს ტოლობა მართებულია, მაგრამ ის არ არის ხელსაყრელი, რადგან მარჯვენა ინტეგრალი უფრო რთულია, ვიდრე მარცხენა.

8. ინტეგრალის დაყვანა თავის თავზე

ზემოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი გამოვიყენეთ იმ შემთხვევებში, როცა მიღებული ინტეგრალი უფრო მარტივია, ვიდრე მოცემული. შესაძლებელია მოხდეს ისეც, რომ მიღებული (მარჯვენა) ინ-

ტეგრალი ზუსტად ტოლი აღმოჩნდეს მოცემული (მარცხენა) ინტეგრალის. მაგალითად, ვთქვათ,

$$I=\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

დავუშვათ,* რომ

$$\ln x=u,\quad du=\frac{dx}{x},$$

$$\frac{dx}{x}=dv,\quad v=\ln x.$$

მაშინ (21) ფორმულა გვაძლევს

$$I=\ln^2 x-\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

მარჯვნივ მივიღეთ კვლავ I ინტეგრალი. ამიტომ

$$I=\ln^2 x-I, \tag{27}$$

საიდანაც**

$$2I=\ln^2 x+C.$$

და

$$I=\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$$

ამგვარად, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენება შეიძლება მაშინაც, როდესაც (21) ტოლობაში ინტეგრალები ერთმანეთს ემთხვევა. უფრო ზოგადად შეიძლება ითქვას, რომ (21) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ I ინტეგრალი, ყოველთვის, როდესაც ვღებულობთ

$$I=uv-aI \tag{28}$$

ტოლობას, სადაც $a\neq-1$ მუდმივია. მართლაც, (28) ტოლობა წარმოადგენს I-ს მიმართ განტოლებას, საიდანაც

$$I=\frac{uv}{1+a}\quad C.$$

---

* ეს მაგალითი მოყვანილია მხოლოდ საილუსტრაციოდ. ის გაცილებით უფრო მარტივად გამოითვლება ჩასმის ხერხით

$$I=\int \ln x\, d(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$$

** თითოეული ინტეგრალი (27) ტოლობაში წარმოადგენს $F(x)+C$ სახის გამოსახულებას, სადაც $F(x)$ არის $\frac{\ln x}{x}$ ფუნქციის პირველადი, ხოლო C — ნებისმიერი მუდმივი, რომელიც შეიძლება არჩეულ იქნას აღნიშნული ინტეგრალებისათვის სხვადასხვანაირად. ამიტომ ეს ინტეგრალები შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდნენ მუდმივით.

ამ შემთხვევაში ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებას უწოდებენ „ინტეგრალის თავის თავზე დაყვანას".

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $I=\int \sqrt{x^2+m}\, dx.$

დავუშვათ,

$$\sqrt{x^2+m}=u, \quad du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+m}},$$

$$dx=dv, \quad v=x.$$

მაშინ

$$I=x\sqrt{x^2+m}-\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+m}}. \tag{28ა}$$

მაგრამ

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int \frac{(x^2+m)-m}{\sqrt{x^2+m}}dx=\int \sqrt{x^2+m}\,dx-m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

აქედან და (28 ა) -დან გამომდინარეობს

$$I=x\sqrt{x^2+m}-I+m\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

მაშასადამე,

$$2I=x\sqrt{x^2+m}+m\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

საბოლოოდ

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+m}+\frac{m}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

2)

$$I=\int e^x\cos xdx$$

დავუშვათ,

$$e^x=u, \qquad du=e^xdx,$$

$$\cos xdx=dv, \qquad v=\sin x.$$

მაშინ

$$I=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx. \tag{29}$$

მარჯვნივ მივიღეთ იგივე სირთულის ინტეგრალი, როგორც მოცემულია. ეს გარემოება ხშირად მიგვითითებს რომ მოცემული ინტეგრალი შეიძლება კვლავ თავის თავზე დავიყვანოთ. ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი

$$I^*=\int e^x\sin xdx$$

ინტეგრალისათვის.

დავუშვათ,

$$e^x=u, \qquad du=e^x dx,$$
$$\sin x dx=dv, \qquad v=-\cos x.$$

მივიღებთ

$$I^*=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx=-e^x \cos x+I. \tag{30}$$

ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (29)-ში,

$$I=e^x\sin x+e^x\cos x-I,$$

საიდანაც

$$I=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C. \tag{31}$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ გამოვთვალეთ I^* ინტეგრალი, რადგან (30) და (31) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$I^*=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C.$$

9. ინტეგრალები, რომლებიც არ აიღება ელემენტარულად

უკვე გაგვაჩნია ინტეგრების ხერხების საკმაო მარაგი, მაგრამ არც ერთი ხერხით არ გამოითვლება

$$I=\int x\text{tg}\, x dx \tag{32}$$

ინტეგრალი. უფრო მეტიც, შეიძლება წინასწარ ვთქვათ, რომ ინტეგრების ტექნიკის შემდგომი განვითარებაც კი არ მოგვცემს (32) ინტეგრალის გამოთვლის საშუალებას. ამასთან დაკავშირებით უნდა შევჩერდეთ ზოგიერთ საკითხზე. დიალექტიკური მატერიალიზმი გვასწავლის, რომ სამყარო პრინციპულად შეცნობადია. საგნები, რომლებიც დღეს არ არის შეცნობილი, შეცნობილი იქნება მოგვიანებით, ჩვენი შეცნობადობისათვის საზღვრების დადგენა შეუძლებელია. საწინააღმდეგო, ანტიმარქსისტულ მეცნიერებას—აგნოსტიციზმს, რომელიც ზღუდავს ჩვენი შემეცნების საზღვრებს, უარყოფს მეცნიერების განვითარება. მე-19 საუკუნეში ფილოსოფოსი ო. კონტი აცხადებდა, რომ ადამიანები ვერასოდეს ვერ გაიგებენ ვარსკვლავების ქიმიურ შედგენილობასო. მაგრამ ამის შემდეგ დადგენილი იქნა სპექტრული ანალიზის მეთოდი, რომელიც იმდენად ზუსტად შეისწავლის ვარსკვლავების ქიმიურ სტრუქტურას, რომ ელემენტი ჰელიუმი დედამიწაზე ადრე აღმოჩენილი იყო მზეზე. ახლა ამ ელემენტს ფართოდ იყენებენ ტექნიკაში.

იქმნება ბუნებრივი საშიშროება—თითქოს მტკიცება, რომ (32) ინტეგრალი არასოდეს არ მოიძებნება, აგნოსტიციზმისათვის დამახასიათებელი შეცდომაა. სინამდვილეში ეს ასე არ არის. ჩვენ ხშირად ზოგიერთ ჭეშმარიტ აზრს გამოვთქვამთ, მისი საწინააღმდეგო აზრის უარყოფის ფორმით. მაგალითად, კარგად ცნობილია, რომ სამკუთხედის* კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია. ეს ჭეშმარიტება შეიძლება ასეც გამოვთქვათ „ადამიანები ვერასოდეს ვერ შესძლებენ ისეთი სამკუთხედის აგებას, რომლის კუთხეების ჯამი არ უდრის 180°-ს." ცხადია, რომ არავითარი აგნოსტიციზმი აქ არა გვაქვს, რადგან კონტი ეყრდნობოდა თავის უცოდინარობას ვარსკვლავების შედგენილობის შესახებ (და აქცევდა მას დოგმად), ჩვენ კი ვეყრდნობით ჩვენს ც ო დ ნ ა ს იმის შესახებ, რომ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია (ეს ჭეშმარიტება, რომ არ ვიცოდეთ, მაშინ ვერ ვიტყოდით, რომ არ შეიძლება ხსენებული სამკუთხედის აგება).

გავარჩიოთ ახლა, თუ რა საფუძველი გვაქვს იმისა, რომ (32) ინტეგრალი არასოდეს არ მოიძებნება. უპირველეს ყოვლისა იბადება აზრი, რომ „არ არსებობს ფუნქცია, რომლის წარმოებულია $x \operatorname{tg} x$". ეს არ არის სწორი, რადგან $x \operatorname{tg} x$ უწყვეტია მაგალითად $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში, მაშინ მას ამ შუალედში ექნება პირველადი. ამგვარად, ფუნქციას აქვს პირველადი, მაგრამ მისი მოძებნა შეუძლებელია. მაშ რაშია საქმე?

აქ აუცილებელია სიტყვის — „მოძებნა" შინაარსის დაზუსტება. სასარგებლოა შემდეგი მაგალითის განხილვა. წარმოვიდგინოთ, რომ ადამიანებმა ვერ შესძლეს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემოღება. ეს არ შეუშლიდა ხელს დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის შექმნას. შესაძლებელი იქნებოდა ცვლადის, ზღვრის, ფუნქციის ცნებების შემოღება. თეორემა, რომ ჯამის ზღვარი შესაკრებთა ზღვრების ჯამის ტოლია, არავითარ ტრიგონომეტრიას არ მოითხოვს. წარმოებულის განსაზღვრა, როგორც $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდების ზღვრისა,** ასევე არ მო-

---

* ლაპარაკია ევკლიდის სიბრტყეზე მდებარე სამკუთხედზე. თუ სამკუთხედი სფეროს ზედაპირზე მდებარეობს, მაშინ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი მეტია 180°-ზე, ხოლო ლობაჩევსკის სიბრტყეზე მდებარე სამკუთხედისათვის, ხსენებული ჯამი ნაკლებია 180°-ზე.

** ამასთან, ჩვენს მიერ ასეთნაირად წარმოდგენილ მათემატიკაში უკვე ვერ ვიტყოდით, რომ წარმოებული წარმოადგენს მხების Ox ღერძთან დახრის კუთხის ტ ა ნ გ ე ნ ს ს.

ითხოვს ტრიგონომეტრიის* ცოდნას. ასეთი „ღარიბი“ მათემატიკის განვითარების შედეგად მაინც გვექნებოდა შემდეგი სახის ფორმულები

$$(x^2)'=2x, \quad (\ln x)'=\frac{1}{x},$$

და მაშასადამე, მათი ტოლფასი ფორმულებიც

$$\int 2xdx=x^2+C, \qquad \int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$$

ამგვარად, ამ მათემატიკაში, ისევე როგორც ჩვენს მათემატიკაში, გაჩნდებოდა ინტეგრალის გამოთვლის პრობლემა. რასაკვირველია

$$\int \cos x dx$$

ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ ლაპარაკიც შეუძლებელი იქნებოდა, რადგან ეს ინტეგრალი მოგვცემდა სიმბოლოების* უაზრო შეერთებას. ამ „ღარიბ“ მათემატიკაშიც კი შეიძლება დაისვას ამოცანა

$$\int\frac{dx}{1+x^2}. \tag{33}$$

ინტეგრალის მოძებნის შესახებ, რადგან $\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის აგება არ მოითხოვს ცნობებს ტრიგონომეტრიიდან. ამავე დროს ამ ინტეგრალის მოძებნა ტრიგონომეტრიის გარეშე შეუძლებელია, რადგან

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C.$$

როგორც ვხედავთ, საკითხი იმის შესახებ მოიძებნება თუ არა ესა თუ ის ინტეგრალი, ღებულობს სხვადასხვა აზრს, იმის მიხედვით თუ რომელი ფუნქციებით გვინდა პასუხის ჩაწერა. თანამედროვე მათემატიკაში არჩეულია მარტივი ფუნქციების (ზემოთ მათ ვუწოდეთ ელემენტარული ფუნქციები) გარკვეული მარაგი, და სწორედ ამ ფუნქციებით გვინდა გამოვსახოთ ინტეგრალები, რომლებიც გვხვდება. ამგვარად, თქმა იმისა, რომ (32) ინტეგრალი „არ მოიძებნება“ ნიშნავს რომ ის არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით. რასაკვირველია, თუ ელემენტარულ ფუნქციათა სიმრავლეს გავაფართოებთ, მაშინ ფუნქციათა ამ ფართო კლასში შეიძლება მოინახოს (32) ინტეგრალიც. ვერ ვიწინასწარმეტყველებთ გაფართოვდება თუ არა შემდეგ-

---

* ჩვენ ხომ ვერ განვიხილავთ $\int$ ციც $(x)dx$ „ინტეგრალს“ რადგანაც ციც(x) უაზრობაა.

ში (თუ გაფართოვდება. მაშინ როგორ!) ელემენტარულ ფუნქციათა კლასი. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ ელემენტარულ ფუნქციათა კლასის გაფართოება საბოლოოდ ნაკლებად პერსპექტიულია. თუ დავუბრუნდებით მაგალითს „მათემატიკა ტრიგონომეტრიის გარეშე“ — დავინახავთ, რომ ამ მათემატიკაში (33) ინტეგრალი არ გამოისახება ფუნქციებით, რომლებიც მიჩნეულია ელემენტარულ ფუნქციებად. თუ ფუნქციათა ამ კლასს გავაფართოებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ხარჯზე, მაშინ (33) ინტეგრალის მოძებნა შესაძლებელი იქნება, მაგრამ მაშინ ჩნდება (32) ინტეგრალი (რომელიც არა გვაქვს „ღარიბ“ მათემატიკაში!) და საჭირო გახდება ელემენტარულ ფუნქციათა მარაგის შემდგომი გაფართოება.

ბოლოს მოვიყვანთ რამდენიმე ინტეგრალს, რომლებიც არ წარმოადგენენ ელემენტარულ* ფუნქციებს. ასეთებია:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$$

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \sin x^2\,dx, \qquad \int \cos x^2\,dx, \qquad \int \sqrt{x^3+1}\,dx,$$

$$\int \sqrt{\sin x}\,dx, \qquad \int \ln \sin x\,dx.$$

თავისთავად ცხადია, რომ ამოცანათა კრებულებში ასეთი ინტეგრალები არ შეაქვთ**. მაგრამ საინჟინრო პრაქტიკაში ისინი გვხვდება ძალიან ხშირად. განსაზღვრული ინტეგრალების შესწავლისას მითითებული იქნება, თუ როგორ იქცევიან იმ შემთხვევებში, როცა კონკრეტულ ამოცანას მივყავართ ინტეგრალამდე, რომელიც „არ აიღება“ ელემენტარულ ფუნქციებში.

§ 2. რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

1. საკითხის დაყენება

წინა პარაგრაფში აღნიშნული იყო, რომ ელემენტარული ფუნქციიდან აღებული განუსაზღვრელი ინტეგრალი ყოველთვის არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. ამასთან დაკავშირებით, ბუნებრივია,

* ზოგჯერ ამბობენ, რომ ეს ინტეგრალები „არ აიღება“ ან „არ აიღება სასრული სახით“.

** ძალიან ძნელია იმის დამტკიცება, რომ ესა თუ ის ინტეგრალი არ არის ელემენტარული. ამ საკითხზე ბევრს მუშაობდნენ წინა საუკუნის ისეთი მათემატიკოსები, როგორიც არიან აბელი (ნორვეგია). ლიუვილი (საფრანგეთი), პ. ჩებიშევი (რუსეთი), ე. ზოლოტარიევი (რუსეთი), ერმიტი (საფრანგეთი) და სხვები.

გამოიყოს ელემენტარულ ფუნქციათა კლასები, რომელთაგან აღებული განუსაზღვრელი ინტეგრალი კვლავ ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენს. ასეთი კლასებიდან მნიშვნელოვანია რაციონალურ ფუნქციათა კლასი, ანუ შემდეგი სახის წილადები

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}. \tag{1}$$

კერძოდ, ამ კლასს მიეკუთვნება მთელი რაციონალური მრავალწევრები*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{2}$$

(1) წილადის ინტეგრებისათვის ცდილობენ მის წარმოდგენას უფრო მარტივი წილადების ჯამის სახით. მაგალითად, ადვილად, შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{10x-23}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-2}+\frac{7}{x-3},$$

საიდანაც

$$\int\frac{10x-23}{x^2-5x+6}dx=3\int\frac{dx}{x-2}+7\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=3\ln(x-2)+7\ln(x-3)+C.$$

ამ ხერხის გამოსაყენებლად, უნდა შეგვეძლოს (1) წილადის დაშლა მარტივ წილადებად, რაც სუფთა ალგებრული ამოცანაა. სწორედ ეს უნდა შევისწავლოთ შემდეგ ქვეპარაგრაფებში.

2. ზოგიერთი ცნობა ალგებრული მრავალწევრის შესახებ

განვიხილოთ

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q$$

სახის ალგებრული მრავალწევრების თვისებები (სადაც $A, B, \ldots, P$, Q კოეფიცენტები ნამდვილი რიცხვებია). ასეთ მრავალწევრებს ვუწოდებთ „ნამდვილ" მრავალწევრებს. ამ მრავალწევრების თვისებები უცვლელი დარჩება მაშინაც, თუ წევრებს მუდმივ და ნულისგან განსხვავებულ მამრავლებზე გავამრავლებთ. ამიტომ სიმარტივისათვის შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ უფროსი კოეფიციენტი $A=1$. ამგვარად, ჩვენ შევისწავლოთ

$$x^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q \tag{3}$$

„ნამდვილ" მრავალწევრებს.

---

* (1) წილადი აღმოჩნდება (2) სახის მრავალწევრი, თუ $m=0$.

მათ შორის ყველაზე მარტივია პ ი რ ვ ე ლ ი ხარისხის მრავალწევრი, ანუ წ რ ფ ი ვ ი მრავალწევრი. ამ მრავალწევრს აქვს შემდეგი სახე

$$x-a. \tag{4}$$

ცხადია, რომ: 1) ამ მრავალწევრის ერთადერთი ამონახსნია ნამდვილი a რიცხვი; 2) (4) მრავალწევრი არ შეიძლება დაიშალოს მამრავლებად *.

წრფივი მრავალწევრების შემდეგ, სირთულის მიხედვით მოდის კვადრატული სამწევრები**

$$x^2+px+q. \tag{5}$$

ელემენტარული ალგებრიდან ცნობილია, რომ (5) სამწევრი იშლება მამრავლებად შემდეგნაირად:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2), \tag{6}$$

სადაც x_1 და x_2 ამ სამწევრის ამონახსნებია. თუ ეს ამონახსნები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ $x-x_1$ და $x-x_2$ მამრავლებიდან თითოეული არის მრავალწევრი ნამდვილი კოეფიციენტებით. თუ x_1 და x_2 წარმოსახვითი რიცხვებია (ე. ი. კომპლექსური რიცხვები ნულისგან განსხვავებული წარმოსახვითი ნაწილით), მაშინ (5) სამწევრს ვერ დავშლით ნამდვილ მამრავლებად. მართლაც, განვიხილოთ სამწევრი

$$x^2-8x+25 \tag{7}$$

წარმოსახვითი ამონახსნებით

$$x_{1,2}=4\pm 3i.$$

ამ სამწევრის დაშლა შესაძლებელი რომ ყოფილიყო ნამდვილ წრფივ მამრავლებად, ანუ

$$x^2-8x+25=(x-a)(x-b) \tag{8}$$

ნამრავლის სახით, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია. მაშინ, x-ის მა-

---

* აქ ლაპარაკია მამრავლებზე, რომლებიც (3) მრავალწევრის სახისაა. სხვანაირად შესაძლებელია დაშლა მრავალი სახით, მაგალითად

$$x-a=\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-a}=\frac{x-a}{x^3}\cdot x^3=\frac{x-a}{\sin x}\cdot\sin x=\frac{x-a}{e^x}\cdot e^x.$$

და სხვა, მაგრამ (3) სახის მრავალწევრების დაშლა შეუძლებელია, რადგან მრავალწევრების გამრავლების შედეგად ხარისხის მაჩვენებლები იკრიბება. მაშასადამე, დაშლის შედეგად მიღებული მამრავლების ხარისხი უნდა იყოს 1-ზე ნაკლები, რასაც აზრი არა აქვს ჩვენს პირობებში.

** x^2+q ორწევრი განიხილება, როგორც (5) ს ა მ წ ე ვ რ ი ს კერძო სახე, სადაც $p=0$.

გივრად a და b რიცხვების ჩასმით (8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი, და მაშასადამე, მარცხენა ნაწილიც, გაუტოლდება 0-ს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, a და b რიცხვები (7) სამწევრის ნამდვილი ამონახსნები იქნებოდა, მაშინ როცა (7) მრავალწევრს ნამდვილი ამონახსნები არა აქვს. ასე შეიძლება ვიმსჯელოთ (5) სახის ყოველი სამწევრისათვის, რომელსაც აქვს წარმოსახვითი ამონახსნები.

ამგვარად, (5) სამწევრი შეიძლება დაიშალოს ან არ დაიშალოს ნამდვილ წრფივ მამრავლებად, იმის მიხედვით, ნამდვილია თუ წარმოსახვითი მისი ამონახსნები.

გადავედივართ მესამე ხარისხის ნამდვილ მრავალწევრებზე: ბუნებრივია ველოდოთ, რომ ეს მრავალწევრები დაიშლება, ან არ დაიშლება უფრო ნაკლები ხარისხის მრავალწევრებად. სინამდვილეში არ არსებობს მესამე ხარისხის მრავალწევრი, რომლის დაშლა არ შეიძლება მამრავლებად. უფრო მეტიც, ადგილი აქვს შემდეგ შესანიშნავ თეორემას

თეორემა. ნებისმიერი ნამდვილი მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ორზე მეტია, შეიძლება დაიშალოს წრფივ და კვადრატულ მამრავლებად.

ამ თეორემას (რომელიც დაამტკიცა გამოჩენილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა გაუსმა*) სამართლიანად უწოდებენ „ალგებრის ძირითად თეორემას". მას მივიღებთ დაუმტკიცებლად**.

ამგვარად, (3) სახის ყოველი $P(x)$ მრავალწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\dots, \tag{9}$$

სადაც $a, b, c, \dots, p, q, r, s, \dots$ ნამდვილი რიცხვებია. ცხადია, $a, b, c, \dots$ $P(x)$ მრავალწევრის ამონახსნებია, რადგან მათი ჩასმით (x-ის მაგივრად) (9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი (მაშასადამე, მარცხენა ნაწილიც) გადაიქცევა ნულად. რაც შეეხება x^2+px+q, x^2+rx+s, კვადრატულ სამწევრებს, იგულისხმება, რომ მათ აქვთ წარმოსახვითი ამონახსნები, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, ამ კვადრატულ სამწევრებს დავშლიდით წრფივ მამრავლებად, ეს ამონახსნები ამავე დროს $P(x)$ მრავალწევრის ამონახსნებიცაა. (9) ტოლობაში ზოგიერთი მამრავლი შეიძლება ერთმანეთის ტოლი აღმოჩნდეს. მაშინ $P(x)$ შეიძლება ასეთი სახით წარმოვადგინოთ

$$\boxed{P(x)=(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\pi (x^2+rx+s)^\rho \dots} \tag{10}$$

* K. F. Gauss (1777—1855).

** კიდევაც რომ დავამტკიცოთ ეს თეორემა, სულერთია ვერ მივიღებთ მრავალწევრების მამრავლებად დაშლის რაიმე ხერხს.

აქ უკვე ყველა მამრავლი განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. თუ $\alpha=1$, მაშინ ამბობენ, რომ a არის $P(x)$ მრავალწევრის მ ა რ ტ ი ვ ი ამონახსნი, ხოლო თუ $\alpha>1$, მაშინ a-ს ეწოდება α ჯერადობის ამონახსნი. ასეთივე ტერმინოლოგია იხმარება $P(x)$ -ის წარმოსახვითი ამონახსნების მიმართ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თუ

$$P(x)=(x+2)(x-1)^2(x-5)^3(x^2-8x+25)(x^2+1)^4,$$

მაშინ, $x=-2$, არის $P(x)$-ის მარტივი ამონახსნი. $x=1$ — არის ორჯერადი (ანუ ო რ მ ა გ ი) ამონახსნი' $x=5$ — არის სამჯერადი (ან ს ა მ მ ა გ ი) ამონახსნი. $x^2-8x+25$ სამწევრის ამონახსნები (ანუ $x_{1,2}=4\pm3i$ რიცხვები) $P(x)$-ის მარტივი წარმოსახვითი ამონახსნებია. ბოლოს x^2+1 სამწევრის ამონახსნები (ანუ $x_{1,2}=\pm i$) $P(x)$-ის ოთხჯერადი ამონახსნებია.

3. რაციონალური წილადის დაშლა მარტივ წილადებად

განვიხილავთ შემდეგი სახის რაციონალურ წილადებს

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L}{Mx^m+Nx^{m-1}+\ldots+Rx+S}, \tag{11}$$

სადაც მრიცხველი და მნიშვნელი ნამდვილი მრავალწევრებია, ანუ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია. ამ პირობებში თვით (11) წილადებსაც ვუწოდებთ ნამდვილ წილადებს.

წილადს ეწოდება წ ე ს ი ე რ ი თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე. როცა ეს ხარისხები ტოლია, ან მრიცხველის ხარისხი მეტია მნიშვნელის ხარისხზე, მაშინ წილადს ეწოდება ა რ ა წ ე ს ი ე რ ი მაგალითად, შემდეგი წილადებიდან.

$$\frac{2x^2-1}{x^3-4x+7}, \qquad \frac{x^2}{x^2+2}, \qquad \frac{x^3+1}{x^2+2x+5}$$

პირველი — წესიერია, ხოლო მეორე და მესამე — არაწესიერი. თუ არაწესიერი წილადის მრიცხველს გავყოფთ მნიშვნელზე (გაყოფა მოხდება ნაშთით, რადგან იგულისხმება, რომ წილადი უ კ ვ ე ც ი ა). მაშინ წილადი წარმოგვიდგება მთელი მრავალწევრისა* და წესიერი წილადის ჯამის სახით.

მაგალითად,

$$\frac{x^2}{x^2+2}=1+\frac{-2}{x^2+2}, \qquad \frac{x^3+1}{x^2+2x+5}=x-2+\frac{-x+11}{x^2+2x+5}$$

* რომელიც კერძოდ შეიძლება აღმოჩნდეს მუდმივი სიდიდე.

რადგან მთელი მრავალწევრის ინტეგრება ადვილად ხდება, ამიტომ ქვემოთ განვიხილავთ წესიერ წილადებს. გამარტივების მიზნით განვიხილავთ იმ შემთხვევებს, როდესაც მნიშვნელს აქვს მარტივი ან ჯერადი ნამდვილი და მარტივი წარმოსახვითი ამონახსნები. შემთხვევები, როდესაც მნიშვნელს აქვს წარმოსახვითი ჯერადი ამონახსნები, განიხილება უფრო სრულ კურსებში.

ამგვარად, შევისწავლით წესიერ ნამდვილ წილადებს*

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\ldots}. \tag{12}$$

მნიშვნელის სახე გვიკარნახებს, რომ (12) წილადი მიღებულია უფრო მარტივი წილადების შეკრების შედეგად, რომელთაც უნდა ჰქონდეთ შემდეგი სახე

$$\frac{\ldots}{(x-a)^{\alpha}},\quad \frac{\ldots}{(x-b)^{\beta}},\quad \frac{\ldots}{x^2+px+q},\quad \frac{\ldots}{x^2+rx+s},\ldots \tag{13}$$

ამ წილადების მრიცხველები ჩვენთვის უცნობია, მაგრამ რადგან (12) წილადი წესიერია, უნდა ვიგულისხმოთ, რომ (13) წილადებიც წესიერია. ამის მკაცრი დამტკიცებაც შეიძლება. ამგვარად, (12) წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\frac{P_a(x)}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{P_b(x)}{(x-b)^{\beta}}+\cdots+\frac{Px+Q}{x^2+px+q}+\frac{Rx+S}{x^2+rx+s}+\cdots \tag{14}$$

სადაც $P_a(x)$, $P_b(x)$, უცნობი მრავალწევრებია, რომელთა ხარისხები ნაკლებია შესაბამისად α, β, რიცხვებზე, P, Q, R, S,... რიცხვებიც ჯერჯერობით უცნობია.

განვიხილოთ ახლა ცალკეული წილადები

$$\frac{P_a(x)}{(x-a)^{\alpha}}. \tag{15}$$

მისი მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია α-ზე, ამიტომ შეიძლება ის ასე ჩაიწეროს

$$P_a(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{\alpha-1}x^{\alpha-1}. \tag{16}$$

მაგრამ III თავში (§ 7, 2) დავამტკიცეთ, რომ (16) სახის ყოველი მრავალწევრი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$P_a(x)=A_0+A_1(x-a)+\ldots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}$$

---

* ვიგულისხმოთ, რომ მნიშვნელის უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, რადგან ამის მიღწევა ყოველთვის შეიძლება წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის უფროს კოეფიციენტზე გაყოფით.

თუ ამას გავითვალისწინებთ (15) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\frac{P_a(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a},$$

სადაც $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}$ მრიცხველები რაღაც მუდმივებია. ანალოგიურად შეიძლება წარმოვადგინოთ ყველა $\frac{P_b(x)}{(x-b)^\beta}$ წილადი. აქედან გამომდინარე ვღებულობთ, რომ (12) სახის წესიერი ნამდვილი წილადებისათვის ადგილი აქვს შემდეგი სახის *უფრო მარტივ წილადებად დაშლას*:

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\dots(x^2+px+q)\dots}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\dots+\frac{Px+Q}{x^2+px+q}+\dots} \tag{17}$$

აქ $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}, \dots$ მრიცხველები და აგრეთვე $P, Q, \dots$ — რიცხვები (ჯერჯერობით უცნობი) რაღაც მუდმივებია. საჭიროა ვიპოვოთ ეს კოეფიციენტები. ეს საკითხი განვიხილოთ მაგალითებზე.

1) (17) ტოლობის საფუძველზე გვაქვს

$$\frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}. \tag{18}$$

გავამრავლოთ ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხენა ნაწილის მნიშვნელზე. ეს მოგვცემს იგივეობას

$$2x^2-3x+2=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2. \tag{19}$$

რადგან (19) წარმოადგენს იგივეობას, მას ადგილი აქვს $x=2$ მნიშვნელობისთვისაც. ამ მნიშვნელობის ჩასმა გვაძლევს

$$4=C$$

ამგვარად, $C=4$. ახლა (19) ტოლობაში $x=1$ ჩასმით, ვპოულობთ

$$1=-A.$$

საიდანაც $A=-1$. ამგვარად, x-ის* ხელსაყრელი კერძო მნიშვნელობის გამოყენებით, შევძელით ორი A და C კოეფიციენტის პოვნა. ამ ხერხს ეწო-

---

* $x=2$ და $x=1$ მნიშვნელობები ხელსაყრელია, იმიტომ, რომ მათი ჩასმით გამოირიცხება ყველა უცნობი გარდა ერთისა. ასეთი „ხელსაყრელი“ მნიშვნელობები მეტი არა გვაქვს. მაგრამ ჩვენ შეიძლება (19) ტოლობაში ჩავსვათ „არახელსაყრელი“ მნიშვნელობაც. მაგალითად, $x=3$. მაშინ მივიღებთ $11=A+2B+4C$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A=-1$, $C=4$, მივიღებთ $B=-2$.

დება „კერძო მნიშვნელობათა ხერხი“. B კოეფიციენტის საპოვნელად გამოვიყენოთ ე. წ. „კოეფიციენტების შედარების ხერხი“. სახელდობრ, გავუტოლოთ ერთმანეთს (19) ტოლობის ორივე ნაწილში მყოფი x^2-ის კოეფიციენტები

$$2=B+C.$$

აქედან მივიღებთ, რომ, რაკი $C=4$, ამიტომ $B=-2$.

2) დავშალოთ მარტივ წილადებად წილადი

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)(x^2+3)}.$$

ვიწყებთ (17) ფორმულის გამოყენებით:

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

აქედან

$$2x^2+1=A(x-1)(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x(x-1).$$

თუ დავუშვებთ, ჯერ, რომ $x=0$, ხოლო შემდეგ $x=1$, მივიღებთ $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{3}{4}$. შევადაროთ* x^3-ის კოეფიციენტები:

$$0=A+B+C.$$

აქედან $C=-\frac{5}{12}$. ბოლოს, x^2-ის კოეფიციენტების შედარებით მივიღებთ

$$2=-A-C+D.$$

ეს გვაძლევს $D=\frac{5}{4}$.

4) (17) ტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

აქედან

$$1=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1).$$

x-ის სხვადასხვა ხარისხის კოეფიციენტების შედარება გვაძლევს

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=B+D, \\ x & 0=2A+C, \\ 1 & 1=2B+D. \end{array}$$

---

* მკითხველს ვურჩევთ ისწავლოს x-ის ამა თუ იმ ხარისხების კოეფიციენტების პოვნა, მარჯვენა ნაწილში ფრჩხილების გახსნის გარეშე.

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს $A=C=0$, $B=1$, $D=-1$. მაშინ*

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}.$$

4. რაციონალური წილადების ინტეგრება

მე-3 ქვეპარაგრაფში ნათქვამის მიხედვით შეიძლება დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი რაციონალური წილადის (რომლის მნიშვნელს არ აქვს ჯერადი წარმოსახვითი ამონახსნები) ინტეგრებისათვის, საკმარისია ვიცოდეთ შემდეგი ოთხი სახის ფუნქციის ინტეგრება.

1) $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L$, 2) $\dfrac{A}{x-a}$, 3) $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ $(m>1)$,

4) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

პირველი სამი სახის გამოსახულებათა ინტეგრება ადვილია. მაგალითად,

1) $\int(5x^3+4x^2-7x+12)\,dx=\frac{5}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+12x+C.$

2) $\int\frac{9dx}{x-2}=9\ln(x-2)+C.$

3) $\int\frac{7dx}{(x+3)^5}=7\int(x+3)^{-5}\,dx=\frac{7}{-4}(x+3)^{-4}+C=\frac{-7}{4(x+3)^4}+C.$

ამიტომ შევჩერდებით მხოლოდ

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx. \tag{20}$$

სახის ინტეგრალებზე. ამასთან შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ x^2+px+q სამწევრის ამონახსნები წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ა, რადგან სხვანაირად ეს სამწევრი დაიშლებოდა წრფივ მამრავლებად და წილადი

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

* ეს დაშლა შეიძლება მივიღოთ უშუალოდ ასეთნაირად.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

კი — უფრო მარტივ წილადებად, ე. ი. მივიდოდით უკვე განხილულ შემთხვევებამდე *.

ალგებრიდან ცნობილია, რომ x^2+px+q სამწევრს აქვს წარმოსახვითი ამონახსნები, თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{p^2}{4}-q<0. \tag{21}$$

ამგვარად, ვთვლით, რომ სრულდება (21) პირობა. (20) ინტეგრალები ადვილად გამოითვლება ორ კერძო შემთხვევაში:

ა) $Ax+B$ არის x^2+px+q მნიშვნელის წარმოებული.

ბ) ინტეგრალქვეშა წილადის მრიცხველი არ არის დამოკიდებული x-ზე, ე. ი. $A=0$.

მართლაც, ა) შემთხვევაში (20) ინტეგრალი წარმოადგენს მნიშვნელის ლოგარითმს. მაგალითად,

$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,dx=\ln(x^2-6x+13)+C.$$

$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+30}\,dx=\ln(x^2+7x+30)+C.$$

ბ) შემთხვევაში (20) ინტეგრალი გამოითვლება არკტანგესის საშუალებით. ამისათვის x^2+px+q სამწევრიდან უნდა გამოვყოთ სრული კვადრატი და გამოვიყენოთ ინტეგრალთა ცხრილის XI ფორმულა.

მაგალითად,

$$I=\int \frac{11\,dx}{x^2-8x+25}=11\int \frac{dx}{(x^2-8x+16)+9}=11\int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+9},$$

საიდანაც

$$I=\frac{11}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-4}{3}+C.$$

ანალოგიურად

$$I=\int \frac{7\,dx}{x^2+5x+10}=7\int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=$$

$$=\frac{14}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+5}{\sqrt{15}}+C.$$

---

* კერძოდ, ასე გამოიყვანება XII ფორმულა. მართლაც,

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{x^2-8x+15}. \tag{22}$$

I-ს მიმართ იმავე ხერხის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=\int\frac{dx}{(x-4)^2+(-1)}.$$

მაგრამ ეს ინტეგრალი არ უდგება XI ფორმულას, რადგან არ შეგვიძლია — 1 ჩავთვალოთ a^2-ის ტოლად (ნამდვილ რიცხვთა არეში). საქმე იმაშია, რომ $x^2-8x+15$ სამწევრს აქვს ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ამონახსნები $x_1=3$ და $x_2=5$, ამიტომ (22) ინტეგრალი სხვანაირად უნდა გამოითვალოს.* დავამტკიცოთ ზოგადად, რომ ჩვენს მიერ რეკომენდებული ხერხი, ბ) შემთხვევაში კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფისა, მართლაც გვაძლევს (20) ინტეგრალის XI ფორმულამდე დაყვანის საშუალებას, თუ x^2+px+q სამწევრის ამონახსნები წარმოსახვითია.

მართლაც,

$$I=\int\frac{Bdx}{x^2+px+q}=B\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

ამონახსნების წარმოსახვითობა უზრუნველყოფს (21) უტოლობის შესრულებას, მაშინ $q-\frac{p^2}{4}>0$ და ეს რიცხვი შეიძლება მივიღოთ a^2-ის ტოლად.

(20) ინტეგრალი ზოგად შემთხვევაში ადვილად დაიყვანება ა) და ბ) შემთხვევებზე, თუ $Ax+B$ მრიცხველს გავყოფთ (შესაძლოა ნაშთით)

---

* სახელდობრ $\frac{1}{x^2-8x+15}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}$. აქედან $1=A(x-5)+B(x-3)$, თუ დავუშვებთ, რომ $x=5$ და $x=3$, მივიღებთ $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$.

მაშასადამე,

$$I=-\frac{1}{2}\ln(x-3)+\frac{1}{2}\ln(x-5)+C.$$

უფრო მარტივია XII ფორმულის გამოყენება

$$\int\frac{dx}{(x-4)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-4)-1}{(x-4)+1}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x-5}{x-3}+C.$$

x^2+px+q მნიშვნელის წარმოებულზე $2x+p$ გამოსახულებაზე და გამოვიყენებთ იგივეობას, „გასაყოფი უდრის გამყოფს გამრავლებულს განაყოფზე პლუს ნაშთი", $Ax+B$ გამოსახულების წარმოსადგენად.

მაგალითად,

$$I=\int \frac{6x+7}{x^2-6x+13}\,dx$$

საჭიროა $6x+7$ გავყოთ $(2x-6)$-ზე. ეს გვაძლევს $6x+7=3(2x-6)+25$. ამიტომ

$$I=3\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,dx+\int \frac{25\,dx}{x^2-6x+13}.$$

პირველი ინტეგრალი მარჯვნივ წარმოადგენს ა) შემთხვევას, ხოლო მეორე — ბ)-ს. ამგვარად, ელემენტარულ ფუნქციებში უკვე ვიცით ისეთი ნებისმიერი ნამდვილი წილადის ინტეგრება, რომლის მნიშვნელს არა აქვს ჯერადი წარმოსახვითი ამონახსნები. უკანასკნელი შეზღუდვა შემოვიღეთ სიმარტივის მიზნით. საზოგადოდ ადგილი აქვს თეორემას

თეორემა. ნებისმიერი ნამდვილი რაციონალური წილადიდან ინტეგრალი აიღება ელემენტარულ ფუნქციებში

§ 3. ზოგიერთ ირაციონალობათა ინტეგრება

1. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის რაციონალიზაცია

რაციონალური ფუნქციებისაგან განსხვავებით ინტეგრალები ირაციონალური გამოსახულებებიდან ყოველთვის არ აიღება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ირაციონალურ ფუნქციათა ზოგიერთ კერძო ტიპს, რომელთა ინტეგრება შეიძლება სასრული სახით.

უმეტეს შემთხვევაში ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება შესაძლებელი ხდება მისი რაციონალურ ფუნქციაზე დაყვანით რაიმე ჩასმის საშუალებით. ამ ხერხს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის რაციონალიზაცია, ხოლო ხსენებულ ჩასმის ხერხს კი—მარაციონალებელი ჩასმა. ამ მეთოდის არსი ვუჩვენოთ ჯერ მაგალითებზე.

ვთქვათ,

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x=z^2$, ვპოულობთ $dx=2zdz$. საიდანაც

$$I=\int \frac{2z^2}{1+z}dz=2\int \frac{z^2dz}{z+1}.$$

გვაქვს რაციონალური წილადის ინტეგრება. რადგან წილადი არაწესიერია, ამიტომ ვყოფთ მრიცხველს მნიშვნელზე (ნაშთით)

$$\begin{array}{l|l} z^2 & z+1 \\ \cline{2-2} \underline{z^2+z} & z-1 \\ -z & \\ \underline{-z-1} & \\ \quad 1 & \end{array}$$

ამგვარად,

$$\frac{z^2}{z+1}=z-1+\frac{1}{z+1} \quad \text{და} \quad I=z^2-2z+2\ln(z+1)+C$$

ახლა უნდა დავუბრუნდეთ ძველ x ცვლადს. თუ შევცვლით z-ს $\sqrt{x}$-ით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

ანალოგიურად ინტეგრალისათვის

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

მარაციონალებელი ჩასმა იქნება $x=z^3$, რადგან x აქ მხოლოდ კუბური ფესვის ქვეშ შედის. ამ ჩასმით ვღებულობთ

$$I=\int\frac{3z^2\,dz}{z+1}=3\int\left(z-1+\frac{1}{z+1}\right)dz=3\left[\frac{z^2}{2}-z+\ln(z+1)\right]+C,$$

საიდანაც

$$I=3\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\right]+C.$$

უფრო რთული გარემოებაა შემდეგი ინტეგრალისათვის

$$I=\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

აქ x შედის როგორც კვადრატული, ისე კუბური ფესვების ნიშნის ქვეშ. ამიტომ, ბუნებრივია უნდა დავუშვათ, რომ $x=z^6$. ეს გვაძლევს

$$I=\int\frac{6z^8dz}{z^2+1}=6\int\left(z^6-z^4+z^2-1+\frac{1}{z^2+1}\right)dz,$$

საიდანაც

$$I=6\left(\frac{z^7}{7}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^3}{3}-z+\operatorname{arc\,tg} z\right)+C.$$

ახლა საკმარისია z შევცვალოთ $\sqrt[6]{x}$-ით.

ამ მაგალითების განხილვის შემდეგ ცხადი ხდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ **წესს**:

თუ $f(u,v,w,\ldots)$ არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია*, ხოლო $a,b,\ldots,\alpha,\beta,\ldots$ მთელი დადებითი რიცხვებია, მაშინ ინტეგრალი

$$\int f\left(x, \sqrt[a]{x^\alpha}, \sqrt[b]{x^\beta},\ldots\right)dx \tag{1}$$

შეიძლება დავიყვანოთ ინტეგრალამდე რაციონალური ფუნქციიდან

$$\boxed{x=z^N} \tag{2}$$

ჩასმის საშუალებით, სადაც N არის $a, b,\ldots$ ფესვის მაჩვენებელთა საერთო უმცირესი ჯერადი.

მართლაც, (2) ჩასმის საშუალებით ინტეგრალში შემავალი ყველა რადიკალიდან ფესვი ამოვა.

მსგავსი ჩასმით შეიძლება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის რაციონალიზაცია უფრო ზოგად ინტეგრალში

$$\int f\left(x, \sqrt[a]{\left(\frac{Kx+L}{Px+Q}\right)^\alpha} \quad \sqrt[b]{\left(\frac{Kx+L}{Px+Q}\right)^\beta}, \ldots\right)dx, \tag{3}$$

სადაც f რაციონალური ფუნქციაა, $a,b,\ldots,\alpha,\beta,\ldots$ მთელი რიცხვებია, ხოლო K,L,P,Q მუდმივებია.

აქ უნდა დავუშვათ,

$$\boxed{\frac{Kx+L}{Px+Q}=z^N} \tag{4}$$

სადაც N, როგორც ზემოთ, $a,b,\ldots$ მაჩვენებლების საერთო უმცირესი ჯერადია.

(3) ინტეგრალი გარდაიქმნება (1) ინტეგრალად, როცა $K=1$, $L=0$, $P=0$, $Q=1$. მაშინ (4)-დან მიიღება (2).

---

* ანუ $f(u, v, w,\ldots)$ ფუნქციის საპოვნელად მის არგუმენტებზე უნდა შესრულდეს მხოლოდ არითმეტიკული ოპერაციები. ასეთია მაგალითად, ფუნქცია

$$\frac{u^2+2uv}{w^3+\sqrt{5}}.$$

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

1) ვთქვათ,

$$I=\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x+1=z^2$, მაშინ $dx=2zdz$. ვღებულობთ

$$I=\int \frac{2z^2dz}{z^2-1}=2\int\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=2z+\ln\frac{z-1}{z+1}+C.$$

მაშასადამე,

$$I=2\sqrt{x+1}+\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+C.$$

2) გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}\right)x^2}$$

აქ უნდა დავუშვათ $\dfrac{x}{x-1}=z^6$, მაშინ $x=\dfrac{z^6}{z^6-1}$, $dx=\dfrac{-6z^5}{(z^6-1)^2}dz$,

საიდანაც

$$I=-6\int\frac{dz}{z^4(z^2+1)}.$$

$\dfrac{1}{z^4(z^2+1)}$ წილადი დაიშლება მარტივ წილადებად შემდეგი სქემის* მიხედვით:

$$\frac{1}{z^4(z^2+1)}=\frac{A}{z^4}+\frac{B}{z^3}+\frac{C}{z^2}+\frac{D}{z}+\frac{Ez+F}{z^2+1}.$$

აქედან

$$1=A(z^2+1)+Bz(z^2+1)+Cz^2(z^2+1)+Dz^3(z^2+1)+$$
$$(Ez+F)z^4.$$

---

* შეიძლება გამოთვლების გამარტივება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $z^4(z^2+1)$ დამოკიდებულია მხოლოდ z^2-ზე.

თუ დავუშვებთ, რომ $z=0$, მივიღებთ $A=1$. z-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტების შედარება გვაძლევს შემდეგ ტოლობებს

$$\begin{array}{c|l} z^5 & 0=D+E, \\ z^4 & 0=C+F, \\ z^3 & 0=B+D, \\ z^2 & 0=A+C, \\ z & 0=B \end{array}$$

აქედან $B=D=E=0$, $C=-1$, $F=1$. მაშასადამე,

$$I=-6\int\left(\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2+1}\right)dz=\frac{2}{z^3}-\frac{6}{z}-6\operatorname{arctg} z+C.$$

სადაც

$$z=\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}}.$$

$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ სახის ინტეგრალები

ამ სახის ინტეგრალების გამოთვლა მოგვაგონებს §1 (20) ინტეგრალების გამოთვლას. სახელდობრ,

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{5}$$

ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება ორ შემთხვევაში:

ა) $Ax+B$ მრიცხველი არის ინტეგრალქვეშა ax^2+bx+c სამწევრის წარმოებული.

ბ) მრიცხველი არ არის დამოკიდებული x-ზე. ე. ი. $A=0$.

მართლაც პირველ შემთხვევაში უნდა დავუშვათ, რომ $ax^2+bx+c=z$, რასაც (5) ინტეგრალი დაყავს შემდეგ ინტეგრალამდე

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c.$$

მაგალითად,

$$\int\frac{14x+5}{\sqrt{7x^2+5x+12}}dx=2\sqrt{7x^2+5x+12}+C$$

მეორე შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა სამწევრიდან უნდა გამოიყოს სრული კვადრატი, რაც a-ს ნიშნის მიხედვით მოგვცემს ცხრილის X ან XIII ინტეგრალებიდან ერთ-ერთს.

მაგალითად,

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+18x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-3(x^2-6x+9)+29}}.$$

აქედან

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{29-3(x-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d[\sqrt{3}(x-3)]}{\sqrt{29-3(x-3)^2}}$$

და საბოლოოდ,

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}(x-3)}{\sqrt{29}}+C.$$

ანალოგიურად ვპოულობთ

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+18x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3(x^2+6x+9)-25}},$$

საიდანაც

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d[\sqrt{3}(x+3)]}{\sqrt{3(x+3)^2-25}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left[\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{3x^2+18x+2}\right]+C.$$

საბოლოოდ (5) ინტეგრალი ზოგად შემთხვევაში დაიყვანება ა) და ბ) შემთხვევებზე, თუ $Ax+B$ მრიცხველს გავყოფთ ფესვქვეშა სამწევრის წარმოებულზე $2ax+b$ გამოსახულებაზე და $Ax+B$ გამოსახულებას წარმოვადგენთ გამყოფისა და განაყოფის ნამრავლისა და ნაშთის ჯამის სახით.

მაგალითად,

$$\int\frac{8x+11}{\sqrt{x^2+16x+7}}dx=\int\frac{4(2x+16)-53}{\sqrt{x^2+16x+7}}dx=4\int\frac{2x+16}{\sqrt{x^2+16x+7}}dx-$$

$$-53\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}.$$

მარჯვნივ პირველი ინტეგრალი ეკუთვნის ა) ტიპს, ხოლო მეორე— ბ) ტიპს.

როდესაც შევისწავლით ზოგიერთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ინტეგრების ხერხებს, შევძლებთ კიდევ სხვა ირაციონალობათა ინტეგრებას.

1. $\int e^{ax} P(x)dx,\ \int P(x)\sin a x\, dx,\quad \int P(x) \cos a x dx$ სახის ინტეგრალები

თუ აღნიშნულ ინტეგრალებში $P(x)$ წარმოადგენს მთელ $Ax^n+Bx^{n-1}+$ $+\ldots+Kx+L$ მრავალწევრს, მაშინ ინტეგრალები გამოითვლება ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. მართლაც, შევჩერდეთ ამ ინტეგრალებიდან პირველზე.

თუ დავუშვებთ, რომ

$$P(x)=u, \qquad du=P'(x)dx,$$

$$e^{ax}dx=dv, \qquad v=\frac{1}{a}e^{ax},$$

ვიპოვით

$$\int e^{ax} P(x)\,dx = e^{ax}\frac{P(x)}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ax} P'(x)\,dx.$$

მარჯვნივ მიღებული ინტეგრალი იმავე ტიპისაა, როგორიც მარცხნივ, მაგრამ $P'(x)$ მამრავლის ხარისხი ერთით ნაკლებია $P(x)$-ის ხარისხზე. ამ ხერხის მეორეჯერ გამოყენება მიგვიყვანს საბოლოო მიზნამდე. ზემოთ დასახელებული ინტეგრალებისათვისაც გარდაქმნები ანალოგიურია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $I=\int(x^2-5x+6)e^x\,dx.$

ნაწილობითი ინტეგრებით ვპოულობთ

$$I=(x^2-5x+6)e^x-\int(2x-5)\,e^x dx. \tag{1}$$

ნაწილობითი ინტეგრების მეორედ გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\int(2x-5)e^x dx=(2x-5)e^x-\int 2e^x dx=(2x-7)e^x+C.$$

ამ გამოსახულების (1) ტოლობაში ჩასმით ვპოულობთ

$$I=(x^2-7x+13)e^x+C.$$

2) $$I=\int(12x^2-6x)\sin 2x dx.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$12x^2-6x=u, \qquad du=(24x-6)dx,$$

$$\sin 2x dx=dv, \qquad v=-\frac{\cos 2x}{2},$$

მივიღებთ

$$I=(3x-6x^2)\cos 2x+\int(12x-3)\cos 2x dx.$$

ხელახლა დაშვებით

$$12x-3=u, \qquad du=12dx,$$

$$\cos 2x dx=dv, \qquad v=\frac{\sin 2x}{2},$$

ვპოულობთ

$$\int(12x-3)\cos 2x dx=\left(6x-\frac{3}{2}\right)\sin 2x-6\int\sin 2x dx.$$

ამის შემდეგ ყველაფერი ნათელი ხდება.

2. $\int P(x)\ln^n x\,dx$ სახის ინტეგრალები

თუ ამ ინტეგრალში $P(x)$ მთელი მრავალწევრია და n ნატურალური რიცხვი, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln^n x=u, \qquad du=n\ln^{n-1}x\frac{dx}{x},$$

$$P(x)dx=dv, \qquad v=Q(x),$$

სადაც $Q(x)$ არის $P(x)$-ის პირველადი, რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ წევრს. მაშინ $\frac{Q(x)}{x}$ არის იმავე ხარისხის მრავალწევრი, როგორც $P(x)$. ამიტომ ფორმულით

$$\int P(x)\ln^n x dx=Q(x)\ln^n x-n\int\frac{Q(x)}{x}\ln^{n-1}x dx.$$

მოცემული ინტეგრალი დაიყვანება იმავე ტიპის უფრო მარტივ ინტეგრალამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ,

$$I=\int(32x^3-9x^2+12x+1)\ln^2 x dx.$$

დავუშვათ,

$$\ln^2 x=u, \quad du=2\ln x\frac{dx}{x}.$$

$$(32x^3-9x^2+12x+1)dx=dv, \qquad v=8x^4-3x^3+6x^2+x,$$

მაშინ

$$I=(8x^4-3x^3+6x^2+x)\ln^2 x-2\int(8x^3-3x^2+6x+1)\ln x dx.$$

ისევ ნაწილობითი ინტეგრებით

$$\ln x=u, \quad du=\frac{dx}{x},$$

$$(8x^3-3x^2+6x+1)\,dx=dv, \qquad v=2x^4-x^3+3x^2+x,$$

მივიღებთ

$$\int(8x^3-3x^2+6x+1)\ln x dx=(2x^4-x^3+3x^2+x)\ln x-\int(2x^3-x^2+ +3x+1)\,dx.$$

3. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ სახის ინტეგრალები

ეს ინტეგრალები (სადაც n და m არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია) იყოფა ორ ტიპად:

ა) n და m რიცხვებიდან ერთ-ერთი კენტია;

ბ) ორივე რიცხვი ლუწია.

ა) შემთხვევაში ინტეგრალი

$$\int \sin^n x \cos^m x dx$$

გამოითვლება ხერხით, რომელსაც უწოდებენ „გამოყოფის ხერხს". ამ ხერხის არსი ჩანს შემდეგი მაგალითიდან

$$I=\int \sin^{22} x \cos^3 dx.$$

$\cos^3 x$ მამრავლიდან „გამოვყოფთ" ერთ მამრავლს $\cos x$-ს და ვისარგებლებთ იმით, რომ $\cos x dx=d(\sin x)$. ეს გვაძლევს

$$I=\int \sin^{22} x \cos^2 x d(\sin x).$$

მაგრამ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, ამიტომ $\sin x=z$ ჩასმით მივიღებთ

$$I=\int \sin^{22} x(1-\sin^2 x)\, d(\sin x)=\frac{\sin^{23} x}{23}-\frac{\sin^{25} x}{25}+C.$$

ანალოგიურად

$$I=\int \sin^5 x \cos^6 x dx=-\int \sin^4 x \cos^6 x d(\cos x).$$

აქედან

$$I=-\int(1-\cos^2 x)^2 \cos^6 x d(\cos x)=-\frac{\cos^7 x}{7}+\frac{2\cos^9 x}{9}-$$

$$-\frac{\cos^{11} x}{11}+C.$$

თუ n და m მაჩვენებლები ო რ ი ვ ე კენტია, მაშინ უმჯობესია მამრავლის „გამოყოფა“ $\sin^n x$, $\cos^m x$ იმ მამრავლიდან, რომლის ხარისხის მაჩვენებელიც ნ ა კ ლ ე ბ ი ა.*
მაგალითად, ინტეგრალი

$$I=\int \sin^3 x \cos^{47} x\,dx$$

ასე უნდა გამოითვალოს

$$I=-\int (1-\cos^2 x)\cos^{47} x\,d(\cos x)=\frac{\cos^{50} x}{50}-\frac{\cos^{48} x}{48}+C.$$

თუ ამ ინტეგრალს გადავწერთ შემდეგნაირად

$$I=\int \sin^3 x(1-\sin^2 x)^{23} d(\sin x),$$

მაშინ საჭირო იქნება $(1-\sin^2 x)^{23}$ დაშლა $\sin x$-ის ხარისხებად. ცხადია ეს უფრო ვრცელ გამოთვლებს მოითხოვს.

მართალია, განვიხილეთ (2) ინტეგრალის ა) შემთხვევა მაგალითებზე, მაგრამ ნათელია, რომ ნაჩვენებ ხერხს აქვს ზოგადი ხასიათი.

(2) ინტეგრალის გამოსათვლელად ბ) შემთხვევაში საჭიროა გამოვიყენოთ „ორმაგ კუთხეზე გადასვლის“ ხერხი, ე. ი. გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიის ცნობილი ფორმულები:

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \tag{4}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{5}$$

შევნიშნავთ, რომ შეიძლება შემოვიზღუდოთ (4) და (5) ფორმულებით. მაგრამ ყოველთვის, როცა შეიძლება (3) გამოყენება, უნდა მივმართოთ მას.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $I=\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx.$

გადავწეროთ I შემდეგი სახით

$$I=\int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx$$

---

* თუ $n=m$, მაშინ $\sin^n x\cos^m x$ უნდა შეიცვალოს $\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^n$ გამოსახულებით.

და გამოვიყენოთ (3) და (5) ფორმულები:

$$I=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2\,x dx.$$

მიღებული ინტეგრალებიდან უკანასკნელი ა) ტიპისაა, ხოლო მის წინ მდგომ ინტეგრალისათვის გამოვიყენოთ (4) ფორმულა:

$$I=\frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x).$$

საბოლოოდ,

$$I=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

2) $I=\int \cos^4 x dx.$

(5) ფორმულის თანახმად

$$I=\frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx=\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx.$$

იმავე ფორმულის მეორედ გამოყენება გვაძლევს

$$I=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{3\,x}{8}+$$

$$+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

4. $\int \mathrm{tg}^n x dx$ და $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ სახის ინტეგრალები

ინტეგრალი

$$I=\int \mathrm{tg}^n x dx,$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია, აიღება „გამოყოფის" ხერხით, მესამე ქვეპარაგრაფში მოცემული ხერხის მსგავსად. სახელდობრ, თუ $n=1$ ინტეგრალი გვაძლევს $-\ln\cos x+C$. ხოლო თუ $n>1$, მაშინ ინტეგრალი ასე გარდაიქმნება

$$I=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int \mathrm{tg}^{n-2}x\,d\,(\mathrm{tg}x)-\int \mathrm{tg}^{n-2}x\,dx.$$

მარჯვენა ნაწილში მიღებული პირველი ინტეგრალი გამოითვლება უშუალოდ, ხოლო მეორე (6) ტიპის ინტეგრალია, მაგრამ უფრო მარტივი ვინაიდან tg x-ის ხარისხი ორი ერთეულით არის დაწეული. ამ ხერხის მეორედ გამოყენებას მივყავართ მიზნამდე. ანალოგიურად გამოითვლება ინტეგრალი

$$\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$$

ვინაიდან

$$\operatorname{ctg}^2 x\, dx = \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -d(\operatorname{ctg} x) - dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $$I = \int \operatorname{tg}^6 x\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$$

აქედან

$$I = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln \cos x + C.$$

2) $$I = \int \operatorname{ctg}^4 x\, dx = \int \operatorname{ctg}^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$$

აქედან

$$I = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C.$$

sin x და cos x-ის მიმართ რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება

მე-3 და მე-4 ქვეპარაგრაფებში განხილული ინტეგრალები

$$\int f(\sin x, \quad \cos x) dx \tag{7}$$

ინტეგრალის კერძო შემთხვევებს წარმოადგენს, სადაც $f(u, v)$ თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქციაა. როგორც დავინახეთ ამ კერძო შემთხვევებისათვის არსებობს სპეციალური ხერხები. მაგრამ არსებობს უ ნ ი ვ ე რ ს ა ლ უ რ ი ჩასმა, რომელიც გვაძლევს (7) ინტეგრალის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე დაყვანის საშუალებას. ასეთია ჩასმა

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z} \tag{8}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$x=2\operatorname{arctg} z,$$

საიდანაც

$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

მეორე მხრივ

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

მაშასადამე,

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\qquad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

ამიტომ (8) ჩასმის შედეგად (7) ინტეგრალი დაიყვანება შემდეგ ინტეგრალამდე

$$\int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}. \tag{9}$$

(9) კი არის ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\dfrac{2dz}{1+z^2}}{\dfrac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{z}=\ln z+C=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

სასარგებლოა

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C} \tag{10}$$

ტოლობის* დამახსოვრება.

2) ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\cos x}$$

შეიძლება აგრეთვე (8) ჩასმით გამოითვალოს. მაგრამ უფრო მარტივია გამოთვლა, თუ მას ასე გადავწერთ

$$I = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

რაც (10) ტოლობის საფუძველზე გვაძლევს

$$I = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

ზოგიერთ შემთხვევაში ხელსაყრელია $\operatorname{tg} x = z$ ჩასმის გამოყენება. მაგალითად, თუ

$$I = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \tag{11}$$

მაშინ

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\frac{a^2}{b^2} + \operatorname{tg}^2 x}.$$

---

* ეს ტოლობა შეიძლება მივიღოთ უშუალოდ, შემდეგნაირად

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

რასაკვირველია, ეს იგივე (8) ჩასმაა, ოღონდ არ არის ცხადად ამოწერილი.

და (ცხრილის XI ფორმულის თანახმად)

$$I=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

(11) ტიპის ინტეგრალამდე დაიყვანება ინტეგრალები

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}\quad(a>b>0).$$

მაგალითად, თუ

$$I=\int\frac{dx}{5+3\cos x},$$

მაშინ

$$I=\int\frac{dx}{5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dx}{8\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}},$$

აქედან

$$I=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{4\cos^2\frac{x}{2}+\sin^3\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{4+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

6. ტრიგონომეტრიული ჩასმები

ვთქვათ, $f(u, v)$ თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქციაა. მაშინ შემდეგი ინტეგრალებიდან თითოეული

$$\int f\left(x, \sqrt{R^2-x^2}\right)dx, \tag{12}$$

$$\int f\left(x, \sqrt{R^2+x^2}\right)dx, \tag{13}$$

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2-R^2}\right)dx. \tag{14}$$

დაიყვანება ინტეგრალამდე რაციონალური ფუნქციიდან $\sin t$ და $\cos t$-ს მიმართ „ტრიგონომეტრიული ჩასმების“ საშუალებით. ეს ჩასმებია:* (12) ინტეგრალისათვის

$$x=R\sin t, \tag{15}$$

(13)-სათვის

$$x=R\operatorname{tg} t, \tag{16}$$

(14)-სათვის

$$x=R\sec t. \tag{17}$$

მართლაც, თუ $x=R\sin t$, მაშინ

$$dx=R\cos t\,dt,\quad \sqrt{R^2-x^2}=R\cos t.$$

თუ $x=R\operatorname{tg} t$, მაშინ

$$dx=\frac{R\,dt}{\cos^2 t},\qquad \sqrt{R^2+x^2}=R\sec t=\frac{R}{\cos t}.$$

ანალოგიური მდგომარეობა გვაქვს (14) ინტეგრალის შემთხვევაში, ვინაიდან თუ $x=R\sec t$, მაშინ

$$dx=Rd\left(\frac{1}{\cos t}\right)=\frac{R\sin t\,dt}{\cos^2 t},\qquad \sqrt{x^2-R^2}=R\operatorname{tg} t.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი. (15) ჩასმის თანახმად გვაქვს

1) $$I=\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int(R\cos t)(R\cos t)\,dt=R^2\int\cos^2 t\,dt=$$
$$=\frac{R^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt.$$

აქედან

$$I=\frac{R^2}{2}t+\frac{R^2}{4}\sin 2t+C=\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{R^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

საბოლოოდ,**

$$I=\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+C.$$

---

* (15), (16) და (17) ნაცვლად შეიძლება ვისარგებლოთ შესაბამისად ჩასმებით

$$x=R\cos t,\quad x=R\operatorname{ctg} t,\quad x=R\operatorname{cosec} t.$$

** გირჩევთ დაიმახსოვროთ, რომ როცა $t=\arcsin\frac{x}{R}$, მაშინ $\sin 2t$ უფრო მოხერხებულია გამოისახოს x-ის საშუალებით არა $\sin 2t=\sin\left(2\arcsin\frac{x}{R}\right)$ ფორმულით, არამედ შემდეგი გარდაქმნით

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2}{R^2}(R\sin t)(R\cos t)=\frac{2}{R^2}\,x\sqrt{R^2-x^2}.$$

2)

$$I=\int\frac{dx}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}=\int\frac{R\cos t\,dt}{R^3\cos^3 t}=\frac{1}{R^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=$$
$$=\frac{1}{R^2}\operatorname{tg} t+C.$$

აქედან

$$I=\frac{1}{R^2}\,\frac{R\sin t}{R\cos t}+C=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}+C.$$

3)
$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R^2+x^2}}.$$

აქ გამოვიყენოთ (16) ჩასმა:

$$I=\int\frac{\frac{R\,dt}{\cos^2 t}}{R^2\operatorname{tg}^2 t\cdot\frac{R}{\cos t}}=\frac{1}{R^2}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{\sin t}+C.$$

მაგრამ

$$\sin t=\operatorname{tg} t\cos t=\frac{\operatorname{tg} t}{\sec t}=\frac{R\operatorname{tg} t}{R\sec t}=\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

მაშასადამე,

$$I=-\frac{\sqrt{R^2+x^2}}{R^2x}+C$$

4)
$$I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-R^2}}.$$

(17) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=\int\frac{\left(\frac{R}{\cos t}\right)^2\frac{R\sin t}{\cos^2 t}dt}{R\operatorname{tg} t}=R^2\int\frac{dt}{\cos^3 t}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლა უმჯობესია ასე:

$$I=R^2\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^4 t}=R^2\int\frac{dz}{(1-z^2)^2}\quad(z=\sin t);$$

ინტეგრალქვეშა წილადს ვშლით მარტივ წილადებად:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{(z+1)^2}+\frac{D}{z+1}.$$

აქედან

$$1=A(z+1)^2+B(z+1)^2(z-1)+C(z-1)^2+D(z-1)^2(z+1).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $z=1$, ხოლო შემდეგ $z=-1$, მივიღებთ $A=$ $=C=\frac{1}{4}$. z^3-ის და $z^0=1$ კოეფიციენტების შედარება გვაძლევს

$$B+D=0,\ A-B+C+D=1,$$

საიდანაც $D=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, მაშასადამე,

$$I=\frac{R^2}{4}\int\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}\right]dz=$$

$$=\frac{R^2}{4}\left[\frac{-1}{z-1}-\ln(1-z)-\frac{1}{z+1}+\ln(1+z)\right]+C.$$

(ჩვენ უნდა დავწეროთ $\ln(1-z)$ და არა $\ln(z-1)$, რადგანაც $z=\sin x<1$, ხოლო ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ უნდა იდგეს დ ა დ ე ბ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ი)

ამგვარად,

$$I=\frac{R^2}{4}\left[\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+\frac{2\sin t}{1-\sin^2 t}\right]+C=$$

$$=\frac{R^2}{4}\left[\ln\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}+2\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right]+C.$$

საბოლოოდ,*

$$I=\frac{R^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-R^2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-R^2}+C.$$

ცხადია, ვიდრე მოცემული ინტეგრალისათვის გამოვიყენებდეთ ამა თუ იმ „რეკომენდებულ" ხერხს, საჭიროა შევამოწმოთ, ხომ არ გამოითვლება ეს ინტეგრალი უფრო მარტივად. მაგალითად, ინტეგრალის

$$I=\int x\sqrt{x^2+R^2}\,dx.$$

---

* დაწერილებით გვაქვს

$$I=\frac{R^2}{2}\left[\ln(\sec t+\operatorname{tg} t)+\sec t\cdot\operatorname{tg} t\right]+C,$$

მაგრამ $R^2\sec t\operatorname{tg} t=x\sqrt{x^2-R^2}$. ამას გარდა, რადგან R მუდმივია, გვაქვს

$$\ln(\sec t+\operatorname{tg} t)=\ln(R\sec t+R\operatorname{tg} t)-\ln R=\ln(x+\sqrt{x^2-R^2})+C_1.$$

გამოსათვლელად არ არის საჭირო (16) ჩასმის გამოყენება. ვინაიდან,

$$I=\frac{1}{2}\int (x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+R^2)=\frac{1}{3}(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

ბოლოს შევნიშნავთ, რომ (16) ჩასმა წარმატებით გამოიყენება ზოგიერთი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებისას. მაგალითად,

$$I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს *ჯერადი წარმოსახვითი ამონახსნები*. აქ გვაქვს სწორედ ის შემთხვევა, რომელიც §2-ში არ განვიხილეთ. თუ დავუშვებთ, რომ $x=\operatorname{tg} t$, მივიღებთ

$$I=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sec^4 t}=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C.$$

მაშასადამე,

$$I=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{\sin t\,\cos t}{2}+C=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{\operatorname{tg} t\cos^2 t}{2}+C.$$

საბოლოოდ,

$$I=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C.$$

VI თავი

განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. განსაზღვრული ინტეგრალის განსაზღვრა და მისი მნიშვნელოვანი თვისებები

1. ამოცანა ღეროს მასის შესახებ

იმისათვის, რომ მივიდეთ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე, განვიხილოთ ფიზიკის ერთი ამოცანა. III თავში ლაპარაკი იყო ღეროს საშუალო და ჭეშმარიტ სიმკვრივეზე. გავიხსენოთ, რომ ღეროს საშუალო სიმკვრივე ეწოდება მისი მასის სიგრძესთან შეფარდებას, ხოლო ჭეშმარიტი სიმკვრივე მოცემულ წერტილში ეწოდება ღეროს უსასრულოდ მცირე მონაკვეთზე საშუალო სიმკვრივის ზღვარს, როდესაც ამ მონაკვეთის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თუ ღეროს ტოლი სიგრძის მონაკვეთებს აქვთ ერთნაირი მასა, მაშინ ღეროს ეწოდება ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი. ასეთი მონაკვეთის ყოველ წერტილში ჭეშმარიტი სიმკვრივე ერთი და იგივეა და ტოლია ღეროს საშუალო სიმკვრივისა*. თუ ღერო არაერთგვაროვანია, მაშინ მისი ჭეშმარიტი სიმკვრივე იცვლება წერტილიდან წერტილამდე. თუ წერტილის

---

* მართლაც ვთქვათ, ერთგვაროვანი ღეროს მასაა m, ხოლო სიგრძე — l, მაშინ მთელი ღეროს საშუალო სიმკვრივე იქნება $p=\frac{m}{l}$. დავყოთ ღერო ტოლი სიგრძის თუნდაც 1000 მონაკვეთად. თითოეულისათვის საშუალო სიმკვრივე იქნება $\frac{\frac{1}{1000}m}{\frac{1}{1000}l}=\frac{m}{l}=$ $=p$. როგორც ვხედავთ, მონაკვეთების საშუალო სიმკვრივე იგივეა, რაც მთელი ღეროს საშუალო სიმკვრივე.

მდებარეობას ღეროზე განვსაზღვრავთ x მანძილით მისი ერთ-ერთი ბოლოდან (სიმარტივისათვის მას ვუწოდოთ „x წერტილი“), მაშინ ღეროს x წერტილში p ჭეშმარიტი სიმკვრივე დამოკიდებულია x-ზე, ანუ x-ის ფ უ ნ ქ ც ი ა ა.

$$p=p(x). \tag{1}$$

განვიხილოთ ამოცანა. მოცემულია ღეროს l სიგრძე და მისი ჭეშმარიტი სიმკვრივე p, რომელიც x-ის უწყვეტი ფუნქციაა. ვიპოვოთ ღეროს m მასა.

ერთგვაროვანი ღეროსათვის ეს ამოცანა ამოიხსნება მყისვე. მართლაც, ასეთი ღეროსათვის

$$p(x)=p=\frac{m}{l},$$

საიდანაც

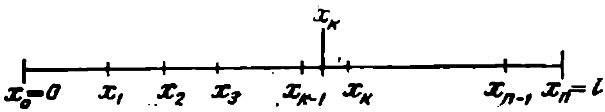
$$\boxed{m=pl} \tag{2}$$

ახლა განვიხილოთ იგივე ამოცანა არაერთგვაროვანი ღეროსათვის. დავყოთ ეს ღერო n ნებისმიერ მცირე ნაწილად (არაა აუცილებელი ნაწილების ტოლობა). ამისათვის ღეროზე ავიღოთ $n-1$ წერტილი*

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}.$$

დავუშვათ აგრეთვე, რომ $x_0=0$, $x_n=l$ (ნახ. 198). მაშინ ღეროს დასახელებული მონაკვეთები იქნება

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ [x_2,\ x_3],\ldots,\ [x_{n-1},\ x_n].$$



ნახ. 198.

$[x_0,\ x_1]$ მონაკვეთს ვუწოდოთ — პირველი, $[x_1,\ x_2]$-ს მეორე და ა. შ. მაშინ $[x_{k-1},\ x_k]$ მონაკვეთის ნომერი იქნება k. ამ მონაკვეთის სიგრძე

* ცხადია, რომ ღეროს n ნაწილად დასაყოფად უნდა ავიღოთ არა n, არამედ $n-1$ წერტილი. მაგალითად, მორი უნდა გავხერხოთ 5-ჯერ, რომ მივიღოთ 6 ნაჭერი.

ტოლია x_k-x_{k-1} სხვაობისა. თუ ყველა მონაკვეთი მცირეა, მაშინ მცირეა მათ შორის უდიდესიც. მის სიგრძეს, ანუ x_k-x_{k-1} სხვაობებიდან უდიდესს უწოდებენ ღეროს დაყოფის რ ა ნ გ ს და აღნიშნავენ λ-თი:

$$\lambda=\max(x_k-x_{k-1}).$$

ვიპოვოთ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის მასა თუნდაც მიახლოებით. რადგან ეს მონაკვეთი მცირეა $p(x)$ (უწყვეტი) ფუნქცია არ შეიძლება ამ მონაკვეთზე შესამჩნევად შეიცვალოს. მაშასადამე, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $p(x)$ მ უ დ მ ი ვ ი ა $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე. $p(x)$-ის სიდიდედ შეიძლება მივიჩნიოთ ამ მონაკვეთის ნებისმიერ $\bar{x}$ * წერტილში $p(\bar{x}_k)$ მნიშვნელობა. ამგვარად, $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე ვიღებთ ნებისმიერ $\bar{x}_k$ წერტილს და ვთვლით, რომ ამ მონაკვეთის ყოველ x წერტილში $p(x)=p(\bar{x}_k)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთი ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი ა და მისი სიმკვრივეა $p(x_k)$. ამიტომ ამ მონაკვეთის მასა შეიძლება გამოითვალოს (2) ფორმულით და ტოლია

$$p(\bar{x}_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{3}$$

გამოსახულებისა. მთელი ღეროს მასა m ტოლია ასეთი მასების ჯამისა, სადაც $k=1, 2, \ldots, n$. თუ შეკრების ოპერაციას აღვნიშნავთ $\sum$ (სიგმა) სიმბოლოთი, მივიღებთ

$$m=\sum_{k=1}^{m} p(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}). \tag{4}$$

ეს ტოლობა არ არის ზუსტი, რადგან ცალკეული მონაკვეთები მიახლოებითაა ერთგვაროვანი. ამიტომ ტოლობის ნიშანი შევცვალოთ მიახლოებითი ტოლობის $\approx$ ნიშნით, მივიღებთ:

$$m\approx\sum_{k=1}^{n} p(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}). \tag{5}$$

(5) ტოლობის სტრუქტურა გვიჩვენებს, რომ ტოლობა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო ნაკლებია თითოეული მონაკვეთი, ანუ რაც უფრო ნაკლებია დანაწილების რანგი λ. ამიტომ m-ის ზუსტ მნიშვნელობას წარმოადგენს (5) ჯამის ზ ღ ვ ა რ ი, როდესაც λ მიისწრაფვის ნულისაკენ

$$\boxed{m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} p(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1})} \tag{6}$$

* k ნიშნაკი გვიჩვენებს, რომ $\bar{x}_k$ წერტილი ეკუთვნის k ნომრის მონაკვეთს.

ვხედავთ, რომ ფიზიკურ ამოცანას მივყავართ (6) ზღვარის განხილვამდე, რომელსაც აქვს სპეციფიკური სახე. შემდეგში ვნახავთ, რომ მრავალი კონკრეტული ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება მსგავსი ზღვრების პოვნამდე. ამიტომ დაისვა წმინდა მათემატიკური ამოცანა, ამ ზღვრების შესწავლის შესახებ. ყოველ ასეთ ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი. შემდეგ ქვეპარაგრაფში მოცემულია ამ ცნების ზუსტი განსაზღვრა.

2. განსაზღვრული ინტეგრალი

ვთქვათ, $[a, b]$ მონაკვეთზე მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. $[a, b]$ მონაკვეთისა და $f(x)$ ფუნქციისათვის შევასრულოთ შემდეგი 5 ოპერაცია.

1. დავყოთ $[a, b]$ მონაკვეთი n ნაწილად $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ წერტილების საშუალებით, სადაც

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b.$$

აღნიშვნების ერთგვაროვნებისათვის დავუშვათ, რომ $x_0=a$, $x_n=b$. ამას გარდა x_k-x_{k-1} სხვაობებიდან (სადაც $k=1,2,\ldots,n$) უდიდესი აღვნიშნოთ λ-თი. ამ სიდიდეს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენად მცირე ნაწილებად არის დაყოფილი $[a, b]$ მონაკვეთი, ეწოდება დანაწილების რანგი.

2. ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე ავიღოთ $\bar{x}_k$ წერტილი, $x_{k-1}\leqslant\bar{x}_k\leqslant x_k$ და გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში $f(\bar{x}_k)$.

3. $f(\bar{x}_k)$ გავამრავლოთ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის სიგრძეზე, ე. ი. x_k-x_{k-1} სხვაობაზე.

4. შევკრიბოთ მიღებული ყველა ნამრავლი, ე. ი. შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}).$$

ამ ჯამს ეწოდება ინტეგრალური ჯამი, ანუ რიმანის ჯამი (მე-19 საუკუნის გერმანელი მათემატიკოსის რიმანის, რომელიც სწავლობდა ასეთ ჯამებს, პატივსაცემად).

5. შევამციროთ თითოეული დანაყოფის სიგრძე ისე, რომ $\lambda\to 0$. ხშირ შემთხვევაში ასეთ პირობებში რიმანის ჯამი მიისწრაფვის რაღაც სასრული I ზღვრისაკენ*, რომელიც არ არის დამოკიდებული დაყოფის წესისაგან და არც $\bar{x}_k$ წერტილების არჩევისაგან, ამ ზღვარს

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sigma$$

* ასე იყო, მაგალითად, პირველ ქვეპარაგრაფში, სადაც σ წარმოადგენდა ღეროს მასის მიახლოებით მნიშვნელობას მით უფრო ზუსტად, რაც ნაკლები იყო დაყოფის რანგი.

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ მონაკვეთზე და აღინიშნება

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

სიმბოლოთი.

a და b რიცხვებს ეწოდებათ სათანადოდ, ინტეგრების ქვედა და ზედა საზღვრები, ხოლო $[a, b]$ მონაკვეთს — ინტეგრების შუალედი. ამგვარად:

განსაზღვრული ინტეგრალი არის რიმანის ჯამის სასრული ზღვარი, როდესაც დანაწილების რანგი, რომელიც ამ ჯამს წარმოქმნის*, ნულისაკენ მიისწრაფვის

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,(x_k - x_{k-1})} \qquad (7)$$

რადგან განსაზღვრული ინტეგრალი არის რაღაც ცვლადი სიდიდის ზღვარი, ხოლო რადგან ყოველ ცვლადს არა აქვს ზღვარი, ამიტომ ყოველ ფუნქციას არ აქვს განსაზღვრული ინტეგრალი. ამასთან დაკავშირებით ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ მონაკვეთზე, მაშინ არსებობს ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)dx.$$

ამ თეორემას მივიღებთ დაუმტკიცებლად. შემდეგში განიხილება უმთავრესად უწყვეტი ფუნქციები. თუმცა მართებულია უფრო ზოგადი

თეორემა. ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ არსებობს თუ $f(x)$ ფუნქცია „უბან-უბან უწყვეტია“.

„უბან-უბან უწყვეტი“ ფუნქციის ცნება ადვილად შეიძლება ავხსნათ მარტივ მაგალითზე. ვთქვათ, $a\leqslant c\leqslant b$, $f_1(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a, c]$ შუალედზე, ხოლო $f_2(x)$—$[c, b]$ შუალედზე. მაშინ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ემთხვევა $f_1(x)$ როცა $a\leqslant x<c$ და $f_2(x)$, როცა $c<x\leqslant b$ (სულ ერთია თუ რას უდრის $f(c)$), შედგება ორი უწყვეტი „ნაჭ-

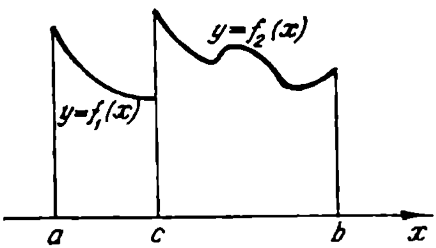
* შევნიშნავთ, რომ დანაწილება, ანუ x_k წერტილების შერჩევა სრულად არ განსაზღვრავს σ ჯამს. σ-ს განსაზღვრისათვის საჭიროა აგრეთვე x_k წერტილების არჩევა.

რისაგან“ (ნახ. 199). ასეთ ფუნქციას ეწოდება „უბან-უბან უწყვეტი“, ის შეიძლება შედგებოდეს რამდენიმე უწყვეტი ნაწილისაგანაც.

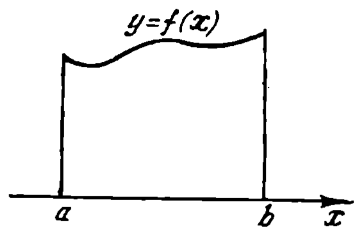
შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია.

3. ინტეგრალის გეომეტრიული არსი

ვთქვათ, $f(x)$ $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული დადებითი უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ ფიგურა (ნახ. 200), რომელიც შემოსაზღვრულია ქვემოდან Ox ღერძით, ზემოდან $y=f(x)$ წირით (ანუ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით), ხოლო გვერდებიდან $x=a$ და $x=b$ წრფეებით. თუ $y=f(x)$ წირი წრფეა, მაშინ ფიგურა ჩვეულებრივ ტრაპეციას წარმოადგენს. ზოგად შემთხვევაში კი ამ ფიგურას ეწოდება მრუდწირული ტრაპეცია.



ნახ. 199.



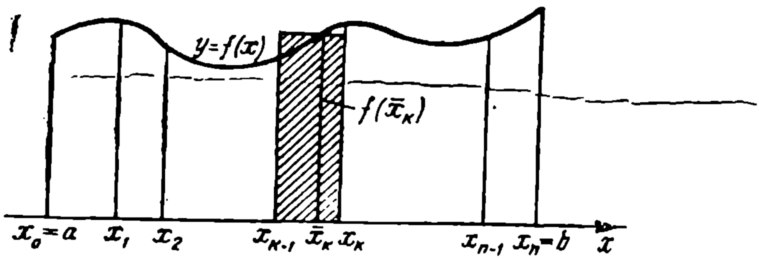
ნახ. 200.

ვიპოვოთ ამ მრუდწირული ტრაპეციის F ფართობი. ამ მიზნით დავყოთ $[a, b]$ მონაკვეთი n მცირე ნაწილებად წერტილებით

$$x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b.$$

თუ ამ წერტილებში გავავლებთ $x=x_k$ წრფეებს, მაშინ ისინი დაყოფენ მრუდწირულ ტრაპეციას n ვიწრო ზოლად. თითოეული ეს ზოლი შეიძლება მიახლოებით მივიჩნიოთ მართკუთხედად. მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე მუდმივი იქნება, მაშინ ზოლი, რომლის ფუძე ეს მონაკვეთია, იქნება მართკუთხედი. სინამდვილეში $f(x)$ ფუნქცია არ არის მუდმივი, $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე, მაგრამ მისი უწყვეტობის გამო ის ვერ მოასწრებს $[x_{k-1}\ x_k]$-ზე მნიშვნელოვნად შეცვლას, თუ ეს მონაკვეთი საკმაოდ მცირეა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია თითქმის მუდმივია $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთებზე, როცა ეს მონაკვეთები საკმაოდ მცირენი არიან, ეს კი ნიშნავს, რომ ზემოთ ხსენებული ზოლები თითქმის მართკუთხედებს წარმოადგენენ (ერთ-ერთი ასეთი მართკუთხედი დაშტრიხულია 201-ე ნახაზზე). თუ $f(x)$ ფუნქციის

მნიშვნელობად მთელს $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე მივიჩნევთ მის მნიშვნელობას ამ მონაკვეთის რაიმე $\bar{x}_k$ წერტილში ($\bar{x}_k$ ნებისმიერად შეიძლება ავირჩიოთ, რადგან სულ ერთია ლაპარაკია მიახლოებით გამოთვლაზე, ხოლო $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის ყველა წერტილი თანაბარუფლებიანია), მივიღებთ, რომ ხსენებული მართკუთხედის სიმაღლე $f(\bar{x}_k)$ რიცხვის ტოლი იქნება.



ნახ. 201.

რადგან ცხადია, რომ ამ მართკუთხედის ფუძე $x_k—x_{k-1}$ სხვაობაა, ერთი ზოლის ფართობი ტოლი იქნება $f(\bar{x}_k)(x_k—x_{k-1})$ ნამრავლისა. აქედან, მთელი მრუდწირული ტრაპეციის F ფართობისათვის მიიღება მიახლოებითი ტოლობა

$$F\approx\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}). \tag{8}$$

ამ მსჯელობიდან ცხადია, რომ ეს ტოლობა მით უფრო ზუსტია რაც მცირეა $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთები, ანუ რაც უფრო ნაკლებია დანაწილების λ რ ა ნ გ ი, მაგრამ მაშინ F ფართობის ზუსტი მნიშვნელობა იქნება (8) ჯამის ზ ღ ვ ა რ ი, როცა $\lambda\to 0$

$$F=\lim_{k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}).$$

რადგან (8) ჯამი წარმოადგენს რიმანის ჯამს, ამიტომ მისი განსაზღვრიდან გამომდინარე ამ ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda\to 0$ არის ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)dx.$$

ამგვარად, ვღებულობთ ფორმულას

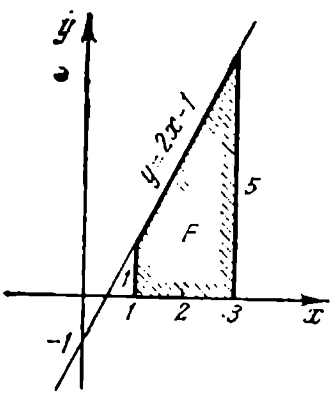
$$\boxed{F=\int_a^b f(x)\,dx} \tag{9}$$

თუ ამ ფორმულას წავიკითხავთ მარჯვნიდან მარცხნივ, მივიღებთ ინტეგრალის გეომეტრიულ არსს: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და დადებითია $[a, b]$-ზე, მაშინ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ ტოლია იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობისა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ წირებით.

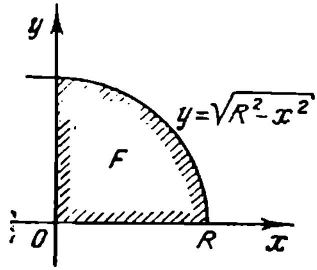
მაგალითები. 1) გამოვთვალოთ $\int_1^3 (2x-1)dx$.

ამოხსნა. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2x-1$ წირებით (ნახ: 202), არის ჩვეულებრივი ტრაპეცია. მისი ფართობი ტოლია ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის

$$F=\frac{1+5}{2}(3-1)=6,$$



ნახ. 202.



ნახ. 203.

საიდანაც

$$\int_1^3 (2x-1)dx=6.$$

2) გამოვთვალოთ $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

ამოხსნა. $y=\sqrt{R^2-x^2}$ წირი არის $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის ნახევარი, მოთავსებული $0x$ ღერძის ზემოთ. ის ნაწილი, რომელიც მიიღება, როცა x იცვლება 0-დან R-მდე მოთავსებულია I საკოორდინატო კუთხეში. აქედან ცხადია, რომ ფიგურა რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $x=R$,

$y=0$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$ წირებით (ნახ. 203), არის იმ წრის მეოთხედი, რომლის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში და რადიუსი ტოლია R-ისა. ამ ფიგურის ფართობი უდრის $\frac{1}{4}\pi R^2$, საიდანაც

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2}{4}.$$

ჯერ კიდევ არ შეგვისწავლია განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა, ამიტომ ამ მაგალითებში მოგვიხდა გეომეტრიის გამოყენება. შემდეგში, პირიქით, ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით შევძლებთ გეომეტრიული ფიგურების ფართობების გამოთვლას*.

4. ინტეგრალის ორი უმარტივესი თვისება

როდესაც ვეხებოდით განუსაზღვრელ ინტეგრალს, აღვნიშნეთ, რომ

$$\int \cos x dx=\sin x+C, \qquad \int \cos z dz=\sin z+C, \qquad \int \cos t dt=\sin t+C.$$

ამგვარად, ინტეგრალქვეშა ფუნქციისა და ინტეგრების შედეგის ჩაწერისას, დამოუკიდებელი ცვლადი აღნიშნული იყო ერთი და იგივე სიმბოლოთი. მაშასადამე, დამოუკიდებელი ცვლადის — *ინტეგრების ცვლადის* — აღნიშვნას თითქოს აქვს *არსებითი* მნიშვნელობა.** პირიქით:

1. *განსაზღვრული ინტეგრალის შემთხვევაში ინტეგრების ცვლადის აღნიშვნა არავითარ როლს არ ასრულებს.*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)\,dt} \qquad (10)$$

---

* აგრეთვე შევძლებთ გეომეტრიისა და მექანიკის მთელი რიგი ამოცანების ამოხსნას.

** ეს გასაგები გახდება, თუ გავიხსენებთ $I=\int \sin^2 x\cos x\,dx$ ინტეგრალის გამოთვლას. ის ხომ ჯერ ასე უნდა ჩაიწეროს $\int \sin^2 x\,d(\sin x)$, ხოლო შემდეგ $\int z^2dz$, სადაც $z=\sin x$. მაშასადამე, $I=\frac{z^3}{2}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C$. ამგვარად, არ არის სულ ერთი თუ რას დავწერთ $I=\frac{z^3}{3}+C$ (რაც სწორია), თუ $I=\frac{x^3}{3}+C$ (რაც უკვე არ არის სწორი).

მკითხველი, ინტეგრალების

$$\int_3^5 (2x^3+x)\,dx, \quad \int_3^5 (2t^3+t)\,dt \tag{11}$$

შედარებით, ადვილად დარწმუნდება, რომ ისინი ერთმანეთის ტოლია. უკეთ გავერკვევით ამაში, თუ შევნიშნავთ, რომ (11) ინტეგრალებიდან თითოეულის გამოსათვლელად უნდა დავყოთ [3, 5] მონაკვეთი მცირე ნაწილებად, ყოველ დანაყოფში ავირჩიოთ წერტილი და გამოვთვალოთ ამ წერტილში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობა (ეს ფუნქცია კი ორივე შემთხვევაში ერთი და იგივეა — არგუმენტის კუბის გაორკეცებული ნამრავლისა და თვით არგუმენტის ჯამი) და ა. შ. ორივე შემთხვევაში გვექნება იგივური გამოთვლები. ასეთივე გარემოება გვაქვს (10) ინტეგრალების ზოგად შემთხვევაში, რითაც მტკიცდება განსაზღვრული ინტეგრალის ზემოთ ფორმულირებული თვისება.

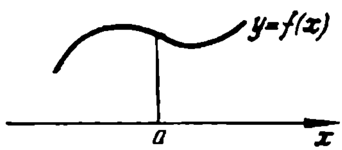
ინტეგრალის მეორე მნიშვნელოვან თვისებაზე გადასვლამდე შევნიშნოთ, რომ

$$\int_a^b f(x)dx$$

გამოსახულებაში ვგულისხმობდით $a<b$. როგორ უნდა გვესმოდეს

$$\int_a^a f(x)\,dx$$

სიმბოლო?



ნახ. 204.

ამ კითხვაზე ადვილია პასუხის გაცემა, თუ გავიხსენებთ ინტეგრალის გეომეტრიულ არსს. ჩვენ შემთხვევაში მრუდწირული ტრაპეციის $x=a$ და $x=b$ გვერდები ემთხვევა ერთ $x=a$ წრფეს და ტრაპეცია გადაიქცევა ერთ წრფივ მონაკვეთად (ნახ. 204). ამ მონაკვეთის ფართობი კი ნულის ტოლია, მაშასადამე,

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx=0} \tag{12}$$

ე. ი.

II. განსაზღვრული ინტეგრალი ერთი და იგივე ქვედა და ზედა საზღვრებით ნულის* ტოლია.

---

* ეს თვისება შეიძლება ჩავთვალოთ მეორე ქვეპარაგრაფში მოცემული ინტეგრალის განსაზღვრის დამატებად.

მაგალითად,

$$\int_1^1 \sin\sqrt[3]{\ln x}\, dx = 0.$$

ინტეგრალი, როგორც ზედა საზღვრის ფუნქცია. ბაროუს თეორემა

თუ განსაზღვრულ ინტეგრალში $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრების საზღვრები ფიქსირებულია, მაშინ ინტეგრალი რაიმე მ უ დ მ ი ვ ი სიდიდის ტოლია. ხოლო თუ a და b იცვლება, მაშინ შეიცვლება თვით ინტეგრალის მნიშვნელობაც. ამგვარად, ჩვენი ინტეგრალი წარმოადგენს ინტეგრების საზღვართა ფუნქციას. შევისწავლოთ ამ ფუნქციის თვისებები უფრო საფუძვლიანად. რადგან უკვე ვიცნობთ ერთი და არა ორი ცვლადის ფუნქციის თვისებებს, ამიტომ ინტეგრალის ერთი საზღვარი დავაფიქსიროთ და განვიხილოთ ის, როგორც მეორე ცვლადი საზღვრის ფუნქცია. გარკვეულობისათვის დავაფიქსიროთ ქვედა საზღვარი a და შევისწავლოთ ინტეგრალი, როგორც ზედა b საზღვრის ფუნქცია. ეს ფუნქცია აღვნიშნოთ $\Phi(b)$ სიმბოლოთი, ანუ დავუშვათ

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

რადგან ინტეგრების ცვლადის აღნიშვნას არ აქვს მნიშვნელობა შეიძლება დავწეროთ:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt, \tag{13}$$

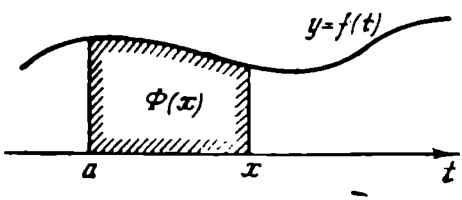
დამოუკიდებელი ცვლადი ჩვეულებისამებრ აღვნიშნოთ x-ით, მაშინ (13) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{14}$$

(14) ფუნქციის საშუალებით (12) ტოლობას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე $\Phi(a) = 0$.

იმისათვის, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია გამოვსახოთ ნახაზზე, გავავლოთ (Oty სიბრტყეზე) $y = f(t)$ წირი (ვიგულისხმოთ ამასთანავე, რომ $f(t)$ უწყვეტია და $f(t) > 0$), მაშინ (ნახ. 205) $\Phi(x)$ იქნება ფ ა რ თ ო ბ ი ფ ი გ უ რ ი ს ა, რომელიც შემოსაზღვრულია $t = a$, $t = x$, $y = 0$ და $y = f(t)$ წირებით.

მათემატიკური ანალიზის მნიშვნელოვან თეორემას წარმოადგენს თეორემა $\Phi(x)$ ფუნქციის წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს შესახებ, რომელიც დამტკიცებული იყო 1669 წ. ინგლისელი მათემატიკოსის ბაროუს* მიერ.

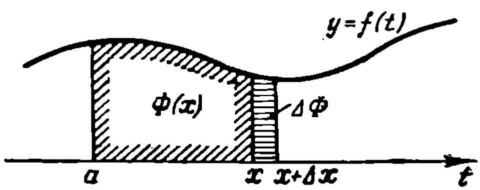


ნახ. 205.

ბაროუს თეორემა. გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს, რ ო გ ო რ ც ზ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ რ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ტ ო ლ ი ა ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ქ ვ ე შ ა ფ უ ნ ქ ც ი ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა ა ღ ე ბ უ ლ წ ე რ ტ ი ლ შ ი, ა ნ უ

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)} \tag{15}$$

დამტკიცება. ინტეგრალის გეომეტრიული არსის გამოყენებით, გამოვსახოთ გაწარმოების პროცესი ნახაზზე. ამისათვის დავაფიქსიროთ გაწარმოების წერტილი x და ვიპოვოთ ფუნქციის სათანადო $\Phi(x)$ მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობა გამოსახულია 205-ე ნახაზზე. შემდეგ არგუმენტს უნდა მივცეთ Δx ნაზრდი და ვიპოვოთ ფუნქციის სათანადო $\Delta\Phi$ ნაზრდი. 206-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ $\Delta\Phi$ არის დაშტრიხული ზოლის ფართობი. ეს ზოლი მიახლოებით შეიძლება ჩაითვალოს მართკუთხედად, რომლის



ნახ. 206.

ფუძე არის Δx, ხოლო სიმაღლე $f(x)$ (ვინაიდან $f(t)$, როგორც უწყვეტი ფუნქცია ვერ ასწრებს მნიშვნელოვნად შეცვლას, როცა t იცვლება x და $x+\Delta x$ სიდიდეებს შორის).

* ცხადია, ბაროუს ტერმინოლოგია განსხვავებულია დღევანდელისაგან, ვინაიდან მის დროს ჯერ კიდევ არ იყო ცნობილი წარმოებულის და ინტეგრალის განსაზღვრებანი.

ამგვარად,

$$\Delta\Phi \approx f(x)\Delta x,$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \approx f(x). \tag{16}$$

ამ მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე მით მეტია, რაც უფრო ნაკლებია Δx. მაშასადამე, Δx-ის შემცირებასთან ერთად (16) ტოლობის მარცხენა ნაწილი სულ უფრო უახლოვდება ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს, რომელიც მუდმივ რიცხვს წარმოადგენს (რადგან x ფიქსირებულია).

ამგვარად,

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $f(x) = \Phi'(x)$, რითაც მტკიცდება (15) ფორმულა.

ბაროუს თეორემის ილუსტრაციის მაგალითებია შემდეგი თანაფარდობები

$$\left(\int_2^x \cos^3 t\,dt\right)' = \cos^3 x, \quad \left(\int_3^x e^{\sqrt{y}}\,dy\right)' = e^{\sqrt{x}} \quad \left(\int_3^z e^{\sqrt{y}}\,dy\right)' = e^{\sqrt{z}}$$

შევნიშნავთ, რომ

$$\left(\int_2^5 \sqrt{\ln t}\,dt\right)' = 0,$$

ვინაიდან $\int_2^5 \sqrt{\ln t}\,dt$ არის მუდმივი რიცხვი.

8. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა. ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულა

გამოვთვალოთ განსაზღვრული

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{17}$$

ინტეგრალი. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$I = \int_a^b f(t)\,dt$$

და შემოვიღებთ

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ფუნქციას, I შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$I=\Phi(b),$$

ან, რაც იგივეა

$$I=\Phi(b)-\Phi(a), \tag{18}$$

ვინაიდან

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0.$$

ამგვარად, I ინტეგრალი ტოლია $\Phi(x)$ ფუნქციის ნაზრდისა $[a, b]$ მონაკვეთზე. შემდეგ ბაროუს თეორემის თანახმად

$$\Phi'(x)=f(x),$$

ანუ $\Phi(x)$ არის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი. შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება

ლემა. თუ $F_1(x)$ და $F_2(x)$ ერთი და იგივე $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადებია, მაშინ

$$F_2(b)-F_2(a)=F_1(b)-F_1(a), \tag{19}$$

ანუ მათი ნაზრდები ერთსა და იმავე მონაკვეთზე ტოლია.

მართლაც, ერთი და იგივე ფუნქციის ორი პირველადი შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივით. მაშასადამე,

$$F_2(x)=F_1(x)+C,$$

საიდანაც

$$F_2(b)=F_1(b)+C, \qquad F_2(a)=F_1(a)+C.$$

პირველი ტოლობიდან მეორის გამოკლებით ვღებულობთ (19) ტოლობას.

დავუშვათ ახლა, რომ განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის მეთოდების გამოყენებით ვიპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის რაიმე $F(x)$ პირველადი. რადგან $\Phi(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი, ლემის თანახმად გვაქვს

$$\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a),$$

მაშინ (17) და (18) ტოლობების საფუძველზე ვღებულობთ ნიუტონ—ლაიბნიცის ფუნდამენტურ ფორმულას

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)} \tag{20}$$

ამგვარად, მივიღეთ

წესი. რაიმე ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის პირველადი და შევადგინოთ ინტეგრალის ზედა და ქვედა საზღვრებზე პირველადის მნიშვნელობათა სხვაობა.

ლემიდან ცხადია, რომ სულ ერთია, თუ $f(x)$ ფუნქციის რომელ პირველადს გამოვიყენებთ (20) ფორმულაში.

მაგალითები. 1) გამოვთვალოთ

$$\int_1^4 x^2 dx.$$

წესის თანახმად ვპოულობთ x^2-ის პირველადს. არსებობს პირველადთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც მოცემულია

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

ფორმულით. სიმარტივისათვის ავიღოთ $C=0$. (20) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21.$$

2) გამოვთვალოთ

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\, dx.$$

რადგან

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

შეიძლება დავუშვათ, რომ $F(x)=\sin x$. მაშინ (20) ფორმულის თანახმად

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ჩანაწერი უფრო ეკონომიური ხდება, თუ ვისარგებლებთ $F(b)—F(a)$ სხვაობის მაგივრად $[F(x)]_a^b$ სიმბოლოთი. მაშინ (20) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b}$$

ან*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = [\int f(x)dx]_a^b} \tag{21}$$

მაგალითად,

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\int \frac{dx}{\cos^2 x}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = [\mathrm{tg} x]_{\pi/6}^{\pi/3} =$$

$$= \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

ზუსტად ასევე

$$\int\limits_2^6 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_6^5 = [\ln x]_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$$

7. ნაწილობითი ინტეგრება და ცვლადის შეცვლა განსაზღვრულ ინტეგრალში

განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის ყველა ხერხი შეიძლება გამოვიყენოთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად. კერძოდ, განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი, ან შემოვიღოთ ახალი ცვლადი. მაგრამ ამ ხერხების გამოყენების დროს საქმე გვაქვს ზოგიერთ თავისებურებასთან.

პირველ რიგში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის შეიძლება ასეთი სახით ჩაიწეროს

$$\boxed{\int\limits_a^b u dv = [uv]_a^b - \int\limits_a^b v du} \tag{22}$$

მართლაც, (21) ფორმულისა და განუსაზღვრელი ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$\int\limits_a^b u dv = [\int u dv]_a^b = \left[uv - \int\limits_a^b v du\right]_a^b.$$

---

* (21) ტოლობაში ინტეგრალი $\int f(x)dx$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ რაიმე გარკვეული პირველადის სახით, ანუ არ შემოვიღოთ ნებისმიერი მუდმივი C.

საკმარისია შევნიშნოთ, რომ მიღებული გამოსახულება ემთხვევა (22) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx=\int_0^{\pi} xd(\sin x) = [x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx=[\cos x]_0^{\pi} = -2$

2. ვთქვათ

$$U_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx.$$

მაშინ, როცა $n>1$

$$U_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1} xd(\sin x)=[\sin x\cos^{n-1}x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xd(\cos^{n-1}x).$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირველი წევრი ნულის ტოლია. მაშასადამე,

$$U_n=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^{n-2} xdx = (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}xdx.$$

აქედან

$$U_n=(n-1)\ (U_{n-2}-U_n)$$

და ამიტომ

$$U_n=\frac{n-1}{n}U_{n-2}. \tag{23}$$

ამ ფორმულით U_n ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ასეთივე ინტეგრალის გამოთვლაზე, მხოლოდ 2 ერთეულით ნაკლები ნიშნაკით. ამ ფორმულის განმეორებითი გამოყენებით იმის მიხედვით, თუ როგორია n რიცხვი, საბოლოოდ მივიღებთ ერთ-ერთს შემდეგი ინტეგრალებიდან:

$$U_1=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1,\quad U_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

მაგალითად,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^7 xdx=U_7=\frac{6}{7}U_5=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}U_3=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}U_1=\frac{16}{35}.$$

რაც შეეხება ჩასმის ხერხს, განსაზღვრული ინტეგრალისათვის ადგილი აქვს ფორმულას

$$\boxed{\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(z)\,dz} \tag{24}$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალისაგან განსხვავებით, განსაზღვრულ ინტეგრალში ცვლადის შეცვლისას, საჭიროა მიღებულ ინტეგრალში ჩავსვათ ახალი z ცვლადის საზღვრები.

(24) ფორმულის დასამტკიცებლად აღვნიშნოთ მისი მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები შესაბამისად Л და Π ასოებით და დავუშვათ

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C\,.$$

მაშინ ნიუტონ—ლაიბნიცის, ფორმულის თანახმად

$$\Pi = [F(z)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)]. \tag{25}$$

მეორე მხრივ, თუ განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$$

გამოვიყენებთ ჩასმის ხერხს, ვპოულობთ

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

აქედან ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$Л = [F[\varphi(x)]]_a^b = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)]. \tag{26}$$

(25) და (26) ტოლობების შედარება გვაძლევს (24) ტოლობას.

განსაზღვრული ინტეგრალისათვის ჩასმის ხერხის გამოყენების დროს შეიძლება არ დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადს. ეს ბუნებრივია, რადგან განსაზღვრული ინტეგრალი არის რაღაც მუდმივი რიცხვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. ჩასმა $\ln x = z$ გვაძლევს

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = [\operatorname{arc\,tg} z]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2) ჩასმა $x = R\sin t$ გვაძლევს*

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} R^2\cos^2 t\,dt = \frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

---

* გაგახსენებთ, რომ მე-3 ქვეპარაგრაფში ეს ინტეგრალი გამოვთვალეთ მისი გეომეტრიული მნიშვნელობიდან გამომდინარე.

8. ინტეგრალის მნიშვნელოვანი თვისებები

ინტეგრალის

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

განსაზღვრის დროს ჩვენ ვთვლიდით, რომ ქვედა a საზღვარი ნაკლებია ზედა b საზღვარზე. შემდეგ შევავსეთ ის

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

დამოკიდებულებით. ზოგჯერ მოხერხებულია ინტეგრალის განხილვა იმ შემთხვევაშიც, როცა ქვედა საზღვარი მეტია ზედა საზღვარზე. რადგან ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულაში

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{27}$$

მარჯვენა ნაწილი იცვლის ნიშანს a და b რიცხვების გადანაცვლების დროს, ამიტომ, როცა $a>b$ უმჯობესია დავუშვათ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx} \tag{28}$$

ასე რომ, გვაქვს:

I. *განსაზღვრული ინტეგრალი იცვლის ნიშანს ინტეგრების საზღვრების გადანაცვლებისას.*

ცხადია, რომ ახლა (27) ფორმულა მართებულია ყოველი $a<b$, $a=b$, $a>b$ შემთხვევისათვის. შემდგომში ვიტყვით, რომ ინტეგრების საზღვრების მიმდევრობა *ნორმალურია*, თუ ქვედა საზღვარი ნაკლებია ზედაზე.

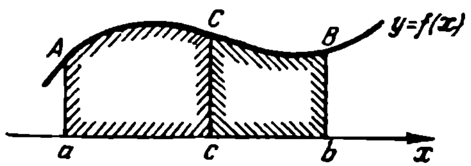
ინტეგრალის შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება, რომელსაც *ადიტიურობის* თვისება ეწოდება, ასეთია:

II. *თუ ინტეგრების* $[a, b]$ *შუალედი რაიმე* c *წერტილით* ($a<c<b$) *დაყოფილია ნაწილებად, მაშინ ინტეგრალი აღებული მთელს შუალედზე ტოლია ამ ნაწილებზე აღებული ინტეგრალების ჯამისა*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx} \tag{29}$$

ეს თვისება ცხადად გამომდინარეობს ინტეგრალის გეომეტრიული არსიდან. რადგან (ნახ. 207) $aABb$ ფიგურის ფართობი ტოლია $aACc$ და $cCBb$ ფიგურების ფართობების ჯამისა.

შევნიშნავთ, რომ (29) ფორმულა მართებულია არა მარტო მაშინ, როცა $a<c<b$, არამედ a, b, c წერტილების ნებისმიერი მდებარეობისათვის. მართლაც, თუ $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირველადი, მაშინ ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად



ნახ. 207.

$$\int_a^c f(x)dx=F(c)-F(a),$$

$$\int_c^b f(x)dx=F(b)-F(c)$$

მაშინ (29) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ტოლია $F(b)-F(a)$ სხვაობისა, რასაც უდრის მისი მარცხენა ნაწილიც*.

III. **თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.** *a და b წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ს შ ო რ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს ი ს ე თ ი C წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)} \tag{30}$$

მართლაც, თუ $F(x)$ პირველადის ცნებით ვისარგებლებთ

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

ტოლობის მარჯვენა მხარისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა, რომლის თანახმად

$$F(b)-F(a)=F'(c)(b-a).$$

საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $F'(x)=f(x)$ და ამიტომ $F'(c)=f(c)$.

(30) ფორმულას აქვს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. ის გვიჩვენებს, რომ $aABb$ მრუდწირული ტრაპეცია (ნახ. 208) $aPQb$ მ ა რ თ კ უ თ ხ ე დ ი ს ტოლდიდია. ამ მართკუთხედის $f(c)$ სიმაღლეს ეწოდება $aABb$ ტრაპეციის საშუალო ორდინატი.

---

* ანალიზური დამტკიცება (29) ფორმულისა, არ მოითხოვს, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს დადებითი, მაშინ როცა გეომეტრიული შინაარსიდან გამომდინარე დამტკიცების დროს უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ დადებითია.

IV. დადებითი ფუნქციის ინტეგრალი დადებითი რიცხვია, თუ ინტეგრების საზღვრები ნორმალური მიმდევრობისაა.

მართლაც, თუ $a<b$ და $f(x)>0$, მაშინ (30) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ორივე მამრავლი დადებითია.

ახლა განვიხილოთ ორი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქცია, რომლებიც $[a,b]$ შუალედზეა განსაზღვრული (ვგულისხმობთ, რომ $a<b$).

თუ

$$f(x)<g(x), \tag{31}$$

მაშინ

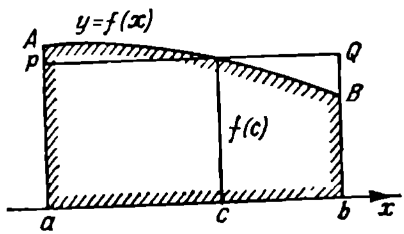
$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx. \tag{32}$$

V. უტოლობის ინტეგრება შეიძლება, თუ ინტეგრების საზღვრები ნორმალური მიმდევრობისაა.

მართლაც:

$$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.$$



ნახ. 208.

უკანასკნელ ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დადებითია ((31) პირობის თანახმად), ამიტომ თვით ინტეგრალიც დადებითია. მაშასადამე,

$$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)\,dx>0,$$

ეს კი (32) უტოლობის ტოლფასია.

შენიშვნა. დამტკიცების დროს ვისარგებლეთ

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ტოლობით.}$$

შემდეგ ტოლობებთან

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

ერთად ის არის შემდეგი ფორმულის

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\int f(x)dx]_a^b.$$

უშუალო შედეგი.

(30) ფორმულიდან ადვილად მიიღება ე. წ.

VI. ინტეგრალის შეფასება. თუ $|f(x)| \leqslant K$, მაშინ

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant K|b-a|. \tag{33}$$

მართლაც. $f(c)(b-a)$ ნამრავლის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება (33) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მყოფ რიცხვს.

მაგალითი. რადგან $|\sin x| \leqslant 1$, როცა $x > 10$ გვაქვს

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| < 10^{-8}.$$

მაშინ

$$\left|\int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx\right| < 6 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}. \tag{34}$$

ეს მაგალითი გვიჩვენებს (33) უტოლობის პრაქტიკულ ღირებულებას. წარმოვიდგინოთ, რომ რაიმე ნაგებობის, მაგალითად ხიდის ანგარიში გვაძლევს, რომ რაიმე კვანძზე დატვირთვა (ტონობით) გამოისახება

$$\int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx \tag{35}$$

ინტეგრალით. ამ ინტეგრალის გამოთვლა საკმაოდ რთულია, ამავე დროს (34) უტოლობა გვიჩვენებს, რომ დატვირთვა ნაკლებია 10^{-7} ტონაზე, ანუ 0,1 გრამზე! ცხადია, აზრი არა აქვს (35) ინტეგრალის გამოთვლას, ის უბრალოდ უნდა უგულებელვყოთ, ანუ ჩვენთვის საინტერესო კვანძი შეიძლება არ ჩავთვალოთ დატვირთულად.

§ 2. პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენების მეთოდიკა

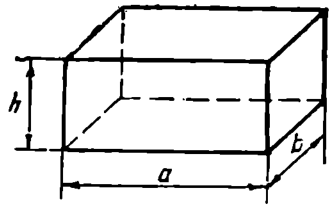
1. ვერტიკალურ კედელზე სითხის წნევის გამოთვლა

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

1. ვთქვათ, ჩვენ წინაა წყლით სავსე მართკუთხა რეზერვუარი (ნახ. 209). ვიპოვოთ p წნევა* რეზერვუარის წინა კედელზე.

* აქ და ქვემოთაც, როცა ვლაპარაკობთ „წნევაზე“, მხედველობაში გვაქვს მთელი ძალა, რომლითაც წყალი აწვება ჭურჭლის კედელს და არა ძალა, რომელიც მოდის ფართობის ერთეულზე (ე. ი. სრული და არა კუთრი წნევა).

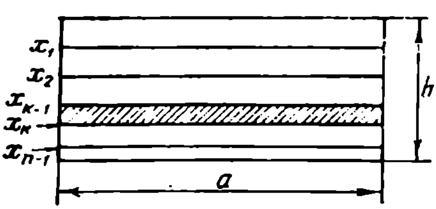
გავიხსენოთ ზოგიერთი ფაქტი ჰიდროსტატიკიდან. თუ წყლის ქვეშ იმყოფება რაიმე ჰორიზონტალური ბაქანი, მაშინ წყლის წნევა ბაქანზე იმ ცილინდრული სვეტის წონის ტოლია, რომლის ფუძე ამ ბაქნის ფართობია, ხოლო სიმაღლე — ბაქნის ჩაძირვის სიღრმეს ემთხვევა. რადგან ლაპარაკია წყლის შესახებ, რომლის კუთრი წონა ერთის ტოლია, ამიტომ ხსენებული ცილინდრის წონა მის მოცულობას უდრის, ანუ ბაქნის ფართობისა და ჩაძირვის სიღრმის ნამრავლის ტოლია. მაშასადამე, ეს ნამრავლი გვაძლევს ჰორიზონტალურ ბაქანზე წნევის სიდიდეს.



ნახ. 209.

თუ წყლის ქვეშ მოთავსებული ბაქანი არ არის ჰორიზონტალური, მაშინ მისი წერტილები მდებარეობენ სხვადასხვა სიღრმეზე და არ შეიძლება ვილაპარაკოთ „მთელი ბაქნის ჩაძირვის სიღრმეზე“. მაგრამ, თუ ბაქანი ძალიან მცირეა, მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ მისი წერტილები თითქმის ერთ სიღრმეზე იმყოფებიან, რომელიც შეიძლება ჩავთვალოთ მთელი ბაქნის ჩაძირვის სიღრმედ.

განვსაზღვროთ წნევა ასეთ ძალიან მცირე ბაქანზე. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, თითქოს ბაქანი მოვაბრუნეთ მისი ერთი წერტილის გარშემო ისე, რომ ის გახდა ჰორიზონტალური. რადგანაც წონასწორობაში მყოფი სითხის შიგნით წნევა ყოველ წერტილში ყველა მიმართულებით ერთი და იგივეა, ამიტომ ბაქნის მობრუნებით წნევა მასზე თითქმის არ შეიცვლება, მაგრამ მეორე მხრივ ბაქნის ამ ახალი ჰორიზონტალური მდებარეობისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ წნევის განსაზღვრის ზემოთ ხსენებული წესი, რადგან ბაქნის მობრუნებით არ იცვლება მისი ფართობი და ჩაძირვის სიღრმე (ეს უკანასკნელი არ იცვლება რადგან ბაქანი ძალიან მცირეა), ამიტომ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ



ნახ. 210.

წესი. *მცირე ბაქანზე წნევა მისი ფართობისა და ჩაძირვის სიღრმის ნამრავლის ტოლია.*

ამ მიახლოებითი წესის სიზუსტე მით მეტია, რაც ნაკლებია ზომები*.

* ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ წესის გამოყენების დროს დაშვებული ფარდობითი ცდომილება მიისწრაფვის ნულისაკენ ბაქნის ზომებთან ერთად.

დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას. რეზერვუარის წინა კედელი არ არის ძალიან მცირე, ამიტომ მის მიმართ ზემოთ ხსენებულ წესს ვერ გამოვიყენებთ. ამ წესით სარგებლობის მიზნით ავიღოთ საკმაოდ დიდი n რიცხვი და რეზერვუარის წინა კედლის გასწვრივ გავავლოთ $n-1$ ჰორიზონტალური წრფე, რომლებიც ზედა ნაპირიდან დაშორებული იქნებიან $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$ (ნახ. 210) მანძილებით. მთლიანობისათვის აღვნიშნოთ აგრეთვე $x_0=0$, $x_n=h$.

ეს წრფეები კედელს დაყოფენ n ვიწრო ზოლად. k ნომრის ზოლი (ზემოდან ქვევით) დაშტრიხულია ნახაზზე. თუ x_k-x_{k-1} სხვაობებიდან უდიდესი (ე. ი. $[0,h]$ შუალედის დაყოფის λ (რანგი)) მცირეა, მაშინ ყოველი ზოლი ძალიან ვიწროა და ამიტომ ყველა მისი წერტილი ერთსა და იმავე სიღრმეზე იმყოფება. მაშასადამე, წნევა ერთ ზოლზე შეიძლება გამოვთვალოთ ზემოთ მოყვანილი წესით*. k-ური ზოლის ფართობი მისი a ფუძისა და x_k-x_{k-1} სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. ე. ი ეს ფართობია $a(x_k-x_{k-1})$; რაც შეეხება მისი ჩაძირვის სიღრმეს, ის შეიძლება ჩაითვალოს x_{k-1} (ზოლის ზედა ნაპირის სიღრმე) და x_k (ქვედა ნაპირის სიღრმე) რიცხვებს შორის მოთავსებული ნებისმიერი რიცხვის ტოლად. მართლაც, ზოლის ჩაძირვის სიღრმე განვსაზღვრეთ, მიახლოებით, როგორც მისი ერთ-ერთი წერტილის ჩაძირვის სიღრმე. ავირჩიოთ რაიმე $\bar{x}_k$: $x_{k-1}\leqslant\bar{x}_k\leqslant x_k$ რიცხვი და ჩავთვალოთ ის k-ური ზოლის ჩაძირვის სიღრმედ. მაშინ ამ ზოლზე წნევა („ელემენტარული წნევა“) მიახლოებით

$$a\bar{x}_k\,(x_k-x_{k-1})$$

რიცხვის ტოლი იქნება. ხოლო სრული P წნევა (კვლავ მიახლოებით) იქნება:

$$P\approx\sum_{k=1}^{n}a\bar{x}_k\,(x_k-x_{k-1}). \tag{1}$$

(1) ტოლობის სიზუსტე მით მეტია, რაც უფრო ნაკლებია λ. ამიტომ P-ს ზუსტი მნიშვნელობა ტოლია არა აღნიშნული ჯამისა, არამედ მისი ზღვარისა, როდესაც $\lambda\to 0$, ე. ი.

$$P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}a\bar{x}_k(x_k-x_{k-1}).$$

მაგრამ ეს ზღვარი, როგორც

$$\sum_{k=1}^{n}f(\bar{x}_k)\;(x_k-x_{k-1})$$

---

* მართლაც წესის გამოსაყვანად მნიშვნელობა ჰქონდა მხოლოდ იმას, რომ მობრუნების ოპერაციას არ შეეცვალა ბაქნის ცალკეული წერტილების ჩაძირვის სიღრმე. ამიტომაც შეიძლება გამოვიყენოთ წესი ზოლის მიმართ, თუმცა მისი სიგრძე არ არის „მცირე“.

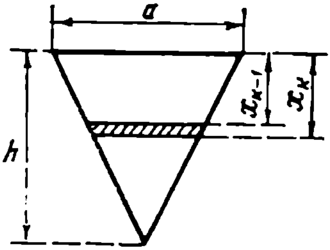
ჯამის ზღვარი, არის განსაზღვრული ინტეგრალი. მაშასადამე,

$$P=\int_{0}^{h} axdx.$$

შემდეგ, მარტივი გამოთვლებით გვაქვს

$$P=\left[\frac{a\,x^2}{2}\right]_0^h=\frac{a\,h^2}{2}.$$

II. განვიხილოთ ამ ტიპის სხვა ამოცანა. ვთქვათ სამკუთხა ფარი ჩაშვებულია წყალში ვერტიკალურად. ამასთან სამკუთხედის ფუძე წყლის თავისუფალი ზედაპირის დონეზე იმყოფება (ნახ. 211). უნდა განისაზღვროს ფარის ერთ-ერთ გვერდზე წყლის P წნევა.



ნახ. 211.

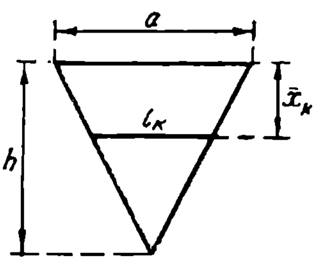
ზემოთ მოყვანილი წესის გამოსაყენებლად, კვლავ ვყოფთ ფარს საკმაოდ მცირე ზოლებად ზედა ნაპირიდან

$$x_0=0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=h$$

მანძილებით დაშორებული ჰორიზონტალური წრფეებით. ისევ გამოვიყენოთ k-ურ ზოლზე ზემოთ მიღებული წესი. ამ ზოლის ჩაძირვის სიმაღლედ მივიღოთ x_{k-1} და x_k რიცხვებს შორის მყოფი ნებისმიერი $\bar{x}_k$ რიცხვი. ვიპოვოთ ზოლის ფართობი. ეს ზოლი არის ტრაპეცია. მაგრამ (ყურადღება!) იმის გამო, რომ ზოლი ძალიან ვიწროა, ის შეიძლება ჩაითვალოს მართკუთხედად მიახლოების დიდი სიზუსტით. ამით გამოწვეული ფარდობითი ცდომილება მით ნაკლები იქნება, რაც უფრო ვიწროა ზოლი. წინა მაგალითიდან ვიცით, რომ ჩვენ სულ ერთია მოგვიხდება ზოლების სიგანის უსაზღვროდ შემცირება. ამიტომ საბოლოო შედეგზე ეს ცდომილება არ მოქმედებს*, ხოლო გამოთვლები გამარტივდება. აქ საქმე გვაქვს ზოგადი ხასიათის იდეასთან, რომელსაც იყენებენ ინტეგრალური აღრიცხვის სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნისას, ელემენტარული შესაკრების გამოთვლის დროს უნდა მიექცეს ყურადღება მისი გამოსახულების სიმარტივეს, თუ საჭიროა უგულებელვყოთ ამისათვის ხსენებული შესაკრების ნაწილი, იმ პირობით, რომ შესაკრების

* თუ რაიმე ჯამის ყოველი შესაკრები გამოთვლილია ძალიან მცირე ფარდობითი ცდომილებით, მაშინ მთელი ჯამის ფარდობითი ცდომილებაც იქნება აგრეთვე ძალიან მცირე.

დატოვებულ ნაწილთან შედარებით უგულებელყოფილი ნაწილი იყოს ძალიან მცირე. რადგან ჩვენ მიერ განხილული ელემენტარული შესაკრებები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, როცა $\lambda \to 0$, ამიტომ გამოთქმული იდეა ნიშნავს, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად ინტეგრალური ჯამის შედგენისას, შეიძლება უგულებელვყოთ ამ ჯამის უსასრულოდ მცირე შესაკრებებში ის ნაწილები, რომლებიც უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეებია თვით ამ შესაკრებებთან შედარებით.



ნახ. 212.

დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას. k-ური ზოლის (ანუ იმ მართკუთხედის, რომლითაც ეს ზოლი შევცვალეთ) სიგრძედ ჩავთვალოთ ზოლის გასწვრივ გავლებული ნებისმიერი ჰორიზონტალური წრფის მონაკვეთი. უფრო მარტივი და ბუნებრივი იქნება, თუ ავირჩევთ იმ წრფეს, რომელიც $\bar{x}_k$ მანძილითაა დაშორებული წყლის ზედაპირიდან, რაც ზოლის ჩაძირვის სიმაღლედ მივიღეთ თავიდანვე. 212-ე ნახაზზე მოცემული სამკუთხედების მსგავსებიდან, ცხადია, რომ ზოლის l_k სიგრძე აკმაყოფილებს

$$\frac{l_k}{a}=\frac{h-\bar{x}_k}{h}$$

თანაფარდობას, საიდანაც

$$l_k=\frac{a}{h}\,(h-\bar{x}_k).$$

ზოლის სიგანე $x_k - x_{k-1}$ სხვაობის ტოლია, ამიტომ მისი ფართობი იქნება

$$\frac{a}{h}\,(h-\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}).$$

თუ ამ ფართობს გავამრავლებთ $\bar{x}_k$-ზე, მივიღებთ (მიახლოებით!) ელემენტარულ წნევას

$$P_k\approx\frac{a}{h}\,(h-\bar{x}_k)\bar{x}_k\,(x_k-x_{k-1}).$$

აქედან

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{h} (h-\bar{x}_k)\,\bar{x}_k (x_k - x_{k-1}).$$

P-ს ზუსტი მნიშვნელობა ამ ჯამის ზღვრის ტოლია, როცა $\lambda \to 0$, ე.

$$P = \int_0^h \frac{a}{h} (h-x)\, x dx.$$

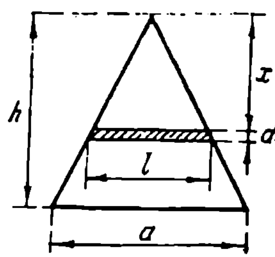
საბოლოოდ,

$$P = \frac{a}{h} \left| h \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{ah^2}{6}.$$

III. აი კიდევ მსგავსი ამოცანის ერთი მაგალითი, რომელსაც ამოვხსნით I და II ამოცანების ამოხსნით მიღებული გამოცდილების გამოყენებით.

ვთქვათ, წყალში ჩაშვებულია სამკუთხა ფარი, ამასთან სამკუთხედის ფუძე წყლის ზედაპირის პარალელურია, ხოლო მოპირდაპირე წვერო ამ ზედაპირზეა (ნახ. 213). ვიპოვოთ წნევა ფარის ერთ-ერთ გვერდზე.

ამოვხსნათ ეს ამოცანა ისეთივე მეთოდებით, როგორც ზემოთ. ჯერ P გამოვესახოთ მიახლოებით ჯამის სახით, ხოლო P-ს ზუსტი მნიშვნელობა იქნება ამ ჯამის ზღვარი, ანუ ინტეგრალი.



ნახ. 213.

ამ ფარის ერთ-ერთ ზოლზე წნევის გამოსათვლელად, შემოვიღოთ ზოლის ჩაძირვის $\bar{x}_k$ სიღრმე. მაგრამ უკვე ვიცით, რომ როცა ჯამიდან ინტეგრალზე გადავდივართ, $\bar{x}_k$ სიმბოლო იცვლება უბრალოდ x-ით. ზუსტად ასევე $x_k - x_{k-1}$ სხვაობა შეიცვლება dx სიმბოლოთი. თუ გავითვალისწინებთ ყოველივე ამას, შეიძლება მოკლედ ვთქვათ, რომ „ფარის x სიღრმეზე ვავლებთ dx სიგანის ზოლს" (ნახ. 213). ბრჭყალებში მოცემული ფრაზა არის I და II მაგალითებში ჩატარებული მსჯელობის მოკლე გამოთქმა. ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდებით სარგებლობისათვის ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა მსგავსი შემოკლებული მსჯელობა*.

* ხოლო საჭიროების შემთხვევაში უნდა შეგვეძლოს აზრის სრულად, გაშლილი სახით, გადმოცემა.

ელემენტარული ზოლის l სიგრძე გამოითვლება სამკუთხედების მსგავსებიდან:

$$\frac{l}{a}=\frac{x}{h}.$$

ასე რომ, ზოლის ფართობი* იქნება

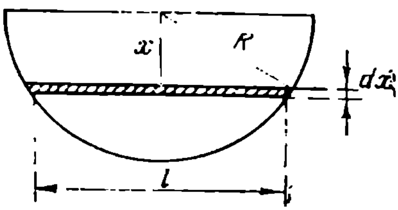
$$\frac{a}{h}\,xdx,$$

ხოლო წნევა ამ ზოლზე („ელემენტარული“ წნევა. რომელიც dP-თი აღინიშნება) გამოითვლება ამ ფართობის გამრავლებით ზოლის ჩაძირვის სიღრმეზე, ანუ ის უდრის**

$$dP=\frac{a}{h}\,x^2dx$$

სიდიდეს. აქედან მთელი P-სათვის ზუსტად ვღებულობთ

$$P=\int_0^h \frac{a}{h}\,x^2dx=\left|\frac{ax^3}{3h}\right|_0^h=\frac{ah^2}{3}.$$



ნახ. 214.

მივუთითებთ კიდევ, რომ ინტეგრალის საზღვრების დასადგენად სასარგებლოა მივმართოთ მთელი ფარის დანაწილებას წრფეებით, რომლებიც ზედა ნაპირიდან x_k მანძილებით არიან დაშორებული და შევნიშნოთ, რომ $x_0=0$ და $x_n=h$.

IV. მოცემული შემოკლებული წესი გამოვიყენოთ ნ ა ხ ე ვ ა რ წ რ ი ს ფორმის ვერტიკალური ფა-

---

* საჭირო რომ ყოფილიყო ამოხსნის დაწვრილებით გადმოცემა, მაშინ ვიტყოდით, რომ k-ური ზოლი მიახლოებით ჩაითვლება მართკუთხედად, რომლის ფართობია

$$\frac{a}{h}\,\bar{x}_k^2(x_k-x_{k-1}).$$

** დაწვრილებით უნდა ვთქვათ, რომ k-ურ ზოლზე წნევა ტოლია

$$\frac{a}{h}\,\bar{x}_k^2\,(x_k-x_{k-1})$$

სიდიდისა. როცა ამ სიდიდეებს შევაჯამებთ ყველა k-სათვის და გადავალთ ზღვარზე, მაშინ დაწერილი გამოსახულება შეიცვლება $\frac{a}{h}\,x^2dx$ გამოსახულებით.

რის გვერდზე წყლის P წნევის გამოსათვლელად, იმ პირობით, რომ ნახევარწრის დიამეტრი წყლის ზედაპირის სიგანის ტოლია (ნახ. 214).

ფარის x სიღრმეზე ვავლებთ ჰორიზონტალურ ზოლს. ვთქვათ, ამ ზოლის სიგანეა dx*, ხოლო სიგრძე l.

პითაგორას თეორემის თანახმად

$$x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=R^2,$$

საიდანაც

$$l=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

მაშასადამე, ზოლის ფართობია $2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, ხოლო წნევა ზოლზე იქნება

$$dP=2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

აქედან

$$P=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=-\int_0^R (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}d\,(R^2-x^2)=$$

$$=-\left[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R,$$

ე. ი.

$$P=\frac{2}{3}R^3.$$

ქვემოთ განვაზოგადებთ განხილულ მოსაზრებებს, მაგრამ მანამდე განვიხილავთ ამოცანათა კიდევ ერთ ჯგუფს.

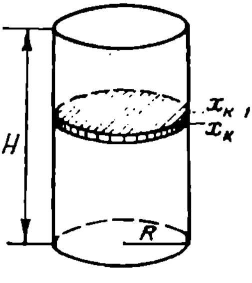
2. ჭურჭლიდან წყლის ამოსატუმბად საჭირო მუშაობის განსაზღვრა

I. ვთქვათ, ცილინდრულ ქვაბში (ნახ. 215) არის წყალი და გვინდა მისი ამოტუმბვა. უნდა გამოითვალოს ამისათვის საჭირო მუშაობა. წინასწარ გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა ქვაბიდან წყლის ერთი ნაწილის ამოსატუმბად. ეს ნაწილი უნდა ავიტანოთ ქვაბის ნაპირამდე**, შემდეგ კი ის გადმოიღვრება ქვაბიდან თავისი წონის გავ-

* აღნიშვნები უნდა იყოს შეთანხმებული. თუ ზოლის ჩაძირვის სიღრმე აღნიშნულია z-ით, ან l-ით და ა. შ., მაშინ მისი სიგანე უნდა აღინიშნოს dz, dl და ა. შ. სიმბოლოებით შესაბამისად.

** უფრო ზუსტად, საჭიროა ის ავიტანოთ ნაპირზე ცოტათი მაღლა, მაგრამ იმდენად მცირედ, რომ სულ ერთია, შეიძლება ვთქვათ ნაპირამდე.

ლენით (შლანგის ჰორიზონტალურ უბანზე ნაწილის გადასაადგილებლად ტუმბოს მუშაობა არ იხარჯება). ამიტომ საჭიროა ნაწილის სიმძიმის ძალის დაძლევა გზის ვერტიკალურ უბანზე, რომელიც ნაწილის ჩაძირვის სიღრმეს ემთხვევა. ამისათვის საჭირო მუშაობა ხსენებული სიდიდეების ნამრავლის ტოლია. წყლის კუთრი წონა უდრის ერთს და ამიტომ ნაწილის წონა მისი მოცულობის ტოლია. ამგვარად, ქვაბიდან **წყლის ნაწილის ამოსატუმბად საჭირო მუშაობა ამ ნაწილის მოცულობისა და მისი ჩაძირვის სიღრმის ნამრავლის ტოლია.**



ნახ. 215.

ამოცანის ამოსახსნელად ამ წესის უშუალოდ გამოყენება არ შეიძლება, რადგანაც სხვადასხვა ნაწილები სხვადასხვა სიღრმეზე იმყოფებიან. მოვიქცეთ ისე, როგორც ზემოთ. სახელდობრ, გავავლოთ ცილინდრის ფუძის პარალელურად $n-1$ სიბრტყე, რომლებიც

$$x_1<x_2<\dots<x_{n-1}$$

მანძილებით იქნებიან დაშორებული ზედაპირიდან. დავუშვათ $x_0=0$ და $x_n=H$. ამის შედეგად წყლის მთელი მასა დანაწილდება n ცილინდრულ „ელემენტარულ" ფენად. თუ $[0,H]$ შუალედის დანაწილების λ რანგი, ანუ x_k-x_{k-1} სხვაობებიდან უდიდესი, ძალიან მცირეა, მაშინ ყოველი ფენის სისქე ძალიან მცირე იქნება და შეიძლება მიახლოებით ჩავთვალოთ, რომ ერთი ფენის საზღვრებში ყველა ნაწილი ერთ დონეზე მდებარეობს. k-ური ზოლის (ზემოდან) სიღრმედ მივიღოთ ნებისმიერი $\bar{x}_k$ რიცხვი, რომელიც x_{k-1} და x_k რიცხვებს შორის იმყოფება. მაშინ წყლის ამ ფენის ამოსატუმბად საჭირო მუშაობა მისი $\pi R^2(x_k-x_{k-1})$ მოცულობის და $\bar{x}_k$ რიცხვის ნამრავლის, ანუ

$$\pi R^2\bar{x}_k(x_k-x_{k-1})$$

სიდიდის ტოლია. მთელი საძიებელი T მუშაობისათვის ვღებულობთ მიახლოებით

$$T\approx\sum_{k=1}^{n}\pi R^2\bar{x}_k(x_k-x_{k-1})$$

გამოსახულებას, რომელიც მით უფრო ზუსტია, რაც ნაკლებია λ. აქედან ისევე, როგორც პირველ ქვეპარაგრაფში, ვპოულობთ

$$T=\int_0^H\pi R^2x\,dx=\frac{1}{2}\pi R^2H^2.$$

II. გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა კონუსური ძაბრიდან წყლის ამოსატუმბავად (ნახ. 216). იმავე მეთოდის გამოყენებით, დავანაწილოთ წყლის მთელი მასა

$$x_0=0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=H$$

სიღრმეზე მდებარე ჰორიზონტალური სიბრტყეებით n ფენად. ყოველი ეს ფენა (რომელიც წაკვეთილ კონუსს წარმოადგენს) ჩავთვალოთ ცილინდრად, რაც არ იმოქმედებს საბოლოო შედეგზე, რადგან ფენის მოცულობის გამოთვლის დროს დაშვებული ფარდობითი ცდომილება, როცა $\lambda\to 0$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე თვით მოცულობა. თუ k-ური ფენის (ფენები ინომრება ზემოდან ქვემოთ) რადიუსს აღვნიშნავთ r_k-თი, და ჩავთვლით, რომ ის მოთავსებულია $\bar{x}_k$, სიღრმეზე, სადაც $x_{k-1}\leqslant\bar{x}_k\leqslant x_k$, მივიღებთ, რომ k-ური ფენის ამოსატუმბად საჭირო მუშაობა იქნება

$$T_k\approx\pi r_k^2\,\bar{x}_k(x_k-x_{k-1}).$$

სამკუთხედების მსგავსებიდან (იხ. ნახ. 216) ჩანს, რომ

$$\frac{r_k}{R}=\frac{H-\bar{x}_k}{H}.$$

აქედან

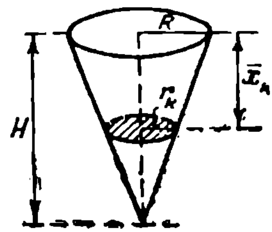
$$T_k\approx\pi\frac{R^2}{H^2}(H-\bar{x}_k)^2\bar{x}_k(x_k-x_{k-1}).$$

მაშასადამე,

$$T\approx\sum_{k=1}^{n}\pi\frac{R^2}{H^2}(H-\bar{x}_k)^2\bar{x}_k(x_k-x_{k-1}),$$

ხოლო ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda\to 0$ მიიღება T-ს ზუსტი მნიშვნელობა

$$T=\int_0^H\pi\frac{R^2}{H^2}(H-x)^2x\,dx=\frac{1}{12}\pi R^2H^2.$$



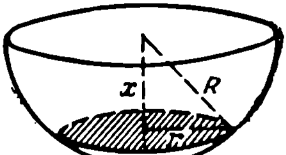
ნახ. 216.

III. გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა ნახევარსფეროდან წყლის ამოსატუმბად (ნახ. 217). ამოვხსნათ ეს ამოცანა შემოკლებულად, გამოვტოვოთ მსჯელობის ის დეტალები, რომლებიც როგორც უკვე

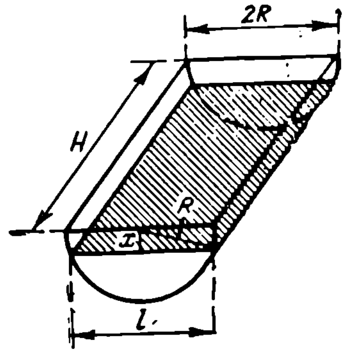
ვიცით არ მოქმედებენ საბოლოო შედეგზე. სახელდობრ, მთელ მოცულობას წარმოვიდგენთ დანაწილებულს ფენებად და განვიხილავთ ელემენტარულ ფენას, რომელიც x სიღრმეზე მდებარეობს და აქვს dx სისქე. თუ მას ჩავთვლით r რადიუსიან ცილინდრად, მაშინ ამ ფენის ამოსატუმბად საჭირო მუშაობა („ელემენტარული“ მუშაობა, რომელიც dT-თი აღინიშნება)

$$(\pi r^2\,dx)x = \pi r^2 x dx$$

ნამრავლის ტოლი იქნება.



ნახ. 217.



ნახ. 218.

პითაგორას თეორემიდან გამომდინარეობს (ნახ. 217), რომ

$$r^2=R^2-x^2,$$

მაშასადამე,

$$dT=\pi(R^2-x^2)xdx,$$

საიდანაც

$$T=\int_0^R \pi\,(R^2-x^2)\,xdx=\frac{1}{4}\,\pi R^4.$$

IV. გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა ნახევარცილინდრის ფორმის ვარცლიდან (ნახ. 218) წყლის ამოსატუმბად. ფენა, რომელიც x სიღრმეზე იმყოფება და აქვს dx სიგანე, ჩავთვალოთ მართკუთხა ფირფიტად. მისი სიგრძე ამ ვარცლის H სიგრძის ტოლია, ხოლო l სიგანე გამოითვლება პითაგორას თეორემით

$$l=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

ფენის სიმაღლე dx-ის ტოლია. მაშასადამე, მისი მოცულობა იქნება $Hldx=2H\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, ხოლო ელემენტარული მუშაობა

$$dT=2Hx\sqrt{R^2-x^2}dx.$$

აქედან

$$T=\int_0^R 2\,Hx\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}\,HR^3.$$

3. ინტეგრალის გამოყენება კონკრეტულ საკითხებში

წინა ქვეპარაგრაფებში მიღებული გამოცდილება გამოვსახოთ ზოგადი სქემით.

ვთქვათ, გვინდა რაიმე ფიზიკური ან გეომეტრიული A სიდიდის იმ მნიშვნელობის მოძებნა, რომელიც შეესაბამება x ცვლადის a-დან b-მდე ცვლილებას (მაგალითად წყლის წნევა ჭურჭლის ვერტიკალურ კედელზე, რომელიც შეესაბამება x სიღრმის ცვლას 0-იდან h-მდე).

ამ სიდიდეს ვთვლით ადიტიურად, ანუ ისეთ სიდიდედ, რომ როცა $[a,b]$ შუალედი c წერტილით ($a<c<b$) იყოფა $[a,c]$ და $[c, b]$ შუალედებად, A-ს მნიშვნელობა მთელს $[a, b]$ შუალედზე უდრის $[a, c]$ და $[c, b]$ შუალედების შესაბამის მნიშვნელობათა ჯამს*.

დავყოთ $[a, b]$ შუალედი

$$x_0=a<x_1<\ldots<x_{n-1}=b \tag{2}$$

წერტილებით n ნაწილად. A სიდიდეც დაიყოფა შესაბამისად $A_1, A_2,\ldots,A_n$ n შესაკრებად:

$$A=\sum_{k=1}^{n}A_k.$$

ვთქვათ, არსებობს ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომ $[x_{k-1}, x_k]$ შუალედის შესაბამისი „ელემენტარული" A_k შესაკრები მიახლოებით ასე ჩაიწერება

$$A_k\approx f(\overline{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}), \tag{3}$$

სადაც $\overline{x}_k$ ძევს x_{k-1} და x_k წერტილებს შორის. ამასთან (3) ტოლობის ცდომილება (2) დანაწილების უსასრულოდ მცირე λ რანგის დროს არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე A_k.

* შეიძლება ვთქვათ, რომ A არის „შუალედის ფუნქცია" და შემოვიღოთ აღნიშვნები $A([a, b])$, $A([a, c])$ და ა. შ. მაშინ A სიდიდის ადიტიურობა ნიშნავს, რომ $A([a, b])=A([a, c)]+A([c, b])$.

ამ შემთხვევაში A სიდიდისათვის მიღებული მიახლოებითი გამოსახულება

$$A\approx\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1}),$$

მით უფრო ზუსტია, რაც ნაკლებია λ. მაშასადამე, A სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობა იქნება აღნიშნული ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda\to0$, ანუ

$$\boxed{A=\int_a^b f(x)dx} \qquad (4)$$

პრაქტიკაში ეს მსჯელობა ღებულობს უფრო მოკლე ხასიათს, თუ ვიტყვით, რომ A სიდიდის ΔA ელემენტს, რომელიც $[x, x+\Delta x]$ ელემენტარულ შუალედს შეესაბამება, სიზუსტით უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირემდე, წარმოვიდგენთ

$$\Delta A\approx f(x)\Delta x \qquad (5)$$

სახით, მაშინ მართებულია (4) ტოლობა.

(5) ტოლობას წერენ

$$dA=f(x)dx \qquad (6)$$

სახით* და ამბობენ, რომ A სიდიდე მიიღება „dA ელემენტების შეჯამებით“. სინამდვილეში ინტეგრალი არის არა ჯამი, უბრალოდ, არამედ ჯამის ზღვარი და ზღვარზე გადასვლის გამო მიღებული შედეგი არის არა მიახლოებითი, არამედ ზუსტი.

ამგვარად, საქმე მიიყვანება იმ $f(x)$ ფუნქციის პოვნამდე, რომელიც აკმაყოფილებს (6) ტოლობას.

დავუბრუნდეთ მაგალითად პირველ ქვეპარაგრაფში განხილულ IV ამოცანას. გვქონდა

$$dP=2x\sqrt{R^2-x^2}dx$$

და ამან მოგვცა

$$P=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}R^3.$$

ფორმულა.

* (6) ტოლობა უკვე ზუსტია, მართლაც $A(x)$ არის A სიდიდის მნიშვნელობა, რომელიც $[a, x]$ ცვლად შუალედს შეესაბამება, მაშინ (4) ტოლობის თანახმად

$$A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

და ბაროუს თეორემიდან გამომდინარე $A'(x)=f(x)$ ტოლობა (6) ტოლობის ტოლფასია.

ზუსტად ასევე

$$dT=\pi(R^2-x^2)xdx$$

ტოლობამ, რომელიც მივიღეთ მეორე ქვეპარაგრაფის III ამოცანის ამოხსნის დროს, მოგვცა

$$T=\int_0^R \pi\,(R^2-x^2)\,xdx=\frac{1}{4}\,\pi R^4.$$

ქვემოთ სისტემატურად გამოვიყენებთ ამ სქემას.

§ 8. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიაში

1. ფართობების გამოთვლა. დეკარტის კოორდინატები

ვთქვათ, გამოსათვლელია $x=a$, $x=b$, $y=0$ და $y=f(x)>0$ წირებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის F ფართობი. უკვე ვიცით, რომ

$$F=\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

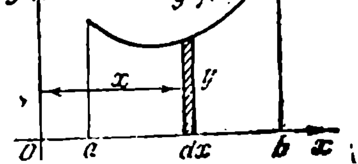
(1) ფორმულას ჩვეულებრივ ასეთი სახით წერენ

$$\boxed{F=\int_a^b ydx} \tag{2}$$

სადაც y უნდა შეიცვალოს $f(x)$ გამოსახულებით იმ წირის განტოლებიდან, რომლითაც შემოსაზღვრულია ტრაპეცია. (1) და (2) ფორმულები ადვილად მიიღება წინა პარაგრაფის მეთოდებით. მართლაც, თუ 219-ე ნახაზზე დაშტრიხულ ელემენტარულ ზოლს ჩავთვლით მართკუთხედად, რომლის ფუძეა dx, ხოლო სიმაღლე — y, მაშინ მისი ფართობი

$$dF=ydx. \tag{3}$$

საკმარისია (3) გამოსახულებების „შეჯამება“, რომ მივიღოთ (2) ინტეგრალი.



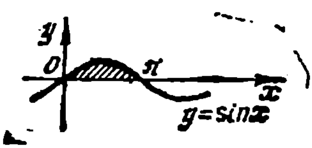
ნახ. 219.

მ ა გ ა ლ ი თ ი გამოვთვალოთ სინუსოიდის ნახევარტალღით შემოსაზღვრული ფართობი (ნახ. 220). (2) ფორმულის თანახმად გვაქვს

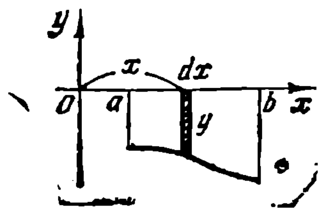
$$f=\int_0^\pi \sin xdx=[-\cos x]_0^\pi=2$$

შევნიშნავთ, რომ (2) ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც $y=f(x)$ მრუდი მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ, ე. ი. როცა $f(x)>0$. თუ $f(x)<0$ (ნახ. 221), მაშინ დაშტრიხული ზოლის ფართობი იქნება $dF=-ydx$ (ვინაიდან ფართობი დადებითია, ხოლო $y<0$,). საიდანაც

$$F=-\int_a^b ydx. \tag{4}$$



ნახ. 220.

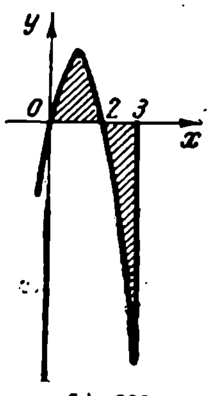


ნახ. 221.

დასასრულს, თუ საჭიროა მოინახოს იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, წირებითაა შემოსაზღვრული, სადაც $y=f(x)$ მრუდი ჰკვეთს Ox ღერძს, მაშინ საჭიროა $[a, b]$ მონაკვეთი დაიყოს ისეთ ნაწილებად, რომლებზეც $f(x)$ ფუნქცია არ იცვლის ნიშანს, და ყოველ ნაწილზე გამოვიყენოთ (2) ან (4) ფორმულა შესაბამისად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ $y=0$, $y=6x-3x^2$, $x=3$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი ფართობი ნაჩვენებია 222-ე ნახაზზე, სადაც $y=6x-3x^2$ პარაბოლა ჰკვეთს Ox ღერძს $x=0$ და $x=2$ წერტილებში. მაშასადამე,



ნახ. 222.

$$F=\int_0^2 ydx-\int_2^3 ydx=\int_0^2 (6x-3x^2)dx-\int_2^3(6x-3x^2)\,dx.$$

მაგრამ

$$\int_0^2 (6x-3x^2)\,dx=[3x^2-x^3]_0^2=4.$$

$$\int_2^3 (6x-3x^2)dx=[3x^2-x^3]_2^3=-4,$$

საიდანაც $F=8$.

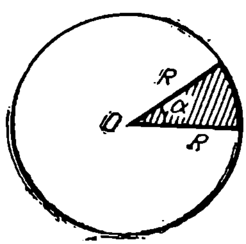
2. ფართობების გამოთვლა. პოლარული კოორდინატები

ვთქვათ, R რადიუსიანი წრის ცენტრიდან α კუთხით (α გაზომილია რადიანებით) გავლებულია ორი რადიუსი. როგორც ცნობილია* მიღებული სექტორის ფართობი (ნახ. 223)

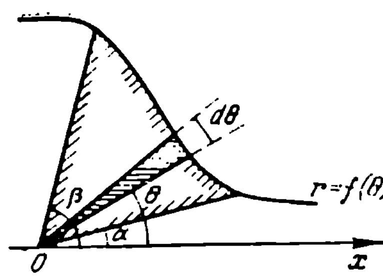
$$F=\frac{1}{2}\alpha R^2. \tag{5}$$

ეს შედეგი გვაძლევს შემდეგი ამოცანის ამოხსნის საშუალებას: ვიპოვოთ $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ სხივებით და $r=f(\theta)$ მრუდით შემოსაზღვრული (არაწრიული) სექტორის F ფართობი (ნახ. 224). ამოვჭრათ ამ სექტორიდან ელემენტარული სექტორი, რომელიც მიიღება პოლარული ღერძისადმი θ და $\theta+d\theta$ კუთხეებით დახრილი სხივებით (ნახ. 224). თუ ამ ელემენტარულ სექტორს ჩავთვლით წრიულ სექტორად**, მაშინ (5) ფორმულის თანახმად მისი ფართობი იქნება

$$dF=\frac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$



ნახ. 223.



ნახ. 224.

აქედან

$$\boxed{F=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta.} \tag{6}$$

---

* (5) ფორმულის მართებულობა ცხადია, რადგან ადგილი აქვს პროპორციას

$$\frac{F}{\pi R^2}=\frac{\alpha R}{2\pi R}.$$

** ცხადია, რომ ამით გამოწვეული ცდომილება არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე ელემენტარული სექტორის ფართობი.

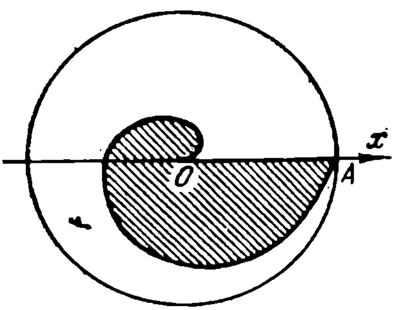
(6) ფორმულით სარგებლობის დროს r უნდა შევცვალოთ $f(\theta)$ ფუნქციით $r=f(\theta)$ განტოლებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $r=k\theta$ არქიმედის სპირალის პირველი ხვეულათი და პოლარული ღერძით (ნახ. 225).

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $\alpha=0$, $\beta=2\pi$. მაშასადამე,

$$F=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(k\theta)^2\ d\theta=\frac{4}{3}\ k^2\pi^3. \tag{7}$$

ამ შედეგს შეიძლება მივცეთ თვალსაჩინო ფორმულირება. სახელდობრ, არქიმედის სპირალის პოლარულ ღერძთან გადაკვეთის A წერტილის რადიუს-ვექტორი $OA=r=k\cdot 2\pi$. გამოდის, რომ OA რადიუსიანი წრის ფართობი ტოლია $\pi OA^2=4k^2\pi^3$ სიდიდის. თუ ამ ტოლობას შევადარებთ (7) ტოლობას, მივიღებთ ჯერ კიდევ არქიმედის მიერ აღმოჩენილ დებულებას: პ ო ლ ა რ უ ლ ი ღ ე რ ძ ი თ ა დ ა ა რ ქ ი მ ე დ ი ს ს პ ი რ ა ლ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ხ ვ ე უ ლ ა ს გ ა დ ა კ ვ ე თ ი თ მ ი ღ ე ბ უ ლ ი ფ ი გ უ რ ი ს ფ ა რ თ ო ბ ი ტ ო ლ ი ა ი მ წ რ ი ს ფ ა რ თ ო ბ ი ს $\frac{1}{3}$ ნ ა წ ი ლ ი ს ა, რ ო მ ლ ი ს რ ა დ ი უ ს ი ხ ვ ე უ ლ ა ს წ ე რ ტ ი ლ ი ს უ დ ი დ ე ს ი რ ა დ ი უ ს-ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ტ ო ლ ი ა.

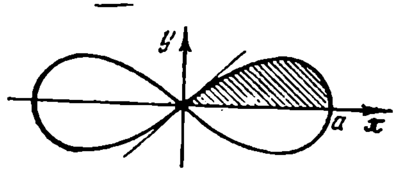


ნახ. 225.

2) გამოვთვალოთ

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

ლემნისკატით შემოსაზღვრული ფართობი.



ნახ. 226.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯერ კიდევ პირველ თავში იყო ნაჩვენები, რომ ლემნისკატის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე

$$r^2=a^2\cos 2\theta.$$

ლემნისკატი სიმეტრიულია ორივე ღერძის მიმართ, ის ნაწილი კი, რომელიც მდებარეობს პირველ საკოორდინატო კუთხეში, მოთავსებულია $\theta=0$ და $\theta=\frac{\pi}{4}$ სხივებს

შორის. მაშასადამე, ლემნისკატის ამ ნაწილით და Ox ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (ნახ. 226) იქნება

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{4}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

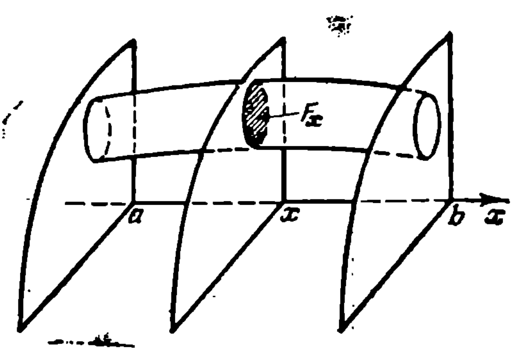
აქედან $F = a^2$

3. სხეულის მოცულობის გამოთვლა მისი კვეთების ფართობების საშუალებით

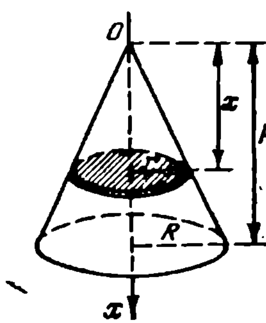
ვთქვათ, T სხეული მოთავსებულია $x=a$ და $x=b$ პარალელურ სიბრტყეებს შორის (ნახ. 227). Ox ღერძის x წერტილში გავავლოთ აღნიშნული სიბრტყეების პარალელური სიბრტყე. T სხეულის ამ სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული ფიგურის ფართობი აღვნიშნოთ F_x-ით. განვიხილოთ T სხეულის ელემენტარული ფენა, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძის x და $x+dx$ წერტილებში გამავალ სიბრტყეებს შორის. თუ ამ ფენას ჩავთვლით ცილინდრად, მაშინ ის წარმოგვიდგება, როგორც dx სისქის ფირფიტა, რომლის ფუძეა F_x. ამიტომ ამ ფენის dV მოცულობა იქნება $F_x dx$. აქედან T სხეულის V მოცულობისათვის ვღებულობთ

$$\boxed{V = \int\limits_a^b F_x dx} \qquad (8)$$

ფორმულას. ე. ი. სხეულის მოცულობა უდრის მისი განივი კვეთის ფართობიდან აღებულ ინტეგრალს.



ნახ. 227.



ნახ. 228.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1) ვთქვათ, T სხეული არის კონუსი (ნახ. 228). ავირჩიოთ Ox ღერძად კონუსის ღერძი და მივმართოთ ის O წვეროდან

კონუსის ფუძისაკენ. კონუსის კვეთა ფუძის პარალელური სიბრტყით, რომელიც x მანძილითაა დაშორებული წვეროდან წარმოადგენს რაიმე r რადიუსიან წრეს. ამიტომ

$$F_x=\pi r^2.$$

სამკუთხედების მსგავსებიდან ადვილად მიიღება პროპორცია

$$\frac{r}{R}=\frac{x}{H}.$$

აქედან $r=\frac{R}{H}x$ და კონუსის მოცულობისათვის მიიღება ცნობილი ფორმულა

$$V=\int_0^H \pi\frac{R^2}{H^2}x^2\,dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

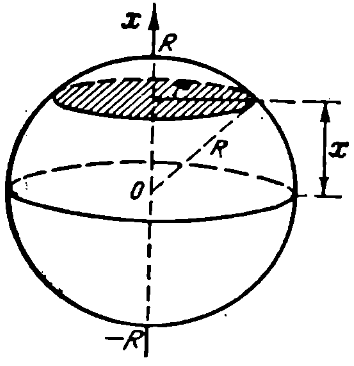
2) ასევე ადვილად მოიძებნება სფეროს მოცულობა. 229-ე ნახაზზე სფეროს კვეთა x სიბრტყით (სადაც $-R\leqslant x\leqslant R$) გვაძლევს წრეს, რომლის r რადიუსი პითაგორას თეორემის თანახმად ტოლია $\sqrt{R^2-x^2}$ სიდიდისა.

აქედან

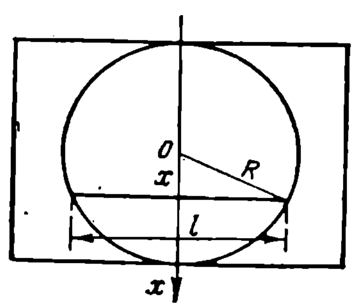
$$F_x=\pi r^2=\pi(R^2-x^2),$$

ამიტომ სფეროს მოცულობა

$$V=\pi\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$



ნახ. 229.



ნახ. 230.

3) ორი ცილინდრის საერთო ნაწილის მოცულობა. ვთქვათ, საერთო R რადიუსის მქონე ორი ცილინდრის ღერძები ურთიერთმართობულია. გამოვთვალოთ ცილინდრების საერთო T ნაწილის V მოცულობა. მიღებული სხეულის თვალსაჩინოდ წარმოდგენა ძნელია, მაგრამ მოცულობის გამოსათვლელად ეს არ არის აუცილებელი.

ვთქვათ, P არის ის სიბრტყე რომელიც ორივე ცილინდრის ღერძებს შეიცავს. Ox ღერძად ავირჩიოთ წრფე, რომელიც გადის ცილინდრების ღერძების გადაკვეთის წერტილში და P სიბრტყის მართობია. თუ T სხეულს გავკვეთავთ სიბრტყით, რომელიც P სიბრტყის პარალელურია და მისგან დაშორებულია $x\,(-R\leqslant x\leqslant R)$ მანძილით, მაშინ ეს სიბრტყე გაკვეთს ორივე ცილინდრს რაიმე ზოლზე. მაგრამ ეს ზოლები ერთნაირია, ამიტომ T სხეულის კვეთა ხსენებული სიბრტყით წარმოადგენს კვადრატს. ამ კვადრატის l გვერდი ადვილად მოინახება 230-ე ნახაზზე, რომელზეც გამოსახულია ცილინდრების ხედი ზემოდან*. პითაგორას თეორემის თანახმად

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2+x^2=R^2.$$

აქედან

$$F_x=l^2=4(R^2-x^2)$$

(8) ფორმულის თანახმად

$$V=\int_{-R}^{+R}4\,(R^2-x^2)\,dx=4\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}=\frac{16}{3}\,R^3.$$

საინტერესოა, რომ პასუხი არ შეიცავს არავითარ ირაციონალობას.

4) განვიხილოთ ე. წ. ცილინდრული მონაკვეთი, ანუ T სხეული, რომელიც მოიკვეთება ცილინდრისაგან მისი ფუძის დიამეტრზე გამავალი სიბრტყით. 231-ე ნახაზზე შემოვიღოთ აღნიშვნები $OA=R$, $AB=H$. თუ T სხეულს გავკვეთავთ OAB სამკუთხედის პარალელური სიბრტყით, მაშინ კვეთაში მიიღება $O_1A_1B_1$ სამკუთხედი, რომელიც OAB სამკუთხედის მსგავსია. თუ $OO_1=x\,(-R\leqslant x\leqslant R)$ მაშინ $O_1A_1B_1$ სამკუთხედის F_x ფართობი

$$F_x=\frac{1}{2}\,O_1A_1\cdot A_1B_1.$$

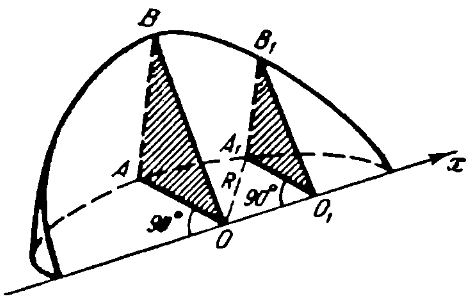
პითაგორას თეორემის თანახმად

$$O_1A_1=\sqrt{R^2-x^2},$$

* ვთვლით, რომ ერთ-ერთი ცილინდრის ღერძი ვერტიკალურია.

ხოლო OAB და $O_1A_1B_1$ სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{O_1A_1}{OA},$$



ნახ. 231.

საიდანაც

$$A_1B_1=\frac{AB}{OA}\cdot O_1A_1=$$

$$=\frac{H}{R}\sqrt{R^2-x^2}$$

გამოდის, რომ

$$F_x=\frac{H}{2R}(R^2-x^2).$$

და

$$V=\frac{H}{2R}\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{2R}\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}=\frac{2}{3}R^2H.$$

4. ბრუნვის სხეულის მოცულობა

ვთქვათ, $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურა ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 232). გამოვთვალოთ მიღებული T სხეულის V მოცულობა. ის ადვილად გამოითვლება (8) ფორმულის საშუალებით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ T სხეულის კვეთა Ox ღერძის x წერტილში გამავალი სიბრტყით არის $f(x)$ რადიუსიანი წრე. აქედან*

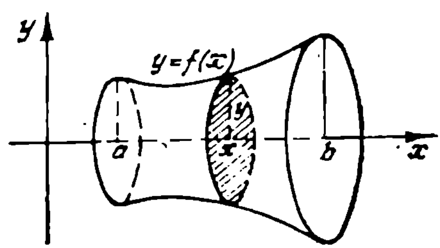
$$F_x=\pi f^2(x)$$

და

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

ჩვეულებრივ ამ ფორმულას შემდეგი სახით წერენ

$$\boxed{V=\pi\int_a^b y^2dx} \qquad (9)$$



ნახ. 232.

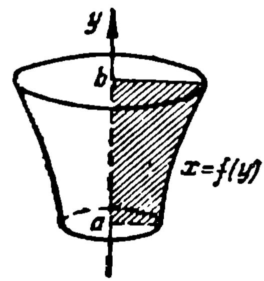
* სიმარტივისათვის ვგულისხმობთ, რომ $f(x)\geqslant 0$. ცხადია, რომ $F_x=\pi f^2(x)$ ტოლობა მართებულია მაშინაც, როცა $f(x)$ იცვლის ნიშანს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ მოცულობა სხეულისა, რომელიც მიიღება Ox ღერძისა და $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ სინუსოიდის ნახევარტალღით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 220). გვექნება

$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $y=a$, $y=b$, $x=0$, $x=f(y)$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურა ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო (ნახ. 233), მაშინ მიღებული სხეულის V მოცულობა გამოითვლება ანალოგიური ფორმულით

$$\boxed{V=\pi\int_a^b x^2\,dy} \qquad (10)$$

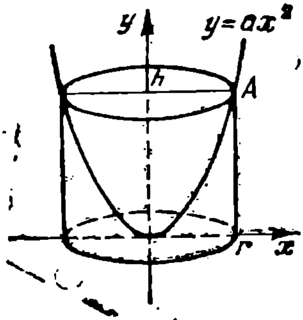


ნახ. 233.

სადაც x უნდა შეიცვალოს $f(y)$-ით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $y=ax^2$ $(a>0)$ პარაბოლის რკალი, რომელიც მოიკვეთება $y=h>0$ წრფით, ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო (ნახ. 234). მიღებული სხეულის მოცულობა (მას ეწოდება ბრუნვის პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი) (10) ფორმულის თანახმად იქნება

$$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h\frac{y}{a}\,dy=\frac{\pi h^2}{2a}.$$



ნახ. 234.

ამ შედეგს შეიძლება მივცეთ თვალსაჩინო ფორმულირება, თუ გავითვალისწინებთ ნახაზზე აღნიშნულ პარაბოლის A წერტილს. მის r აბსცისას და h ორდინატს შორის ადგილი აქვს თანაფარდობას $h=ar^2$. მაშასადამე,

$$V=\frac{1}{2}\,\pi\,\frac{h}{a}\,h=\frac{1}{2}\,\pi r^2h.$$

მაგრამ πr^2h არის ცილინდრის მოცულობა, რომლის რადიუსი არის r და სიმაღლე h, საიდანაც გამომდინარეობს

ა რ ქ ი მ ე დ ი ს თ ე ო რ ე მ ა. ბ რ უ ნ ვ ი ს პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი ს მ ო ც უ ლ ო ბ ა უ დ რ ი ს ი მ ც ი ლ ი ნ დ რ ი ს მ ო ც უ-

ლობის ნახევარს, რომელსაც იგივე სიმაღლე და ფუძის იგივე რადიუსი აქვს.

ნ. წირის რკალის სიგრძე

განვიხილოთ საკითხი გლუვი* $y=f(x)$ $(a\leqslant f(x)\leqslant b)$ წირის რკალის s სიგრძის განსაზღვრის შესახებ. გამოვყოთ ამ რკალის ელემენტარული ds მონაკვეთი. ვინაიდან წირი გლუვია, ds მონაკვეთი შეიძლება მიახლოებით ჩავთვალოთ წრფივ** მონაკვეთად. თუ დაშტრიხული სამკუთხედის მიმართ (ნახ. 235) გამოვიყენებთ პითაგორას თეორემას, მივიღებთ.***

$$\boxed{ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}} \tag{11}$$

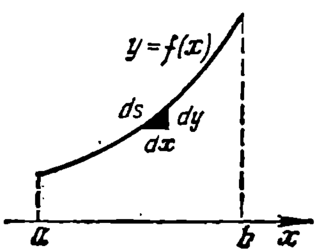
მაგრამ $dy=y_x'dx$, მაშასადამე,

$$ds=\sqrt{1+y'^2_x}\,dx \tag{12}$$

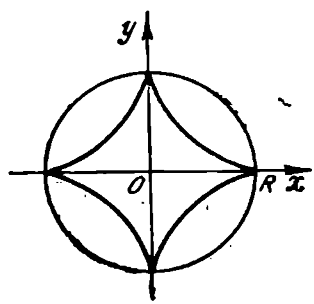
$$\boxed{s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2_x}\,dx} \tag{13}$$

სადაც

$$y'_x=f'(x).$$



ნახ. 235.



ნახ. 236.

* გავახსენებთ, რომ წირს ეწოდება გლუვი, თუ მის ყოველ წერტილში არსებობს მხები, რომელიც უწყვეტად იცვლება შეხების წერტილთან ერთად. კერძოდ, $y=f(x)$ წირი გლუვია, თუ არსებობს უწყვეტი $f'(x)$ წარმოებული.

** ცნობილია, რომ გლუვი წირის უსასრულოდ მცირე რკალი მისი ქორდის ეკვივალენტურია.

*** მკაცრად რომ ვთქვათ, სამკუთხედის ვერტიკალური კათეტი Δy-ის ტოლია, Δy-ის dy-ით შეცვლისას ცდომილება უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვნახოთ

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$$

წირის რკალის სიგრძე

ამ წირს ეწოდება ა ს ტ რ ო ი დ ი*, მას აქვს 236-ე ნახაზზე გამოსახული სახე. ის სიმეტრიულია ორივე ღერძის მიმართ (x და y ცვლადები განტოლებაში შედის კუბური ფესვის კ ვ ა დ რ ა ტ ი ს ს ა ხ ი თ $x^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{x})^2$). პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილის განტოლებაა

$$y=\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{14}$$

ასე, რომ x იცვლება 0-დან R-მდე, შესაბამისად y იცვლება R-იდან 0-მდე. 14) ტოლობიდან გვაქვს

$$y_x'=\frac{3}{2}\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right),$$

ანუ

$$y_x'=-\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}, \tag{15}$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $0<x\leqslant R$, წირი გლუვია, (რადგან ამ შემთხვევაში წარმოებული უწყვეტია). თუ $x=R$, მაშინ $y_x'=0$, ხოლო თუ $x\to 0$, მაშინ $y_x'\to -\infty$. გამოდის, რომ ასტროიდი ეხება ორივე ღერძს. (15) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$y_x'^2=\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1.$$

აქედან I მეოთხედში მოთავსებული რკალის სიგრძეა

$$\int_0^R \sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_0^R R^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{2}R^{\frac{1}{3}}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^R=\frac{3}{2}R.$$

---

* ის კინემატიკური წარმოშობისაა. თუ წრეწირი გორავს სრიალის და გრეხვის გარეშე, უძრავი დიდი რადიუსიანი წრეწირის შიგა ნაწილის გასწვრივ, მაშინ მისი ყოველი წერტილი აღწერს წირს, რომელსაც ჰ ი პ ო ც ი კ ლ ო ი დ ი ეწოდება. ასტროიდი ჰიპოციკლოიდის ის კერძო შემთხვევაა, როდესაც რადიუსების შეფარდება 4-ის ტოლია. წირს, რომელსაც აღწერს წრეწირის წერტილი დიდი წრეწირის გ ა რ ე თ ა ნაწილის გასწვრივ მოძრაობის დროს, ეწოდება ე პ ი ც ი კ ლ ო ი დ ი. ყველა წირებს აქვთ გამოყენება კბილანა გადაბმულობის დროს.

მაშასადამე, მთელი ასტროიდის s სიგრძე

$$s=6R.$$

საინტერესოა, რომ ეს სიდიდე გამოისახება R-ის საშუალებით უფრო მარტივად ვიდრე წრეწირის სიგრძე, რომელიც უდრის $2\pi R=6{,}283\ldots R$,

6. ბრუნვის ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ, გლუვი $y=f(x)>0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ წირის რკალი ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 237). მოვნახოთ მიღებული ზედაპირის ფართობი L. ამისათვის ხსენებული რკალიდან გამოვყოთ ds ელემენტი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის ცვლილებას x-დან $(x+dx)$-მდე, თუ ამ ელემენტს ჩავთვლით წრფივად, მაშინ მისი ბრუნვით მიიღება წაკვეთილი კონუსი,* რომლის მსახველია ds. ამ კონუსის ფუძეების რადიუსებია y და $y+dy$. ამიტომ მისი გვერდის ზედაპირის ფართობი იქნება

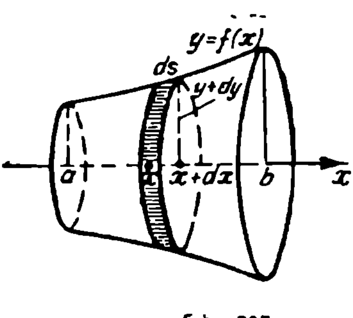
$$\pi[y+(y+dy)]ds=2\pi y ds+\pi dy ds \qquad (16)$$

ცნობილია, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენების დროს უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეები შეიძლება უგულებელვყოთ. რადგანაც (როცა dx, dy და ds უსასრულოდ მცირეებია) $dyds$ ნამრავლი არის უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირე (16) გამოსახულებასთან შედარებით, ამიტომ ის შეიძლება უგულებელვყოთ და (16) ტოლობიდან მივიღებთ

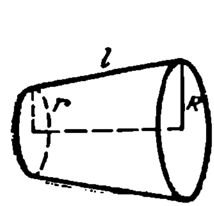
$$dL=2\pi y ds. \qquad (17)$$

მაგრამ (12) ტოლობიდან

$$ds=\sqrt{1+y'^2_x}\,dx.$$



ნახ. 237



ნახ. 238.

* წაკვეთილი კონუსის გვერდის ზედაპირის ფართობი ტოლია $\pi(r+R)l$ სიდიდისა, სადაც l მსახველია, ხოლო r და R ფუძეების რადიუსებია (ნახ. 238).

აქედან და (17) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\boxed{L=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx} \tag{18}$$

სადაც $y=f(x)$ და $y'_x=f'(x)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$ ასტროიდის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი L.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ზემოთ უკვე მივიღეთ, რომ ასტროიდის პირველ მეოთხედში მოთავსებული რკალისათვის

$$y=\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt{1+y_x'^2}=R^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}.$$

ამ რკალის ბრუნვით მიიღება საძიებელი ზედაპირის ნახევარი, საიდანაც

$$L=4\pi\int_0^R\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}R^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx.$$

მოვახდინოთ ჩასმა $x=Rt^3$. მაშინ

$$L=12\pi R^2\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}tdt=6\pi R^2\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}d(t^2).$$

აქედან

$$L=-6\pi R^2\left[\frac{2}{5}(1-t^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{12}{5}\pi R^2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1) (18) ფორმულა გვაძლევს L ფართობის მნიშვნელობას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)>0$. თუ $f(x)<0$, მაშინ ინტეგრალის წინ უნდა დავწეროთ „—“ ნიშანი. თუ $y=f(x)$ წირი $x=a$ და $x=b$ საზღვრებში ჰკვეთს აბსცისათა ღერძს, მაშინ $[a,b]$ უნდა დაიყოს ისეთ ნაწილებად, რომლებზეც $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს ნიშანს და თითოეული მათგანისათვის გამოვიყენოთ სათანადო ფორმულა.

2) ზოგჯერ (18) ფორმულას ასეთი სახით წერენ

$$\boxed{L=2\pi\int_a^b yds} \tag{19}$$

სადაც a და b არის x აბსცისის და არა s რკალის ცვლილების საზღვრები.

შემთხვევა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$F=\int_a^b y\,dx, \quad V=\pi\int_a^b y^2dx \tag{20}$$

ფორმულების გამოყენება შეიძლება მაშინაც, როდესაც წირი მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x=x(t), \qquad y=y(t) \qquad (p\leqslant t\leqslant q),$$

ამასთან, როცა t იზრდება p-დან q-მდე, მაშინ x იზრდება a დან b-მდე. საჭიროა (20) ფორმულებში მოვახდინოთ ჩასმა $x=x(t)$, რაც გამოიწვევს y-ის შეცვლას $y(t)$-თი, a და b საზღვრები უნდა შევცვალოთ p და q რიცხვებით სათანადოდ.

რაც შეეხება რკალის სიგრძეს და ბრუნვის ზედაპირის ფართობს

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y_x'^2}\,dx, \quad L=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx. \tag{21}$$

აქ $x=x(t)$ ჩასმა გამოიწვევს ჩასმებს

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad dx=x'_t\,dt,$$

საიდანაც *

$$\sqrt{1+y_x'^2}dx=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt \tag{22}$$

და (21) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\boxed{s=\int_p^q \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt} \tag{23}$$

$$\boxed{L=2\pi\int_p^q y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt} \tag{24}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ F, V, s და L

$$x=R(t-\sin t), \qquad y=R(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

ციკლოიდის ერთი რკალისათვის.

---

* (22) ფორმულა უფრო მარტივად მიიღება უშუალოდ $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ ფორმულიდან და $dx=x_t'dt$, $dy=y_t'dt$ ტოლობებიდან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ $dx = R(1-\cos t)$. მაშასადამე,

$$F = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = 3\pi R^2.$$

ანალოგიურად

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt = 5\pi^2 R^3.$$

შემდეგ

$$x'_t = R(1-\cos t), \qquad y'_t = R\sin t,$$

საიდანაც

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = R\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = R\sqrt{2(1-\cos t)} =$$

$$= 2R\sin\frac{t}{2}.$$

მაშასადამე,

$$s = 2R\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4R\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8R,$$

ბოლოს,

$$L = 2\pi \int_0^{2\pi} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 4\pi R^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\pi R^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt,$$

თუ t-ს შევცვლით 2φ-თი, მივიღებთ

$$L = 16\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,d\varphi = -16\pi R^2 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi) =$$

$$= -16\pi R^2 \left[\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi}$$

და საბოლოოდ

$$L=\frac{64}{3}\pi R^2.$$

ამგვარად,

$$F=3\pi R^2,\ V=5\pi^2 R^3,\ s=8R,\ L=\frac{64}{3}\pi R^2.$$

8. რკალის სიგრძე პოლარული კოორდინატებით

ვთქვათ, საჭიროა $r=f(\theta)$ წირის რკალის სიგრძის გამოთვლა, სადაც $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$.

თუ

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta \tag{25}$$

ფორმულების საშუალებით გადავალთ დეკარტის კოორდინატებზე მაშინ (25) ტოლობები, სადაც $r=f(\theta)$, წარმოადგენს მიღებული წირის პარამეტრულ განტოლებებს, პარამეტრის როლს ასრულებს θ კუთხე.

ასეთ შემთხვევაში

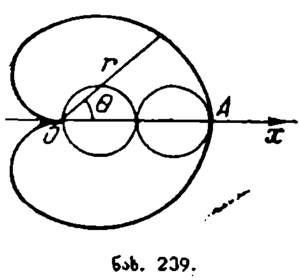
$$x_\theta'=r_\theta'\cos\theta-r\sin\theta,\qquad y_\theta'=r_\theta'\sin\theta+r\cos\theta,$$

საიდანაც

$$x_\theta'^2+y_\theta'^2=r_\theta'^2+r^2.$$

მაშასადამე, (23) ფორმულა მოგვცემს

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r_\theta'^2+r^2}\,d\theta} \tag{26}$$



ნახ. 239.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$r=a(1+\cos\theta)\qquad (a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

წირის სიგრძე.

ამ წირს (მას ეწოდება კ ა რ დ ი ო ი დ ი) აქვს 239-ე* ნახაზზე მოცემული სახე. რადგანაც

$$r'_\theta=-a\sin\theta,$$

---

* კარდიოიდი არის ეპიციკლოიდის კერძო სახე, როდესაც მოძრავი და უძრავი წრეწირების რადიუსები ტოლია. 239-ე ნახაზზე მარცხენა წრეწირი უძრავია, კარდიოიდს აღწერს A წერტილი.

ამიტომ

$$r_\theta'^2 + r^2 = a^2(\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) =$$

$$= 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot$$

გამოდის რომ

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 0.$$

ეს შედეგი უაზრობას წარმოადგენს.

საქმე იმაშია, რომ $\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}$-ის $2a\cos\frac{\theta}{2}$ - ით შეცვლის დროს ვუშვებთ შეცდომას. ეს შეცვლა კანონიერია როცა $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, მაგრამ როცა $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ უნდა დავწეროთ

$$\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -2a\cos\frac{\theta}{2}\cdot$$

მართლაც, $\sqrt{A^2}=A$ ტოლობა მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა $A\geqslant0$, ხოლო როცა $A<0$, გვაქვს $\sqrt{A^2}=-A$. $\cos\frac{\theta}{2}$ ფუნქცია სწორედ დადებითია $[0,\pi]$ შუალედში და უარყოფითი $[\pi, 2\pi]$ შუალედში, ამიტომ სწორი ამოხსნა ასეთია:

$$s = \int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta + \int_\pi^{2\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 2a\int_\pi^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

საიდანაც

$$s = 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_\pi^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

§ 4. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში

1. სტატიკური მომენტები და ინერციის მომენტები

მექანიკაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მ ა ტ ე რ ი ა ლ უ რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს ცნება, ე. ი. ისეთი სხეულის ცნება, რომლის განზომილებები იმდენად მცირეა, რომ მას ვთვლით გეომეტრიულ წერტილად, მაგრამ ამავე დროს მხედველობაში ვღებულობთ მის მასას.

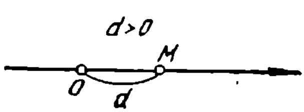
მატერიალური M წერტილის ი ნ ე რ ც ი ი ს მ ო მ ე ნ ტ ი O წერტილის მიმართ (ან Ox წრფის მიმართ, ან xy სიბრტყის მიმართ) ეწოდება M წერტილის m მასისა და O წერტილამდე (შესაბამისად Ox წრფემდე, ან xy სიბრტყემდე) d მანძილის კ ვ ა დ რ ა ტ ი ს ნამრავლს, ე. ი.

$$J_0=md^2 \text{ (შესაბამისად } J_x=md^2, \quad J_{xy}=md^2\text{)}.$$

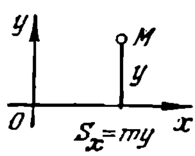
ანალოგიურად შემოაქვთ წერტილის ს ტ ა ტ ი კ უ რ ი S_0 (შესაბამისად S_x, S_{xy}) მ ო მ ე ნ ტ ი ს ცნება O წერტილის (შესაბამისად Ox ან xy) მიმართ. ამ შემთხვევაში M წერტილის m მასა მრავლდება d მანძილზე:

$$S_0=md, \qquad S_x=md, \qquad S_{xy}=md$$

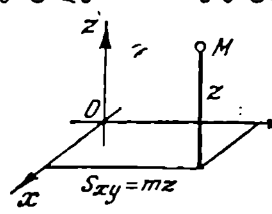
მაგრამ აქ ვითარება უფრო რთულია, ვინაიდან რამდენიმე M, M',... მატერიალური წერტილის განხილვის დროს, სასარგებლოა d, d', მანძილების აღება გარკვეული ნიშნით. თუ ლაპარაკია S_0 მომენტზე და მატერიალური წერტილები მოთავსებულია ღერძზე, რომელიც შეიცავს O წერტილს, მაშინ ხსენებული ნიშნის გარკვევა ადვილია. ამისათვის საჭიროა, ეს ღერძი მივიჩნიოთ კოორდინატთა ღერძად, O წერტილი კოორდინატთა სათავედ, ხოლო d ჩავთვალოთ M წერტილის კოორდინატად (ნახ. 240). მაგრამ თუ M წერტილები მდებარეობენ სიბრტყეზე, ან სივრცეში, მაშინ არა გვაქვს არავითარი საფუძველი იმისა, რომ d მანძილებს მივაწეროთ ესა თუ ის ნიშანი, ამიტომ წერტილების ამ მდებარეობისათვის S_0 მომენტს არ განიხილავენ. ანალოგიურად, S_x მომენტი შემოაქვთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც M წერტილები მოთავსებულია



ნახ. 240.



ნახ. 241.



ნახ. 242.

სიბრტყეზე, რომელიც შეიცავს Ox ღერძს. ამ შემთხვევაში O წერტილზე ავლებენ კოორდინატთა Oy ღერძს Ox ღერძის მართობულად, და d-ს განიხილავენ, როგორც M წერტილის y ორდინატას (ნახ. 241). როდესაც მატერიალური წერტილები სივრცეშია განლაგებული, S_x მომენტს ღერძის მიმართ არ განიხილავენ. პირიქით, S_{xy} მომენტი ამ შემთხვევაში შემოაქვთ სავსებით ბუნებრივად, თუ d-ს ჩავთვლით M წერტილის z კოორდინატად, რომელიც აითვლება Oz ღერძის გასწვრივ, სადაც z მართობია xy სიბრტყის (ნახ. 242.)

სასრული რაოდენობის წერტილისაგან შედგენილი მატერიალური სისტემის მომენტი (სტატიკური ან ინერციის) წერტილის მიმართ (შესაბამისად ღერძის, ან სიბრტყის მიმართ) სისტემის წერტილების ერთსახელა მომენტების ჯამის ტოლია. თუ მასები განაწილებულია უწყვეტად, მაშინ ჯამის ნაცვლად განიხილავენ ინტეგრალს.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. წირის მომენტები. განვიხილოთ მატერიალური $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ წირი. ჩავთვალოთ ის ერთგვაროვნად, ვიგულისხმოთ, რომ სიმკვრივე* ერთის ტოლია. მაშინ ჩვენი წირის ნებისმიერი რკალის მასა მისი სიგრძის ტოლი იქნება. ავიღოთ წირზე (x, y) წერტილი (ცხადია, რომ x და y დაკავშირებულია განტოლებით $y=f(x)$). ამოვჭრათ წირიდან ელემენტარული მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ds-ის ტოლია და რომელიც შეიცავს (x, y) წერტილს. თუ ჩავთვლით, რომ ამ მონაკვეთის მასა (ds-ის ტოლი) მოთავსებულია (x, y) წერტილში, მაშინ მისი მომენტები („ელემენტარული მომენტები") ცხადია, იქნება (ნახ. 243) შემდეგი სიდიდეების ტოლი:

$$dS_x=yds, \quad dS_y=xds, \; dJ_x=y^2ds, \quad dJ_y=x^2ds, \; dJ_0=(x^2+y^2)ds.$$

მთელი წირის მომენტები მიიღება ამ მომენტების შეკრებით. მაგალითად, სტატიკური მომენტი S_x Ox ღერძის მიმართ მოცემულია ფორმულით

$$\boxed{S_x=\int_a^b yds} \tag{1}$$

აქ y უნდა შეიცვალოს $f(x)$-ით, $ds=\sqrt{1+y_x'^2}dx$, a და b x აბსცისის ცვლილების საზღვრებია. ვიპოვოთ

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \qquad (-R\leqslant x\leqslant R).$$

---

* როცა მასა განაწილებულია წირის გასწვრივ, მაშინ სიმკვრივე განიხილება, როგორც რკალის მასისა და სიგრძის შეფარდება.

ნახევარწრეწირის სტატიკური მომენტი.

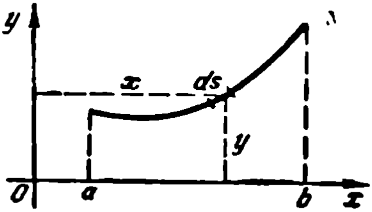
$$y_x' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad 1+y_x'^2 = 1+\frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}.$$

$$ds = \frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

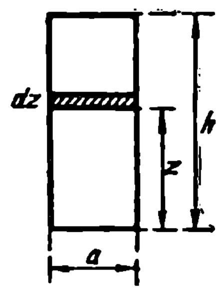
და ამიტომ

$$S_x = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2-x^2}\,\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R\int_{-R}^{+R} dx = 2R^2. \qquad (2)$$

II. ბ რ ტ ყ ე ლ ი ფ ი გ უ რ ე ბ ი ს მ ო მ ე ნ ტ ე ბ ი. ამ მაგალითებში ვთვლით, რომ მასა თანაბრად არის განაწილებული ამა თუ იმ ბრტყელ ფიგურაში. ამასთან სიმკვრივე (ე. ი. მასის შეფარდება მის ფართობთან) ერთის ტოლია.



ნახ. 243.



ნახ. 244.

1) ვიპოვოთ S_a და J_a მომენტები მართკუთხედისათვის, რომლის ფუძეა a, ხოლო სიმაღლე h, მისი ფუძის მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვყოთ მართკუთხედიდან ფუძის პარალელური dz სიგანის ელემენტარული ზოლი (ნახ. 244), რომელიც ფუძიდან z მანძილითაა დაშორებული. ზოლის მასა ტოლია მისი adz ფართობისა, ხოლო მისი ყოველი წერტილიდან ფუძემდე მანძილი ტოლია z-ის. ამიტომ

$$dS_a = azdz, \qquad dJ_a = az^2dz.$$

აქედან

$$S_a = \int_0^h azdz, \quad J_a = \int_0^h az^2dz,$$

ანუ

$$\boxed{S_a = \frac{1}{2}\,ah^2, \quad J_a = \frac{1}{3}\,ah^3} \tag{3}$$

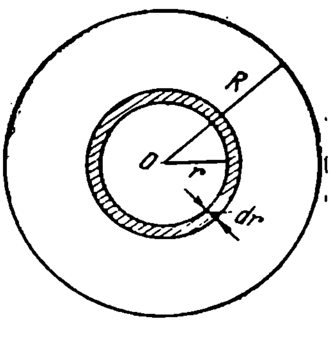
2) ვიპოვოთ R რადიუსიანი წრის ინერციის მომენტი J_0 O ცენტრის მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვყოთ წრიდან ელემენტარული რგოლი ცენტრით O წერტილში, რომელიც მოთავსებულია r და $r+dr$ რადიუსებიან წრეწირებს შორის (ნახ. 245). რგოლის ფართობი ტოლია $2\pi r dr$ რიცხვის და ყველა მისი წერტილი დაშორებულია O წერტილიდან r მანძილით. ამიტომ

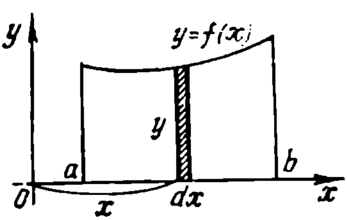
$$dJ_0 = 2\pi r^3 dr,$$

საიდანაც

$$J_0 = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$



ნახ. 245.



ნახ. 246.

3) მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)>0$ წირებით. ვიპოვოთ მისი მომენტები S_x, S_y, J_x, J_y.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვყოთ ტრაპეციიდან Oy ღერძის პარალელური dx სიგანის ელემენტარული ზოლი, რომელიც ამ ღერძიდან დაშორებულია x მანძილით (ნახ. 246). ამ ზოლის ყველა წერტილი ერთნაირად არის დაშორებული Oy ღერძიდან, ამიტომ (რადგან ზოლის ფართობია ydx)

$$dS_y = xydx, \qquad dJ_y = x^2 ydx,$$

საიდანაც

$$S_y=\int_a^b xydx, \qquad J_y=\int_a^b x^2\,ydx.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ზოლის მომენტი Ox ღერძის მიმართ, ეს ზოლი ჩავთვალოთ მართკუთხედად. მაშინ შეიძლება ვისარგებლოთ (3) ფორმულებით, სადაც h-ის მაგივრად შევიტანოთ y, ხოლო a-ს მაგივრად dx. ეს გვაძლევს

$$dS_x=\frac{1}{2}\,y^2dx, \quad dJ_x=\frac{1}{3}\,y^3dx.$$

ახლა საკმარისია შევაჯამოთ ეს ელემენტარული მომენტები. მაგალითად

$$\boxed{S_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx} \tag{4}$$

ვიპოვოთ იმ ნახევარწრის სტატიკური მომენტი S_x, რომელიც შემოსაზღვრულია ქვემოდან Ox ღერძით, ხოლო ზემოდან

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \qquad (-R\leqslant x\leqslant R)$$

ნახევარწრეწირით.

(4) ფორმულა გვაძლევს:

$$S_x=\frac{1}{2}\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}=\frac{2}{3}\,R^3. \tag{5}$$

III. სხეულების მომენტები. ამ ჯგუფის მაგალითებში განიხილება მატერიალური სხეულები. ვგულისხმობთ, რომ ეს სხეულები ერთგვაროვანია და აქვთ ერთის ტოლი სიმკვრივე *.

1) ვიპოვოთ კონუსის სტატიკური მომენტი და ინერციის მომენტი მისი ფუძის მიმართ.

აღვნიშნოთ კონუსის ფუძის რადიუსი R-ით, ხოლო სიმაღლე H-ით. გამოვყოთ კონუსიდან ფუძის პარალელური dx სისქის ელემენტარული ფირფიტა, რომელიც ფუძიდან x მანძილითაა დაშორებული (ნახ. 247).

---

* აქ სიმკვრივე არის სხეულის მასისა და მოცულობის შეფარდება.

თუ ფირფიტის რადიუსია r, მაშინ სამკუთხედების მსგავსებიდან მივიღებთ

$$\frac{r}{R}=\frac{H-x}{H},$$

აქედან $r=\frac{R}{H}(H-x)$ და ფირფიტის მოცულობაა

$$\pi r^2 dx=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-x)^2\,dx.$$

ფირფიტის ყველა წერტილი დაშორებულია კონუსის ფუძიდან x მანძილით, ამიტომ

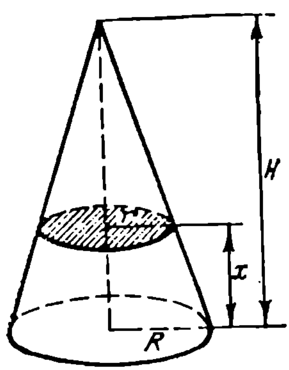
$$dS=\pi\,\frac{R^2}{H^2}\,(H-x)^2\,x dx,\qquad dJ=\pi\,\frac{R^2}{H^2}\,(H-x)^2\,x^2 dx.$$

გამოდის, რომ

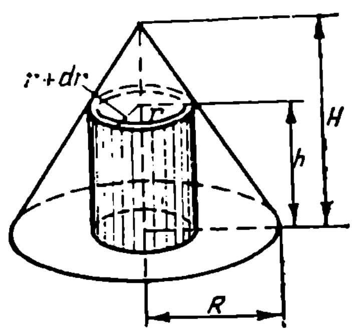
$$S=\pi\,\frac{R^2}{H^2}\int_0^H(H-x)^2\,x dx,\quad J=\pi\,\frac{R^2}{H^2}\int_0^H(H-x)^2\,x^2 dx.$$

ე. ი.

$$S=\frac{1}{12}\,\pi\,R^2H^2;\qquad J=\frac{1}{30}\,\pi R^2H^3 \tag{6}$$



ნახ. 247.



ნახ. 248.

2) ვიპოვოთ კონუსის ინერციის მომენტი მისი ღერძის მიმართ.

გამოვყოთ კონუსის ფუძიდან ელემენტარული რგოლი, r და $r+dr$ რადიუსებიან წრეწირებს შორის, რომელთა ცენტრი კონუსის ფუძის

ცენტრს ემთხვევა (ნახ. 248). თუ განვიხილავთ ცილინდრულ ზედაპირებს, რომელთა მიმმართველი წირები ეს წრეწირებია, ხოლო მსახველი კონუსის ღერძის პარალელურია, მაშინ მათ შორის მოთავსებული იქნება ელემენტარული სხეული. ამ სხეულის მოცულობაა $2\pi r dr \cdot h$, სადაც h სხეულის სიმაღლეა. სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R},$$

საიდანაც

$$h=\frac{H}{R}\ (R-r)$$

და

$$dV=2\pi\ \frac{H}{R}r\,(R-r)\,dr.$$

გამოყოფილი ელემენტარული სხეულის ყოველი წერტილიდან კონუსის ღერძამდე მანძილი r-ის ტოლია, ამიტომ

$$dJ=2\pi\ \frac{H}{R}\ r^3(R-r)\,dr.$$

მაშასადამე,

$$J=2\pi\ \frac{H}{R}\int_0^R r^3(R-r)dr=\ \frac{1}{10}\,\pi R^4 H.$$

განვიხილოთ ამ ამოცანის მეორენაირი ამოხსნა. როგორც დავინახეთ, R რადიუსიანი წ რ ი ს ინერციის მომენტი თავისი ცენტრის მიმართ $\frac{1}{2}\,\pi R^4$-ის ტოლია. თუ კონუსს დავშლით ელემენტარულ ფირფიტებად, როგორც ეს გავაკეთეთ წინა მაგალითში, მაშინ ერთი ფირფიტის (dx სისქის) ინერციის მომენტი კონუსის ღერძის მიმართ $\frac{1}{2}\,\pi r^4 dx$-ის ტოლია (რადგან შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ფირფიტის მასა წრეში განაწილებულია თანაბრად). მაგრამ

$$r=\frac{R}{H}\ (H-x).$$

მაშასადამე,

$$J=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^4}{H^4}\int_0^H (H-x)^4\,dx=\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^4}{H^4}\left[-\frac{(H-x)^5}{5}\right]_0^H=\frac{1}{10}\ \pi R^4 H.$$

3) ვიპოვოთ R რადიუსიანი ბირთვის ინერციის მომენტი მისი ცენტრის მიმართ.

გამოვყოთ ბირთვის „ელემენტი“, რომელიც მოთავსებულია ორ კონცენტრულ r და $r+dr$ რადიუსებიან ბირთვულ ზედაპირებს შორის. ასეთი ელემენტის მოცულობა ტოლია ბირთვული ზედაპირის ფართობისა $4\pi r^2$ და ამ ელემენტის dr სისქის ნამრავლის.

რადგან ხსენებული ელემენტის ყოველი წერტილი ბირთვის ცენტრიდან r მანძილითაა დაშორებული, ამიტომ $dJ=4\pi r^4 dr$ და

$$J=\int_0^R 4\pi r^4\,dr=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

2. პარალელურ ძალთა ცენტრი

ვთქვათ, მყარი სხეულის $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,...,$M_n(x_n, y_n, z_n)$ წერტილებში მოდებულია ერთმხრივ მიმართული პარალელური F_1, F_2,... F_n ძალები*. საჭიროა ვიპოვოთ მათი ტოლქმედი და მისი მოდების წერტილი. შევკრიბოთ F_1 და F_2 ძალები. ფიზიკიდან ცნობილია, რომ მათი ტოლქმედი R'' ამ ძალების პარალელურია, ტოლია F_1+F_2 ჯამისა, მოდებულია C'' წერტილში, რომელიც ძევს M_1M_2 მონაკვეთზე და ყოფს ამ მონაკვეთს ძალების უკუპროპორციულ ნაწილებად, ე. ი.

$$\frac{M_1C''}{C''M_2}=\frac{F_2}{F_1}.$$

თუ გამოვიყენებთ მოცემული ფარდობით მონაკვეთის გაყოფის ფორმულებს**, C'' წერტილის x'' აბსცისისათვის მივიღებთ

$$x''=\frac{x_1F_1+x_2F_2}{F_1+F_2} \tag{7}$$

ახლა R'' ტოლქმედს მივუმატოთ F_3 ძალა. საქმე გვაქვს ისევ ორი ძალის შეკრებასთან. როგორც დავინახეთ, მათი ტოლქმედი R''' ამ ძალების პარალელურია, აქვს იგივე მიმართულება, ტოლია მათი $R''+F_3=$ $=F_1+F_2+F_3$ ჯამის და მოდებულია C''' წერტილში, რომელიც $C''M_3$

---

* აქ F_k ძალის სიდიდეა. რადგან ყველა ძალა ერთმხრივ არის მიმართული, ძალის ვექტორული ხასიათი შეიძლება არ გავითვალისწინოთ.

** ეს ფორმულები xy სიბრტყის წერტილებისათვის იყო მიღებული. VIII თავში დავინახავთ, რომ მათ ადგილი აქვთ სივრცის შემთხვევაშიც.

მონაკვეთს ყოფს R'' და F_3 ძალების უკუპროპორციულ ნაწილებად, (7) ფორმულის თანახმად, C''' წერტილის x''' აბსცისისათვის გვაქვს

$$x'''=\frac{x''R''+x_3F_3}{R''+F_3}=\frac{\frac{x_1F_1+x_2F_2}{F_1+F_2}(F_1+F_2)+x_3F_3}{(F_1+F_2)+F_3},$$

ანუ

$$x'''=\frac{x_1F_1+x_2F_2+x_3F_3}{F_1+F_2+F_3}.$$

ახლა თუ დავუმატებთ F_4 ძალას, ანალოგიურად მივიღებთ F_1, F_2, F_3 და F_4 ძალების ტოლქმედს და მისი მოდების წერტილის აბსცისას. თუ ამ მსჯელობას გავაგრძელებთ მივიღებთ, რომ ძალთა აღნიშნულ სისტემას აქვს ტოლქმედი, რომელიც ამ ძალების პარალელურია, აქვს მათი მიმართულება, ტოლია მათი ჯამის და მოდებულია $C(x_c, y_c, z_c)$ წერტილში, სადაც

$$\boxed{x_c=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k},\qquad y_c=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_ky_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k},\qquad z_c=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_kz_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k}}\tag{8}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი 1) როგორც ცნობილია, მყარ სხეულზე მოდებული ძალა შეიძლება გადატანილ იქნას მისი მოქმედების წრფის გასწვრივ. მაშინ ამ წრფის ყველა წერტილი ტოლუფლებიანია და გაუგებარია თუ რით გამოირჩევა C წერტილი, რომლის კოორდინატები (8) ფორმულებით გამოითვლება. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად, წარმოვიდგინოთ, რომ $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ძალები მოვაბრუნეთ მათი მოდების $M_1, M_2, \ldots, M_n$ წერტილების გარშემო (ეს უკანასკნელი არჩეულია და ფიქსირებული ძალების მოქმედების ხაზზე) ისე, რომ ძალები ერთმანეთის პარალელურია და კვლავ მიმართულია ერთი მიმართულებით. მაშინ მათი ტოლქმედი მობრუნდება, მაგრამ მისი მოდების წერტილი კვლავ C წერტილია, რადგან (8) ფორმულებში ძალის მიმართულება ასახული არ არის. ამგვარად, C წერტილი განისაზღვრება ორი ფაქტორით: F_k ძალების სიდიდით და მათი მოდების M_k წერტილების არჩევით, ხოლო ძალების მიმართულებაზე C წერტილი არ არის დამოკიდებული. ამასთან დაკავშირებით, C წერტილს უწოდებენ F_k პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ძ ა ლ თ ა ც ე ნ ტ რ ს. თუ ჩვენ არ ვიგულისხმებთ, რომ $M_1, M_2, \ldots, M_n$ წერტილები აღებულია ერთსა და იმავე მყარ სხეულში, არამედ ჩავთვლით მათ სივრცის ნებისმიერ

წერტილებად, მაშინ F_k ძალების გადატანაზე მათი მოქმედების წრფის გასწვრივ ლაპარაკი ზედმეტია, მაგრამ C წერტილი მოცემული (8) ფორმულებით კვლავ დარჩება „პარალელურ ძალთა ცენტრად".

2) თუ კერძოდ, ყველა M_k წერტილი ერთ სიბრტყეში მდებარეობს, მაშინ იმავე სიბრტყეში მდებარეობს C წერტილიც. მართლაც, თუ ეს სიბრტყე xy სიბრტყეა, მაშინ $z_1=z_2=\ldots=z_n=0$, მაშინ (8) ფორმულებიდან ჩანს, რომ $z_c=0$.

8. სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ n მატერიალურ წერტილთა $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ სისტემა, რომელთა მასებია $m_1, m_2, \ldots, m_n$. მაშინ ამ წერტილების წონები წარმოადგენს პარალელურ და ერთნაირად მიმართულ ძალთა სისტემას. ამ ძალთა სისტემის C ცენტრს ეწოდება $M_1, M_2, \ldots, M_n$ წერტილთა სისტემის **სიმძიმის ცენტრი**. C წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება (8) ფორმულებით, სადაც F_k არის M_k წერტილის წონა. მაგრამ M_k წერტილის წონა დამოკიდებულია მის m_k მასასთან თანაფარდობით

$$F_k=m_k g.$$

სადაც $g=9{,}81$ მ/წმ² დედამიწის ზედაპირთან ახლოს თავისუფლად ვარდნილი სხეულის აჩქარებაა. თუ (8) ფორმულებიდან მესამეში ჩავსვამთ $F_k=m_k g$ და შევკვეცავთ g-ზე, მივიღებთ

$$z_c=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},$$

შევნიშნოთ ახლა, რომ $\sum_{k=1}^{n} m_k=M$ არის მთელი განსახილველი მატერიალური სისტემის მასა, ხოლო $\sum_{k=1}^{n} m_k z_k$ ამ სისტემის S_{xy} სტატიკური მომენტი xy სიბრტყის მიმართ. გამოდის, რომ

$$\boxed{z_c=\frac{S_{xy}}{M}} \tag{9}$$

ასეთია სიმძიმის ცენტრის z_c კოორდინატი, როცა მასა განაწილებულია

სივრცეში. ხოლო თუ მასა განაწილებულია xy სიბრტყეში, მაშინ ანალოგიური მსჯელობით (8) ფორმულებიდან მეორე გვაძლევს

$$\boxed{y_c=\frac{S_x}{M}} \tag{10}$$

(9) და (10) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$S_{xy}=Mz_c, \quad S_x=My_c, \tag{11}$$

ანუ *

ა) სივრცითი მატერიალური სისტემის სტატიკური მომენტი ნებისმიერი სიბრტყის მიმართ არ შეიცვლება, თუ სისტემის მთელ მასას მოვათავსებთ ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრში.

ბ) ბრტყელი მატერიალური სისტემის სტატიკური მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ, რომელიც სისტემის სიბრტყეში მდებარეობს, არ შეიცვლება, თუ სისტემის მთელ მასას მოვათავსებთ მის სიმძიმის ცენტრში.

(9) და (10) ფორმულები, მაშასადამე, (11) ფორმულაც, ზღვარზე გადასვლის შედეგად ვრცელდება მასის უწყვეტი განაწილების შემთხვევაზეც.

განვიხილოთ კერძო მაგალითები

1. ბრტყელი წირის სიმძიმის ცენტრი. 1 ქვეპარაგრაფში დავინახეთ, რომ ერთგვაროვანი ბრტყელი წირის შემთხვევაში, რომლის სიმკვრივე ერთის ტოლია, გვაქვს

$$S_x=\int_a^b yds.$$

რადგან წირის მასა მისი სიგრძის ტოლია $M=s$, ამიტომ (10) ფორმულა გვაძლევს

$$\boxed{y_c=\frac{1}{s}\int_a^b yds} \tag{12}$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ნახევარწრეწირის ** სიმძიმის ცენტრის ორდინატი.

---

* ყოველი სიბრტყე შეიძლება მივიჩნიოთ xy სიბრტყედ. ზუსტად ასევე ბრტყელი მატერიალური სისტემის შემთხვევაში ამ სიბრტყეში მდებარე ყოველი ღერძი შეიძლება ჩავთვალოთ Ox ღერძად.

** სიმეტრიის გამო $x_c=0$.

ამ შემთხვევაში $s=\pi R$, ხოლო $S_x=2R^2$ ((2) ფორმულის თანახმად). მაშასადამე,

$$y_c=\frac{2}{\pi}R\approx 0,637\,R. \tag{13}$$

საინტერესოა (12) ფორმულის შედარება §3 (19) ფორმულასთან, რომელიც გვაძლევს $y=f(x)>0$ წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობს. (19) ფორმულას აქვს შემდეგი სახე

$$L=2\pi\int_a^b y ds.$$

გამოდის, რომ

$$y_c=\frac{1}{s}\ \frac{L}{2\pi},$$

საიდანაც

$$\boxed{L=s\cdot 2\pi\, y_c} \tag{14}$$

(14) ფორმულა გამოხატავს შესანიშნავ თეორემას:

პაპ—გულდინის პირველი თეორემა. ბრტყელი წირის ღერძის გარშემო ბრუნვით (როცა ღერძი არ ჰკვეთს წირს) მიღებული ზედაპირის ფართობი წირის სიგრძისა და მისი სიმძიმის ცენტრის მიერ გავლილი მანძილის ნამრავლის ტოლია.

შენიშვნები: 1) ის პირობა, რომ წირი არ ჰკვეთს ბრუნვის ღერძს არსებითია. ეს პირობა შემოაქვთ იმიტომ, რომ L-ის ფორმულა დადგენილია მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როცა $f(x)>0$.

2) პირველად ეს თეორემა აღმოაჩინა ალექსანდრიელმა მათემატიკოსმა პაპმა (ჩვენი წელთაღრიცხვის მესამე საუკუნეში). საშუალო საუკუნეებში ანტიკური მეცნიერების მრავალი მიღწევა ევროპაში დაიკარგა (მაჰმადიანურ კულტურაში ისინი რამდენადმე შენარჩუნებულ იქნა). მე-17 საუკუნეში ეს თეორემა ხელახლა აღმოაჩინა შვეიცარიელმა მათემატიკოსმა გულდინმა.

თეორემის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ თუ L, y და s სიდიდეებიდან ორი მათგანი ცნობილია, მაშინ მოინახება მესამეც.

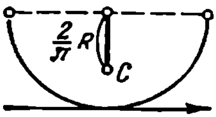
მაგალითები. 1) თუ ნახევარწრეწირი ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო, მაშინ მიღებული სფეროს ზედაპირის ფართობი $L=4\pi R^2$, ამას გარდა $s=\pi R$. გამოდის, რომ

$$4\pi R^2=\pi R.2\pi y_c.$$

კვლავ მივიღეთ (13) ფორმულა.

2) ვთქვათ, იგივე ნახევარწრეწირი ბრუნავს მისი დიამეტრის პარალელური მხების გარშემო (ნახ. 249). აქ სიმძიმის ცენტრი აღწერს $\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R$ რადიუსიან წრეწირს. გამოდის, რომ ბრუნვის ზედაპირის ფართობია

$$L=\pi R\cdot 2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R=2\pi(\pi-2)R^2.$$



ნახ. 249

II. მრუდწირული ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრი. თუ მრუდწირულ ტრაპეციაში, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)>0$ წირებით, მასა თანაბრადაა განაწილებული და სიმკვრივე ერთის ტოლია, მაშინ ამ ტრაპეციის სტატიკური მომენტები S_x და S_y გამოისახება შემდეგი ინტეგრალებით*

$$S_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,\qquad S_y=\int_a^b xy\,dx. \tag{15}$$

ტრაპეციის მასა ტოლია მისი ფართობისა (რომელიც შეიძლება აგრეთვე ინტეგრალური აღრიცხვის საშუალებით გამოითვალოს). ყოველივე ეს გვაძლევს ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრის გამოთვლის საშუალებას. სიმძიმის ცენტრის ორდინატი გამოითვლება (10) ფორმულით (სადაც M იცვლება F-ით), ხოლო აბსცისა გამოითვლება ანალოგიური ფორმულით

$$x_c=\frac{S_y}{F}. \tag{16}$$

მაგალითები. 1) ვიპოვოთ Ox ღერძითა და $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ნახევარწრეწირით შემოსაზღვრული ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრის ორდინატი.

აქ $M=F=\frac{1}{2}\pi R^2$ და $S_x=\frac{2}{3}R^3$ (იხ. 1 ქვეპარაგრაფის (5) ტოლობა).

---

* ზემოთ მივიღეთ ამ ფორმულებიდან პირველი, როცა ელემენტარული ზოლისაღმი გამოვიყენეთ მართკუთხედის სტატიკური მომენტის ფორმულა. ახლა შეიძლება მოვიყვანოთ ფორმულის მიღების სხვა ხერხი. ზოლის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მის შუაში, მასა ტოლია ydx ფართობის. მაშასადამე, $dS_x=(ydx)\frac{y}{2}=\frac{1}{2}y^2dx$. (ვსარგებლობთ იმით, რომ სტატიკური მომენტი შეიძლება გამოვთვალოთ მასის მოთავსებით სიმძიმის ცენტრში).

მაშასადამე,

$$y_c=\frac{S_x}{F}=\frac{4}{3\pi}R\approx 0{,}424\,R.$$

მკითხველი შეამჩნევს (13) ფორმულისაგან (რომელიც იძლევა ნახევარწრეწირის სიმძიმის ცენტრს) არსებით განსხვავებას.

2) ვიპოვოთ $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\sin x$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრი.

აქ

$$F=\int_0^{\pi/2}\sin x dx=1,\qquad S_x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{8},$$

$$S_y=\int_0^{\pi/2}x\sin x dx=1.$$

მაშასადამე,

$$x_c=\frac{S_y}{F}=1,\quad y_c=\frac{S_x}{F}=\frac{\pi}{8}.$$

თუ შევადარებთ

$$S_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\qquad V=\pi\int_a^b y^2dx$$

ფორმულებს, რომელთაგან მეორე გამოსახავს მოცემული ტრაპეციის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობას, ცხადია, რომ

$$S_x=\frac{1}{2\pi}V.$$

თუ S_x-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ

$$y_c=\frac{S_x}{F}$$

ფორმულაში, მივიღებთ

$$y_c=\frac{V}{2\pi F},$$

საიდანაც

$$\boxed{V=F\cdot 2\pi y_c} \tag{17}$$

ეს არის

პაპ—გულდინის მეორე თეორემა. ბრტყელი ფიგურის ღერძის გარშემო ბრუნვით (როცა ღერძი ფიგურას არ ჰკვეთს) მიღებული სხეულის მოცულობა ამ ფიგურის ფართობისა და მისი სიმძიმის ცენტრის მიერ გავლილი მანძილის ნამრავლის ტოლია.

პირობა, რომ ფიგურა არ ჰკვეთს ბრუნვის ღერძს არსებითია. ის გამოყენებული იყო, როდესაც ვსარგებლობდით (15) ფორმულებიდან პირველით ($y=f(x)>0$ შემთხვევისათვის).

ისე როგორც ამ ავტორების პირველი თეორემა, ეს თეორემაც გამოყენებული იქნება, როცა V, F, y_c სიდიდეებიდან ორი ცნობილია.

მაგალითად, თუ ნახევარწრე ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო, მაშინ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $F=\frac{1}{2}\pi R^2$ და (17) ფორმულა გვაძლევს $y_c=\frac{4}{3\pi}R$.

III. **სხეულების სიმძიმის ცენტრი.** თუ T სხეული ერთგვაროვანია და მისი სიმკვრივე ერთის ტოლია, მაშინ მისი მასა მოცულობის ტოლია, $M=V$ და (9) ფორმულა გვაძლევს

$$z_c=\frac{S_{xy}}{V}. \tag{18}$$

მაგალითად, 1-ლ ქვეპარაგრაფში ვნახეთ, რომ როცა კონუსის ფუძე xy სიბრტყეში მდებარეობს ((6) ფორმულის თანახმად) გვექნება:

$$S_{xy}=\frac{1}{12}\pi R^2H^2,$$

რადგან

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H,$$

ამიტომ

$$\boxed{z_c=\frac{1}{4}H} \tag{19}$$

ე. ი. კონუსის სიმძიმის ცენტრი ძევს მის ღერძზე* და დაშორებულია ფუძიდან სიმაღლის $\frac{1}{4}$-ით.

მეორე მაგალითის სახით, განვიხილოთ R რადიუსიანი ნახევარსფერო, იმ პირობით, რომ დიამეტრული სიბრტყე ემთხვევა

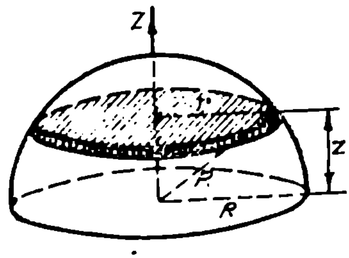
* ეს ცხადია სიმეტრიის თვალსაზრისიდან.

xy სიბრტყეს. თუ ნახევარსფეროდან გამოვყოფთ r-რადიუსიან ფირფიტას (ნახ. 250), დავინახავთ, რომ

$$dS_{xy} = (\pi r^2 dz)\, z = \pi (R^2 - z^2) z\, dz.$$

აქედან

$$S_{xy} = \pi \int_0^R (R^2 z - z^3)\, dz = \frac{1}{4}\pi R^4.$$



ნახ. 250.

რადგან $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, (18) ფორმულიდან გვაქვს

$$z_c = \frac{3}{8} R.$$

§ 5. განსაზღვრული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა

1. საკითხის დაყენება

ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის საშუალებით რაიმე ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ამ ფუნქციის პირველადის მონახვაზე. მაშასადამე, თუ ეს უკანასკნელი (ე. ი. პირველადი) არ არის ელემენტარული ფუნქცია, მაშინ უნდა გამოითვალოს განსაზღვრული ინტეგრალი რაიმე სხვა ხერხით. ზოგჯერ ეს შესაძლებელი ხდება განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნის გარეშე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ,

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

აქ

$$\int \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

არ აიღება სასრული სახით. ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = \pi - z$, რაც გვაძლევს

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - z)\sin z}{1+\cos^2 z}\, dz = \pi \int_0^\pi \frac{\sin z\, dz}{1+\cos^2 z} - I.$$

მაშასადამე,

$$2I=\pi\int_0^\pi \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz=-\pi\int_0^\pi \frac{d(\cos z)}{1+\cos^2 z}=-\pi\,[\operatorname{arctg}(\cos z)]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2},$$

საიდანაც

$$I=\frac{\pi^2}{4}$$

ცხადია, რომ აქ საქმე გვაქვს გამონაკლის შემთხვევასთან. საზოგადოდ, განსაზღვრული ინტეგრალი ისეთი ფუნქციიდან, რომელსაც არ აქვს ელემენტარული პირველადი, უნდა გამოითვალოს რომელიმე მიახლოებითი ფორმულის საშუალებით. არსებობს ასეთი მრავალი ფორმულა, მაგრამ ჩვენ მკითხველს გავაცნობთ ორ მათგანს: ტრაპეციების ფორმულას და სიმპსონის ფორმულას.

ტრაპეციების ფორმულა

ვთქვათ,

$$I=\int_a^b f(x)dx,$$

სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, თვალსაჩინოებისათვის ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ის დადებითია. მაშინ I წარმოადგენს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ წირებით. ავირჩიოთ რაიმე ნატურალური n რიცხვი და დავყოთ $[a, b]$ n ტოლ მონაკვეთად $x=a<x_1<\dots<x_n=b$ წერტილებით. $x=x_k$ წრფეები ყოფენ ჩვენთვის საინტერესო ტრაპეციას n ზოლად. მივიჩნიოთ ყოველი ზოლი ჩვეულებრივ მართკუთხა ტრაპეციად (ნახ. 251, სადაც $n=5$). მაშინ, მარცხნიდან პირველი ზოლის ფართობი მიახლოებით

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)=\frac{y_0+y_1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

რიცხვით გამოისახება, რადგან ამ ზოლს ვთვლით ტრაპეციად, რომლის ფუძეებია შესაბამისად $f(x_0)=y_0$ და $f(x_1)=y_1$, ხოლო სიმაღლე არის $x_1-x_0=\dfrac{b-a}{n}$ რიცხვი. ანალოგიურად, შემდეგი ზოლების ფართობები იქნება

$$(y_1+y_2)\frac{b-a}{2n},\ (y_2+y_3)\frac{b-a}{2n},\dots,(y_{n-1}+y_n)\frac{b-a}{2n}.$$

მაშასადამე, ჩვენი ინტეგრალისათვის მიიღება ფორმულა:

$$I\approx\frac{b-a}{2n}\left[y_0+2\left(y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right)+y_n\right].$$

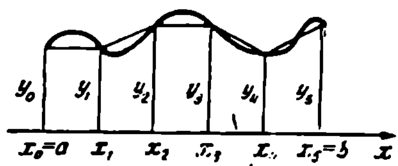
თუ სიმარტივისათვის დავუშვებთ*

$$y_0+y_n=Y_{\text{კიდ}},\qquad y_1+y_2+\dots+y_{n-1}=Y_{\text{საშ}},$$

საბოლოოდ მივიღებთ**

$$\boxed{\int_a^b y\,dx\approx\frac{b-a}{2n}\left(Y_{\text{კიდ}}+2Y_{\text{საშ}}\right)}\qquad(1)$$

ამ მიახლოებით ფორმულას ეწოდება ტ რ ა პ ე ც ი ე ბ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა. ის მით უფრო ზუსტია, რაც მეტია ჩვენ მიერ არჩეული n რიცხვი.



ნახ. 251.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ

$$I=\int_0^1 x^2dx.\qquad(2)$$

ამ ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა ადვილად გამოითვლება

$$I=\left[\int x^2dx\right]_0^1=\left|\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}=0{,}3333\,\dots$$

მაგრამ ჩვენ გამოვთვლით მას ტრაპეციების ფორმულის საშუალებით. n რიცხვის არჩევა ჩვენზეა დამოკიდებული. ავიღოთ $n=5$. რადგან $y=x^2$, $a=0$, $b=1$. ამიტომ გამოთვლები შეიძლება ვაწარმოოთ შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

x	y
0	0
0,2	0,04
0,4	0,16
0,6	0,36
0,8	0,64
1	1

$Y_{\text{კიდ}}=0+1=1$

$Y_{\text{საშ}}=0{,}04+0{,}16+0{,}36+0{,}64=1{,}2.$

$Y_{\text{კიდ}}+2Y_{\text{საშ}}=3{,}4.$

მაშასადამე,

$$I=\frac{3{,}4}{10}=0{,}34.$$

---

* Y აღნიშნავს კიდურ და საშუალედო ორდინატებს.

** ზემოთ გაკეთებული შენიშვნა $f(x)>0$ არ არის არსებითი.

რადგან ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობაა 0,3333... , ამიტომ აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია 0,007 ხოლო ფარდობითი ცდომილება ნაკლებია $\frac{0.007}{1/3}=0.021$, ე. ი. ნაკლებია 2,1%. მრავალი ტექნიკური საკითხის შესწავლისას ეს სიზუსტე საკმარისია.

პრაქტიკაში ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა არ არის ცნობილი. ისმება კითხვა, როგორ შევაფასოთ (1) ფორმულის სიზუსტე? ამისათვის ჩვეულებრივად ზრდიან n-ს და ხელახლა თვლიან ინტეგრალს მიახლოებით. თუ გამოთვლის შედეგები მიღებული სიზუსტის ფარგლებში, ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ხშირად ეს მოწმობს, რომ მიღწეულია საჭირო სიზუსტე.

დავუბრუნდეთ ჩვენს ინტეგრალს, გამოვთვალოთ ის (1) ფორმულის საშუალებით იმ პირობით, რომ $n=10$:

$$Y_{კიდ}=1, \quad Y_{საშ}=2,85,$$
$$Y_{კიდ}+2y_{საშ}=6,7,$$
$$I=\frac{6,7}{20}=0,335.$$

x	y
0	0
0,1	0,01
0,2	0,04
0,3	0,09
0,4	0,16
0,5	0,25
0,6	0,36
0,7	0,49
0,8	0,64
0,9	0,81
1	1

თუ შევადარებთ I-ს მნიშვნელობებს, რომლებიც შეესაბამება $n=5$ და $n=10$, მივიღებთ

$$I_5=0,340, \qquad I_{10}=0,335,$$

დავინახავთ, რომ ისინი განსხვავდებიან 0,005-ით.

თუ დავუშვებთ, რომ ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა თუნდაც უხეშად ემთხვევა მიახლოებით მნიშვნელობას (ანუ, თუ დავუშვებთ, რომ $I=0,3$), დავინახავთ, რომ როცა I_5-ს ვცვლით I_{10}-ით, ფარდობითი ცდომილებაა $\frac{0,005}{0,3}<0,02=2\%$. თუ პრაქტიკული ანგარიშის დროს, რომლისთვისაც საჭიროა (2) ინტეგრალის გამოთვლა, დასაშვებია აღნიშნული ცდომილება, მაშინ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ I-ს ნაპოვნი მნიშვნელობით, ამასთან, რასაკვირველია უმჯობესია მივიღოთ I-ს მნიშვნელობად $I_{10}=0,335$. ჩვენს შემთხვევაში, როცა ზუსტი მნიშვნელობა

$I=\frac{1}{3}=0{,}333$ აბსოლუტური ცდომილება $<0{,}002$ და ფარდობითი ცდომილება $<0{,}006$ ანუ $<0{,}6\%$. საპასუხისმგებლო შემთხვევებში რეკომენდებულია კიდევ ერთი საკონტროლო შემოწმება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. უფრო სრულ კურსებში მტკიცდება, რომ (1) ფორმულის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება

$$K\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

რიცხვს, სადაც K არის $|f''(x)|$-ის უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ შუალედში.

3. სიმპსონის მცირე ფორმულა

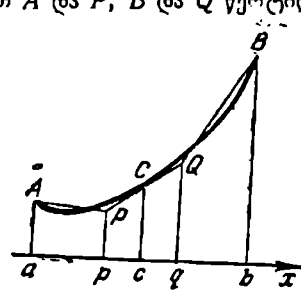
იმ შემთხვევაში, როდესაც $y=f(x)$ წირი $x=a$ და $x=b$ წერტილებს შორის ნაკლებად მოღუნულია,

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოითვლება ძალიან მარტივი ფორმულით. დავუშვათ, რომ $f(x)$ დადებითია და გამოვთვალოთ $aABb$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი (ნახ. 252). ამისათვის დავყოთ $[a, b]$ შუალედი $c=\frac{a+b}{2}$ წერტილით შუაზე და $C(c, f(c))$ წერტილში გავავლოთ $y=f(x)$ წირის მ ხ ე ბ ი. ამის შემდეგ $[a, b]$ შუალედი დავყოთ p და q წერტილებით სამ ტოლ ნაწილად და გავავლოთ ამ წერტილებში $x=p$ და $x=q$ წრფეები. ვთქვათ, P და Q ამ წრფეების და მხების გადაკვეთის წერტილებია. თუ შევაერთებთ A და P, B და Q წერტილებს, მივიღებთ სამ მართკუთხა ტრაპეციას

$$aAPp,\qquad pPQq,\qquad qQBb.$$

ჩვენთვის საინტერესო მიახლოებითი ფორმულა მიიღება, თუ $aABb$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს შევცვლით მიღებული სამი ტრაპეციის ფართობების ჯამით, ანუ თუ დავუშვებთ



ნახ. 252.

$$I\approx\frac{aA+pP}{2}\cdot\frac{b-a}{3}+\frac{pP+qQ}{2}\cdot\frac{b-a}{3}+\frac{qQ+bB}{2}\cdot\frac{b-a}{3},$$

საიდანაც

$$I \approx \frac{b-a}{6}\,[aA+2(pP+qQ)+bB]. \tag{3}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$aA=f(a)=y_a, \quad bB=f(b)=y_b.$$

pP და qQ მონაკვეთები არ წარმოადგენენ $y=f(x)$ წირის ორდინატებს, რადგან P და Q წერტილები მდებარეობენ არა ამ წირზე, არამედ მის მხებზე. მაგრამ ჩვენ გვჭირდება არა ეს მონაკვეთები, არამედ მათი ჯამი, რომლის პოვნა ადვილია. რადგან ტრაპეციის შუამონაკვეთი ტოლია მისი ფუძეების ნახევარჯამისა, ამიტომ

$$cC=f(c)=y_c=\frac{pP+pQ}{2}.$$

მაშასადამე, $pP+qQ=2y_c$, და (3) ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6}\,(y_a+4y_c+y_b)} \tag{4}$$

აქ $c=\frac{a+b}{2}$. (4) ფორმულას ეწოდება სიმპსონის მცირე ფორმულა.

შესანიშნავია ის გარემოება, რომ ეს ფორმულა აბსოლუტურად ზუსტია ყოველთვის, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ოთხზე ნაკლებია. ასეთ მრავალწევრს აქვს სახე

$$f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

და საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ფორმულა მართებულია ყოველი შესაკრებისათვის. მაგალითისათვის შევჩერდეთ პირველ შესაკრებზე. რადგან A კოეფიციენტი შეიძლება გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის წინ, ხოლო შემდეგ (4) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში ფრჩხილებს გარეთ, საკითხი დაიყვანება

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$$

ინტეგრალამდე. ამ ინტეგრალისათვის $y=x^3$. ამიტომ $y_a=a^3$, $y_b=b$ ამას გარდა

$$y_c=\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}.$$

მაშასადამე, (4) ფორმულის მარჯვენა ნაწილს აქვს სახე

$$\frac{b-a}{6}(y_a+4y_c+y_b)=\frac{b-a}{6}\cdot\frac{3a^3+3a^2b+3ab^2+3b^3}{3}=\frac{b^4-a^4}{4}!$$

უფრო რთული ბუნების ფუნქციისათვის (4) ფორმულა იქნება მიახ ლოებითი, მაგრამ თვით ფორმულის გამოყვანიდან გამომდინარეობს რომ მცირედ მოღუნული $y=f(x)$ წირისათვის მას აქვს კარგი სიზუსტე

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თუ

$$I=\int_0^1 x^4dx,$$

მაშინ $y=x^4$, $a=0$, $b=1$, $c=0{,}5$, საიდანაც

$$y_a=0,\quad y_c=0{,}0625,\quad y_b=1.$$

და (4) ფორმულა გვაძლევს

$$I=\frac{1{,}25}{6}=0{,}208. \tag{5}$$

I-ს ზუსტი მნიშვნელობაა 0,2, ამიტომ (5) ტოლობის აბსოლუტურ ცდომილებაა 0,08, ხოლო ფარდობითი ცდომილებაა $0{,}04=4\%$.

4. სხეულის მოცულობის გამოსახვა სიმპსონის ფორმულის საშუალებით

განვიხილოთ h სიმაღლის სხეული. ვთქვათ, მისი ფუძე ჰორიზონტალურია (ნახ 253). აღვნიშნოთ F_x-ით ამ სხეულის იმ ჰორიზონტალური სიბრტყით კვეთის ფართო ბი, რომელიც ფუძიდან x მანძილითაა დაშორებული. როგორც ცნობილია (§3, (6 ფორმულა). ამ სხეულის მოცულობა

$$V=\int_0^h F_x\,dx.$$

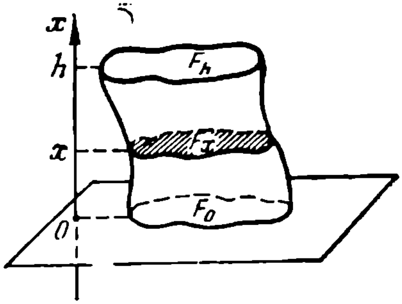
(4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობას

$$V\approx\frac{h}{6}\left(F_0+4F_{\frac{h}{2}}+F_h\right)$$

ან

$$\boxed{V\approx\frac{h}{6}\left(F_{ქვ}+4F_{საშ}+F_{ზედა}\right)} \tag{6}$$

ამ ფორმულით ხშირად სარგებლობენ პრაქტიკაში (მაგალითად, მთხრებლის კუბატურის გამოთვლის დროს). მრავალ შემთხვევაში ეს ფორმულა აბსოლუტურად ზუსტია. მაგალითად, კონუსისათვის ან სფეროსათვის (6) ფორმულა გვაძლევს მოცულობის ზუსტ მნიშვნელობას*. მართლაც, თუ სფეროს რადიუსი არის R, მაშინ



ნახ. 253.

$$h=2R,$$

$$F_{ქვ}=F_{ზედ}=0,\quad F_{საშ}=\pi R^2$$

და (6) ფორმულა გვაძლევს

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

კონუსისათვის გამოთვლა ანალოგიურია.

5. ელიფსის მიახლოებითი გაწრფევება

განვიხილოთ საკითხი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

ელიფსის s სიგრძის მისი a და b ნახევარღერძების საშუალებით გამოსახვის შესახებ. თურმე s არ არის a და b სიდიდეების მიმართ ელემენტარული ფუნქცია, ამიტომ შეიძლება ვილაპარაკოთ მიახლოებით ფორმულაზე. ასეთი ფორმულები არსებობს მრავალი, ჩვენ შემოვიტანთ ერთ მათგანს. ამისათვის დავწეროთ (7) ელიფსის პარამეტრული განტოლება

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t. \tag{8}$$

იმისათვის, რომ (x, y) წერტილმა აღწეროს მთელი (8) ელიფსი, საჭიროა t იცვლებოდეს 0-დან 2π-მდე. ჩვენ შემოვისაზღვრებით ელიფსის იმ რკალის სიგრძის განსაზღვრით, რომელიც პირველ საკოორდინატო კუთხეში მდებარეობს; ეს რკალი აიწერება (x,y) წერტილით, თუ t იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე.

$$\frac{1}{4}s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

ეს ინტეგრალი** არ აიღება ელემენტარულ ფუნქციებში (ამიტომაც s არ არის a და b სიდიდეების ელემენტარული ფუნქცია). გამოვიყენოთ მიღებულ ინტეგრალზე (4) ფორმულა. აქ a, b და c რიცხვების როლს ასრულებენ 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ რიცხვები, ხოლო ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა

$$z=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

---

* ეს არის იმის შედეგი, რომ კონუსისა და სფეროსათვის F_x x-ის კვადრატული ფუნქციაა, ხოლო (4) ფორმულა მართებულია მესამე ხარისხის მრავალწევრისათვისაც (როგორც ეს ნაჩვენები იყო ზემოთ).

** მისი წარმოშობის გამო ამ ინტეგრალს ეწოდება ელიფსური ინტეგრალი.

ამიტომ

$$z_0=b,\quad z_{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\quad z_{\frac{\pi}{2}}=a.$$

საიდანაც

$$\frac{1}{4}\,s\approx\frac{\pi}{12}\left(b+4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+a\right)$$

და საბოლოოდ,

$$\boxed{s\approx\frac{\pi}{3}\left(a+4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+b\right)}\qquad(9)$$

ამ მიახლოებითი ფორმულის ხარისხში გასარკვევად, განვიხილოთ ორი კერძო შემთხვევა, როდესაც ცნობილია s-ის ზუსტი მნიშვნელობა. პირველ რიგში, როცა $a=b$ ელიფსი გადაიქცევა წრეწირად, რომლის რადიუსია a, (9) ფორმულა გვაძლევს ზუსტ მნიშვნელობას $s=2\pi a$. ვთქვათ, ახლა $b=0$. მაშინ ელიფსი გადაიქცევა Ox ღერძის $[-a, a]$ მონაკვეთად, რომელსაც (x, y) წერტილი აღწერს ორჯერ (ეს, რომ უკეთ გავიგოთ, უნდა წარმოვიდგინოთ (7) ელიფსი, როცა $b>0$ ძალიან მცირეა). გამოდის, რომ s-ის ზუსტი მნიშვნელობაა $4a$, ხოლო (9) ფორმულა გვაძლევს

$$s\approx\frac{\pi a}{3}(1+2\sqrt{2}).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\pi=3.1416,\qquad \sqrt{2}=1.4142,$$

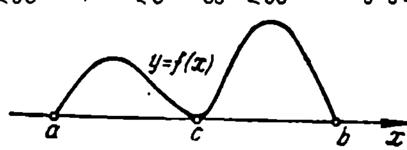
მივიღებთ

$$s\approx4,0091\,a.$$

აქ აბსოლუტური ცდომილება $<0.01\,a$, ხოლო ფარდობითი ცდომილება $<0.25\%$

ზ. სიმპსონის დიდი ფორმულა

სიმპსონის მცირე ფორმულა იძლევა ინტეგრალის მნიშვნელობას კარგი სიზუსტით, მაშინ, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის გრაფიკი ნაკლებად მოღუნულია. პირიქით, 254-ე ნახაზზე გამოსახული წირის შემთხვევაში ეს ფორმულა აშკარად გამოუსადეგარია, რადგან გვაძლევს საძიებელი ფართობისათვის ნულის ტოლ მნიშვნელობას. მაგრამ თუ $[a,b]$ შუალედს გავყოფთ $[a, c]$ და $[c, b]$ ნაწილებად და ყოველი მათგანის მიმართ გამოვიყენებთ (4) ფორმულას, მაშინ მიიღება სასურველი შედეგი.



ნახ. 254.

ეს იდეა უდევს საფუძვლად სიმპსონის „დიდი" ფორმულის გამოყვანას. სახელდობრ,

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად, ავირჩიოთ რაიმე ლ უ წ ი n რიცხვი და $[a,\ b]$ დავყოთ n ტოლ ნაწილად

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

წერტილებით.

მაშინ ინტეგრალი წარმოგვიდგება შემდეგი ჯამის სახით

$$I=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+\ldots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx.$$

მარჯვენა ნაწილში ყოველი შესაკრების მიმართ გამოვიყენოთ სიმპსონის მცირე (4) ფორმულა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ინტეგრალების ყოველი მონაკვეთის სიგრძე ტოლია

$$2\,\frac{b-a}{n}$$

რიცხვისა (ვინაიდან $[x_0,\ x_2]$, $[x_2,\ x_4]$, მონაკვეთების რიცხვი n-ის ტოლია, ხოლო ინტეგრების მონაკვეთების სიგრძე ორჯერ მეტია) და დავუშვებთ, რომ $f(x_k)=y_k$, მივიღებთ

$$I\approx\frac{b-a}{3n}\,(y_0+4y_1+y_2)+\frac{b-a}{3n}\,(y_2+4y_3+y_4)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{b-a}{3n}\,(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n),$$

ან

$$I\approx\frac{b-a}{3n}\,[(y_0+y_n)+4\,(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2\,(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]:$$

თუ დავუშვებთ სიმარტივისათვის, რომ

$$y_0+y_n=Y_{\text{კიდ}}$$

$$y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}=Y_{\text{კენტი}}$$

$$y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}=Y_{\text{ლუწ.}}$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\boxed{\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(Y_{\text{კიდ}}+4\,Y_{\text{კენტი}}+2\,Y_{\text{ლუწი}}\right)} \qquad (10)$$

ეს არის „სიმპსონის დიდი ფორმულა“. მისი სიზუსტე მით მეტია, რაც უფრო მეტია n. ამ ფორმულის ხარისხი უკეთესია, ვიდრე ტრაპეციების ფორმულის ხარისხი, რადგან ერთი და იმავე n-ისათვის ის გვაძლევს მეტ სიზუსტეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიყენოთ (10) ფორმულა

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

ინტეგრალისათვის, იმ პირობით, რომ $n=4$.

აქ $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, ამიტომ

x	y
0	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{17}=0{,}9412$
$\frac{1}{2}$	0,8
$\frac{3}{4}$	0,64
1	0.5

$Y_{\text{კიდ}}=1{,}5,\quad Y_{\text{კენტი}}=1{,}5812\quad Y_{\text{ლუწი}}=0{,}8$

$Y_{\text{კიდ}}+4Y_{\text{კენტი}}+2Y_{\text{ლუწი}}=9{,}4248$

$$\frac{\pi}{4}\approx\frac{1}{12}\cdot 9{,}4248.$$

$$\pi\approx\frac{9{,}4248}{3}=3{,}1416.$$

ვხედავთ, რომ (10) ფორმულა გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ ისეთი მნიშვნელოვანი მუდმივი, როგორიცაა π რიცხვი კარგი სიზუსტით ($\pi=3{,}141592\ldots$). თუ გავადიდებთ n-ს, მივიღებთ π-ს მნიშვნელობას მეტი სიზუსტით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მტკიცდება, რომ (10) ფორმულის ცდომილება არ აღემატება

$$M\,\frac{(b-a)^5}{180\,n^4},$$

სადაც $M=\max|f^{(4)}(x)|$. ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ტრაპეციების ფორმულის ცდომილება ფასდება

$$K\,\frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\quad [K=\max|f''(x)|].$$

რიცხვით. რადგან n^4 ბევრად უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე n^2, ამით აიხსნება, რომ სიმპსონის ფორმულა უფრო ზუსტია, ვიდრე ტრაპეციების ფორმულა.

§ 8. არასაკუთრივი ინტეგრალები

1. ინტეგრალები უსასრულო შუალედში

აქამდე ჩვენ ვსწავლობდით

$$\int_a^b f(x)dx$$

ინტეგრალს, როცა ინტეგრების შუალედი სასრული იყო და $f(x)$ ფუნქციას ვთვლიდით უწყვეტად.* ზოგჯერ უარი უნდა ვთქვათ ამ დაშვებაზე. აქ შევჩერდებით ინტეგრალის ცნებაზე, როცა ინტეგრების შუალედი უ ს ა ს რ უ ლ ო ა.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $a \leqslant x < +\infty$ შუალედში. მაშინ ყოველი B-სათვის, სადაც $B > a$, არსებობს ინტეგრალი

$$\int_a^B f(x)dx.$$

ამ ინტეგრალის ზღვარს (სასრული ან უსასრულო ოღონდ გარკვეული ნიშნის), როცა $B \to \infty$ ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{1}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1) $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{B \to +\infty} \int_0^B \cos x dx = \lim\limits_{B \to +\infty} (\sin B)$ არ არსებობს!

2) $\int_0^{+\infty} 2x dx = \lim\limits_{B \to +\infty} \int_0^B 2x dx = \lim\limits_{B \to +\infty} (B^2) = +\infty.$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 1.$

იმ შემთხვევებში, როცა (1) ინტეგრალი არსებობს და სასრულია, ამბობენ, რომ ის კ რ ე ბ ა დ ი ა. ხოლო თუ ის უსასრულოა,

---

* ან უბან-უბან უწყვეტად, მაგრამ ყოველ შემთხვევაში შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ა დ.

ან არ არსებობს, ამბობენ, რომ ინტეგრალი განშლადია. მაგალითად, $\int\limits_0^{+\infty}\cos xdx$ და $\int\limits_0^{+\infty}2xdx$ ინტეგრალები განშლადია*, ხოლო $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ — კრებადია.

თუ $f(x)$ ფუნქცია დადებითია, მაშინ

$$\int_a^B f(x)dx$$

ინტეგრალი იზრდება B-სთან ერთად, მართლაც, თუ $B'>B$, მაშინ

$$\int_a^B f(x)dx=\int_a^B f(x)\,dx+\int_B^{B'} f(x)dx>\int_a^B f(x)dx,$$

რადგანაც $\int\limits_B^{B'} f(x)dx>0$. ყოველ ზრდად ცვლადს აქვს სასრული ან უსასრულო ზღვარი. მაშასადამე, როცა $f(x)>0$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

ინტეგრალს შეესაბამება სასრული ან უსასრულო რიცხვი. გეომეტრიულად ის წარმოადგენს იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია მარცხნიდან $x=a$ წრფით, ქვემოდან Ox ღერძით, ზემოდან $y=f(x)$ წირით და ვრცელდება მარჯვნივ უსასრულოდ (ნახ. 255). ამ შენიშვნიდან ცხადია, რომ

$$\int_0^{+\infty} 2xdx=+\infty,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1.$$

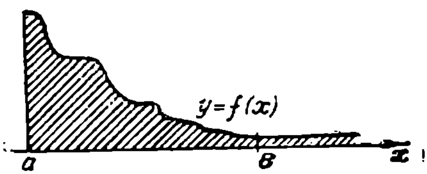
მეორე შემთხვევაში $y=\frac{1}{x^2}$ წირის ასიმპტოტაა Ox ღერძი (ნახ. 256), ამიტომ დაშტრიხულ ფიგურას, მიუხედავად იმისა, რომ ის ვრცელ-

* პირველ მათგანს არ შეესაბამება არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობა, ხოლო მეორე ტოლია $+\infty$.

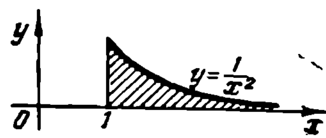
დება უსასრულოდ, აქვს სასრული ფართობი. უნდა შევნიშნოთ, რომ ყოველთვის ასე არ არის. მაგალითად,

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty,$$

თუმცა $y=\dfrac{1}{x}$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტა არის Ox ღერძი. ამ მაგალითებს შორის განსხვავება აიხსნება იმით, რომ $\dfrac{1}{x^2}$ ბევრად უფრო სწრაფად მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x\to+\infty$, ვიდრე $\dfrac{1}{x}$



ნახ. 255.



ნახ. 256.

ვთქვათ, რომ $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირველადი, მაშინ

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{B\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)\,dx=\lim_{B\to+\infty}[F(B)-F(a)].$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty),$$

მივიღებთ ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის ანალოგიურ ფორმულას

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)} \qquad (2)$$

(2) ფორმულა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=[F(x)]_{a}^{+\infty}$$

---

* რასაკვირველია, მას აზრი არ ექნება, თუ ეს ზღვარი არ არსებობს. მაგალითად, $\sin(+\infty)$ სიმბოლოს აზრი არა აქვს.

(1) ინტეგრალთან ერთად განიხილავენ აგრეთვე შემდეგი სახის ინტეგრალებს

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx.$$

და

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx^{*}.$$

ამ ინტეგრალებისათვის (2) ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(b)-F(-\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty),$$

სადაც

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 1) ვთქვათ, Ox ღერძის გასწვრივ თანაბრად განაწილებულია რაიმე მასა, რომლის სიმკვრივე 1-ის ტოლია. ხოლო $P(0, 1)$ წერტილში მოთავსებულია m მასა. ვიპოვოთ Ox ღერძის მიზიდულობის F ძალა ამ მასისადმი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სიმეტრიის თვალსაზრისით F ძალა მიმართულია Oy ღერძის გასწვრივ კოორდინატთა სათავისაკენ. გამოვყოთ Ox ღერძიდან ელემენტარული $[x, x+dx]$ მონაკვეთი (ნახ. 257). ნიუტონის კანონის თანახმად ძალა, რომლითაც ეს მონაკვეთი იზიდავს m მასას, ტოლია

$$\frac{mdx}{r^2}=\frac{mdx}{1+x^2}.$$

ამ ძალის გეგმილი Oy ღერძის უარყოფით მიმართულებაზე მიიღება ძალის სიდიდის იმ Θ კუთხის კოსინუსზე გამრავლებით, რომელსაც

---

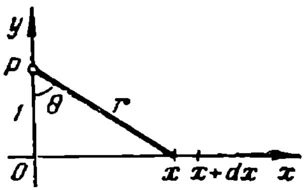
* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალს ზოგჯერ განსაზღვრავენ, როგორც

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

ჯამს. ეს განსაზღვრა ტექსტში მოცემული განსაზღვრის ტოლფასია.

ძალის მიმართულება ადგენს Oy ღერძის უარყოფით მიმართულებასთან $\left(\text{ანუ } \frac{1}{r} \text{ სიდიდეზე გამრავლებით}\right)$. მაშასადამე,-

$$dF=\frac{mdx}{r^3}=\frac{mdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



ნახ. 257.

აქედან

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{mdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

დავუშვათ, რომ $x=\mathrm{tg}\Theta$, მაშინ (ეს გარკვეულად ჩანს 257-ე ნახაზზე) Θ იცვლება $-\frac{\pi}{2}$-დან $+\frac{\pi}{2}$-მდე.

ამას გარდა

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\Theta)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\sec^6\Theta}}=\cos^3\Theta, \qquad dx=\frac{d\Theta}{\cos^2\Theta}.$$

მაშასადამე,

$$F=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} m\cos\Theta\, d\Theta=2m.$$

2) ვიპოვოთ ძალა, რომლითაც წინა მაგალითში მოცემული m მასა მიიზიდება მასით, რომელიც მოთავსებულია $0\leqslant x<+\infty$ ნახევარღერძზე.

აქ უნდა განვიხილოთ F ძალის გეგმილები ორივე ღერძზე. წინა მაგალითის ამოხსნიდან ცხადია, რომ $F_y=m$. ამას გარდა

$$dF_x=\frac{mdx}{1+x^2}\cdot\sin\Theta=\frac{m\cdot xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

საიდანაც

$$F_x=m\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

რადგან

$$\int\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}d(1+x^2)=-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C.$$

ამიტომ

$$F_x = m\left[\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^{+\infty} = m.$$

ამგვარად, F ძალა ტოლია $m\sqrt{2}$ სიდიდისა და ადგენს Oy ღერძის უარყოფით მიმართულებასთან 45°-იან კუთხეს, ანუ მიმართულია Ox ღერძის (1,0) წერტილისაკენ.

3) უკვე ვნახეთ, რომ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=1$, $y=0$, $y=\frac{1}{x}$ წირებით, უსასრულოდ დიდია. საინტერესოა, რომ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით, არის სასრული სიდიდე, რადგან ის ტოლია

$$V=\pi\int_1^{+\infty} y^2dx=\pi\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\pi.$$

2. ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან

დავუშვათ ახლა, რომ $[a, b]$ შუალედი სასრულია, მაგრამ $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული ამ შუალედზე, არამედ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა x უახლოვდება ერთ-ერთს c_1, c_2,... „განსაკუთრებული" წერტილებიდან. ვთქვათ, თავიდან მოცემულია ერთი განსაკუთრებული წერტილი და ეს არის $[a, b]$ შუალედის მარცხენა ბოლო $x=a$. ვგულისხმობთ, რომ $[a, b]$ შუალედის ყველა დანარჩენ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო როცა $x \to a$, მაშინ $f(x) \to \infty$.

ავიღოთ a და b წერტილებს შორის α წერტილი, $[\alpha, b]$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებობს

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

ინტეგრალი.

$$\lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)\,dx \tag{3}$$

ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი და აღინიშნება ჩვეულებრივი სიმბოლოთი

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

ეს ზღვარი საზოგადოდ შეიძლება არ არსებობდეს ან იყოს უსასრულოდ დიდი. ასეთ შემთხვევებში ამბობენ, რომ (4) ინტეგრალი განშლა-

დ ი ა. თუ (3) ზღვარი არსებობს და სასრულია, მაშინ (4) ინტეგრალი კ რ ე ბ ა დ ი ა.

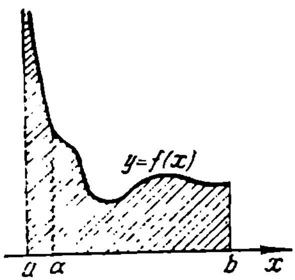
მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

$$1)\quad \int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\alpha\to 0}(-\ln\alpha)=+\infty.$$

$$2)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(2-2\sqrt{\alpha})=2.$$

თუ $f(x)>0$ და $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს 258-ე ნახაზზე მოცემული სახე. (4) ინტეგრალი გეომეტრიულად წარმოადგენს დაშტრიხული ფიგურის ფართობს.

ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როცა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ შუალედის ყოველ წერტილში გარდა $x=b$ წერტილისა და $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. მაშინ



ნახ. 258.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx.$$

თუ ორივე a და b წერტილი განსაკუთრებულია მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

ინტეგრალი განისაზღვრება, როგორც

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

ჯამი*, სადაც c წერტილი a და b წერტილებს შორის მდებარე ნებისმიერი წერტილია.

ბოლოს, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ შუალედის ყველა წერტილში, გარდა $c_1<c_2<\ldots<c_n$ წერტილებისა, რომლებიც a და b წერტილებს შორის მდებარეობენ და $f(x)$ ამ წერტილებში უსასრულოდ დიდი ხდება (ე. ი. $f(x)\to\infty$. როცა $x\to c_i$). დავუშვათ აგრეთვე, რომ $f(x)$

---

* ეს ჯამი სასრულია. თუ სასრულია ორივე შესაკრები. ამას გარდა ვთვლით, რომ $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$. ხოლო გამოსახულება $(+\infty)+(-\infty)$ უაზრობაა. ბოლოს თუ p სასრულია, მაშინ $(+\infty)+p=+\infty$, $(-\infty)+p=-\infty$.

უსასრულოდ დიდი ხდება a და b წერტილებიდან ერთ-ერთში (ან ორივეში), მაშინ (4) სიმბოლოთი აღინიშნება

$$\int_{a}^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\ldots+\int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

ჯამი.

უნდა აღინიშნოს, რომ მაშინ როდესაც $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ სიმბოლო გვიჩვენებს, რომ საქმე გვაქვს არასაკუთრივ ინტეგრალთან, (4) სიმბოლო (როცა a და b სასრული რიცხვებია) არაფრით არ განსხვავდება ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალის აღნიშვნისაგან. თუ (4) წარმოადგენს კრებად ინტეგრალს, მაშინ ასეთი აღნიშვნა დასაშვებია, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა (4) ინტეგრალი განშლადია, შესაძლებელია ადგილი ექნეს გაუგებრობას.

მაგალითი. ვთქვათ,

$$I=\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}. \tag{5}$$

რადგან

$$\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C,$$

ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად, გვაქვს

$$I=\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2,$$

ეს კი აშკარა უაზრობაა, რადგან ინტეგრების საზღვრების ნორმალური მიმდევრობის დროს დადებითი ფუნქციიდან აღებული ინტეგრალი დადებითი სიდიდის ტოლი უნდა იყოს. შეცდომა გამოიწვია ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის უკანონოდ გამოყენებამ, განშლადი არასაკუთრივი (5) ინტეგრალის მიმართ. მართლაც, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

უსასრულოდ დიდი ხდება, როცა $x=0$. მაშასადამე, (5), ინტეგრალი უნდა გამოვთვალოთ, როგორც ჯამი

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

მაგრამ

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to-0}\int_{-1}^{\beta}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to-0}\left(-\frac{1}{\beta}-1\right)=+\infty;$$

ანალოგიურად,

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=+\infty.$$

მაშასადამე, $I=+\infty$ და არა -2-ს.

ვუჩვენოთ, რომ შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან აღებული არასაკუთრივი ინტეგრალი გვხვდება კონკრეტული საკითხების შესწავლის დროს. მაგალითად, ვთქვათ საჭიროა გამოვთვალოთ

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\qquad(-R\leqslant x\leqslant R)$$

ნახევარწრეწირის სიგრძე. აქ

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

და ამიტომ

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

გამოდის, რომ

$$S=\int_{-R}^{+R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

ეს კი არის არასაკუთრივი ინტეგრალი, რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უსასრულოდ დიდი ხდება, როცა $x=\pm R$. მაგრამ ამ გარემოების გამო არავითარ უხერხულობას ადგილი არა აქვს, რადგან მიღებული არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. მართლაც,

$$\int_{0}^{R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\lim_{\beta\to R-0}\int_{0}^{\beta}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\lim_{\beta\to R}\left(\arcsin\frac{\beta}{R}\right)=$$

$$=R\arcsin 1=\frac{\pi R}{2}.$$

ანალოგიურად,

$$\int_{-R}^{0}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{\pi R}{2}.$$

და ამიტომ $s=\pi R$, რაც შეესაბამება სინამდვილეს. შევნიშნავთ, რომ ზემოთაც ასტროიდის სიგრძის გამოთვლის დროს გამოვიყენეთ (კრებადი) არასაკუთრივი ინტეგრალი.

შინაარსი

წინასიტყვაობა 3

შესავალი

I თავი. ანალიზური გეომეტრია სიბრტყეზე 9

§ 1. წერტილები და კოორდინატები 9
1. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა 9
2. ორ წერტილს შორის მანძილი 11
3. მონაკვეთის შუაწერტილი 13
4. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით 15
5. სამკუთხედის ფართობი 17
6. მრავალკუთხედის ფართობი 17

§ 2. წირები და განტოლებები 21
1. შესაბამისობის მეორე პრინციპი 21
2. წრეწირი 26

§ 3. წრფე 28
1. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით 28
2. წრფის ზოგადი განტოლება 32
3. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში 34
4. წრფეებს შორის კუთხური თანაფარდობანი 37
5. ერთ ან ორ მოცემულ წერტილზე წრფის გავლება 40
6. მანძილი წერტილიდან წრფემდე 46

§ 4. ელიფსი 52
1. ელიფსის განსაზღვრა. მისი კანონიკური განტოლება 53
2. ელიფსის ფორმის გამოკვლევა 55
3. ელიფსი, როგორც შეკუმშული წრეწირი 59
4. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი 60
5. ელიფსის ურთიერთშეუღლებული დიამეტრები 61

§ 5. პარაბოლა 64
1. პარაბოლის განსაზღვრა, მისი კანონიკური განტოლება 64
2. პარაბოლის ფორმის გამოკვლევა 66
3. $y=ax^2$ პარაბოლა 67

§ 6. ჰიპერბოლა 69
1. ჰიპერბოლის განსაზღვრა, მისი კანონიკური განტოლება 69

2. ჰიპერბოლის ფორმის გამოკვლევა 71
3. ჰიპერბოლის ასიმპტოტები 72
4. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი 77
5. ტოლფერდა ჰიპერბოლა 78
6. შეუღლებული ჰიპერბოლა 79
7. ჰიპერბოლის ზოგიერთი გამოყენება 79

§ 7. კოორდინატთა გარდაქმნა 81
1. საკითხის დაყენება 81
2. სისტემის პარალელური გადატანა 82
3. სისტემის მობრუნება 84
4. კოორდინატთა გარდაქმნა ზოგად შემთხვევაში 85
5. ალგებრული წირი და მისი რიგი 86

§ 8. მეორე რიგი წირების განტოლებების გამარტივება 88
1. $y=ax^2+bx+c$ განტოლება 88
2. $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F$ განტოლება 91
3. მეორე ხარისხის ზოგადი განტოლება 94
4. მაგალითები. ჰიპერბოლა, რომელიც მოცემულ ასიმპტოტებს მიეკუთვნება 96

§ 9. პოლარული კოორდინატები 100
1. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა 100
2. მანძილი ორ წერტილს შორის 102
3. კავშირი პოლარულ და მართკუთხა კოორდინატებს შორის 102
4. არქიმედის სპირალი 103
5. ჰიპერბოლური სპირალი 105
6. ლემნისკატა 106

II თავი. ცვლადი. ზღვარი. ფუნქცია 108

§ 1. ცვლადი და მისი ზღვარი 108
1. დანომრილი ცვლადი 108
2. ზღვარი 111
3. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები 112
4. ცვლადი სიდიდეების ძირითადი თვისებები 116
5. განუსაზღვრელი გამოსახულებები 121
6. ზოგიერთი ტიპის განუსაზღვრელობათა გახსნა 122
7. e რიცხვი 133
8. ნატურალური ლოგარითმები 136
9. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები 138
10. სამი შესანიშნავი ზღვარი 141
11. უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შედარება 144

§ 2. ფუნქცია 148
1. ფუნქციის ცნება 148
2. ფუნქციის მოცემის სხვადასხვა ხერხი 148
3. ზოგიერთი ფუნქციის გრაფიკი 153
4. ფუნქციის უწყვეტობის ცნება 156
5. ელემენტარული ფუნქციები 159

6. ფუნქციის მოცემის არე. შუალედების სხვადასხვა ტიპი 161
7. თეორემა უწყვეტი ფუნქციის საშუალედო მნიშვნელობის შესახებ 162
8. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება 163

III თავი. წარმოებული და დიფერენციალი 164

§ 1. წარმოებული 164
1. მხები წრფე 164
2. სიჩქარე 167
3. ღეროს სიმკვრივე 170
4. წარმოებულის განსაზღვრა 172

§ 2. ელემენტარულ ფუნქციათა გაწარმოების ტექნიკა 176
1. მუდმივის წარმოებული . 176
2. დამოუკიდებელი ცვლადის წარმოებული 177
3. ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული 177
4. სინუსისა და კოსინუსის წარმოებულები . 178
5. ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და შეფარდების წარმოებული 179
6. ტანგენსის და კოტანგენსის წარმოებულები 183
7. მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული 184
8. ლოგარითმის წარმოებული 185
9. ჯაჭვური წესი 188
10. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი გაწარმოება 194
11. გაწარმოების განსაკუთრებული შემთხვევები 201

§ 3. დიფერენციალი 203
1. დიფერენციალის განსაზღვრა 203
2. დიფერენციალის გეომეტრიული აზრი 304
3. ფუნქციის დიფერენციალის მონახვა 207
4. დიფერენციალის ჩანაწერის ინვარიანტობა 208
5. დიფერენციალის გამოყენება მიახლოებით გამოთვლებში 208

§ 4. უმაღლესი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები 212
1. უმაღლესი რიგის წარმოებულები 212
2. უმაღლესი რიგის დიფერენციალები 213

§ 5. ფუნქციათა გამოკვლევა 214
1. ფუნქციათა ზრდა და კლება 214
2. ფუნქციის ექსტრემუმი 217
3. ფერმას პრინციპი 219
4. სტაციონარული წერტილების გამოკვლევის მეორე ხერხი 227
5. უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის პოვნა 229
6. კონკრეტული ხასიათის ამოცანები 232
7. წყვეტილ ფუნქციათა გრაფიკები 240
8. [illegible]ახეილი ექსტრემუმი 243

§ 6. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები 245
1. როლის თეორემა 245
2. სასრულ ნაზრდთა ფორმულა 246
3. სასრულ ნაზრდთა განზოგადებული ფორმულა 247
4. ფუნქციის მუდმივობის ნიშანი 248

5. განუსაზღვრელობათა გახსნა 249
6. $\Delta y = dy$ ტოლობის სიზუსტის შეფასება 251

§ 7. ტეილორის ფორმულა 252
1. საკითხის დაყენება 252
2. ტეილორის ფორმულა მრავალწევრისათვის 253
3. ტეილორის ფორმულა ნებისმიერი ფუნქციისათვის 255
4. ტეილორის ფორმულის სხვა სახეები 259

IV თავი. დიფერენციალური გეომეტრიის ზოგიერთი საკითხი 261

§ 1. მხები და ნორმალი 261
1. მხების გავლება 261
2. ნორმალი 264

§ 2. წირის ჩაზნექილობის მიმართულება 265
1. ჩაზნექილობის მიმართულება 265
2. გადაღუნვის და გაწრფევების წერტილები 268

§ 3. წირის მოცემა პარამეტრული სახით 270
1. საკითხის დაყენება 270
2. წრეწირის და ელიფსის პარამეტრული განტოლებები 271
3. ციკლოიდი 274
4. წრეწირის ევოლვენტა 275
5. პარამეტრული გაწარმოება 277

§ 4. სიმრუდე 280
1. საშუალო და ჭეშმარიტი სიმრუდე 280
2. სიმრუდის გამოსათვლელი ფორმულა 282
3. პარამეტრული სახით მოცემული წირის შემთხვევა 286
4. პოლარულ კოორდინატთა შემთხვევა 287
5. სიმრუდის წრეწირი, ცენტრი და რადიუსი 287
6. ევოლუტის და ევოლვენტის ცნება 290
7. სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები 292
8. რკინიგზის მოსახვევები 294

V თავი. განუსაზღვრელი ინტეგრალი 296

§ 1. ინტეგრების ზოგადი ხერხები 296
1. პირველადი 296
2. ნებისმიერი მუდმივი. განუსაზღვრელი ინტეგრალი 297
3. ძირითად ინტეგრალთა ცხრილი 300
4. ჯამის ინტეგრება და მუდმივი მამრავლის გამოტანა 302
5. ჩასმის ხერხი 303
6. წრფივი ჩასმები 308
7. ნაწილობითი ინტეგრება 310
8. ინტეგრალის დაყვანა თავის თავზე 315
9. ინტეგრალები, რომლებიც არ აიღება ელემენტარულად 318

§ 2. რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება 321
1. საკითხის დაყენება 321
2. ზოგიერთი ცნობა ალგებრული მრავალწევრის შესახებ 322

3. რაციონალური წილადის დაშლა მარტივ წილადებად 325
4. რაციონალური წილადების ინტეგრება 329

§ 3. ზოგიერთ ირაციონალობათა ინტეგრება 332
1. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის რაციონალიზაცია 332
2. $\int \frac{Ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ სახის ინტეგრალები 336

§ 4. ზოგიერთი ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრება 338
1. $\int e^{ax}P(x)\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$ სახის ინტეგრალები 338
2. $\int P(x)\ln^n x\,dx$ სახის ინტეგრალები 339
3. $\int \sin^n x\cos^m x\,dx$ სახის ინტეგრალები 340
4. $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$ და $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx$ სახის ინტეგრალები 342
5. $\sin x$-ის და $\cos x$-ის მიმართ რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება 343
6. ტრიგონომეტრიული ჩასმები 346

VI თ ა ვ ი. განსაზღვრული ინტეგრალი 351

§ 1. განსაზღვრული ინტეგრალის განსაზღვრა და მისი მნიშვნელოვანი თვისებები 351
1. ამოცანა ღეროს მასის შესახებ 351
2. განსაზღვრული ინტეგრალი 354
3. ინტეგრალის გეომეტრიული არსი 356
4. ინტეგრალის ორი უმარტივესი თვისება 359
5. ინტეგრალი, როგორც ზედა საზღვრის ფუნქცია. ბაროუს თეორემა 362
6. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა. ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულა 363
7. ნაწილობითი ინტეგრება და ცვლადის შეცვლა განსაზღვრულ ინტეგრალში 366
8. ინტეგრალის მნიშვნელოვანი თვისებები 369

§ 2. პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენების მეთოდიკა 372
1. ვერტიკალურ კედელზე სითხის წნევის გამოთვლა 372
2. ჭურჭლიდან წყლის ამოსატუმბად საჭირო მუშაობის განსაზღვრა 379
3. ინტეგრალის გამოყენება კონკრეტულ საკითხებში 383

§ 3. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიაში 385
1. ფართობების გამოთვლა. დეკარტის კოორდინატები 385
2. ფართობების გამოთვლა. პოლარული კოორდინატები 387
3. სხეულის მოცულობის გამოთვლა მისი კვეთების ფართობების საშუალებით 389
4. ბრუნვის სხეულის მოცულობა 392
5. წირის რკალის სიგრძე 394
6. ბრუნვის ზედაპირის ფართობი 396
7. შემთხვევა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით 398
8. რკალის სიგრძე პოლარულ კოორდინატებში 400

§ 4. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში 402

1. სტატიკური მომენტები და ინერციის მომენტები 402
2. პარალელურ ძალთა ცენტრი 409
3. სიმძიმის ცენტრი 411

§ განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა 417

1. საკითხის დაყენება 417
2. ტრაპეციების ფორმულა 418
3. სიმპსონის მცირე ფორმულა 421
4. სხეულის მოცულობის გამოსახვა სიმპსონის ფორმულის საშუალებით 423
5. ელიფსის მიახლოებითი გაწრფევება 424
6. სიმპსონის დიდი ფორმულა 425

§ 0. არასაკუთრივი ინტეგრალები 428

1. ინტეგრალები უსასრულო შუალედში 428
2. ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან 433

ИБ № 568

მთარგმნელი ა. ჯახუა
რედაქტორი ა. ბესელია
მხატვრული რედაქტორი ე. ქიშმარაია
ტექრედაქტორი გ. ბოკუჩავა
უფროსი კორექტორი მ. ამირანაშვილი
კორექტორი ნ. ქაფიანიძე
გამომშვები ო. მაჰავარიანი

გადაეცა წარმოებას 1/XI-79 წ., ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26/VI-81 წ., ქაღალდის ზომა $60 \times 90^1/_{16}$, საბეჭდი ქაღალდი № 2. ნაბეჭდი თაბახი 27,75, სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 19,89. ტირაჟი 1000 შეკვ. № 1325

ფასი 80 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.

1981

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნის ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის ბეჭდვითი სიტყვის კომბინატი, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.

Комбинат печати Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Тбилиси, ул. Марджанишвили, № 5.