თემურ ხუციშვილი ირაკლი ვეკუა გიორგი კვინიკაძე

150

თეორემა და ფორმულა

პლანიმეტრიის საკონკურსო ამოცანების ამოსახსნელად

თბილისი
2010

„ⴅⴈⴌⴀⴢ ⴃⴀ ⴄⴑⴄⴚⴀ ⴕⴓⴄⴗⴀⴌⴈⴑ-ⴋⴄⴆⴍⴋⴄⴐⴍⴁⴀⴢ ⴃⴀⴑⴃⴄⴁⴑ ⴑⴀⴋⴇⴀ ⴇⴣⴑⴃⴀⴃ ⴎⴈⴐⴅⴄⴊ ⴗⴍⴅⴄⴊⴇⴀⴢⴑⴀ ⴃⴀ ⴍⴐⴇⴀ ⴋⴀⴇ ⴄⴐⴇⴈⴑⴀ ⴋⴈⴄⴐ ⴜⴀⴐⴋⴍⴀⴙⴄⴌⴑ, ⴅⴈⴇⴀⴅⴄ ⴛⴄ ⴃⴀ ⴑⴓⴊⴈ ⴄⴐⴇⴈⴑⴀⴂⴀⴌ ⴋⴞⴍⴊⴍⴍⴁⴈⴇⴈⴑⴀ ⴋⴀⴋⴈⴑⴀ, ⴄⴑⴇⴀⴅⴄ ⴜⴐⴔⴄⴊ ⴜⴈⴐⴈ, ⴐⴍⴋⴄⴊ ⴀⴐⴑ ⴄⴑⴄ ——, ⴃⴀ ⴗⴍⴅⴊⴀⴃ ⴆⴄⴃⴑⴀⴙⴈⴌⴍⴢ ⴄ ⴎ ⴈ ⴔ ⴀ ⴌ ⴈ ⴀ ⴢ. ⴐⴍⴋⴄⴊ ⴀⴐⴑ ⴆⴄⴃⴀⴢ ⴑⴀⴞⴈⴊⴀⴅⴈ ⴅⴄⴊⴈⴑⴀⴢ ⴗⴍⴅⴊⴈⴇⴓⴐⴇ ⴅⴄⴐ ⴋⴕⴍⴌⴄ ⴑⴈⴖⴐⴋⴈⴑⴀⴢ. ⴀⴠⴀ ⴅⴈⴇ ⴄⴑⴄ ⴀⴐⴑ ⴄⴐⴇⴈⴑⴀ ⴑ ⴈ ⴋ ⴈ ⴀ ⴢ ⴑ ⴂ ⴀ ⴌ ⴜⴀⴐⴋⴍⴈⴙⴈⴌⴌⴄⴑ, ⴐⴍⴋⴄⴊ ⴀⴐⴑ ⴜⴄⴌⴚⴈⴊⴈ. ⴐⴀⴋⴄⴇⴓ ⴜⴀⴈⴊⴓⴀⴐⴍⴑ ⴐⴀⴢ ⴜⴄⴌⴚⴈⴊⴈ, ⴘⴄⴈⴕⴋⴑ ⴜⴐⴔⴄⴊⴑⴀ, ⴐⴍⴋⴄⴊ ⴀⴐⴑ ⴛⴄ ⴎⴈⴐⴋⴘⴍⴢ ⴋⴈⴑⴈ. ⴞⴍⴊⴍ ⴍⴃⴄⴑ ⴐⴀⴢ ⴈⴅⴐⴚⴄⴊⴍⴑ ⴜⴈⴐⴋⴀⴌ, ⴈⴋⴍⴕⴋⴄⴃⴄⴁⴑ ⴆⴄⴃⴑⴀⴙⴈⴌⴍⴑⴀ, ⴐⴍⴋⴄⴊ ⴀⴐⴑ ⴛⴀⴊⴈ ⴃⴀ ⴐⴄⴚⴀ ⴇⴓ ⴑⴓⴊⴈ ⴑⴐⴓⴊⴗⴍⴔⴈⴑⴀ ⴋⴈⴑⴈⴑⴀⴢ, ⴐⴍⴋⴊⴈⴑⴀ ⴋⴈⴄⴐ ⴑⴞⴓⴀⴌⴈ ⴗⴍⴅⴄⴊⴌⴈ ⴌⴀⴉⴓⴄⴇⴌⴈ ⴃⴀ ⴘⴄⴃⴂⴋⴓⴊⴄⴁⴀⴌⴈ ⴀⴖⴈⴋⴆⴀⴃⴄⴁⴈⴀⴌ. ⴅⴈⴇⴀⴐ ⴎⴈⴐⴅⴄⴊⴈ ⴄⴑⴄ ⴌⴀⴉⴓⴄⴇⴇⴀⴢ ⴑⴀⴋⴗⴓⴐⴈ ▷, ⴃⴀ ⴗⴍⴅⴊⴀⴃ ⴍⴇⴗⴓⴐⴈ ▭, ⴃⴀ ⴋⴄⴐⴋⴄⴖⴀ ⴋⴐⴂⴓⴀⴊⴈ ⴃⴀ ⴘⴄⴑⴔⴄⴐⴍⴄⴁⴓⴊⴈ ○. ⴐⴍⴋⴊⴈⴑⴀ ⴀⴐⴚⴀ ⴀⴐⴑ ⴃⴀⴑⴀⴜⴗⴈ ⴃⴀ ⴀⴐⴚⴀ ⴃⴀⴑⴀⴑⴐⴓⴊⴈ, ⴐⴀⴋⴄⴇⴓ ⴑⴀⴈⴃⴀⴢⴇ ⴈⴜⴗⴍ ⴜⴄⴐⴁⴀⴃ, ⴋⴓⴌⴅⴄ ⴃⴀ ⴋⴈⴈⴑⴐⴓⴊⴀ."

პროკლე დიადოხოსი (V ს).
„კავშირნი ღვთისმეტყველებითნი"
თარგმნილი იოანე პეტრიწის მიერ (XI-XII სს).

თემურ ხუციშვილი ირაკლი ვეკუა გიორგი კვინიკაძე

150

თეორემა და ფორმულა პლანიმეტრიის საკონკურსო ამოცანების ამოსახსნელად

თბილისი

2010

პლანიმეტრიის თეორემებისა და ფორმულების ნაკრები მოიცავს იმ საკითხებს, რომლებიც უშუალოდ არ არიან შეტანილი ეროვნული გამოცდების პროგრამაში. პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ეროვნულ გამოცდებზე პლანიმეტრიის რთული ამოცანების ამოსახსნელად აუცილებელია უნარ-ჩვევები, რომლებსაც სტანდარტული კურსის გავლისას აბიტურიენტი ვერ იძენს.

წარმოდგენილი სახელმძღვანელო დაგეხმარებათ წარმატებით ამოხსნათ საგამოცდო თუ საოლიმპიადო ამოცანები. პლანიმეტრიის თეორემები და ფორმულები ვერბალურად სრულად არ არის ჩამოყალიბებული, მაგრამ ისეა მოწოდებული, რომ ნახაზების მიხედვით მათი აღქმა და დამახსოვრება იოლდება. თითოეულ თეორემასა და ფორმულას ახლავს დამტკიცება.

რედაქტორი: ივანე კვიტაშვილი

რეცენზენტები: ავთანდილ გაგნიძე

გიორგი ლობჟანიძე

ნუგზარ სხირტლაძე

(კავკასიის უნივერსიტეტის პროფესორები)

ტექნიკური დირექტორი: ირაკლი ბიგვავა

დახმარებისათვის მადლობას ვუხდით

დავით ფოჩხუასა და პროფესორ თამაზ აქუბარდიას.

კავკასიის უნივერსიტეტი
CAUCASUS UNIVERSITY

კავკასიის ბიზნესის სკოლა
Caucasus School of Business

კავკასიის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ISBN 978-99940-861-5-3

ს ა რ ჩ ე ვ ი

გამოყენებული აღნიშვნები

a, b, c, m, n, x, y, z – მონაკვეთის სიგრძე;

h – სიმაღლე;

l – ბისექტრისა;

m_a, m_b, m_c –შესაბამისი გვერდებისადმი გავლებული მედიანები;

r – ფიგურაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი;

R – ფიგურაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი;

P – ფიგურის პერიმეტრი;

S – ფიგურის ფართობი;

$\overset{\frown}{ABC}$ – შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომა;

$l_{\overset{\frown}{AB}}$ – შესაბამისი რკალის სიგრძე;

$\equiv$ – აღნიშვნის გამომხატველი ნიშანი;

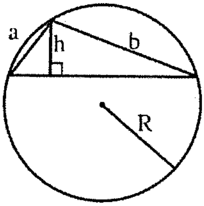
$\sim$ – მსგავსების ნიშანი;

$\Rightarrow$ – გამომდინარეობის ნიშანი;

$const$ – მუდმივი სიდიდე.

სამკუთხედი და წრეწირი

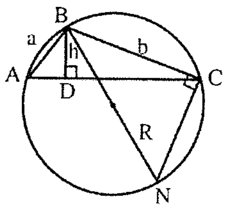
№1



სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ასეც გამოითვლება:

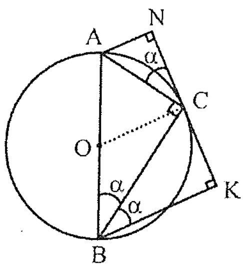
$$\mathbf{R} = \frac{ab}{2h}$$

დამტკიცება: გავავლოთ $BN = 2R$. $\angle BCN$ დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეა, ამიტომ $\angle BCN = 90°$. $\angle BAC = \angle BNC$, როგორც ერთ რკალზე დაყრდნობილი კუთხეები. ე.ი. $\Delta ABD \sim \Delta BNC$, მსგავსებიდან გამომდინარე:



$$\frac{a}{2R} = \frac{h}{b} \text{ ე.ი. } R = \frac{ab}{2h}.$$

№2

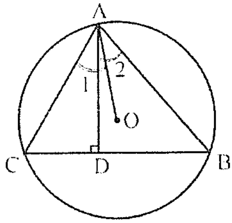


დიამეტრის ბოლოდან მხებზე დაშვებულია მართობები, მაშინ

$$\Delta ANC \sim \Delta ABC \sim \Delta BKC$$

დამტკიცება: $\angle ACN = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, რადგან მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხეა. $\angle ACN \equiv \alpha$. $\angle ABC$ წრეწირში ჩახაზული კუთხეა, ამიტომ $\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \alpha$ ე.ი. $\angle ACN = \angle \mathrm{ABC} = \alpha$. ანალოგიურად, $\angle BCK = \angle BAC = 90° - \alpha$ და $\angle \boldsymbol{CBK} = \alpha$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ANC, ACB და BKC სამკუთხედების შესაბამისი კუთხეები ტოლია. ე.ი. $\Delta ANC \sim \Delta ABC \sim \Delta BKC$.

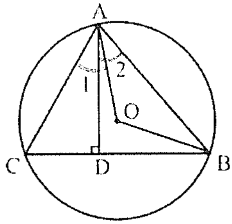
№3



მახვილკუთხა სამკუთხედში თუ OA რადიუსია და AD სიმაღლე, მაშინ

$$\angle BAD = \angle CAO$$

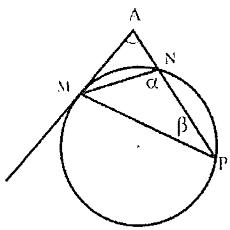
დამტკიცება: გავავლოთ OB რადიუსი. $\angle BAD = \angle BAO + \angle OAD$,



$\angle CAO = \angle CAD + \angle OAD$. რადგან ΔAOB ტოლფერდაა, ამიტომ $\angle OAB = \angle OBA \equiv \alpha$ და $\angle AOB = 180° - 2\alpha$. $\angle AOB$ AB რკალზე დაყრდნობილი ცენტრალური კუთხეა, ხოლო $\angle ACB$ ჩახაზული კუთხეა, რომელიც იგივე AB რკალს ეყრდნობა, ანუ $\angle AOB = 2\angle ACB$. $2\angle ACB = 180° - 2\alpha$, $\angle ACB = 90° - \alpha$ ე.ი. $\angle CAD = \alpha$.

მივიღეთ, რომ $\angle OAB = \angle CAD = \alpha$ ე.ი. $\angle BAD = \angle CAO$.

№4

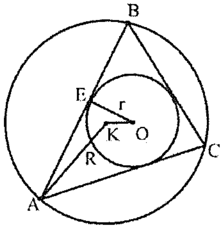


კუთხე AM მხებსა და ANP მკვეთს შორის ასეც გამოითვლება:

$$\angle A = \alpha - \beta$$

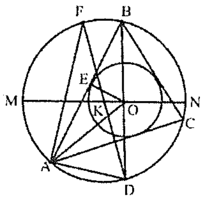
დამტკიცება: $\angle MPN$ ჩახაზული კუთხეა, რომელიც MN რკალს ეყრდნობა, ანუ $\angle MPN = \frac{\overset{\frown}{MN}}{2}$. $\angle AMN$ მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხეა, ანუ $\angle AMN = \frac{\overset{\frown}{MN}}{2}$, საიდანაც $\angle MPN = \angle AMN = \beta$. ΔMNP-დან $\angle NMP = 180° - \alpha - \beta$.
$\angle AMP = \angle AMN + \angle NMP = \beta + 180° - \alpha - \beta = 180° - \alpha$.
ΔAMP-ში $\angle A = 180° - \angle APM - \angle AMP = 180° - (180° - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$.

№5



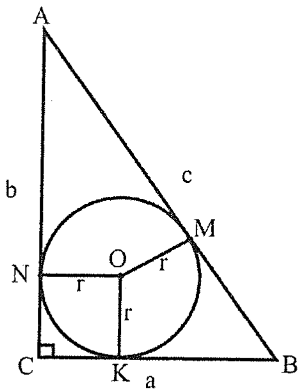
ნებისმიერ სამკუთხედში მანძილი ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების ცენტრებს შორის ასე გამოითვლება:

$$OK^2 = R^2 - 2Rr$$



დამტკიცება: ვთქვათ O და K შესაბამისად ΔABC-ში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრები არიან. რადგანაც BD ბისექტრისაა, ამიტომ D წერტილი ADC რკალის შუა წერტილია. $\angle AOD = \angle ABO + \angle BAO$, როგორც სამკუთხედის გარე კუთხე. რადგანაც AO და BO ბისექტრისები არიან, ამიტომ $\angle AOD = \angle ABO + \angle OAC = \angle \boldsymbol{CBD} + \angle OAC$ (1). $\angle OAD = \angle CAD + \angle OAC$ (2). $\angle \boldsymbol{CBD} = \angle \boldsymbol{CAD}$, როგორც ერთ რკალზე დაყრდნობილი კუთხეები. (1) და (2)-დან $\angle AOD = \angle OAD$ და $AD = OD$. ურთიერთგადამკვეთ ქორდათა თვისების თანახმად $MO \cdot ON = BO \cdot OD$. $OE \perp AB$ და FD შემოხაზული წრეწირის დიამეტრია, ამიტომ ΔBOE და ΔFDA მსგავსია. აქედან გამომდინარე $\frac{BO}{OE} = \frac{FD}{AD} \Rightarrow BO \cdot AD = OE \cdot FD$ და, რადგანაც $AD = OD$, ამიტომ $BO \cdot OD = OE \cdot FD$ და $MO \cdot ON = OE \cdot FD$. ამ ტოლობაში ჩავსვათ შემდეგი მნიშვნელობები: $MO = R + OK, ON = R - OK$, $OE = r, FD = 2R$. მივიღებთ, რომ $R^2 - OK^2 = 2Rr$. ე.ი. $OK^2 = R^2 - 2Rr$

№6-7



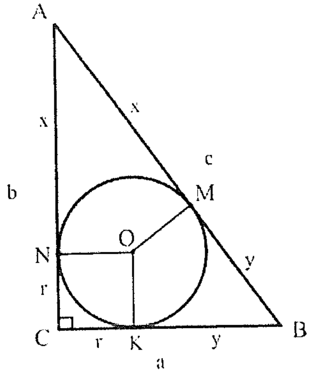
ა) მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების ჯამსა და ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$\boldsymbol{a + b = 2R + 2r}$$

ბ) მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ასეც გამოითვლება:

$$\boldsymbol{r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{P_\Delta}{2} - c}$$

დამტკიცება: ა) K, M და N ΔABC-ში ჩახაზული წრეწირის გვერდებთან შეხების წერტილები არიან, O-კი ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. BK და BM მხებები არიან, ამიტომ $KB = BM$. ანალოგიურად, $AN = AM, CK = CN$. ასევე, $OK = CN$ და $CK = NO$.



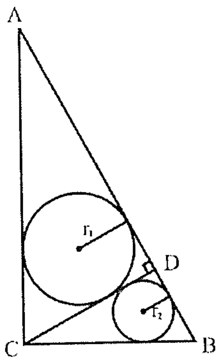
$AC + BC = AN + NC + CK + KB = ON + OK + AB = 2r + 2R$, სადაც r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, ხოლო R-შემოხაზულის.

ბ) $AN = AM = x$ $\quad BK = BM = y$ $\quad NC = CK = r$. შევადგინოთ სისტემა

$$\begin{cases} a = y + r \\ b = x + r \\ c = x + y \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad a + b - c = 2r$ ანუ $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{P_\Delta}{2} - c.$

№8-9



ABC მართკუთხა სამკუთხედში გავლებულია CD სიმაღლე, მაშინ ACB, ADC და CDB მართკუთხა სამკუთხედებისათვის შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

ა) $R^2 = R_1^{\,2} + R_2^{\,2}$

ბ) $r^2 = r_1^{\,2} + r_2^{\,2}$

დამტკიცება: ა) რადგან მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ჰიპოტენუზის ნახევარია, ამიტომ $R = \frac{AB}{2}$, $R_1 = \frac{BC}{2}$, $R_2 = \frac{AC}{2}$.

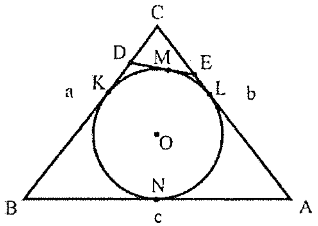
ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$, ანუ $R^2 = R_1^{\,2} + R_2^{\,2}$.

ბ) ორი მართკუთხა სამკუთხედი მსგავსია, თუ მათ ერთი მახვილი კუთხე მაინც ტოლი აქვთ. ანუ $\Delta ACB \sim \Delta CDB \sim \Delta ADC$. აქედან გამომდინარე,

$$\left.\begin{array}{l} AB{:}BC{:}AC = r{:}r_1{:}r_2 \\ AB^2 = BC^2 + AC^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB = rx,\ BC = r_1x,\ AC = r_2x.$$

ე.ი. $(rx)^2 = (r_1x)^2 + (r_2x)^2$ და $r^2 = r_1^{\,2} + r_2^{\,2}$.

№10



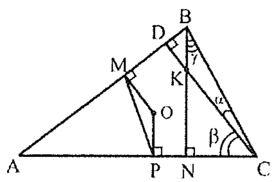
თუ **DE** სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის მხებია, მაშინ:

$$P_{\Delta CDE} = a + b - c$$

დამტკიცება: წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხებები ტოლია, ანუ $KD = DM$, $EM = EL$, $AL = AN, BK = BN$.

$P_{\Delta CDE} = CD + CE + ED = CD + DM + ME + CE = CD + DK + EL + CE = (CD + DK) + (CE + EL) = CK + CL = (CB - BK) + (CA - AL) = CB + CA - (BK + AL) = a + b - (BN + AN) = a + b - BA = a + b - c.$

№11

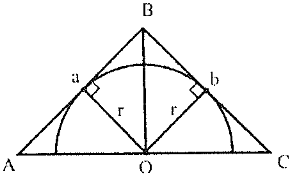


მანძილი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის $\boldsymbol{O}$ ცენტრიდან $\boldsymbol{AB}$ გვერდამდე ორჯერ ნაკლებია მანძილზე სიმაღლეების გადაკვეთის $\boldsymbol{K}$ წერტილიდან ამ გვერდის მოპირდაპირე $\boldsymbol{C}$ წვერომდე:

$$KC = 2 \cdot OM$$

დამტკიცება: $\angle KCB \equiv \alpha$, $\angle KCN \equiv \beta$, $\angle NBC \equiv \gamma$. $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ (1), ΔBDC-დან $\angle DBK = 90° - \alpha - \gamma$. (1)-დან $\angle DBK = \beta$. MO და PO შუამართობებია, ამიტომ MP შუახაზია. შესაბამისად, MP∥BC, ამიტომ $\angle MPA = \alpha + \beta$, $\angle OPA = 90°$, $\angle OPM = 90° - \alpha - \beta$. (1)-დან $\angle OPM = \gamma$. ანალოგიურად, $\angle OMP = 90° - \gamma - \beta = \alpha$. განვიხილოთ ΔOMP და ΔKCB. ამ სამკუთხედების შესაბამისი კუთხეები ტოლია: $\angle OMP = \angle KCB$, $\angle OPM = \angle KBC, \angle MOP = \angle CKB$, ამიტომ $\Delta OMP \sim \Delta KCB$. აქედან გამომდინარე, $\frac{OP}{KB} = \frac{MP}{BC} = \frac{OM}{KC} = \frac{1}{2}$. ე.ი. $2OM = KC$.

№12



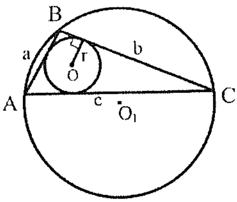
სამკუთხედში ჩახაზული ნახევარწრე-წირის რადიუსი ასე გამოითვლება:

$$r=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ΔABC. $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}ar$, ხოლო $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}br$.

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}r(a+b) \Rightarrow r=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b}.$$

№13-14



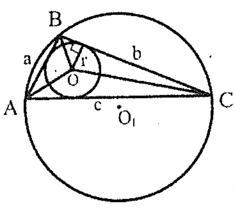
ა) სამკუდხედის ფართობი ჩახაზული წრეწირის რადიუსით და პერიმეტრით ასე გამოითვლება:

$$S_{\Delta}=\frac{rP_{\Delta}}{2}$$

ბ) სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ასეც გამოითვლება:

$$r=\sqrt{\frac{2}{P_{\Delta}}\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-a\right)\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-b\right)\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-c\right)}$$

დამტკიცება: ა) სამკუთხედის წვეროებიდან გავავლოთ ბისექტრისები. მათი გადაკვეთის წერტილი იქნება ჩახაზული წრეწირის O ცენტრი. O წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებზე დაშვებული მართობები ჩახაზული წრეწირის რადიუსებია. ΔAOB, ΔBOC-სა და ΔAOC-ს ფართობები ასე გამოითვლება:



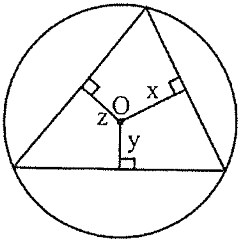
$$S_1=\frac{1}{2}ar,\quad S_2=\frac{1}{2}br,\quad S_3=\frac{1}{2}cr.$$

$$S_{\Delta}=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}\ r(a+b+c)=\frac{rP_{\Delta}}{2}\quad (1)$$

ბ) (1)-დან გამომდინარე $r=\frac{2S_{\Delta}}{P_{\Delta}}$. ჰერონის ფორმულის გათვალისწინებით

$$r=\frac{2}{P_{\Delta}}\sqrt{\frac{P_{\Delta}}{2}\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-a\right)\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-b\right)\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-c\right)}=\sqrt{\frac{2}{P_{\Delta}}\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-a\right)\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-b\right)\left(\frac{P_{\Delta}}{2}-c\right)}$$

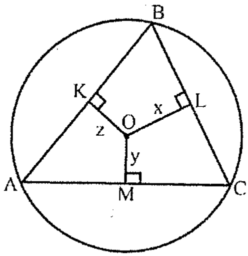
№15



მახვილკუთხა სამკუთხედში შემოხაზული წრეწირის O ცენტრიდან გავლებულია მართობები, მაშინ

$$R + r = x + y + z$$

დამტკიცება: $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp AC$. $AKOM$ ოთხკუთხედში



მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია, ამიტომ მასზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. პტოლემეოსის თეორემის (იხ. №146) თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ :

$AO \cdot KM = AM \cdot OK + AK \cdot OM$ (1).

K, L და M გვერდების შუაწერტილებია, ამიტომ $KM = \frac{1}{2}BC$, $AM = \frac{1}{2}AC$ და $AK = \frac{1}{2}AB$, ხოლო (1)-ის გათვალისწინებით $R \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC \cdot OK + \frac{1}{2}AB \cdot OM$ და

შესაბამისად $R \cdot BC = AC \cdot OK + AB \cdot OM$.

ანალოგიურად, $R \cdot AC = AB \cdot OL + \quad +BC \cdot OK$ და $R \cdot AB = AC \cdot OL + BC \cdot OM$.
შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები:

$$R \cdot (AB + BC + AC) = OL \cdot (AC + AB) + OM \cdot (BC + AB) + OK \cdot (BC + AC)$$

$S = \frac{AB+AC+BC}{2} r$, აქედან $AC + AB = \frac{2S}{r} - BC$, $BC + AB = \frac{2S}{r} - AC$,

$BC + AC = \frac{2S}{r} - AB$, $AB + BC + AC = \frac{2S}{r}$.

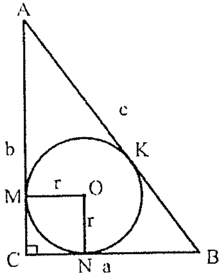
$$R \cdot \frac{2S}{r} = \frac{2S}{r} \cdot OL - OL \cdot BC + \frac{2S}{r} \cdot OM - OM \cdot AC + \frac{2S}{r} \cdot OK - OK \cdot AB.$$

$OL \cdot BC = 2S_{\Delta BOC}$, $OM \cdot AC = 2S_{\Delta AOC}$, $OK \cdot AB = 2S_{\Delta AOB}$.

$R \cdot \frac{2S}{r} = \frac{2S}{r} \cdot (OL + OM + OK) - 2S \qquad \frac{R}{r} + 1 = \frac{1}{r} \cdot (OL + OK + OM)$

$OL + OK + OM = \frac{R+r}{r} \cdot r$ ე.ი. $OL + OK + OM = R + r$, ანუ $R + r = x + y + z$.

№16-17-18



მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ასეც გამოითვლება:

ა) $S_\Delta = (a+b)r - r^2$

ბ) $S_\Delta = r^2 + 2Rr$

გ) $S_\Delta = (a-r)(b-r)$

დამტკიცება: ა) $r = \frac{2S_\Delta}{P_\Delta}$ (იხ. №13) და $S = r \cdot \frac{P_\Delta}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$.

რადგან $AM = AK$, $\quad BN = BK \quad c = (a-r) + (b-r)$ (1).

$$S = r \cdot \frac{a+b+(a-r)+(b-r)}{2} = r \cdot \frac{2a+2b-2r}{2} = r(a+b-r) \qquad (2).$$

მივიღეთ $S_\Delta = (a+b)r - r^2$.

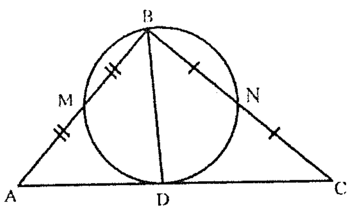
ბ) (2)-დან $S = r(a+b-r) = r[r + (a-r) + (b-r)]$ და (1)-დან გამომდინარე, $S = r(r+c) = r(r+2R) = r^2 + 2Rr$.

გ) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot [(a-r)+r][(b-r)+r]$

$$\begin{aligned} 2S_{\Delta ABC} &= (a-r)(b-r) + (a-r)r + (b-r)r + r^2 = \\ &= (a-r)(b-r) + r(a-r+b-r+r) = \\ &= (a-r)(b-r) + r(a+b-r) \end{aligned}$$

(2)-დან გამომდინარე $r(a+b-r) = S_{\Delta ABC}$, ამიტომ $S_{\Delta ABC} = (a-r)(b-r)$

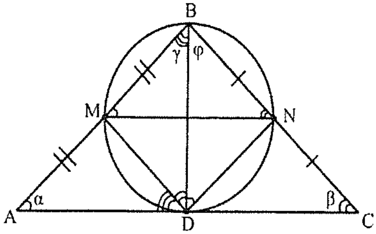
№19



M და ***N*** გვერდების შუაწერტილებია, ***D*** შეხების წერტილია, მაშინ

$$BD^2 = AD \cdot DC$$

დამტკიცება: რადგან M და N წერტილები გვერდების შუაწერტილებია, ამიტომ MN მონაკვეთი ΔABC-ს შუახაზია. ე.ი. $\angle BMN = \angle BAC$, $\angle BNM = \angle BCA$.



განვიხილოთ $BMDN$ ოთხკუთხედი. ერთ რკალზე დაყრდნობილი კუთხეები ტოლია, ამიტომ $\angle BMN = \angle BDN$, $\angle BNM = \angle BDM$, $\angle ABD = \angle MND$, $\angle CBD = \angle NMD$.

$\angle MDA = \angle ABD = \angle MND = \frac{\overset{\frown}{MD}}{2}$. ანალოგიურად, $\angle NDC = \angle CBD = \angle NMD = \frac{\overset{\frown}{ND}}{2}$.

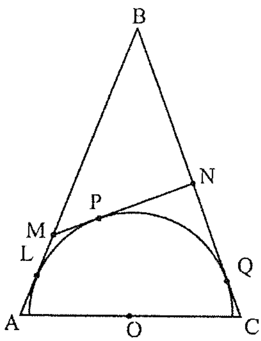
$\angle BAC \equiv \alpha, \angle BCA \equiv \beta, \angle ABD \equiv \gamma, \angle CBD \equiv \varphi$. ΔABC-დან $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = 180°$. გაშლილი AMB კუთხიდან $\angle AMD = 180° - \angle BMN - \angle NMD = 180° - \alpha - \varphi = \beta + \gamma$, ხოლო ΔAMD-დან $\angle AMD = 180° - \alpha - \gamma$.

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha - \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + 2\gamma = 180°$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = 180°$, მივიღებთ, რომ $\gamma = \varphi$. ე.ი. BD ბისექტრისაა. $\Delta BND \sim \Delta DMA$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $\frac{BD}{DA} = \frac{BN}{DM} = \frac{DN}{AM}$. ანალოგიურად, $\Delta BMD \sim \Delta DNC$ და $\frac{BD}{DC} = \frac{MD}{NC} = \frac{MB}{DN}$.

შესაბამისად, $AD \cdot BN = BD \cdot MD$ $\qquad DC \cdot MD = BD \cdot NC$.

გადავამრავლოთ ეს ტოლობები, მივიღებთ $BD^2 \cdot MD \cdot NC = AD \cdot DC \cdot BN \cdot MD$. რადგან $BN = NC$, ამიტომ $BD^2 = AD \cdot DC$.

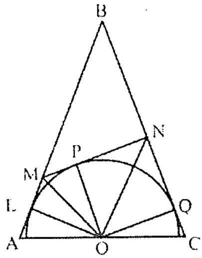


№20

ტოლფერდა სამკუთხედში ნახევარწრეწირის ნებისმიერი წერტილისათვის გავლებულია მხები, მაშინ

$$\boldsymbol{AM \cdot NC = \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$$

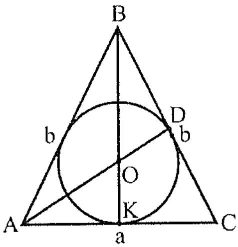
დამტკიცება: ფორმულა ადვილად დამტკიცდება თუ ვაჩვენებთ, რომ $\Delta AOM \sim \Delta CNO$, სადაც O ნახევარწრეწირის ცენტრია.



რადგან ABC ტოლფერდა სამკუთხედია, ამიტომ ΔAOM-სა და ΔCNO-ში $\angle A = \angle C$. ვაჩვენოთ, რომ $\angle MOA = \angle ONC$. ვთქვათ L, P და Q ნახევარწრეწირის შეხების წერტილებია შესაბამისად AB, MN და BC გვერდებთან. რადგან $OL \perp AB$ და $OQ \perp BC$, ამიტომ $LOQB$ ოთხკუთხედში $\angle LOQ = 180° - \angle B$, ამასთან ΔABC–ში $180° - \angle B = \angle A + \angle C = 2\angle A$. ე.ი. $\angle LOQ = 2\angle A$. ΔLOM და ΔMOP ტოლი სამკუთხედებია, რადგან $LM = MP$ და $PO = LO$ და MO საერთო გვერდი აქვთ. შესაბამისად, $\angle LMO = \angle MPO$, ანალოგიურად $\angle PNO = ONQ$ ე.ი. $\angle LOQ = 2\angle MON = 2\angle A$, $\angle MON = \angle A$. რადგან ΔAOM და ΔONM –ში $\angle AMO = \angle NMO$, ვასკვნით, რომ $\angle MOA = \angle \boldsymbol{MNO}$. რადგან $\angle \boldsymbol{MNO} = \angle ONC$, ამიტომ $\angle MOA = \angle ONC$ და

$\Delta AOM \sim \Delta CNO$. აქედან $\frac{AM}{AO} = \frac{OC}{NC}$. მივიღებთ $AM \cdot NC = AO \cdot OC = AO^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$.

№21



ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი AD ბისექტრისას ყოფს შეფარდებით:

$$\boldsymbol{AO : OD = (a + b) : b}$$

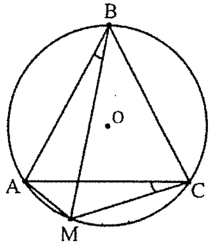
დამტკიცება: რადგან BK მედიანაა $S_{\Delta ABK} = \frac{S_{\Delta ABC}}{2}$. ბისექტრისის თვისების თანახმად $\frac{BO}{OK} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$. სამკუთხედის წვეროდან გავლებული სხივი იმ შეფარდებით ჰყოფს სამკუთხედის ფართობს, რა შეფარდებითაც იყოფა ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდი. ე.ი.

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABK}} = \frac{b}{\frac{a}{2}+b} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABK} \cdot \frac{b}{\frac{a}{2}+b} = \frac{S}{2} \cdot \frac{b}{\frac{a}{2}+b}. \ (1)$$

ანალოგიურად $S_{\Delta BOC} = \frac{S}{2} \cdot \frac{b}{\frac{a}{2}+b}$, ხოლო ბისექტრისის თვისების თანახმად $\frac{DB}{DC} = \frac{b}{a}$, ამიტომ $S_{\Delta BOD} = S_{\Delta BOC} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{S}{2} \cdot \frac{b}{\frac{a}{2}+b} \cdot \frac{b}{a+b}$.

(1)–დან გამომდინარე $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOD}} = \frac{a+b}{b} = \frac{AO}{OD}$

№22



ტოლგვერდა ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის AC რკალის ნებისმიერი M წერტილისათვის:

$$\boldsymbol{MA + MC = MB}$$

დამტკიცება: $\angle MCA$ და $\angle ABM$ ერთ რკალს ეყრდნობიან, ამიტომ $\angle MCA = \angle ABM \equiv \alpha$. განვიხილოთ ΔBCM და ΔBMA. რადგან წრეწირში ჩახაზულ $ABCM$ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი $180°$-ია $\angle BCM = 180° - \angle BAM$. სინუსების თეორემით გვექნება $\dfrac{\mathrm{BM}}{\sin\angle BCM} = \dfrac{\mathrm{CM}}{\sin\angle CBM}$,

ანუ $\dfrac{\mathrm{BM}}{\sin(60°+\alpha)} = \dfrac{\mathrm{CM}}{\sin(60°-\alpha)}$. ΔABM-დან $\dfrac{\mathrm{BM}}{\sin(180°-\angle BCM)} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\sin\angle MBA}$,

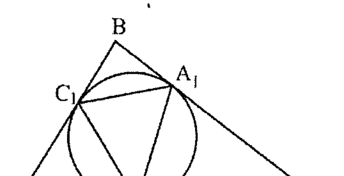
ანუ $\dfrac{\mathrm{BM}}{\sin(60°+\alpha)} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\sin\alpha}$. მივიღეთ, $\dfrac{\mathrm{BM}}{\sin(60°+\alpha)} = \dfrac{\mathrm{CM}}{\sin(60°-\alpha)} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\sin\alpha}$,

პროპორციის თვისების თანახმად, $\dfrac{\mathrm{BM}}{\sin(60°+\alpha)} = \dfrac{\mathrm{CM+AM}}{\sin(60°-\alpha)+\sin\alpha}$.

დაყვანის ფორმულებით გარდავქმნათ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მნიშვნელი: $\sin(60° - \alpha) + \sin\alpha = 2\sin 30°\cos(30° - \alpha) = \sin(60° + \alpha)$.

ე.ი. $MA + MC = MB$.

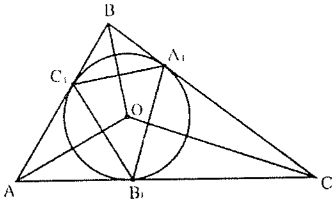
№23



წრეწირში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული სამკუთხედების ფართობების შეფარდება ასე გამოითვლება:

$$\boldsymbol{\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = 2 \cdot \sin\frac{\angle A}{2} \cdot \sin\frac{\angle B}{2} \cdot \sin\frac{\angle C}{2}}$$

დამტკიცება: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COA}$, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\ AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB$,



რადგან $OC_1 \perp AB$, ამიტომ $AO = \frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}$,

ანალოგიურად $BO = \frac{r}{\sin\frac{\angle B}{2}}$. ΔAOB-დან

$\angle AOB = 180° - \left(\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)$, აქედან

$$\sin \angle AOB = \sin\frac{\angle A+\angle B}{2} = \sin\frac{180°-\angle C}{2} = \sin(90° - \frac{\angle C}{2}) = \cos\frac{\angle C}{2}$$

ე.ი. $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}}$, ანალოგიურად ΔBOC-სა და ΔCOA-სთვის.

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin\frac{\angle C}{2}} + \frac{1}{2} r^2 \frac{\cos\frac{\angle B}{2}}{\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle C}{2}} + \frac{1}{2} r^2 \frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin\frac{\angle A}{2}} \Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} r^2 \frac{2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}+2\sin\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle B}{2}+2\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle C}{2}}{\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin\frac{\angle C}{2}} \Rightarrow$$

$\boldsymbol{S_{\Delta ABC} = \frac{r^2}{4} \cdot \frac{\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C}{\sin\frac{\angle A}{2}\cdot\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\sin\frac{\angle C}{2}}}$. ახლა გამოვსახოთ $S_{\Delta A_1B_1C_1}$,

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta A_1OB_1} + S_{\Delta B_1OC_1} + S_{\Delta A_1OC_1}$.

$S_{\Delta A_1OB_1} = \frac{1}{2} A_1O \cdot OB_1 \sin\angle A_1OB_1 = \frac{r^2}{2}\sin\angle A_1OB_1$, ანალოგიურად $S_{\Delta B_1OC_1}$-სა და $S_{\Delta A_1OC_1}$-სთვის საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{r^2}{2}(\sin\angle A_1OB_1 + \sin\angle B_1OC_1 + \sin\angle A_1OC_1)$$

$\angle A_1OB_1$-ს გასაგებად განვიხილოთ A_1OB_1C ოთხკუთხედი, საიდანაც $\angle OA_1C$=$\angle OB_1C$ =90° , ამიტომ $\angle A_1OB_1$+$\angle C$=180° ე.ი $\angle A_1OB_1 = 180° - \angle C$

ანალოგიურად $\angle B_1OC_1$ და $\angle A_1OC_1$-ს შემთხვევაშიც, შესაბამისად:

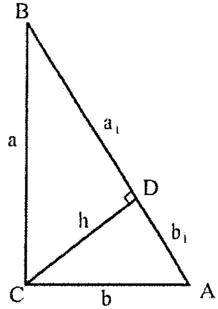
$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{r^2}{2}(\sin(180° - \angle C) + \sin(180° - \angle B) + \sin(180° - \angle C))$$

$$\boldsymbol{S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{r^2}{2}(\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C)}$$

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = 2 \cdot \sin\frac{\angle A}{2} \cdot \sin\frac{\angle B}{2} \cdot \sin\frac{\angle C}{2}$$

მართკუთხა სამკუთხედი

№24-25



ა) მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების ჰიპოტენუზაზე გეგმილებისათვის:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_1}{b_1}$$

ბ) მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზისადმი გავლებული სიმაღლისათვის:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

დამტკიცება: ა) ΔCBD-დან $\cos\angle B = \frac{a_1}{a}$, ΔABC-დან $\cos\angle B = \frac{a}{a_1+b_1}$.

ანუ $\frac{a_1}{a} = \frac{a}{a_1+b_1} \Rightarrow a^2 = a_1(a_1+b_1)$. ანალოგიურად ΔADC –დან

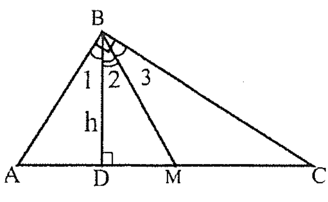
$$b^2 = b_1(a_1+b_1) \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{b^2} = \frac{a_1}{b_1}\ .$$

ბ) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}hc$. ცხადია $ab = hc$, $a^2b^2 = h^2c^2$,

პითაგორას თეორემის გათვალისწინებით, $a^2b^2 = h^2(a^2+b^2)$.

$$h^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{h^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

№26-27



მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლისა და მედიანისათვის

ა) $\angle ABD = \angle CBM$ $(\angle 1 = \angle 3)$

ბ) $\angle DBM = |\angle A - \angle C|$

დამტკიცება: ა) რადგან მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუა წერტილს ემთხვევა, ამიტომ AM=MB=MC. აქედან გამომდინარე ΔABM და ΔBMC ტოლფერდა სამკუთხედებია ე.ი. $\angle A = \angle 1 + \angle 2$ და $\angle C = \angle 3$. ΔDBM-დან $\angle DMB = 90° - \angle 2$, ხოლო ΔBMC-დან $\angle CMB = 180° - 2\angle 3$. $\angle AMC$ გაშლილი კუთხეა, ამიტომ

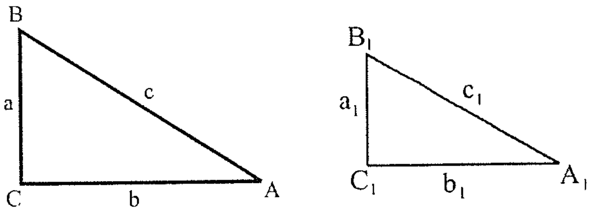
$$180° - 2\angle 3 + 90° - \angle 2 = 180°$$

$2\angle 3 + \angle 2 = 90°$, რადგან $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°$, ამიტომ $\angle 1 = \angle 3$. (1)

ბ) (1) ტოლობის გათვალისწინებით $\angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = \angle 2$ (2). ΔABM და ΔBMC ტოლფერდა სამკუთხედებია, ამიტომ $\angle 1 + \angle 2 = \angle A$ და $\angle C = \angle 3$.
(2) ტოლობიდან გამომდინარე კი $\angle A - \angle C = \angle 2$, ანუ $\angle DBM = |\angle A - \angle C|$

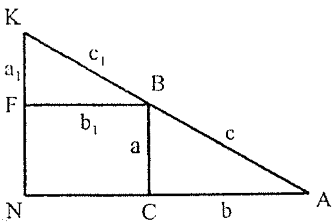
№28

მსგავსი მართკუთხა სამკუთხედების ჰიპოტენუზების ჯამის კვადრატი უდრის შესაბამისი კათეტების ჯამის კვადრატების ჯამს:



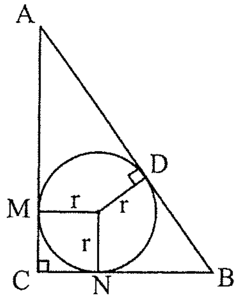
$$(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c_1})^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a_1})^2 + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b_1})^2$$

დამტკიცება: AC გვერდი გავაგრძელოთ C წვეროდან მარცხნივ და ავაგოთ b_1 −ის ტოლი NC მონაკვეთი. ანალოგიურად, AB გავაგრძელოთ c_1-ის ტოლი BK მონაკვეთით. ცხადია, რომ $NK \parallel BC$ და $AN \parallel BF$. რადგან ΔANK მართკუთხაა, ამიტომ $AK^2 = AN^2 + NK^2$. ხოლო $AK = (c + c_1)$, $AN = (b + b_1)$ და $NK = (a + a_1)$ ე.ი.



$$(c + c_1)^2 = (a + a_1)^2 + (b + b_1)^2$$

№29



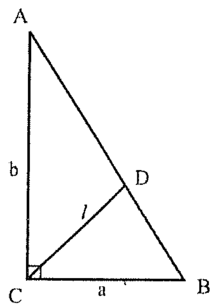
თუ D წერტილი ჩახაზული წრეწირის ჰიპოტენუზასთან შეხების წერტილია, მაშინ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ასე გამოითვლება:

$$S_{\Delta ABC} = AD \cdot DB$$

დამტკიცება: წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრეწირისადმი გაელებული მხებები ტოლია. $BD = BN$ და $AM = AD$, ანუ

$AD \cdot DB = AM \cdot NB = (CB - r)(AC - r) = S_{\Delta ABC}$ (იხ. №18)

№30



მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გავლებული ბისექტრისის სიგრძე ასე გამოითვლება:

$$l = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$$

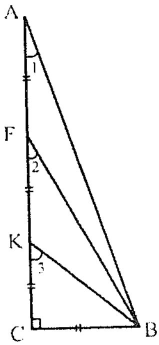
დამტკიცება: $S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}$, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot bl \sin \angle ACD$,

$S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2} \cdot al \sin \angle DCB$, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB}$, ანუ

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot bl \sin 45° + \frac{1}{2} \cdot al \sin 45°$$

$ab = l \sin 45° (a + b)$, საიდანაც $l = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$

№31



თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი სამ ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი და თითოეული ნაწილი მეორე კათეტის ტოლია, მაშინ:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°$$

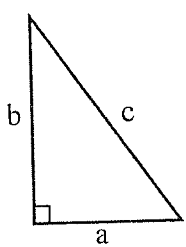
დამტკიცება: $\angle CKB = \angle 3, \angle CFB = \angle 2, \angle CAB = \angle 1.$

$KC = CB$, ანუ CKB სამკუთხედი ტოლფერდაა და $\angle 3 = \frac{\pi}{4}$.

$\operatorname{tg}\angle 2=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\angle 1=\frac{1}{3}$, მაშინ $\operatorname{tg}(\angle 2 + \angle 1)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$ ე.ი $\angle 1 + \angle 2 = \frac{\pi}{4}$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 90°$$

№32-33



მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ასეც გამოითვლება:

ა) $\boldsymbol{S = \frac{P_\Delta}{2}\left(\frac{P_\Delta}{2} - c\right)}$

ბ) $\boldsymbol{S = \left(\frac{P_\Delta}{2} - a\right)\left(\frac{P_\Delta}{2} - b\right)}$

დამტკიცება: ა) $r = \left(\frac{P_\Delta}{2} - c\right)$ (იხ. №7). $S = \frac{P_\Delta}{2} r$ (იხ. №13). $S = \frac{P_\Delta}{2}\left(\frac{P_\Delta}{2} - c\right)$.

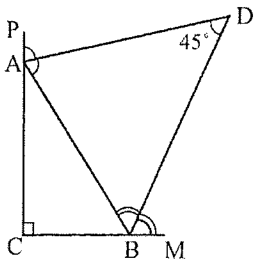
ბ) ჰერონის ფორმულის თანახმად $S = \sqrt{\frac{P_\Delta}{2}\left(\frac{P_\Delta}{2} - a\right)\left(\frac{P_\Delta}{2} - b\right)\left(\frac{P_\Delta}{2} - c\right)}$.

ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ (ა), რომ $\frac{P_\Delta}{2}\left(\frac{P_\Delta}{2} - c\right) = S$, ანუ

$$S = \sqrt{S\left(\frac{P_\Delta}{2} - a\right)\left(\frac{P_\Delta}{2} - b\right)}, \quad \Rightarrow \quad S^2 = S\left(\frac{P_\Delta}{2} - a\right)\left(\frac{P_\Delta}{2} - b\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(\frac{P_\Delta}{2} - a\right)\left(\frac{P_\Delta}{2} - b\right)$$

№34-35



ა) AD და BD მართკუთხა ABC სამკუთხედის გარე კუთხეების ბისექტრისებია, მაშინ

$$\angle ADB = 45°$$

ბ) D წერტილი მართი C კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობს

დამტკიცება: ა) $\angle ABC \equiv \beta$. $\angle ABM = 180° - \beta$, ხოლო $\angle ABD = 90° - \frac{\beta}{2}$.

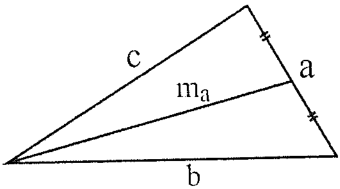
$\angle PAB$ არის ABC სამკუთხედის გარე კუთხე, ამიტომ $\angle PAB = 90° + \beta$

$\angle DAB = \frac{\angle PAB}{2} = 45° + \frac{\beta}{2}$. ΔDAB-დან $\angle D = 180° - 90° + \frac{\beta}{2} - 45° - \frac{\beta}{2} = 45°$.

ბ) იხ. №59.

სამკუთხედი

№36-37



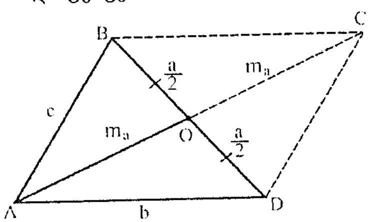
ა) სამკუთხედის მედიანა გვერდებით ასე გამოითვლება:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

ბ) სამკუთხედის გვერდებსა და მედიანებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

დამტკიცება: ა) სამკუთხედი შევავსოთ პარალელოგრამამდე. პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი უდრის გვერდების კვადრატების ჯამს ე.ი.

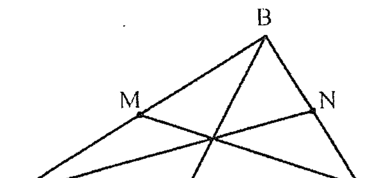


$$(2m_a)^2+a^2=2b^2+2c^2$$

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

ბ) AN $\equiv m_a$, BK$\equiv m_b$, CM$\equiv m_c$. მედიანის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულიდან გვექნება:



$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

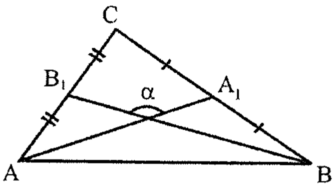
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{1}{4}(2(b^2+c^2)-a^2)+\frac{1}{4}(2(a^2+c^2)-b^2)+\frac{1}{4}(2(a^2+b^2)-c^2)$$

$$=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2)=$$

$$=\frac{1}{4}(3a^2+3b^2+3c^2)=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

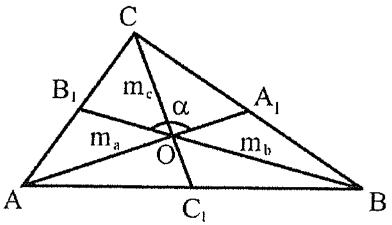
№38



სამკუთხედის ფართობი ორი მედიანითა და მათ შორის მდებარე კუთხით ასე გამოითვლება:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3} m_a m_b \sin \alpha$$

დამტკიცება: გავავლოთ m_c მედიანა. მედიანების გავლებით მიღებული ექვსივე სამკუთხედი ტოლდიდია (იხ. №51), ამიტომ



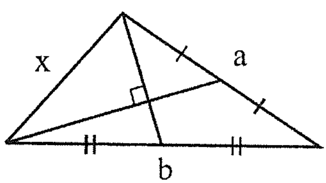
$$S_{\Delta AC_1O} = S_{\Delta BC_1O} = S_{\Delta BA_1O} = S_{\Delta CA_1O} =$$
$$= S_{\Delta AB_1O} = S_{\Delta CB_1O} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$$
$$S_{\Delta AOB} = \frac{2}{6} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \Rightarrow$$
$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta AOB}$$

O მედიანების კვეთის წერტილია, ამიტომ $AO = \frac{2}{3} m_a$, $OB = \frac{2}{3} m_b$. $\Rightarrow$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_b \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot \sin \alpha = \frac{2}{9} m_b \cdot m_a \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta AOB} = \frac{2}{3} m_a m_b \sin \alpha$$

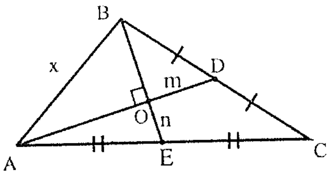
№39



თუ სამკუთხედის ორი მედიანა ურთიერთმართობულია, მაშინ

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$$

დამტკიცება: $OD \equiv m$, $OE \equiv n$. სამკუთხედში მედიანები გადაკვეთის წერტილით იყოფა შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან, გამოვიყენოთ ეს თვისება AOE, BOD და AOB სამკუთხედებში:

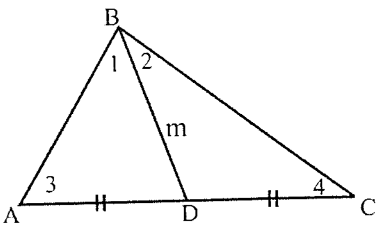


$$\begin{cases} 4m^2 + n^2 = \dfrac{b^2}{4} \\ 4n^2 + m^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 16m^2 + 4n^2 \\ a^2 = 4m^2 + 16n^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 20n^2 + 20m^2$$

ხოლო $x^2 = 4m^2 + 4n^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$

№40



სამკუთხედში გავლებული მედიანისათვის:

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} = \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ΔABD და ΔDBC. სინუსების თეორემის თანახმად

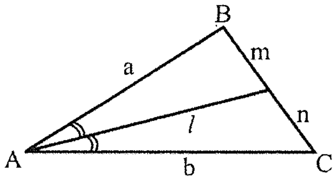
$$\frac{AD}{\sin\angle 1} = \frac{BD}{\sin\angle 3} \qquad \frac{DC}{\sin\angle 2} = \frac{BD}{\sin\angle 4}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3} \qquad \frac{DC}{BD} = \frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 4}$$

რადგან AD=DC, ამიტომ $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{BD}$, ანუ $\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3} = \frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} = \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}.$$

№41-42-43



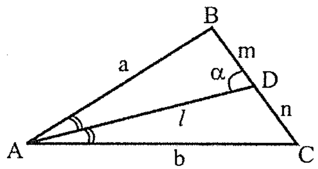
სამკუთხედში გავლებული l ბისექტრისისათვის

ა) $l^2 = ab - mn$

ბ) $l = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\angle BAC}{2}$

გ) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot l \cdot \sin\frac{\angle BAC}{2}$

დამტკიცება: ა) $\angle ADB \equiv \alpha$, კოსინუსების თეორემის თანახმად :



$$a^2 = l^2 + m^2 - 2lm\cos\alpha \qquad (1)$$

$$b^2 = l^2 + n^2 - 2ln\cos(180° - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = l^2 + n^2 + 2ln\cos\alpha \qquad (2)$$

(1) ტოლობა გავამრავლოთ n-ზე , ხოლო (2) m-ზე და შევკრიბოთ:

$na^2 + mb^2 = nl^2 + nm^2 + ml^2 + mn^2 \Rightarrow na^2 + mb^2 = (n+m)(l^2 + mn)$ (3).

ბისექტრისის თვისების თანახმად $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ ე.ი. $a = \frac{mb}{n}$ და $b = \frac{nb}{m}$

აქედან გამომდინარე: $na^2 + mb^2 = na\frac{mb}{n} + mb\frac{nb}{m} = ab(m+n)$ (4)

(3) და (4) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$ab = l^2 + mn$ ანუ $l^2 = ab - mn.$

ბ) განვიხილოთ ΔABD. $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}al\sin\frac{\angle BAC}{2}$, ანალოგიურად

$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}bl\sin\frac{\angle BAC}{2}$, ხოლო $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\angle BAC.$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$. $\frac{1}{2}al\sin\frac{\angle BAC}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{\angle BAC}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow l\sin\frac{\angle BAC}{2}(a+b) = ab\sin\angle BAC.$

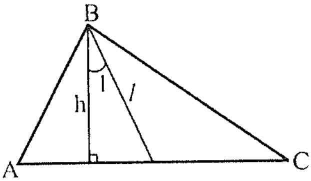
$l\sin\frac{\angle BAC}{2}(a+b) = 2ab\sin\frac{\angle BAC}{2}\cos\frac{\angle BAC}{2} \Rightarrow l = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\angle BAC}{2}.$

გ) რადგან $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$, ხოლო

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} al \sin\frac{\angle BAC}{2} \quad \text{და} \quad S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} bl \sin\frac{\angle BAC}{2} .$$

$$\text{ე.ი.} \ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} l \sin\frac{\angle BAC}{2} (a+b) .$$

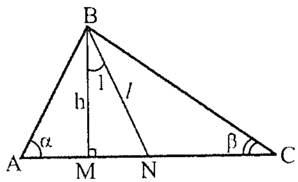
№44



კუთხე ერთი წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის ასე გამოითვლება:

$$\angle \mathbf{1} = \frac{|\angle A - \angle C|}{\mathbf{2}}$$

დამტკიცება: $\angle A \equiv \alpha$, $\angle C \equiv \beta$. მახვილკუთხა სამკუთხედში $\angle ABM = 90° - \alpha$,



$\angle ABN = 90° - \alpha + \angle 1$. რადგან l ბისექტრისაა $\angle ABN = \angle NBC = 90° - \alpha + \angle 1$, ხოლო $\angle ABC = 2(90° - \alpha + \angle 1)$. ΔABC-ში

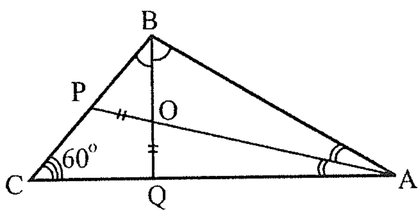
$$2(90° - \alpha + \angle 1) + \alpha + \beta = 180°$$

$$2\angle 1 - \alpha + \beta = 0$$

$$\angle 1 = \frac{|\alpha - \beta|}{2} = \frac{|\angle A - \angle C|}{2}$$

ფორმულის ჭეშმარიტება ანალოგიურად მტკიცდება ბლაგვკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაშიც.

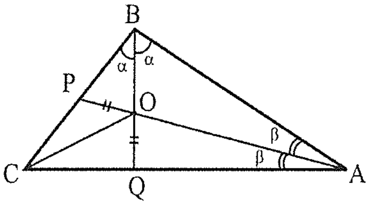
№45



ΔABC-ში $\angle C = 60°$ და AP და BQ ბისექტრისები O წერტილში იკვეთებიან, მაშინ

$$OP = OQ$$

დამტკიცება: $\angle BCA = 60°$, ამიტომ ΔABC-ში $2\alpha + 2\beta + 60° = 180°$,



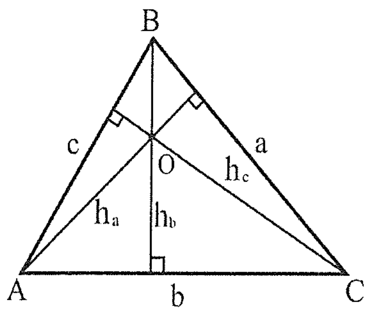
აქედან $\alpha + \beta = 60°$. ხოლო ΔBOA-ში

$\angle BOA = 180° - (\alpha + \beta) = 120°$.

$\angle BOA = \angle POQ = 120°$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები.
რადგან $\angle PCQ = 60°$, ამიტომ

$\angle PCQ + \angle POQ = 180°$. მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი $CPOQ$ ოთხკუთხედში 180°-ია , ანუ ამ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. თუ წრეწირს შემოვხაზავთ, რადგან $\angle PCO = \angle OCQ = 30°$ მივიღებთ, რომ PO და OQ ტოლი რკალების მომჭიმავე ქორდებია, ე.ი. OP=OQ.

№46-47



ა) სამკუთხედის ფართობი შემოხაზული წრეწირის რადიუსითა და სიმაღლეებით ასე გამოითვლება:

$$\boldsymbol{S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} R h_a h_b h_c}$$

ბ) სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსსა და სიმაღლეებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$\mathbf{\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}$$

დამტკიცება: ა) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_a a$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_b b$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_c c$
გადავამრავლოთ ეს ტოლობები ერთმანეთზე, მივიღებთ:

$$S^3_{\Delta ABC} = \frac{1}{8} a h_a b h_b c h_c$$

$S^3_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{4} h_a h_b h_c$ გავყოთ ეს ტოლობა S-ზე

$S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{4S} h_a h_b h_c$, რადგან $\frac{abc}{4S} = R$, ამიტომ $S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot R h_a h_b h_c$

ბ) უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

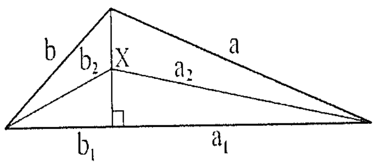
გარდავქმნათ ტოლობის მარცხენა მხარე: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{p_\Delta}{2S_\Delta}$ (იხ. №13)

$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$, $S_\Delta = \frac{1}{2}h_b b$, $S_\Delta = \frac{1}{2}h_c c$ აქედან $a = \dfrac{2S_\Delta}{h_a}$, $b = \dfrac{2S_\Delta}{h_b}$, $c = \dfrac{2S_\Delta}{h_c}$.

$$P_\Delta = a + b + c = \frac{2S_\Delta}{h_a} + \frac{2S_\Delta}{h_b} + \frac{2S_\Delta}{h_c} = 2S_\Delta\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{p_\Delta}{2S_\Delta} = 2S_\Delta \cdot \frac{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)}{2S_\Delta} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

№48-49

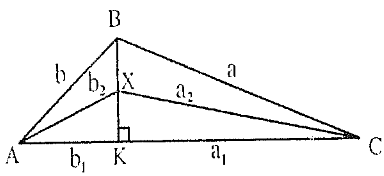


სამკუთხედის სიმაღლის ნებისმიერი წერტილისათვის:

ა) $\boldsymbol{a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2}$

ბ) $\boldsymbol{a^2 - b^2 = a_2^2 - b_2^2}$

დამტკიცება: ა) პითაგორას თეორემის თანახმად:



ΔBKC-დან $a^2 = a_1^2 + BK^2$

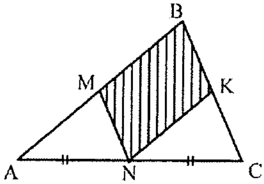
ΔBKA-დან $b^2 = b_1^2 + BK^2$

$a^2 - b^2 = a_1^2 + BK^2 - b_1^2 - BK^2 = a_1^2 - b_1^2$

ბ) ΔAXK-დან $b_2^2 = b_1^2 + XK^2$. ანალოგიურად,

ΔKXC-დან $a_2^2 = a_1^2 + XK^2$ ე.ი. $a_2^2 - b_2^2 = a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$

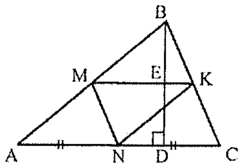
№50



N სამკუთხედის გვერდის შუაწერტილია. აგებულია პარალელოგრამი, მაშინ

$$S_{\text{პარალ}}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$$

დამტკიცება: NK ∥ AB. AN = NC და თალესის თეორემის თანახმად KC = BK .

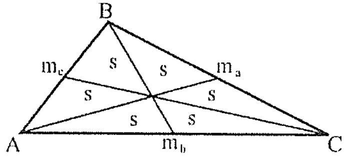


ანალოგიურად, AM = MB. ამ ორი ტოლობიდან გამოდინარე MK შუახაზია და MK = $\frac{AC}{2}$, ასევე BE = $\frac{BD}{2}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}$BD·AC.

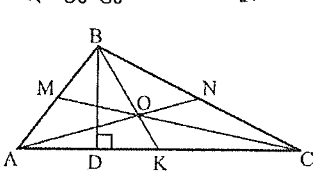
რადგან MNKB პარალელოგრამია $S_{MNKB}=2S_{\Delta MBK}=2\cdot\frac{BE\cdot MK}{2}=BE\cdot MK=$ $=\frac{BD}{2}\cdot\frac{AC}{2}=\frac{1}{4}BD\cdot AC$ ანუ $S_{MNKB}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

№51



მედიანების გავლებით მიღებული ექვსივე სამკუთხედი ტოლდიდია

დამტკიცება: $AN=m_a$, $BK=m_b$, $CM=m_c$. რადგან $AK=KC$ და $BD\cdot AK=BD\cdot KC$, ამიტომ $S_{\Delta ABK}=S_{\Delta KBC}$. აქედან



გამომდინარე, $S_{\Delta ABK}=\frac{S_{\Delta ABC}}{2}$. მედიანები გადაკვეთის წერტილით იყოფა შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან, ანუ ΔABK-ში $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AOK}}=\frac{2}{1}$, $S_{\Delta ABO}=2S_{\Delta AOK}$ (1) . ΔABO-ში OM მედიანაა $S_{\Delta ABO}=2S_{\Delta AMO}=2S_{\Delta MBO}$ (2) .

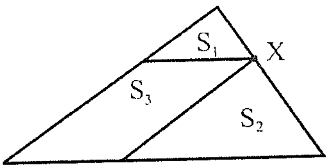
(1) და (2) ტოლობას თუ გავითვალისწინებთ:

$$S_{\Delta AOK} = S_{\Delta AMO} = S_{\Delta MOB} = \frac{S_{\Delta AOB}}{2}$$

ანალოგიური მსჯელობით, ΔBKC-თვის $S_{\Delta BON} = S_{\Delta NOC} = S_{\Delta KOC} = \frac{S_{\Delta BOC}}{2}$.
ΔAOC-ში OK მედიანაა და $S_{\Delta AOK} = S_{\Delta KOC}$. ე.ი.

$$S_{\Delta AOK} = S_{\Delta AMO} = S_{\Delta MOB} = S_{\Delta BON} = S_{\Delta NOC} = S_{\Delta KOC}$$

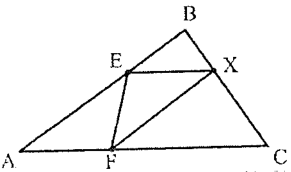
№52



სამკუთხედის გვერდის ნებისმიერი X წერტილისათვის აგებულია პარალელოგრამი, მაშინ :

$$\boldsymbol{S_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}}$$

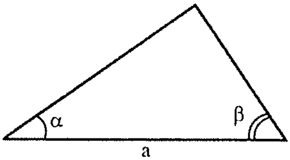
დამტკიცება: განვიხილოთ ΔEBX და ΔFXC. რადგან $FX \parallel AB$, ამიტომ $\angle XFC = \angle A = \angle BEX$. ანალოგიურად, $EX \parallel AC$, ამიტომ $\angle BXE = \angle C$. აქედან გამომდინარე, $\Delta BEX \sim \Delta XFC$. მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{EX^2}{FC^2}$, ხოლო რადგანაც $EX = AF$, ამიტომ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{EX^2}{FC^2} = \frac{AF^2}{FC^2} \Rightarrow \frac{FC}{AF} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$.



რადგან $AEXF$ პარალელოგრამია, ამიტომ $S_{\Delta AEF} = S_{\Delta EXF} = \frac{S_3}{2}$.
$EX \parallel AC$, ამიტომ ΔAEF-ში E წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ტოლია ΔFXC-ში X წვეროდან დაშვებული სიმაღლის. ე.ი. $\frac{S_{\Delta FXC}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{S_2}{\frac{S_3}{2}} = \frac{FC}{AF} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_3 = \frac{2S_2 \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$. $\Rightarrow$ $S_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}$.

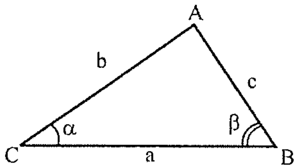
№53



სამკუთხედის ფართობი გვერდითა და მასთან მდებარე კუთხეებით ასე გამოითვლება:

$$S_\Delta = a^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

დამტკიცება: $\angle CAB = 180° - (\alpha+\beta)$. $\sin\angle CAB = \sin[180° - (\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta)$.

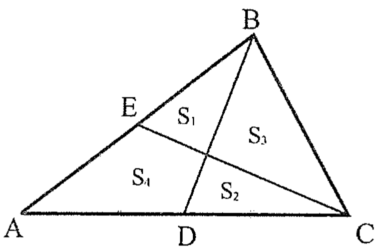


სინუსების თეორემის თანახმად, $\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c}{\sin\alpha}$

ე.ი. $c = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, ხოლო $S_\Delta = \frac{1}{2}ac\sin\beta =$

$$= \frac{1}{2}a\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\beta = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

№54-55

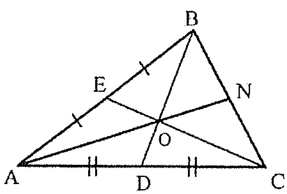


სამკუთხედში გავლებულია ორი მედიანა, მაშინ

ა) $S_1 = S_2$

ბ) $S_3 = S_4$

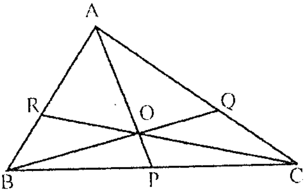
დამტკიცება: ა) გავავლოთ მესამე მედიანა. თუ სამკუთხედში გავლებულია სამი მედიანა ექვსივე სამკუთხედი ტოლდიდია (იხ. №51), ანუ $S_1 = S_2$.



ბ) რადგან $S_{\Delta AOE} = S_{\Delta ADO} = S_{\Delta BON} = S_{\Delta NOC}$, ამიტომ $S_{\Delta AOE} + S_{\Delta ADO} = S_{\Delta BON} + S_{\Delta NOC}$, ანუ

$$S_3 = S_4$$

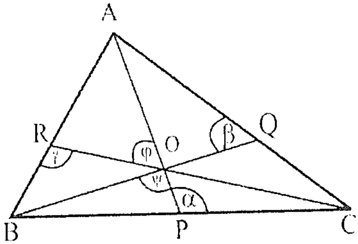
№56 (ჩევის თეორემა)



AP, CR და ***BQ*** ნებისმიერი გადამკვეთი მონაკვეთებია, მაშინ

$$\frac{\boldsymbol{BR}}{\boldsymbol{AR}}\cdot\frac{\boldsymbol{AQ}}{\boldsymbol{CQ}}\cdot\frac{\boldsymbol{CP}}{\boldsymbol{BP}}=\mathbf{1}$$

დამტკიცება: AP, BQ და CR მონაკვეთები ყოფენ ΔABC-ს 6 სამკუთხედად: $\Delta AOR, \Delta ROB, \Delta BOP, \Delta POC, \Delta COQ$ და ΔQOA.



გავითვალისწინოთ ფორმულა $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ და ასევე ვერტიკალური კუთხეების თვისება,თითოეული მათგანისთვის დავწეროთ სინუსების თეორემა:

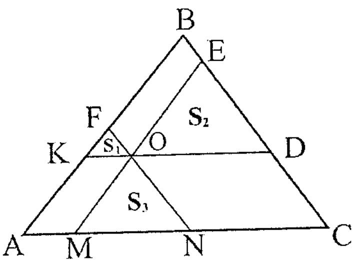
$$\frac{AR}{\sin\varphi}=\frac{AO}{\sin\gamma},\qquad \frac{AO}{\sin\beta}=\frac{AQ}{\sin\psi},$$

$$\frac{BO}{\sin\gamma}=\frac{BR}{\sin(\varphi+\psi)},\qquad \frac{BP}{\sin\psi}=\frac{BO}{\sin\alpha},$$

$$\frac{CQ}{\sin(\varphi+\psi)}=\frac{CO}{\sin\beta},\qquad \frac{CO}{\sin\alpha}=\frac{CP}{\sin\varphi}.$$

დავწეროთ იგივეობა $\frac{AO}{\sin\gamma}\cdot\frac{BO}{\sin\alpha}\cdot\frac{CO}{\sin\beta}=\frac{BO}{\sin\gamma}\cdot\frac{AO}{\sin\beta}\cdot\frac{CO}{\sin\alpha}$. ჩავსვათ ზემოთ მიღებული მნიშვნელობები იგივეობაში, მივიღებთ: $\frac{AR}{\sin\varphi}\cdot\frac{BP}{\sin\psi}\cdot\frac{CQ}{\sin(\varphi+\psi)}=\frac{BR}{\sin(\varphi+\psi)}\cdot\frac{AQ}{\sin\psi}\cdot\frac{CP}{\sin\varphi}\Rightarrow AR\cdot BP\cdot CQ=BR\cdot AQ\cdot CP$. ე.ი. $\frac{BR}{AR}\cdot\frac{AQ}{CQ}\cdot\frac{CP}{BP}=1$.

№57-58

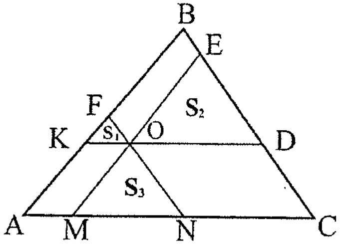


O სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილია. გავლებულია პარალელური წრფეები, მაშინ

ა) $\boldsymbol{S_{\Delta ABC}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2}$

ბ) $\frac{\boldsymbol{AK}}{\boldsymbol{AB}}+\frac{\boldsymbol{BE}}{\boldsymbol{BC}}+\frac{\boldsymbol{CN}}{\boldsymbol{CA}}=\mathbf{1}$

დამტკიცება: ა) მოცემული სამკუთხედის ფართობი აღვნიშნოთ S-ით.
პირობიდან გამომდინარე, თითოეული პატარა სამკუთხედი მსგავსია ΔABC-სი,



ამიტომ მათი ფართობების შეფარდება ტოლია შესაბამისი გვერდების სიგრძეთა კვადრატების შეფარდებისა: $\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{KO}{AC} = \frac{AM}{AC}$, $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{OD}{AC} = \frac{NC}{AC}$, $\sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{MN}{AC}$, $(AM = KO, NC = OD)$.

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{AM+MN+NC}{AC} = 1 \quad \Rightarrow$$

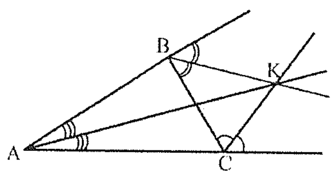
$$\Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$

ბ) რადგან EM, FN და KD შესაბამის გვერდთა პარალელური მონაკვეთები არიან, ამიტომ $\frac{AK}{AB} = \frac{OM}{AB} = \frac{ON}{BC} = \frac{DC}{BC}$ და $\frac{CN}{CA} = \frac{OD}{CA}$ (1).

$\Delta OED \sim \Delta ABC \Rightarrow$ (ტოლობა (1)-ის გათვალისწინებით) $\frac{OD}{CA} = \frac{ED}{BC} = \frac{CN}{CA}$.

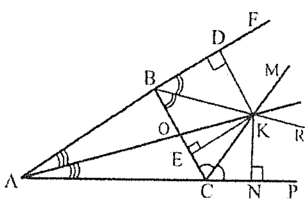
შესაბამისად, $\frac{AK}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = \frac{DC}{BC} + \frac{BE}{BC} + \frac{ED}{BC} = 1$.

№59



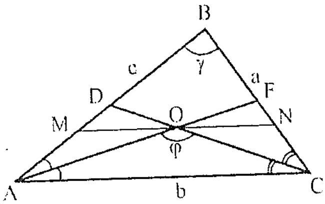
ΔABC -ს გარე კუთხეების BK და CK ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი A კუთხის ბისექტრისის შემცველ წრფეზე მდებარეობს.

დამტკიცება: დავუშვათ K წერტილიდან მართობები AF-ზე, BC-სა და AP-ზე.



კუთხის ბისექტრისა თანაბრად არის დაშორებული კუთხის გვერდებიდან. რადგანაც CM ბისექტრისაა, ამიტომ $KN = EK$. ანალოგიურად, BR ბისექტრისაა და $DK = EK$. ე.ი. $DK = NK$. რადგანაც K წერტილი თანაბრად არის დაშორებული $\angle FAP$-ს გვერდებიდან, ამიტომ ის ამ კუთხის ბისექტრისის შემცველ წრფეზე ძევს. ე.ი. AK ბისექტრისაა.

№60-61



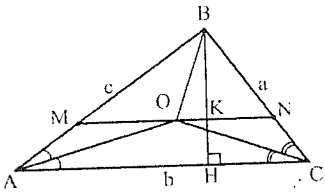
ა) სამკუთხედში ბისექტრისებს შორის მდებარე φ კუთხისათვის

$$\varphi = 90° + \frac{\gamma}{2}$$

ბ) სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილზე გავლებული გვერდის პარალელური MN მონაკვეთისთვის:

$$MN = \frac{b(a+c)}{a+b+c}$$

დამტკიცება: ა) $\angle BAF = \angle FAC \equiv \alpha$, $\angle BCD = \angle DCA \equiv \beta$. $2\alpha + 2\beta = 180° - \gamma$.



$\alpha + \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$ (1). განვიხილოთ ΔAOC. $\alpha + \beta = 180 - \varphi$, (1) ტოლობის გათვალისწინებით $180 - \varphi = 90° - \frac{\gamma}{2}$ ე.ი. $\varphi = 90° + \frac{\gamma}{2}$.

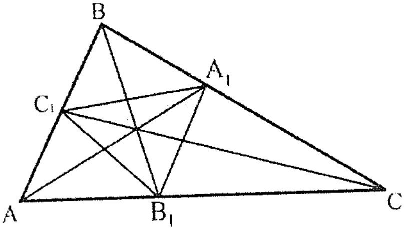
ბ) რადგან $MN \parallel AC$, ამიტომ $\Delta ABC \sim \Delta MBN$. მსგავსებიდან გამომდინარე, $\frac{MN}{AC} = \frac{BK}{BH}$.

გავითვალისწინოთ, რომ O ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, ხოლო $HK = r$.

$$\frac{MN}{b} = \frac{h-r}{h} = 1 - \frac{r}{h} = 1 - \frac{\frac{s_\Delta}{p_\Delta}}{2} \Big/ \frac{2s_\Delta}{b} = 1 - \frac{b}{p_\Delta} = 1 - \frac{b}{a+b+c} = \frac{a+c}{a+b+c} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{b(a+c)}{a+b+c}.$$

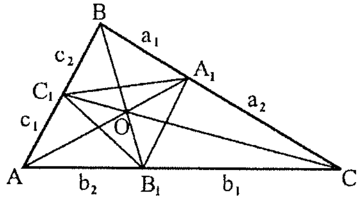
№62



სამკუთხედში გავლებულია სამი ბისექტრისა. ვთქვათ $AB:BC:AC = p:q:l$, მაშინ

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2pql}{(p+q)(p+l)(q+l)}$$

დამტკიცება: ბისექტრისის თვისებიდან გამომდინარე გვაქვს:



$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ: $a_1 = \frac{ac}{b+c}$, $a_2 = \frac{ab}{b+c}$. ანალოგიურად, ΔABC-ს b და c გვერდებისათვის გვექნება: $b_1 = \frac{ba}{c+a}$, $b_2 = \frac{bc}{c+a}$, $c_1 = \frac{cb}{a+b}$, $c_2 = \frac{ca}{a+b}$. საერთო კუთხის მქონე სამკუთხედების ფართობების შეფარდება ტოლია იმ გვერდების ნამრავლთა შეფარდებისა, რომელთა შორისაც ეს კუთხე მდებარეობს. შესაბამისად,

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{c_1 b_2}{cb} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}, \quad \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}, \quad \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}.$$

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta A_1B_1C} + S_{\Delta A_1BC_1} + S_{\Delta AB_1C_1})}{S_{\Delta ABC}} =$$

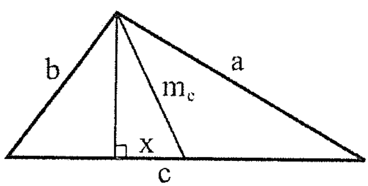
$$= 1 - \left(\frac{S_{\Delta A_1B_1C}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta A_1BC_1}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta AB_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

ტოლობის გაერთმნიშვნელიანებითა და გამარტივებით მივიღებთ:

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{2pql}{(p+q)(p+l)(q+l)}$$

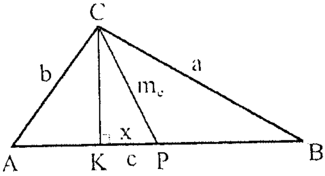
№63



თუ X არის მედიანის გეგმილი სამკუთხედის c სიგრძის მქონე გვერდზე, მაშინ

$$|a^2 - b^2| = 2cx$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ΔBCK და ΔACK. გამოვსახოთ CK სიმაღლე,



$$CK^2 = a^2 - \left(\tfrac{c}{2} + x\right)^2 \qquad (1)$$

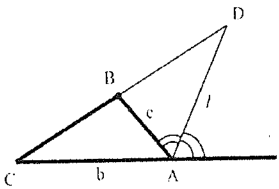
$$CK^2 = b^2 - \left(\tfrac{c}{2} - x\right)^2 \qquad (2)$$

(1) ტოლობას გამოვაკლოთ (2), მივიღებთ:

$$a^2 - b^2 - \left(\tfrac{c}{2} + x\right)^2 + \left(\tfrac{c}{2} - x\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 - b^2 = \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 + cx + x^2 - \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 + cx - x^2.$$

$$|a^2 - b^2| = 2cx$$

№64



***ABC* სამკუთხედის გარე კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთის სიგრძე CB გვერდის გაგრძელების გადაკვეთამდე ასე გამოითვლება:**

$$\boldsymbol{l = \frac{2bc\sin\frac{\angle CAB}{2}}{b-c}}$$

დამტკიცება: ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ $b > c$.
$\angle CAB \equiv \boldsymbol{\alpha}$, მაშინ $S_{\Delta CAD}$ შეიძლება გამოვსახოთ b და l გვერდებითა და $\sin\angle CAD$-ს საშუალებით, ან ΔABC-სა და ΔABD-ს ფართობთა ჯამის სახით.

$$S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2}bl\sin\angle CAD = \frac{1}{2}bl\sin(\angle CAB + \angle BAD) = \frac{1}{2}bl\sin\left(\alpha + \frac{180^\circ - \alpha}{2}\right) =$$

$= \frac{1}{2}bl\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$. აგრეთვე $S_{\Delta CAD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABD} =$

$$= \frac{1}{2}bc\sin\alpha + \frac{1}{2}cl\sin\left(\frac{180^\circ - \alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha + \frac{1}{2}cl\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

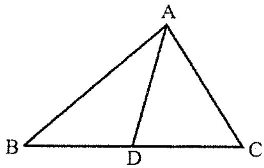
ე.ი. $\frac{1}{2}bl\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha + \frac{1}{2}cl\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

$$bl\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - cl\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = bc\sin\alpha$$

$bl\cos\frac{\alpha}{2} - cl\cos\frac{\alpha}{2} = bc\sin\alpha \Rightarrow l\cos\frac{\alpha}{2}(\mathrm{b} - \mathrm{c}) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}bc$, რადგან სამკუთხედში $\cos\frac{\alpha}{2}$ არ შეიძლება 0-ის ტოლი გახდეს, ამიტომ

$$l = \frac{2bc\sin\frac{\angle CAB}{2}}{b-c}$$

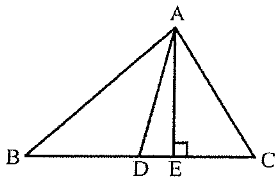
№65 (სტიუარტის თეორემა)



$\boldsymbol{D}$ სამკუთხედის გვერდის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\boldsymbol{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD}$$

დამტკიცება: A წერტილიდან BC მონაკვეთზე დავუშვათ AE მართობი.



მიღებული 3 მართკუთხა სამკუთხედისათვის:

$AB^2 = BE^2 + AE^2 = (BD + DE)^2 + AE^2$;

$AC^2 = CE^2 + AE^2 = (CD - DE)^2 + AE^2$;

$AD^2 = DE^2 + AE^2$.

გამოვთვალოთ $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC$.

$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC =$

$= [(BD + DE)^2 + AE^2]DC + [(CD - DE)^2 + AE^2]BD - (DE^2 + AE^2)BC =$

$= BD^2DC + 2BD \cdot DE \cdot DC + (DE^2 + AE^2)DC + CD^2BD - 2CD \cdot DE \cdot BD + (DE^2 +$

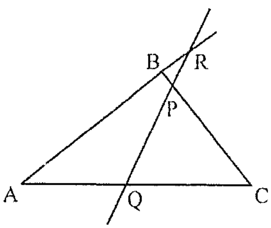
$+AE^2)BD - (DE^2 + AE^2)BC = (DE^2 + AE^2)(DC + BD - BC) + DC \cdot BD^2 + BD \cdot CD^2$

რადგანაც $DC + BD - BC = 0$, $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC =$

$= DC \cdot BD^2 + BD \cdot CD^2 = (BD + CD)CD \cdot BD = BC \cdot DC \cdot BD$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

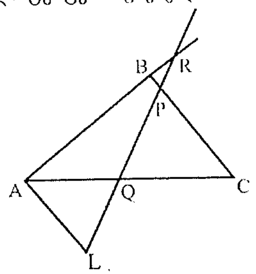
№66 (მენელაოსის თეორემა)



$\boldsymbol{PQ}$ წრფე კვეთს $\boldsymbol{ABC}$ სამკუთხედის გვერდების შემცველ წრფეებს, მაშინ

$$\boldsymbol{BR \cdot PC \cdot QA = AR \cdot BP \cdot CQ}$$

დამტკიცება: გავავლოთ BC მონაკვეთის პარალელური AL. $\Delta RAL \sim \Delta RBP$,



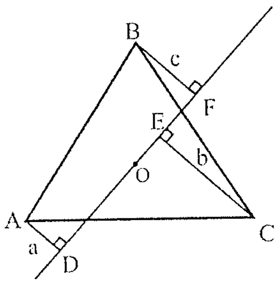
ამიტომ $\frac{BR}{AR} = \frac{BP}{AL}$. ე.ი. $\frac{BR \cdot AL}{AR \cdot BP} = 1$ (1).

$\Delta AQL \sim \Delta CQP$, ამიტომ $\frac{AL}{PC} = \frac{AQ}{QC}$. ე.ი. $AL = \frac{AQ \cdot PC}{QC}$.

AL მნიშვნელობა გავითვალისწინოთ (1) ტოლობაში, მივიღებთ: $\frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot BP \cdot QC} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \; BR \cdot PC \cdot QA = AR \cdot BP \cdot CQ$

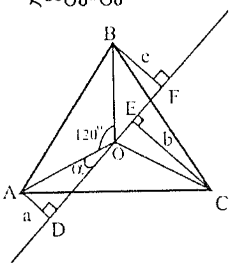
№67



წესიერ სამკუთხედში O ცენტრია. AB O-ზე გამავალი ნებისმიერი გადამკვეთი წრფეა, მაშინ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ასე გამოითვლება:

$$R^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

დამტკიცება: $\angle AOD$ აღვნიშნოთ α-თი. რადგან $\angle AOB$ და $\angle BOC$ $120°$-ს ტოლია, ამიტომ $\angle BOF$ და $\angle COE$ შესაბამისად ტოლია $(60° - \alpha)$-სა და $(60° + \alpha)$-სი.



ΔAOD-დან $a = R\sin\alpha$, ΔBOF-ში $c = R\sin(60° - \alpha)$, ხოლო ΔOEC-ში $b = R(60° + \alpha)$. ე.ი. $a^2 + b^2 + c^2 = R^2\sin^2\alpha +$ $+R^2\sin^2(60° + \alpha) + R^2\sin^2(60° - \alpha)$ (1).

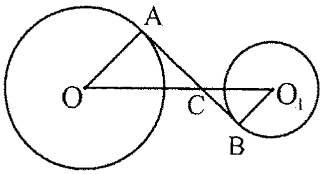
თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ და გარდავქმნით (1) ტოლობას, მივიღებთ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{R^2}{2}[1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos(120° + 2\alpha) + 1 - \cos(120° - 2\alpha)] =$$

$$= \frac{R^2}{2}(3 - \cos 2\alpha - 2\cos 120° \cos 2\alpha) = \frac{R^2}{2}\left(3 - \cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}R^2.$$

რამდენიმე წრეწირი

№68



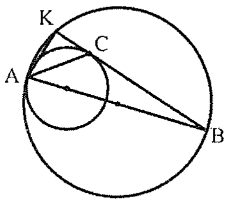
თუ ორი წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი რადიუსების ჯამს აღემატება, მაშინ

$$\boldsymbol{OO_1}^2 = \boldsymbol{AB}^2 + (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r})^2$$

დამტკიცება: AB მხებია, ამიტომ $OA \perp AB$. ასევე $O_1B \perp AB$. OAC და O_1BC მსგავსი მართკუთხა სამკუთხედებია, რომელთათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას: $(OC + O_1C)^2 = (AC + CB)^2 + (OA + O_1B)^2$ (იხ. №28), სადაც $OC + O_1C = OO_1$, $OA = R$, $O_1B = r$, ხოლო $AC + CB = AB$ ე.ი.

$$OO_1^2 = AB^2 + (R + r)^2$$

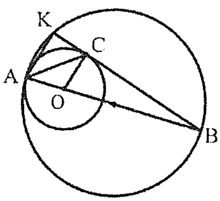
№69



გავლებულია $\boldsymbol{AB}$ დიამეტრი და $\boldsymbol{BCK}$ მხები, რომელიც დიდი წრეწირის ქორდაა, მაშინ

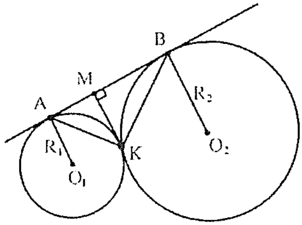
$$\angle \boldsymbol{KAC} = \angle \boldsymbol{BAC}$$

დამტკიცება: პატარა წრეწირის ცენტრი აღვნიშნოთ O-თი. რადგან $AK \perp BK$



და $OC \perp BK$, ამიტომ $AK \parallel OC$. ამასთან $OA = OC$ და შესაბამისად $\angle ACO = \angle OAC$. KAC და ACO შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეებია, მაშასადამე $\angle KAC = \angle ACO = \angle OAC = \angle BAC$.

№70-71-72



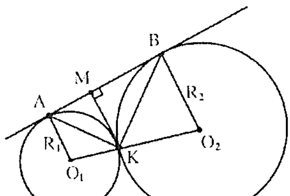
K წრეწირების შეხების წერტილია. თუ $KM \perp AB$, მაშინ

ა) $\angle AKB = 90°$

ბ) $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{2}{KM}$

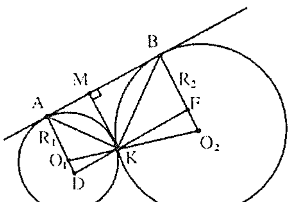
გ) $AB = 2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$

დამტკიცება: ა) განვიხილოთ ΔKMB. $\angle KBM = \dfrac{\overset{\frown}{KB}}{2}$, $\angle MKB = \dfrac{\overset{\frown}{KB}}{2}$.



ე.ი. $\angle KBM = \angle MKB$. რადგან $\angle KMB = 90°$, ამიტომ $\angle KBM = \angle MKB = 45°$, ანალოგიურად ΔAMK-ში $\angle MAK = \angle MKA = 45°$.
$\angle AKB = \angle MKA + \angle MKB = 90°$.

ბ) გავავლოთ AB საერთო მხების პარალელური DF მონაკვეთი, წრეწირების შეხების K წერტილზე. ცხადია, $AD \perp DF$ და

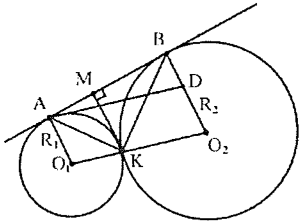


$DF \perp BO_2$ რადგან DKO_1 და O_2KF ვერტიკალური კუთხეები არიან, ამიტომ $\angle DKO_1 = \angle O_2KF$. ე.ი. $\Delta DKO_1 \sim \Delta O_2KF$. მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$\dfrac{O_2K}{O_1K} = \dfrac{O_2F}{O_1D} = \dfrac{R_2}{R_1}$. რადგან $AB \parallel DF$, ამიტომ $KM = AD = BF$. აქედან გამომდინარე,

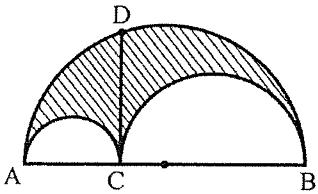
$\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_2 - MK}{MK - R_1}$. ე.ი. $R_1R_2 - R_1MK = R_2MK - R_2R_1$

$\Rightarrow MK(R_1 + R_2) = 2R_1R_2 \Rightarrow \dfrac{2}{MK} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1R_2}$. ე.ი. $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{2}{KM}$.



გ) გავავლოთ $AD \parallel O_1O_2$, მივიღებთ ADO_2O_1 პარალელოგრამს $AD = O_1O_2 = R_1 + R_2$.
$BD = (R_2 - R_1)$. ΔABD მართკუთხაა, ამიტომ
$AB^2 = AD^2 - BD^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2 \Rightarrow$
$AB = 2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$.

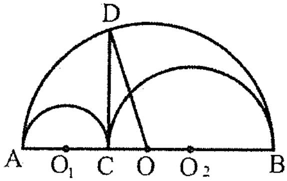
№73



AB **მონაკვეთის ნებისმიერი *C* წერტილისათვის აგებულია სამი ნახევარწრეწირი და გავლებულია *CD* მართობი, მაშინ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი ასე გამოითვლება:**

$$S_{\text{დაშტრ.}} = \frac{\pi}{4} \cdot CD^2$$

დამტკიცება: $AO = OB \equiv R$, $CO_2 = O_2B \equiv R_2$, $AO_1 = O_1C \equiv R_1$



$2R = 2R_1 + 2R_2$

$R_1 + R_2 = R \qquad (1)$

$R_2 = R - R_1 \qquad (2)$

$CO = R - 2R_1,\ OD = R.$

ΔCDO მართკუთხაა, ამიტომ

$CD^2 = OD^2 - CO^2 = R^2 - (R - 2R_1)^2 = 4R_1R - 4{R_1}^2 = 4R_1(R - R_1)$

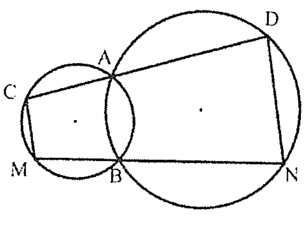
თუ (2) ტოლობას გავითვალისწინებთ $CD^2 = 4R_1R_2$, $\quad \frac{CD^2}{2} = 2R_1R_2 \quad (3).$

$$S_{\text{დაშტრ.}} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi {R_1}^2 - \frac{1}{2}\pi {R_2}^2 = \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - {R_1}^2 - {R_2}^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - \left({R_1}^2 + {R_2}^2\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - \left({R_1}^2 + {R_2}^2 + 2R_1R_2\right) + 2R_1R_2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(R^2 - (R_1 + R_2)^2 + 2R_1R_2\right)$$

(1) ტოლობის გათვალისწინებით $S_{\text{დაშტრ}} = \frac{1}{2}\pi(R^2 - R^2 + 2R_1R_2) = \frac{1}{2}\pi 2R_1R_2$

ახლა კი გავითვალისწინოთ (3) ტოლობა $S_{\text{დაშტრ}} = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{CD^2}{2} = \frac{\pi CD^2}{4}.$

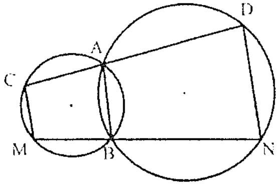
№74



CD **და *MN* წრეწირების თანაკვეთის *A* და *B* წერტილებზე გამავალი მკვეთებია, მაშინ**

$$CM \parallel DN$$

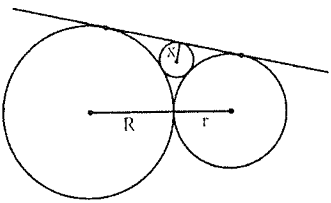
დამტკიცება: გავავლოთ AB საერთო ქორდა. $ABND$ ოთხკუთხედზე შემოხა-



ზულია წრეწირი, ამიტომ $\angle ADN + \angle NBA = 180°$. ანალოგიურად, $ABMC$ ოთხკუთხედისთვის $\angle ABM + \angle MCA = 180°$. ე.ი.

$\angle ADN + \angle NBA + \angle ABM + \angle MCA = 360°$. MBA გაშლილი კუთხეა, ამიტომ $\angle NBA + \angle ABM = 180°$. ე.ი $\angle ADN + \angle MCA = 180°$, ანუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგაცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია. ე.ი. $CM || DN$.

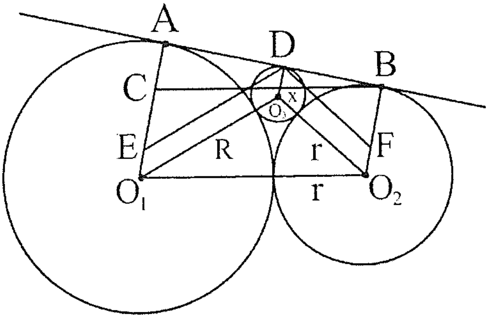
№75



წრეწირი ჩახაზულია ორი შემხები წრეწირითა და მათი საერთო მხებით შემოსაზღვრულ ფიგურაში, მაშინ ამ წრეწირის რადიუსი ასე გამოითვლება:

$$x = \frac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$$

დამტკიცება: გავავლოთ $BC \parallel O_1O_2$. $O_1A \perp AB$, შესაბამისად ΔABC-დან



$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$.

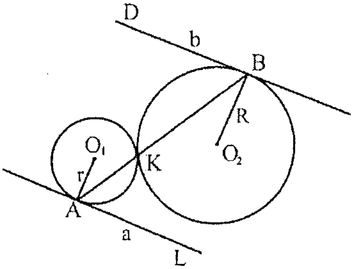
ასევე გავავლოთ $DE \parallel O_1O_3$. მართკუთხა ΔADE-დან

$AD = \sqrt{ED^2 - AE^2} = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx}$ სადაც x მცირე წრეწირის საძიებელი რადიუსია.

გავავლოთ $DF \parallel O_2O_3$, ΔDBF-დან $DB = \sqrt{DF^2 - BF^2} = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}$. $AB = AD + DB$, ანუ

$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}$$

№76-77

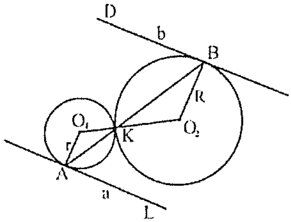


წრეწირების შეხების K წერტილზე გავლებულია AB მკვეთი, A-ზე და B-ზე გავლებულია AL და BD მხებები, მაშინ

ა) $O_1A \parallel O_2B$

ბ) $AL \parallel BD$

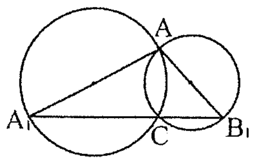
დამტკიცება: ა) წრეწირის ცენტრები შევაერთოთ ერთმანეთთან.



ΔBO_2K ტოლფერდაა, რადგანაც $BO_2 = KO_2 = R$, $\angle O_2BK = \angle O_2KB$. ანალოგიურად, ΔAO_1K ტოლფერდაა და $\angle O_1AK = \angle O_1KA$. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია, ამიტომ $\angle O_1KA = \angle O_2KB$, ანუ $\angle O_1AK = \angle O_1KA = \angle O_2BK = \angle O_2KB$ (1), ანუ ორი (BO_2 და AO_1) წრფის მესამე (BA) წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია. ე.ი. $R \parallel r$ და $O_1A \parallel O_2B$.

ბ) რადგან a და b წრეწირის მხებები არიან $O_2B \perp b$ და $O_1A \perp a$. $\angle DBA = 90° - \angle O_2BK$. $\angle BAL = 90° - \angle O_1AK$. (1) ტოლობიდან გამომდინარე $\angle O_2BK = \angle AKO_1$ ე.ი. $\angle DBA = \angle BAL$, ანუ a და b-ს AB წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია. ე.ი. a და b პარალელურია და $AL \parallel BD$.

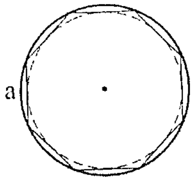
№78



გავლებულია AA_1 და AB_1 დიამეტრები, მაშინ A_1B_1 გადის წრეწირების გადაკვეთის C წერტილზე

დამტკიცება: შევაერთოთ A წერტილი C წერტილთან, მიღებული $\angle ACA_1$ 90°-ის ტოლი იქნება, რადგან იგი AA_1 დიამეტრს ეყრდნობა. ანალოგიურად, $\angle ACB_1 = 90°$. აქედან გამომდინარე, $\angle A_1CB_1$ გაშლილია. ე.ი. A_1B_1 გადის C წერტილზე.

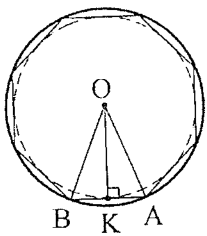
№79



მოცემულია a გვერდის მქონე წესიერი n-კუთხედი, მაშინ ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირებისათვის

$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$$

დამტკიცება: $OA = OB = R$, ხოლო $OK = r$. ΔBOA ტოლფერდაა OK

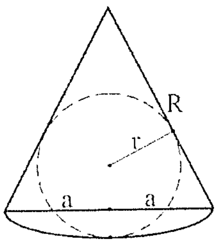


სიმაღლეცაა და მედიანაც , ანუ $AK=\frac{a}{2}$. პითაგორას

თეორემის თანახმად $OA^2 - OK^2 = AK^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

ე.ი. $R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$

№80

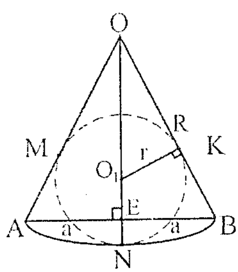


სექტორის ქორდაა $2a$, მაშინ

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$$

დამტკიცება: გავავლოთ O ცენტრზე გამავალი წრფე $ON \perp AB$. $\Delta OEB \sim \Delta OO_1K$,

(რადგან ორივე მართკუთხაა და $\angle EOB$ საერთო აქვთ).

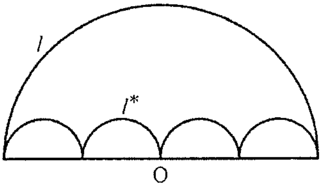


$$\frac{OO_1}{OB} = \frac{O_1K}{EB} \qquad \frac{R-r}{R} = \frac{r}{a}$$

$$a(R-r) = Rr \qquad a = \frac{Rr}{R-r}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{R-r}{Rr} \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$$

№81-82



ნახევარწრეწირის დიამეტრი n ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი, მაშინ

ა) რკალის სიგრძეებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$l_{\text{ნახ.წრეწ.}} = n \cdot l^*_{\text{ნახ.წრეწ.}}$$

ბ) ნახევარწრეების ფართობებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$S_{\text{ნახ.წრ.}} = n^2 \cdot S^*_{\text{ნახ.წრ.}}$$

დამტკიცება: ა) $l_{\text{ნახ.წრეწ}} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R.$

თითოეული პატარა ნახევარწრეწირის დიამეტრია $\frac{2R}{n}$, ანუ რადიუსი $\frac{R}{n}$-ის ტოლია. $l^*_{\text{ნახ.წრეწ.}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{n} = \frac{\pi R}{n}.$

n რაოდენობის ნახევარწრეწირისათვის კი – $n \cdot l^*_{\text{ნახ.წრეწ.}} = \pi R = l_{\text{ნახ.წრეწ.}}$

ბ) $S_{\text{ნახ.წრე}} = \frac{\pi R^2}{2}.$

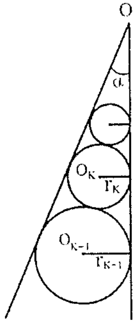
თითოეული პატარა ნახევარწრის დიამეტრია $\frac{2R}{n}$, ანუ რადიუსი $\frac{R}{n}$-ის ტოლია.

შესაბამისად, $S^*_{\text{ნახ.წრ.}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{n^2}.$ n რაოდენობის ნახევარწრისათვის

გვექნება – $S^*_{\text{ნახ.წრ.}} \cdot n = \frac{\pi R^2}{2n^2} \cdot n = \frac{\pi R^2}{2n} = \frac{\pi R^2}{2} : n = S_{\text{ნახ.წრ.}} : n$

ე.ი $S_{\text{ნახ.წრ.}} = n^2 \cdot S^*_{\text{ნახ.წრ.}}$

№83



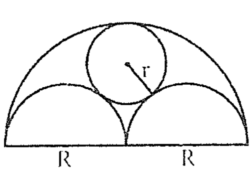
α სიდიდის მახვილ კუთხეში ჩახაზულია შემხები წრეწირები, მაშინ r_i რადიუსები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას და

$$r_{k+1}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot r_k$$

დამტკიცება: O მახვილი α კუთხის წვეროა, ხოლო O_k კი k-ური წრეწირის ცენტრია. წრეწირთა ცენტრები α კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობენ, ამიტომ $r_k = OO_k \sin\frac{\alpha}{2}$ (1). შესაბამისად, $r_{k+1} = (OO_k + r_k + r_{k+1})\sin\frac{\alpha}{2}$. ფრჩხილების გახსნისა და (1) ტოლობის გათვალისწინების შედეგად მივიღებთ: $r_k = r_k + r_k \sin\frac{\alpha}{2} + r_{k+1}\sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$

ე.ი. წრეწირის რადიუსები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელი $q = \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$ და $r_{k+1}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot r_k$.

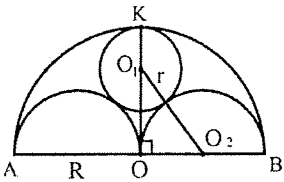
№84



მოცემულია სამი ნახევარწრეწირი და ერთი ჩახაზული წრეწირი, მაშინ

$$R = 3r$$

დამტკიცება: $KO \perp AO$, ΔOO_1O_2 მართკუთხაა. პითაგორას თეორემის თანახმად



$$(OK - O_1K)^2 + (OO_2)^2 = (O_1O_2)^2,\ \text{სადაც}\ OO_2 = \frac{R}{2}$$

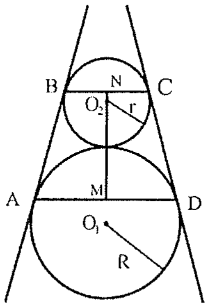
$$O_1O_2 = \frac{R}{2} + r \ \text{და}\ OK - O_1K = R - r$$

$$(R-r)^2 + \frac{R^2}{4} = \left(\frac{R}{2} + r\right)^2$$

$$R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4} + r^2 + rR$$

$$R^2 = 3rR \quad \Rightarrow \quad R = 3r$$

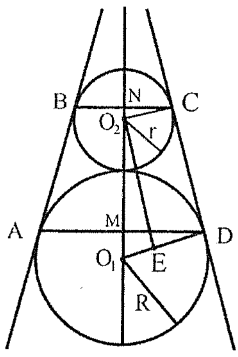
№85



მოცემულია წრეწირების გარე შეხება. M და N შეხების წერტილებზე გავლებული ქორდების შუაწერტილები არიან, მაშინ

$$MN = \frac{4Rr}{R+r}$$

დამტკიცება: გავავლოთ $O_2E \parallel CD$ მონაკვეთი. მართკუთხა ΔO_2EO_1-დან



$$\sin\angle O_1O_2E = \frac{O_1D - DE}{O_1O_2} = \frac{R-r}{R+r}$$

განვიხილოთ ტოლფერდა ΔBO_2C. რადგან N არის BC-ს შუაწერტილი, ამიტომ $O_2N \perp BC$.

ანალოგიურად, $O_1M \perp AD$. ე.ი. $BC \parallel AD$.

$O_2C \parallel O_1D$, ამიტომ $\angle CO_2N = \angle DO_1M \equiv \alpha$ და $\angle O_1DM = 90° - \alpha = \angle O_2CN = \angle O_1O_2E$.

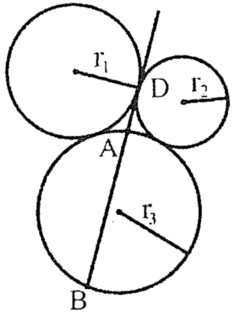
$O_1M = O_1D\sin\angle O_1DM = O_1D\sin\angle O_1O_2E$.

ანალოგიურად, $O_2N = O_2C\sin\angle O_1O_2E$.

$$MN = r + R - O_1M + O_2N = r + R - O_1D\sin\angle O_1O_2E + O_2C\sin\angle O_1O_2E =$$

$$= r + R - \sin\angle O_1O_2E(R-r) = R + r - \frac{(R-r)^2}{R+r} = \frac{(R+r)^2 - (R-r)^2}{R+r} = \frac{4Rr}{R+r}.$$

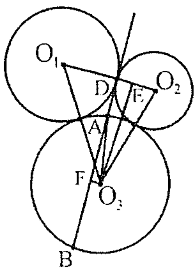
№86



AD არის (O_1; r_1) და (O_2; r_2) წრეწირების საერთო მხები, მაშინ

$$AB = 4r_3\frac{\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$$

დამტკიცება: გავავლოთ $O_3E \perp O_1O_2$, $O_3F \perp AB$ და შევაერთოთ O_3 ცენტრი A წერტილთან. ცხადია, რომ $AD \perp O_1O_2$, $AB = 2AF =$



$= 2\sqrt{AO_3{}^2 - FO_3{}^2} = 2\sqrt{r_3{}^2 - x^2}$, სადაც $x = O_3F =$ $= DE$. განვიხილოთ ΔO_1O_3E და ΔO_2O_3E, რომელთაც საერთო O_3E კათეტი აქვთ.

$$(O_3E)^2 = (O_1O_3)^2 - (O_1E)^2 = (O_2O_3)^2 - (O_2E)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r_3 + r_1)^2 - (r_1 + x)^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r_1 + x)^2 - (r_2 - x)^2 = (r_3 + r_1)^2 - (r_2 + r_3)^2;$$

დავშალოთ მიღებული ტოლობა კვადრატების

სხვაობად, მივიღებთ:

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2 + 2x) = (r_1 + r_2 + 2r_3)(r_1 - r_2);$$

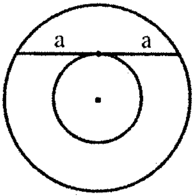
$$r_1{}^2 - r_2{}^2 + 2x(r_1 + r_2) = r_1{}^2 - r_2{}^2 + 2r_3(r_1 - r_2);$$

$$2x(r_1 + r_2) = 2r_3(r_1 - r_2); \quad x = r_3 \cdot \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$$

$$BC = 2\sqrt{r_3{}^2 - x^2} = 2\sqrt{r_3{}^2 - r_3{}^2\frac{(r_1-r_2)^2}{(r_1+r_2)^2}} = 2\sqrt{\frac{r_3{}^2(r_1+r_2)^2 - r_3{}^2(r_1-r_2)^2}{(r_1+r_2)^2}} =$$

$$= 2r_3 \cdot \sqrt{\frac{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}{(r_1+r_2)^2}} = 4r_3 \cdot \frac{\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$$

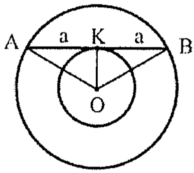
№87



კონცენტრულ წრეწირებში $2a$ სიგრძის ქორდა ეხება მცირე წრეწირს, მაშინ წრიული რგოლის ფართობი ასე გამოითვლება:

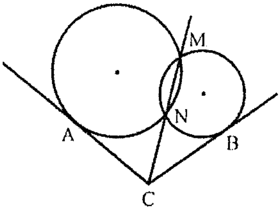
$$S_{\text{წრ.რგ}} = \pi a^2$$

დამტკიცება: გავავლოთ $OA = OB = R$, $OK = r$ მონაკვეთები.



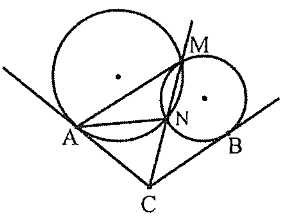
პითაგორას თეორემის თანახმად ΔBOK-ში,
$OB^2 - OK^2 = KB^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 - r^2 = a^2$.
$S_{\text{წრ.რგ}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$

№88



CA და CB მხებთათვის $CA = CB$

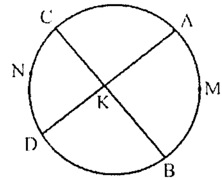
დამტკიცება: გავავლოთ AM და AN მონაკვეთები. $\angle CAN = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2}$, $\angle AMN$



ჩახაზული კუთხეა და ასევე $\frac{\overset{\frown}{AN}}{2}$-ის ტოლია. ე.ი. $\angle CAN = \angle AMN$. $\Delta ANC \sim \Delta AMC$ (რადგან $\angle ACM$ საერთოა, ხოლო $\angle CAN = \angle AMN$). ე.ი. $\frac{AC}{CN} = \frac{MC}{AC}$. $AC^2 = MC \cdot NC$. ანალოგიურად, $BC^2 = MC \cdot NC$. ე.ი. $CA = CB$

წრეწირი

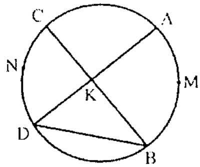
№89



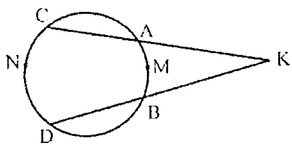
***AD* და *BC* წრეწირის ურთიერთგადამკვეთი ქორდებია, მაშინ**

$$\angle AKB = \frac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{CND}}{2}$$

დამტკიცება: გავავლოთ DB ქორდა. $\angle CKD$ და $\angle AKB$ არის DKB სამკუთხედის გარე კუთხეები. სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია. ე.ი. $\angle AKB = \angle CKD = \angle D + \angle B$. D და B ჩახაზული კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად AMB და CND რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია, ანუ $\angle AKB = \angle CKD = \frac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{CND}}{2}$.



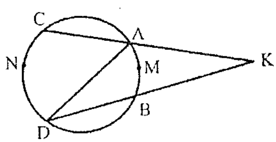
№90



წრეწირის გარეთ მდებარე *K* წერტილიდან გავლებულია წრეწირის *KC* და *KD* მკვეთები, მაშინ

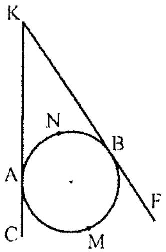
$$\angle K = \frac{\overset{\frown}{CND} - \overset{\frown}{AMB}}{2}$$

დამტკიცება: გავავლოთ AD ქორდა. $\angle CAD$ არის ADK სამკუთხედის გარე კუთხე. აქედან გამომდინარე $\angle CAD = \angle K + \angle D$, საიდანაც $\angle K = \angle CAD - \angle D$. CAD და D ჩახაზული კუთხის გრადუსული ზომები შესაბამისად CND და AMB რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. ე.ი.



$$\angle K = \frac{\overset{\frown}{CND} - \overset{\frown}{AMB}}{2}.$$

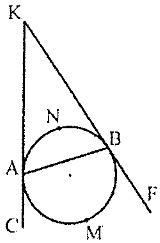
№91



წრეწირის გარეთ მდებარე K წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია KA და KB მხებები, მაშინ

$$\angle K = 180° - \widetilde{ANB}$$

დამტკიცება: გავავლოთ AB ქორდა. ΔAKB-ში $\angle KAB = \frac{\widetilde{ANB}}{2}$, რადგან KAB მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხეა.

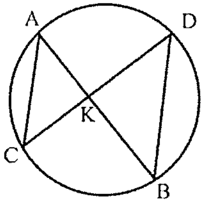


ანალოგიურად, $\angle KBA = \frac{\widetilde{ANB}}{2}$. AKB სამკუთხედში

$\angle K = 180° - \angle KAB - \angle KBA = 180° - \frac{\widetilde{ANB}}{2} - \frac{\widetilde{ANB}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle K = 180° - \widetilde{ANB}$.

№92

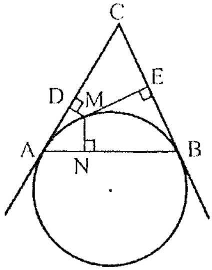


AB და CD ნებისმიერი ქორდებია, მაშინ

$$\Delta AKC \sim \Delta DKB$$

დამტკიცება: AKC და DKB კუთხეები ტოლია, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. $\angle CAB = \angle CDB$, რადგანაც ორივე კუთხე ერთ რკალს ეყრდნობა, ანალოგიურად $\angle ACD = \angle ABD$. მივიღეთ, რომ მოცემული სამკუთხედების შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ამიტომ $\Delta AKC \sim \Delta DKB$

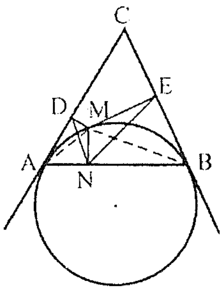
№93



თუ გავლებულია AB ქორდა და ქორდის ბოლოებზე ორი მხები, მაშინ რკალის ნებისმიერი M წერტილიდან გავლებული მართობებისათვის:

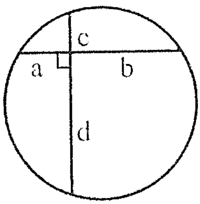
$$MN^2 = MD \cdot ME$$

დამტკიცება: $\angle MNA + \angle ADM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ და $\angle MEB + \angle BNM =$



$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, ამიტომ $ADMN$ და $NMEB$ ოთხკუთხედებზე შემოიხაზება წრეწირი. $\angle MND = \angle MAD$ და $\angle MEN = \angle MBN$ (როგორც ერთ რკალზე დაყრდნობილი კუთხეები).ხოლო $\angle MBN = \angle MAD = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2}$ ე.ი. $\angle MND =$ $= \angle MEN$. ანალოგიურად, $\angle NDM = \angle ENM$. $\Delta DMN \sim \Delta NME$, ანუ $\frac{DM}{MN} = \frac{MN}{ME} \Rightarrow MN^2 = MD \cdot ME$.

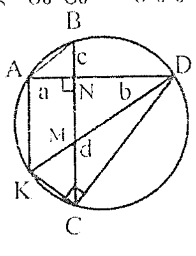
№94



ურთიერთმართობული ქორდებისთვის

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2R)^2$$

დამტკიცება: გავავლოთ $AK \parallel BC$. მივიღებთ $ABCK$ ტრაპეციას, რომელიც ტოლფერდაა, რადგანაც მასზე წრეწირია შემოხაზული.

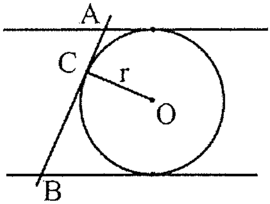


$AB = KC,\ AB^2 = a^2 + c^2,\ KC^2 = AB^2 = a^2 + c^2.$ (1)
ΔCND მართკუთხაა, ამიტომ $CD^2 = b^2 + d^2$. (2)

განვიხილოთ ΔKAD. $\angle KAD = 90°$, ამიტომ KD დიამეტრია. შესაბამისად $\angle KCD = 90°$. ე.ი.

$KC^2 + CD^2 = KD^2$. (1) და (2) ტოლობის გათვალისწინებით: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2R)^2$.

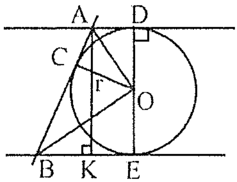
№95



თუ მხებები პარალელურია და C წრეწირის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$\boldsymbol{r^2 = AC \cdot CB}$$

დამტკიცება: A წერტილიდან დავუშვათ მართობი BE-ზე.



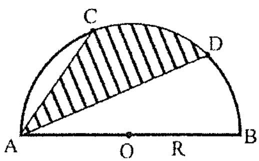
რადგან $AD \parallel BE$, ამიტომ $AK = DE = 2r$.

განვიხილოთ ΔABK. $BK = BE - AD$.
$BE = \boldsymbol{BC}$ და $AD = \boldsymbol{AC}$ (როგორც ერთი წერტილიდან გამოსული მხებები), ამიტო $BK = \boldsymbol{BC - AC}$.
$AB = BC + AC$, დავწეროთ პითაგორას თეორემა ΔABK-სთვის: $AK^2 + BK^2 = AB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ (2r)^2 + (BC - AC)^2 = (BC + AC)^2 \ \Rightarrow \ 4r^2 = (BC + AC)^2 - (BC - AC)^2 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ 4r^2 = 2BC \cdot 2AC \ \Rightarrow \ r^2 = AC \cdot CB.$

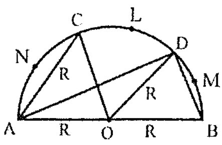
№96



ნახევარწრეწირი გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად, მაშინ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი

$$\boldsymbol{S_{ADC} = \frac{\pi R^2}{6}}$$

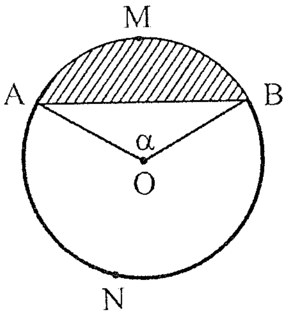
დამტკიცება: $\overline{ANC} = \overline{CLD} = \overline{DMB} = 60°$. $\angle CAD = \mathbf{30°}$, როგორც $\overline{CLD}$ რკალზე დაყრდნობილი კუთხე. $\angle AOC = \angle COD = \angle DOB = 60°$.



ცხადია, AOC, COD და DOB წესიერი სამკუთხედებია. ΔADB-ში $\angle ADB = 90°$, აგრეთვე $DB = R$, $AB = 2R$ და $\boldsymbol{AD} = \sqrt{3}R$. განვიხილოთ ΔCAD. $AC = R$, შესაბამისად $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot \boldsymbol{AD} \sin\angle CAD =$
$\frac{1}{2} R\sqrt{3}R \sin \mathbf{30°} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$. თავისმხრივ, $S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}R \cdot R \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$. ე.ი.

$S_{\Delta ADC} = S_{\Delta COD}. \ \Rightarrow \ S_{ADC} = S_{COD} = \frac{\pi R^2}{6}.$

№97



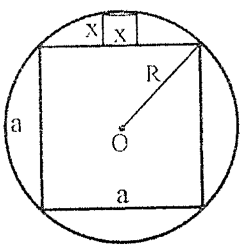
სეგმენტის ფართობი, რომლის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე α-ს ტოლია ასე გამოითვლება:

$$\boldsymbol{S}_{\text{სეგმ}} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha - \boldsymbol{S}_{\Delta AOB}$$

დამტკიცება: წრიული სექტორის ფართობი შეადგენს წრის ფართობის $\frac{\alpha}{360}$ ნაწილს, სადაც α სექტორის შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომაა. ანუ $S_{\text{სექტ}} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha.$

$$S_{\text{სეგმ}} = S_{\text{სექტ}} - S_{\Delta AOB} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha - S_{\Delta AOB}$$

№98

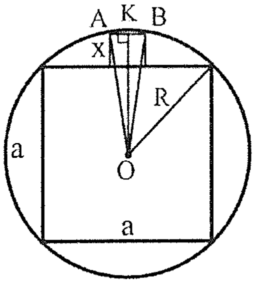


a გვერდიან კვადრატზე შემოხაზულია წრეწირი და მიღებულ სეგმენტში ჩახაზულია კვადრატი, მაშინ ამ კვადრატის გვერდი, ასე გამოითვლება:

$$x = \frac{a}{5}$$

დამტკიცება: კვადრატზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



განვიხილოთ ΔKOB, რომელიც ცხადია მართკუთხაა.

$$KB^2 + KO^2 = OB^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{a^2}{4} + ax + x^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$x^2 + a^2 + 4ax + 4x^2 = 2a^2$$

$$5x^2 + 4ax - a^2 = 0.$$

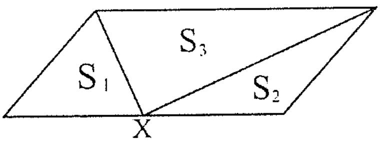
$$D = 16a^2 + 20a^2 = 36a^2.$$

რადგანაც x უარყოფითი ვერ იქნება, ამიტომ

$$x = \frac{-4a+6a}{10} = \frac{a}{5}.$$

პარალელოგრამი

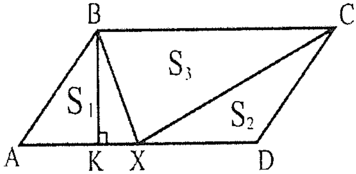
№99



პარალელოგრამის გვერდის ნებისმიერი X წერტილისთვის

$$\boldsymbol{S_1+S_2=S_3}$$

დამტკიცება: B წერტილიდან AD გვერდზე დავუშვათ $BK=h$ მართობი.



გამოვსახოთ სამკუთხედთა ფართობები:

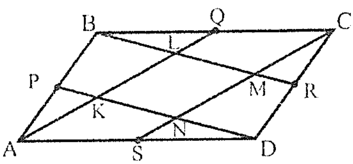
$S_1=\frac{1}{2}h\cdot AX;\quad S_2=\frac{1}{2}h\cdot XD;$

$S_1+S_2=\frac{1}{2}h\cdot AX+\frac{1}{2}h\cdot XD=$

$=\frac{1}{2}h(AX+XD)=\boldsymbol{\frac{1}{2}h\cdot AD}.$

$S_3=\frac{1}{2}h\cdot BC=\boldsymbol{\frac{1}{2}h\cdot AD}.$ ე.ი. $S_1+S_2=S_3$

№100

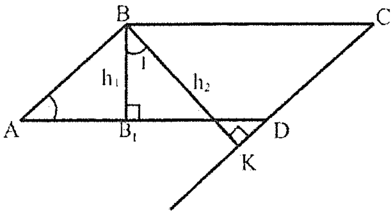


$\boldsymbol{ABCD}$ პარალელოგრამის გვერდების შუაწერტილები წვეროებთანაა შეერთებული. მიღებული პარალელოგრამის ფართობი ასე გამოითვლება:

$$S_{KLMN}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$$

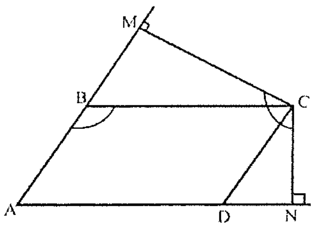
დამტკიცება: $AQ \parallel CS$ და $BR \parallel PD$, აქედან გამომდინარე, ΔBLQ-ისა და ΔSND-ს შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ე.ი. ეს სამკუთხედები ტოლია და LQ = SN. ΔBMC-ში (თალესის თეორემის თანახმად) LQ შუახაზია. შესაბამისად, $CM=2LQ$. ანალოგიურად, ΔCND-ში $CM=MN$ ე.ი. $CM=MN=2LQ=2SN$ და $MN=\frac{2}{5}SC.\quad\Rightarrow\quad S_{KLMN}=\frac{2}{5}S_{AQCS}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{5}S_{ABCD}.$

№101-102



კუთხე პარალელოგრამის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის პარალელოგრამის ერთ-ერთი კუთხის ტოლია:

ა) $\angle 1 = \angle A$

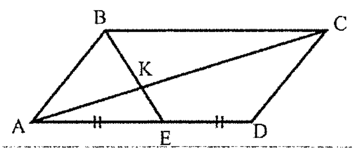


ბ) $\angle MCN = \angle ABC$

დამტკიცება: ა) პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია $\angle A = \angle C$. ΔBKC-ში, $\angle KBC = 90° - \angle A$. $\angle B_1BC = 90° \Rightarrow \angle 1 + \angle KBC = 90°$.
$\angle 1 + 90° - \angle A = 90° \Rightarrow \angle 1 = \angle A$.

ბ) $ABCD$ პარალელოგრამში $\angle \boldsymbol{BAD} + \angle ABC = 180°$. ოთხკუთხედის კუთხეების ჯამი 360°-ია, ანუ $\angle BAD + \angle BMC + \angle MCN + \angle CNA = 360°$, CN და CM სიმაღლეებია, ამიტომ $\angle \boldsymbol{BAD} + \angle MCN = 180°$ ე.ი. $\angle MCN = \angle ABC$

№103

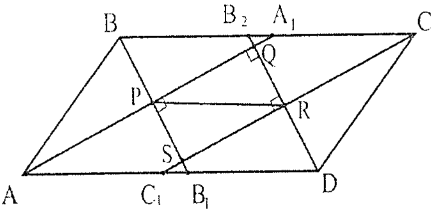


პარალელოგრამში თუ $\boldsymbol{AE = ED}$, მაშინ

$$\boldsymbol{AK : KC = 1:2}$$

დამტკიცება: თუ $AE = ED$, $AE:AD = AE:BC = 1:2$. $\angle CAD = \angle BCA$, ასევე $\angle EBC = \angle BEA$, როგორც შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ე.ი. $\Delta AKE \sim \Delta CKB$, მსგავსებიდან გამომდინარე $AK:KC = AE:BC = 1:2$

№104-105



პარალელოგრამში გავლებულია ოთხივე კუთხის ბისექტრისა, მაშინ

ა) მიღებული $\boldsymbol{PQRS}$ ოთხკუთხედი მართკუთხედია

ბ) $\boldsymbol{PR = AD - AB}$

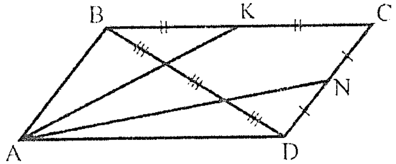
დამტკიცება: ა) $\angle BAC_1 = \angle DCA_1$, ამასთან AA_1 და CC_1 ამ კუთხეების ბისექტრისებია. შესაბამისად, $\angle A_1AC_1 = \angle A_1CC_1$. $\angle BA_1A$ და $\angle A_1AC_1$ შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეებია, ამიტომ $\angle BA_1A = \angle A_1AC_1$. ანალოგიურად, $\angle A_1CC_1 = \angle CC_1D$. რადგან $\angle A_1AC_1 = \angle A_1CC_1$, ამიტომ $\angle BA_1A = \angle CC_1D$. აქედან გამომდინარე, $\angle AA_1C = \angle CC_1A$. რადგან AA_1CC_1 ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ამიტომ იგი პარალელოგრამია და $AA_1 \parallel CC_1$. ანალოგიურად, $BB_1 \parallel DB_2$. რადგან AA_1 და BB_1 პარალელოგრამის A და B კუთხის ბისექტრისები არიან, ამიტომ ΔAPB-დან

$$\angle APB = 180° - (\angle BAP + \angle ABP) = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 180° - 90° = 90°.$$

ე.ი. $\angle APB = \angle SPQ = 90°$. $PQRS$ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია და ერთ-ერთი კუთხე მართია, ამიტომ $PQRS$ მართკუთხედია.

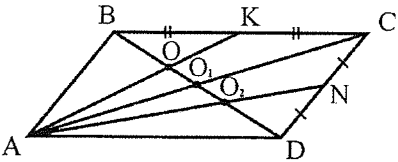
ბ) ΔBAB_1 და ΔB_2CD ტოლფერდა სამკუთხედები არიან (რადგან ამ სამკუთხედებში ბისექტრისები სიმაღლეებსაც წარმოადგენენ). აქედან გამომდინარე, $BP = PB_1$, $B_2R = RD$. რადგან BB_2DB_1 პარალელოგრამია, ამიტომ $PB_1 = RD$. ე.ი. $PRDB_1$ პარალელოგრამია და $PR = B_1D = AD - AB_1 = AD - AB$.

№106



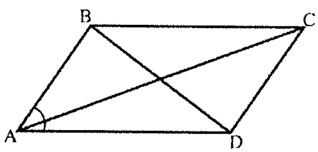
პარალელოგრამში $\boldsymbol{K}$ და $\boldsymbol{N}$ გვერდების შუაწერტილებია, მაშინ $\boldsymbol{BD}$ ტოლ ნაწილებად იყოფა

დამტკიცება: ΔABC-ში AK მედიანაა. რადგან პარალელოგრამში დიაგონალები



გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, ამიტომ BO_1 მედიანაა. O წერტილი მედაინების გადაკვეთის წერტილია ΔABC-ში, მედიანები კი სამკუთხედში გადაკვეთის წერტილით 2:1 შეფარდებით იყოფა წვეროს მხრიდან. ე.ი. $BO:OO_1 = 2:1$. $OO_1 \equiv x$, $BO = 2x$. ანალოგიური მსჯელობით, $DO_2:O_2O_1 = 2:1$. $DO_2 = 2x$, $O_2O_1 = x$.
$OO_2 = OO_1 + O_2O_1 = x + x = 2x$. ე.ი. $BO = OO_2 = O_2D = 2x$.

№107-108



ა) პარალელოგრამის ფართობი დიაგონალებითა და პარალელოგრამის კუთხის საშუალებით ასე გამოითვლება:

$$\mathbf{S}_{\text{პარალ.}} = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)tg\angle BAD$$

ბ) პარალელოგრამში $\boldsymbol{AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)}$

დამტკიცება: ა) ΔABC-ში დავწეროთ კოსინუსების თეორემა:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC =$

$= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos(180° - \angle BAD) = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC\cos\angle BAD$ (1).

ანალოგიურად ΔABD-ს შემთხვევაში:
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle BAD = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle BAD$ (2).

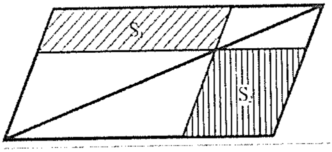
(1) და (2)-დან გამომდინარეობს, რომ
$AC^2 - BD^2 = 4AB \cdot BC\cos\angle BAD \Rightarrow AB \cdot BC\cos\angle BAD = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \cdot BC \cdot \sin\angle BAD = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)tg\angle BAD.$

$AB \cdot BC\sin\angle BAD = S_{ABCD}$ ე.ი. $S_{\text{პარალ.}} = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)tg\angle A$

ბ) (1) და (2)-დან გამომდინარეობს, რომ $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$

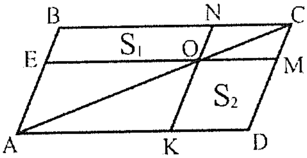
№109



პარალელოგრამის დიაგონალის ნებისმიერ წერტილზე გავლებულია გვერდების პარალელური წრფეები, მაშინ

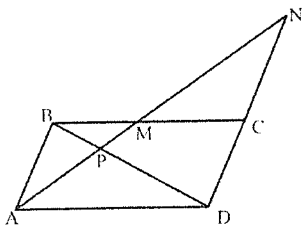
$$S_1 = S_2$$

დამტკიცება: პარალელოგრამში დიაგონალის გავლებით მიღებულ სამკუთხედთა ფართობები ტოლია, ამიტომ $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$. რადგანაც EM და NK შესაბამისად AD-სა და CD-ს პარალელურია, ამიტომ $AEOK$ და $KOMD$ პარალელოგრამებია. ე.ი. $S_{\Delta AEO} = S_{\Delta AOK}$ და $S_{\Delta ONC} = S_{\Delta OMC}$.



$S_1 = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AEO} - S_{\Delta ONC}$; $S_2 = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOK} - S_{\Delta OMC}$. სამკუთხედის ფართობთა ტოლობებიდან გამომდინარე, $S_1 = S_2$

№110-111



P პარალელოგრამის დიაგონალის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

ა) $\dfrac{1}{AP} = \dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$

ბ) $AP^2 = PM \cdot PN$

დამტკიცება: ა) $\angle BMA = \angle MAD$, $\angle MBD = \angle BDA$, როგორც შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები. $\Delta MPB \sim \Delta APD$. მსგავსებიდან გამომდინარე, $\frac{PM}{AP} = \frac{BM}{AD} = \frac{BM}{BC}$

ტოლობაში $\frac{PM}{AP} = \frac{BM}{BC}$, გამოვიყენოთ პროპორციის შემდეგი თვისება:

$\left(\text{თუ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ მაშინ } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}\right)$ $\quad \frac{AP+PM}{AP} = \frac{BC+BM}{BC}$ ე.ი. $\frac{AM}{AP} = \frac{BC+BM}{BC}$ (1) .

$AB \parallel DN$, ამიტომ $\angle BAN = \angle AND$. ხოლო $\angle ABC = \angle ADC$, ე.ი. $\Delta MBA \sim \Delta ADN$.

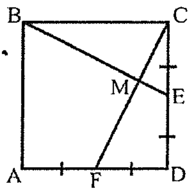
მსგავსებიდან გამომდინარე, $\frac{AM}{AN}=\frac{BM}{AD}=\frac{BM}{BC}$, $\frac{AM+AN}{AN}=\frac{BM+BC}{BC}$.

(1)-ის გათვალისწინებით $\frac{AM}{AP}=\frac{AM+AN}{AN}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{AP}=\frac{AM+AN}{AN\cdot AM}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{AP}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$

ბ) $\Delta APB\sim\Delta NPD$, ამიტომ $\frac{AP}{PN}=\frac{BP}{PD}$. $\Delta APD\sim\Delta MPB$ და შესაბამისად $\frac{MP}{AP}=\frac{BP}{PD}$.

ე.ი. $\frac{AP}{PN}=\frac{MP}{AP}$ $\Rightarrow$ $AP^2=PM\cdot PN$

№112-113



კვადრატში $\boldsymbol{E}$ და $\boldsymbol{F}$ გვერდების შუაწერტილებია, მაშინ

ა) $\angle \boldsymbol{M}=\mathbf{90°}$

ბ) $\boldsymbol{S_{\Delta BMC}}=\frac{1}{5}\cdot\boldsymbol{S_{ABCD}}$.

დამტკიცება: ა) განვიხილოთ ΔBCE და ΔCDF. ამ სამკუთხედთა შესაბამისი გვერდები ტოლია, აქედან გამომდინარე, $\angle\boldsymbol{CFD}=\angle\boldsymbol{BEC}$.
ანუ $\angle FCD+\angle\boldsymbol{CFD}=\angle FCD+\angle\boldsymbol{BEC}=90°$. ე.ი. ΔCME-ში $\angle CME=90°$.

ბ) $\Delta BMC\sim\Delta BCE$. აქედან გამომდინარე,

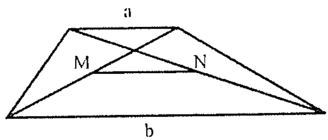
$$\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{BC^2}{BE^2}=\frac{BC^2}{BC^2+\frac{CD^2}{4}}=\frac{BC^2}{BC^2+\frac{BC^2}{4}}=\frac{4}{5}\ \Rightarrow \boldsymbol{S_{\Delta BCM}}=\frac{4}{5}\boldsymbol{S_{\Delta BCE}}\quad (1)$$

$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot CE}{BC^2}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{S_{\Delta BCE}}=\frac{1}{4}\cdot S_{ABCD}$, (1) ტოლობის გათვალისწინებით:

$$\boldsymbol{S_{\Delta BCM}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{5}\cdot S_{ABCD}$$

ტრაპეცია

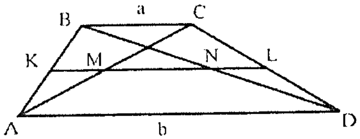
№114



M და N ტრაპეციის დიაგონალების შუაწერტილებია, მაშინ

$$MN = \frac{b-a}{2}$$

დამტკიცება: გავაგრძელოთ MN ფერდების გადაკვეთამდე. მიღებული KL მონაკვეთი ტრაპეციის შუახაზია. $MN = KL - KM - NL$. განვიხილოთ ΔABC.

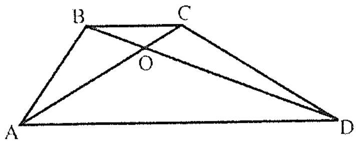


KM მონაკვეთი ამ სამკუთხედის შუახაზია.

ანალოგიურად, ΔBCD-ში NL შუახაზია.

ე.ი. $MN = \frac{b+a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$

№115



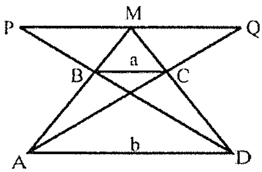
ტრაპეციაში

$$AO \cdot BO = CO \cdot DO$$

დამტკიცება: $\angle ACB = \angle CAD$, როგორც შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ანალოგიურად, $\angle CBD = \angle BDA$. ე.ი. $\Delta COB \sim \Delta AOD$. მსგავსებიდან გამომდინარე,

$\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB}$, ე.ი. $AO \cdot BO = CO \cdot DO$

№116-117

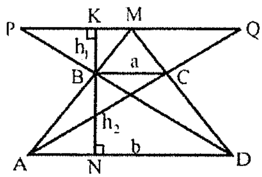


ტრაპეციის AB და CD ფერდების შემცველი წრფეების გადაკვეთის M წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე, მაშინ

ა) $PM = MQ$

ბ) $PQ = \frac{2ab}{b-a}$

დამტკიცება: ა) განვიხილოთ ΔPBM და ΔABD. $\angle PBM = \angle ABD$, როგორც



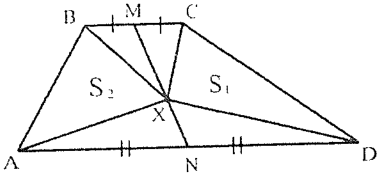
ვერტიკალური კუთხეები. $\angle PMA = \angle MAD$, როგორც შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ე.ი. $\Delta MBP \sim \Delta ABD$. აქედან გამომდინარე, $\frac{BM}{AB} = \frac{PM}{AD}$ (1)

ანალოგიურად, $\Delta QCM \sim \Delta ACD$ და $\frac{MC}{CD} = \frac{MQ}{AD}$ (2). $BC \parallel AD$, ამიტომ თალესის თეორემის თანახმად გვექნება: $\frac{MC}{CD} = \frac{BM}{AB}$. (1) და (2)-ს გათვალისწინებით:

$$\frac{MC}{CD} = \frac{BM}{AB} = \frac{MQ}{AD} = \frac{PM}{AD} \quad \Rightarrow \quad PM = MQ.$$

ბ) $\Delta MBP \sim \Delta ABD$, ამიტომ $\frac{PM}{AD} = \frac{BK}{BN} = \frac{h_1}{h_2}$. $BC \parallel PM$, ამიტომ $\Delta BCD \sim \Delta PMD$. $\frac{PM}{BC} = \frac{h_1+h_2}{h_2} = 1 + \frac{h_1}{h_2}$. რადგან $\frac{PM}{AD} = \frac{h_1}{h_2}$, ამიტომ $\frac{PM}{BC} = 1 + \frac{PM}{AD}$. $BC = a$, $AD = b$. ე.ი. $\frac{PM}{a} = 1 + \frac{PM}{b}$. $PM \cdot b = ab + a \cdot PM \Rightarrow PM = \frac{ab}{b-a}$. $PQ = 2PM$, ამიტომ $PQ = \frac{2ab}{b-a}$.

№118



M და *N* ფუძეების შუაწერტილებია. *X* არის *MN* მონაკვეთის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ

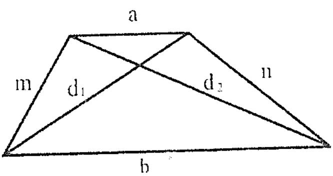
$$S_1 = S_2$$

დამტკიცება: რადგანაც M და N ფუძეების შუაწერტილებია, ამიტომ XM არის ΔBXC-ს მედიანა $S_{\Delta BXM} = S_{\Delta MXC} \equiv S_3$. ასევე ΔAXD-ში XN მედიანაა

$S_{\Delta AXN} = S_{\Delta NXD} \equiv S_4$ ცხადია, $S_{ABMN} = S_{MNDC}$ ანუ $S_1 + S_3 + S_4 = S_2 + S_3 + S_4$

ე.ი. $S_1 = S_2$

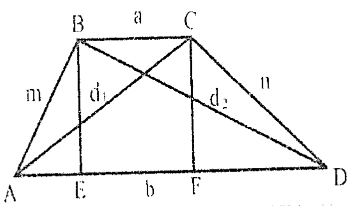
№119



ტრაპეციაში დიაგონალებსა და გვერდებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = m^2 + n^2 + 2ab$$

დამტკიცება: ტრაპეციის B და C წერტილებიდან დავუშვათ სიმაღლეები AD გვერდზე. განვიხილოთ ΔACF და ΔFCD.



პითაგორის თეორემით: $d_1{}^2 - AF^2 = n^2 - FD^2 (1)$

განვიხილოთ ΔEDB და ΔABE.

$d_2{}^2 - ED^2 = m^2 - AE^2$ (2) შევკრიბოთ (1) და (2) ტოლობები, მივიღებთ:

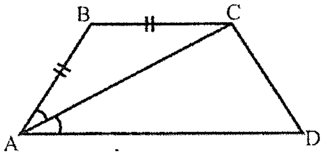
$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = m^2 + n^2 + AF^2 - FD^2 + ED^2 - AE^2 =$$

$$= m^2 + n^2 + (AF + FD)(AF - FD) + (ED + AE)(ED - AE) =$$

$$= m^2 + n^2 + AD(AF - FD) + AD(ED - AE) = m^2 + n^2 + AD(AF - FD + ED - AE) =$$

$$= m^2 + n^2 + AD \cdot 2EF = m^2 + n^2 + 2AD \cdot BC \quad \Rightarrow \quad d_1{}^2 + d_2{}^2 = m^2 + n^2 + 2ab.$$

№120

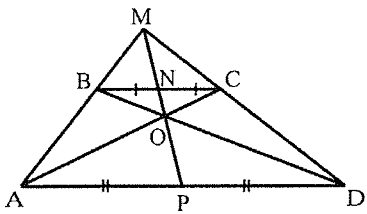


თუ ტრაპეციაში AC დიაგონალი ბისექტრისაცაა, მაშინ

$$AB = BC$$

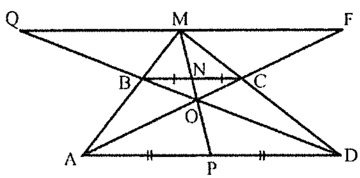
დამტკიცება: რადგან AC ბისექტრისაა, ამიტომ $\angle BAC = \angle CAD$. გარდა ამისა, $\angle CAD = \angle BCA$, როგორც შიგაჯვარედინად მდებარე კუთხეები. აქედან გამომდინარე, $\angle BAC = \angle BCA$. ე.ი. ΔABC ტოლფერდაა და $AB = BC$.

№121



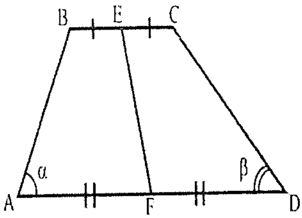
N და P ფუძეების შუაწერტილები არიან, მაშინ M, N, P და O წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ

დამტკიცება: დავამტკიცოთ, რომ MP მონაკვეთი გადის N წერტილზე. $BC \parallel AD$, ამიტომ $\Delta BMN \sim \Delta AMP$ და $\Delta NMC \sim \Delta PMD$. მსგავსებიდან გამომდინარე, $\frac{BN}{AP} = \frac{MN}{MP}$. ანალოგიურად, $\frac{NC}{PD} = \frac{MN}{MP}$. ე.ი. $\frac{BN}{AP} = \frac{NC}{PD}$. რადგან $AP = PD$, ამიტომ $BN = NC$, ანუ MP მონაკვეთი BC-ს N შუაწერტილში გადის. გავაგრძელოთ AC და DB



დიაგონალები AD-ს პარალელური QF მონაკვეთის გადაკვეთამდე. განვიხილოთ $FCBQ$ ტრაპეცია. $QM = MF$ (იხ. №116). ამ ტრაპეციის გვერდების გადაკვეთის O წერტილიდან გავლებული OM მონაკვეთი CB-ს შუაწერტილზე გადის (ანალოგურად იმისა, რომ MP მონაკვეთი BC-ს N შუაწერტილზე გადის). ე.ი. $N \in OM$ და, ამასთან, $N \in MP$. აქედან გამომდინარე, M, N, P და O წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

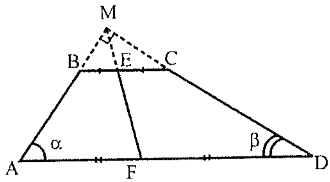
№122



თუ $\alpha+\beta=90°$, და E და F ფუძეების შუაწერტილებია, მაშინ

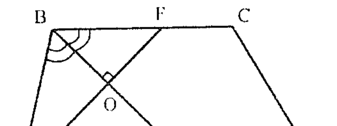
$$EF=\frac{AD-BC}{2}$$

დამტკიცება: ტრაპეციის AB და DC გვერდები გავაგრძელოთ მათ გადაკვეთამდე და გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M-ით. M წერტილი შევაერთოთ AD გვერდის F შუაწერტილთან, (MF აუცილებლად გაივლის E წერტილზე, (იხ. №121). რადგანაც $\alpha+\beta=90°$, ამიტომ $\angle M=90°$, ხოლო BC და AD შესაბამისად ΔBMC-სა და ΔAMD-ს ჰიპოტენუზებია.



მართკუთხა სამკუთხედის მედიანის სიგრძე, ჰიპოტენუზის სიგრძის ნახევარია, ამიტომ $ME=\frac{BC}{2}$; $MF=\frac{AD}{2}$ ე.ი. $EF=\frac{AD-BC}{2}$

№123-124



ტრაპეციაში გავლებულია ორი ბისექტრისა, მაშინ

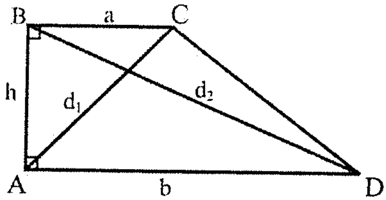
ა) $\angle O=90°$

ბ) O შუამონაკვეთზეა

დამტკიცება: ა) ტრაპეციაში $\angle A+\angle B=180°$. რადგან AF და BK ბისექტრისები არიან, ამიტომ $\angle BAO+\angle ABO=90°$. ე.ი. $\angle AOB=90°$.

ბ) $\angle FAD=\angle BFA=\angle BAF$. ΔABF ტოლფერდაა BO სიმაღლეცაა და მედიანაც $AO=OF$. თუ გავავლებთ ფუძეების პარალელურ წრფეს O წერტილზე, მაშინ იგი, თალესის თეორემის თანახმად, AB-სა და CD-ს შუაწერტილში გადაკვეთს

№125

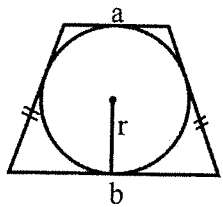


მართკუთხა ტრაპეციაში დიაგონალებსა და ფუძეებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$d_2^{\,2} - d_1^{\,2} = b^2 - a^2$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ΔABD და ΔABC. პითაგორას თეორემის თანახმად: $d_1^{\,2} - a^2 = h^2$, $d_2^{\,2} - b^2 = h^2$, ე.ი. $d_2^{\,2} - d_1^{\,2} = b^2 - a^2$.

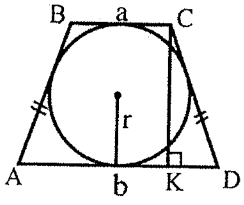
№126



შემოხაზულ ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ასეც გამოითვლება:

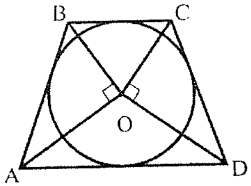
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$$

დამტკიცება: C წერტილიდან დავუშვათ მართობი AD გვერდზე. ცხადია $CK = 2r$. რადგან $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა, ამიტომ $KD = \frac{b-a}{2}$. თუ ოთხკუთხედში წრეწირი ჩაიხაზება, მაშინ მისი მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია. ე.ი. $AB + CD = a + b$. ჩვენს შემთხვევაში $AB = CD$, აქედან გამომდინარე $CD = \frac{a+b}{2}$. ΔCKD-ში, პითაგორას თეორემის გათვალისწინებით: $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 4r^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,



$$4r^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow 2r = \sqrt{ab} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$$

№127

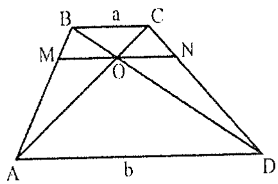


O ცენტრის მქონე წრეწირზე შემოხაზულ $\boldsymbol{ABCD}$ ტრაპეციაში:

$$\angle AOB = \angle COD = 90°$$

დამტკიცება: ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს მისი კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილზე. ე.ი AO და OB ბისექტრისებია და შესაბამისად, რადგან $\angle DAB + \angle CBA = 180°$, ამიტომ $\angle AOB = 90°$. ანალოგიურად $\angle COD = 90°$.

№128



ტრაპეციაში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავლებული ფუძეების პარალელური MN მონაკვეთისთვის:

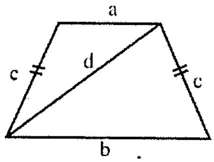
$$MN = \frac{2ab}{a+b}$$

დამტკიცება: რადგან $MO \parallel BC \parallel AD$, ამიტომ $\Delta AMO \sim \Delta ABC$ და $\Delta BMO \sim \Delta BAD$. მსგავსებიდან გამომდინარე, $\frac{MO}{a} = \frac{AM}{AB}$, $\frac{MO}{b} = \frac{MB}{AB}$, $\frac{MO}{a} + \frac{MO}{b} = \frac{MB}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1$

$MO\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$, $MO = \frac{ab}{a+b}$. ანალოგიურად, $\Delta OND \sim \Delta BCD$, $\Delta CON \sim \Delta CAD$ და

$ON = \frac{ab}{a+b}$. $MN = ON + MO = \frac{2ab}{a+b}$.

№129

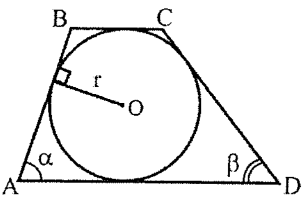


ტოლფერდა ტრაპეციაში

$$d^2 = c^2 + ab$$

დამტკიცება: ტრაპეციაში $d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2ab + m^2 + n^2$, სადაც d_1 და d_2 დიაგონალებია, ხოლო m და n კი ტრაპეციის ფერდები. (იხ. №119). ტოლფერდა ტრაპეციის შემთხვევაში $m = n \equiv c$ და $d_1 = d_2$. შესაბამისად ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ: $2d^2 = 2c^2 + 2ab \;\Rightarrow\; d^2 = c^2 + ab.$

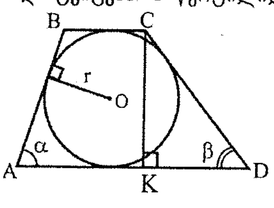
№130



შემოხაზული ტრაპეციის ფართობი ასე გამოითვლება:

$$S = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)$$

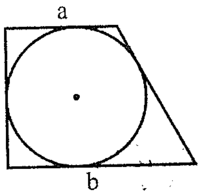
დამტკიცება: C წერტილიდან დავუშვათ მართობი AD გვერდზე. ცხადია



$CK = 2r$. აქედან გამომდინარე, $CD = \frac{2r}{\sin\beta}$. ანალოგიურად, $AB = \frac{2r}{\sin\alpha}$. შევაერთოთ ოთხკუთხედის წვეროები წრეწირის ცენტრთან და განვიხილოთ მიღებული AOB, BOC, COD და AOD სამკუთხედები. თითოეულის სიმაღლე, ცხადია r-ის ტოლია. აქედან გამომდინარე, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}r \cdot AB$, $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}r \cdot BC$, $S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}r \cdot CD$ და $S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}r \cdot AD$. ე.ი. $S = \frac{1}{2}r(AB + BC + +CD + AD)$. თუ $ABCD$-ში ჩახაზულია წრეწირი, მაშინ $AB + CD = BC + AD$. ე.ი. $S = r(AB + CD)$.

რადგან $AB = \frac{2r}{\sin\alpha}$ და $CD = \frac{2r}{\sin\beta}$. აქედან გამომდინარე, $S = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)$.

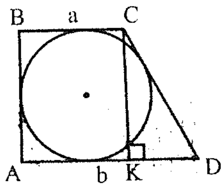
№131



შემოხაზული მართკუთხა ტრაპეციის ფართობი ასე გამოითვლება:

$$\boldsymbol{S = ab}$$

დამტკიცება: C წერტილიდან დავუშვათ მართობი AD გვერდზე. ცხადია,



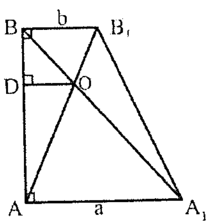
$CK = AB \equiv h$ და $KD = b - a$, პითაგორას თეორემიდან ΔCKD-სთვის: $(b-a)^2 + h^2 = CD^2$ (1). თუ ოთხკუთხედში წრეწირი ჩაიხაზება, მაშინ მისი მოპირდაპირე გვერდების ჯამები ტოლია. ე.ი. $h + CD = a + b \;\Rightarrow$

$h^2 + 2h \cdot CD + CD^2 = (a+b)^2$ (2). (1)-სა და (2)-ს დაჯამებითა და გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$2ab = h(h + CD).$$

$S = S_{ABCK} + S_{\Delta CKD}$, ე.ი. $S = h \cdot a + \frac{h(b-a)}{2} = h\frac{a+b}{2}$. რადგან ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი, ამიტომ $h + CD = a + b$, ე.ი. $S = h\frac{h+CD}{2}$.
თუ გავითვალისწინებთ, რომ $2ab = h(h + CD)$, მივიღებთ $S = ab$.

№132



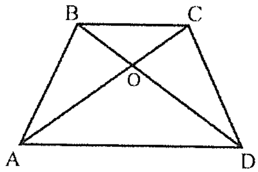
მართკუთხა ტრაპეციაში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან მართ ფერდამდე მანძილი ასე გამოითვლება:

$$\boldsymbol{OD = \frac{ab}{a+b}}$$

დამტკიცება: რადგან $\Delta ABA_1 \sim \Delta DBO$ და $\Delta BAB_1 \sim \Delta DAO$, ამიტომ $\frac{OD}{a} = \frac{BD}{BA}$ და $\frac{OD}{b} = \frac{AD}{AB}$. აქედან გამომდინარე, $\frac{OD}{a} + \frac{OD}{b} = OD\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{AD+DB}{AB} = 1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow OD\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad OD = \frac{ab}{a+b}$.

№133



თუ ტრაპეციაში $BC:AD = p$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta AOD}} = (p+1)^2$$

დამტკიცება: $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, მსგავსებიდან გამომდინარე $\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO} = \frac{BO}{OD} = p$. მსგავსი სამკუთხედების ფართობების შეფარდება ტოლია შესაბამისი გვერდების კვადრატების შეფარდებისა ე.ი $\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOD}} = p^2$, $S_{\Delta BOC}=S_{\Delta AOD}p^2$.

ΔABD-ში $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOD}} = \frac{BO}{OD} = p$, $S_{\Delta AOB}=p\, S_{\Delta AOD}$, ΔACD-ში ანალოგიურად

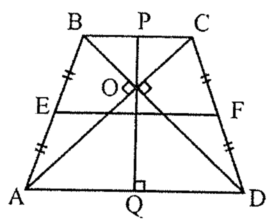
$\frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta AOD}} = \frac{OC}{AO} = p$, $S_{\Delta COD}=p\, S_{\Delta AOD}$. ყველა მიღებული ტოლობიდან

გამომდინარე:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} = S_{\Delta AOD}p^2 + S_{\Delta AOD}2p + S_{\Delta AOD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{\Delta AOD}(p^2+2p+1) \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta AOD}} = (p+1)^2.$$

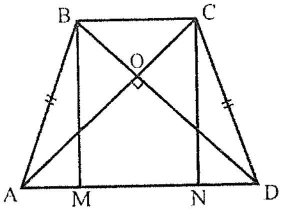
№134



თუ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ შუამონაკვეთი სიმაღლის ტოლია.

$$EF = PQ$$

დამტკიცება: ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ტოლია, $AC = BD$.



ABD და ACD სამკუთხედის გვერდები ტოლია და შესაბამისად კუთხეებიც, ანუ $\angle BDA = \angle CAD$. ე.ი ΔAOD ტოლფერდაა და $AO = OD$.
რადგან $\angle AOD = 90°$, ამიტომ $\angle ODA = \angle OAD = 45°$.
აქედან გამომდინარე, BDM მართკუთხა სამკუთხედი ტოლფერდაა ე.ი. $BM = MD$.
ტოლფერდა ტრაპეციაში $AM = ND$, აგრეთვე $MN = BC$. $\quad AM + MN + ND = AD, \quad \Rightarrow$

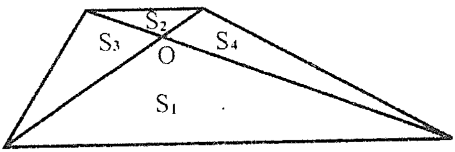
$$\Rightarrow \ 2AM = AD - MN = AD - BC \ \Rightarrow AM = \frac{AD-BC}{2}.$$

ცხადია, $MD = AD - AM$

$$MD = AD - \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}. \quad \text{ე.ი. } BM = PQ = MD = \frac{AD+BC}{2}$$

რადგანაც EF შუახაზია, ამიტომ $EF = \frac{AD+BC}{2} = PQ$.

№135-136



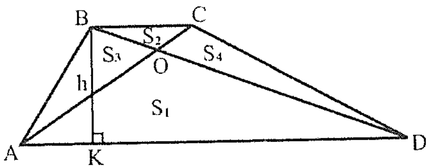
ტრაპეციაში დიაგონალების გავლებით მიღებული სამკუთხედების ფართობებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

ა) $S_3 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_2$

ბ) $S_3 = S_4$

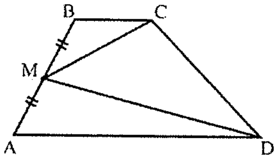
დამტკიცება: ა) სამკუთხედში სხივი, სათავით წვეროში, მოპირდაპირე გვერდსა და ფიგურის ფართობს ერთნაირი შეფარდებით ყოფს, ამიტომ

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{S_1}{S_4} = \frac{AO}{OC}. \text{ ანუ } S_3 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_2.$$



ბ) $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot h$. ანალოგიურად,
$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot h$. ე.ი. $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$.
$S_{\Delta ABD} = S_1 + S_3$ და $S_{\Delta ACD} = S_1 + S_4$
ე.ი. $S_3 = S_4$.

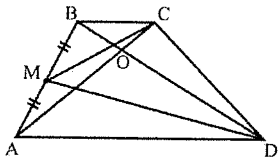
№137



M ტრაპეციის ფერდის შუაწერტილია, მაშინ

$$S_{\Delta CMD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

დამტკიცება: რადგანაც CM მედიანაა ΔABC-ში, ამიტომ $S_{\Delta MBC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{2}$.



ანალოგიურად, $S_{\Delta AMD} = \frac{S_{\Delta ABD}}{2}$.

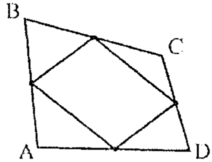
რადგან $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta COD}$ (იხ. №136), ამიტომ $S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABD} = S_{ABCD}$. აქედან გამომდინარე,

$\boldsymbol{S_{\Delta MBC} + S_{\Delta AMD}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{2} + \frac{S_{\Delta ABD}}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

$S_{\Delta CMD} = S_{ABCD} - (\boldsymbol{S_{\Delta MBC} + S_{\Delta AMD}}) = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

ოთხკუთხედი და მრავალკუთხედი

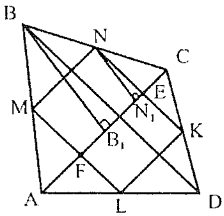
№138



ნებისმიერი ამოზნექილი ABCD ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილების შეერთებით მიიღება პარალელოგრამი და

$$\mathbf{S}_{\text{პარალ.}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{S}_{ABCD}$$

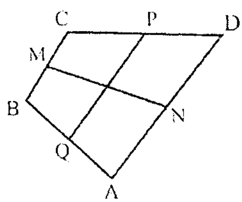
დამტკიცება: გავავლოთ AC და BD დიაგონალები მოცემულ $ABCD$ ოთხკუთხედში. რადგან M და N არიან AB და BC გვერდების შუაწერტილები,



ამიტომ ΔABC-ში MN შუახაზია და $MN = \frac{AC}{2}$, ამასთან $MN \parallel AC$. ანალოგიურად, ΔADC-ში LK შუახაზია, ანუ $LK = \frac{AC}{2}$ და $LK \parallel AC$. ე.ი. $MN = LK$ და $MN \parallel LK$. აქედან გამომდინარე, $MNKL$ პარალელოგრამია. ცხადია, ΔABC-ში ჩახაზული $MNEF$ ოთხკუთხედიც პარალელოგრამია. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot AC$. ცხადია, რომ $BB_1 = 2NN_1$ და $MN = \frac{AC}{2} = EF$, ამიტომ $S_{MNEF} = \mathrm{EF} \cdot \mathrm{NN}_1 = \frac{1}{4} BB_1 \cdot AC = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$. ანალოგიურად, $S_{\Delta ADC}$-ში $S_{KLFE} = \frac{1}{2} S_{\Delta ADC}$.

$$S_{MNKL} = S_{MNEF} + S_{KLFE} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} + \frac{1}{2} S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}\left(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}\right) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

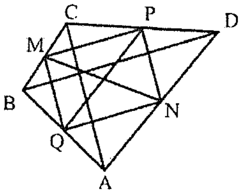
№139



თუ $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{P}$ და $\boldsymbol{Q}$ ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები არიან, მაშინ

$$\boldsymbol{BD^2 + AC^2 = 2\left(MN^2 + PQ^2\right)}$$

დამტკიცება: ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ამოზნექილი



ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილების შეერთებით მიიღება პარალელოგრამი (იხ. №138). ე.ი. $QMPN$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
პარალელოგრამში გვერდების კვადრატების ჯამი ტოლია დიაგონალების კვადრატების ჯამისა:

$$2QM^2 + 2MP^2 = MN^2 + PQ^2 \quad (1).$$

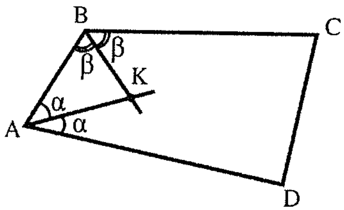
რადგან MP შუახაზია ΔBCD-ში, ამიტომ $BD = 2MP$.
ანალოგიურად, ΔABC-ში QM შუახაზია, $AC = 2QM$.
აქედან გამომდინარე,

$$BD^2 + AC^2 = 4MP^2 + 4QM^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{BD^2+AC^2}{2} = 2MP^2 + 2QM^2 \qquad (2)$$

(1) და (2)-დან გამომდინარე:

$$\frac{BD^2+AC^2}{2} = MN^2 + PQ^2 \quad \Rightarrow \quad BD^2 + AC^2 = 2\left(MN^2 + PQ^2\right)$$

№140



თუ AK და BK ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ბისექტრისებია, მაშინ

$$\angle AKB = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

დამტკიცება: AK და BK ბისექტრისებია, $\angle KAD = \angle BAK \equiv \alpha$ და $\angle ABK = \angle KBC \equiv \beta$. ΔABK-დან $180° - \angle AKB = \alpha + \beta$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი ტოლია 360°-ის, მივიღებთ:

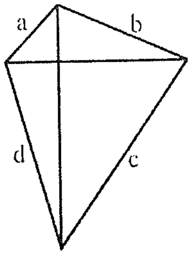
$$2(\alpha+\beta) + \angle C + \angle D = 360°$$

$$(\alpha+\beta) + \frac{\angle C+\angle D}{2} = 180°$$

$$180° - (\alpha+\beta) = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

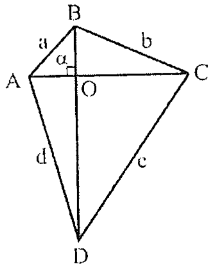
$$\angle AKB = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

№141



თუ ოთხკუთხედში $a^2+c^2=b^2+d^2$, მაშინ დიაგონალები ურთიერთმართობულია

დამტკიცება: მოცემულია, რომ $a^2+c^2-(b^2+d^2)=0$ (1). $\angle AOB=\angle DOC\equiv\alpha$, ხოლო $\angle AOD=\angle BOC\equiv\beta$. კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარე, ΔAOB-სა და ΔDOC-ში გვექნება:



$$a^2=AO^2+OB^2-2BO\cdot OA\cos\alpha$$

$$c^2=DO^2+OC^2-2DO\cdot OC\cos\alpha$$

ანალოგიურად, ΔAOD-სა და ΔBOC-ში:

$$d^2=OA^2+OD^2-2AO\cdot OD\cos\beta=$$

$$=OA^2+OD^2-2AO\cdot OD\cos(180^\circ-\alpha)=$$

$$=OA^2+OD^2+2AO\cdot OD\cos\alpha$$

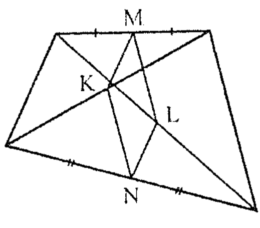
$$b^2=BO^2+OC^2-2BO\cdot OC\cos\beta==BO^2+OC^2+2BO\cdot OC\cos\alpha$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ტოლობაში:

$$a^2+c^2-(b^2+d^2)=-\cos\alpha\,(2BO\cdot OA+2DO\cdot OC+2DO\cdot OC+2AO\cdot OD)=0$$

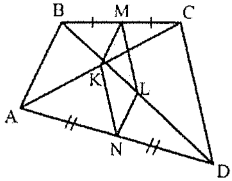
ცხადია, რომ $2BO\cdot OA+2DO\cdot OC+2DO\cdot OC+2AO\cdot OD\neq 0$, ამიტომ $\cos\alpha=0$. ე.ი. $\alpha=\beta=90^\circ$

№142

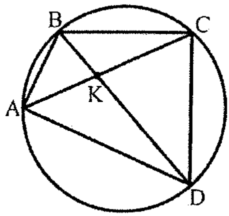


თუ M,N,K და L შესაბამისი მონაკვეთების შუაწერტილები არიან, მაშინ $MKNL$ პარალელოგრამია

დამტკიცება: განვიხილოთ ΔCBD. M არის BC მონაკვეთის შუაწერტილი, ხოლო L კი BD-სი. ე.ი. ML ამ სამკუთხედის შუახაზია და $ML = \frac{CD}{2}$. განვიხილოთ ΔACD. რადგან K და N შუაწერტილები არიან, ამიტომ NK შუახაზია და $NK = \frac{CD}{2}$. ე.ი. $\boldsymbol{NK = ML}$. ანალოგიურად, ΔABC-სა და ΔABD-ში შესაბამისად MK და LN შუახაზები არიან, $\boldsymbol{MK = LN} = \frac{AB}{2}$. $MKNL$ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია. ე.ი. $MNKL$ პარალელოგრამია.



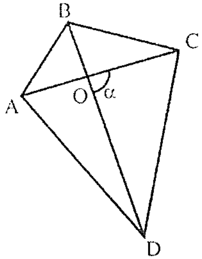
№143



თუ ოთხკუთხედში $AK \cdot KC = BK \cdot KD$, მაშინ ამ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

დამტკიცება: მოცემული ტოლობა გარდავქმნათ შემდეგნაირად $\frac{AK}{KD} = \frac{BK}{KC}$ (1). განვიხილოთ ΔAKB და ΔDKC. ამ სამკუთხედებში $\angle AKB = \angle DKC$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. ხოლო (1) ტოლობიდან მათი გვერდები პროპორციულია. რადგან ΔAKB -ს ორი გვერდი პროპორციულია ΔDKC-ს ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხეები ტოლია, ამიტომ $\Delta AKB \sim \Delta DKC$. მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ABK = \angle KCD \equiv \alpha$, $\angle BAK = \angle KDC \equiv \beta$. ანალოგიურად მტკიცდება ΔBKC -სა და ΔAKD-ს მსგავსება. ე.ი. $\angle KBC = \angle KAD \equiv \gamma$, ხოლო $\angle BCK = \angle ADB \equiv \varphi$. ოთხკუთხედის კუთხეების ჯამი 360°-ია, აქედან გამომდინარე $2(\alpha + \beta + \gamma + \varphi)= 360°$, $(\alpha + \beta + \gamma + \varphi) =180°$. $\angle ABC+\angle ADC = (\alpha + \beta + \gamma + \varphi)=180°$. რადგანაც $ABCD$ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ია, ამიტომ მასზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

№144



ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობი ასე გამოითვლება:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$$

დამტკიცება: განვიხილოთ დიაგონალების გავლებით მიღებული თითოეული სამკუთხედი. $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \sin\alpha$, $S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot OD \sin(180° - \alpha)$,

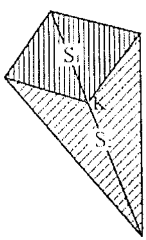
$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC\sin(180° - \alpha)$ და $S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}CO \cdot OD \sin\alpha$.

გავითვალისწინოთ, რომ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ და შევკრიბოთ მიღებული შედეგები: $S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOD} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} =$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha\,[AO(OB + OD) + CO(OB + OD)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha(OB + OD)(AO + OC) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha.$$

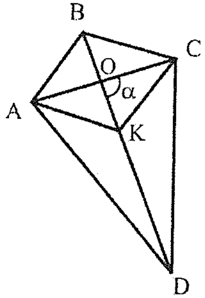
№145



თუ K ოთხკუთხედის დიაგონალის შუაწერტილია, მაშინ

$$S_1 = S_2.$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ოთხკუთხედი $ABCK$ და $ABCD$.

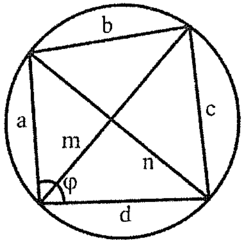


$S_{ABCK} = \frac{1}{2} BK \cdot AC \cdot \sin\alpha$ (იხ.№144), ხოლო

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha$. რადგან $BK = \frac{BD}{2}$, ამიტომ

$S_{ABCK} = \frac{S_{ABCD}}{2}$. ე.ი. $S_{ABCK} = S_{AKCD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

№146-147



ჩახაზულ ოთხკუთხედში დიაგონალებსა და გვერდებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

ა) $\boldsymbol{m \cdot n = ac + bd}$ (პტოლემეოსის თეორემა)

ბ) $\boldsymbol{\frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{bc+ad}}$

დამტკიცება: ა) კოსინუსების თეორემის თანახმად:

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi$$

$$n^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos(180° - \varphi) = b^2 + c^2 + 2cb\cos\varphi$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ bc-ზე, მეორე – ad-ზე და შევკრიბოთ:

$$(bc + ad)n^2 = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad = (ab + cd)(ac + bd)$$ ე.ი.

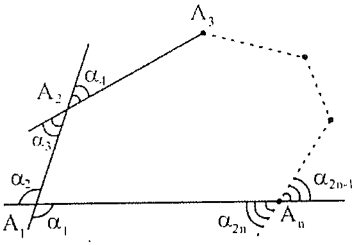
$n^2 = \frac{(ab+cd)}{(bc+ad)}\ (ac + bd)$ (1), ანალოგიურად

$m^2 = \frac{(ad+cb)}{(ab+cd)}(ac + bd)$ (2).

(1) და (2) ტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ: $mn = ac + bd$

ბ) (1) და (2) ტოლობების გაყოფით გვექნება: $\frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{bc+ad}$.

№148



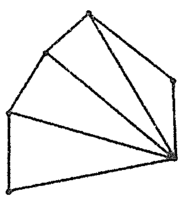
ამოზნექილი n-კუთხედის ყველა გარე კუთხეთა ჯამი 720°-ის ტოლია.

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+.....+\alpha_{2n-1}+\alpha_{2n}=720°$$

დამტკიცება: თითოეულ A_i წვეროსთან მდებარე ოთხივე კუთხის ჯამია 360°. სულ n წვეროსთან ასეთ კუთხეთა ჯამია $360°\cdot n$. ცნობილია, რომ მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამია $180°(n-2)$, ხოლო ყოველ წვეროსთან შიგა კუთხის ვერტიკალური და ე.ი. მისი ტოლი კუთხე არსებობს. ამრიგად ყველა შესაძლო გარე კუთხეთა ჯამი ტოლია:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+.....+\alpha_{2n}=360°\cdot n-2\cdot 180°(n-2)=360°\cdot n-360°\cdot n+720°=720°$$

№149

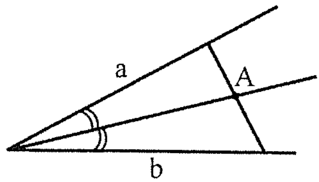


n-კუთხედში ყველა შესაძლო დიაგონალების რაოდენობაა:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

დამტკიცება: რადგან n-კუთხედში დიაგონალი ორი არამეზობელი წვეროს შემაერთებელი მონაკვეთია, ამიტომ ერთი წვეროდან $(n-3)$ დიაგონალის გავლება არის შესაძლებელი. აქედან გამომდინარე, n წვეროდან $n(n-3)$ გავლება შეიძლება. ამ წესით ყოველი დიაგონალი დათვლილია 2-ჯერ, ამიტომ n-კუთხედში ყველა შესაძლო დიაგონალების რაოდენობაა $\frac{n(n-3)}{2}$.

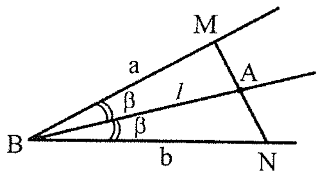
კიდევ ერთი თეორემა



კუთხის ბისექტრისაზე მდებარე A წერტილზე გამავალი ნებისმიერი მკვეთის მიერ მოკვეთილი მონაკვეთებისთვის:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=const$$

დამტკიცება: განვიხილოთ სამკუთხედი ABM და ABN. $BA \equiv l$.



$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}al\sin\beta$. ანალოგიურად,

$S_{\Delta ABN}=\frac{1}{2}bl\sin\beta$.

$S_{\Delta MBN}=\frac{1}{2}ab\sin 2\beta$.

რადგან $S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ABN}=S_{\Delta MBN}$, ამიტომ

$l\sin\beta\,(a+b)=ab\sin 2\beta$. $\frac{a+b}{ab}=\frac{\sin 2\beta}{l\sin\beta}$.

აქედან გამომდინარე, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sin 2\beta}{l\sin\beta}$.

$\sin 2\beta$, l და $\sin\beta$ თავიდანვე დაფიქსირებული სიდიდეებია, ამიტომ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=const.$$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჯოლავა, ზ. მეტრეველი, ნ. მაჯარაშვილი – მათემატიკა, ნაწ. 2, თბილისი, 1991;

2. მათემატიკის ამოცანათა კრებული უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში საკონკურსო გამოცდებისათვის, მ. ი. სკანავის რედაქციით – თბილისი, 1976;

3. Шувалова Э. З., Агафонов Б. Г., Богатырев Г. И. – Повторим математику, Москва , 1969;

4. Шахно К. У. – Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности, Минск, 1969;

5. Ваховский Е. Б. – Задачи по элементарной математике, Москва, 1971;

6. Вересова Е. Е., Денисова Н. С. – Практикум по решению математических задач, Москва, 1979;

7. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И., Федосов Б. В. – Задачи по элементарной математике, Москва , 1973.

Temur Khutsishvili Irakli Vekua Giorgi Kvinikadze

150 THEOREMS AND FORMULAE FOR SOLVING COMPETITIVE PLANIMETRY PROBLEMS

There are 150 theorems and formulae in this textbook. They will help you in solving complex (olympic and exam) planimetry problems. Theorems do not give verbal information completely, but graphics will help you understand them easily.