თ. ხუციშვილი
ნ. თოდუა
ზ. კაპანაძე

ეკონომიკის ამოცანების ამოხსნის მათემატიკური მეთოდები და მოდელირება

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თ. ხუციშვილი, ნ. თოდუა, ზ. კაპანაძე

ეკონომიკის ამოცანების ამოხსნის მათემატიკური მეთოდები და მოდელირება

დამტკიცებულია სტუ-ს
სასწავლო-მეთოდური
საბჭოს მიერ

თბილისი
2003

დამხმარე სახელმძღვანელოში "ეკონომიკის ამოცანების ამოხსნის მათემატიკური მეთოდები და მოდელირება" განხილულია ეკონომიკის ამოცანების ფართო სპექტრი, რომლებშიც გამოყენებულია მათემატიკის მნიშვნელოვანი დიაპაზონი, მათ შორის ანალიზური გეომეტრიის, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის, წრფივი მოდელირების და სხვა მეთოდები. შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამები.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია სტუდენტებისთვის და ეკონომიკის ამოცანებში მათემატიკის გამოყენების საკითხებით დაინტერესებული მკითხველისათვის.

რეცენზენტები: პროფ. ჯ. ჩოგოვაძე,
დოც. მ. კუბლაშვილი

ISBN 99940-14-43-9

შესავალი

თანამედროვე ეკონომიკის არცერთი მეტნაკლებად სერიოზული ამოცანა არ წყდება მათემატიკური მოდელირებისა და კომპიუტერული გამოთვლების გარეშე.

მათემატიკის მეთოდებით აღიწერება, როგორც მაკროეკონომიკური, ისე მიკროეკონომიკური, აგრეთვე საბანკო-საფინანსო და სხვა ლოკალური ეკონომიკური ამოცანები.

მოდელი, როგორც ცნობილია, ეს არის ისეთი მატერიალური ან აზრობრივი ობიექტი, რომელიც შესწავლის პროცესში ცვლის ობიექტ-ორიგინალს ისე, რომ ინარჩუნებს ზოგიერთ, მოცემული გამოკვლევისათვის მნიშვნელოვან თვისებას. მოდელის შექმნის პროცესს მოდელირება ეწოდება. მოდელირება კვლევის ინსტრუმენტია.

მათემატიკური მოდელირება გულისხმობს ობიექტის შესწავლას მოდელით, რომელიც ჩამოყალიბებულია მათემატიკის ენაზე და იყენებს მათემატიკურ მეთოდებს.

მათემატიკური მოდელი შეიძლება ჩამოყალიბდეს (შეიქმნას) რომელიმე სამეცნიერო ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით, რომელიც ღებულობს მათემატიკურ სახეს რაიმე დაკვირვების ან ექსპერიმენტის შემდეგ.

მათემატიკური მოდელები პირობითად შეიძლება დავყოთ რამდენიმე კლასად:

დისკრიპტული მოდელები - ესაა აღმწერი მოდელები, რომელთა დანიშნულებაა პროცესის აღწერა. პროცესები შეიძლება მიეკუთვნებოდნენ ძალზე განსხვავებულ სამეცნიერო სფეროებს, ხოლო მათემატიკური თვალსაზრისით ერთიანდებოდნენ ერთ კლასად.

ოპტიმალური მოდელები გამოიყენება მაშინ, როდესაც საჭიროა პროცესების მართვა (ანუ სხვადასხვა გადაწყვეტილებების მიღება). პროცესის მართვის რეგულირებისათვის საჭიროა რაოდენობრივად შეფასდეს ყოველი მოქმედების შედეგი, რაც ნიშნავს, რომ ცნობილი მიზნის ფუნქცია Φ მოცემული მოდელისათვის მართვის u პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ღებულობს კონკრეტულ რიცხვით მნიშვნელობას. ვღებულობთ მინიმუმის ან მაქსიმუმის ამოცანას დასაშვები მართვის ფარგლებში.

მრავალკრიტერიუმიანი მოდელები ისეთი მოდელებია, სადაც გვაქვს არა ერთი, არამედ რამდენიმე მიზნის ფუნქცია.

თამაშთა მოდელები

აქამდე განხილული კლასები ერთიანდებიან იმით, რომ გადაწყვეტილებას ღებულობდა ერთი სუბიექტი, მაგრამ ხშირად გვხვდება კონფლიქტური სიტუაციები, როდესაც სხვადასხვა მხარეებს აქვთ განსხვავებული ინტერესები. გადაწყვეტილების მიღების პროცესში მონაწილეობს რამდენიმე სუბიექტი განსხვავებული ინტერესებით. მათემატიკურ აპარატს, რომელიც ითვალისწინებს კონფლიქტურ სიტუაციებს ეწოდება თამაშთა თეორია. მოდელები, რომლებშიც ასახულია თამაშთა თეორიის ამოცანები და მიიღება ამ თეორიის მათემატიკური აპარატის გამოყენებით, თამაშთა მოდელებს წარმოადგენენ.

იმიტაციური მოდელირება (Simulation modeling). ყველა წინა კლასის მოდელებში გვქონდა მიზანი (მიზნები), რომელთა მიღწევა ითვლებოდა სასურველად. როცა საქმე გვაქვს რთულ სისტემებთან, ხშირად მიზნის ფუნქცია ზუსტი სახით ჩამოყალიბებულიც კი არ არის. ე.ი. საქმე გვაქვს არა იმდენად ოპტიმიზაციური ამოცანების ამოხსნასთან (თუმცა ესეც გვაქვს), არამედ რთული სისტემის შესწავლასთან, მათი მომავლის პროგნოზირებასთან, რაც დამოკიდებულია მართვის სტრატეგიის შერჩევაზე. იმიტაციური მოდელირების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ რთული სისტემის ფუნქციონირების პროცესი წარმოგვიდგება როგორც გარკვეული ალგორითმი, რომელიც რეალიზებულია კომპიუტერზე.

ამჟამად პროგრამული პაკეტების სახით რეალიზებულია ეკონომიკური პროფილის მრავალი მათემატიკური მოდელი და ამოცანა, რომლებიც ფართოდ არის დანერგილი ამავე პროფილის ფირმებსა და ორგანიზაციებში.

წარმოდგენილ სახელმძღვანელოში განხილულია ეკონომიკის ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანა. მათი გადაწყვეტისათვის ნაჩვენებია მათემატიკური მეთოდების გამოყენების ტექნოლოგია. საკმაოდ თვალნათლივ არის წარმოდგენილი ანალიზური და გრაფიკული მეთოდების გამოყენება დასმული ამოცანების ამოხსნის დროს. ნაჩვენებია აგრეთვე მათემატიკური მოდელების აგების პროცესი და მათი რეალიზაცია კომპიუტერზე.

თავი 1
წრფივი მათემატიკური მოდელები

რამდენიმე ზოგადი ცნება

ბევრი ეკონომიკური ამოცანა დაიყვანება წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე, რომლის ამოხსნის არსი მდგომარეობს უცნობთა ისეთი მნიშვნელობების შერჩევაში, რომლებიც განაპირობებენ წრფივი ფუნქციის მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობის მიღებას, როდესაც ამ უცნობთა მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ წრფივი შეზღუდვების სისტემას.

დავუშვათ, რომ რაიმე ეკონომიკური მაჩვენებელი აღიწერება n ცვლადიანი წრფივი ფუნქციით

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

ანუ

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

ხოლო (1)-ში შემავალი ცვლადები ექვემდებარებიან შემდეგი სახის წრფივ შეზღუდვებს:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (2)$$

რამდენადაც Z წრფივი ფუნქციაა, ამიტომ

$$\frac{\partial Z}{\partial X_j} = c_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

წრფივი ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ შეზღუდვების სისტემით განსაზღვრულ არეში ფუნქციის ექსტრემალური წერტილები არ არსებობს. ექსტრემალური წერტილები შეიძლება არსებობდნენ არის საზღვარზე, მაგრამ საზღვრის წერტილების გამოკვლევა შეუძლებელია, რადგან ფუნქციის კერძო წარმოებულები წარმოადგენენ მუდმივებს. ამიტომ წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოსახსნელად საჭირო გახდა სპეციალური მეთოდების შექმნა.

ზოგადად (1) და (2) ერთად აღებული ქმნიან ეკონომიკური ამოცანის მათემატიკურ მოდელს, რომლის ამონახსნს წარმოადგენს $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ უცნობების მნიშვნელობების ერთობლიობა (ვექტორი), რომელიც აკმაყოფილებს (2) სისტემას და იძლევა Z ფუნქციის მინიმალურ (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას.

წრფივი პროგრამირების ამოცანის დასაშვებ ამონახსნს (გეგმას) წარმოადგენს $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს (2) სისტემას.

თუ (2) სისტემას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს მას თავსებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი არათავსებადი.

გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის განვიხილოთ შემთხვევა როცა n=2.

(2) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(3) სისტემის თითოეული უტოლობა განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეს, რომლის საზღვარიცაა წრფე

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\,, \quad i = 1,2,\cdots,m \qquad (4)$$

ან ნახევარსიბრტყეებს საზღვრებით $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

ვთქვათ (3) სისტემა თავსებადია, მაშინ ნახევარსიბრტყეები, რომლებიც განისაზღვრება (3) უტოლობებით, თანაკვეთაში გვაძლევენ ამოზნექილ დასაშვებ გეგმათა სიმრავლეს. ის

შეიძლება იყოს წერტილი, მონაკვეთი, სხივი, მრავაკუთხედი ან შემოუსაზღვრავი მრავალკუთხა არე.

თუ n=3, მაშინ (2) სისტემა გვაძლევს ნახევარსივრცეების თანაკვეთას, ხოლო ამონახსნების სიმრავლე იქნება დასაშვებ გეგმათა მრავალწახნაგა.

ამრიგად, გეომეტრიულად წრფივი პროგრამირების ამოცანაა მოიძებნოს დასაშვებ გეგმათა მრავალკუთხედის (მრავალწახნაგას) ისეთი წერტილები, რომლებზეც Z ფუნქცია მიიღებს თავის მინიმალურ (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას.

წრფივი ეკონომიკური მოდელების ამოხსნა გრაფიკული მეთოდით

გრაფიკულად იხსნება მხოლოდ შემთხვევა, როცა n=2. ვიპოვოთ

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{5}$$

ფუნქციის მინიმუმი თუ სრულდება (3) პირობები.

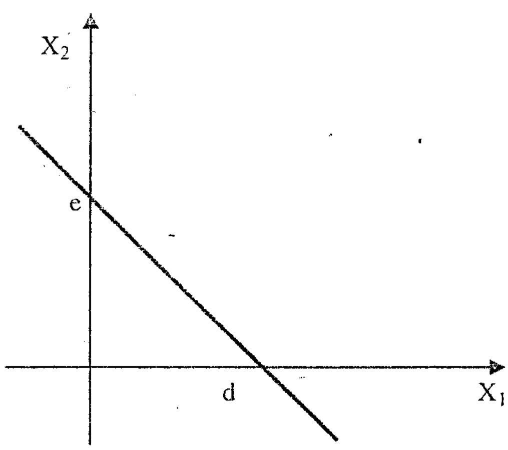
(4) პირობები განსაზღვრავს წრფეებს, ხოლო ფიქსირებული Z=C-თვის (5) არის წრფის ზოგადი განტოლება

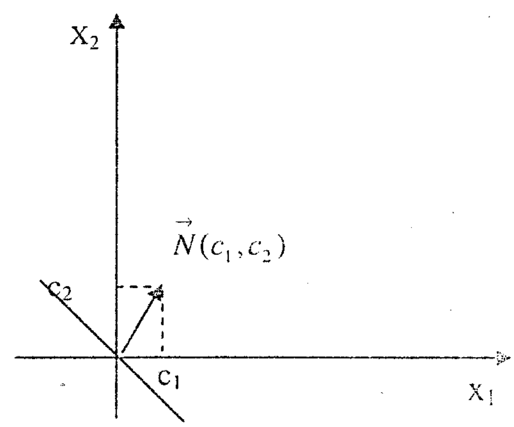
$$c_1x_1 + c_2x_2 = c \tag{6}$$

მისი გრაფიკის ასაგებად მოხერხებულია (6) ზოგადი განტოლება ჩავწეროთ ღერძთა მონაკვეთებში.

$$\frac{x_1}{d} + \frac{x_2}{e} = 1 \quad \text{სადაც} \quad d = \frac{c}{c_1}; \qquad e = \frac{c}{c_1} \tag{7}$$

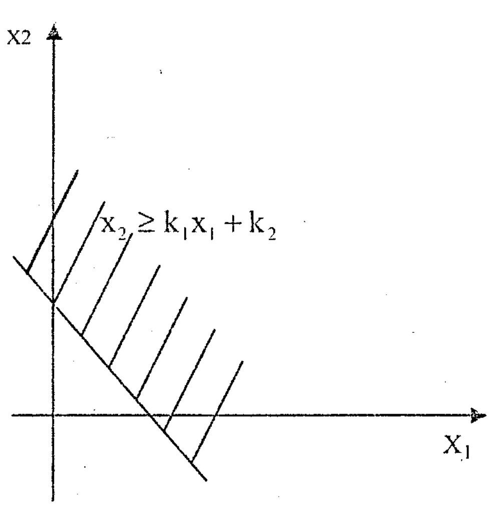
(7) განტოლების გრაფიკი ასე აიგება

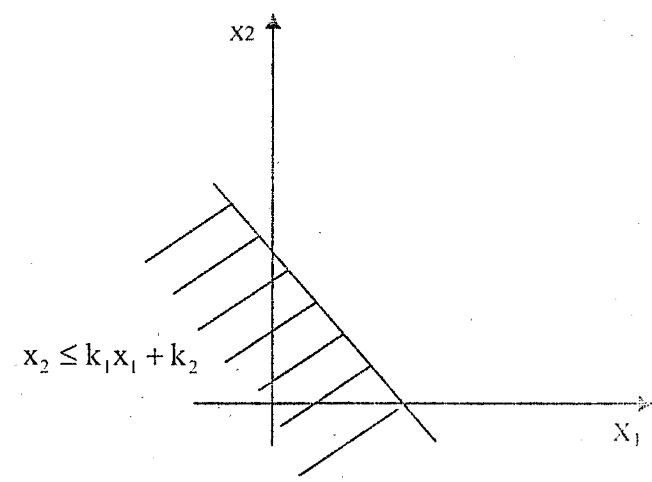




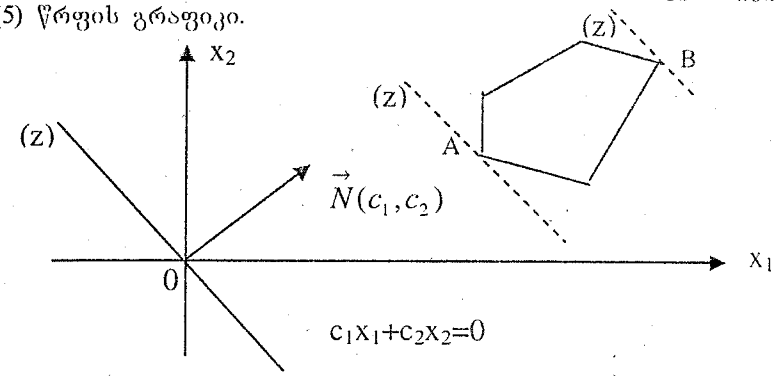
თუ (6) –ში c=0 ე.ი. $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, მაშინ მისი გრაფიკი იქნება $\overline{N} = (c_1 : c_2)$ ნორმალ-ვექტორის მართობული წრფე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე.

ორცვადიან წრფივ უტოლობებს შეესაბამება ნახევარსიბრტყეები. სახელდობრ:





ზემოთთქმულის გათვალისწინებით (3) სისტემისათვის ავაგოთ დასაშვებ გეგმათა მრავალკუთხედი და Z=0 –თვის (5) წრფის გრაფიკი.

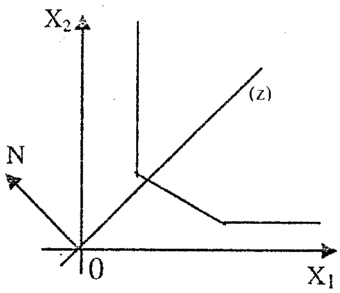


წრფივი პროგრამირების ამოცანა ღებულობს შემდეგი სახის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას: უნდა მოიძებნოს მრავალკუთხედის ისეთი წერტილი, რომელშიც Z ღებულობს უმცირეს (უდიდეს) მნიშვნელობას

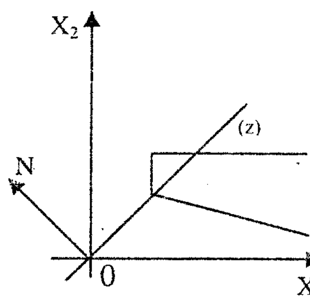
Z-ის ზრდა ნიშნავს Z=0 წრფის (დონის წირის) გადაადგილებას $\vec{N}$ ვექტორის მიმართულებით თავისი თავის პარალელურად.

ნახაზზე მოცემულ შემთხვევაში Z ფუნქციას აქვს, როგორც მინიმუმის წერტილი (A), ასევე მაქსიმუმის წერტილიც (B).

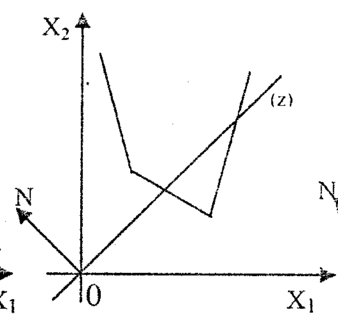
თუ დასაშვებ გეგმათა არე შემოუსაზღვრავია, მაშინ შესაძლებელია Z ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს შემდეგ შემთხვევებს.:



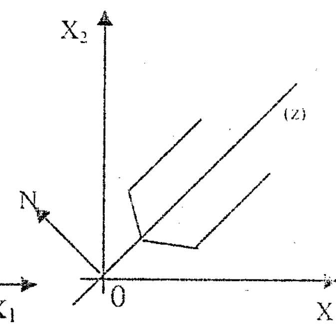
არაა შემოსაზღვრული არც ქვემოდან, არც ზემოდან



არაა შემოსაზღვრული ქვემოდან, შემოსაზღვრულია ზემოდან



შემოსაზღვრულია ქვემოდან



შემოსაზღვრული ზემოდანაც და ქვემოდანაც

ნედლეულის ოპტიმალურად გამოყენების ამოცანის წრფივი მოდელი

განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების ასეთი ამოცანა:

დასამზადებელია P_1 და P_2 ტიპის პროდუქცია. გამოიყენება სამი სახის ნედლეული S_1, S_2 და S_3 შესაბამისად Q_1, Q_2 და Q_3 რაოდენობისა. ვთქვათ, P_1 პროდუქციის დასამზადებლად საჭიროა S_1 ნედლეულის P_{11} ერთეული, S_2-ის P_{21} ერთეული, და S_3 –ის P_{31} ერთეული, ხოლო P_2-ის ერთეულისთვის S_1-ის P_{12} ერთეული, S_2-ის P_{22} ერთეული და S_3-ის P_{32} ერთეული. ვთქვათ, P_1 პროდუქციის ერთეულის რეალიზებით მიღებული მოგება Π_1 ლარია, P_2-თვის Π_2 ლარი.

განვსაზღვროთ რა რაოდენობის P_1 და P_2 პროდუქცია უნდა დავამზადოთ, რათა მივიღოთ მაქსიმალური მოგება.

ეს მონაცემები ჩავწეროთ ცხრილის სახით:

ნედლეულის სახე	ნედლეულის მარაგი	პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად საჭირო ნედლეულის რაოდენობა		მოგება მიღებული პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციით	
		P_1 პროდუქციისათვის	P_2 პროდუქციისათვის	P_1 პროდუქციისათვის	P_2 პროდუქციისათვის
S_1	Q_1	P_{11}	P_{12}	Π_1	Π_2
S_2	Q_2	P_{21}	P_{22}		
S_3	Q_3	P_{31}	P_{32}		

ვთქვათ P_1 პროდუქცია უნდა დამზადდეს X_1 რაოდენობის, P_2 კი X_2 რაოდენობის.

ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ X_1, X_2 პროდუქციის რაოდენობა მოცემული პირობების გათვალისწინებით ისე, რომ რეალიზაციით მივიღოთ მაქსიმალური მოგება. ცხრილიდან ჩანს, რომ S_1 სახის ნედლეული დაიხარჯება $P_{11} X_1 + P_{12} X_2$ რაოდენობით, S_2 ნედლეული $P_{21}X_1 + P_{22}X_2$, ხოლო S_3 კი $P_{31}X_1+P_{32} X_2$ რაოდენობით. ე.ი. მარაგის მოცულობის გათვალისწინებით გვექნება შეზღუდვები:

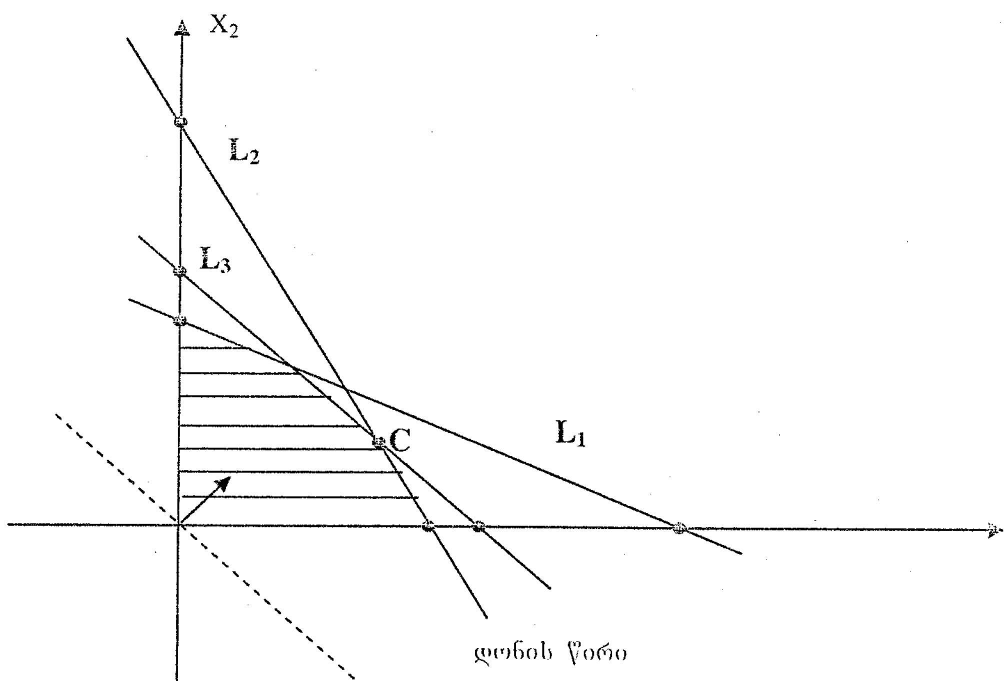
$$\begin{cases} P_{11}X_1 + P_{12}X_2 \le Q_1 \\ P_{21}X_1 + P_{22}X_2 \le Q_2 \\ P_{31}X_1 + P_{32}X_2 \le Q_3 \\ X_1 \ge 0 \qquad X_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (8)$$

მოგება გამოისახება შემდეგი მიზნის ფუნქციით

$$Z = \Pi_1 X_1 + \Pi_2 X_2 \qquad (9)$$

ვიპოვოთ maxZ, თუ დაკმაყოფილებულია (8) პირობები.

გრაფიკული მეთოდით ამოცანის ამოსახსნელად საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ (8) სისტემით განსაზღვრული დასაშვებ გეგმათა სიმრავლე, რომელსაც ჩვენი პირობების გათვალისწინებით ექნება მრავალკუთხედის სახე.



ავაგოთ მიზნის (9) ფუნქციის დონის წირი Z=0 –თვის ანუ $\Pi_1 X_1 + \Pi_2 X_2=0$ ფუნქციის გრაფიკი. ეს იქნება წრფე, რომლის გადაადგილებით მისი ნორმალის მიმართულებით (თავისი თავის პარალელურად) მიიღება სხვადასხვა დონის წირები (განსხვავებული Z–ის მნიშვნელობებისათვის), გეომეტრიულად Z–ის მაქსიმიზაციას შეესაბამება მისი მოძრაობა "ზევით". ასეთი მოძრაობისას დასაშვებ გეგმათა სიმრავლის უკანასკნელი წერტილი, რომელიც დონის წირზე მდებარეობს, იქნება C წერტილი.

ამრიგად (L_2) და (L_3) წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებისათვის (9) მიზნის ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას (8) შეზღუდვების გათვალისწინებით.

C წერტილის კოორდინატების მოსაძებნად უნდა ამოიხსნას სისტემა:

$$\begin{cases} P_{21}X_1 + P_{22}X_2 = Q_2 \quad (L_2) \\ P_{31}X_1 + P_{32}X_2 = Q_3 \quad (L_3) \end{cases}$$

ვთქვათ მისი ამონახსნია $(X_1^*; X_2^*)$, მაშინ ვღებულობთ $\max Z = \Pi_1 \cdot X_1^* + \Pi_2 \cdot X_2^*$ ლარი. ე.ი. უნდა დამზადდეს X_1^* ცალი P_1 ტიპის და X_2^* ცალი P_2 ტიპის პროდუქცია, რომ მივიღოთ მაქსიმალური მოგება.

ამოცანა 1.1. ვთქვათ გვინდა დავამზადოთ რკინა-ბეტონის კოლონები (p_1) და პანელები (p_2). გვაქვს ნედლეულის მარაგი: ცემენტი (S_1), ინერტული მასალები (S_2) და არმატურა (S_3), შესაბამისად Q_1, Q_2, და Q_3 პირობითი ერთეულის რაოდენობით. დავუშვათ ერთი კოლონის დასამზადებლად საჭიროა ცემენტის P_{11}, ინერტული მასალების P_{21} და არმატურის P_{31} პირობითი ერთეული, ხოლო პანელისთვის შესაბამისად ცემენტის P_{12}, ინერტული მასალების P_{22} და არმატურის P_{32} რაოდენობა. რა რაოდენობის კოლონები და პანელები დავამზადოთ, რომ მივიღოთ მაქსიმალური მოგება, თუ ვიცით, რომ 1 კოლონის რეალიზაციით მიღებული მოგება Π_1 ლარია, ხოლო 1 პანელის რეალიზაციით Π_2 ლარი. ამოვხსნათ ამოცანა გრაფიკული მეთოდით.

ამოცანა 1.1.-ის ვარიანტები

№	ნედლეულის სახე	ნედლეულის მარაგი	პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად საჭირო ნედლეულის რაოდენობა		მოგება პროდუქციის ერთეულისაგან	
			კოლონისათვის P_1	პანელისათვის P_2	კოლონისათვის	პანელისათვის
1	2	3	4	5	6	7
1	ცემენტი (S_1) ინერტული მასალები (S_2) არმატურა (S_3)	Q_1=10 Q_2=10 Q_3=18	P_{11}=1 P_{21}=4 P_{31}= 2.8	P_{12}=2 P_{22}=1 P_{32}=3	Π_1=20	Π_2=30
2	S_1 S_2 S_3	12 12 10	2 3 2.2	2.6 2 2.1	15	20
3	S_1 S_2 S_3	15 15 12	3 5 3.4	5.3 3 3.2	10	15

1	2	3	4	5	6	7
4	S_1	18	3	6	10	20
	S_2	18	6	3		
	S_3	12	3.6	3.8		
5	S_1	20	4	5	20	10
	S_2	20	5	4		
	S_3	24	3.6	5.6		
6	S_1	30	3	4	10	20
	S_2	30	5	3		
	S_3	24	3.8	4.5		
7	S_1	40	4	5	30	50
	S_2	40	5	4		
	S_3	32	3.6	5.5		
8	S_1	50	5	6.5	30	40
	S_2	50	7	6		
	S_3	56	4.8	4		
9	S_1	60	6	7	20	25
	S_2	60	12	4		
	S_3	30	5	5.2		
10	S_1	66	6.6	8	50	30
	S_2	66	11	3		
	S_3	50	7	5		
11	S_1	70	7	8	30	45
	S_2	70	10	4		
	S_3	50	7.8	6		
12	S_1	77	7	8	20	50
	S_2	77	11	4		
	S_3	80	8	7		
13	S_1	80	8	10	25	15
	S_2	80	10	7		
	S_3	48	5.8	8		
14	S_1	88	2.5	10	50	60
	S_2	88	8	8		
	S_3	30	6	9		
15	S_1	90	9	18	60	50
	S_2	90	18	9		
	S_3	54	10	12		
16	S_1	95	10	20	70	60
	S_2	95	20	10		
	S_3	60	12	14		
17	S_1	100	10	25	50	65
	S_2	100	25	10		
	S_3	35	14	13		
18	S_1	110	11	20	70	80
	S_2	110	20	11		
	S_3	36	6	15		
19	S_1	120	12	20	100	75
	S_2	120	20	12		
	S_3	50	7	15		
20	S_1	140	14	24	80	50
	S_2	140	20	16		
	S_3	60	12	20		

ნარევის შედგენის მოდელი

ამოცანა 1.2. ვთქვათ ბუნებრივი (P_1) და ხელოვნური (P_2) საკვებისათვის უნდა შევადგინოთ ნარევი. ვიცით, რომ ნარევში უნდა იყოს ცილების (S_1) არანაკლებ Q_1 რაოდენობისა, სახამებლის (S_2) არანაკლებ Q_2 რაოდენობისა და მინერალური ნივთიერებების (S_3) არანაკლებ Q_3 რაოდენობისა. ვთქვათ ბუნებრივი საკვების

ერთეული შეიცავს ცილების P_{11} რაოდენობის, სახამებლის P_{21} და მინერალური ნივთიერებების P_{31} რაოდენობას, ხოლო ხელოვნური საკვები შესაბამისად ცილების P_{12}, სახამებლის P_{22}, მინერალების P_{32} რაოდენობას.

როგორი პროპორციით შევადგინოთ ნარევი (ე.ი. რა რაოდენობით ავიღოთ ბუნებრივი და რა რაოდენობით ხელოვნური საკვები) ისე, რომ ის ცილების, სახამებლისა და მინერალების შემცველობის მინიმუმებსაც აკმაყოფილებდეს და დანახარჯების რაოდენობა მინიმალური იყოს, თუ ბუნებრივი საკვების 1 ერთეული Π_1 ლარი ღირს, ხოლო ხელოვნურისა Π_2 ლარი? ამოვხსნათ ამოცანა გრაფიკული მეთოდით.

ეს მონაცემები წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით:

ნივთიერების სახეები	ნარევში ნივთიერების მინიმალური რაოდენობა	საკვების ერთეულში ნივთიერების ერთეულის რაოდენობა		საკვების ერთეულის ღირებულება	
		ბუნებრივი P_1	ხელოვნური P_2	ბუნებრივი	ხელოვნური
ცილები (S_1) სახამებელი (S_2) მინერალები (S_3)	Q_1 Q_2 Q_3	P_{11} P_{21} P_{31}	P_{12} P_{22} P_{32}	Π_1 ლარი	Π_2 ლარი

ვთქვათ, ნარევის შედგენისას უნდა შევურიოთ ბუნებრივი საკვების X_1 ერთეული, და ხელოვნურის X_2 ერთეული, მაშინ ნივთიერებათა მინიმუმის შემცველობის მოთხოვნის დაკმაყოფილების პირობა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} P_{11}X_1 + P_{12}X_2 \ge Q_1 \\ P_{21}X_1 + P_{22}X_2 \ge Q_2 \\ P_{31}X_1 + P_{32}X_2 \ge Q_3 \\ X_1 \ge 0 \quad ; \quad X_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (10)$$

მივიღეთ დასაშვები გეგმების სიმრავლე.

ნარევის ღირებულება, გამოსახული ლარებში, ცხადია იქნება:

$$Z = \Pi_1 X_1 + \Pi_2 X_2 \qquad (11)$$

(11) არის მიზნის ფუნქცია.

საბოლოოდ ამოცანის მათემატიკური მოდელი ასე ჩამოყალიბდება:

ვიპოვოთ minZ, თუ კმაყოფილდება (10) პირობები.

(1.2) ამოცანა თავისი შინაარსით (1.1) ამოცანის ანალოგიურია, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ (8)-ში და (10)-ში პირველ სამ შეზღუდვაში უტოლობის ნიშნებს განსხვავებული შინაარსი აქვთ, ხოლო (1.1) ამოცანაში მოთხოვნილია მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის მოძებნა, ხოლო (1.2) კი მინიმუმის.

ამოცანა 1.2.-ის ვარიანტები

№	ნივთიერების სახეები	ნარევში ნივთიერებების მინიმალური რაოდენობა	საკვების ერთეულში ნივთიერების ერთეულის რაოდენობა		საკვების ერთეულის ღირებულება	
			ბუნებრივი	ხელოვნური	ბუნებრივი	ხელოვნური
1	2	3	4	5	6	7
1	ცილები (S_1) სახამებელი (S_2) მინერალები (S_3)	$Q_1=12$ $Q_2=10$ $Q_3=15$	$P_{11}=3$ $P_{21}=1$ $P_{31}1$	$P_{12}=1$ $P_{22}=1$ $P_{32}=3$	$\Pi_1=2$	$\Pi_2=3$
2	S_1 S_2 S_3	16 8 20	4 1 1	1 1 4	3	2
3	S_1 S_2 S_3	20 10 25	5 1 1	1 1 5	4	5
4	S_1 S_2 S_3	24 10 25	6 1 1	1 1 6	5	6
5	S_1 S_2 S_3	18 10 18	3 2 1	1 1 3	7	9
6	S_1 S_2 S_3	12 10 16	4 2 1	1 1 4	9	7
7	S_1 S_2 S_3	20 16 25	5 2 1	1 1 5	6	8
8	S_1 S_2 S_3	24 12 18	6 2 1	1 1 6	8	6
9	S_1 S_2 S_3	18 16 12	3 2 1	2 2 3	10	6
10	S_1 S_2 S_3	30 25 37	8 3 3	3 3 8	8	10
11	S_1 S_2 S_3	40 27 50	6 3 3	3 3 6	8	10
12	S_1 S_2 S_3	50 21 60	12 3 3	3 3 12	10	8
13	S_1 S_2 S_3	60 24 25	15 3 3	3 3 15	12	6
14	S_1 S_2 S_3	45 25 45	7 5 3	3 3 7	6	12

1	2	3	4	5	6	7
15	S_1 S_2 S_3	30 24 45	10 6 3	3 3 10	12	8
16	S_1 S_2 S_3	50 40 65	13 5 3	3 3 13	8	12
17	S_1 S_2 S_3	60 30 51	18 5 3	3 3 18	12	10
18	S_1 S_2 S_3	30 24 40	15 6 4	2 4 10	10	12
19	S_1 S_2 S_3	45 30 40	20 5 4	3 5 20	14	7
20	S_1 S_2 S_3	32 30 48	16 6 2	2 5 16	7	14

თავი 2
წრფივი მათემატიკური მოდელების ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდით

სიმპლექს-მეთოდის არსი

სიმპლექს-მეთოდი წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდია. იგი პირველად გამოქვეყნდა დანციგის შრომებში 1951 წ.

სიმპლექს-მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ

$$z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad (1)$$

ფუნქციის მინიმუმი შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (2)$$

ვთქვათ (2) სისტემის კოეფიციენტების მატრიცის რანგია r, მაშინ გაუს-ჟორდანის მეთოდის გამოყენებით (2) მიიყვანება ასეთ სახეზე:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \qquad x_2 + \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_r + \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n}x_n = \beta_r \end{cases} \qquad (3)$$

(ზოგადობის შეუზღუდავად მივიღოთ, რომ ერთეულოვან მატრიცას შეესაბამება პირველი r ცვლადი). $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ცვლადებს ვუწოდოთ საბაზისო ცვლადები, ხოლო $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ცვლადებს კი თავისუფალი ცვლადები. საბაზისო ცვლადები შეიძლება გამოსახული იყოს თავისუფალი ცვლადებით. მათივე საშუალებით შეიძლება გამოსახული იქნეს აგრეთვე მიზნის Z ფუნქციაც.

$$z = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n \quad (4)$$

(3) სისტემის ამონახსნს, რომელშიც თავისუფალი ცვლადები ნულებია, ხოლო საბაზისო ცვლადები კი გამოითვლება (3)-დან, (ამ შემთხვევაში $x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_r = \beta_r$) ეწოდება საბაზისო ამონახსნები.

საბაზისო ამონახსნი შეესაბამება (3) სისტემით განსაზღვრულ დასაშვებ ამონახსნთა (დასაშვებ გეგმათა) “მრავალკუთხედის” წვეროს და აქვს სახე:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 0, \ldots, 0)$$

ანუ (5)

$$x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_r = \beta_r, x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$$

ამ ამონახსნისათვის (4) მიზნის ფუნქციას ექნება მნიშვნელობა

$$Z = \gamma_0$$

სიმპლექს-მეთოდის იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ ერთი საბაზისო ამონახსნიდან გადავიდეთ მეორე საბაზისო ამონახსნზე ისე, რომ Z ფუნქციის მნიშვნელობა შემცირდეს (ან უკიდურეს შემთხვევაში არ გაიზარდოს მაინც). ასეთი მოქმედებების თანმიმდევრულად შესრულებისას მივდივართ ოპტიმალურ ამონახსნამდე ანუ ვღებულობთ Z ფუნქციის გლობალურ მინიმუმს (ან ვასაბუთებთ, რომ Z ფუნქციას (2) შეზღუდვების შემთხვევაში მინიმუმი არ გააჩნია)

განვიხილოთ სიმპლექს-მეთოდით ერთი საბაზისო ამონახსნიდან მეორეზე გადასვლის მექანიზმი. (3) სისტემა ასეთი სახით გადავწეროთ:

$$
\begin{cases}
x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n) \\
x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r = \beta_r - (\alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n}x_n) \\
x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n
\end{cases}
\tag{6}
$$

აქ ვიგულისხმოთ, რომ ყველა $\beta_i \ge 0$, I=1,2,…r. ახალ საბაზისო ამონახსნზე გადასვლა (ანუ ამონახსნთა მრავალკუთხედის ახალ წვეროზე გადასვლა). ხდება (5) ამონახსნიდან რომელიმე საბაზისო ცვლადის შეცვლით თავისუფალი ცვლადების საშუალებით ისე, რომ ეს თავისუფალი ცვლადი ხდება საბაზისო, ხოლო ყოფილი საბაზისო ცვლადი კი ხდება თავისუფალი ცვლადი (ე.ი. ხდება ჩანაცვლება ცვლადებს შორის). ეს პროცესი ისე უნდა მოხდეს, რომ Z ფუნქციის მნიშვნელობა შემცირდეს (არ გაიზარდოს მაინც).

Z-ის (4) ჩანაწერში თავისუფალი ცვლადების კოეფიციენტებს შორის მოვძებნოთ უარყოფითი. თუ ასეთი არ მოიძებნა, მაშინ (5) ამონახსნი ყოფილა ოპტიმალური, რადგან თავისუფალი ცვლადები უარყოფით მნიშვნელობებს ვერ მიიღებენ (7) შეზღუდვების გამო, მაშინ კი Z უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს $x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ მნიშვნელობებისათვის და $\min Z = \gamma_0$. თუ (4)-ში თავისუფალი ცვლადების კოეფიციენტებიდან რამდენიმე უარყოფითია, მაშინ მათ შორის ნებისმიერი შეიძლება შეირჩეს, რაც შედეგზე გავლენას არ ახდენს. ასეთ შემთხვევაში ჩაწერილი Z ფუნქცია კლებულობს x_j ცვლადის (x_j შერჩეული უარყოფითკოეფიციენტებიანი თავისუფალი ცვლადია) ზრდასთან ერთად, მაგრამ x_j-ის გაზრდა შეიძლება ვიდრე კმაყოფილდება (6) პირობები ანუ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_r \ge 0$ უტოლობები.

იმისათვის, რომ ეს პირობები არ დაირღვეს (7) სისტემაში კოეფიციენტების მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამის $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{rj}$ კოეფიციენტებს შორის შევარჩიოთ უარყოფითები. ვთქვათ ეს კოეფიციენტებია $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{kj}\ (k \le r)$ (აქ ზოგადობის შეუზღუდავად ასეთ კოეფიციენტებად ვიგულისხმეთ პირველ k განტოლებაში მოცემული კოეფიციენტები) როდესაც x_j იზრდება, მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ცვლადები მცირდება და მათ შორის პირველად ის ცვლადი ხდება ნულის ტოლი, რომლისთვისაც $\frac{\beta_p}{|\alpha_{pj}|}$ შეფარდება უმცირესი იქნება (p=1,2,...,k) ამრიგად $\gamma_j < 0$ თვის შეირჩევა x_ℓ.

x_ℓ ცვლადი გახდება თავისუფალი, ხოლო x_j-კი საბაზისო ცვლადი. ამრიგად საბაზისო ცვლადები იქნება $x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \ldots, x_r, x_j$, ხოლო თავისუფალი ცვლადები კი $x_\ell, x_{r+1}, x_{r+2} \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

ამ ეტაპზე ჩვენი მიზანია ახალი ცვლადების საშუალებით გამოვსახოთ როგორც მიზნის Z ფუნქცია, ასევე ახალი საბაზისო ცვლადები.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \beta_1^* + \alpha_{1\ell}^* x_\ell + \alpha_{1,r+1}^* x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,n}^* x_n \\
x_2 &= \beta_2^* + \alpha_{2\ell}^* x_\ell + \alpha_{2,r+1}^* x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2,n}^* x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{\ell-1} &= \beta_{\ell-1}^* + \alpha_{\ell-1,\ell}^* x_\ell + \alpha_{\ell-1,r+1}^* x_{r+1} + \ldots + \alpha_{\ell-1,n}^* x_n \\
x_{\ell+1} &= \beta_{\ell+1}^* + \alpha_{\ell+1,\ell}^* x_\ell + \alpha_{\ell+1,r+1}^* x_{r+1} + \ldots + \alpha_{\ell+1,n}^* x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r &= \beta_r^* + \alpha_{r\ell}^* x_\ell + \alpha_{r,r+1}^* x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n}^* x_n \\
x_j &= \beta_j^* + \alpha_{j\ell}^* x_\ell + \alpha_{j,r+1}^* x_{r+1} + \ldots + \alpha_{j,n}^* x_n
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ხოლო (4) მიზნის ფუნქცია კი ასე ჩაიწერება

$$Z=\gamma_0^*+\gamma_\ell^* x_\ell+\gamma_{r+1}^* x_{r+1}+\ldots+\gamma_{j-1}^* x_{j-1}+\gamma_{j+1}^* x_{j+1}+\ldots+\gamma_n^* x_n \qquad (8)$$

თუ (8) ჯამში γ^* კოეფიციენტები დადებითია, მაშინ საბაზისო ამონახსნი

$$\left(\beta_1^*,\beta_2^*,\ldots,\beta_{\ell-1}^*;0;\beta_{\ell+1}^*,\ldots,\beta_r^*,0,0\ldots,\beta_j^*,0,\ldots,0\right) \text{ ანუ}$$

$$(x_1=\beta_1^*;x_2=\beta_2^*,\ldots,x_{\ell-1}=\beta_{\ell-1}^*;\quad x_\ell=0;\ x_{\ell+1}=\beta_{\ell+1}^*,\ldots,x_r=\beta_r^*;\ x_{r+1}=0,\ldots,x_j=\beta_j^*;0,\ldots,0)$$

ოპტიმალური ამონახსნია, თუ ყველა დადებითი არაა, მაშინ γ^* კოეფიციენტებს შორის შევარჩევთ უარყოფითს და მთელს ზემოთმოყვანილ პროცედურას გავიმეორებთ. ეს პროცესი გაგრძელდება ვიდრე ა) (8) ჯამში ყველა γ^* კოეფიციენტი (გარდა შესაძლოა γ_0^* -ისა) დადებითი არ იქნება და ასეთ შემთხვევაში $\min Z=\gamma_0^*$ ე.ი. გლობალური მინიმუმი ნაპოვნია. ბ) შესაძლებელია რომელიმე x_q ცვლადისათვის (8) –დან $\gamma_q^*<0$, ხოლო x_q -ს შესაბამისი ყველა კოეფიციენტი (7) –დან დადებითია, ასეთ შემთხვევაში x_q -ს გაზრდა შეიძლება უსასრულოდ, ისე რომ პირობები (7) –დან არ დაირღვეს. აქედან გამოდის, რომ Z ფუნქციას მინიმუმი არ გააჩნია.

ამრიგად სიმპლექს-მეთოდის საშუალებით ან ვპოულობთ minZ ან ვადგენთ, რომ მას მინიმუმი არ აქვს.

რეალური ამოცანების ამოხსნისას (2) სისტემაში ხშირად გვაქვს უტოლობები.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m \end{cases} \qquad (9)$$

ასეთ შემთხვევაში შემოგვაქვს ფიქტიური ცვლადები $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$, რის შემდეგაც (10) უტოლობათა სისტემა დებულობს (2) სახეს

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1} \qquad\qquad\qquad =b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+ \qquad\quad x_{n+2} \qquad =b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+ \qquad\qquad\quad x_{n+m}=b_m \end{array} \qquad (10)$$

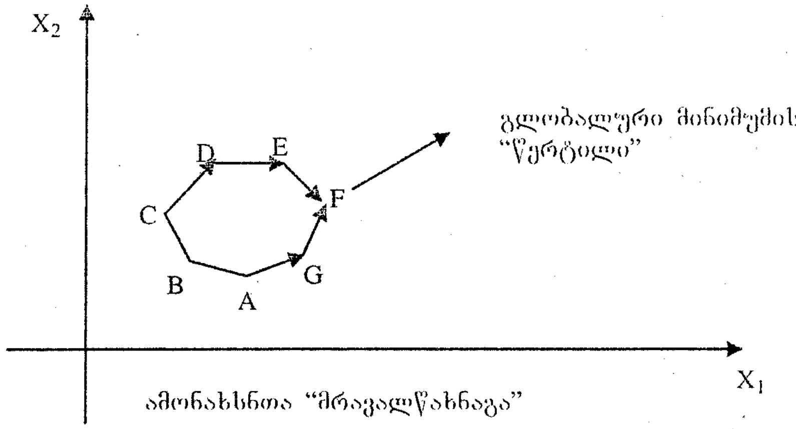
ამის შემდეგ სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმით ხდება Z ფუნქციის მინიმიზაცია.

იშვიათ შემთხვევაში შესაძლებელია ე.წ. “ჩაციკლვა” ანუ რაღაც ეტაპზე უკვე გავლილ საბაზისო ამონახსნზე დაბრუნება. ამ დროს საჭიროა სხვა $\gamma_j<0$ კოეფიციენტის შერჩევა საბაზისო ცვლადების შესაცვლელად.

სიმპლექს-მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

(2) შეზღუდვები განსაზღვრავენ “მრავალწახნაგას”, რომლის წვეროებსაც შეესაბამება საბაზისო ამონახსნები. Z ფუნქციის მინიმუმის მოძებნა შეიძლებოდა ყველა წვეროს გადარჩევით, მაგრამ საკმაოდ დიდი m და n მნიშვნელობისათვის წვეროების რაოდენობა ძალიან დიდია და გამოთვლების ჩატარება მეტად შრომატევადი საქმეა. სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმი საშუალებას გვაძლევს გადავიდეთ ერთი წვეროდან მეორეზე (ანუ ერთი საბაზო ამონახსნიდან მეორეზე) ისე, რომ Z მნიშვნელობა შემცირდეს (ან არ გაიზარდოს მაინც).

გლობალური მინიმუმისაკენ "სვლის მარშრუტი" დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელი იქნება პირველი საბაზისო ამონახსნი.



ვთქვათ გლობალური მინიმუმის "წერტილია" F, მაშინ თუ პირველ წვეროდ A წერტილი შეირჩა, სიმპლექს-მეთოდის "გზა" ასეთი იქნება A→G→F, ხოლო პირველი C წერტილის შემთხვევაში C→D→E→F. "გზათა" მრავალვარიანტობა დაკავშირებულია Z ფუნქციის (4) წარმოდგენაში უარყოფით γ_j კოეფიციენტებს შორის ერთ-ერთის შერჩევის თავისუფალ არჩევანზე.

განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა

ვიპოვოთ minZ, თუ

$$Z = 4x_1 + 6x_2 \qquad (11)$$

და
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (11^*)$$

უტოლობები (11^*) სისტემაში შევცვალოთ განტოლებებით.

ამისათვის შემოვიტანოთ ფიქტიური ცვლადები x_3, x_4 და x_5

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ x_1 + 6x_2 - x_5 = 12 \\ x_1 \ge 0; \; i = 1,2,\dots,5 \end{cases} \qquad (12)$$

მიღებული მატრიცის რანგი 3-ის ტოლია, ამიტომ (4) სისტემა გაუს-ჟორდანის მეთოდით შეიძლება მიყვანილი იქნას შემდეგ სახეზე:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + 1.5x_4 - 0.5x_5 \\ x_2 = 1 - 0.25x_4 + 0.25x_5 \\ x_3 = 10 + 4.25x_4 - 1.25x_5 \\ x_i \ge 0; \quad i = 1,2,\dots,5 \end{cases} \qquad (13)$$

ჩავსვამთ რა (13)-ს (11)-ში, Z ფუნქცია გამოისახება თავისუფალი ცვლადებით

$$Z = 4x_1 + 6x_2 = 30 + 4.5x_4 - 0.5x_5 \quad (14)$$

თავისუფალი ცვლადები x_4 და x_5 გავანულოთ, მაშინ საბაზისო ამონახსნს ექნება სახე (6; 1; 10; 0; 0).

(14) წარმოდგენაში x_5-ის კოეფიციენტი $-0.5<0$ ე.ი. x_5 –ის გაზრდით ($x_4=0$ შემთხვევაში) Z ფუნქციის მნიშვნელობები შემცირდება, მაგრამ x_5 –ის ზრდისას (13)-ში შეიძლება დაირღვეს $x_1 \ge 0$ და $x_3 \ge 0$ პირობები, რადგან x_5-ის შესაბამისი კოეფიციენტები უარყოფითია. ამრიგად,

(13) სისტემის I და III განტოლებებიდან გამომდინარე x_1 და x_3 საბაზისო ცვლადებიდან უნდა შეირჩეს ის, რომელიც x_5 –ის ზრდის შედეგად პირველი ხდება ნულის ტოლია, ამისათვის გამოვთვალოთ:

$$\min\left\{\frac{6}{|-0.5|};\ \frac{10}{|-1.25|}\right\} = \min\{12;\ 8\} = 8$$

რის შემდეგაც შევარჩევთ x_3 საბაზისო ცვლადს, რომელიც უნდა გავხადოთ თავისუფალი ცვლადი, ხოლო x_5 კი გახდება საბაზისო ცვლადი ე.ი. მოხდება ახალ საბაზისო ამონახსნზე გადასვლა. ეს პროცესი ასე განვახორციელოთ: (13)-ის III განტოლებიდან:

$$x_5=8-0.8x_3+3.4\,x_4.$$

x_5-ის გამოსახულება შევიტანოთ (13) და (14) განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 0.4x_3 - 0.2x_4 \\ x_2 = 3 - 0.2x_3 + 0.6x_4 \\ x_5 = 8 - 0.8x_3 + 3.4x_4 \\ x_i \ge 0; \quad i = 1,2,\ldots,5 \end{cases} \quad (15)$$

$$Z = 26 + 0.4x_3 + 2.8x_4 \quad (16)$$

Z –ის (16) წარმოდგენაში თავისუფალი ცვლადების ყველა კოეფიციენტი დადებითია. ეს ნიშნავს, რომ დასაშვები მნიშვნელობებისათვის ($x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$) Z ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს $x_3 = 0$; $x_4 = 0$-ის დროს minZ=26. შესაბამისად (15)-დან $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_5 = 8$; საბაზისო ამონახსნია (2; 3; 0; 0; 8).

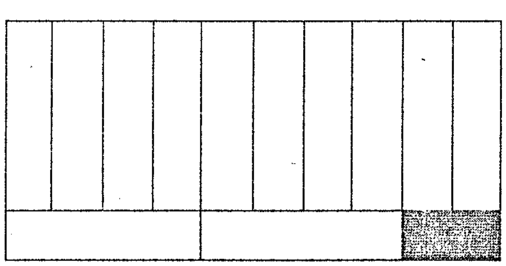
რაციონალური გამოჭრის ამოცანა

რაციონალური გამოჭრის ამოცანის მიზანია “დიდი ზომის” ფიგურებიდან გამოვჭრათ “პატარა ზომის” საჭირო რაოდენობის ფიგურები ისე, რომ მასალის ხარჯი მინიმალური იყვეს.

განვიხილოთ მართკუთხედის ფორმის ფიგურების შემთხვევა.

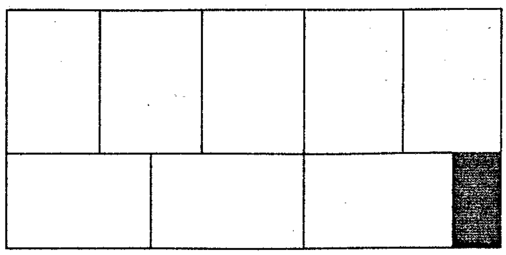
ვთქვათ, მოცემულია მართკუთხა ფურცლები ზომებით a X b. უნდა გამოიჭრას m რაოდენობის A ტიპის მართკუთხა გამონაჭერი ზომებით a_1 X b_1 და n რაოდენობის B ტიპის მართკუთხა გამონაჭერი ზომებით a_2Xb_2. შევარჩიოთ ფურცლის დაჭრის 3 ვარიანტი და შევადგინოთ გეგმა, რომლის მიხედვითაც გამოიჭრება საჭირო რაოდენობისა და ასორტიმენტის გამონაჭერი, ხოლო მასალის დანახარჯი მინიმალური იქნება.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a = 5$; $b = 10$; $a_1 = 4$; $b_1 = 1$; $a_2 = 2$; $b_2 = 3$; ; m=1600; $n = 1000$ შევადგინოთ ფურცლის დაჭრის 3 ვარიანტი:



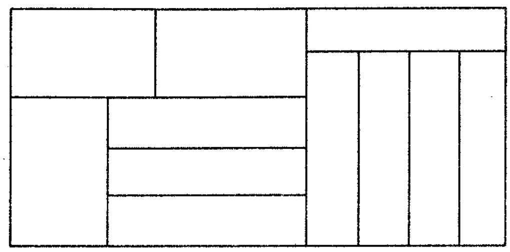
1 ვარიანტი

A ტიპის 12 გამონაჭერი
B ტიპის 0 გამონაჭერი



2 ვარიანტი

A ტიპის 0 გამონაჭერი
B ტიპის 8 გამონაჭერი



3 ვარიანტი

A ტიპის 8 გამონაჭერი
B ტიპის 3 გამონაჭერი

ვთქვათ, 1 ვარიანტის მიხედვით უნდა დაიჭრას x_1 რაოდენობის ფურცელი, 2 ვარიანტის მიხედვით x_2 და 3 ვარიანტის – x_3 რაოდენობის ფურცელი. (ჩვენი მიზანია მათი განსაზღვრა).

მიზნის ფუნქციას, რომლის მინიმიზაციასაც ვაპირებთ ექნება სახე:

$$Z= x_1+x_2+ x_3$$

თუ x_1 რაოდენობის ფურცელი დავჭერით 1 ვარიანტის მიხედვით, მაშინ მიიღება A ტიპის $12x_1$ გამონაჭერი. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ რომ A ტიპის გამონაჭრების საერთო რაოდენობა იქნება:

$$12x_1+0x_2+8x_3$$

ცხადია $x_i \geq 0;\ i=1,2,3$

B ტიპის გამონაჭრების საერთო რაოდენობა იქნება:

$$0x_1+8x_2+3x_3$$

საბოლოოდ მივიღებთ ამოცანის მათემატიკურ მოდელს: ვიპოვოთ minZ, თუ

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \qquad (17)$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 0x_2 + 8x_3 = 1600 \\ 0x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 1000 \\ x_i \geq 0;\ i = 1,2,3 \end{cases} \qquad (18)$$

ამოცანის სიმპლექს მეთოდით ამოსახსნელად (18) პირობები ასე გადავწეროთ:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1600}{12} - \dfrac{8}{12}x_3 \\ x_2 = \dfrac{1000}{8} - \dfrac{3}{8}x_3 \\ x_i \geq 0;\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} x_1 = 133.3 - 0.67x_3 \\ x_2 = 125 - 0.375x_3 \\ x_i \geq 0;\ i = 1,2,3 \end{cases} \qquad (19)$$

x_1 და x_2 საბაზისო ცვლადებია, x_3 –თავისუფალი ცვლადია.

გამოვსახოთ თავისუფალი x_3 ცვლადით მიზნის (18) ფუნქცია

$$Z=133.3-0.67x_3+125-0.375x_3+x_3=258.3-0.045x_3$$

$$Z=258.3-0.045x_3 \qquad (20)$$

x_3-ის ზრდა ამცირებს Z-ის მნიშვნელობას (რადგან მისი კოეფიციენტი უარყოფითია), მაგრამ x_3-ის ზრდას "აფერხებს" (19) პირობები, რადგან შესაძლებელია რომელიმე საბაზისო ცვლადი უარყოფითი გახდეს. დავადგინოთ x_3-ის ზრდა რომელ საბაზისო ცვლადს ანულებს პირველად.

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. (19) სისტემა ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_1 x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_2 x_3 \end{cases} \quad \alpha_1 < 0;\ \alpha_2 < 0$$

მაშინ პირველად განულებადი საბაზისო ცვლადის დასადგენად უნდა გამოვთვალოთ $\min\left\{\frac{\beta_1}{|\alpha_1|};\ \frac{\beta_2}{|\alpha_2|}\right\}$ თუ $\frac{\beta_1}{|\alpha_1|}<\frac{\beta_2}{|\alpha_2|}$, პირველად განულდება x_1, წინააღმდეგ შემთხვევაში x_2.

ჩვენს მოდელში $\frac{133.3}{|-0.67|}<\frac{125}{|-0.375|}$, ამიტომ x_3 ცვლადი გახდება საბაზისო, ხოლო x_1 თავისუფალი. ჩავატაროთ ეს პროცედურა: (19) სისტემა ასე გარდავქმნათ $0.67x_3 \approx 133.3-x_1$ ანუ $x_3=199-1.49x_1$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (19) –ის II განტოლებაში $x_2 \approx 125-0.375(199-1.49x_1)$. აქედან $x_2 \approx 50.37+0.56x_1$

გამოვსახოთ ახლა თავისუფალი ცვლადით მიზნის (20) ფუნქცია

$$Z \approx 258.3-0.045(199-1.49x_1) \approx 249.37+0.067x_1 \quad (21)$$

შეზღუდვებს ექნება სახე

$$\begin{cases} x_3 \approx 199-1.49x_1 \\ x_2 \approx 50.37+0.56x_1 \end{cases} \quad (22)$$

რადგან (21)-ში x_1-ის კოეფიციენტი დადებითია, მინიმალურ მნიშვნელობას Z ფუნქცია მიიღებს $x_1=0$-თვის miinZ=249.37, ხოლო (22)-დან $x_3 \approx 199$ $x_2 \approx 50.37$

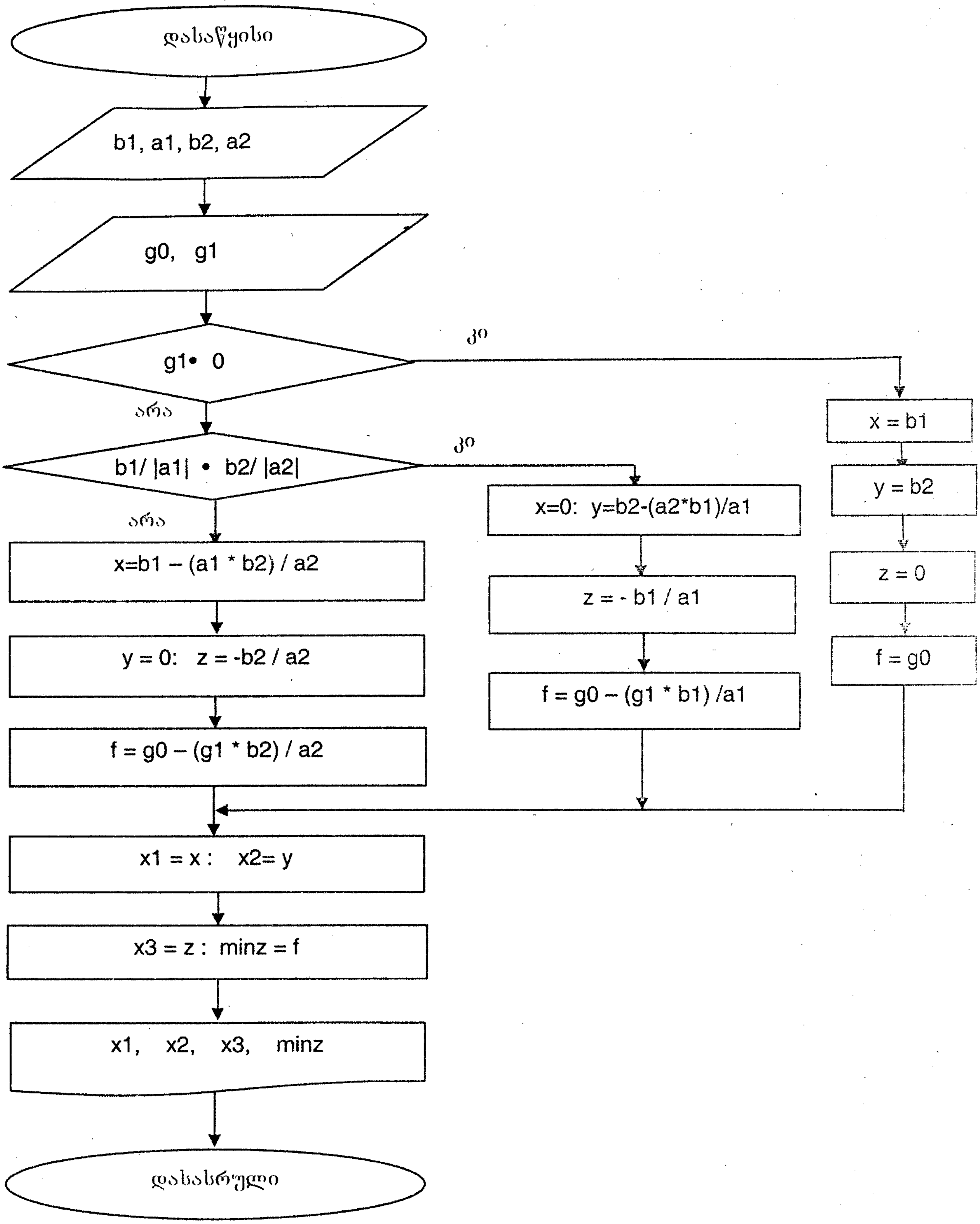
ამრიგად 1 ვარიანტის მიხედვით არ უნდა დაიჭრას არც ერთი დიდი ფურცელი, 2 ვარიანტის მიხედვით 199, ხოლო 3 ვარიანტის მიხედვით 50, იმისათვის რომ შესრულდეს ამოცანის პირობები და დაიხარჯოს ფურცლების მინიმალური რაოდენობა.

minZ=249

(21)-ში თავისუფალი ცვლადის კოეფიციენტი უარყოფითი თუ იქნებოდა, მაშინ გამოთვლათა თანმიმდევრობას გავიმეორებდით.

შესაძლებელია Z-ს არ ჰქონდეს მინიმუმი ან პროცესი "ჩაიციკლოს", ჩვენ ამ შემთხვევებს აქ არ განვიხილავთ.

მოყვანილი ალგორითმის ბლოკ-სქემას აქვს შემდეგი სახე



შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
CLS
INPUT "bet(1),alf(1),bet(2),alf(2),gam(0),gam(1)"; b1, a1, b2, a2, g0, g1
  IF g1 >= 0 THEN 2
  IF b1 / ABS(a1) <= b2 / ABS(a2) THEN 3
  x = b1 - (a1 * b2) / a2
  y = 0
  z = -b2 / a2
  f = g0 - (g1 * b2) / a2
  GOTO 5
2 x = b1
  y = b2
  z = 0
  f = g0
  GOTO 5
3 x = 0
  y = b2 - (a2 * b1) / a1
  z = -b1 / a1
  f = g0 - (g1 * b1) / a1
5 x1 = x
  x2 = y
  x3 = z
  minz = f
  PRINT
  PRINT "x1="; x1,
  PRINT "x2="; x2,
  PRINT "x3="; x3,
  PRINT "minz="; minz
  END
```

კომპიუტერზე რეალიზაციის შედეგები:

საწყისი მონაცემები

```
BET(1)= 133.3          ALF(1)=-.6666          BET(2)= 125
ALF(2)=-.375           GAM(0)= 258.3          GAM(1)=-.045
```

კომპიუტერზე მიღებული შედეგი

```
x1= 0          x2= 117.5011   x3= 19.997      minz= 257.4001
```

ამოცანა 2.2. მოცემული პარამეტრებისათვის შეარჩიეთ დაჭრის სამი ვარიანტი და სიმპლექს-მეთოდის კომპიუტერზე რეალიზაციით განსაზღვრეთ რამდენი ცალი ფურცელი უნდა დაიჭრას თითოეული ვარიანტისათვის, რომ გეგმა შესრულდეს და დახარჯული ფურცლების რაოდენობა მინიმალური იყოს.

ამოცანა 2.3. ამოცანა 2.2. ამოხსენით დაჭრის სხვა ვარიანტებისათვის. შეადარეთ მიღებული შედეგები.

ამოცანა 2.4. ამოცანა 2.2 ამოხსენით დაჭრის ოთხი ვარიანტისათვის.

ამოცანა 2.5. ამოცანა 2.2 ამოხსენით დაჭრის ოთხი ვარიანტისათვის და გამონაჭრების სამი ტიპისათვის, მესამე ტიპის გამონაჭრის ზომად მიიღეთ $a_1 X b_2$.

ამოცანა 2.6. ვთქვათ, A და B ტიპის გამონაჭრების ზომები არაა დაფიქსირებული და მოცემულია მხოლოდ მათი ფართობები, რომლებიც შესაბამისად ტოლია $S_A = a_1$; $S_B = b_1$. ამოხსენით ამოცანა დაჭრის 3 ვარიანტისათვის სიმპლექს-მეთოდით.

ამოცანა 2.7. ამოცანა 2.6-ში განიხილეთ დაჭრის ვარიანტების სამი განსხვავებული შემთხვევა. შეადარეთ ერთმანეთს მიღებული შედეგები.

სატრანსპორტო ამოცანა

წრფივი პროგრამირების ერთერთ ტიპიურ ამოცანას წარმოადგენს სატრანსპორტო ამოცანა. ეს ამოცანა წამოიჭრება სხვადასხვა ეკონომიკური პროცესების დაგეგმვის დროს. იგი განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს გადაზიდვების ოპტიმალური მარშრუტის დაგეგმვის დროს. ერთ შემთხვევაში ეს ნიშნავს გადაზიდვათა გეგმის ისეთ შერჩევას, რომლის დროსაც გადაზიდვათა საერთო ღირებულება იქნება მინიმალური, მეორე შემთხვევაში კი გადაზიდვების ისეთ დაგეგმვას, რომლის დროსაც მიიღწევა გადაზიდვებზე დახარჯული დროის მაქსიმალური ეკონომია.

პირველ ამოცანას შეიძლება ვუწოდოთ სატრანსპორტო ამოცანა ღირებულების კრიტერიუმით, ხოლო მეორე ამოცანას კი სატრანსპორტო ამოცანა დროის კრიტერიუმით.

დავუშვათ, რომ გვაქვს რაიმე ერთგვაროვანი პროდუქტი, რომელიც განთავსებულია m რაოდენობის A_i მიმწოდებელთან, თითოეულში შესაბამისად a_i $(i=1,2,\dots,m)$ რაოდენობით. აუცილებელია აღნიშნული პროდუქტი მიწოდებული იქნას n რაოდენობის B_j მომხმარებლისათვის, თითოეულში შესაბამისად b_j $(j=1,2,\dots,n)$ რაოდენობით. მოცემულია ერთეული ტვირთის გადაზიდვის ღირებულება c_{ij} i-ური მიმწოდებელი პუნქტიდან j-ურ მომხმარებელ პუნქტამდე. აღვნიშნოთ x_{ij}-ით $(i=1,2,\dots,m;$ $j=1,2,\dots,n)$ ტვირთის რაოდენობა, რომელიც უნდა გადაიზიდოს i-ური მიმწოდებელი პუნქტიდან j-ურ მომხმარებელ პუნქტამდე. ამოცანის პირობა შეიძლება ჩაიწეროს ცხრილის სახით, რომელსაც უწოდებენ დაგეგმვის მატრიცას.

მიმწოდებელი	მომხმარებელი				მარაგი
	B_1	B_2	....	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	....	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	....	C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	....	C_{mn} X_{mn}	a_m
მოთხოვნილება	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

ჩამოვაყალიბოთ სატრანსპორტო ამოცანის მათემატიკური მოდელი. რადგანაც i-ური მიმწოდებელი j-ურ მომხმარებელს აწვდის x_{ij} რაოდენობის პროდუქტს, მაშინ გადაზიდვის ღირებულება შეადგენს $c_{ij}x_{ij}$. გადაზიდვის საერთო ღირებულება იქნება:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \;;$$

ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე მივიღებთ შეზღუდვების სისტემას:

ა) ყველა ტვირთი მიმწოდებლიდან გატანილი უნდა იქნეს მთლიანად, ე.ი.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,2,\dots,m);$$

ბ) მომხმარებელთა მოთხოვნილება დაკმაყოფილებული უნდა იქნეს მთლიანად, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1,2,\dots,n);$$

ამრიგად სატრანსპორტო ამოცანის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე: მოიძებნოს წრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

შეზღუდვების შემდეგი სისტემის არსებობის დროს

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\dots,m); \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\dots,n); \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1,2,..,m; \quad j = 1,2,\dots,n) \end{cases}$$

განხილულ მოდელში იგულისხმება, რომ პროდუქციის საერთო მარაგი ტოლი უნდა იყოს მოთხოვნილებათა საერთო რაოდენობის, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (23)$$

ასეთ მოდელს ეწოდება ჩაკეტილი მოდელი. მტკიცდება, რომ ჩაკეტილ მოდელებს ყოველთვის აქვს ამონახსნი.

სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნა ხორციელდება ორ ეტაპად:

1. საწყისი საბაზისო გეგმის აგება;
2. მიმდევრობითი იტერაციული პროცედურის აგება ოპტიმალური გეგმის მიღებამდე.

სატრანსპორტო ამოცანის საწყისი საბაზისო გეგმის აგება ისევე, როგორც წრფივი პროგრამირების სხვა ამოცანები დაკავშირებულია დიდი რაოდენობის გამოთვლებთან. არსებობს სატრანსპორტო ამოცანის საწყისი საბაზისო გეგმის აგების შედარებით მარტივი ხერხები, რომელთაგან ზოგიერთს განვიხილავთ ქვემოთ.

ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდი

დავუშვათ, რომ სატრანსპორტო ამოცანის პირობა მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში.

მიმწოდებელი	მომხმარებელი			მარაგი
	B_1	B_2	B_3	
A_1	$c_{11}=6$	$c_{12}=10$	$c_{13}=4$	$a_1=150$
A_2	$c_{21}=12$	$c22=2$	$c23=8$	$a_2=90$
მოთხოვნილება	$b_1=60$	$b_2=70$	$b_3=110$	

საწყისი საბაზისო გეგმის აგებას ვიწყებთ პირველი მომხმარებლის დაკმაყოფილებით, ანუ ცხრილის შევსებას ვაწარმოებთ მარცხენა ზედა კუთხიდან შემდეგი ალგორითმის მიხედვით.

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$$

თუ $a_1>b_1$, მაშინ $x_{11}=b_1$ და პირველი სვეტი "იკეტება". ე.ი. პირველი მომხმარებლის მოთხოვნილება მთლიანად დაკმაყოფილებულია. შემდეგ ვმოძრაობთ პირველი სტრიქონის გასწვრივ და ვავსებთ (1,2) უჯრას.

$$x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$$

თუ აღმოჩნდა, რომ $b_1>a_1$, მაშინ ანალოგიურად იკეტება პირველი სტრიქონი და ვავსებთ მეზობელ უჯრას (2,1), სადაც შეგვაქვს რიცხვი

$$x_{21} = \min\{a_2, b_1 - a_1\}$$

აღნიშნულ პროცედურას განვაგრძობთ მანამდე, სანამ არ ამოიწურება მთელი რესურსი a_i $(i=1,2,\dots,m)$ და არ დაკმაყოფილდება ყველა მოთხოვნილება b_j $(j=1,2,\dots,n)$.

ამ ალგორითმის მიხედვით მოცემული ამოცანისათვის აიგება საწყისი საბაზისო გეგმა, რომელიც ასახულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში:

მიმწოდებელი	მომხმარებელი			მარაგი
	B_1	B_2	B_3	
A_1	$c_{11}=6$ $x_{11}=60$	$c_{12}=10$ $x_{12}=70$	$c_{13}=4$ $x_{13}=20$	$a_1=150$
A_2	$c_{21}=12$	$c22=2$	$c23=8$ $x_{23}=90$	$a_2=90$
მოთხოვნილება	$b_1=60$	$b_2=70$	$b_3=110$	

მიღებული გეგმის მიხედვით მთლიანი სატრანსპორტო დანახარჯები შეადგენს:

$$z = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860 \text{ ერთ.}$$

ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდში არ არის გათვალისწინებული ერთეული პროდუქტის გადაზიდვაზე საჭირო ხარჯები c_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$, რის გამოც საწყისი საბაზისო გეგმა შეიძლება იყოს ოპტიმალური ამონახსნიდან ძალიან შორს.

მინიმალური ღირებულების მეთოდი

სატრანსპორტო ამოცანისათვის "მინიმალური ღირებულების მეთოდის" გამოყენების შემთხვევაში საწყისი საბაზისო გეგმის აგებას იწყებენ იმ უჯრედიდან, რომლისთვისაც ერთეული ტვირთის გადაზიდვის ღირებულება c_{ij} არის მინიმალური. ზემოთ განხილული მაგალითის შემთხვევაში ასეთ უჯრედს წარმოადგენს (2,2) უჯრედი, რომლისთვისაც $c_{22}=2$. ამ უჯრედში შეგვაქვს რიცხვი

$$x_{22} = \min\{90,70\} = 70$$

დარჩენილი ნაშთები, როგორც სვეტისა, ასევე სტრიქონისა, გადანაწილდება სტრიქონებისა და სვეტების იმ უჯრებში, სადაც გადაზიდვების ღირებულება იქნება მინიმალური. ჩვენს შემთხვევაში, რადგან მომხმარებლის მოთხოვნილება მთლიანად დაკმაყოფილდა, ამიტომ მეორე სვეტი იხურება, ხოლო მეორე მიმწოდებლის დარჩენილი მარაგის რიცხვითი მნიშვნელობა ჩაიწერება (2,3) უჯრაში.

$$x_{23} = \min\{90 - 70, 110\} = 20$$

ამის შემდეგ გადავდივართ (1,3) უჯრაში, რადგანაც $c_{22}=2$-ის შემდეგ უმცირესი არის $c_{13}=4$., ამიტომ (1,3) უჯრაში შეგვაქვს რიცხვი

$$x_{13} = \min\{150, 110 - 20\} = 90$$

პირველი მიმწოდებლის დარჩენილი მარაგის რიცხვითი მნიშვნელობა შეგვაქვს (1,1) უჯრაში, ე.ი. $X_{11}=60$.

ამ მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ საწყის საბაზისო გეგმას შემდეგი ცხრილის სახით.

მიმწოდებელი	მომხმარებელი			მარაგი
	B_1	B_2	B_3	
A_1	$c_{11}=6$ $x_{11}=60$	$c_{12}=10$ $x_{12}=0$	$c_{13}=4$ $x_{13}=90$	$a_1=150$
A_2	$c_{21}=12$ $x_{21}=0$	$c22=2$ $x_{22}=70$	$c23=8$ $x_{23}=20$	$a_2=90$
მოთხოვნილება	$b_1=60$	$b_2=70$	$b_3=110$	

მიღებული გეგმის მიხედვით მთლიანი სატრანსპორტო დანახარჯები შეადგენს:

$$z = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 20 = 1020 \text{ ერთ.}$$

საწყისი საბაზისო გეგმის აგების დროს მინიმალური ღირებულების მეთოდი უფრო ეფექტური აღმოჩნდა ვიდრე ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდი.

პოტენციალთა მეთოდი

მას შემდეგ, რაც აიგება საწყისი საბაზისო გეგმა, ყველა ცვლადი იყოფა ორ ჯგუფად: X_{kl}-ბაზისური და X_{pq}-თავისუფალი. გადაზიდვების ღირებულების წრფივი ფუნქცია თავისუფალი ცვლადებით გამოისახება შემდეგნაირად:

$$z = \sum_{p,q} \gamma_{pq} x_{pq} + z_0$$

თავისუფალი ცვლადების γ_{pq} კოეფიციენტების გამოთვლისათვის ყოველ მიმწოდებელ A_i პუნქტს შევუსაბამოთ სიდიდე U_i ($i=1,2,\ldots,m$), რომელსაც დავარქვათ A_i პუნქტის პოტენციალი, ხოლო ყოველ მიმღებ B_j პუნქტს V_j ($j=1,2,\ldots,n$) და დავარქვათ მას B_j პუნქტის პოტენციალი. ეს სიდიდეები დავაკავშიროთ ერთმანეთთან შემდეგი სახის ტოლობებით.

$$U_k + V_l = c_{kl}$$

სადაც c_{kl}-ერთეული ტვირთის გადაზიდვის ხარჯებია A_k პუნქტიდან B_l პუნქტამდე.

მტკიცდება, რომ ერთობლიობა $U_k + V_l = c_{kl}$ განტოლებებისა, რომლებიც შედგენილია ყველა ბაზისური ცვლადებისათვის, შეადგენს წრფივ განტოლებათა თავსებად სისტემას. ერთ-ერთი ცვლადის მნიშვნელობა შეიძლება მოცემული იყოს ნებისმიერად, ხოლო დანარჩენი ცვლადების მნიშვნელობები შეიძლება განისაზღვროს სისტემიდან ცალსახად. აღვნიშნოთ თავისუფალი ცვლადებისათვის შესაბამისი პოტენციალების ჯამი $c'_{pq} = U_p + V_q$ და ვუწოდოთ მას არაპირდაპირი ღირებულება. თავისუფალი ცვლადების კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$$

თუ ყველა γ_{pq} არაუარყოფითია, მაშინ აგებული გეგმა იქნება ოპტიმალური. თუ მათ შორის მოიძებნება უარყოფითი მნიშვნელობები, მაშინ გადავდივართ ახალ ბაზისზე. ამ დროს უარყოფითკოეფიციენტებიანი წევრი უნდა გაიზარდოს, ხოლო ცვლადები, რომელთა კოეფიციენტებიც ნულის ტოლია, რჩება უცვლელი.

საწყის საბაზისო გეგმად მივიღოთ მინიმალური ღირებულების მეთოდით აგებული გეგმა. პოტენციალთა მოძებნისათვის უნდა ამოიხსნას შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = c_{11} = 6 \\ U_1 + V_3 = c_{13} = 4 \\ U_2 + V_2 = c_{22} = 2 \\ U_2 + V_3 = c_{23} = 8 \end{cases}$$

ერთ-ერთი უცნობის მნიშვნელობა ავიღოთ ნებისმიერად. მაგალითად, ვთქვათ $U_1=1$, მაშინ გვექნება $V_1=5$; $V_3=3$; $U_2=5$; $V_2=-3$

ამის შემდეგ გამოითვლება არაპირდაპირი ღირებულება c'_{pq}:

$$c'_{12} = U_1 + V_2 = 1 + (-3) = -2$$

$$c'_{21} = U_2 + V_1 = 5 + 5 = 10$$

თავისუფალი ცვლადების კოეფიციენტები გამოითვლება შესაბამისად:

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12$$

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2$$

აქედან გამომდინარე გადაზიდვების საერთო ღირებულება, თავისუფალი ცვლადებით გამოსახული, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$z = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}$$

მარჯვენა მხარეში ცვლადთა კოეფიციენტებს შორის არ არის უარყოფითი. ამიტომ საწყისი საბაზისო გეგმა, რომელიც მიღებულია მინიმალური ღირებულების მეთოდით, არის ოპტიმალური.

განვიხილოთ იგივე ამოცანა, როცა საწყისი საბაზისო გეგმა აგებულია "ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის" მეთოდით. პოტენციალთა განსაზღვრისათვის აუცილებელია ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = c_{11} = 6 \\ U_1 + V_2 = c_{12} = 10 \\ U_1 + V_3 = c_{13} = 4 \\ U_2 + V_3 = c_{23} = 8 \end{cases}$$

დავუშვათ, რომ $U_1=1$, მაშინ მივიღებთ:

$$V_1=5; \quad V_2=9; \quad V_3=3; \quad U_2=5$$

არაპირდაპირი ღირებულებები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$c'_{21} = U_2 + V_1 = 5+5 = 10$$

$$c'_{22} = U_2 + V_2 = 5+9 = 14$$

თავისუფალი ცვლადების კოეფიციენტები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12-10 = 2$$

$$\gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2-14 = -12$$

გადაზიდვათა საერთო ღირებულება თავისუფალი ცვლადებით გამოისახება შემდეგნაირად:

$$z = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეში ცვლადთა კოეფიციენტებს შორის X_{22} ცვლადთან გვაქვს უარყოფითი. აქედან გამომდინარე შეიძლება z შევამციროთ X_{22} ცვლადის მნიშვნელობის გადიდებით (ამ დროს X_{21} ნულოვანი მნიშვნელობა რჩება უცვლელი). დავუშვათ, რომ $x_{22} = \lambda$. იმდენად, რამდენადაც ცვლადთა მნიშვნელობების ჯამი სვეტებისა და სტრიქონების მიხედვით უნდა დარჩნენ მუდმივი, ამიტომ უნდა განვახორციელოდ შემდეგი ბალანსური გადაანგარიშება:

$X_{11}=60$	$X_{12}=70-\lambda$	$X_{13}=20+\lambda$
$X_{21}=0$	$X_{22}=0+\lambda$	$X_{23}=90-\lambda$

X_{22}-ისათვის λ-ს დამატება კომპენსირდება X_{12}-დან λ-ს გამოკლებით, X_{13}-ისათვის λ-ს დამატებით და X_{23}-დან λ-ს გამოკლებით. უჯრების შემოვლა ნაჩვენები მიმართულებით მოიცავს ბაზისურ ცვლადებს და თავისუფალ ცვლადს X_{22}-ს. აღნიშნული სვლა წარმოადგენს გადაანგარიშების ციკლს (ისრების მიმართულებით შეკრულ გზას ციკლი ეწოდება) X_{22} თავისუფალი ცვლადის მიმართ.

ზემოთ მოყვანილი ცხრილიდან ჩანს, რომ λ ცვლადის მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება ავიღოთ $\lambda=70$. მაშინ გვექნება შემდეგი ბაზისური ამონახსნი:

60	0	90
	70	20

ე.ი. $X_{11}=60$; $X_{12}=0$; $X_{13}=90$; $X_{21}=0$; $X_{22}=70$; $X_{23}=20$. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$z = 1860 - 12 \cdot 70 = 1020$$

მაშასადამე მივიღეთ ოპტიმალური ამონახსნი ისეთი, როგორიც იყო მიღებული წინა შემთხვევაში.

ამრიგად, პოტენციალთა მეთოდით ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი სახის ალგორითმამდე

1. ვპოულობთ U_k და V_ℓ პოტენციალებს A_k მიმწოდებელ და B_ℓ მომხმარებელ პუნქტებისათვის;
2. ვირჩევთ რომელიმე თავისუფალ ცვლადს, რომლისთვისაც პოტენციალთა ჯამი შედარებით მაღალია შესაბამისი ღირებულებისათვის, რომელიც შეესაბამება თავისუფალი ცვლადის უარყოფით კოეფიციენტს z ფუნქციის მარჯვენა მხარეში;
3. მეორე პუნქტში შერჩეული ცვლადისათვის ვასრულებთ შესაბამისი გადაანგარიშების ციკლს, რომელსაც მივყავართ ახალ დასაშვებ ამოხსნამდე;
4. 1, 2, 3 პუნქტებში აღნიშნულ პროცედურებს ვიმეორებთ მანამდე, სანამ არ ავაგებთ გადაზიდვების ოპტიმალურ გეგმას, ე.ი. z წრფივი ფუნქციის მარჯვენა მხარეში არ მიიღწევა თავისუფალი ცვლადებისათვის არაუარყოფითი კოეფიციენტები.

საწარმოთა ოპტიმალურად შერჩევის ამოცანა

ზემოთ განხილული სატრანსპორტო ამოცანა იყო ჩაკეტილმოდელიანი, რადგან მიწოდებული და მოხმარებული პროდუქციის (ტვირთის) ჯამური რაოდენობები ერთმანეთის ტოლი იყო ანუ სრულდებოდა (23) პირობა.

თუ მიწოდებული (შეთავაზებული) და მოხმარებული (მოთხოვნილი) პროდუქციის რაოდენობა ერთმანეთს არ უდრის, მაშინ საქმე გვაქვს ღია ეკონომიკურ მოდელთან. განვიხილოთ ღია მოდელის მქონე საწარმოთა ოპტიმალურად შერჩევის ამოცანა.

ვთქვათ m რაოდენობის A_i (i=1,2,…,m) საწარმო აწარმოებს შესაბამისად a_i რაოდენობის ნედლეულს. დავუშვათ არსებობს ნედლეულის გადამმუშავებელი n რაოდენობის B_j (j=1,2,…,n) ბაზა, შესაბამისად b_j სიმძლავრეებით. მათგან უნდა შეირჩეს მწარმოებლებისა და გადამმუშავებელი ბაზების ნაწილი, რომლებიც აწარმოებენ და გადაამუშავებენ K რაოდენობის ნედლეულს. აგრეთვე უნდა დადგინდეს გადაზიდვების გეგმა, ისე რომ გადაზიდვების ჯამური ღირებულება მინიმალური იყოს.

ცხადია იგულისხმება, რომ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ge K \text{ და } \sum_{j=1}^{n} b_j \ge K .$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ამოცანის ამოსახსნელად მოდელი ჩაკეტილ სახემდე მივიყვანოთ, ამისათვის შემოვიტანოთ ფიქტიური B_{n+1} გადამმუშავებელი. მისი სიმძლავრე b_{n+1} მივიღოთ შემდეგი რიცხვის ტოლად

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ტვირთის ერთეულის გადაზიდვის ღირებულებად A_i-დან ფიქტიური B_{n+1}-მდე ანუ $C_{i,n+1}$ მივიღოთ 0-ის ტოლად. ამოვხსნათ მიღებული მოდელი კომპიუტერზე და გავითვალისწინოთ, რომ B_{n+1}-ში ტვირთები გადაიტანება იმ მწარმოებლიდან, რომლებსაც ყველაზე არახელსაყრელი მდებარეობა აქვთ. მწარმოებელთა სიიდან ამოვრიცხოთ ეს მწარმოებლები ან შევამციროთ შესაბამისი a_i სიმძლავრეები ისე, რომ მათი ჯამი K-ს ტოლი გახდეს. ვთქვათ დარჩა m* რაოდენობის საწარმო, მაშინ გადავნომროთ ისინი ხელახლა. მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m^*} a_i^* = K ,$$

სადაც a_i^* თავდაპირველი ან კორექტირებული სიმძლავრეებია.

სიმძლავრეთა კორექცია შეიძლება განხორციელდეს ყველა არახელსაყრელი საწარმოსთვის თანაბრად ან ფიქტიურ გადამმუშავებელთან მიმართების გათვალისწინებით.

თუ $\sum_{j=1}^{n} bj = K$

მაშინ მიიღება ჩაკეტილი მოდელი, რომლის ამოხსნის შემდეგაც ვღებულობთ ხელსაყრელი საწარმოების ნუსხას, სიმძლავრეებს და გადაზიდვის გეგმას.

თუ $\sum_{j=1}^{n} bj > K$

მაშინ შემოგვაქვს ფიქტიური მწარმოებელი A_{m^*+1} ასეთი სიმძლავრით

$$A_{m^*+1} = \sum_{j=1}^{n} bj - K$$

მივიღოთ ტვირთის ერთეულის გადაზიდვის ღირებულება $C_{m^*+1,j} = 0$ და ჩაკეტილი მოდელის ამოხსნით დავადგინოთ ის გადამმუშავებლები, რომლებიც დაკავშირებული იქნებიან ფიქტიურ მწარმოებელთან. მოვახდინოთ გადამმუშავებელთა ნაწილის სიიდან ამოღება და b_j სიმძლავრეების კორექცია ისე, რომ მათი ჯამი K-ს ტოლი გახდეს. თავიდან გადანომრვის შემდეგ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m^*} a_i^* = \sum_{j=1}^{n^*} b_j^* = K$$

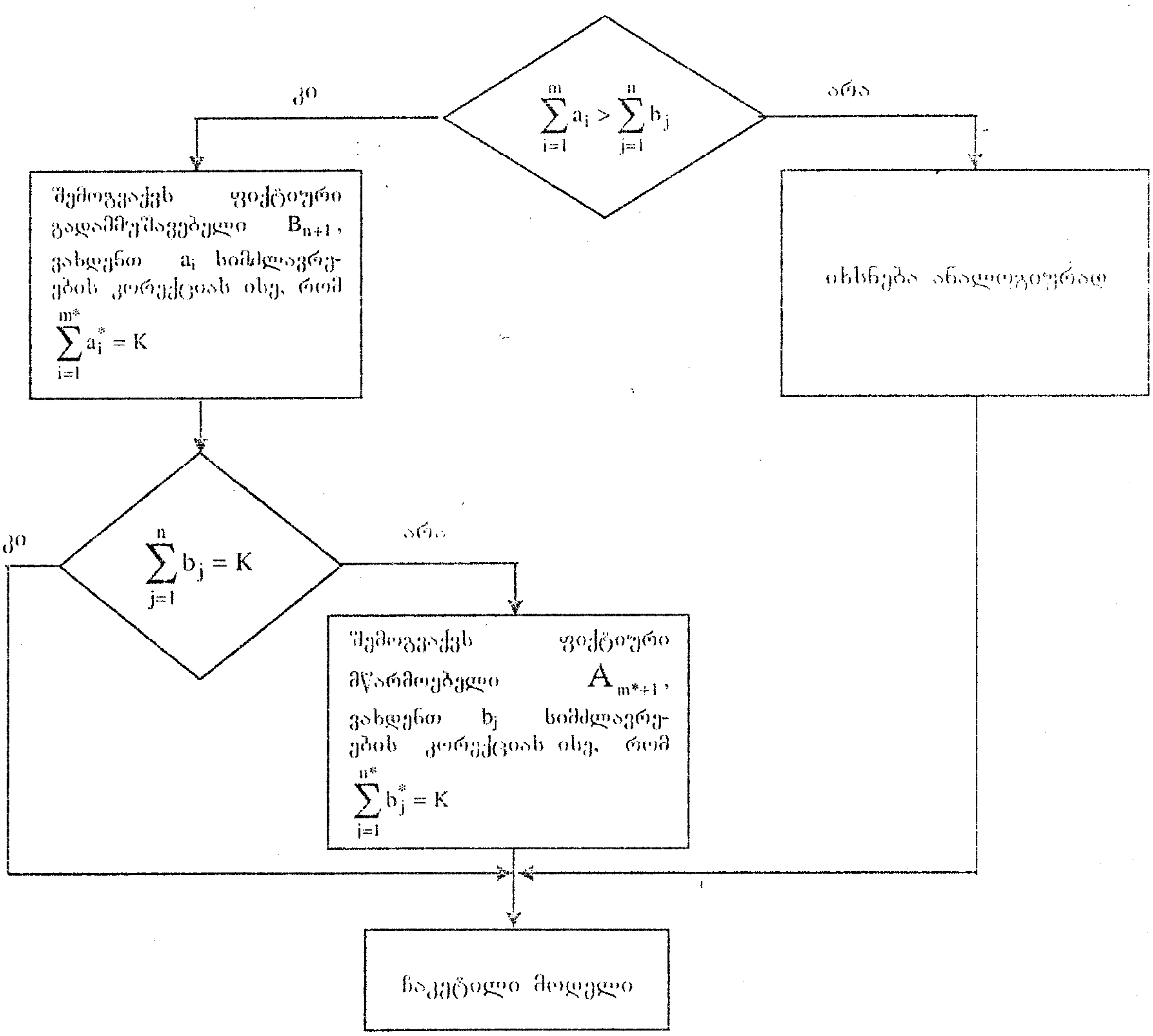
ანუ ნაკეტილ მოდელს, სადაც m^* და n^* საბოლოოდ დარჩენილი საწარმოების რაოდენობაა, ხოლო a_i^* და b_j^* შესაბამისი კორექტირებული სიმძლავრეები.

ამოვხსნით რა მიღებულ ნაკეტილ მოდელს, დავადგენთ გადაზიდვათა საბოლოო მოცულობებს თითოეული A_i-დან B_j-მდე ანუ X_{ij} სიდიდეებს, $i=1,2,\ldots m^*$, $j=1,2,\ldots n^*$.

ამ შედეგების ანალიზით შეგვიძლია განვსაზღვროთ რომელი მწარმოებელი და გადამმუშავებელი ობიექტები უნდა შევარჩიოთ, რათა საჭირო K რაოდენობის ნედლეული გადავამუშაოთ და რომელი მწარმოებლიდან რომელ გადამმუშავებელ ბაზაში რამდენი ტვირთი გადავიტანოთ ისე, რომ გადაზიდვათა ჯამური ღირებულება მინიმალური იყოს.

ანალოგიურად იხსნება შემთხვევა, როცა $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i \ge K$.

სიცხადისათვის განხილული ალგორითმი წარმოვადგინოთ ბლოკ-სქემის სახით



ამოცანა 2.8 თანაბრად შეამცირეთ წარმოებული ნედლეულის (a_i) სიდიდეები ისე, რომ მიიღოთ ნაკეტილი მოდელი და დაადგინეთ გადაზიდვების მოცულობების სიდიდეები ჩრდილო დასავლეთის კუთხის მეთოდით. C_{ij} სიდიდეები დაადგინეთ ნახაზის მიხედვით და ჩათვალეთ ისინი იმ რიცხვის ტოლად, რომელიც შეესაბამება A_i-დან B_j-მდე მანძილს (მილიმეტრებში).

ამოცანა 2.9 ამოხსენით ამოცანა 2.8 პოტენციალთა მეთოდით.

ამოცანა 2.10 ამოხსენით ამოცანა 2.8 სიმპლექს-მეთოდით კომპიუტერის გამოყენებით.

ამოცანა 2.11 შემდეგი მონაცემებით დაადგინეთ რომელი დამამზადებელი და რომელი გადამმუშავებელი უნდა შეირჩეს და რა რაოდენობის ტვირთები უნდა გადაიზიდოს თითოეული A_i-დან ყოველ B_j-ში იმისათვის, რომ გადამუშავდეს K რაოდენობის

ნედლეული და გადაზიდვების ჯამური ღირებულება მინიმალური იყოს. გამოთვალეთ ეს ღირებულება. C_{ij} სიდიდეები დაადგინეთ 2.8-ში მოცემული მითითებით. K-ს მნიშვნელობა მიიღეთ $\sum_{j=1}^{n} b_j$-ის ტოლად. მიღებული ჩაკეტილი მოდელები ამოხსენით კომპიუტერზე.

ამოცანა 2.12 ამოხსენით 2.11. ამოცანა ცხრილში მოცემული K-თვის.

ამოცანა 2.13 საწარმოთა განლაგების გეგმაზე დაუმატეთ ერთი გადამმუშავებელი ისეთი სიმძლავრით, რომ შესრულდეს

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$$

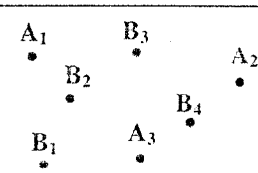
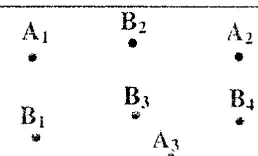
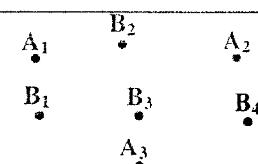
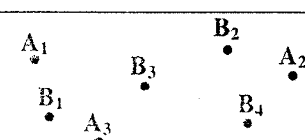
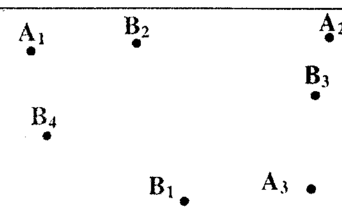
პირობა და ამოხსენით 2.11 ამოცანა.

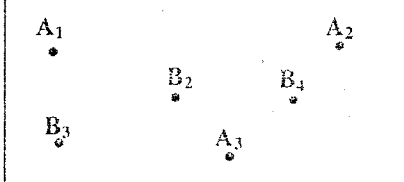
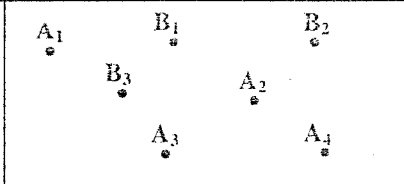
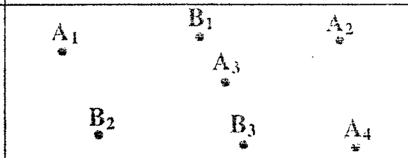
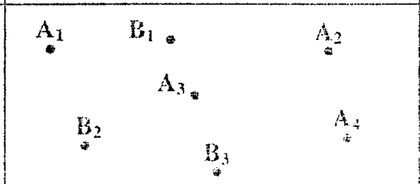
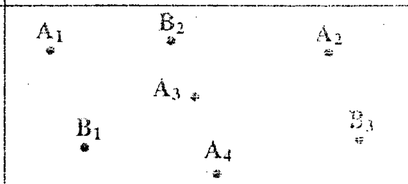
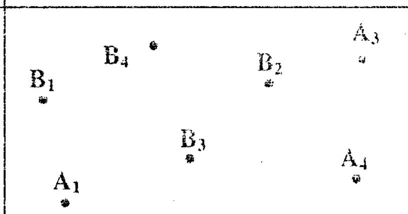
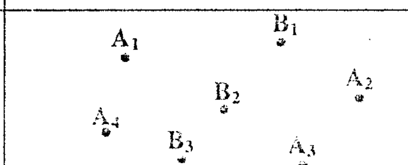
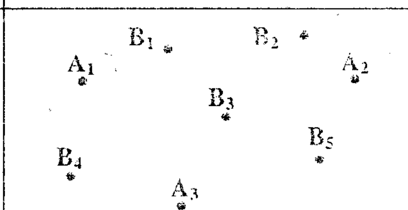
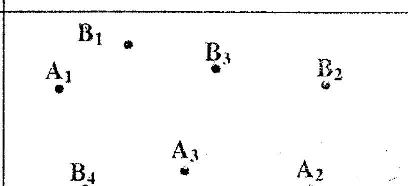
ამოცანა 2.14 ამოხსენით 2.12 ამოცანა არახელსაყრელ საწარმოთა მაქსიმალური რაოდენობით ლიკვიდაციის პრინციპით.

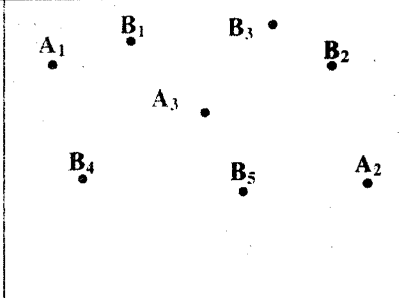
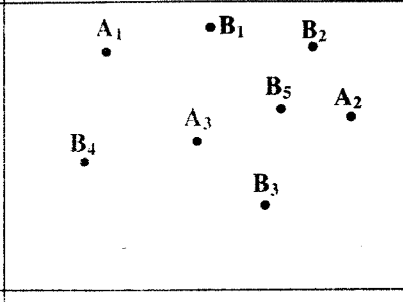
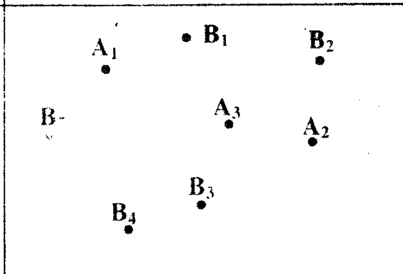
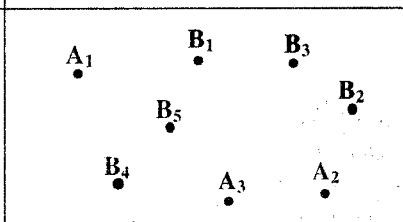
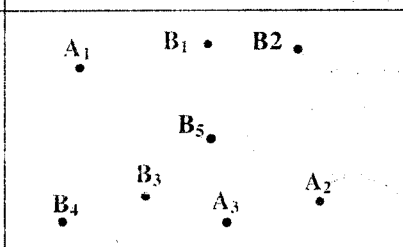
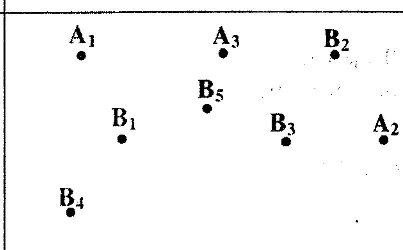
ამოცანა 2.15 ამოხსენით 2.12 ამოცანა არახელსაყრელი საწარმოების სიმძლავრეების თანაბრად შემცირებით კორექციის პრინციპით. მიღებული შედეგები შეადარეთ 2.11. ამოცანის შედეგებს.

ამოცანა 2.16 შეადგინეთ 2.12 ამოცანის ალგორითმის ბლოკ-სქემა და პროგრამა.

ამოცანა 2.8 – 2.16-ის ვარიანტები

№	a_i	b_j	K	საწარმოთა განლაგების გეგმა
1	2	3	4	5
1	800 900 700	200 400 300 500	1200	
2	900 1800 1900	300 200 400 800	1000	
3	700 800 900	200 300 400 500	1000	
4	900 800 950	300 200 300 500	1100	
5	800 750 800	400 200 200 300	900	

1	2	3	4	5
6	1000 1200 950	800 300 .400 500	1400	
7	900 800 900 1000	600 700 800	1200	
8	700 1200 1400 1300	500 400 800	1500	
9	900 800 1000 1200	700 500 450	1400	
10	1000 1200 1400 1600	800 700 650	2000	
11	1200 1300 1400 1500	900 600 .700	1800	
12	800 900 1000 1200	700 800 900	1400	
13	900 1000 2000	600 6500 700 750 800	2500	
14	1200 2100 1100	650 700 800 800	3000	

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>15</td><td>1300
2200
1000</td><td>700
750
800
650
850</td><td>3400</td><td>
</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1400
2300
1100</td><td>750
800
.850
800
900</td><td>3600</td><td>
</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1500
2600
1200</td><td>800
850
900
700
950</td><td>3800</td><td>
</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1600
1400
2700</td><td>850
900
950
1050
1000</td><td>3900</td><td>
</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1700
1600
2800</td><td>900
1000
950
1000
1050</td><td>4000</td><td>
</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1800
1700
2900</td><td>950
1000
1050
1100
1000</td><td>4500</td><td>
</td></tr>
</table>

თავი 3
წრფივი ორადული მოდელი

ორადობის თეორემა

განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა.
მოცემულია $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ ფუნქცია.
ვიპოვოთ f ფუნქციის მაქსიმუმი შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \ge 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m \ge 0; \quad x_i \ge 0, \quad i = 1.2, \dots, n \end{cases}$$

ამ ამოცანას ვუწოდოთ ამოსავალი მოდელი.
ახლა ჩამოვაყალიბოთ ამ მოდელის ორადული მოდელი.

ვიპოვოთ $\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$

ფუნქციის მინიმუმი შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m + c_1 \le 0 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m + c_2 \le 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m + c_n \le 0; \quad y_i \ge 0, \quad i = 1.2, \dots, m \end{cases}$$

ამ ორ მოდელს ახასიათებს თვისებები:

I. ცვლადების კოეფიციენტების მატრიცები ტრანსპონირებულია.

II. ერთი მოდელის შეზღუდვების თავისუფალი წევრები მეორე მოდელის მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტებია და პირიქით.

III. შეზღუდვებში უტოლობები საპირისპირო შინაარსისაა.

IV. ერთ მოდელში ვეძებთ მინიმუმს, მეორეში მაქსიმუმს.

ჩამოვაყალიბოთ <u>ორადობის</u> თეორემა: თუ ამოსავალ მოდელს აქვს ამონახსნი, მაშინ მის ორადულ მოდელსაც აქვს ამონახსნი და

$$\max f = \min \varphi$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ f ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, თუ

$$f = 2x_2 + 12x_3$$

და მოცემული გვაქვს შეზღუდვების შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 + 1 \ge 0; \quad x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

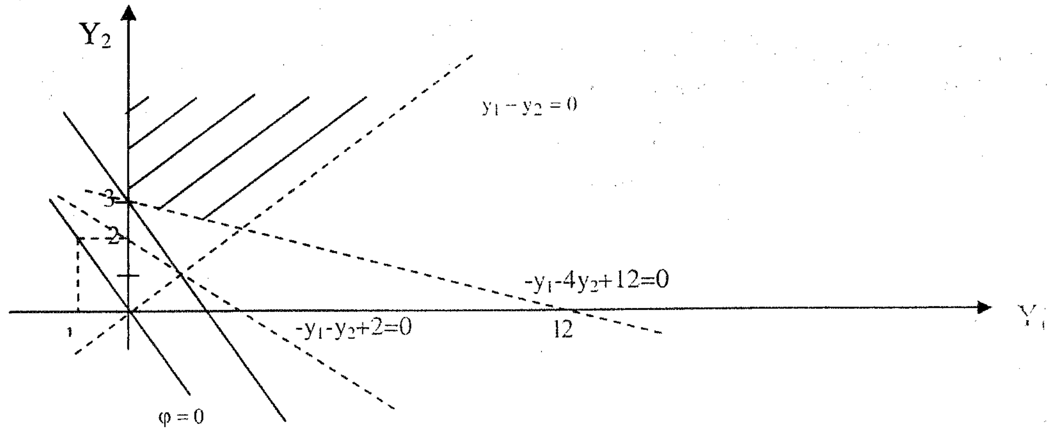
ჩამოვაყალიბოთ ამ ამოცანის ორადული მოდელი: ვიპოვოთ φ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა, თუ

$$\varphi = 2y_1 + y_2$$

და მოცემული გვაქვს შეზღუდვების შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 0 \le 0 \\ -y_1 - y_2 + 2 \le 0 \\ -y_1 - 4y_2 + 12 \le 0 \quad y_i \ge 0, \ i = 1,2 \end{cases}$$

ამ მოდელის ამოხსნა შეიძლება გრაფიკულად



ორადული მოდელის ამონახსნია (0; 3) წერტილი.

$$\min j = 2 \times 0 + 3 = 3$$

ცხადია ამოსავალი მოდელისათვის ორადობის თეორემიდან მივიღებთ

$$\max f = 3$$

რაციონალური გამოჭრის ამოცანის ორადული მოდელი

რაციონალური გამოჭრის ამოცანის განხილვისას გვქონდა ასეთი მათემატიკური მოდელი: ვიპოვოთ minZ, სადაც

$$Z = x_1 + x_2 + x_3$$

შეზღუდვების შემდეგი სისტემის არსებობის დროს

$$\begin{cases} 12x_1 + 0x_2 + 8x_3 = 1600 \\ 0x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 1000 \qquad (1^*) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

აქ x_1, x_2 და x_3 არის შესაბამისად I, II, III ვარიანტების მიხედვით დაჭრილი ფურცლების რაოდენობა. A ტიპის გამონაჭრების რაოდენობა არის 1600, ხოლო B ტიპის გამონაჭრების რაოდენობა 1000. (1*)-ში უცნობების კოეფიციენტები გვიჩვენებენ შესაბამისი ვარიანტით დაჭრისას ერთი ფურცლიდან A ან B ტიპის გამონაჭრების რაოდენობას.

აღნიშნულ ამოცანაში ოპტიმალურობის კრიტერიუმია მასალის ხარჯვის მინიმუმი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ A ტიპის გამონაჭრების რაოდენობა 1600-ზე მეტიც შეიძლება იყოს, ხოლო B ტიპისა 1000-ზე მეტი, $(1)^*$ ასე გადაიწერება

$$\begin{cases} 12x_1 + 0x_2 + 8x_3 \geq 1600 \\ 0x_1 + 8x_2 + 3x_3 \geq 1000 \qquad (1) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

მივუდგეთ ამ ამოცანას სხვა კუთხით.

ვთქვათ არსებობს ფირმა, რომელიც აწარმოებს გამოჭრას. მან უნდა გამოჭრას 1600 ცალი A ტიპის და 1000 ცალი B ტიპის გამონაჭრები. ცხადია, გამომჭრელი ფირმა დაინტერესებულია მიიღოს მაქსიმალური მოგება

ზოგადობის შეუზღუდავად მივიღოთ, რომ ერთი ფურცლის ღირებულებაა 1 ერთეული (ასეთი დაშვება შეიძლება ფასთა მასშტაბის შერჩევით). ვთქვათ A ტიპის ერთი გამონაჭრის ღირებულება

V, ხოლო B ტიპის ერთი გამონაჭრისა W. მაშინ ცხადია ერთი ფურცლიდან გამოჭრილი გამონაჭრების ღირებულებების ჯამი არ უნდა აღემატებოდეს 1-ს. ამიტომ გამოჭრის სხვადასხვა ვარიანტების შემთხვევაში მივიღებთ:

1 ვარიანტის დროს $12v + 0w \le 1$

2 ვარიანტის დროს $0v + 8w \le 1$ (2)

3 ვარიანტის დროს $8v + 3w \le 1$

$v \ge 0 \qquad w \ge 0$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ გამონაჭრების საერთო ღირებულება იქნება 1600V+1000W, მივდივართ შემდეგი ამოცანის ამოხსნამდე:

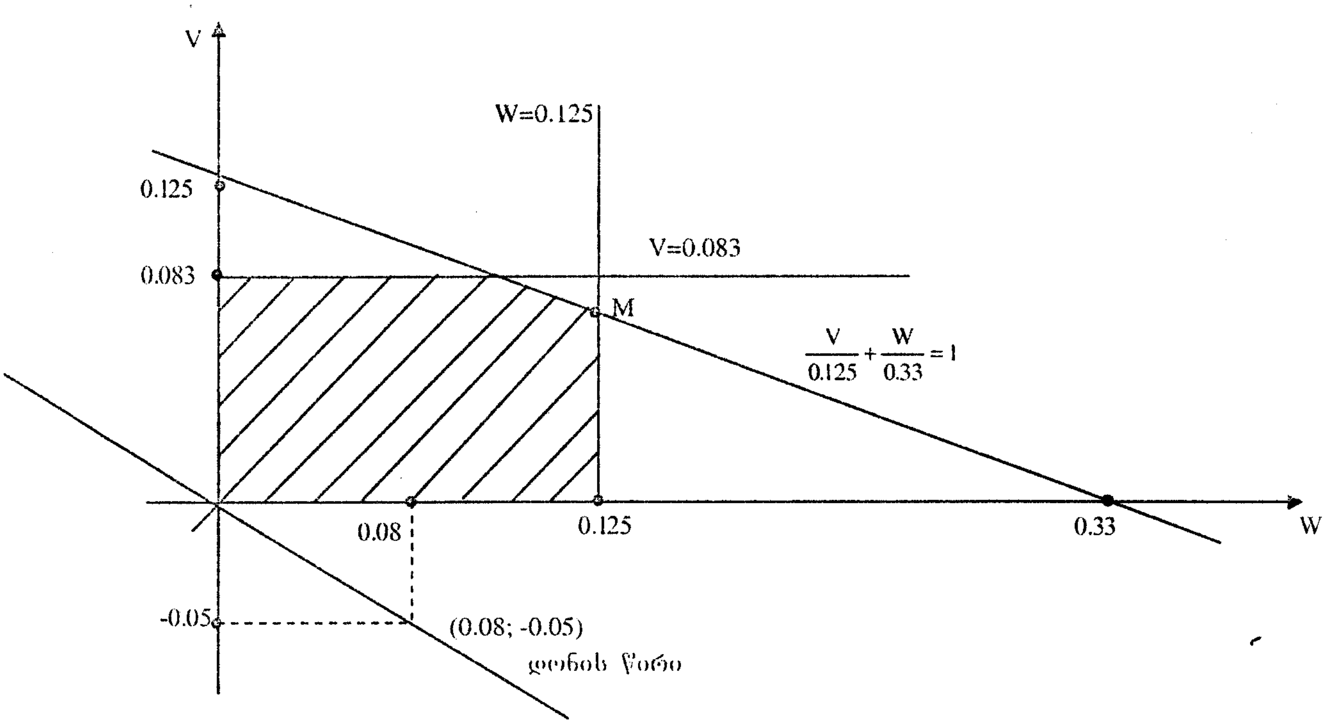
ვიპოვოთ MAX ξ, თუ $\xi = 1600v + 1000w$ (3)

და
$$\begin{cases} 12v + 0w \le 1 \\ 0v + 3w \le 1 \\ 8v + 3w \le 1 \\ v \ge 0; \quad w \ge 0 \end{cases} \qquad (4)$$

ამოვხსნათ ამოცანა გრაფიკული მეთოდით. (4) ასე გადავწეროთ

$$\begin{cases} v \le 0.083 \\ w \le 0.125 \\ \dfrac{v}{0.125} + \dfrac{w}{0.33} \le 1 \\ v \ge 0 \; w \ge 0 \end{cases} \qquad (5)$$

საკოორდინატო სიბრტყეზე მასშტაბის დაცვით ავაგოთ (5) უტოლობებით განსაზღვრული დასაშვებ გეგმათა სიმრავლე



(3) მიზნის ფუნქციის დონის წირი ξ=0-თვის იქნება კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფე

$$1600v + 1000w = 0$$

$$1600v = -1000w$$

$$v = -\frac{5}{8}w$$

ξ ფუნქციის მაქსიმუმის მოსაძებნად დონის წირი უნდა გადაადგილდეს თავის თავის პარალელურად "ზემოთ" დასაშვებ გეგმათა სიმრავლის ბოლო სასაზღვრო წერტილამდე. ჩვენს შემთხვევაში ასეთი წერტილი არის M წერტილი. მისი კოორდინატების განსაზღვრა შეიძლება ნახაზიდან ან შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{cases} w = 0.125 \\ 8v + 3w = 1 \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნით მივიღებთ M(0.125; 0.078). ე.ი. ξ ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს (0.125; 0.078) წერტილში. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები მიზნის ფუნქციის (3) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\xi = 1600 * 0.078125 + 1000 * 0.125 \approx 250$$

ე.ი. თუ A ტიპის 1 გამონაჭრის ღირებულება იქნება 0.078, ხოლო B ტიპის 1 გამონაჭრისა -0.125, მაშინ ღირებულებათა ჯამური სიდიდე (4) პირობების შესრულებისას მაქსიმალური იქნება.

ორადობის თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\min Z \approx \max \xi \approx 250$$

ამოცანა 3.1 ამოცანა 2.2-თვის შეადგინეთ ორადული მოდელი და ამოხსენით ის გრაფიკული მეთოდით.

ამოცანა 3.2 ამოცანა 2.4-თვის შეადგინეთ ორადული მოდელი და ამოხსენით ის გრაფიკული მეთოდით

ამოცანა 3.3 ამოცანა 2.6-თვის შეადგინეთ ორადული მოდელი და ამოხსენით ის გრაფიკული მეთოდით.

ამოცანა 2.2 – 2.7-ის და 3.1 - 3.3-ის ვარიანტები

№	a	b	a_1	b_1	a_2	b_2	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	10	1	4	1	5	1300	2600
2	5	10	1	5	2	3	2600	1300
3	5	10	1	4	2	5	100	1500
4	5	10	1	5	3	3	1000	2000
5	6	10	1	4	3	3	2000	1000
6	6	10	1	4	2	4	1200	2400
7	6	10	1	4	2	3	1500	2500
8	6	9	1	4	1	3	1100	2200
9	6	9	2	3	3	3	1200	2400
10	5	11	2	4	2	3	1300	2600
11	5	11	1	3	2	4	1400	2800
12	5	11	2	5	2	3	1500	1000
13	5	11	2	5	3	3	1500	1000
14	5	11	1	4	2	2	1700	3400
15	5	11	1	4	3	4	1700	3400
16	6	11	2	4	2	5	1200	2400
17	6	11	2	4	2	2	2600	1300
18	6	11	3	4	2	5	2800	1400
19	6	11	2	4	3	3	1500	1000
20	6	11	1	3	2	2	100	2000

თავი 4
ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული ეკონომიკის ამოცანებში

რამდენიმე ზოგადი ცნება

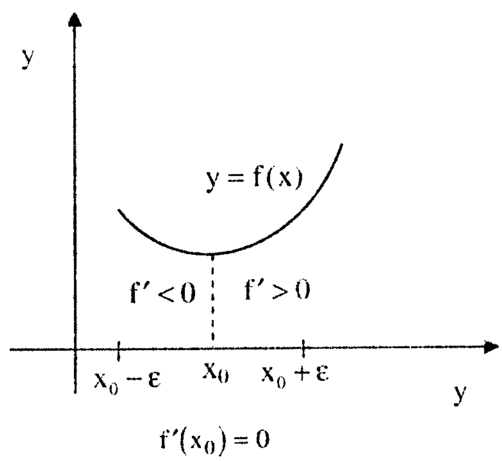
ეკონომიკის მათემატიკური მოდელების შესწავლისას ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებით შესაძლებელია ექსტრემუმის მოძებნა, რაც განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ოპტიმალური მოდელების კვლევისას.

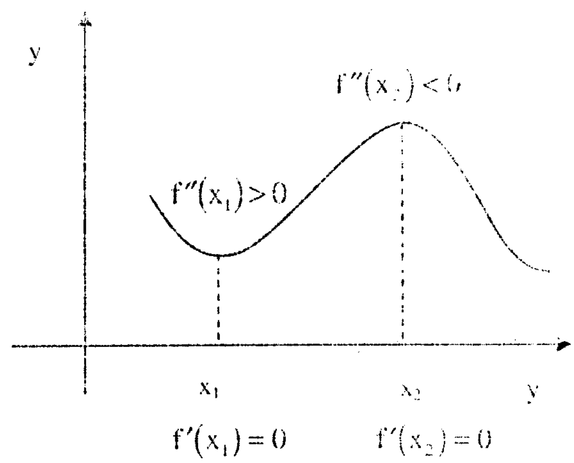
გავიხსენოთ რამდენიმე თეორემა ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის შესახებ (ლოკალურ მაქსიმუმზე ანალოგიური მსჯელობა ტარდება)

თეორემა 1. თუ x_0 წერტილი $y=f(x)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილია ანუ $f'(x_0)=0$ და რომელიმე $\varepsilon>0$-თვის $(x_0-\varepsilon;x_0)$ შუალედში $f'(x)<0$, ხოლო $(x_0;x_0+\varepsilon)$-ში $f'(x_0)>0$, მაშინ $f(x_0)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმია.

თეორემა 2. თუ $y=f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს უწყვეტი I და II რიგის წარმოებულები და $f'(x_0)=0$, მაშინ თუ $f''(x_0)<0$, x_0 მაქსიმუმის წერტილია, თუ $f''(x_0)>0$, x_0–მინიმუმის წერტილია.

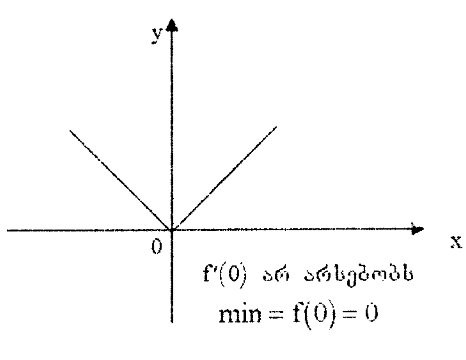
მოვიყვანოთ ამ თეორემების გეომეტრიული ილუსტრაცია.

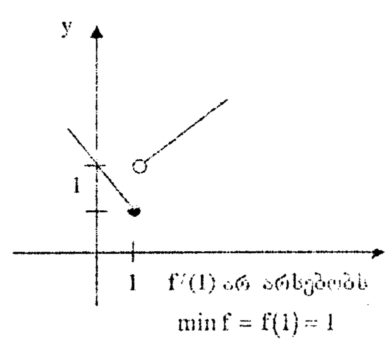




შესაძლებელია $y=f(x)$ ფუნქციას რომელიმე წერტილში ჰქონდეს ლოკალური მინიმუმი, მაგრამ ამ წერტილში წარმოებული არ არსებობდეს. მაგალითად

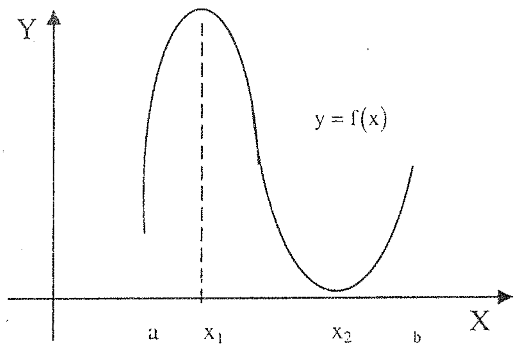
$y=|x|$ ან $y=\begin{cases} 2x & \text{თუ } x>1 \\ -x+2 & \text{თუ } x\le 1 \end{cases}$ ფუნქციებისათვის

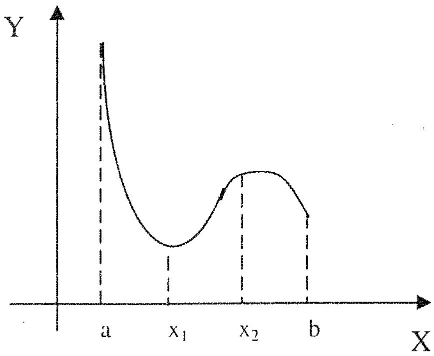




ასეთი შემთხვევები მოითხოვს დამატებით კვლევას.

როდესაც საქმე ეხება ფუნქციის უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას რიცხვით ინტერვალზე, შეიძლება გვქონდეს შემთხვევები





$\max\limits_{[a;b]} f=f(x_1)$

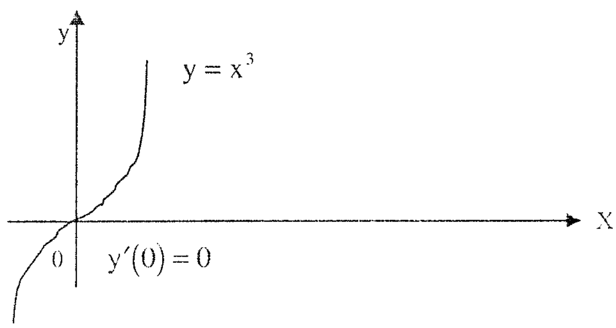
$\min\limits_{[a;b]} f=f(x_2)$

$\max\limits_{[a;b]} f=f(a)$

$\min\limits_{[a;b]} f=f(x_1)$

პრაქტიკული თვალსაზრისით ხშირად სარგებლობენ ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის ასეთი სქემით: ხსნიან $f'(x)=0$ განტოლებას, პოულობენ ფუნქციის სტაციონალურ წერტილებს და მათზე გამოითვლება ფუნქციის მნიშვნელობები, რომელთა შორის შეირჩევა მაქსიმუმი და მინიმუმი.

ზოგ შემთხვევაში ფუნქციის სტაციონალური წერტილი (ანუ წერტილი, რომელშიც წარმოებული ნულის ტოლია) არაა ექსტრემუმის წერტილი. მაგ. $y=x^3$; $y'=3x^2$; $y'(0)=0$, მაგრამ 0 არაა ექსტრემუმის წერტილი



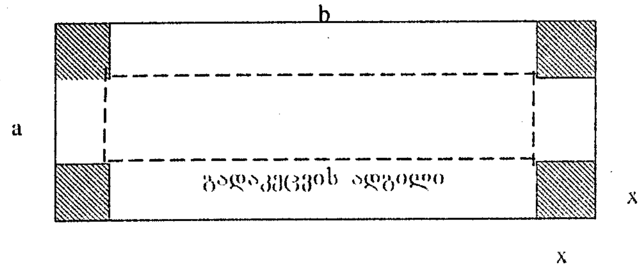
თუ ფუნქცია რთული გასაწარმოებელია, ან $f'(x)=0$ განტოლება არ იხსნება (ან რთული ამოსახსნელია), ან ფუნქცია არაა მოცემული ანალიზური სახით (ფორმულით), მაშინ იყენებენ რიცხვით მეთოდებს. ექსტრემუმების მოძებნის რიცხვითი მეთოდები ძალზე მრავალფეროვანია და მათი რეალიზაცია კომპიუტერზე სირთულეს არ წარმოადგენს.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა წარმოებულის გამოყენებით

განვიხილოთ რამდენიმე პრაქტიკული ამოცანა, რომლების ამოხსნაც თხოულობს ექსტრემუმების პოვნას წარმოებულის გამოყენებით.

ამ ამოცანების მათემატიკური მოდელის აგებისას ვისარგებლოთ ასეთი პრინციპით: რომელიმე "აქტუალური" სიდიდე აღვნიშნოთ x ცვლადით, მოცემული პარამეტრებით და x-ით გამოვსახოთ სიდიდე, რომლის მაქსიმუმსაც (მინიმუმს) ვთხოვენ და $f'(x)=0$ განტოლების ამოხსნით ან რიცხვითი მეთოდით ვიპოვოთ მოითხოვებული ექსტრემუმი.

განვიხილოთ მაგალითი: $a\times b$ ზომის მართკუთხედისაგან უნდა დამზადდეს უდიდესი მოცულობის მქონე ყუთი, კუთხეებიდან კვადრატების გამოჭრით.



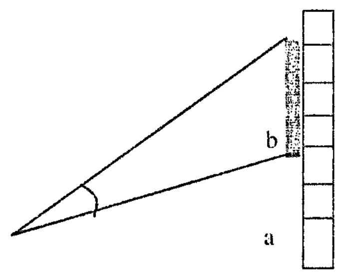
ვთქვათ გამოსაჭრელი კვადრატის გვერდია X, მაშინ ყუთის მოცულობა იქნება შემდეგი გამოსახულება:

$$V = (b-2x)\cdot(a-2x)x.$$

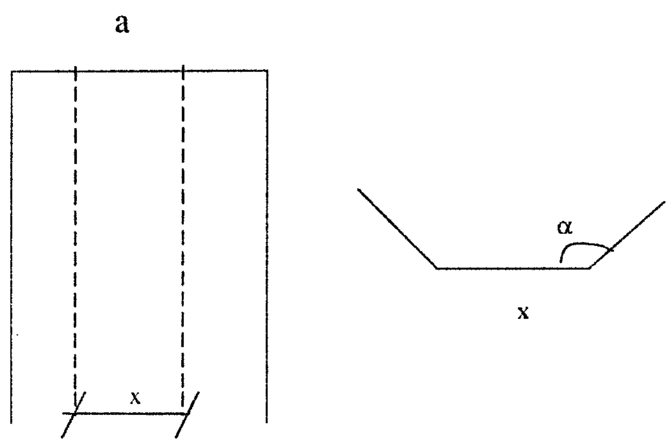
$V' = 0$ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ ფესვებს, რომელთაგან თეორემა 1-ით ან თეორემა 2-ით შევარჩევთ ისეთ ამონახსნს, რომლის დროსაც მიიღწევა მოცულობის მაქსიმუმი. შერჩეული ფესვის მნიშვნელობის ჩასმით მიღებულ გამოსახულებაში მივიღებთ მაქსიმუმის რიცხვით მნიშვნელობას.

ამოცანა 4.1 R რადიუსიანი წრიული დისკოდან გამოვჭრათ სექტორი, რომლისგანაც უდიდესი მოცულობის მქონე კონუსს შევკრავთ.

ამოცანა 4.2 ვერტიკალურ კედელზე მიწიდან a მ-ზე ჰკიდია b მ სიმაღლის რეკლამა. რა მანძილიდან გამოჩნდება რეკლამა უდიდესი კუთხით?



ამოცანა 4.3 a სიგანის მართკუთხა ფურცლისგან უნდა დამზადდეს ტრაპეციული კვეთის წყალსადენი ისე, რომ განივკვეთის ფართობი უდიდესი იყოს. ვიპოვოთ x, თუ $\alpha = 135^0$.



ამოცანა 4.4 **R** რადიუსიანი ბირთვიდან როგორ გამოვჩარხოთ უდიდესი მოცულობის მქონე ცილინდრი? კონუსი?

ამოცანა 4.5 უნდა დამზადდეს V მოცულობის მქონე ცილინდრული ნავთობსაცავი. როგორ შევარჩიოთ პარამეტრები, რომ მინიმალური რაოდენობის მასალა დაიხარჯოს? (ანუ ნავთობის საცავს ჰქონდეს უმცირესი სრული ზედაპირის ფართობი?)

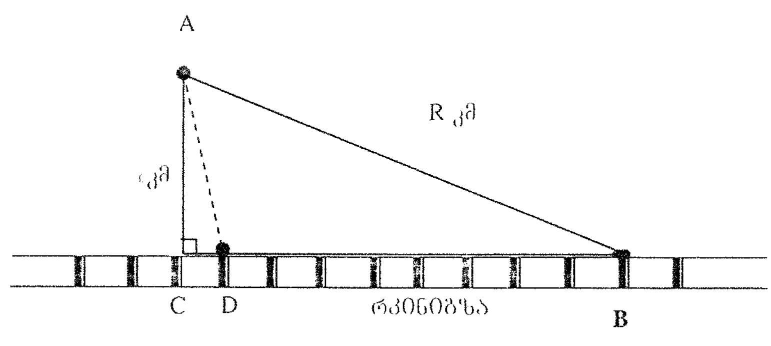
ამოცანა 4.1-4.5-ის ვარიანტები

ცხრილიდან ვიღებთ იმ პარამეტრების მნიშვნელობებს, რომლებიც მითითებულია აღნიშნულ ამოცანებში.

№	R	a	b	V
1	20	3,1	4,0	35000
2	22	3,2	4,1	40000
3	24	3,3	4,2	45000
4	26	3,4	4,3	50000
5	28	3,5	4,4	55000
6	30	3,6	4,5	60000
7	32	3,7	4,6	65000
8	34	3,8	4,7	70000
9	36	3,9	4,8	75000
10	38	4,0	4,9	80000
11	21	2,6	3,1	85000
12	23	2,7	3,2	90000
13	25	2,8	3,3	95000
14	27	2,9	3,4	100000
15	29	3,0	3,5	105000
16	31	3,1	3,6	110000
17	33	3,2	3,7	115000
18	35	3,3	3,8	120000
19	37	3,4	3,9	125000
20	39	3,5	4,0	130000

რკინიგზაზე ტერმინალის შერჩევის ამოცანა

ვთქვათ A პუნქტი სარკინიგზო მაგისტრალიდან დაშორებულია ℓ კმ-ით, ხოლო B პუნქტიდან, რომელიც რკინიგზაზე მდებარეობს R-კმ-ით. A-დან B-ში გადასაზიდია ტვირთების ნაკადი.



ვთქვათ სარკინიგზო მაგისტრალი წრფივი ფორმისაა, ხოლო A-დან საავტომობილო გზა გადის ნებისმიერი მიმართულებით. ერთი ტონა ტვირთის 1 კმ-ზე გადატანის ღირებულება საავტომობილო ტრანსპორტით a ლარია, ხოლო სარკინიგზოთი b ლარი (ცხადია a>b).

დავადგინოთ სად უნდა აშენდეს ტვირთის ავტოტრანსპორტიდან სარკინიგზო ტრანსპორტში გადასატვირთი ტერმინალი, რათა სატრანსპორტო გადაზიდვების ჯამური ღირებულება მინიმალური იყოს.

ავაგოთ ამ ამოცანის მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, ტერმინალი უნდა აშენდეს D პუნქტში. CD=x კმ. უცნობი სიდიდეა. საავტომობილო გზის სიგრძე $AD=\sqrt{\ell^2+x^2}$, ხოლო სარკინიგზოს სიგრძე იქნება $\sqrt{R^2-\ell^2}-x$ კმ.

1 ტ. ტვირთის გადაზიდვა საავტომობილო ტრანსპორტით დაჯდება $a\sqrt{\ell^2+x^2}$ ლარი, სარკინიგზოთი $\left(\sqrt{R^2-\ell^2}-x\right)b$ ლარი. გადაზიდვების ჯამური ღირებულება იქნება

$$f=a\sqrt{\ell^2+x^2}+\left(\sqrt{R^2-\ell^2}-x\right)b \quad (1)$$

(1) ფუნქციის მინიმიზაციისათვის ამოვხსნათ განტოლება

$$f'(x)=0 \quad (2)$$

(1) ფუნქციის II რიგის წარმოებულის გამოკვლევით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (2) განტოლების ამონახსნი მინიმუმის წერტილია და ის შეესაბამება ოპტიმალურ ამონახსნს.

ახლა განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, სარკინიგზო მაგისტრალი ნებისმიერი ტრაექტორიისაა. დავუშვათ, რუკის მიხედვით განვსაზღვრეთ A პუნქტის კოორდინატები $A(x_a,y_a)$ და იმ სარკინიგზო კვანძების კოორდინატები, სადაც შეიძლება ტერმინალის მშენებლობა $(x_i;y_i)$ $i=1,2,\ldots,n$. რომელ კვანძში ავაშენოთ ტერმინალი, რომ სატრანსპორტო გადაზიდვის ღირებულება მინიმალური იყოს?

ნებისმიერი $(x_k;y_k)$ (k=1,2,…,n-1) კვანძისათვის A-დან საავტომობილო გზის სიგრძეა $S_1(k)=\sqrt{(x_A-x_k)^2+(y_A-y_k)^2}\,m$ კმ, სადაც m რუკის მასშტაბია.

საავტომობილო გადაზიდვების ღირებულება იქნება $S_1(k)\cdot a$ ლარი, ხოლო სარკინიგზო მონაკვეთის სიგრძე $(x_k;y_k)$ კვანძიდან B პუნქტამდე თუ ვიგულისხმებთ, რომ სარკინიგზო მაგისტრალი ტეხილითაა აპროქსიმირებული, იქნება

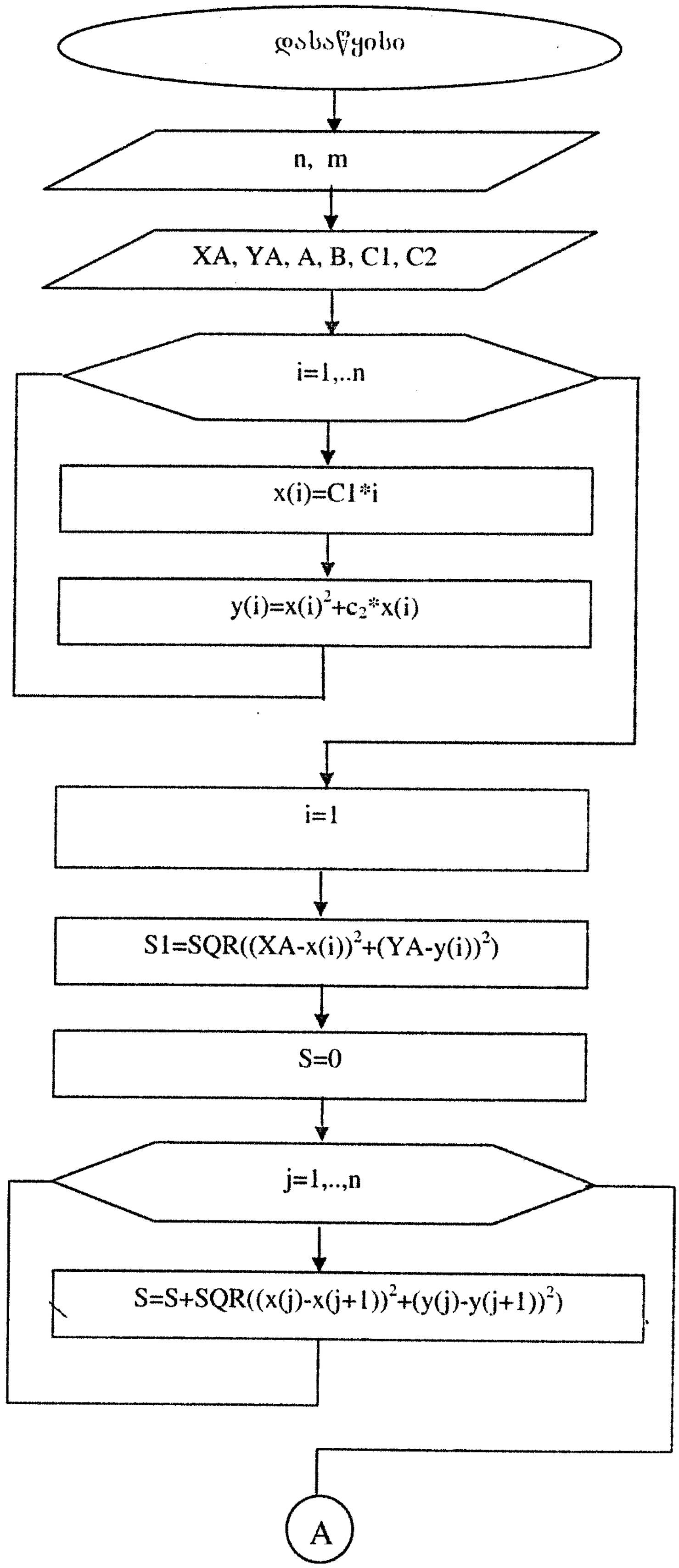
$$S_2(k)\approx\sum_{j=k}^{n-1}\sqrt{(x_j-x_{j+1})^2+(y_j-y_{j+1})^2}\,m \text{ კმ},\ k=1,2,\ldots,n-1$$

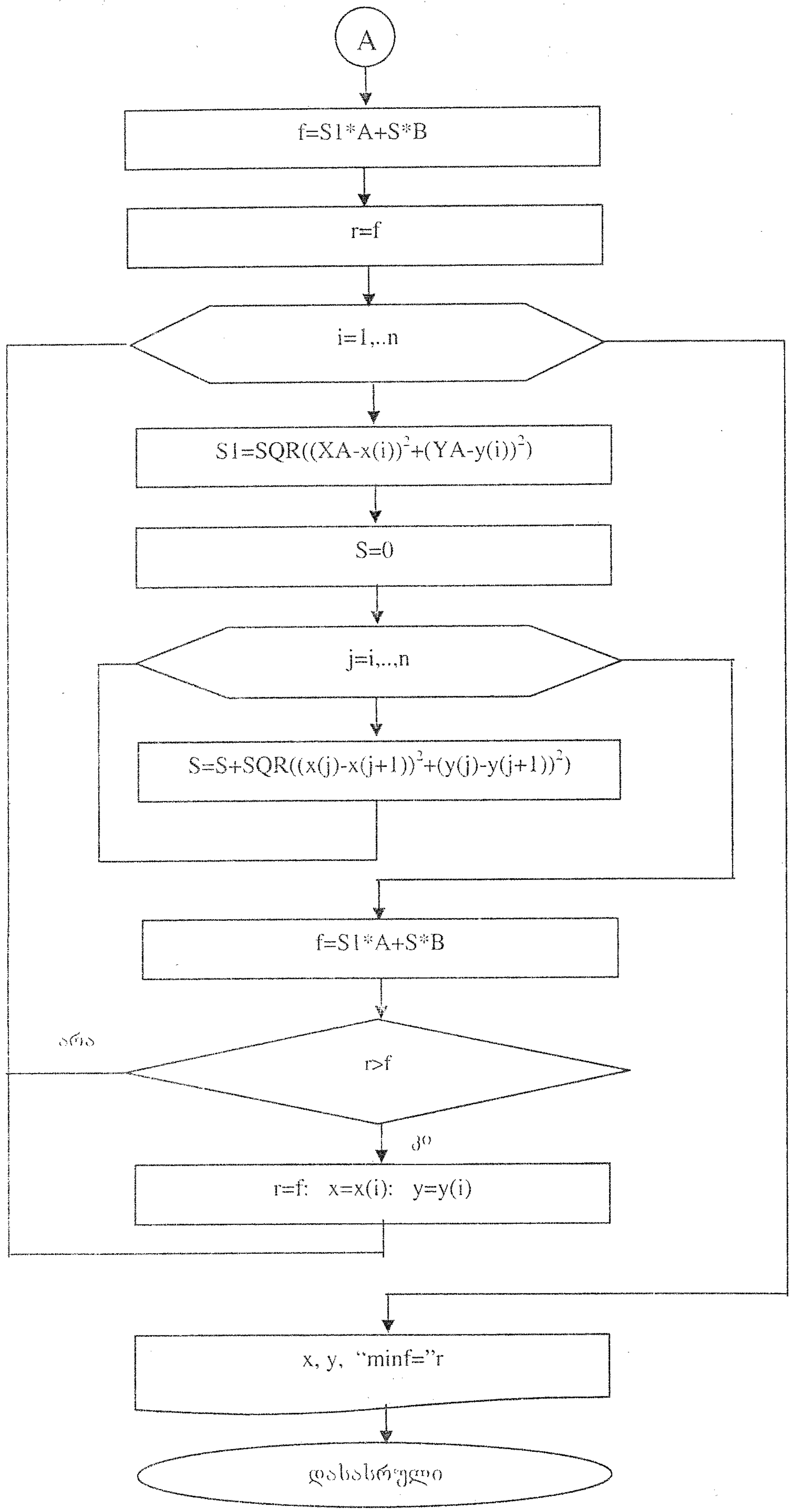
შესაბამისად სარკინიგზო გადაზიდვების ღირებულება იქნება $S_2(k)\cdot b$ ლარი. გადაზიდვების ჯამური ღირებულებაა

$$f=S_1(k)\cdot a+S_2(k)\cdot b \text{ ლარი.}$$

ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ minf, k=1,2,…,n-1

განხილული ალგორითმის ბლოკ-სქემას აქვს სახე




A
f=S1*A+S*B
r=f
i=1,..n
S1=SQR((XA-x(i))^2+(YA-y(i))^2)
S=0
j=i,..,n
S=S+SQR((x(j)-x(j+1))^2+(y(j)-y(j+1))^2)
f=S1*A+S*B
არა
r>f
კი
r=f: x=x(i):   y=y(i)
x, y, "minf="r
დასასრული

შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
CLS
INPUT "n"; N
 DIM x(N), y(N)
INPUT "xa,ya,a,b,c1,c2"; XA, YA, A, B, C1, C2
FOR i = 1 TO N
x(i) = C1 * i
y(i) = x(i) ^ 2 + c2 * x(i)
NEXT i
i = 1
s1 = SQR((XA - x(i)) ^ 2 + (YA - y(i)) ^ 2)
s = 0
FOR j = 1 TO N - 1
s = s + SQR((x(j) - x(j + 1)) ^ 2 + (y(j) - y(j + 1)) ^ 2)
NEXT j
f = s1 * A + s * B
r=f: x = x(i): y = y(i)
FOR i = 1 TO N
s1 = SQR((XA - x(i)) ^ 2 + (YA - y(i)) ^ 2)
s = 0
FOR j = i TO N - 1
s = s + SQR((x(j) - x(j + 1)) ^ 2 + (y(j) - y(j + 1)) ^ 2)
NEXT j
f = s1 * A + s * B
IF r > f THEN r = f: x = x(i): y = y(i)
NEXT i
PRINT "x="; x, "y="; y, "minf="; r
END
```

კომპიუტერული რეალიზაციის შედეგები

საწყისი მონაცემები

```
N = 9
XA= .11        YA= 1.3        A= 2.1        B= 1.2        C1= .25
C2 = .61
```

კომპიუტერზე მიღებული შედეგი

```
x= 1           y= 1.61        minf= 7966.5
```

ამოცანა 4.6 წრფივი სარკინიგზო მაგისტრალის შემთხვევაში განსაზღვრეთ ტერმინალის ასაშენებელი ოპტიმალური ადგილი და განსაზღვრეთ გადაზიდვების ჯამური ღირებულება 1 ტონა ტვირთისათვის.

ამოცანა 4.6-ის ვარიანტები

№	ℓ კმ	r კმ	a ლარი	b ლარი
1	100	400	2.1	1.2
2	120	450	2.2	1.3
3	140	470	2.3	1.4
4	160	480	2.4	1.5
5	180	500	2.5	1.6
6	200	510	2.6	1.7

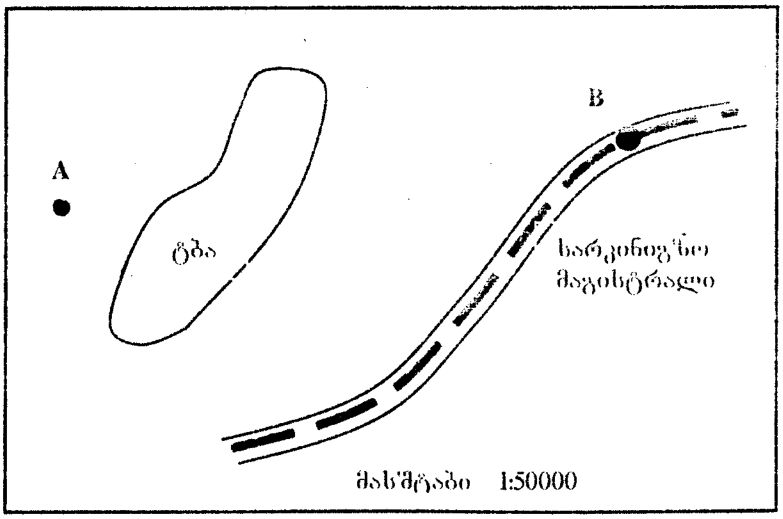
7	220	520	2.7	1.8
8	230	540	2.8	1.9
9	240	550	2.9	1.2
10	250	560	3.0	1.3
11	260	570	3.1	1.4
12	280	590	3.2	1.5
13	300	610	3.3	1.6
14	320	630	3.4	1.7
15	340	620	3.5	1.8
16	130	410	3.6	1.9
17	150	420	3.7	1.4
18	170	440	3.8	1.5
19	190	460	3.9	1.6
20	210	480	3.9	1.7

ამოცანა 4.7. სარკინიგზო მაგისტრალის კვანძების კოორდინატები გამოითვალეთ ასე $x_i = c_1 \cdot i; \quad y_i = c_2 \cdot x_i^2; \quad i = 1,2,\ldots,n$. განსაზღვრეთ სარკინიგზო კვანძი, რომელიც გვაძლევს მინიმალურ სატრანსპორტო დანახარჯებს. განსაზღვრეთ დანახარჯების რაოდენობა ამ კვანძისათვის. მიღებული შედეგების მიხედვით შეადგინეთ ნახაზი.

ამოცანა 4.7-ის ვარიანტები

№	X_A	Y_A	a ლარი	b ლარი	C_1	C_2	n
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.11	1.3	2.1	1.2	0.25	0.61	9
2	0.12	1.2	2.2	1.3	0.26	0.62	10
3	0.13	1.3	2.3	1.4	0.27	0.63	11
4	0.14	1.4	2.4	1.5	0.28	0.64	12
5	0.15	1.5	2.5	1.6	0.29	0.65	9
6	0.16	1.6	2.6	1.7	0.30	0.66	10
7	0.17	1.7	2.7	1.8	0.31	0.67	11
8	0.18	1.8	2.8	1.9	0.32	0.68	12
9	0.19	1.9	2.9	1.2	0.33	0.69	9
10	2.0	1.0	3.0	1.3	0.34	0.68	10
11	0.21	1.1	3.1	1.4	0.35	0.67	11
12	0.22	1.2	3.2	1.5	0.34	0.66	12
13	0.21	1.2	3.3	1.6	0.33	0.65	9
14	0.22	1.4	3.4	1.7	0.32	0.64	10
15	0.23	2.5	3.5	1.8	0.31	0.63	11
16	0.24	2.6	3.6	1.9	0.30	0.62	12
17	0.25	1.7	3.7	1.2	0.29	0.61	9
18	0.21	1.8	3.8	1.3	0.28	0.62	10
19	0.22	1.9	3.9	1.4	0.27	0.63	11
20	0.23	1.9	4.0	1.5	0.26	0.64	12

ამოცანა 4.8 დახაზეთ საკოორდინატო ბადე სქემაზე და შეარჩიეთ სარკინიგზო კვანძი, რომელიც გვაძლევს მინიმალურ სატრანსპორტო დანახარჯებს. განსაზღვრეთ დანახარჯების რაოდენობა ამ კვანძისათვის.



ამოცანა 4.8-ის ვარიანტები

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a ლარი	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
b ლარი	1.2	1.3	1.4	1.3	1.4	1.7	1.6	1.8	1.9	1.8
n	100000	200000	300000	400000	500000	200000	300000	400000	500000	400000

ამოცანა 4.9. ამოხსენით ამოცანა 4.8, თუ ცნობილია, რომ 1 კმ. ხიდის მშენებლობა ტბაზე 1 ტ. ტვირთის საავტომობილო გადაზიდვებს აძვირებს P%-ით.

ამოცანა 4.9-ის ვარიანტები

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

ორი ცვლადის ფუნქცია მიკროეკონომიკის ზოგიერთ ამოცანაში

წარმოებლივი ფუნქცია

დავუშვათ, რომ შრომის რესურსების L და კაპიტალის რესურსების K გამოყენებით მიიღება პროდუქციის გარკვეული რაოდენობა Q. თუ შესაძლებელია ამ სიდიდეებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება აღიწეროს, მაშინ საქმე გვაქვს წარმოებლივ ფუნქციასთან.

$$Q = F(K,L).$$

არსებობს წარმოებლივი ფუნქციის მრავალი სახე. განვიხილოთ ოთხი – ყველაზე გავრცელებული შემთხვევა:

1. წარმოებლივი ფუნქცია რესურსების სრული ურთიერთჩანაცვლებით

$$Q = a_1K + a_2L$$

2. ნეოკლასიკური ანუ კობი-დუგლასის ფუნქცია

$$Q = aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$$

3. ფუნქცია რესურსების სრული ურთიერთდამატებით

$$Q = \min\left\{\frac{K}{a_1}, \frac{L}{a_2}\right\}$$

4. შერეული ტიპის ფუნქცია

$$Q = Q_1 + Q_2\,; \qquad \begin{matrix} K \ge a_1Q_1 + b_1Q_2 \\ L \ge a_2Q_1 + b_2Q_2 \end{matrix}$$

დანახარჯების მინიმიზაციის ამოცანა

განვიხილოთ დანახარჯების მინიმიზაციის ამოცანა ნეოკლასიკური (კობი-დუგლასის) წარმოებლივი ფუნქციით.

$$Q = aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} \qquad (1)$$

$$\alpha_1 > 0;\ \alpha_2 > 0;$$

სადაც K კაპიტალდაბანდების რაოდენობაა, L – შრომის რესურსების რაოდენობა, α_1 და α_2 ელასტიურობის კოეფიციენტებია, რომლებიც გვიჩვენებენ შესაბამისი რესურსების მონაწილეობის წილს Q რაოდენობის პროდუქციის შექმნაში. a-მასშტაბურობის კოეფიციენტია.

დანახარჯების ფუნქცია განვიხილოთ წრფივი სახით:

$$TC = p_1K + p_2L + FC \qquad (2)$$

სადაც p_1 არის K რესურსის ერთეულის ღირებულება, p_2 კი L–ის ერთეულის ღირებულება.

დავუშვათ უნდა დამზადდეს პროდუქციის ფიქსირებული $Q=Q_0$ რაოდენობა. როგორ შევარჩიოთ რესურსების K და L რაოდენობა ისე, რომ სრული დანახარჯების TC რაოდენობა მინიმალური იყოს? (იგულისხმება, რომ ძალაშია (1) და (2) დამოკიდებულება).

FC-Fixed costs – ფიქსირებული დანახარჯები

TC-Total costs – საერთო დანახარჯები

(1)-დან L ცვლადი გამოვსახოთ დანარჩენი პარამეტრებით.

$$L = \left(\frac{Q_0}{aK^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \tag{3}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (2)-ში.

$$TC = p_1K + p_2\left(\frac{Q_0}{aK^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} + FC \tag{4}$$

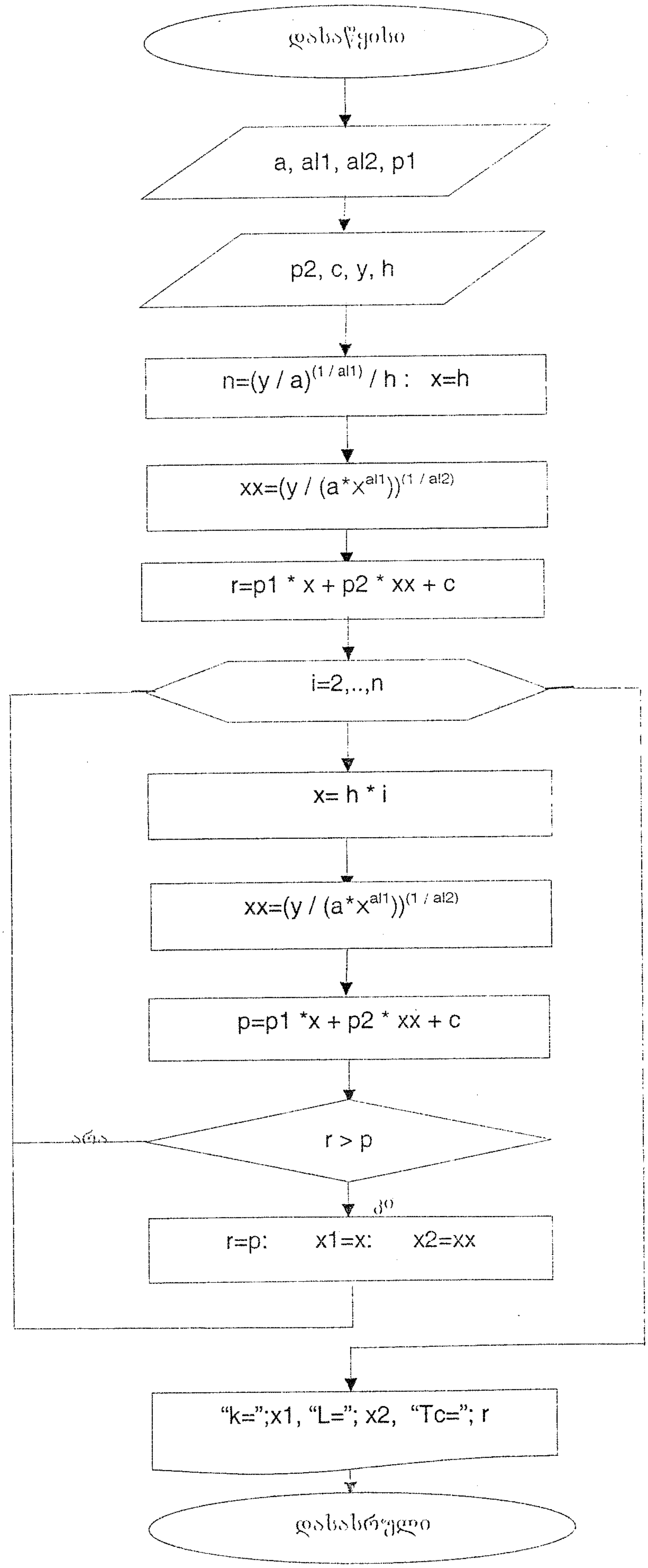
მივიღეთ ერთი ცვლადის ფუნქცია. ვიპოვოთ მისი მინიმუმი. ამისათვის შევარჩიოთ K ცვლადის ცვლილების დიაპაზონი. ვიგულისხმოთ, რომ შრომის რესურსების მინიმალური რაოდენობაა 1 ერთეული ე.ი. $L \geq 1$ მაშინ (3)-დან

$$K \leq \left(\frac{Q_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$$

ე.ი. მინიმუმს ვეძებთ $\left(0; \left(\frac{Q_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]$ შუალედში.

ვიპოვოთ TC ფუნქციის მინიმუმი გადარჩევის მეთოდით. შევარჩიოთ h ბიჯი, გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები $\left(0; \left(\frac{Q_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]$ შუალედის საკვანძო წერტილებში და გამოვითვალოთ მათ შორის მინიმალური.

ამ ალგორითმის ბლოკ-სქემას ასეთი სახე ექნება:



შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
CLS
INPUT "a,al1,al2,p1,p2,c,y,h"; A, AL1, AL2, P1, p2, c, y, h
n = (y / A) ^ (1 / AL1) / h
x = h
xx = (y / (A * x ^ AL1)) ^ (1 / AL2)
r = P1 * x + p2 * xx + c
FOR i = 2 TO n
x = h * i
xx = (y / (A * x ^ AL1)) ^ (1 / AL2)
p = P1 * x + p2 * xx + c
IF r > p THEN
r = p
x1 = x
x2 = xx
END IF
NEXT i
PRINT
PRINT USING " K =####.#"; x1;
PRINT USING "    L=####.#"; x2;
PRINT USING "     (TC)=####.#"; r
END
```

კომპიუტერული რეალიზაციის შედეგები

საწყისი მონაცემები

A= 2	AL1= .5	AL2= .4	P1= 2.1
P2= 3	C= 10	Y= 120	H= .01

კომპიუტერზე მიღებული შედეგები

K = 122.3   L = 68.5   TC = 472.5

(4) TC ფუნქციის მინიმუმის გამოთვლა შეიძლება

$$\frac{dTC}{dK} = 0 \quad (5)$$

განტოლების ამოხსნით. ვთქვათ (5) განტოლების ამონახსნია K^*. თუ შევამოწმებთ $\frac{d^2TC}{dK^2} > 0$ პირობას K^*-თვის, დავრწმუნდებით, რომ K^* არის (4)-ს მინიმუმის წერტილი.

ჩავსვათ K^* (3)-ში, მივიღებთ $L^* = \left(\frac{Q_0}{a\left(K^*\right)^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$.

მიღებული $\left(K^*, L^*\right)$ არის რესურსების ის რაოდენობა, რომელიც გვაძლევს დანახარჯების (2) ფუნქციის მინიმუმსაც და პროდუქციის საჭირო Q_0 რაოდენობასაც.

ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი

ვთქვათ უნდა გამოვთვალოთ

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ფუნქციის მაქსიმუმი შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \ ; \qquad i = 1,2,\dots,m$$

ვიგულისხმოთ, რომ f და g ფუნქციები და მათი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები უწყვეტია. ამოცანის ამოხსნისათვის შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F=(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

λ_i რიცხვებს ლაგრანჟის მამრავლები ეწოდებათ.

თუ F ფუნქციის კერძო წარმოებულებს გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}=0\ ; \quad j=1,2,\ldots,n\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}=g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\ ; \quad i=1,2,\ldots,m\end{cases} \qquad (6)$$

თუ Z ფუნქციის რომელიმე $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ არსებობს ისეთი ვექტორი $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*)$, რომ წერტილი $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*;\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*)$ არის ამ სისტემის ამონახსნი.

ამრიგად (6) სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელშიც Z ფუნქციამ შეიძლება მიიღოს ექსტრემალური მნიშვნელობა. არის თუ არა მოძებნილი ამონახსნი ექსტრემუმის წერტილი, შეიძლება გავარკვიოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობის გამოყენებით, თუ არსებობენ ამ ფუნქციების მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები.

დანახარჯების მინიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება აგრეთვე ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(K\,L\,\lambda)=p_1K+p_2L+FC+\lambda(aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}-Q_0)$$

და ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial K}=p_1+\lambda a\alpha_1L^{\alpha_2}K^{\alpha_1-1}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial L}=p_2+\lambda a\alpha_2L^{\alpha_2-1}K^{\alpha_1}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}-Q_0=0\end{cases} \qquad (6^*)$$

ეს სისტემა ადვილად იხსნება, თუ (6^*)-ის I განტოლებას წევრ-წევრად გავყოფთ II განტოლებაზე (მიიღება წრფივი განტოლება). ნასმის ხერხით III განტოლებიდან მიიღება K^*-ის რიცხვითი მნიშვნელობა და ისევ I-ში ნასმით L^*-ის მნიშვნელობა.

(K^*,L^*) არის ფუნქციის ექსტრემუმის სავარაუდო წერტილი.

იმის დასადგენად (K^*,L^*) მაქსიმუმის წერტილია თუ მინიმუმის, გამოვიყენოთ შემდეგი ცნობილი წესი. თუ ამ წერტილში

$$\frac{\partial^2Q}{\partial K^2}\cdot\frac{\partial^2Q}{\partial L^2}-\left(\frac{\partial^2Q}{\partial K\,\partial L}\right)^2>0 \qquad (6^{**})$$

და ა) $\dfrac{\partial^2y}{\partial K^2}>0$ მაშინ (K^*,L^*) მინიმუმის წერტილია. ბ) თუ $\dfrac{\partial^2Q}{\partial K^2}<0$ -მაქსიმუმის წერტილი. გ) თუ (6^{**}) პირობა არ სრულდება, მაშინ ან არ გვაქვს ექსტრემუმი ან გაურკვეველი შემთხვევაა და საჭიროა დამატებითი კვლევა.

ამოცანა 5.1 პროდუქციის ფიქსირებული Q_0 რაოდენობისათვის (4) ფუნქციის მინიმიზაციით, განსაზღვრეთ რესურსების რაოდენობა ისე, რომ დანახარჯების TC რაოდენობა მინიმალური იყოს.

ამოცანა 5.2 ამოხსენით ამოცანა 5.1 (5) პირობის გამოყენებით

ამოცანა 5.3 ამოხსენით ამოცანა 5.1 ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

ამოცანა 5.4 ამოხსენით ამოცანა 5.1 ერთი ცვლადის ფუნქციის მინიმიზაციით იმ შემთხვევაში, როცა დანახარჯების ფუნქციას აქვს არაწრფივი სახე:

$$TC=p_1K^2+p_2L^2+FC \qquad (7)$$

ამოცანა 5.5 ამოხსენით ამოცანა 5.4 კობი-დუგლასის წარმოებლივი ფუნქციისათვის და დანახარჯების (7) არაწრფივი ფუნქციისათვის ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

ამოცანა 5.1-5.5-ის ვარიანტები

№	a	α_1	α_2	p_1	p_2	(FC)	Q_0	h
1	2	0.5	0.4	2.1	3	10	120	0.01
2	2	0.5	0.5	2.3	3.2	11	130	0.02
3	2	0.5	0.3	1.9	3.2	12	140	0.01
4	2	0.5	0.2	2.1	2.6	13	150	0.02
5	2	0.5	0.4	1.9	3.3	14	160	0.01
6	3	0.4	0.5	3.1	4.5	15	170	0.02
7	3	0.5	0.4	2.5	3.5	16	180	0.01
8	2.4	0.3	0.5	2.5	2.4	17	190	0.03
9	2.4	0.4	0.5	1.5	2.5	18	200	0.02
10	2.4	0.6	0.3	2.5	4.5	19	210	0.03
11	2.4	0.7	0.2	1.5	3.5	20	220	0.04
12	2.5	0.5	0.4	3.8	4.5	21	230	0.04
13	2.5	0.4	0.5	1.9	4.1	22	240	0.04
14	2.5	0.3	0.6	2.4	3.1	23	250	0.05
15	2.5	0.2	0.8	1.5	4.5	24	125	0.05
16	2.5	0.8	0.2	2.5	4.6	25	135	0.05
17	2.5	0.7	0.3	2.5	4.5	26	145	0.05
18	3.5	0.2	0.8	2.5	3.5	27	155	0.06
19	3.5	0.6	0.3	3.5	4.5	28	165	0.06
20	3.5	0.4	0.5	3.5	4.5	29	175	0.06

პროდუქციის რაოდენობის მაქსიმიზაციის ამოცანა

ვთქვათ ძალაშია კობი-დუგლასის წარმოებითი (1) და დანახარჯების (2) ფუნქციები.

$$Q = aK^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2};$$

$$\alpha_1 > 0; \ \alpha_2 > 0$$

$$TC = p_1K + p_2L + FC$$

ამოცანა 5.6 დავუშვათ მოცემული გვაქვს ფიქსირებული რაოდენობის კაპიტალი TC=FTC. შევარჩიოთ რესურსების K და L რაოდენობა ისე, რომ დამზადდეს პროდუქციის მაქსიმალური რაოდენობა.

(2)-დან L გამოვსახოთ დანარჩენი პარამეტრებით

$$L = -\frac{p_1}{p_2}K + \frac{FTC - FC}{p_2} \qquad (8)$$

ჩავსვათ (8) მნიშვნელობა (1)-ში მივიღებთ

$$Q = aK^{\alpha_1} \cdot \left(-\frac{p_1}{p_2}K + \frac{FTC - FC}{p_2}\right)^{\alpha_2} \qquad (9)$$

(9) ფუნქციის მაქსიმუმის მოძებნა შესაძლებელია როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის მინიმიზაციით (ფუნქციის სტაციონალური წერტილის პოვნით და ექსტრემუმის მოძებნით), ასევე გადარჩევის მეთოდის გამოყენებით.

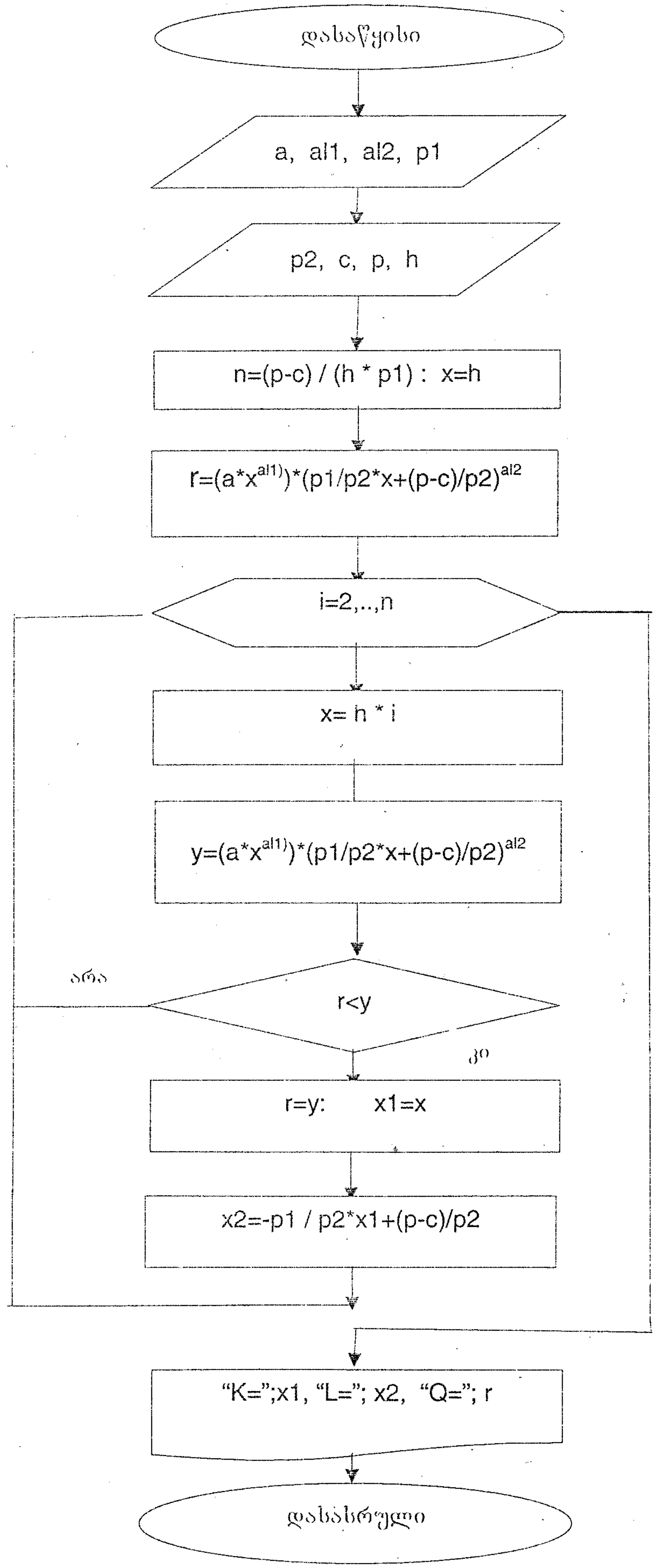
განხილული მოდელის შემთხვევაში K ცვლადის ცვლილების დიაპაზონს განსაზღვრავს (8) დამოკიდებულებები და $K > 0$; $L > 0$ პირობები ე.ი.

$$-\frac{p_1}{p_2}K + \frac{FTC - FC}{p_2} > 0$$

აქედან $K < \dfrac{FTC - FC}{p_1}$

(9) ფუნქციის მაქსიმუმს ვეძებთ $\left(0; \ \dfrac{FTC - FC}{p_1}\right)$ შუალედში.

ამ ალგორითმის ბლოკ-სქემას ასეთი სახე ექნება



შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
CLS
INPUT "a,al1,al2,p1,p2,c,p,h"; A, AL1, AL2, P1, p2, c, p, h
n = (p - c) / (h * P1)
x = h
r = (A * x ^ AL1) * (-P1 / p2 * x + (p - c) / p2) ^ AL2
FOR i = 2 TO n
x = i * h
y = (A * x ^ AL1) * (-P1 / p2 * x + (p - c) / p2) ^ AL2
IF r < y THEN
r = y
x1 = x
x2 = -P1 / p2 * x1 + (p - c) / p2
END IF
NEXT i
PRINT
PRINT USING "K =####.#"; x1;
PRINT USING "     L =####.#"; x2;
PRINT USING "      Q =####.#"; r
END
```

კომპიუტერული რეალიზაციის შედეგები

საწყისი მონაცემები

```
A= 3          AL1= .5       AL2= .4       P1= 2.5
P2= 2.4       C= 17         H= .03
```

კომპიუტერზე მიღებული შედეგი

```
K =  20.2    L =  16.9     Q =  41.8
```

ამრიგად მივიღებთ რესურსების K^* და L^* რაოდენობას, რომლებიც გვაძლევენ დანახარჯების მოცემულ ფიქსირებულ FTC რაოდენობას და პროდუქციის მაქსიმალურ რაოდენობას.

პროდუქციის რაოდენობის მაქსიმიზაციის ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდითაც. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(K,L,\lambda) = aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} + \lambda\left(p_1K + p_2L + FC - FTC\right)$$

და ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial K} = a\alpha_1K^{\alpha_1-1}L^{\alpha_2} + \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} = a\alpha_2K^{\alpha_1}L^{\alpha_2-1} + \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = p_1K + p_2L + FC - FTC = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

სისტემა ადვილად იხსნება, თუ (10)-ის I განტოლებას წევრ-წევრად გავყოფთ II განტოლებაზე. მიიღება წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, რომლის ამონახსნი $\left(K^*,L^*\right)$ არის (1) Q ფუნქციის ექსტრემუმის სავარაუდო წერტილი. (6^{**}) პირობის შემოწმებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ მიღებული წერტილი გვაძლევს (1) ფუნქციის მაქსიმუმს.

ამოცანა 5.7 ამოხსენით ამოცანა 5.6 ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

ამოცანა 5.8 ამოხსენით ამოცანა 5.6 ერთი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმიზაციით, თუ დანახარჯების ფუნქციას აქვს არაწრფივი სახე

$$FTC = p_1K^2 + p_2L^2 + FC \qquad (11)$$

ამოცანა 5.9 ამოხსენით ამოცანა 5.8 ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

მოგების მაქსიმიზაციის ამოცანა

განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ძალაშია (1), (2) დამოკიდებულებები და არაა ფიქსირებული არც პროდუქციის რაოდენობა და არც დანახარჯები TC. ვთქვათ პროდუქციის ერთეულის ღირებულებაა p ლარი. მაშინ სრული ამონაგების რაოდენობა $TR = p \cdot Q$, ხოლო მოგება.

$$\Pi = TR - TC \quad \text{ანუ}$$

$$\Pi = p \cdot aK^{\alpha_1} L^{\alpha_2} - (p_1 K + p_2 L + FC) \qquad (12)$$

ჩვენი მიზანია მაქსიმალური მოგების მიღება..

ორი ცვლადის (K და L) (12) ფუნქციის მაქსიმუმის გამოთვლა შეიძლება

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial K} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

სისტემის ამოხსნით.

უპირობო მაქსიმუმის მოძებნის ამოცანა შეიძლება გადაწყდეს აგრეთვე გრადიენტული დაშვების მეთოდითაც.

ამოცანა 5.10 (1) და (2) დამოკიდებულებებისათვის იპოვეთ კაპიტალისა და შრომის რესურსების რაოდენობა, რომლებიც გვაძლევენ მაქსიმალურ მოგებას (12) ფუნქციისათვის. ამოხსენით ამოცანა (13) სისტემის ამოხსნით.

ამოცანა 5.11 ამოხსენით ამოცანა 5.10 გრადიენტული დაშვების მეთოდით.

ამოცანა 5.6 - 5.11-ის ვარიანტები

№	a	α_1	α_2	p_1	p_2	FC	FTC	h	p
1	2	0.5	0.4	2.1	3	10	101	0.01	6
2	2	0.5	0.5	2.3	3.2	11	102	0.02	7
3	2	0.5	0.3	1.9	3.2	12	103	0.01	8
4	2	0.5	0.2	2.1	2.6	13	104	0.02	9
5	2	0.5	0.4	1.9	3.3	14	105	0.01	10
6	3	0.4	0.5	3.1	4.5	15	106	0.02	11
7	3	0.5	0.4	2.5	3.5	16	107	0.01	12
8	2.4	0.3	0.5	2.5	2.4	17	108	0.03	13
9	2.4	0.4	0.5	1.5	2.5	18	109	0.02	14
10	2.4	0.6	0.3	2.5	4.5	19	110	0.03	15
11	2.4	0.7	0.2	1.5	3.5	20	111	0.04	16
12	2.5	0.5	0.4	3.8	4.5	21	112	0.04	17
13	2.5	0.4	0.5	1.9	4.1	22	113	0.04	6
14	2.5	0.3	0.6	2.4	3.1	23	120	0.05	7
15	2.5	0.2	0.8	1.5	4.5	24	121	0.05	8
16	2.5	0.8	0.2	2.5	4.6	25	122	0.05	9
17	2.5	0.7	0.3	2.5	4.5	26	123	0.05	10
18	3.5	0.2	0.8	2.5	3.5	27	124	0.06	11
19	3.5	0.6	0.3	3.5	4.5	28	125	0.06	12
20	3.5	0.4	0.5	3.5	4.5	29	126	0.06	13

თავი 6
მოთხოვნა - მიწოდების წონასწორობის მოდელი

წონასწორობის ცნება

ვთქვათ ბაზარზე გვაქვს რაიმე სახეობის პროდუქცია. ფუნქციას, რომელიც გვიჩვენებს რა მიმართებაა ამ პროდუქციის ერთეულის ფასსა და მასზე მოთხოვნას შორის მოთხოვნის ფუნქცია ეწოდება. აღვნიშნოთ ის $y = D(P)$ -ით სადაც P პროდუქციის ერთეულის ფასია.

დავუშვათ არსებობს მიმწოდებელი, რომელიც ბაზარზე საქონელს აწვდის ფასის შესაბამისად და ამ შესაბამისობას აქვს $z = S(P)$ სახე.

თუ რომელიმე $\overline{P}$ ფასისათვის $D(\overline{P}) > S(\overline{P})$, ე.ი. მოთხოვნა მეტია მიწოდებაზე, მაშინ გვაქვს ამ საქონლის დეფიციტი, ხოლო თუ $D(\overline{P}) < S(\overline{P})$ მაშინ გვაქვს ჭარბი საქონელი. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ P^* ფასი, რომლისთვისაც მოთხოვნისა და მიწოდების რაოდენობები ტოლია ე.ი.

$$D(P^*) = S(P^*)$$

ანუ გვაქვს წონასწორობა ბაზარზე.

ბუნებრივია $D(P)$ ფუნქცია კლებადია (რაც მეტია ფასი, ნაკლებია მოთხოვნა). $S(P)$ კი ზრდადი ფუნქციაა. (ფასის ზრდა იწვევს მიწოდებული საქონლის რაოდენობის ზრდას).

წონასწორობის ფასის მოსაძებნად საჭიროა $D(P) = S(P)$ განტოლების ამოხსნა.

წონასწორობის ერთი შემთხვევა

ვთქვათ ვიცით, რომ ფასების სამ მნიშვნელობას P_1, P_2 და P_3-ს შეესაბამება მოთხოვნის სამი შესაბამისი მნიშვნელობა D_1, D_2 და D_3, და მიწოდების სამი მნიშვნელობა S_1, S_2 და S_3. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციების მისაღებად შევადგინოთ იმ გრაფიკების განტოლებები, რომლებიც მოცემულ სამ წერტილზე გადის. ასეთ ფუნქციებად შევარჩიოთ კვადრატული სამწევრები, რომლებიც გადიან $(P_1;D_1)$; $(P_2;D_2)$;; $(P_3;D_3)$ და $(P_1;S_1)$; $(P_2;S_2)$ და $(P_3;S_3)$ წერტილებზე. ამისათვის ამოვხსნათ სისტემები:

$$\begin{cases} D_1 = a_1P_1^2 + b_1P_1 + c_1 \\ D_2 = a_1P_2^2 + b_1P_2 + c_1 \\ D_3 = a_1P_3^2 + b_1P_3 + c_1 \end{cases} \qquad (1)$$

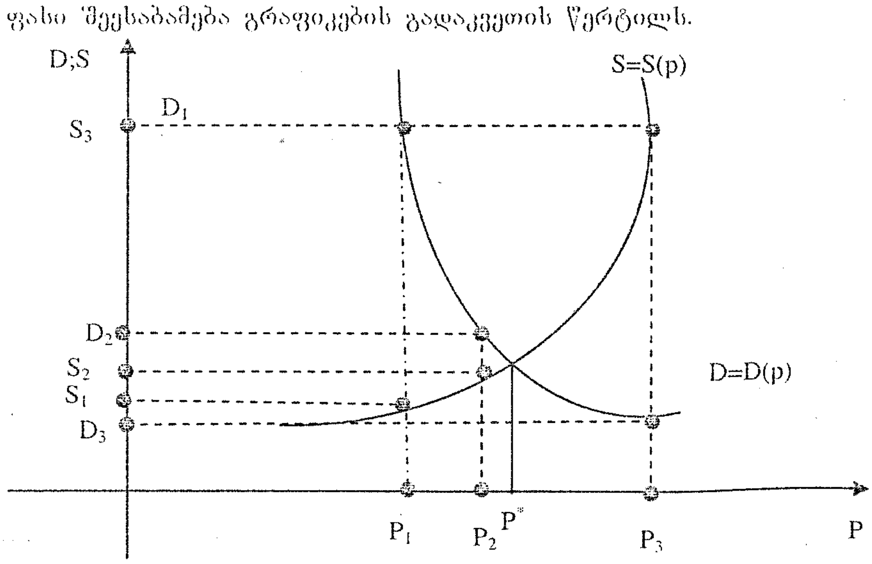
$$\begin{cases} S_1 = a_2P_1^2 + b_2P_1 + c_2 \\ S_2 = a_2P_2^2 + b_2P_2 + c_2 \\ S_3 = a_2P_3^2 + b_2P_3 + c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

(1) და (2) სისტემების ამოხსნით ვპოულობთ უცნობ $a_1;b_1;c_1$; და $a_2;b_2;c_2$ პარამეტრებს და ვღებულობთ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციებს.

$$D = a_1P^2 + b_1P + c_1 \qquad (3)$$

$$S = a_2P^2 + b_2P + c_1 \qquad (4)$$

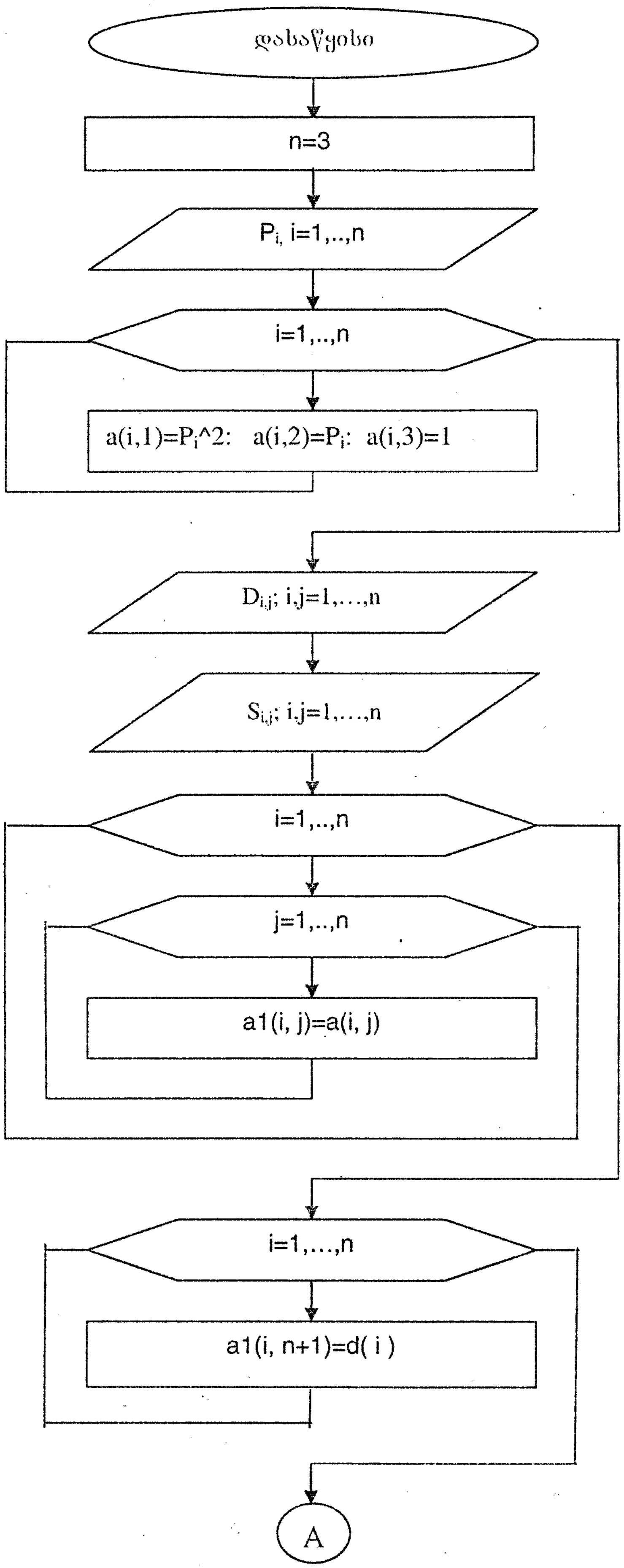
წონასწორობის ფასი შეესაბამება გრაფიკების გადაკვეთის წერტილს.

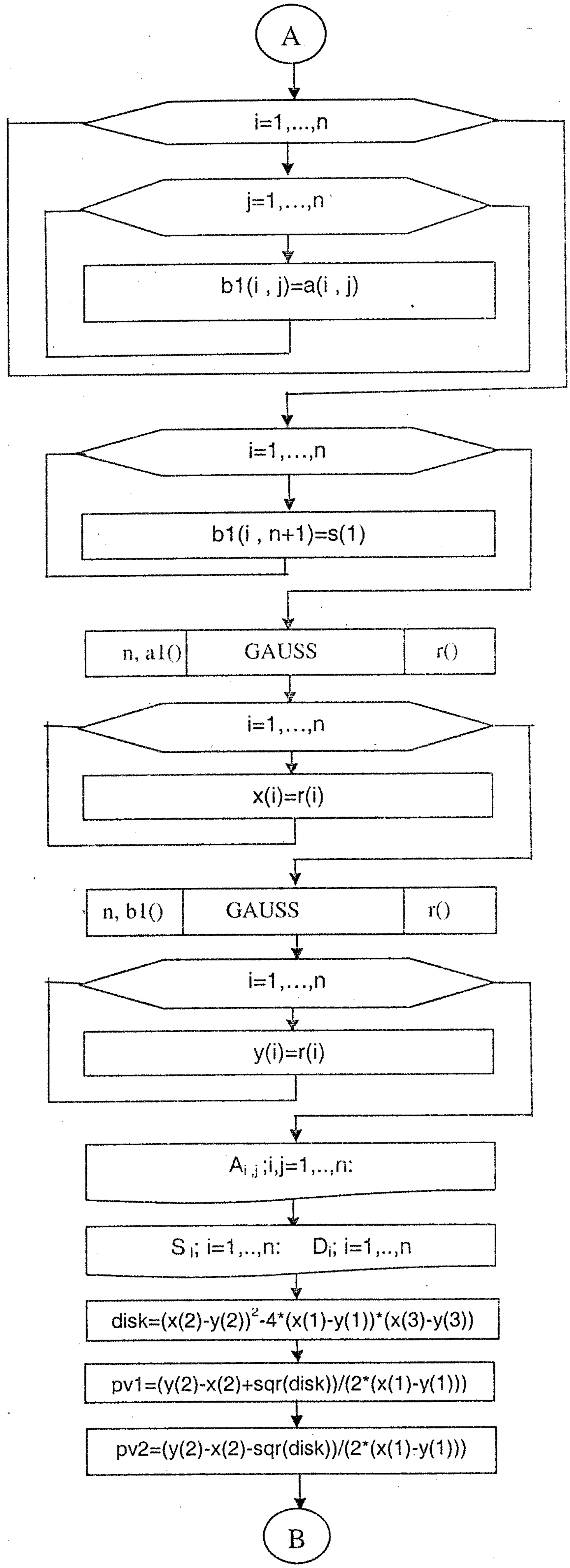


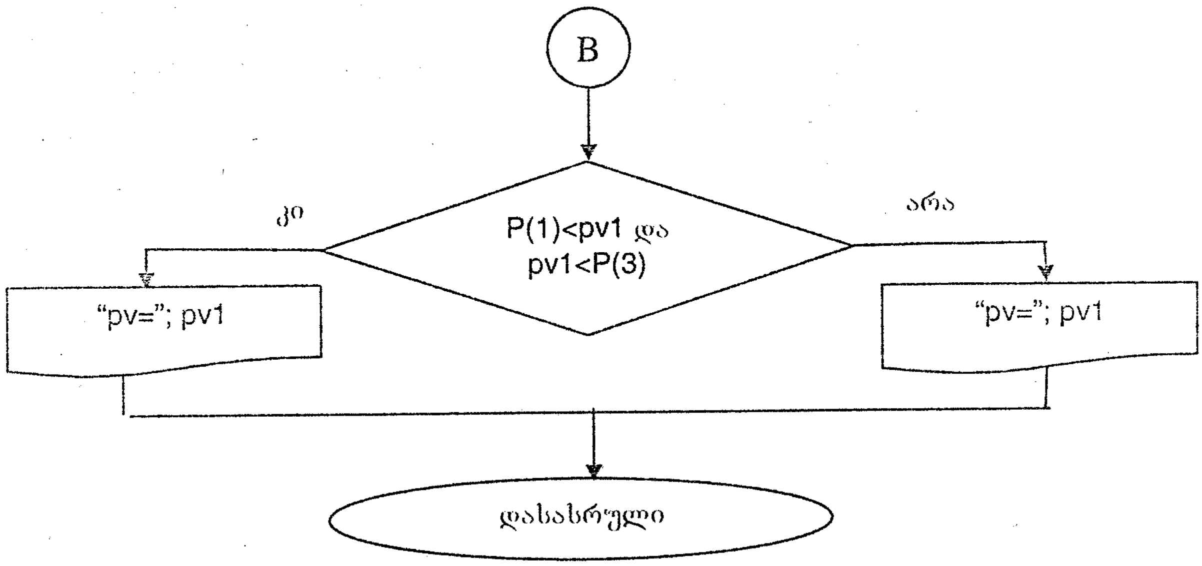
D-Demend მოთხოვნა
S-Supply მიწოდება

წონასწორობის ფასის ანალიზურად მისაღებად უნდა ამოიხსნას განტოლება D(P)=S(P) ანუ $a_1P^2 + b_1P + c_1 = a_2P^2 + b_2P + c_2$. ამ განტოლების ამოხსნით ვღებულობთ P^* წონასწორობის ფასს.

განხილული ალგორითმის ბლოკ-სქემას ექნება შემდეგი სახე




A
i=1,...,n
j=1,...,n
b1(i , j)=a(i , j)
i=1,...,n
b1(i , n+1)=s(1)
n, a1()
GAUSS
r()
i=1,...,n
x(i)=r(i)
n, b1()
GAUSS
r()
i=1,...,n
y(i)=r(i)
A i,j ;i,j=1,..,n:
S i; i=1,..,n: D i; i=1,..,n
disk=(x(2)-y(2))^2-4*(x(1)-y(1))*(x(3)-y(3))
pv1=(y(2)-x(2)+sqr(disk))/(2*(x(1)-y(1)))
pv2=(y(2)-x(2)-sqr(disk))/(2*(x(1)-y(1)))
B



შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
DECLARE SUB gauss (n, a1(), r())
DIM a(3, 3), a1(3, 4), s(3), d(3), b1(3, 4), x(3), y(3), r(3)
n = 3
CLS
OPEN "TEMO5.DAT" FOR OUTPUT AS #1
PRINT "შემოიტანეთ p ვექტორის ელემენტები"
FOR i = 1 TO 3
INPUT p(i)
NEXT i
FOR i = 1 TO 3
a(i, 1) = p(i) ^ 2
a(i, 2) = p(i)
a(i, 3) = 1
NEXT i
PRINT
PRINT "შემოიტანეთ D ვექტორის ელემენტები"
FOR i = 1 TO n
INPUT d(i)
NEXT i
CLS
'===============
PRINT " შემოიტანეთ s ვექტორის ელემენტები "
FOR i = 1 TO n
INPUT s(i)
NEXT i
CLS
'================
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO n
a1(i, j) = a(i, j)
NEXT j
NEXT i `
FOR i = 1 TO n
a1(i, n + 1) = d(i)
NEXT i
'=================
```

```
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO n
b1(i, j) = a(i, j)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 1 TO n
b1(i, n + 1) = s(i)
NEXT i
'=================
CALL gauss(n, a1(), r())
FOR i = 1 TO n
x(i) = r(i)
NEXT i
CALL gauss(n, b1(), r())
FOR i = 1 TO n
y(i) = r(i)
NEXT I
'===================
PRINT "p ვექტორის ელემენტები "
PRINT
FOR i = 1 TO 3
PRINT p(i),
NEXT i

'===================
PRINT
PRINT "                A მატრიცა"
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO n
PRINT USING "###"; a(i, j);
NEXT j
PRINT
NEXT i
PRINT
'===================
PRINT "                S ვექტორი "
FOR i = 1 TO n
PRINT s(i);
NEXT i
PRINT
PRINT
'===================
PRINT
PRINT "                    D ვექტორი"
FOR i = 1 TO n
PRINT d(i);
NEXT i
'===================
disk = (x(2) - y(2)) ^ 2 - 4 * (x(1) - y(1)) * (x(3) - y(3))
pv1 = (y(2) - x(2) + SQR(disk)) / (2 * (x(1) - y(1)))
pv2 = (y(2) - x(2) - SQR(disk)) / (2 * (x(1) - y(1)))
IF p(1) < pv1 AND pv1 < p(3) THEN pv = pv1 ELSE pv = pv2
PRINT using " pv= ####.###";    pv
END

1000 SUB gauss (n, a1(), r())
1010 FOR i = 1 TO n - 1
1020 c = a1(i, i)
1030 FOR j = 1 TO n + 1
1040 a1(i, j) = a1(i, j) / c
1050 NEXT j
1060 FOR k = i + 1 TO n
1070 c = a1(k, i)
1080 FOR l = 1 TO n + 1
1090 a1(k, l) = a1(k, l) - a1(i, l) * c
1100 NEXT l
```

```
a1(i, n + 1) = d(i)
NEXT i
'==================
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO n
b1(i, j) = a(i, j)
NEXT j
NEXT i
FOR i = 1 TO n
b1(i, n + 1) = s(i)
NEXT i
'==================
CALL gauss(n, a1(), r())
FOR i = 1 TO n
x(i) = r(i)
NEXT i
CALL gauss(n, b1(), r())
FOR i = 1 TO n
y(i) = r(i)
NEXT I
'====================
PRINT "p ვექტორის ელემენტები "
PRINT
FOR i = 1 TO 3
PRINT p(i),
NEXT i

'====================
PRINT
PRINT "                A მატრიცა"
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO n
PRINT USING "###"; a(i, j);
NEXT j
PRINT
NEXT i
PRINT
'====================
PRINT "                 S ვექტორი "
FOR i = 1 TO n
PRINT s(i);
NEXT i
PRINT
PRINT
'====================
PRINT
PRINT "                    D ვექტორი"
FOR i = 1 TO n
PRINT d(i);
NEXT i
'====================
disk = (x(2) - y(2)) ^ 2 - 4 * (x(1) - y(1)) * (x(3) - y(3))
pv1 = (y(2) - x(2) + SQR(disk)) / (2 * (x(1) - y(1)))
pv2 = (y(2) - x(2) - SQR(disk)) / (2 * (x(1) - y(1)))
IF p(1) < pv1 AND pv1 < p(3) THEN pv = pv1 ELSE pv = pv2
PRINT using " pv= ####.###";   pv
END

1000 SUB gauss (n, a1(), r())
1010 FOR i = 1 TO n - 1
1020 c = a1(i, i)
1030 FOR j = 1 TO n + 1
1040 a1(i, j) = a1(i, j) / c
1050 NEXT j
1060 FOR k = i + 1 TO n
```

```
1070 c = a1(k, i)
1080 FOR l = 1 TO n + 1
1090 a1(k, l) = a1(k, l) - a1(i, l) * c
1100 NEXT l
1110 NEXT k
1120 NEXT i
1130 r(n) = a1(n, n + 1) / a1(n, n)
1140 k = n - 1
1150 s = 0
1160 m = k + 1
1170 FOR j = m TO n
1180 s = s + a1(k, j) * r(j)
1190 NEXT j
1200 r(k) = a1(k, n + 1) - s
1210 k = k - 1
1220 IF k <> 0 THEN GOTO 1150
1230 END SUB
```

კომპიუტერული რეალიზაციის შედეგები

საწყისი მონაცემები

p ვექტორის ელემენტები

```
 2            3            4
```

A მატრიცა

```
  4  2  1
  9  3  1
 16  4  1
```

S ვექტორი

```
  1  2  4
```

D ვექტორი

```
 4  3  1
```

კომპიუტერზე მიღებული შედეგი

```
pv = 3.302
```

თუ მოცემული გვაქვს დიდი რაოდენობის ექსპერიმენტული წერტილები და საჭიროა მათი აპროქსიმაცია მრავალწევრით (ან სხვა ფუნქციით), მაშინ ხშირად მიმართავენ აპროქსიმაციის უმცირეს კვადრატთა მეთოდს. მისი არსია ექსპერიმენტული წერტილებზე გავატაროთ მრუდი ისე, რომ ამ მრუდისგან ექსპერიმენტული წერტილების “გადახრების” კვადრატების ჯამი მინიმალური იყოს.

ვთქვათ მოცემულია n წერტილი კოორდინატებით $(x_i;y_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. დავუშვათ სააპროქსიმაციო მრავალწევრს აქვს კვადრატული სამწევრის სახე:

$$\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2,$$

მაშინ ჩვენი მიზანია

$$\phi(\alpha_0;\alpha_1;\alpha_2)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_0+\alpha_1x_i+\alpha_2x_i^2-y_i\right)^2$$

ფუნქციის მინიმიზაცია.

ϕ ფუნქციის მინიმუმის მოსაძებნად ამოვხსნათ სისტემა.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_0} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_2} = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

გაწარმოებით და მარტივი გარდაქმნებით (5) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \alpha_0 n + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases} \qquad (6)$$

(6) არის წრფივი სამუცნობიანი განტოლებათა სისტემა α_0, α_1 და α_2 უცნობების მიმართ, რომლის ამოხსნითაც მივიღებთ აღნიშნული უცნობების რიცხვით მნიშვნელობებს.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება მატრიცული ფორმითაც, ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$X = \begin{pmatrix} 1\ x_1\ x_1^2 \\ 1\ x_2\ x_2^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1\ x_n\ x_n^2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

მაშინ (6) სისტემის კოეფიციენტების მატრიცა ჩამოყალიბდება ასე:

$$X^T \cdot X \qquad (7)$$

სადაც X^T არის X მატრიცის ტრანსპონირებული.
თავისუფალი წევრების ვექტორ-სვეტი მიიღება

$$X^T \cdot Y \qquad (8)$$

ნამრავლით.

ამოცანა 6.1. მოცემული პარამეტრებისათვის განსაზღვრეთ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები კვადრატული საწევრის სახით. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და მოთხოვნისა და მიწოდების რაოდენობა წონასწორობის შემთხვევაში. გამოთვლები შეასრულეთ კომპიუტერზე. განტოლებათა სისტემების ამოხსნა შეასრულეთ ქვეპროგრამის გამოყენებით.

ამოცანა 6.2. მოცემული პარამეტრებით გამოთვალეთ მეოთხე პარამეტრი ფორმულებით $P_4 = \frac{P_2 + P_3}{2}$, $D_4 = \frac{D_2 + D_3}{2}$, $S_4 = \frac{S_2 + S_3}{2}$ განსაზღვრეთ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მესამე ხარისხის პოლინომების სახით. იპოვეთ წონასწორობის ფასი, მოთხოვნისა და მიწოდების რაოდენობა ამ ფასისათვის. კუბური განტოლება ამოხსენით ერთერთი რიცხვითი მეთოდით.

ამოცანა 6.3. ამოცანა 6.2.-ში დაამატეთ მეხუთე პარამეტრი $P_5 = \frac{P_1 + P_2}{2}$; $D_5 = \frac{D_1 + D_2}{2}$. $S_5 = \frac{S_1 + S_2}{2}$. მოცემული პარამეტრებისათვის უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შეასრულეთ აპროქსიმაცია კვადრატული სამწევრით. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და მიწოდებისა და მოთხოვნის ფუნქციების მნიშვნელობები.მიღებული შედეგები შეადარეთ ამოცანა 6.2.-ის შედეგებს.

ამოცანა 6.4. ამოხსენით ამოცანა 6.3 შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით.

ამოცანა 6.1-6. 4 -ის ვარიანტები

№	ფასების მნიშვნელობები			მოთხოვნის მნიშვნელობები			მიწოდების მნიშვნელობები		
	P_1	P_2	P_3	D_1	D_2	D_3	S_1	S_2	S_3
1	2	3	4	4	3	1	1	2	4
2	2	3	5	5	4	2	2	3	5
3	2	3	6	6	5	3	3	4	6
4	2	3	7	7	6	4	4	5	7
5	2	3	8	8	7	5	5	6	8
6	2	3	9	9	8	6	6	7	9
7	2	4	5	10	9	7	7	8	10
8	2	4	6	4	3	1	2	4	5
9	2	4	7	5	4	2	3	5	6
10	2	4	8	6	5	3	4	6	7
11	2	4	9	7	6	4	5	7	8
12	2	5	6	8	7	5	6	8	9
13	2	5	7	9	8	6	7	9	10
14	2	5	8	10	9	5	5	7	10
15	2	5	9	5	4	2	1	2	6
16	3	5	7	6	5	3	2	3	7
17	3	5	8	7	6	4	3	4	8
18	3	5	9	8	7	5	4	5	9
19	3	4	5	9	8	6	5	6	10
20	3	4	6	10	9	4	3	6	11

თავი 7
მათემატიკა ზოგიერთ საბანკო ამოცანაში

ბანკის ოპტიმალურად შერჩევის ამოცანა

თუ ბანკი გვთავაზობს k ლარის ოდენობის ანაბარზე ყოველი წლის ბოლოს საწყის თანხაზე r%-იან დარიცხვას, მაშინ გვაქვს მარტივი r%-იანი განაკვეთი და n წლის ბოლოს დაგროვილი თანხის რაოდენობა იქნება

$$k_n = k + k\frac{r}{100}n$$

ანუ

$$k_n = k(1+\frac{r}{100}n) \quad (1)$$

თუ დარიცხვა ხდება ყოველწლიურად მიმდინარე თანხაზე r%-ის დამატებით, მაშინ გვაქვს დარიცხვის r%-იან რთული განაკვეთი. ამ შემთხვევაში თანხის რაოდენობა

I წლის ბოლოს $k_1 = k + k\frac{r}{100} = k\left(1+\frac{r}{100}\right)$

II წლის ბოლოს $k_2 = k_1 + k_1\frac{r}{100} = k_1\left(1+\frac{r}{100}\right) = k\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

....

n წლის ბოლოს

$$k_n = k\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \quad (2)$$

თუ დარიცხვა ხდება რთული r%-იანი წლიური განაკვეთით წელიწადში m-ჯერ, მაშინ დარიცხვის პერიოდში თანხას დაემატება მიმდინარე თანხის $\frac{r}{m}$%, ხოლო პერიოდების რაოდენობა იქნება mn. შესაბამისად თანხა n წლის შემდეგ იქნება

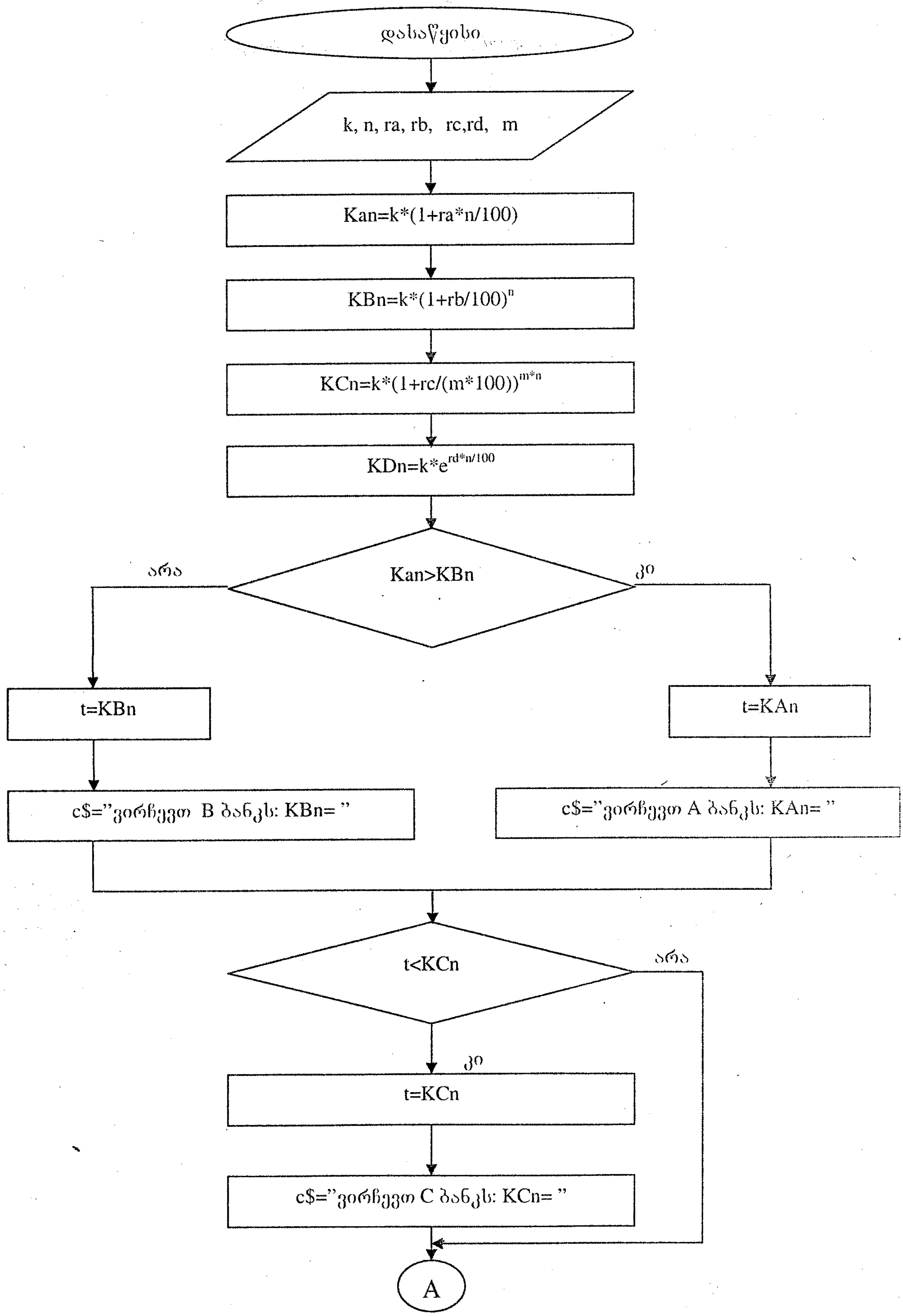
$$k_{mn} = k\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn} \quad (3)$$

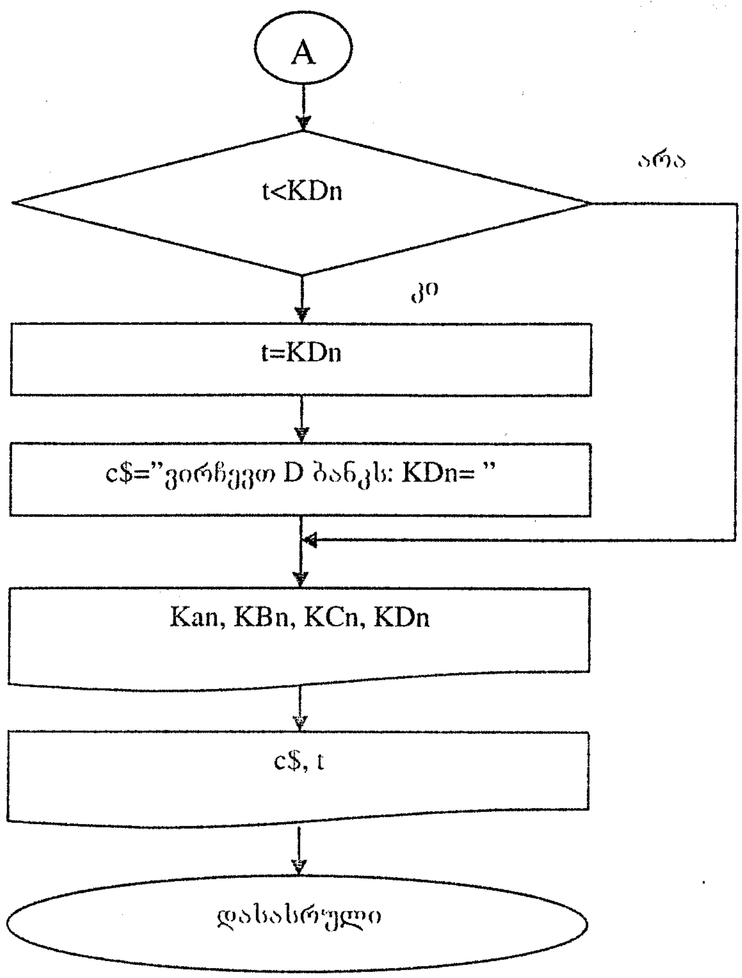
თუ წელიწადში დარიცხვის პერიოდების m რაოდენობას უსასრულოდ გავზრდით, მაშინ მივიღებთ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევას. დაგროვილი თანხის გამოსათვლელად (3)-ში უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$.

$$\lim_{m\to\infty} k_{mn} = \lim_{m\to\infty} k\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn} = k \cdot e^{\frac{r \cdot n}{100}} \quad (4)$$

ამოცანა 7.1. ვთქვათ ბანკში n წლით უნდა შევიტანოთ k ლარი. A ბანკი გვთავაზობს წლიურ r_A%-იან მარტივ განაკვეთს, B ბანკი r_B%-იან რთულ წლიურ განაკვეთს, C ბანკი r_C%-იან რთულ წლიურ განაკვეთს ყოველკვარტალური დარიცხვით, ხოლო D ბანკი r_D%-იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვით. რომელი ბანკი შევარჩიოთ, რომ n წლის შემდეგ მაქსიმალური თანხა გვქონდეს? ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ (1), (2), (3) და (4) ფორმულებით

ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის ბლოკ-სქემას ექნება შემდეგი სახე





შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
CLS
INPUT "k="; k
INPUT "n="; n
INPUT "ra="; ra
INPUT "rb="; rb
INPUT "rc="; rc
INPUT "rd="; rd
INPUT "m="; m
KAn = k * (1 + ra * n / 100)
KBn = k * (1 + rb / 100) ^ n
KCn = k * (1 + rc / (m * 100)) ^ (m * n)
KDn = k * EXP(rd * n / 100)
IF KAn > KBn THEN
t = KAn
c$ = "ვირჩწევთ A ბანკს:  KAn="
ELSE
t = KBn
c$ = "ვირჩევთ B ბანკს:  KBn="
END IF
IF t < KCn THEN
t = KCn:
```

```
c$ = "ვირჩევთ C ბანკს:  KCn="
END IF
IF t < KDn THEN
t = KDn
c$ = "ვირჩევთ D ბანკს:  KDn="
END IF
PRINT "KAn="; KAn
PRINT "KBn="; KBn
PRINT "KCn="; KCn
PRINT "KDn="; KDn
PRINT c$; t
END
```

კომპიუტერული რეალიზაციის შედეგები

საწყისი მონაცემები

```
k= 30000       n= 7          ra= 4.9
rb= 4.7        rc= 4.5       rd= 4.3       m= 12
```

კომპიუტერზე მიღებული შედეგები

```
KAn = 40290
KBn = 41375.95
KCn = 41083.57
KDn = 40536.28
ვირჩევთ B ბანკს:  KBn= 41375.95
```

ვალის დაფარვის ამოცანა

ვთქვათ, ავიღეთ ბანკის ვალი k ლარის ოდენობით, რომელიც უნდა დაიფაროს n წლის განმავლობაში ყოველწლიურად a ლარის შეტანით (a უცნობია).

მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში ყოველწლიურად r %-იანი დანარიცხის დროს (1)-დან n წლის ბოლოს ნაშთითი ვალი იქნება

$$R_n = k\left(1+\frac{r\cdot n}{100}\right) - na \qquad (5)$$

რთული წლიური r%-იანი განაკვეთის ყოველწლიური დარიცხვის შემთხვევაში 1 წლის ბოლოს ნაშთითი ვალი იქნება

$$R_1 = k + \frac{kr}{100} - a = k\left(1+\frac{r}{100}\right) - a$$

აღვნიშნოთ $1+\frac{r}{100} = q$

II წლის ბოლოს $R_2 = R_1 + R_1\frac{r}{100} - a = R_1 q - a = (kq-a)q - a = kq^2 - a(1+q)$

III წლის ბოლოს $R_3 = R_2 + \frac{R_2 r}{100} - a = R_2 q - a = \left(kq^2 - a(1+q)\right)q - a = kq^3 - a\left(1+q+q^2\right)$

....

n წლის ბოლოს ნაშთითი ვალი

$$R_n = R_{n-1} + \frac{R_{n-1} r}{100} - a = kq^n - a\cdot\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$$

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულით

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

აქედან ნაშთითი ვალი n წლის ბოლოს იქნება

$$R_n = kq^n - a\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (6)$$

რთული წლიური r%-იანი განაკვეთის შემთხვევაში, როცა დარიცხვა ხდება წელიწადში m-ჯერ ნაშთითი ვალი n წლის შემდეგ (ზემოთმოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად) იქნება

$$R_n = kq^{mn} - a\frac{q^{mn} - 1}{q^m - 1} \qquad (7)$$

სადაც $q = 1 + \frac{r}{100m}$, რადგან ყოველ ჯერზე დარიცხვის პროცენტი $\frac{r}{m}$-ის ტოლია.

რთული წლიური r%-იანი უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში ნაშთით ვალს n წლის შემდეგ ექნება სახე

$$R_n = ke^{\frac{nr}{100}} - a\frac{e^{\frac{nr}{100}} - 1}{e^{\frac{r}{100}} - 1} \qquad (8)$$

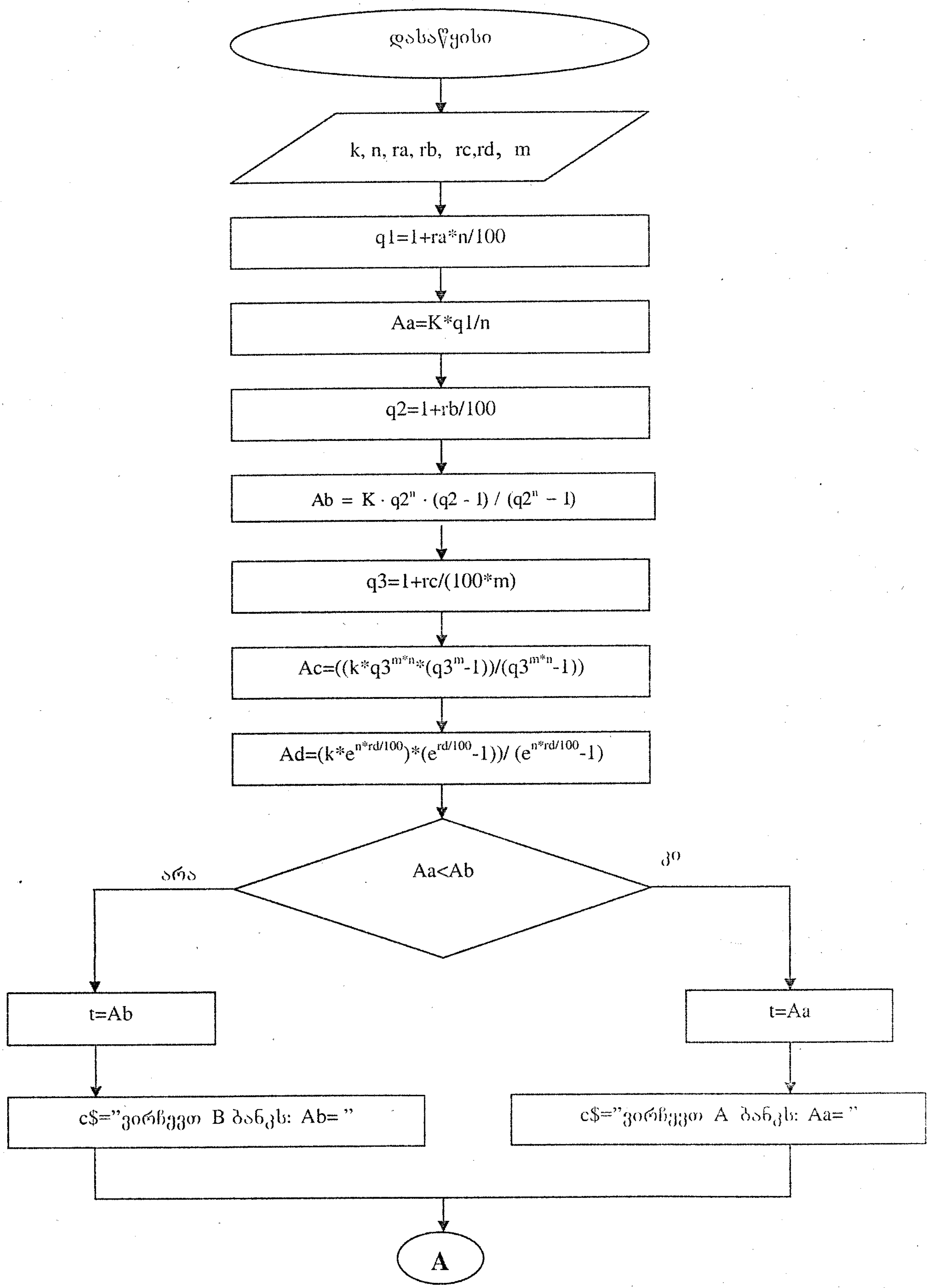
ვალის დაფარვა n წლის შემდეგ ნიშნავს, რომ ნაშთითი ვალი $R_n = 0$, ამის გათვალისწინებით გამოთვლით რა ყოველწლიურ შესატანს a-ს (5), (6), (7) და (8) ტოლობებიდან მივიღებთ ყოველწლიურად ბანკში შესატანი a თანხის ოთხ მნიშვნელობას.

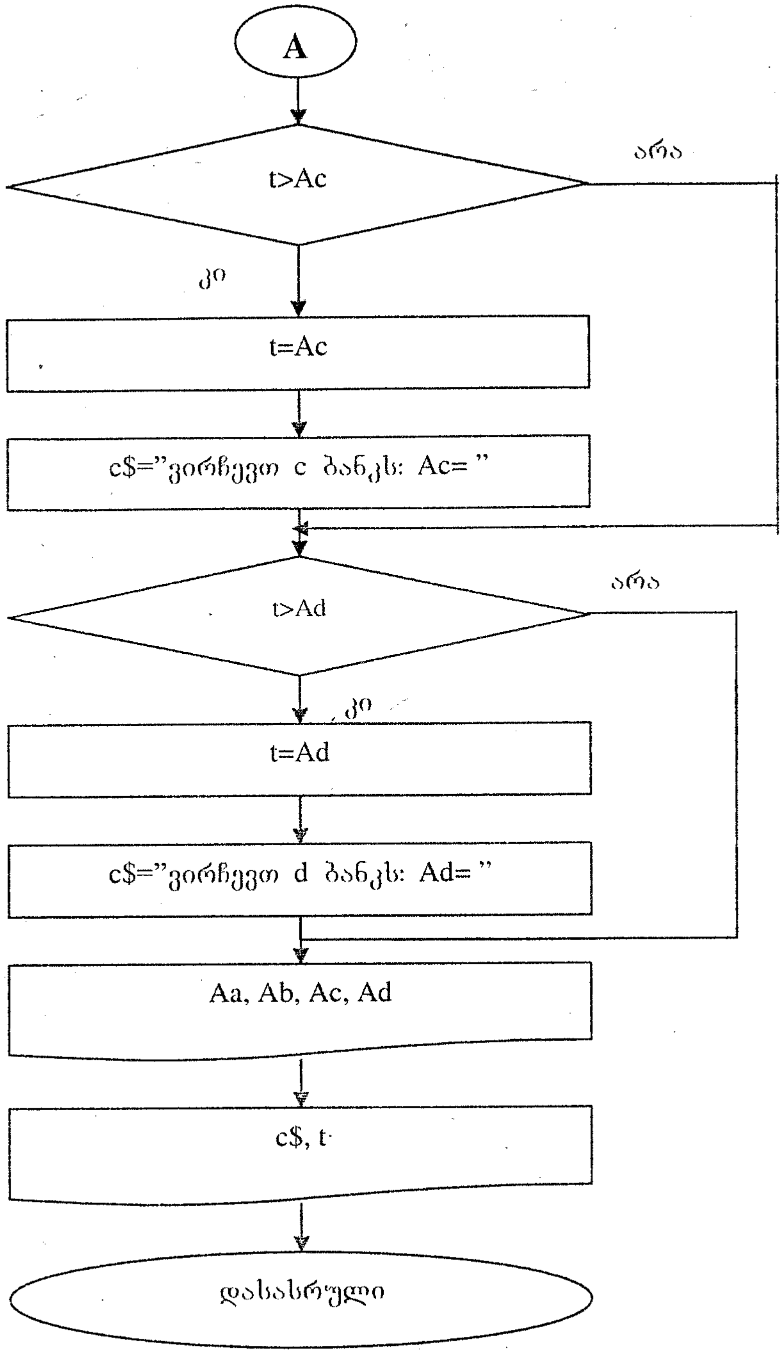
ცხადია შევარჩევთ იმ ბანკს, რომელშიც ყოველწლიური შესატანი თანხა მინიმალური იქნება.

ამოცანა 7.2 ვთქვათ A ბანკი მეანაბრეებს სთავაზობს k ლარიან კრედიტს დარიცხვის r_A%-იანი წლიური მარტივ განაკვეთით, B ბანკი r_B%-იან წლიურ რთულ განაკვეთს, C ბანკი r_C%-იან რთულ წლიურ განაკვეთს ყოველკვარტალური დარიცხვით, ხოლო D ბანკი r_D%-იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვით. ვთქვათ ვალი უნდა გადავიხადოთ n წლის განმავლობაში ყოველწლიურად თანაბარი თანხის შეტანით. შევარჩიოთ ხელსაყრელი ბანკი და დავადგინოთ ვალის დაფარვისთვის საჭირო ყოველწლიური შენატანის რაოდენობა. ამოხსენით ამოცანა კომპიუტერის გამოყენებით.

a სიდიდის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (5), (6), (7) და (8) დამოკიდებულებებით.

ალგორითმის ბლოკ-სქემას ექნება შემდეგი სახე





შესაბამის ბეისიკ-პროგრამას აქვს სახე

```
CLS
INPUT "k="; k
INPUT "n="; n
INPUT "ra="; ra
INPUT "rb="; rb
INPUT "rc="; rc
INPUT "rd="; rd
INPUT "m="; m
q1 = 1 + ra * n / 100
Aa = k * q1 / n
```

```
q2 = 1 + rb / 100
Ab = k * q2 ^ n * (q2 - 1) / (q2 ^ n - 1)
q3 = 1 + rc / (100 * m)
Ac = ((k * q3 ^ (m * n) * (q3 ^ m - 1)) / (q3 ^ (m * n) - 1))
Ad = (k * EXP(n * rd / 100) * (EXP(rd / 100) - 1)) / (EXP(n * rd / 100) - 1)
IF Aa < Ab THEN
t = Aa
c$ = "ვირჩევთ A ბანკს:  Aa="
ELSE
t = Ab
c$ = "ვირჩევთ B ბანკს:  Ab="
END IF
IF t > Ac THEN
t = Ac:
c$ = "ვირჩევთ C ბანკს:  Ac="
END IF
IF t > Ad THEN
t = Ad
c$ = "ვირჩევთ D ბანკს:  Ad="
END IF
PRINT "Aa="; Aa
PRINT "Ab="; Ab
PRINT "Ac="; Ac
PRINT "Ad="; Ad
PRINT c$; t
END
```

კომპიუტერული რეალიზაციის შედეგები

საწყისი მონაცემები

```
k= 24000        n= 9          ra= 4.4
rb= 4.3         rc= 4.2       rd= 4.1        m= 12
```

კომპიუტერზე მიღებული შედეგები

```
Aa = 3722.667
Ab = 3272.106
Ac = 3269.409
Ad = 3255.13
ვირჩევთ D ბანკს:  Ad= 3255.13
```

ამოცანა 7.3 ამოხსენით ამოცანა 7.2 თუ C ბანკი აწარმოებს ყოველდღიურ დარიცხვებს r_c%-იანი რთული წლიური განაკვეთით.

ამოცანა 7.1 – 7.3-ის ვარიანტები.

№	K	n	r_A	r_B	r_C	r_D
1	2	3	4	5	6	7
1	30000	7	4.9	4.7	4.5	4.3
2	40000	7	4.8	4.6	4.4	4.3
3	50000	7	4.7	4.6	4.5	4.4
4	60000	7	4.6	4.5	4.4	4.3
5	70000	7	4.5	4.4	4.3	4.2
6	80000	6	4.4	4.3	4.2	4.1
7	90000	6	4.3	4.2	4.1	4.0
8	100000	6	4.2	4.1	4.0	3.9
9	110000	6	4.1	4.0	3.9	3.8
10	120000	7	4.0	3.9	3.8	3.7

1	2	3	4	5	6	7
11	130000	7	3.9	3.8	3.7	3.5
12	140000	7	3.8	3.7	3.5	3.4
13	150000	7	3.7	3.6	3.5	3.4
14	160000	8	3.6	3.5	3.4	3.3
15	170000	8	3.5	3.4	3.2	3.1
16	180000	8	4.8	4.7	4.6	4.5
17	190000	8	4.7	4.6	4.5	4.4
18	200000	8	4.6	4.5	4.4	4.3
19	210000	9	4.5	4.4	4.3	4.2
20	220000	9	4.4	4.3	4.2	4.0

საბანკო ანაბრის დახურვის ამოცანა

ამ ტიპის ამოცანები იხსნება ზემოთმოყვანილი ალგორითმის ანალოგიურად.

ამოცანა 7.4 ვთქვათ A ბანკში გვაქვს K_A ლარის ანაბარი r_A%-იანი სარგებლის რთული წლიური განაკვეთით. დავუშვათ კონტრაქტის თანახმად ყოველი წლის ბოლოს ბანკიდან შეგვიძლია გამოვიტანოთ a ლარი. რამდენ წელიწადში დაიხურება ანაბარი?

ამოცანა 7.5 ამოცანა 7.4-ის პირობებში რა დროში დაიხურება ანაბარი, თუ დარიცხვა ხდება ყოველთვიურად სარგებლის რთული წლიური r_A%-იანი განაკვეთით?

დაგეგმილი თანხის დაგროვების ამოცანა

ამოცანა 7.6 ვთქვათ B ბანკში ყოველწლიურად შეგვაქვს a ლარი, ამოცანა 7.4-ში გამოთვლილი n წლის განმავლობაში რას უნდა უდრიდეს სარგებლის წლიური რთული r_B%-იანი განაკვეთი, რომ n წლის ბოლოს დაგროვდეს K_B ლარი? (n რიცხვი დაამრგვალეთ მთელ რიცხვამდე მეტობით)

ამ ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის ასაგებად ვიანგარიშოთ ნაშთები ყოველი წლის ბოლოს.

I წლის ბოლოს ნაშთი $R_1 = a + a\frac{r_B}{100} = a(1+\frac{r_b}{100})$

აღვნიშნოთ $q = 1 + \frac{r_b}{100}$, მაშინ $R_1 = q \cdot a$

II წლის დასაწყისში თანხა იქნება $R_1' = R_1 + a = aq + a = a(1+q)$

II წლის ბოლოს $R_2 = R_1' + R_1'\frac{r_B}{100} = R_1'(1+\frac{r_b}{100}) = R_1' \cdot q$

$$R_2 = a(1+q)q$$

III წლის დასაწყისში გვექნება

$R_2' = R_2 + a = a(1+q)q = a(1+q+q^2)$

III წლის ბოლოსათვის კი

$R_3 = R_2' + \frac{R_2' \cdot r_b}{100} = R_2' \cdot (1+\frac{r_b}{100}) = R_2' \cdot q = a(1+q+q^2) \cdot q = a(q+q^2+q^3)$

და ა. შ.

n წლის ბოლოსათვის გვექნება

$$R_n = a \cdot \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = a \cdot \frac{q \cdot q^{n-1} \cdot q - q}{q-1}$$

$$R_n = a \cdot \frac{q(q^n - 1)}{q-1}$$

თუ n წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა უნდა იყოს K_B, მაშინ ვღებულობთ განტოლებას

$$K_B = a\frac{q(q^n-1)}{q-1} \qquad (9)$$

უცნობი q-ს მიმართ.

(9) განტოლების ამოხსნისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ერთერთი რიცხვითი მეთოდი.

ამოცანა 7.4-7.6-ის ვარიანტები

№	K_A	$r_A\%$	a	K_B
1	3000	3.1	950	4000
2	4000	3.2	1400	5000
3	5000	3.3	1700	6000
4	6000	3.4	2100	7000
5	7000	3.5	2500	8000
6	8000	3.6	2900	9000
7	9000	3.7	3200	10000
8	10000	3.8	3400	11000
9	11000	3.9	3500	12000
10	12000	3.1	4200	13000
11	13000	3.2	4500	14000
12	14000	3.3	5000	16000
13	15000	3.4	5100	17000
14	16000	3.5	5400	18000
15	17000	3.6	5800	19000
16	18000	3.0	6200	20000
17	19000	3.1	6900	21000
18	20000	3.2	7000	22000
19	21000	3.3	7200	23000
20	22000	3.4	7400	24000

ამოცანა 7.7 კონტრაქტის თანახმად A ბანკი ერთი თვის განმავლობაში ყოველდღიურად ურიცხავს B ბანკს 100 000 ლარს. B ბანკი იმავე თვის პირველ რიცხვში A ბანკს ურიცხავს ერთ თეთრს, ორ რიცხვში ორ თეთრს, სამ რიცხვში ოთხ თეთრს და ა.შ. ისე, რომ ყოველ მომდევნო დღეს ნასარიცხ თანხას აორმაგებს. რომელი ბანკი დარჩება მოგებული თვის ბოლოს?

ინტეგრალის გამოყენება საბანკო ამოცანაში

ამ საკითხის შესწავლისას გავიხსენოთ ინტეგრალური აღრიცხვის რამოდენიმე საკითხი. ცხრილის ინტეგრალიდან ცნობილია, რომ

$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

ვიცით, რომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას აქვს სახე

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლისას ვისარგებლებთ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულით

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

სადაც $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირველადი ანუ $F'(x)=f(x)$.

გავიხსენოთ რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო ზედა საზღვრით შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

თუ არსებობს ეს ზღვარი მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია.

ახლა გადავიდეთ იმ საბანკო ამოცანის განხილვაზე, სადაც მოყვანილ ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტებს უშუალოდ გამოვიყენებთ.

შემოსავლის ნაკადის დისკონტირებული ღირებულების გამოთვლა

ვთქვათ A არის B თანხის დისკონტირებული ღირებულება ანუ A არის თანხა, რომელიც უნდა დავაბანდოთ სარგებლის წლიური რთული r%-იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში, რომ t დროისთვის მივიღოთ B თანხა. ამ შემთხვევაში ვიცით, რომ

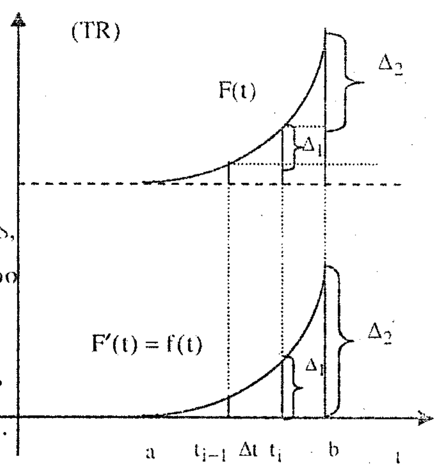
$$A = Be^{-\frac{r \cdot t}{100}}$$

თუ დაბანდებულ თანხას სარგებელი ერიცხება არა ერთბაშად საბოლოო თანხის სახით არამედ t=a წლიდან t=b წლამდე უწყვეტად f(t) ინტენსივობით, მაშინ f(t)-ს ეწოდება შემოსავლის ნაკადი დროის [a;b] შუალედში

თუ დროის t მომენტისათვის მიმდინარე თანხაა F(t), მაშინ დარიცხვის f(t) ინტენსივობა გამოითვლება ფორმულით

$$f(t) = F'(t) \quad (10),$$

ვიცით, რომ ფუნქციის წარმოებული ახასიათებს ამ ფუნქციის ცვლილებას (ჩვენს შემთხვევაში ზრდას) განსაზღვრის არეზე. ანუ დარიცხვის ინტენსივობა გვიჩვენებს როგორ იცვლება მიმდინარე თანხა. (10)დან ცხადია $F(t) = \int_a^t f(t)dt$. დავყოთ [a;b] შუალედი n ტოლ ნაწილად $\Delta t = t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. t_{j-1} დან t_j მომენტამდე შემოსავალი დაახლოებით $f(t_j) \cdot \Delta t$ იქნება. მისი დისკონტირებული ღირებულება კი იქნება $e^{-\frac{r}{100}t_j} f(t_j) \cdot \Delta t$ (ესაა ის საწყისი თანხა, რომელიც მიმდინარე მომენტში უნდა დაბანდდეს სარგებლის წლიური რთული r%-იანი განაკვეთით, იმისათვის რომ t_j წლის შემდეგ მოგვცეს $f(t_j) \cdot \Delta t$ თანხა).



ამრიგად შემოსავლის ნაკადის დისკონტირებული ღირებულება დროის [a;b] შუალედში დაახლოებით იქნება სიდიდე $\sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{r}{100}t_j} f(t_j)\Delta t$.

ამ ჯამის ზღვარი, როცა $n \to \infty$ იქნება

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{r}{100}t_j} f(t_j)\Delta t = \int_a^b e^{-\frac{r}{100}t} f(t)dt \quad (11)$$

ამ ინტეგრალს ეწოდება შემოსავლის f(t) ნაკადის დისკონტირებული (საწყისი) ღირებულება.

(11) სიდიდე არის საწყისი თანხა, რომელიც მიმდინარე t=0 მომენტიდან დაწყებული უნდა გაიზარდოს წლიური რთული r% -იანი განაკვეთით (უწყვეტი დარიცხვის წესით), რომ მან უზრუნველყოს F(t) შემოსავალი (სარგებელი) $t \in [a,b]$ მომენტისათვის.

ამოცანა 7.8 ვთქვათ A ბანკი მეანაბრეებს თავაზობს წლიურ r%-იან სარგებელს დარიცხვის უწყვეტი წესით. რა თანხა უნდა შევიტანოთ ბანკში, რომ a წლიდან დაწყებული b წლამდე შეგვეძლოს ყოველწლიურად ფულის $f(t) = k$ ინტენსივობით გამოტანა?

ამოცანა 7.9 ამოხსენით ამოცანა 7.8, თუ ფულის გამოტანის ინტენსივობას აქვს სახე

$$f(t) = \alpha t + \beta$$

უვადო ნაკადის დისკონტირებული ღირებულება

თუ (11) ფორმულაში განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $b \to \infty$, მაშინ მიიღება უვადო შემოსავლის f(t) ნაკადის დისკონტირებული ღირებულება.

მათემატიკურად (11) მიიღებს არასაკუთრივი ინტეგრალის სახეს:

$$\int_a^{\infty} e^{-\frac{r}{100}t} f(t)dt \quad (12)$$

ესაა ის საწყისი თანხა, რომელიც უნდა გაიზარდოს სარგებლის წლიური r% -იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის წესით, რომ დროის ნებისმიერი $t \geq a$ მომენტისათვის გვქონდეს შემოსავლის $f(t)$ ნაკადი.

ამოცანა 7.10 ვთქვათ A ბანკი გვთავაზობს სარგებლის წლიურ რთულ r% -იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვის წესის საფუძველზე. რა საწყისი თანხა შევიტანოთ ბანკში, რომ შემოუსაზღვრავი ვადით ყოველწლიურად ავიღოთ თანხა $f(t) = k$ ლარის ინტენსივობით?

ამოცანა 7.8 - 7.10-ის ვარიანტები

№	r_A%	a	b	K	α	β
1	3,1	5	10	4000	0,01	3800
2	3,2	6	12	5000	0,02	4000
3	3,3	7	14	6000	0,03	5000
4	3,4	5	12	7000	0,04	6500
5	3,5	6	13	8000	0.05	7800
6	3,6	7	15	9000	0,01	8500
7	3,7	8	14	10000	0,02	9700
8	3,8	5	11	11000	0,03	10000
9	3,9	6	14	12000	0,04	11000
10	4,0	7	16	13000	0,05	12000
11	4,10	5	10	5000	0,01	4900
12	4,15	6	11	6000	0,02	5800
13	4,2	7	13	7000	0,03	6500
14	4,25	8	14	5000	0,04	4700
15	4,3	5	11	6000	0,05	5900
16	4,35	6	12	7000	0,01	6800
17	4,4	7	13	5000	0,02	4600
18	4,45	8	14	6000	0,03	5800
19	4,5	5	15	7000	0,04	6700
20	4,55	6	16	8000	0,05	7000

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ნატროშვილი დ. და სხვ. "მათემატიკა ეკონომისტებისათვის" 2000
2. Кубонива М. "Математическая экономика на персональном компьютере " 1992
3. Кузнецов Ю. Н. и др. "математическое програмирование" 1980
4. Крушевский А. В. и др. "Экономико-математические в планировании и управлении народним хозяйством" 1973
5. Гейл Д. "Теория линейных экономических моделей" 1963
6. David Gale "The teory of linear economic models" 1999

სარჩევი

იბეჭდება ავტორთა მიერ წარმოდგენილი სახით

კომპიუტერული უზრუნველყოფა მ. თოდუასი

გადაეცა წარმოებას 12.06.2003. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 16.09.2003. ბეჭდვა ოფსეტური. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. გარნიტურა აკადემიური. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 4,85. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 3. ტირაჟი 100 ეგზ. შეკვეთა № 255

გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, კოსტავას 77

სტუ-ს სტამბა, თბილისი, კოსტავას 75

ISBN 99940-14-43-9