საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
1922 წლიდან

თეონა ბიბილაშვილი

სასაზღვრო ამოცანები კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა მათემატიკა

შიფრი 0541

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი თბილისი, 0160, საქართველო

2025 წ

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით **თეონა ბიბილაშვილის** მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: **სასაზღვრო ამოცანები კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის** და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის **საინჟინრო, ტექნოლოგიური და საბუნებისმეტყველო** საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

- - - - - -, - - - - - - 2025 წელი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: პროფესორი სერგო ხარიბეგაშვილი

რეცენზენტი:____

რეცენზენტი:____

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2025 წ

ავტორი: თეონა ბიბილაშვილი

დასახელება: სასაზღვრო ამოცანები კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ხარისხი: დოქტორის აკადემიური ხარისხი

მისანიჭებელი კვალიფიკაცია: მათემატიკის დოქტორი

სხდომა ჩატარდა ___________________________

რეზიუმე

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დარბუს და გურსას ტიპის ამოცანების გამოკვლევას, როგორც სიბრტყის ისე სივრცის გარკვეული დროითი თუ სივრცითი ორიენტაციის მქონე კუთხოვან თუ კონუსურ არეებში. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია ამ განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კუთხოვან თუ კონუსურ არეში, როცა საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში მოცემულია დირიხლეს, ნეიმანის ან სხვა სახის დიფერენციალური პირობები და დასმული ამოცანებისათვის ამონახსნის არსებობის, არარსებობის და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში წრფივი მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანები კუთხოვან არეში, როცა ერთი საერთო წერტილიდან გამომავალ გვერდებზე დასახელებულია დირიხლეს ან ნეიმანის პირობები კარგად არის შესწავლილი მრავალი ავტორის მიერ (გურსას, დარბუს, სობოლევის, მიხაილოვის, მელცერის, გომანის, ტროიცკაიას, ფირმანის და სხვათა შრომებში) და დამტკიცებულია მათი კორექტულობა. არაწრფივ შემთხვევაში კი ამ ამოცანების გამოკვლევა დამატებით აწყდება არსებით სირთულეებს. ზოგ შემთხვევაში ახალ ეფექტებს აქვს ადგილი, განსაკუთრებით, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი მეტია ერთზე. არაწრფივ შემთხვევაში სიახლე, რაც შეიძლება წარმოიშვას, გლობალური ამოხსნადობის დარღვევაში მდგომარეობს. ამასთან, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი ერთზე ნაკლებია სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება გლობალურად იყოს ამოხსნადი, მაგრამ ამავე დროს დარღვეული იყოს ამონახსნის ერთადერთობა, მას შეიძლება გააჩნდეს კონტინიუმ სიმრავლე წრფივად დამოუკიდებული ამონახსნებისა. ამ ამოცანებით აღიწერება სიმის რხევა ბლანტ სითხეში, სორბენტის მიერ აირის შთანთქმის პროცესი, სოლის ჰარმონიული რხევა ზებგერით ნაკადში და სხვა. ორგანზომილებიან შემთხვევაში მეოთხე რიგის სკალარული არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის ახალი უცნობი ფუნქციის შემოღებით ხდება დასმული ამოცანის რედუცირება შესაბამის მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლური სისტემისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანაზე. მიღებული სასაზღვრო ამოცანისათვის შემოდის განზოგადებული ამონახსნის ცნება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. ეს ამოცანა მახასიათებელთა მეთოდის გამოყენებით უწყვეტ ფუნქციათა კლასში ეკვივალენტურად რედუცირდება სპეციალური სახის არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომელშიც ინტეგრალური ოპერატორი წარმოადგენს არაწრფივ უწყვეტ და კომპაქტურ ოპერატორს. არაწრფივ წევრებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში მტკიცდება აპრიორული შეფასება ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნისათვის, საიდანაც ლერე-შაუდერის თეორემიდან გამომდინარეობს განზოგადებული ამონახსნის არსებობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. უფრო მეტიც, სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე გარკვეული სიგლუვის მოთხოვნის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ განზოგადებული ამონახსნი არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი კუთხოვან არეში, საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ ამ ამონახსნის ერთერთი კომპონენტი წარმოადგენს საწყისი სასაზღვრო ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს. განიხილება აგრეთვე ამ ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც.

ორგანზომილებიან შემთხვევაში იმავე კუთხოვანი არის შემთხვევაში განიხილება სასაზღვრო ამოცანა მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის, სადაც განსხვავებით სკალარული შემთხვევისა კუთხოვანი არის მთელი საზღვარია დაკავებული. ამ შემთხვევაში, რადგან დასმული ამოცანის გამოკვლევა მახასიათებელთა მეთოდით აწყდება დიდ სირთულეებს შემოთავაზებულია სხვა მიდგომა. ეს ამოცანა არა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, არამედ სობოლევის სივრცეში ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მიღებულია ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება სობოლევის სივრცეში, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. ამასთან განხილულია დასმული ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც. დისერტაციაში განხილულია აგრეთვე ორგანზომილებიანი ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის. სობოლევის სივრცეში ფუნქციონალური მეთოდების გამოყენებით ეს ამოცანა ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. განტოლების არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მისი ამონახსნისათვის დამტკიცებულია აპრიორული შეფასება, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. განხილულია აგრეთვე ის შემთხვევები, როცა სასაზღვრო ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია, ან ადგილი აქვს მის ერთადერთობას. აღსანიშნავია, რომ განსხვავებით ორგანზომილებიანი შემთხვევისა, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი შეიძლება იყოს რა გინდ დიდი, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში ეს რიგი უნდა იყოს ნაკლები ე.წ. კატოს რიცხვზე, რაც დაკავშირებულია ჩართვის თეორემებთან სობოლევის სივრცეში.

SUMMARY

Boundary value problems for some classes of partial differential equations and systems

The dissertation is devoted to the investigation of Goursat and Darboux type problems for certain classes of nonlinear hyperbolic equations and fourth-order systems both on the plane and in the space, respectively, in angular and conical domains with a certain temporal or spatial orientation. In particular, the main goal of the work is to investigate the boundary value problems for these equations and systems in the angular or conical domain, when Dirichlet, Neumann or other differential conditions are given in different parts of the boundary, and to study the questions of existence, non-existence and uniqueness of solutions for the problems. In the case of two independent variables, boundary value problems for a linear hyperbolic equation of the second order in the angular domain, when the Dirichlet or Neumann conditions are given on the sides coming out from a common point, have been well studied by many authors (in the works of Goursat, Darboux, Sobolev, Mikhailov, Mel'tser, Goman, Troitskaya, Firmani and others) and their correctness has been proved. In the nonlinear case, the study of these problems additionally faces significant difficulties. In some cases, new effects appear, especially when the order of the degree of nonlinearity included in the equation with respect to the solution is greater than one. The novelty that can arise in the nonlinear case lies, in particular, in the violation of global solvability. However, when the degree of nonlinearity of the equation with respect to the searched solution is less than one, the boundary value problem can be globally solvable, but at the same time the uniqueness of the solution is violated, it can have a continuum set of linearly independent solutions. These problems describe harmonic vibrations of a wedge in a supersonic flow, the process of gas absorption by a sorbent, vibrations of a string in a viscous liquid, and others. In the two-dimensional case, by introducing a new unknown function for one class of scalar nonlinear hyperbolic equations of the fourth order, the problem is reduced to a boundary value problem for the corresponding nonlinear hyperbolic system of the second order. For the obtained boundary value problem, the concept of a generalized solution in the class of continuous functions is introduced. Using the method of characteristics in the class of continuous functions, this problem is equivalently reduced to a system of integral equations of a special kind of Volterra type, in which the included integral operator is a non-linear continuous and compact operator. Under certain conditions imposed on the nonlinear terms, an a priori estimate for the solution of a system of integral equations of Volterra type is proved, from which, according to the Leray-Schauder theorem, the existence of a generalized solution in the class of continuous functions follows. Moreover, if a certain smoothness is required from the data of the boundary value problem, then the generalized solution will be twice continuously differentiable in the angular domain, from which, in turn, it follows that one of the components of this solution is a classical solution to the boundary value problem. The questions of non-existence and uniqueness of a solution to this problem are also discussed. In the two-dimensional case, the boundary value problem for one class of fourth-order nonlinear hyperbolic systems is considered in the same angular domain, where, in contrast to the scalar case, the entire boundary is occupied by boundary conditions. In this case, since the study of this problem by the method of characteristics faces great difficulties, another approach is proposed. This problem is equivalently reduced to a nonlinear

functional equation not in the class of continuous functions, but in the Sobolev space. If certain conditions imposed on the nonlinear terms are fulfilled, an a priori estimate for the solution of the functional equation in Sobolev space is proved, from which the existence of a solution to the boundary value problem follows. In addition, the questions of absence and uniqueness of a solution to this problem are considered. The dissertation also considers one multidimensional version of a two-dimensional problem for one class of fourth-order nonlinear hyperbolic equations. Using functional methods in Sobolev space, this problem is equivalently reduced to a nonlinear functional equation. If certain conditions imposed on the nonlinear terms of the equation are satisfied, an a priori estimate of its solution is proved, from which the existence of a solution to the boundary value problem follows. Cases are also considered when the boundary value problem has no solution or its uniqueness takes place. It should be noted that, in contrast to the two–dimensional case, when the order of degree of nonlinearity included in the equation with respect to the solution can be arbitrarily large, in the multidimension case this order must be less than the so-called Kato number, which is related to the embedding theorems in Sobolev space.

შინაარსი

ნახაზების ნუსხა

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელს

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს,

პროფესორ სერგო ხარიბეგაშვილს,

აგრეთვე მათემატიკის დეპარტამენტის უფროსს

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს,

პროფესორ დავით ნატროშვილს

მნიშვნელოვანი სამეცნიერო რჩევებისა და

გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

შესავალი

სამუშაოს აქტუალობა

სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის გურსას და დარბუს ტიპის ამოცანები, როგორც სიბრტყის ისე სივრცის გარკვეული დროითი თუ სივრცითი ორიენტაციის მქონე კუთხოვან თუ კონუსურ არეებში. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია ამ განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა კუთხოვან თუ კონუსურ არეებში, როცა საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში მოცემულია დირიხლეს, ნეიმანის ან სხვა სახის დიფერენციალური პირობები. კერძოდ, განტოლებასა, თუ სისტემაში შემავალი არაწრფივი წევრების სტრუქტურის მიხედვით დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის არსებობის, არარსებობის და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში წრფივი მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანები კუთხოვან არეში, როცა ერთი საერთო წერტილიდან გამომავალ გვერდებზე დასახელებულია დირიხლეს ან ნეიმანის პირობები კარგად არის შესწავლილი მრავალი ავტორის მიერ (Samarskii, 1977), (Goman, 1968), (Troitskaya, 1998), (Goursat, 1956), (Darboux, 1896), (Sobolev, 1931), (Mel'tser, 1946), (Mikhailov, 1957), (Mikhailov, 1957), (Mel'nik, 1980), (Firmani, 1982), (Bitsadze, 1981), (Kharibegashvili S. , 1985), (Kharibegashvili S. , 1995) (გურსას, დარბუს, სობოლევის, მიხაილოვის, მელცერის, გომანის, ტროიცკაიას, ფირმანის და სხვათა შრომებში) და დამტკიცებულია მათი კორექტულობა. არაწრფივ შემთხვევაში კი ამ ამოცანების გამოკვლევა დამატებით აწყდება არსებით სირთულეებს. ზოგ შემთხვევაში ადგილი აქვს ახალ ეფექტებს, განსაკუთრებით, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი მეტია ერთზე. არაწრფივ შემთხვევაში სიახლე, რაც შეიძლება წარმოიშვას, გლობალური ამოხსნადობის დარღვევაში მდგომარეობს. ამასთან, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი ერთზე ნაკლებია სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება გლობალურად იყოს ამოხსნადი, მაგრამ ამავე დროს დარღვეული იყოს ამონახსნის ერთადერთობა, მას შეიძლება გააჩნდეს ამონახსნთა კონტინიუმ

სიმრავლე (G.K. Berikelashvili, 2008), (G. Berikelashvili, 2011), (O. Jokhadze B. M., 2008), (O.M. Dzhokhadze, 2008), (S. Kharibegashvili, 2009), (Jokhadze, 2008), (Jokadze, 2009), (S.S. Kharibegashvili O. J., 2013), (S.S. Kharibegashvili O. J., 2013), (O. Jokhadze S. K., 2015), (S.S. Kharibegashvili O. D., 2013), (S.S. Kharibegashvili O. J., 2016), (S. Kharibegashvili O. J., 2016), (S. Kharibegashvili O. J., 2016), (Kharibegashvili S. , 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2019). ამ ამოცანებით აღიწერება სიმის რხევა ბლანტ სითხეში (Troitskaya, 1998), სორბენტის მიერ აირის შთანთქმის პროცესი (Samarskii, 1977), სოლის ჰარმონიული რხევა ზებგერით ნაკადში (Goman, 1968) და სხვა. თუ წრფივ შემთხვევაში გურსასა და დარბუს ტიპის ამოცანები კარგად არის შესწავლილი ერთი სკალარული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის, სისტემებზე გადასვლისას წარმოიშვება დამატებითი სირთულეები ტექნიკური და შინაარსობრივი ხასიათის და ახალი ეფექტები. პირველად ეს ა. ბიწაძემ შენიშნა თავის ნაშრომში (Bitsadze, 1975), რომელშიც მან ააგო მეორე რიგის წრფივი ჰიპერბოლური სისტემები, რომლებისთვისაც გურსას შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას სასრული და ზოგიერთ შემთხვევაში უსასრულო რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებიც კი გააჩნია. შემდგომში ეს საკითხები გახდა კვლევის საგანი ს. ხარიბეგაშვილისა და ზ. მელნიკის ნაშრომებში (Kharibegashvili S. , 1985), (Kharibegashvili S. , 1995), (Mel'nik, 1980), (Z.O.Mel'nik, 1981). ამ მიმართულებით აღსანიშნავია აგრეთვე ა. ბიწაძის ნაშრომი (Bitsadze, 1975), სადაც ჰიპერბოლურ სისტემათა მარტივ მაგალითებზე ახსნილია უმცროსი წევრების გავლენის ეფექტი გურსას ამოცანის კორექტულობაზე. ამ მიმართულებით მიღებულ შედეგებს განსაკუთრებით არაწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებებისა და სისტემებისათვის დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ტალღის გავრცელების თეორიაში. აღსანიშნავია, რომ მაღალი რიგის ჰიპერბოლური განტოლებები, კერძოდ, მიიღება ჰიპერბოლური სისტემებიდან უცნობთა გამორიცხვის მეთოდით.

კვლევის მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვსი გურსასა და დარბუს ტიპის და სახვა სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კუთხოვან და კონუსურ არეებში, როგორც ორი, ისე

მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. დასმული სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა ამონახსნის არსებობის, ერთადერთობის და არარსებობის თვალსაზრისით.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები

სამეცნიერო კვლევის ძირითადი ობიექტია მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის გურსასა და დარბუს ტიპის და სხვა სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კუთხოვან და კონუსურ არეებში, როგორც ორი, ისე მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. ამ ამოცანების შესწავლისას გამოიყენება: ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში მახასიათებელთა მეთოდი, რომლის საშუალებით განხილული ამოცანა ეკვივალენტურად დაიყვანება ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე; აპრიორულ შეფასებათა მეთოდი; ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდები; ტესტურ ფუნქციათა მეთოდი; კუმშვადი ასახვის, შაუდერისა და ლერე–შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპები.

სამუშაო სამეცნიერო სიახლე

სადისერტაციო ნაშრომში მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დასმული და გამოკვლეულია დარბუს და გურსას ტიპის ამოცანები, როგორც სიბრტყის ისე სივრცის გარკვეული დროითი, თუ სივრცითი ორიენტაციის მქონე კუთხოვან და კონუსურ არეებში და ამ მიმართულებით მიღებულია ახალი შედეგები. სიბრტყის შემთხვევაში კუთხოვან არეში განხილულია დარბუს ტიპის ამოცანა, რომელშიც დირიხლეს, ნეიმანის და სხვა სახის დიფერენციალური პირობა დასახელებულია საზღვრის ნაწილზე, რომელიც არ მოიცავს სივრცითი ორიენტაციის მონაკვეთს. არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მტკიცდება დასმული ამოცანის კლასიკური ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა. განხილულია აგრეთვე ის შემთხვევები, როცა ამოცანას არ გააჩნია ამონახსნი. ამავე კუთხოვან არეში აგრეთვე განხილულია სხვა სასაზღვრო ამოცანა მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის, როცა

საზღვრის მახასიათებელ მონაკვეთზე დასახელებულია დირიხლეს პირობა, ხოლო საზღვრის დანარჩენ ნაწილზე მოცემულია დირიხლეს და ნეიმანის პირობები. ეს ამოცანა გამოკვლეულია სობოლევის სივრცეში და დადგენილია პირობები დადებული არაწრფივ წევრებზე, რომლებიც უზრუნველყოფენ ამონახსნის ერთადერთობას, ამოხსნადობას ან ამონახსნის არარსებობას. დისერტაციაში განხილულია აგრეთვე ორგანზომილებიანი ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის კონუსურ არეში. განტოლების არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში დამტკიცებულია ამოცანის ამონახსნის არსებობა. განხილულია აგრეთვე ის შემთხვევები, როცა სასაზღვრო ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია, ან ადგილი აქვს მის ერთადერთობას. აღსანიშნავია, რომ განსხვავებით ორგანზომილებიანი შემთხვევისა, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი შეიძლება იყოს რა გინდ დიდი, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში ეს რიგი უნდა იყოს ნაკლები ე.წ. კატოს რიცხვზე, რაც დაკავშირებულია ჩართვის თეორემებთან სობოლევის სივრცეში. ამ შედეგების მისაღებად გამოყენებულია, როგორც კლასიკური მეთოდები, კერძოდ მახასიათებელთა მეთოდი, ისე ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდები, როგორებიცაა რისის თეორემა, აპრიორული შეფასებათა მეთოდი, უძრავი წერტილის პრინციპები და სხვა მეთოდები.

თავი I. დარბუს ტიპის ამოცანა მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის

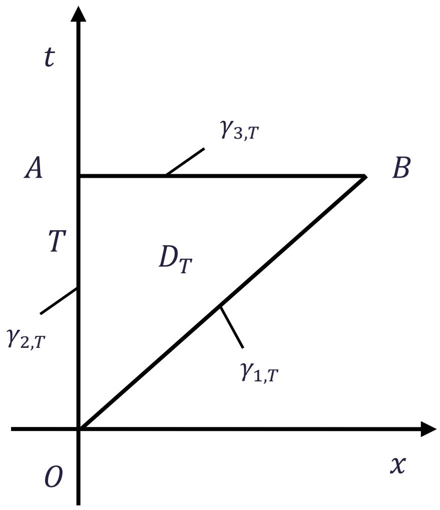
1.1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ x და t ცვლადების სიბრტყეზე შემდეგი სახის მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური განტოლება

$$\square^2 u + f(\square u) + g(u) = F(x,t), \tag{1.1.1}$$

სადაც f, g და $F-$ მოცემული, ხოლო u უცნობი სკალარული ფუნქციებია, ხოლო $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

აღვნიშნოთ $D_T: 0 < x < t,\ t < T$ $-$თი კუთხოვანი არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\gamma_{1,T}: x = t,\ 0 \le t \le T$ მახასიათებელი, დროითი $\gamma_{2,T}: x = 0,\ 0 \le t \le T$ და სივრცითი $\gamma_{3,T}: t = T$, $0 \le x \le T$ ორიენტაციის სეგმენტებით (ნახ.1), როდესაც $T = \infty$ გვექნება $D_\infty: t > |x|,\ x > 0$ და $\gamma_{1,\infty}: x = t,\ 0 \le t < \infty$; $\gamma_{2,\infty}: x = 0,\ 0 \le t < \infty$.



ნახ. 1 ამოცანის დასმის კუთხოვანი არე

(1.1.1) განტოლებისათვის D_T არეში განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა (T. Bibilashvili, 2022), (T. Bibilashvili, 2023), (Bibilashvili, 2023): ვეძებოთ $D_T -$ ში (1.1.1) განტოლების $u = u(x,t)$ ამონახსნი, რომელიც საზღვრის $\gamma_{1,T}$ და $\gamma_{2,T}$ ნაწილებზე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$u\Big|_{\gamma_{1,T}} := u(t,t) = \mu_1(t),\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\gamma_{1,T}} := \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,t) = \mu_2(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{1.1.2}$$

$$u\Big|_{\gamma_{2,T}} := u(0,t) = \mu_3(t),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\gamma_{2,T}} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \mu_4(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{1.1.3}$$

სადაც μ_i, $i = 1, \dots, 4$, მოცემული სკალარული ფუნქციებია, ამასთან μ_1 და μ_3 ფუნქციები $\gamma_{1,T}$ და $\gamma_{2,T}$ წირების $O = O(0,0)$ საერთო წერტილში აკმაყოფილებენ $\mu_1(0) = \mu_3(0)$ შეთანხმებულების პირობას, $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ $\partial D_T -$ის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორია.

აღსანიშნავია, რომ შემდეგი სახის მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

$$\square u + f(x,t,u) = F(x,t)$$

D_T კუთხოვან არეში დირიხლეს ან ნეიმანის სასაზღვრო პირობებით $\gamma_{1,T}$ და $\gamma_{2,T}$ საზღვრის მონაკვეთებზე დარბუს ამოცანები გამოკვლეული იყო მრავალი ავტორის მიერ (Samarskii, 1977), (Goman, 1968), (Troitskaya, 1998), (Goursat, 1956), (Darboux, 1896), (Sobolev, 1931), (Mel'tser, 1946), (Mikhailov, 1957), (Mikhailov, 1957), (Mel'nik, 1980), (Firmani, 1982), (Bitsadze, 1981), (Kharibegashvili S. , 1985), (Kharibegashvili S. , 1995) , (Bitsadze, 1975), (Mel'nik, 1980), (Z.O.Mel'nik, 1981), (Bitsadze, 1975), (G.K. Berikelashvili, 2008), (G. Berikelashvili, 2011), (O. Jokhadze B. M., 2008), (O.M. Dzhokhadze, 2008), (S. Kharibegashvili, 2009), (Jokhadze, 2008), (Jokadze, 2009), (S.S. Kharibegashvili O. J., 2013), (S.S. Kharibegashvili O. J., 2013), (O. Jokhadze S. K., 2015), (S.S. Kharibegashvili O. D., 2013), (S.S. Kharibegashvili O. J., 2016), (S. Kharibegashvili O. J., 2016), (S. Kharibegashvili O. J., 2016). ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანა (1.1.1) სახის განტოლებისათვის სივრცით მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში, როცა $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $n > 1$ და $f = 0$ შესასწავლილი იყო (Kharibegashvili S. , 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2019) შრომებში.

შენიშვნა 1.1.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ u, სადაც $u, \square u \in C^2(\overline{D}_T)$, წარმოადგენს $(1.1.1) - (1.1.3)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მაშინ $v = \square u$ ფუნქციის შემოღებით ეს ამოცანა u და v უცნობი ფუნქციების მიმართ დაიყვანება შემდეგ სასაზღვრო ამოცანაზე:

$$L_1(u,v) \coloneqq \square u - v = 0, \ \ (x,t) \in D_T, \tag{1.1.4}$$

$$L_2(u,v) := \square v + f(v) + g(u) = F(x,t), \ \ (x,t) \in D_T, \tag{1.1.5}$$

$$u\big|_{\gamma_{1,T}} := u(t,t) = \mu_1(t), \ \ u\big|_{\gamma_{2,T}} := u(0,t) = \mu_3(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{1.1.6}$$

$$v\big|_{\gamma_{1,T}} := v(t,t) = -\sqrt{2}\mu_2'(t), \ \ v\big|_{\gamma_{2,T}} := v(0,t) = \mu_3''(t) - \mu_4(t), \ \ 0 \le t \le T. \tag{1.1.7}$$

აქ (1.1.7) –ის პირველი ტოლობის მიღებისას გათვალისწინებული იყო, რომ: $\frac{d}{dt} w(t,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) w(x,t)\big|_{x=t}$, $\frac{\partial}{\partial \nu}\big|_{\gamma_{1,T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)$ და, მაშასადამე,

$$v\big|_{\gamma_{1,T}} = \square u\big|_{\gamma_{1,T}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u\big|_{\gamma_{1,T}} =$$

$$-\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\gamma_{1,T}} = -\sqrt{2}\mu_2'(t),$$

ხოლო (1.1.7) −ის მეორე ტოლობის მიღებისას მხედველობაში მიღებულია (1.1.2), (1.1.3), $v = \square u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ და, მაშასადამე, $v\big|_{\gamma_{2,T}} := v(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \mu_3''(t) - \mu_4(t)$.

პირიქით, თუ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, სადაც $\mu_1, \mu_3 \in C^2([0,T])$, $\mu_2 \in C^1([0,T])$, $\mu_4 \in C([0,T])$, მაშინ u ფუნქცია იქნება $(1.1.1) - (1.1.3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$ და სიმარტივისათვის $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. ვიტყვით, რომ u და v ფუნქციათა სისტემას ეწოდება $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, თუ $u, v \in C(\overline{D}_T)$ და არსებობს

$$u_n, v_n \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T) := \left\{ w \in C^2(\overline{D}_T) : w\big|_{\gamma_{i,T}} = 0, \ \ i = 1,2 \right\} \tag{1.1.8}$$

მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{1.1.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_1(u_n, v_n)\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|L_2(u_n, v_n) - F\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{1.1.10}$$

შენიშვნა 1.1.2. ცხადია, რომ $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ კლასიკური ამონახსნი წარმოადგენს ამ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს.

1.2. $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის აპრიორული შეფასება

ლემა 1.2.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. მაშინ $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის ნებისმიერი C კლასის u, v ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$|u(x,t)| \le te^t \|v\|_{L_2(D_t)}, \quad (x,t) \in D_T. \tag{1.2.1}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, u, v არის $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი. მაშინ არსებობს ისეთი u_n, v_n მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $(1.1.8) - (1.1.10)$ პირობებს.

განვიხილოთ $u_n \in \overset{0}{C}{}^2(\bar{D}_T)$ ფუნქცია, როგორც შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$L_1(u_n, v_n) := \Box u_n - v_n = G_n(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.2.2}$$

$$u_n\big|_{\gamma_{1,T}} = u_n(t,t) = 0, \quad u_n\big|_{\gamma_{2,T}} = u_n(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2.3}$$

კლასიკური ამონახსნი, სადაც

$$G_n := L_1(u_n, v_n) \tag{1.2.4}$$

ფუნქცია $(1.1.10)$ –ის ძალით აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n\|_{C(\bar{D}_T)} = 0. \tag{1.2.5}$$

გავამრავლოთ $(1.2.2)$ განტოლების ორივე მხარე $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $D_\tau := \{(x,t) \in D_T : t < \tau\}$ არეზე, სადაც $0 < \tau \le T$, გვექნება

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt - \int\limits_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt - \int\limits_{D_\tau} v_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt = \int\limits_{D_\tau} G_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt. \tag{1.2.6}$$

ნაწილობითი ინტეგრებისა და გრინის ფორმულის გამოყენებით ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 \nu_t \, ds, \tag{1.2.7}$$

$$-\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt = -\int\limits_{\partial D_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x ds + \int\limits_{D_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x} dxdt =$$

$$-\int\limits_{\partial D_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x ds + \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dxdt =$$

$$-\int\limits_{\partial D_\tau} \frac{\partial u_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t \, ds, \tag{1.2.8}$$

სადაც $\nu = (\nu_x, \nu_t)$ არის ∂D_τ −ის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\partial D_\tau = \gamma_{1,\tau} \cup \gamma_{2,\tau} \cup \omega_\tau$, სადაც $\gamma_{i,\tau} = \gamma_{i,T} \cap \{t \leq \tau\}$, $i = 1, 2$, და $\omega_\tau := \partial D_\tau \cap \{t = \tau\} = \{t = \tau, \ 0 \leq x \leq \tau\}$, გვექნება

$$(\nu_x, \nu_t)\big|_{\gamma_{1,\tau}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{1.2.9}$$

$$(\nu_x, \nu_t)\big|_{\gamma_{2,\tau}} = (-1,0), \ \ (\nu_x, \nu_t)\big|_{\omega_\tau} = (0,1), \tag{1.2.10}$$

$$({\nu_x}^2 - {\nu_t}^2)\big|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \tag{1.2.11}$$

თუ გავითვალისწინებთ $(1.2.9) - (1.2.11)$, აგრეთვე $(1.2.3)$ −ის ძალით $u_n\big|_{\gamma_{2,T}} = 0$ ტოლობას და, მაშასადამე, $\frac{\partial u_n}{\partial t}\big|_{\gamma_{2,T}} = 0$, $(1.2.7)$ და $(1.2.8)$ −დან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 \nu_t\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 \nu_t\, ds +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{2,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 \nu_t\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 \nu_t\, ds, \tag{1.2.12}$$

$$-\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt = -\int\limits_{\partial D_\tau}\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}\nu_x ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t\, ds =$$

$$-\int\limits_{\omega_\tau}\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}\nu_x dx - \int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}\nu_x ds - \int\limits_{\gamma_{2,\tau}}\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}\nu_x ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t\, ds$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{2,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t\, ds = -\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}\nu_x ds +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t\, ds + 0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx +$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 \nu_t\, ds - \int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}\nu_x ds. \tag{1.2.13}$$

$(1.2.12)$ და $(1.2.13)$ −დან $(1.2.11)$ −ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt - \int\limits_{D_\tau}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right]dx +$$

$$\int_{\gamma_{1,\tau}} \frac{1}{2v_t}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}v_t - \frac{\partial u_n}{\partial t}v_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 (v_t^2 - v_x^2)\right] ds = \frac{1}{2}\int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx$$

$$+ \int_{\gamma_{1,\tau}} \frac{1}{2v_t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}v_t - \frac{\partial u_n}{\partial t}v_x\right)^2 ds. \qquad (1.2.14)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\left(v_t \frac{\partial}{\partial x} - v_x \frac{\partial}{\partial t}\right)$ წარმოადგენს წარმოებულს მხების მიმართულებით, ე.ი. შიგა დიფერენციალურ ოპერატორს $\gamma_{1,T}$ წირზე, მაშინ (1.1.8) –დან გამომდინარე $u_n\big|_{\gamma_{1,T}} = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება $\frac{\partial u_n}{\partial x}v_t - \frac{\partial u_n}{\partial t}v_x = 0$ და (1.2.14) –დან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt - \int_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt = \frac{1}{2}\int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx. \quad (1.2.15)$$

(1.2.6) და (1.2.15) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx = 2\int_{D_\tau} v_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt + 2\int_{D_\tau} G_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt. \qquad (1.2.16)$$

მარტივი უტოლობის $2ab \le a^2 + b^2$ გამოყენებით (1.2.16) –დან მივიღებთ

$$\int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx \le \int_{D_\tau}\left[v_n^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dxdt + \int_{D_\tau}\left[G_n^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dxdt =$$

$$2\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{D_\tau}(v_n^2 + G_n^2) dxdt. \qquad (1.2.17)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$w(\tau) := \int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dx \qquad (1.2.18)$$

და მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\int_{D_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dxdt = \int_0^\tau w(\sigma)d\sigma,$$

მაშინ (1.2.17) –დან გვექნება

$$w(\tau) \leq 2 \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{D_\tau} (v_n^2 + G_n^2) dxdt \leq 2 \int_{D_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] dxdt +$$

$$\int_{D_\tau} (v_n^2 + G_n^2) dxdt = 2 \int_0^\tau w(\sigma) d\sigma + \int_{D_\tau} v_n^2 dxdt + \int_{D_\tau} G_n^2 dxdt =$$

$$2 \int_0^\tau w(\sigma) d\sigma + \|v_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 + \|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2, \ \ 0 < \tau \leq T. \qquad (1.2.19)$$

გრონუოლის ლემის თანახმად (1.2.19) −დან მივიღებთ

$$w(\tau) \leq \left(\|v_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 + \|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2\right) e^{2\tau}, \ \ 0 < \tau \leq T. \qquad (1.2.20)$$

რადგან (1.1.8) −ის ძალით $u_n(0,t) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T,$ ამიტომ

$$u_n(x,t) = \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial x}(\xi,t) d\xi, \ \ (x,t) \in D_T,$$

საიდანაც კოშის უტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$u_n^2(x,t) \leq \int_0^x 1^2 \, d\xi \int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 (\xi,t) d\xi \leq$$

$$x \int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 (\xi,t) d\xi \leq t \int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 (\xi,t) d\xi \leq$$

$$t \int_0^t \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2\right] (\xi,t) d\xi = t w(t), \ \ (x,t) \in D_T. \qquad (1.2.21)$$

აქ მხედველობაში მივიღეთ, რომ თუ $(x,t) \in D_T$, მაშინ $x < t$.

(1.2.20) და (1.2.21) −დან ცნობილი $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq |a| + |b|$ უტოლობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ

$$|u_n(x,t)| \leq t^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}}(t) \leq t^{\frac{1}{2}} \left(\|v_n\|_{L_2(D_t)}^2 + \|G_n\|_{L_2(D_t)}^2\right)^{\frac{1}{2}} e^t \leq$$

$$t^{\frac{1}{2}} \left(\|v_n\|_{L_2(D_t)} + \|G_n\|_{L_2(D_t)}\right) e^t, \ \ (x,t) \in D_T. \qquad (1.2.22)$$

თუ (1.2.22) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, მაშინ (1.1.9), (1.1.10) და (1.2.2) −ის ძალით მივიღებთ, რომ

$$|u(x,t)| \le t^{\frac{1}{2}} e^t \|v\|_{L_2(D_t)}, \ \ (x,t) \in D_T,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

განვიხილოთ შემდეგი პირობები დადებული f და g ფუნქციებზე

$$\int_0^s f(\tau)d\tau \ge -M_1 - M_2 s^2 \ \ \forall s \in \mathbb{R}, \ \ M_i = const \ge 0, \ \ i = 1,2, \quad (1.2.23)$$

$$|g(s)| \le N_1 + N_2|s| \ \ \forall s \in \mathbb{R}, \ \ N_i = const \ge 0, \ \ i = 1,2. \quad (1.2.24)$$

ლემა 1.2.2. ვთქვათ, $f, \ g \in C(\mathbb{R}), \ F \in C(\overline{D}_T), \ \mu_i = 0, \ i = 1, \dots, 4,$ ამასთან f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.2.23) და (1.2.24) პირობებს. მაშინ (1.1.4) – (1.1.7) ამოცანის ნებისმიერი C კლასის u, v განზოგადებული ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასებები

$$|u(x,t)| \le C_1 \|F\|_{L_2(D_t)} + C_2, \ \ (x,t) \in D_T, \quad (1.2.25)$$

$$|v(x,t)| \le C_3 \|F\|_{L_2(D_t)} + C_4, \ \ (x,t) \in D_T, \quad (1.2.26)$$

სადაც $C_i = C_i(t) \ge 0, \ i = 1, \dots, 4,$ სიდიდეები არ არიან დამოკიდებული u, v და F ფუნქციებზე, ამასთან $C_j > 0$, როცა $j = 1,3$.

დამტკიცება. ვთქვათ, u, v არის (1.1.4) – (1.1.7) ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, მაშინ არსებობს u_n, v_n მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.1.8) – (1.1.10) პირობებს.

განვიხილოთ $v_n \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T)$ ფუნქცია, როგორც შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$L_2(u_n, v_n) := \Box v_n + f(v_n) + g(u_n) = Q_n(x,t), \ \ (x,t) \in D_T, \quad (1.2.27)$$

$$v_n\big|_{\gamma_{1,T}} = v_n(t,t) = 0, \ \ v_n\big|_{\gamma_{2,T}} = v_n(0,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \quad (1.2.28)$$

კლასიკური ამონახსნი, სადაც

$$Q_n := L_2(u_n, v_n) \quad (1.2.29)$$

ფუნქცია (1.1.10) –ის ძალით აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n - F\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \quad (1.2.30)$$

გავამრავლოთ (1.2.27) განტოლების ორივე მხარე $\frac{\partial v_n}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $D_\tau := \{(x,t) \in D_T : t < \tau\}$ არეზე, სადაც $0 < \tau \le T$, გვექნება

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 dxdt - \int\limits_{D_\tau} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt + \int\limits_{D_\tau} f(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt +$$

$$\int\limits_{D_\tau} g(u_n)\frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt = \int\limits_{D_\tau} Q_n \frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt. \qquad (1.2.31)$$

ანალოგიურად იმისა, როგორც ლემა 1.2.1 –ის დამტკიცებისას (1.2.6) –დან მივიღეთ (1.2.16), ზემოთ მოყვანილი (1.2.31) –დან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$\int\limits_{\omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right] dx = -2\int\limits_{D_\tau} f(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt - 2\int\limits_{D_\tau} g(u_n)\frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt +$$

$$2\int\limits_{D_\tau} Q_n \frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt. \qquad (1.2.32)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$I(s) := \int\limits_0^s f(\tau)d\tau, \qquad (1.2.33)$$

მაშინ

$$\frac{\partial I(v_n)}{\partial t} = f(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial t}$$

და იმის გათვალისწინებით, რომ $I(0) = 0$, $v_n\big|_{\gamma_{i,T}} = 0$, $i = 1,2$, და, მაშასადამე $I(v_n)\big|_{\gamma_{i,T}} = 0$, $i = 1,2$, აგრეთვე (1.2.10) –ის და გრინის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$-2\int\limits_{D_\tau} f(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial t} dxdt = -2\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial I(v_n)}{\partial t} dxdt = -2\int\limits_{\partial D_\tau} I(v_n)v_t\, ds =$$

$$-2\int\limits_{\omega_\tau} I(v_n)\, dx - 2\int\limits_{\gamma_{1,T}} I(v_n)v_t\, ds - 2\int\limits_{\gamma_{2,T}} I(v_n)v_t\, ds = -2\int\limits_{\omega_\tau} I(v_n)\, dx. \quad (1.2.34)$$

(1.2.23) –ის ძალით (1.2.33) და (1.2.34) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$-2\int\limits_{D_\tau} f(v_n)\frac{\partial v_n}{\partial t}dxdt \le 2\int\limits_{\omega_\tau}(M_1+M_2v_n^2)\,dx \le 2M_1\tau+2M_2\int\limits_{\omega_\tau}v_n^2\,dx. \quad (1.2.35)$$

(1.2.24) პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$-2\int\limits_{D_\tau} g(u_n)\frac{\partial v_n}{\partial t}dxdt \le \int\limits_{D_\tau}\left(g^2(u_n)+\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right)dxdt \le$$

$$\int\limits_{D_\tau}(N_1+N_2|u_n|)^2\,dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2dxdt \le \int\limits_{D_\tau}(2N_1^2+2N_2^2u_n^2)\,dxdt$$

$$+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2dxdt = \tau^2N_1^2+2N_2^2\int\limits_{D_\tau}u_n^2\,dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2dxdt, \quad (1.2.36)$$

სადაც გამოყენებული იყო მარტივი უტოლობები: $2ab \le a^2+b^2$, $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ და ტოლობა $\int_{D_\tau}dxdt=\frac{1}{2}\tau^2$.

როცა $(x,t)\in D_\tau$ (1.2.22) უტოლობიდან გვექნება

$$u_n^2(x,t) \le t\left(\|v_n\|_{L_2(D_\tau)}+\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}\right)^2e^{2t} \le 2te^{2t}\left(\|v_n\|_{L_2(D_\tau)}^2+\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2\right) \le$$

$$2\tau e^{2\tau}\left(\|v_n\|_{L_2(D_\tau)}^2+\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2\right),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\int\limits_{D_\tau}u_n^2(x,t)\,dxdt \le 2\tau e^{2\tau}\left(\|v_n\|_{L_2(D_\tau)}^2+\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2\right)\int\limits_{D_\tau}1\cdot dxdt = \tau^3e^{2\tau}\|v_n\|_{L_2(D_\tau)}^2+$$

$$\tau^3e^{2\tau}\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 = \tau^3e^{2\tau}\int\limits_{D_\tau}v_n^2dxdt+\tau^3e^{2\tau}\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2. \quad (1.2.37)$$

(1.2.35) – (1.2.37) –ის გათვალისწინებით (1.2.32) –დან გვექნება

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right]dx \le 2M_1\tau+2M_2\int\limits_{\omega_\tau}v_n^2\,dx+\tau^2N_1^2+$$

$$2N_2^2\left[\tau^3e^{2\tau}\int\limits_{D_\tau}v_n^2dxdt+\tau^3e^{2\tau}\|G_n\|_{L_2(D_\tau)}^2\right]+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2dxdt+$$

$$2\int\limits_{D_\tau}Q_n\frac{\partial v_n}{\partial t}dxdt \le (2M_2+2N_2^2\tau^3e^{2\tau}+3)\int\limits_{D_\tau}\left[v_n^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right]dxdt+$$

$$2M_1\tau + \tau^2 N_1^2 + 2N_2^2\tau^3 e^{2\tau}\|G_n\|^2_{L_2(D_\tau)} + \int\limits_{D_\tau} Q_n^2\,dxdt. \qquad (1.2.38)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.2.28) პირობას და გამოვიყენებთ ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულას გვექნება

$$v_n(x,\tau) = v_n(x,x) + \int\limits_x^\tau \frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)dt = \int\limits_x^\tau \frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)dt, \ \ (x,\tau) \in D_T\,,$$

და, მაშასადამე, კოშის უტოლობის გამოყენებით

$$v_n^2(x,\tau) \le \left[\int\limits_x^\tau 1\cdot\left|\frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)\right|dt\right]^2 \le \int\limits_x^\tau 1^2\,dt\cdot\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)\right)^2 dt =$$

$$(\tau - x)\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)\right)^2 dt \le T\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)\right)^2 dt. \qquad (1.2.39)$$

(1.2.39) უტოლობის x ცვლადით ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\omega_\tau} v_n^2\,dx = \int\limits_0^\tau v_n^2(x,\tau)\,dx \le T\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t)\right)^2 dt\right]dx = T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 dxdt. \ (1.2.40)$$

(1.2.38) და (1.2.40) უტოლობების შეკრებით გვექნება

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[v_n^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right]dx \le$$

$$(2M_2 + 2N_2^2\tau^3 e^{2\tau} + T + 3)\int\limits_{D_\tau}\left[v_n^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right]dxdt + 2M_1\tau + \tau^2 N_1^2 +$$

$$2N_2^2\tau^3 e^{2\tau}\|G_n\|^2_{L_2(D_\tau)} + \|Q_n\|^2_{L_2(D_\tau)}\,. \qquad (1.2.41)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$w(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau}\left[v_n^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right]dx \qquad (1.2.42)$$

და მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\int\limits_{D_\tau}\left[v_n^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2\right]dx = \int\limits_0^\tau w(\sigma)d\sigma,$$

მაშინ (1.2.41) −დან გვექნება

$$w(\tau) \le M_3 \int_0^{\tau} w(\sigma) d\sigma + \widetilde{M}_4 , \quad 0 < \tau \le T, \tag{1.2.43}$$

სადაც

$$M_3 := 2M_2 + 2N_2^2 T^3 e^{2T} + T + 3, \tag{1.2.44}$$

$$\widetilde{M}_4 := 2M_1 \tau + \tau^2 N_1^2 + 2N_2^2 \tau^3 e^{2\tau} \|G_n\|^2_{L_2(D_\tau)} + \|Q_n\|^2_{L_2(D_\tau)} . \tag{1.2.45}$$

გრონუოლის ლემის თანახმად (1.2.43) −დან მივიღებთ

$$w(\tau) \le \widetilde{M}_4 e^{M_3 \tau}, \quad 0 < \tau \le T. \tag{1.2.46}$$

თუ გავიმეორებთ იმ მსჯელობებს, რომლითაც იყო მიღებული (1.2.21) უტოლობა, (1.2.42) და (1.2.46) −დან გვექნება

$$|v_n(x,t)| \le t^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}}(t) \le \widetilde{M}_4^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} M_3 t}, \quad (x,t) \in D_T , \tag{1.2.47}$$

სადაც $\widetilde{M}_4$ −ში $\tau = t$.

თუ (1.2.47) −ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$ და გავითვალისწინებთ (1.1.9), (1.2.5) და (1.2.30) ზღვრულ ტოლობებს მივიღებთ

$$|v(x,t)| \le M_4^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} M_3 t}, \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.2.48}$$

სადაც

$$M_4 = 2M_1 t + t^2 N_1^2 + \|F\|^2_{L_2(D_t)} . \tag{1.2.49}$$

(1.2.1) და (1.2.48) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$|u(x,t)| \le te^t \|v\|_{L_2(D_t)} = te^t \left(\int_{D_t} v^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \le te^t \left(\int_{D_t} M_4 T \, e^{M_3 T} dxdt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$te^t \left(M_4 T e^{M_3 T} \int_{D_t} 1 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} = te^t \left(M_4 T e^{M_3 T} \frac{1}{2} t^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} t^2 T^{\frac{1}{2}} M_4^{\frac{1}{2}} e^{t + \frac{1}{2} M_3 T}, \quad (x,t) \in D_T . \tag{1.2.50}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ მარტივ უტოლობას $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i|$ (1.2.49) −ის გათვალიწინებით გვექნება

$$M_4^{\frac{1}{2}} \leq (2M_1 t)^{\frac{1}{2}} + tN_1 + \|F\|_{L_2(D_t)}$$

და (1.2.48) და (1.2.50) გადაიწერება შემდეგი სახით

$$|u(x,t)| \leq C_1 \|F\|_{L_2(D_t)} + C_2\,, \ \ (x,t) \in D_T\,,$$

$$|v(x,t)| \leq C_3 \|F\|_{L_2(D_t)} + C_4\,, \ \ (x,t) \in D_T\,,$$

სადაც

$$C_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 T^{\frac{1}{2}} e^{t + \frac{1}{2} M_3 T}, \ \ C_2 := \left[(2M_1 t)^{\frac{1}{2}} + tN_1\right] \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 T^{\frac{1}{2}} e^{t + \frac{1}{2} M_3 T}, \tag{1.2.51}$$

$$C_3 := t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} M_3 t}, \ \ C_4 := \left[(2M_1 t)^{\frac{1}{2}} + tN_1\right] t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} M_3 t}. \tag{1.2.52}$$

ამით ლემა 1.2.2 დამტკიცებულია, სადაც (1.2.25) და (1.2.26) − ში შემავალი C_i, $i = 1, \dots, 4$, მუდმივები მოიცემა (1.2.51) და (1.2.52) ფორმულებით.

1.3. $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა

განსაზღვრება 1.3.1. ვიტყვით, რომ f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლიფშიცის ლოკალურ პირობას, თუ $\forall r = const > 0$

$$|f(s_2) - f(s_1)| \leq \Lambda_1(r) |s_2 - s_1| \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} : \ |s_i| \leq r, \ \ i = 1,2, \tag{1.3.1}$$

და

$$|g(s_2) - g(s_1)| \leq \Lambda_2(r) |s_2 - s_1| \ \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} : \ |s_i| \leq r, \ \ i = 1,2, \tag{1.3.2}$$

სადაც $\Lambda_i := \Lambda_i(r) = const \geq 0$, $i = 1,2$.

ცხადია, თუ $f(g) \in C^1(\mathbb{R})$, მაშინ მართებულია (1.3.1) $\big((1.3.2)\big)$ პირობა, სადაც ლაგრანჟის თეორემის თანახმად $\Lambda_1 = \max\limits_{|s| \leq r} |f'(s)|$ $\left(\Lambda_2 = \max\limits_{|s| \leq r} |g'(s)|\right)$.

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$ და $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. თუ f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.3.1) და (1.3.2) ლიფშიცის ლოკალურ პირობებს,

მაშინ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას გააჩნია ორი u_1, v_1 და u_2, v_2 უწყვეტ ფუნქციათა კლასის განზოგადებული ამონახსნი, ანუ განსაზღვრის თანახმად არსებობენ u_{1n}, v_{1n} და u_{2n}, v_{2n} მიმდევრობები, რომლებიც ეკუთვნიან $(1.1.8)$ –ით განსაზღვრულ $\overset{0}{C}{}^2(\bar{D}_T)$ კლასს და აკმაყოფილებენ შემდეგ ზღვრულ ტოლობებს

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{in}-u_i\|_{C(\bar{D}_T)}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|v_{in}-v_i\|_{C(\bar{D}_T)}=0\,,\ \ i=1,2, \tag{1.3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|L_1(u_{in},v_{in})\|_{C(\bar{D}_T)}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|L_2(u_{in},v_{in})-F\|_{C(\bar{D}_T)}=0\,,\ \ i=1,2. \tag{1.3.4}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\varphi_n := u_{2n}-u_{1n},\ \ \psi_n=v_{2n}-v_{1n}, \tag{1.3.5}$$

მაშინ $(1.1.4)$ და $(1.1.5)$ –ში განსაზღვრული L_1 და L_2 ოპერატორების გათვალისწინებით გვექნება

$$\square\varphi_n=\psi_n+A_n(x,t),\ \ (x,t)\in D_T\,, \tag{1.3.6}$$

$$\varphi_n\big|_{\gamma_{1,T}}=\varphi_n(t,t)=0,\ \ \varphi_n\big|_{\gamma_{2,T}}=\varphi_n(0,t)=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{1.3.7}$$

$$\square\psi_n=-\big(f(v_{2n})-f(v_{1n})\big)-\big(g(v_{2n})-g(v_{1n})\big)+B_n(x,t),\ \ (x,t)\in D_T\,, \tag{1.3.8}$$

$$\psi_n\big|_{\gamma_{1,T}}=\psi_n(t,t)=0,\ \ \psi_n\big|_{\gamma_{2,T}}=\psi_n(0,t)=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{1.3.9}$$

სადაც

$$A_n := L_1(u_{2n},v_{2n})-L_1(u_{1n},v_{1n}),$$

$$B_n := L_2(u_{2n},v_{2n})-L_2(u_{1n},v_{1n})$$

მიმდევრობები $(1.3.4)$ ზღვრული ტოლობების ძალით აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n\|_{C(\bar{D}_T)}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|B_n\|_{C(\bar{D}_T)}=0. \tag{1.3.10}$$

თუ $(1.3.6)$ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ $\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგრებთ $D_\tau := \{(x,t)\in D_T : t<\tau\}$ არეზე, სადაც $0<\tau\le T$, და გავიმეორებთ იმ

მსჯელობებს, რომლებმაც (1.2.6) ტოლობიდან მიგვიყვანეს (1.2.16) ტოლობაზე, გვექნება

$$\int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\right)^2\right]dx=2\int_{D_\tau}\psi_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}dxdt+2\int_{D_\tau}A_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}dxdt. \qquad (1.3.11)$$

ანალოგიურად, როგორც (1.2.16) −დან მივიღეთ (1.2.37) უტოლობა, (1.3.11) −დან გვექნება

$$\int_{D_\tau}\varphi_n^2(x,t)\,dxdt\le\tau^3e^{2\tau}\int_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+\tau^3e^{2\tau}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}\,. \qquad (1.3.12)$$

ახლა თუ გავამრავლებთ (1.3.8) განტოლების ორივე მხარეს $\frac{\partial\psi_n}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგრებთ D_τ არეზე, ანალოგიურად (1.2.32) ტოლობისა, გვექნება

$$\int_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dx=-2\int_{D_\tau}\big(f(v_{2n})-f(v_{1n})\big)\frac{\partial\psi_n}{\partial t}dxdt-$$

$$2\int_{D_\tau}\big(g(v_{2n})-g(v_{1n})\big)\frac{\partial\psi_n}{\partial t}dxdt+2\int_{D_\tau}B_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t}dxdt. \qquad (1.3.13)$$

(1.3.3) ზღვრული ტოლობების ძალით, რადგან $\{u_{in}\}$ და $\{v_{in}\}$ მიმდევრობები კრებადნი არიან $C(\overline{D}_T)$ სივრცეში, ამიტომ ისინი შემოსაზღვრული არიან ამ სივრცეში. ამიტომ მოიძებნება ისეთი $r>0$, რომ

$$\|u_{in}\|_{C(\overline{D}_T)}\le r,\ \ \|v_{in}\|_{C(\overline{D_T})}\le r\quad\forall n\in N,\ \ i=1{,}2. \qquad (1.3.14)$$

(1.3.1), (1.3.5) და (1.3.14) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|-2\int_{D_\tau}\big(f(v_{2n})-f(v_{1n})\big)\frac{\partial\psi_n}{\partial t}dxdt\right|\le2\int_{D_\tau}\Lambda_1(r)|v_{2n}-v_{1n}|\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|dxdt=$$

$$\Lambda_1(r)\int_{D_\tau}2\psi_n\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|dxdt\le\Lambda_1\int_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+\Lambda_1\int_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2dxdt. \qquad (1.3.15)$$

ანალოგიურად, (1.3.2), (1.3.5) და (1.3.14) −დან მივიღებთ

$$\left|-2\int_{D_\tau}\big(g(v_{2n})-g(v_{1n})\big)\frac{\partial\psi_n}{\partial t}dxdt\right|\le\Lambda_2\int_{D_\tau}\varphi_n^2\,dxdt+\Lambda_2\int_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2dxdt. \quad (1.3.16)$$

(1.3.13), (1.3.15) და (1.3.16) −დან გვექნება

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dx \le \Lambda_1\int\limits_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+\Lambda_1\int\limits_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2 dxdt+$$

$$\Lambda_2\int\limits_{D_\tau}\varphi_n^2\,dxdt+\Lambda_2\int\limits_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int\limits_{D_\tau}B_n^2\,dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2 dxdt=$$

$$\Lambda_1\int\limits_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+\Lambda_2\int\limits_{D_\tau}\varphi_n^2\,dxdt+(\Lambda_1+\Lambda_2+1)\int\limits_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2 dxdt+$$

$$\int\limits_{D_\tau}B_n^2\,dxdt,\quad 0<\tau\le T,$$

საიდანაც (1.3.12) −ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dx \le \Lambda_1\int\limits_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+\Lambda_2\tau^3e^{2\tau}\int\limits_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+$$

$$\Lambda_2\tau^3e^{2\tau}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}+(\Lambda_1+\Lambda_2+1)\int\limits_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int\limits_{D_\tau}B_n^2\,dxdt\le$$

$$(\Lambda_1+\Lambda_2T^3e^{2T})\int\limits_{D_\tau}\psi_n^2\,dxdt+(\Lambda_1+\Lambda_2+1)\int\limits_{D_\tau}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right|^2 dxdt+$$

$$\Lambda_2T^3e^{2T}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}+\|B_n\|^2{}_{L_2(D_T)}\,. \qquad (1.3.17)$$

შევნიშნოთ, რომ (1.2.40) უტოლობა მართებული იქნება, თუ v_n −ის ნაცვლად ჩვენ ავიღებთ ψ_n ფუნქციას, ანუ

$$\int\limits_{\omega_\tau}\psi_n^2\,dx\le T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2 dxdt. \qquad (1.3.18)$$

თუ შევკრებთ (1.3.17) და (1.3.18) უტოლობებს მივიღებთ

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[\psi_n^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dx\le(\Lambda_1+\Lambda_2T^3e^{2T})T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2 dxdt+$$

$$(\Lambda_1+\Lambda_2+1)\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2 dxdt+\Lambda_2T^3e^{2T}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}+\|B_n\|^2{}_{L_2(D_T)}\le$$

$$(\Lambda_1 T+\Lambda_2 T^4 e^{2T}+\Lambda_1+\Lambda_2+1)\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2 dxdt+\Lambda_2 T^3 e^{2T}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}+$$

$$\|B_n\|^2{}_{L_2(D_T)}\le(\Lambda_1 T+\Lambda_2 T^4 e^{2T}+\Lambda_1+\Lambda_2+1)\int\limits_{D_\tau}\left[\psi_n^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dxdt$$

$$+\Lambda_2 T^3 e^{2T}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}+\|B_n\|^2{}_{L_2(D_T)}\le$$

$$K_1\int\limits_{D_\tau}\left[\psi_n^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dxdt+K_{2n}\,, \qquad (1.3.19)$$

სადაც

$$K_1:=(\Lambda_1 T+\Lambda_2 T^4 e^{2T}+\Lambda_1+\Lambda_2+1),\quad K_{2n}=\Lambda_2 T^3 e^{2T}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)}$$

$$+\|B_n\|^2{}_{L_2(D_T)}\,. \qquad (1.3.20)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$w_3(\tau):=\int\limits_{\omega_\tau}\left[\psi_n^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dx \qquad (1.3.21)$$

და მხედველობაში მივიღებთ ტოლობას

$$\int\limits_{D_\tau}\left[\psi_n^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right]dxdt=\int\limits_0^\tau w_3(\sigma)d\sigma$$

(1.3.19) −დან მივიღებთ

$$w_3(\tau)\le K_1\int\limits_0^\tau w_3(\sigma)d\sigma+K_{2n}\,,\ \ 0<\tau\le T. \qquad (1.3.22)$$

გრონუოლის ლემის თანახმად (1.3.22) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$w_3(\tau)\le K_{2n}e^{K_1\tau},\ \ 0<\tau\le T. \qquad (1.3.23)$$

(1.3.10) ზღვრული ტოლობის შედეგად გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n\|_{L_2(D_T)}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\|B_n\|_{L_2(D_T)}=0$$

და, მაშასადამე, (1.3.20) −ის ძალით

$$\lim_{n\to\infty}K_{2n}=0. \qquad (1.3.24)$$

ანალოგიურად (1.2.21) უტოლობის, ψ_n ფუნქციისათვის მართებულია უტოლობა

$$\psi_n^2(x,t) \le t\int_0^t \left[\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right](\xi,t)d\xi$$

და, მაშასადამე, $(1.3.21)$ –ის ძალით

$$\psi_n^2(x,t) \le t\int_0^t \left[\psi_n^2 + \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2\right](\xi,t)d\xi =$$

$$tw_3(t) \le K_{2n}e^{K_1 t}, \quad (x,t) \in D_T\,. \tag{1.3.25}$$

თუ $(1.3.25)$ –ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$ და გავითვალისწინებთ $(1.3.3)$, $(1.3.5)$ და $(1.3.24)$ ზღვრულ ტოლობებს მივიღებთ

$$|(v_2 - v_1)(x,t)|^2 = \lim_{n\to\infty}|(v_{2n} - v_{1n})(x,t)|^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^2\,(x,t) \le e^{K_1 t}\lim_{n\to\infty} K_{2n} = 0, \tag{1.3.26}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $v_2(x,t) = v_1(x,t)$, $(x,t) \in D_T$.

$(1.3.5), (1.3.10), (1.3.12)$ და $(1.3.26)$ –დან მივიღებთ

$$\int_{D_T}(u_2 - u_1)^2\,dxdt = \lim_{n\to\infty}\int_{D_T}(u_{2n} - u_{1n})^2\,dxdt = \lim_{n\to\infty}\int_{D_T}\varphi_n^2\,dxdt \le$$

$$T^3e^{2T}\lim_{n\to\infty}\int_{D_T}\psi_n^2\,dxdt + T^3e^{2T}\lim_{n\to\infty}\|A_n\|^2{}_{L_2(D_T)} \le T^3e^{2T}\lim_{n\to\infty}\int_{D_T}K_{2n}\,e^{K_1T}dxdt =$$

$$T^3e^{2T}e^{K_1T}\int_{D_T}1\,dxdt\lim_{n\to\infty}K_n = T^3e^{2T}e^{K_1T}\cdot\frac{1}{2}T^2\lim_{n\to\infty}K_{2n} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ D_T არეში $u_2 = u_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

1.4. $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე

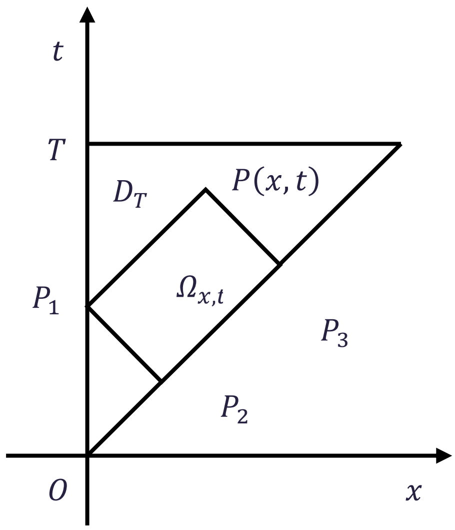
ახლა მოვიყვანოთ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე $C(\overline{D_T})$ უწყვეტ ფუნქციათა კლასში.

ვთქვათ, u და v ფუნქციები წარმოადგენენ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს, ანუ არსებობს $\{u_n\}$ და $\{v_n\}$ მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $(1.1.8)-(1.1.10)$ პირობებს. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები u_n ფუნქცია წარმოადგენს $(1.2.2), (1.2.3)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, სადაც G_n ფუნქცია მოცემულია $(1.1.4)$ ფორმულით და აკმაყოფილებს $(1.2.5)$ ზღვრულ ტოლობას. ანალოგიურად, v_n ფუნქცია წარმოადგენს $(1.2.27), (1.2.28)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, სადაც Q_n ფუნქცია მოცემულია $(1.2.29)$ ფორმულით და აკმაყოფილებს $(1.2.30)$ ზღვრულ ტოლობას.

ვთქვათ, $P=P(x,t)$ არის D_T არის ნებისმიერი წერტილი. აღვნიშნოთ $\Omega_{x,t}$ −ით მახასიათებელი მართკუთხედი, რომლის წვეროები P_1, P_2 და P_3 მდებარეობენ შესაბამისად $\gamma_{2,T}$ და $\gamma_{1,T}$ წირებზე (იხ. ნახ.2), ანუ

$$P_1 := P_1(0, t-x),\ \ P_2 := P_2\left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}\right),$$

$$P_3 := P_3\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2}\right).$$



ნახ. 2 მახასიათებელი მართკუთხედი

თუ $(1.2.2)$ განტოლებას ვაინტეგრებთ $\Omega_{x,t}$ მართკუთხედზე, მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას და გავითვალისწინებთ $(1.2.3)$ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$u_n(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{x,t}} v_n(x',t')dx'dt' = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{x,t}} G_n(x',t')dx'dt',\ \ (x,t)\in D_T\,. \quad (1.4.1)$$

ანალოგიური მსჯელობების ჩატარების შედეგად (1.2.27), (1.2.28) ამოცანის მიმართ გვექნება

$$v_n(x,t) + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} [f(v_n) + g(u_n)]\,(x',t')dx'dt' =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} Q_n\,(x',t')dx'dt', \;\; (x,t) \in D_T\,. \qquad (1.4.2)$$

თუ (1.4.1) და (1.4.2) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$ და გავითვალისწინებთ (1.1.9), (1.1.10) და (1.2.5), (1.2.30) ზღვრულ ტოლობებს u და v ფუნქციების მიმართ მივიღებთ არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას უწყვეტ ფუნქციათა $C(\overline{D}_T)$ კლასში:

$$u(x,t) - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} v\,(x',t')dx'dt' = 0, \;\; (x,t) \in D_T\,, \qquad (1.4.3)$$

$$v(x,t) + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} [f(v) + g(u)]\,(x',t')dx'dt' =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} F\,(x',t')dx'dt', \;\; (x,t) \in D_T\,. \qquad (1.4.4)$$

შენიშვნა 1.4.1. როცა $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{D}_T)$ მართებულია შებრუნებული დებულებაც: თუ u და v ფუნქციები არიან (1.4.3), (1.4.4) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის $C(\overline{D}_T)$ კლასის ამონახსნი, მაშინ ეს ფუნქციები წარმოადგენენ $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს (G.K. Berikelashvili, 2008), (G. Berikelashvili, 2011), (O. Jokhadze B. M., 2008), (O.M. Dzhokhadze, 2008), (S. Kharibegashvili, 2009).

შემოვიღოთ აღნიშვნა $U := (u, v)$ და (1.4.3), (1.4.4) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ შემდეგი ვექტორული სახით

$$U(x,t) + (KU)(x,t) = \Phi(x,t), \;\; (x,t) \in D_T\,, \qquad (1.4.5)$$

სადაც

$$K = (K_1, K_2), \;\; (K_1U)(x,t) = -(K_0 v)(x,t), \;\; (K_2U)(x,t) =$$

$$\Big(K_0\big(f(v)+g(u)\big)\Big)(x,t), \tag{1.4.6}$$

$$(K_0w)(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{x,t}} w\,(x',t')dx'dt'\ , \tag{1.4.7}$$

$$\Phi(x,t)=\big(0,(K_0F)(x,t)\big). \tag{1.4.8}$$

1.5. $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის სიგლუვე და ამ ამოცანის გლობალური ამოხსნადობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. გლობალური ამონახსნის არსებობა D_∞ არეში

შენიშვნა 1.5.1. როგორც ცნობილია K_0 ოპერატორი, განსაზღვრული (1.4.7) ფორმულით აკმაყოფილებს სიგლუვის შემდეგ პირობებს: თუ $w\in C^k(\overline{D}_T)$, მაშინ $K_0w\in C^{k+1}(\overline{D}_T)$, $k=0,1,\dots$. აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $f,g\in C^1(R)$, $F\in C^1(\overline{D}_T)$, მაშინ (1.4.5) სისტემის უწყვეტი $U=(u,v)$ ამონახსნი აკმაყოფილებს სიგლუვის შემდეგ პირობებს: $u,v\in C^2(\overline{D}_T)$ და წარმოადგენს $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს.

შენიშვნა 1.5.2. $C(\overline{D}_T)$ სივრცეში, $C^1(\overline{D}_T)$ სივრცე, როგორც ცნობილია კომპაქტურად არის ჩართული. ამიტომ, თუ განვიხილავთ K –ს, როგორც ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს $C(\overline{D}_T)$ სივრცეში და გავითვალისწინებთ შენიშვნა 1.5.1 –ს, (1.4.6) – ის თანახმად მივიღებთ, რომ ოპერატორი

$$K\colon C(\overline{D}_T)\to C(\overline{D}_T)$$

არის უწყვეტი და კომპაქტური. აქედან გამომდინარე $L\colon C(\overline{D}_T)\to C(\overline{D}_T)$, ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს შემდეგი წესით

$$(LU)(x,t)=-(KU)(x,t)+\Phi(x,t),\ \ (x,t)\in\overline{D}_T\ , \tag{1.5.1}$$

აგრეთვე იქნება უწყვეტი და კომპაქტური და (1.4.5) განტოლება $C(\overline{D_T})$ სივრცეში გადაიწერება შემდეგი სახით

$$U=LU. \tag{1.5.2}$$

შენიშვნა 1.5.3. ზემოთმოყვანილი მსჯელობებიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{D}_T)$, მაშინ $U := (u, v) \in C(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა U არის $(1.5.2)$ განტოლების ამონახსნი $C(\overline{D}_T)$ სივრციდან. აქედან ლემა $1.2.2$ $-$ის თანახმად გამომდინარეობს, რომ $(1.2.23)$, $(1.2.24)$ პირობების შესრულების შემთხვევაში $(1.5.2)$ განტოლების $C(\overline{D}_T)$ კლასის ამონახსნი აკმაყოფილებს $(1.2.25)$ და $(1.2.26)$ აპრიორულ შეფასებებს. $(1.5.2)$ განტოლების $(1.2.25)$ და $(1.2.26)$ აპრიორულ შეფასებებში შემავალი C_i, $i = 1, \dots, 4$, მუდმივების სტრუქტურიდან გამომდინარეობს, რომ $U = \tau L U$ განტოლების $C(\overline{D}_T)$ კლასის ამონახსნი, სადაც პარამეტრი $\tau \in [0,1]$, აგრეთვე აკმაყოფილებს იგივე $(1.2.25)$ და $(1.2.26)$ აპრიორულ შეფასებებს, რომლებშიც C_i, $i = 1, \dots, 4$, მუდმივები $(1.2.23), (1.2.24), (1.2.44), (1.2.51)$ და $(1.2.52)$ $-$ის ძალით არ არიან დამოკიდებული F ფუნქციასა და τ პარამეტრზე. ამიტომ იმის გათვალისწინებით, რომ $(1.5.2)$ განტოლებაში შემავალი ოპერატორი $L: C(\overline{D}_T) \to C(\overline{D}_T)$ არის უწყვეტი და კომპაქტური, ლერე$-$შაუდერის თეორემის (V.A.Trenogin, 1993) თანახმად $(1.5.2)$ განტოლებას გააჩნია $C(\overline{D}_T)$ სივრცეში ერთი მაინც ამონახსნი, რომელიც როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ აგრეთვე წარმოადგენს $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს.

ამრიგად, თეორემა $1.3.1$ $-$ის და შენიშვნა $1.5.1$ $-$ის გათვალისწინებით მართებულია შემდეგი

თეორემა 1.5.1. ვთქვათ, $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{D}_T)$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, და f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ $(1.2.23)$ და $(1.2.24)$ პირობებს. მაშინ $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს ამ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს D_T არეში.

თეორემა $1.3.1$ და თეორემა $1.5.1$ $-$დან თავის მხრივ გამომდინარეობს

თეორემა 1.5.2. ვთქვათ, $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{D}_\infty)$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, და f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ $(1.2.23)$ და $(1.2.24)$ პირობებს, მაშინ $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანას, როცა $T = \infty$ გააჩნია ერთადერთი გლობალური კლასიკური ამონახსნი D_∞ არეში.

დამტკიცება. თეორემა 1.5.1 −დან გამომდინარეობს, რომ D_T არეში არსებობს $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ერთადერთი u_k, v_k კლასიკური ამონახსი, სადაც $T = k \in N$. რადგან $u_{k+1}\big|_{D_k}$ აგრეთვე წარმოადგენს $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს D_k არეში, ამოტომ ამონახსნის ერთადერთობის გამო გვექნება $u_{k+1}\big|_{D_k} = u_k$, $v_{k+1}\big|_{D_k} = v_k$. აქედან გამომდინარე u და v ფუნქციები აგებული შემდეგი წესით: $u(x,t) = u_k(x,t)$, $v(x,t) = v_k(x,t)$, როცა $k = [t]+1$, სადაც $[t]$ წარმოადგენს t რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო $(x,t) \in D_\infty$, არის D_∞ არეში $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ერთადერთი გლობალური კლასიკური ამონახსნი. ამით თეორემა 1.5.2 დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 1.5.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$, $\mu_i = 0$, $i = 1,\dots,4$. $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას ეწოდება გლობალურად ამოხსნადი C კლასში, თუ ნებისმიერი დადებითი T −ის ამ ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში განსაზღვრება 1.1.1−ის აზრით.

შენიშვნა 1.5.4. ცხადია, რომ თუ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანა არ არის გლობალურად ამოხსნადი C კლასში განსაზღვრება 1.5.1 −ის აზრით, მაშინ ამ ამოცანას არ გააჩნია გლობალური კლასიკური ამონახსნი D_∞ არეში. ამასთან, თუ შესრულებულია თეორემა 1.5.2 −ის პირობები, მაშინ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას გააჩნია გლობალური კლასიკური ამონახსნი D_∞ არეში და, მაშასადამე, ეს ამოცანა აგრეთვე არის გლობალურად ამოხსნადი C კლასში.

1.6. $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის არარსებობა

ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ როცა დარღვეულია (1.2.23) და (1.2.24) პირობები, მაშინ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანა შეიძლება არ იყოს გლობალურად ამოხსნადი განსაზღვრება 1.5.1 −ის აზრით.

თეორემა 1.6.1. ვთქვათ, $f = 0$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, $F_0 \in C^1(\overline{D}_T)$, $F_0\big|_{D_T} > 0$ და $F = \lambda F_0$, $\lambda = const > 0$, $\mu_i = 0$, $i = 1,\dots,4$. მაშინ, თუ $g(u) \le -|u|^\alpha$, $\alpha = const > 1$

მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\lambda_0 = \lambda_0(F_0, \alpha) > 0$, რომ როცა $\lambda > \lambda_0$ $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანას D_T არეში არ აქვს C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ, u, v წარმოადგენს $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს. რადგან $f = 0$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ და $F \in C^1(\overline{D}_T)$, ამიტომ შენიშვნა 1.4.1 და 1.5.1 −ის ძალით ეს ამონახსნი იქნება $(1.1.4) - (1.1.7)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. აქედან გამომდინარე u ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.1.1) განტოლებას D_T არეში, ანუ

$$\square^2 u + g(u) = F(x.t), \ (x,t) \in D_T \,, \tag{1.6.1}$$

ამასთან $g(u)$, $\square^2 u \in C(\overline{D}_T)$.

ავიღოთ საცდელი ფუნქცია

$$\varphi \in \overset{0}{C^4}(\overline{D}_T, \partial D_T) := \left\{ \psi \in C^4(\overline{D}_T) : \psi \big|_{D_T} > 0, \ \frac{\partial^{i+j}\psi}{\partial x^i \partial t^j} \big|_{\partial D_T} = 0, \ i + j \leq 3 \right\}, \tag{1.6.2}$$

გავამრავლოთ მასზე (1.6.1) განტოლების ორივე მხარე და ვაინტეგროთ D_T არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\partial^{i+j}\psi}{\partial x^i \partial t^j} \big|_{\partial D_T} = 0$, $i + j \leq 3$, მივიღებთ

$$\int\limits_{D_T} u \square^2 \varphi dx dt = -\int\limits_{D_T} g(u) \varphi dx dt + \lambda \int\limits_{D_T} F_0 \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{C^4}(\overline{D}_T, \partial D_T). \tag{1.6.3}$$

რადგან პირობის თანახმად $g(u) \leq -|u|^\alpha$ და $\varphi \geq 0$ $(1.6.3)$ −დან გამომდინარეობს

$$\int\limits_{D_T} |u|^\alpha \varphi dx dt \leq \int\limits_{D_T} u \square^2 \varphi dx dt - \lambda \int\limits_{D_T} F_0 \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{C^4}(\overline{D}_T, \partial D_T). \tag{1.6.4}$$

ქვემოთ ვისარგებლებთ საცდელ ფუნქციათა მეთოდით (E. Mitidieri, 2001). ავიღოთ საცდელი ფუნქცია $\varphi \in \overset{0}{C^4}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ ისეთი, რომ $\varphi \big|_{D_T} > 0$. თუ იუნგის უტოლობაში

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} a^\alpha + \frac{1}{\alpha' \varepsilon^{\alpha' - 1}} b^{\alpha'}, \ a, b \geq 0, \ \alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \,,$$

სადაც ε დადებითი პარამეტრია, ავიღებთ $a = |u|\varphi^{\frac{1}{\alpha}}$ და $b = \frac{|\square^2\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{\alpha}}}$, მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha' - 1$ მივიღებთ

$$|u\square^2\varphi| = |u|\varphi^{\frac{1}{\alpha}}\frac{|\square^2\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}|u|^\alpha\varphi + \frac{1}{\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\frac{|\square^2\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}. \qquad (1.6.5)$$

(1.6.4) და (1.6.5) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\int_{D_T}|u|^\alpha\varphi dxdt \leq \frac{1}{\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\int_{D_T}\frac{|\square^2\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}dxdt - \lambda\int_{D_T}F_0\varphi dxdt,$$

საიდანაც, როცა $\varepsilon < \alpha$ გვექნება

$$\int_{D_T}|u|^\alpha\varphi dxdt \leq \frac{\alpha}{(\alpha-\varepsilon)\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\int_{D_T}\frac{|\square^2\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}dxdt - \frac{\alpha\lambda}{\alpha-\varepsilon}\int_{D_T}F_0\varphi dxdt. \qquad (1.6.6)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ტოლობებს $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha'-1}$ და $\min\limits_{0<\varepsilon<\alpha}\frac{\alpha}{(\alpha-\varepsilon)\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}} = 1$, რომელიც მიიღწევა, როცა $\varepsilon = 1$, (1.6.6) −დან მივიღებთ

$$\int_{D_T}|u|^\alpha\varphi dxdt \leq \int_{D_T}\frac{|\square^2\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}dxdt - \alpha'\lambda\int_{D_T}F_0\varphi dxdt. \qquad (1.6.7)$$

ადვილი საჩვენებელია ისეთი საცდელი φ ფუნქციის არსებობა, რომლისთვისაც

$$\varphi \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T),\ \ \varphi\big|_{D_T} > 0,\ \ æ_0 := \int_{D_T}\frac{|\square^2\varphi|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}dxdt < +\infty. \qquad (1.6.8)$$

მართლაც, შემდეგი ფორმულით აგებული ფუნქცია

$$\varphi(x,t) = [x(t-x)(T-t)]^m$$

საკმარისად დიდი ნატურალური m −ისათვის აკმაყოფილებს (1.6.8) პირობებს.

რადგან პირობის თანახმად $F_0 \in C(\overline{D_T})$, $F_0\big|_{D_T} > 0$ და ამასთან $\varphi\big|_{D_T} > 0$ გვექნება

$$0 < æ_1 := \int_{D_T}F_0\varphi dxdt \leq +\infty. \qquad (1.6.9)$$

აღვნიშნოთ $\chi(\lambda)$ −ით (1.6.7) უტოლობის მარჯვენა მხარე, რომელიც წრფივია λ პარამეტრის მიმართ. მაშინ (1.6.8) და (1.6.9) −დან მივიღებთ

$$\chi(\lambda) < 0, \text{ როცა } \lambda > \mu_0 \text{ და } \chi(\lambda) > 0, \text{ როცა } \lambda < \mu_0\,, \tag{1.6.10}$$

სადაც

$$\chi(\lambda) = æ_0 - \alpha'\lambda æ_1\,, \quad \lambda_0 = \frac{æ_0}{\alpha' æ_1}.$$

(1.6.10) −ის ძალით, როცა $\lambda > \lambda_0$ (1.6.7) უტოლობის მარჯვენა მხარე უარყოფითია, როცა ამავე უტოლობის მარცხენა მხარე არაუარყოფითია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

შევნიშნოთ, რომ როცა $g(u) \le -|u|^{\alpha}$, $\alpha = const > 1$, მაშინ დარღვეულია (1.2.24) პირობა.

შენიშვნა 1.6.1. ადვილი შესამოწმებელია, რომ როცა

$$f(u) = \lambda e^{u}\,,\ g(u) = \mu sinu,\ \ \lambda, \mu = const, \tag{1.6.11}$$

სადაც $\lambda \ge 0$, მაშინ (1.2.23) და (1.2.24) პირობები იქნება შესრულებული და ამ შემთხვევაში თეორემა 1.5.1 −ის ძალით (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს ამ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს D_T არეში. ამასთან, როცა $\lambda < 0$ (1.2.23) პირობა იქნება დარღვეული და ამ შემთხვევაში (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანა შეიძლება აღარ იყოს ამოხსნადი. მართლაც, მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.6.2. ვთქვათ, f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.6.11) პირობებს, ამასთან $\lambda < 0$, $\mu = 0$, $F_0 \epsilon C^1(\overline{D_T})$, $F_0\big|_{D_T} > 0$ და $F = \beta F_0$, $\beta = const > 0$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \ldots, 4$. მაშინ მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\beta_0 := \beta_0(F_0) > 0$, რომ როცა $\beta > \beta_0$ (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანას D_T არეში არ აქვს C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ u, v წარმოადგენს (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს. რადგან $F \epsilon C^1(\overline{D_T})$, ამიტომ ეს ამონახსნი იქნება (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. აქედან გამომდინარე v ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგ დარბუს ამოცანის

$$\Box v = -\lambda e^{v} + F(x,t),\ \ (x,t) \in D_T, \tag{1.6.12}$$

$$v\big|_{\gamma_{1,T}} = v(t,t) = 0,\ \ v\big|_{\gamma_{2,T}} = v(0,t) = 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{1.6.13}$$

$C^2(\overline{D_T})$ კლასის კლასიკურ ამონახსნს.

როგორც ცნობილია $(1.6.12), (1.6.13)$ ამოცანის კლასიკური $v \in C^2(\overline{D_T})$ ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა (იხ. ნახ.2)

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{x,t}} [-\lambda e^{v(x',y')} + F(x',y')]dx'dy',\ \ (x,t) \in D_T. \tag{1.6.14}$$

რადგან $\lambda < 0$ და $F(x',y') > 0$, როცა $(x',y') \in \Omega_{x,t}$ ამიტომ

$$-\lambda e^{v(x',y')} + F(x',t') > 0,\ \ (x',y') \in \Omega_{x,t}$$

და $(1.6.14)$ –ის ძალით

$$v(x,t) > 0,\ \ (x,t) \in D_T.$$

რადგან $e^{v} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^k}{k!}$ და $v > 0$, ამიტომ $e^{v} > \frac{v^2}{2}$, საიდანაც იმის გათვალისწინებით, რომ $-\lambda = |\lambda| > 0$ გვექნება

$$-\lambda e^{v} > \frac{1}{2}|\lambda| v^2 = \lambda_0 v^2,\ \ \lambda_0 := \frac{1}{2}|\lambda|. \tag{1.6.15}$$

ავიღოთ საცდელი ფუნქცია $\varphi \in C^2(\overline{D_T})$ ისეთი, რომ

$$\varphi\big|_{D_T} > 0,\ \ \varphi\big|_{\partial D_T} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\big|_{\partial D_T} = 0, \tag{1.6.16}$$

და

$$æ_0 := \int\limits_{D_T} \frac{|\Box \varphi|^2}{|\varphi|} dxdt < +\infty, \tag{1.6.17}$$

სადაც $v := (v_x, v_t)$ არის ∂D_T –ის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი. ასეთი ფუნქციის სახით შეგვიძლია ავიღოთ $\varphi(x,t) = [x(t-x)(T-t)]^m$ საკმარისად დიდი ნატურალური m –ის.

თუ $(1.6.12)$ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ φ ფუნქციაზე და ვაინტეგრებთ D_T არეზე, ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად, $(1.6.15)$ და $(1.6.16)$ –ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\int\limits_{D_T} v\Box\varphi\, dxdt \geq \int\limits_{D_T} \lambda_0 v^2\varphi\, dxdt + \beta \int\limits_{D_T} F_0\varphi\, dxdt,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_0 \int\limits_{D_T} v^2\varphi\, dxdt \leq \int\limits_{D_T} v|\Box\varphi|\, dxdt - \beta \int\limits_{D_T} F_0\varphi\, dxdt. \qquad (1.6.18)$$

თუ კოშის უტოლობაში $\varepsilon > 0$ პარამეტრით $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ ავიღებთ $a = v\varphi^{\frac{1}{2}}$, $b = \frac{|\Box\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{2}}}$ გვექნება

$$v|\Box\varphi| = v\varphi^{\frac{1}{2}}\frac{|\Box\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}v^2\varphi + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{|\Box\varphi|^2}{\varphi}. \qquad (1.6.19)$$

(1.6.18) და (1.6.19) −დან მივიღებთ

$$\left(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \int\limits_{D_T} v^2\varphi\, dxdt \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{D_T} \frac{|\Box\varphi|^2}{\varphi} dxdt - \beta \int\limits_{D_T} F_0\varphi\, dxdt,$$

საიდანაც, როცა $\varepsilon < 2\lambda_0$ გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_{D_T} v^2\varphi\, dxdt \leq \frac{1}{(2\lambda_0 - \varepsilon)\varepsilon} \int\limits_{D_T} \frac{|\Box\varphi|^2}{\varphi} dxdt - \frac{2\beta}{2\lambda_0 - \varepsilon} \int\limits_{D_T} F_0\varphi\, dxdt. \qquad (1.6.20)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\min\limits_{0<\varepsilon<2\lambda_0} \frac{1}{(2\lambda_0-\varepsilon)\varepsilon} = \frac{1}{{\lambda_0}^2}$, რომელიც მიიღწევა, როცა $\varepsilon = \lambda_0$, (1.6.20) −დან მივიღებთ

$$\int\limits_{D_T} v^2\varphi\, dxdt \leq \frac{1}{{\lambda_0}^2} \int\limits_{D_T} \frac{|\Box\varphi|^2}{\varphi} dxdt - \frac{2\beta}{\lambda_0} \int\limits_{D_T} F_0\varphi\, dxdt. \qquad (1.6.21)$$

(1.6.17) −ის ძალით (1.6.21) გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\int\limits_{D_T} v^2\varphi\, dxdt \leq \frac{æ_0}{{\lambda_0}^2} - \frac{2\beta}{\lambda_0} æ_1, \qquad (1.6.22)$$

სადაც იმის გათვალისწინებით, რომ $F_0\big|_{D_T} > 0$ და $\varphi\big|_{D_T} > 0$

$$0 < æ_1 := \int\limits_{D_T} F_0\varphi\, dxdt < +\infty. \qquad (1.6.23)$$

აღვნიშნოთ $\chi(\beta)=\frac{æ_0}{{\lambda_0}^2}-\frac{2\beta}{\lambda_0}æ_1$ −ით (1.6.22) უტოლობის მარჯვენა მხარე, რომელიც წრფივია β პარამეტრის მიმართ. მაშინ (1.6.22) და (1.6.23) −ის ძალით გვექნება

$$\chi(\beta)<0,\ \text{როცა}\ \beta>\beta_0\ \ \text{და}\ \ \chi(\beta)>0,\ \text{როცა}\ \beta<\beta_0, \tag{1.6.24}$$

სადაც

$$\beta_0:=\frac{æ_0}{2\lambda_0 æ_1}.$$

(1.6.24) −დან გამომდინარეობს, რომ როცა $\beta>\beta_0$, მაშინ (1.6.22) უტოლობის მარჯვენა მხარე უარყოფითია, როცა ამავე უტოლობის მარცხენა მხარე არაუარყოფითია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

1.7. $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანის ლოკალური ამოხსნადობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში

განსაზღრება 1.7.1. ვთქვათ, $f,g\in C(\mathbb{R})$, $F\in C(\overline{D}_\infty)$, $\mu_i=0$, $i=1,\dots,4$. $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას ეწოდება ლოკალურად ამოხსნადი C კლასში, თუ არსებობს ისეთი დადებითი მუდმივი $T_0=T_0(F)$, რომ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში, როცა $T\le T_0$.

თეორემა 1.7.1. ვთქვათ, $f,g\in C^1(\mathbb{R})$, $\mu_i=0$, $i=1,\dots,4$. მაშინ ნებისმიერი $F\in C^1(\overline{D}_\infty)$ ფუნქციისათვის $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანა ლოკალურადაა ამოხსნადი C კლასში. უფრო მეტიც არსებობს დადებითი მუდმივი $T_0=T_0(F)$ ისეთი, რომ $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში, როცა $T\le T_0$, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს ამ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს.

შენიშვნა 1.7.1. თეორემა 1.6.1 −ის პირობების შესრულების შემთხვევაში $(1.1.4)-(1.1.7)$ ამოცანა ნებისმიერი $F\in C^1(\overline{D}_\infty)$ ფუნქციისათვის შეიძლება აღარ იყოს გლობალურად ამოხსნადი. მართლაც, თუ $F_0\in C^1(\overline{D}_\infty)$, $F_0\big|_{D_\infty}>0$ და

ფიქსირებული დადებითი T –ის ავიღებთ $F = \lambda F_0$, მაშინ ამ ამოცანას D_T არეში არ აქვს C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, როცა $\lambda > \lambda_0$.

დამტკიცება. (თეორემა 1.7.1 –ის) შენიშვნა 1.5.3 –ის ძალით $U = (u, v) \in C(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს (1.1.4) – (1.1.7) ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა U არის (1.5.2) განტოლების ამონახსნი $C(\overline{D}_T)$ სივრციდან.

დავაფიქსიროთ დადებითი მუდმივები T_1 და r. ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ $|U| = |(u, v)| = |u| + |v|$, $\|U\|_{C(\overline{D}_T)} = \|(u, v)\|_{C(\overline{D}_T)} = \|u\|_{C(\overline{D}_T)} + \|v\|_{C(\overline{D}_T)}$ და $B_r(O)$ –ით აღვნიშნოთ r რადიუსიანი ბირთვი $\overline{D}_T$ არეში უწყვეტ $U = (u, v)$ ვექტორ ფუნქციათა სივრცეში ცენტრით ნულოვანი $O \coloneqq (0,0)$ ელემენტით, ანუ

$$B_r(O) := \left\{U = (u, v) \in C(\overline{D}_T) : \|(u, v)\|_{C(\overline{D}_T)} \le r\right\}.$$

როცა $U \in B_r(O)$, მაშინ თუ (1.4.6) – (1.5.1) –ის ძალით გავითვალისწინებთ (1.5.2) განტოლებაში შემავალ L ოპერატორის სტრუქტურას, ავიღებთ $T \le T_1$ და $(x, t) \in \overline{D}_T$ წერტილს, გვექნება

$$|(LU)(x,t)| \le |(KU)(x,t)| + |\Phi(x,t)| \le$$

$$|(K_1 U)(x,t)| + |(K_2 U)(x,t)| + |(K_0 F)(x,t)| \le |(K_0 v)(x,t)| +$$

$$\left|\Big(K_0\big(f(v) + g(u)\big)\Big)(x,t)\right| + |(K_0 F)(x,t)| \le \frac{1}{2}\|v\|_{C(\overline{D}_t)} \int\limits_{\Omega_{x,t}} 1 dx dt +$$

$$\frac{1}{2}\left(\max_{|s|\le r}|f(s)| + \max_{|s|\le r}|g(s)|\right) \int\limits_{\Omega_{x,t}} 1 dx dt + \frac{1}{2}\|F\|_{C(\overline{D}_t)} \int\limits_{\Omega_{x,t}} 1 dx dt \le$$

$$\frac{1}{2}\left(\|v\|_{C(\overline{D}_t)} + \max_{|s|\le r}|f(s)| + \max_{|s|\le r}|g(s)| + \|F\|_{C(\overline{D}_t)}\right)\frac{1}{2}t^2 \le$$

$$\frac{1}{4}T^2\left(\|v\|_{C(\overline{D}_{T_1})} + \max_{|s|\le r}|f(s)| + \max_{|s|\le r}|g(s)| + \|F\|_{C(\overline{D}_{T_1})}\right),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\|LU\|_{C(\overline{D}_T)} \le \frac{1}{4}T^2\left(\|v\|_{C(\overline{D}_{T_1})} + \max_{|s|\le r}|f(s)| + \max_{|s|\le r}|g(s)| + \|F\|_{C(\overline{D}_{T_1})}\right) \le$$

$$\frac{1}{4}T^2\left(r + \|f\|_{C([-r,r])} + \|g\|_{C([-r,r])} + \|F\|_{C(\overline{D}_{T_1})}\right). \tag{1.7.1}$$

(1.7.1) −დან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ ავიღებთ T −ს ისეთს, რომ $T \le T_0$, სადაც

$$T_0 := \min\left(T_1 , \left(\frac{4r}{r + \|f\|_{C([-r,r])} + \|g\|_{C([-r,r])} + \|F\|_{C(\bar{D}_{T_1})}}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

მაშინ

$$\|LU\|_{C(\bar{D}_T)} \le r, \text{ როცა } \|U\|_{C(\bar{D}_T)} \le r \text{ და } T \le T_0 . \qquad (1.7.2)$$

(1.7.2) −დან გამომდინარეობს, რომ $L: C(\bar{D}_T) \to C(\bar{D}_T)$ ოპერატორს $B_r(O)$ ბირთვი გადაჰყავს თავის თავში, როცა $T \le T_0$ და რადგან შენიშვნა 1.5.2 −ის თანახმად ოპერატორი L უწყვეტია და კომპაქტური, ამიტომ (1.5.2) განტოლებას შაუდერის თეორემის თანახმად გააჩნია ერთი მაინც U ამონახსნი $C(\bar{D}_T)$ სივრციდან (V.A.Trenogin, 1993). შენიშვნა 1.5.3 −ის და თეორემა 1.5.1 −ის თანახმად ეს ამონახსნი არის (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანის ერთადერთი კლასიკური ამონახსნი D_T არეში. ამით თეორემა 1.6.2 დამტკიცებულია სრულად.

ამრიგად, ზემოთ მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, თუ f და g ფუნქციებისაგან გარდა $f, g \in C^1(R)$ სიგლუვისა ჩვენ არ მოვითხოვთ (1.2.23) და (1.2.24) პირობების შესრულებას, მაშინ თეორემა 1.6.1−ის თანახმად (1.1.4) − (1.1.6) ამოცანა შეიძლება არ აღმოჩნდეს გლობალურად ამოხსნადი და მით უფრო მას შეიძლება არ გააჩნდეს გლობალური ამონახსნი D_∞ არეში. მიუხედავად ამისა (1.2.23) და (1.2.24) პირობების დარღვევის შემთხვევაშიც (1.1.4) − (1.1.7) ამოცანა ლოკალურად ამოხსნადია ნებისმიერი $F \in C^1(\bar{D}_\infty)$ ფუნქციისათვის.

ახლა განვიხილოთ დარბუს ტიპის ამოცანა D_T არეში (1.1.2) და (1.1.3) სასაზღვრო პირობებით უფრო ზოგადი

$$\square^2 u + h(u, \square u) = F(x,t), \qquad (1.7.3)$$

განტოლებისათვის, ვიდრე (1.1.1) განტოლებაა, სადაც $h \in C(R^2)$, $F \in C(\bar{D}_T)$ მოცემული ფუნქციებია.

(1.7.3), (1.1.2), (1.1.3) სასაზღვრო ამოცანისათვის სრულიად ანალოგიურად, როგორც (1.1.1)– (1.1.3) ამოცანის შემთხვევაში, გამოკვლევა ხორციელდება ეტაპობრივად:

I. ვთქვათ, $h \in C(R^2)$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ u, სადაც $u, \square u \in C^2(\overline{D}_T)$, წარმოადგენს $(1.7.3), (1.1.2), (1.1.3)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მაშინ $v = \square u$ ფუნქციის შემოღებით ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგ სასაზღვრო ამოცანაზე u და v უცნობი ფუნქციების მიმართ:

$$L_1(u, v) \coloneqq \square u - v = 0, \ \ (x, t) \in D_T, \tag{1.7.4}$$

$$L_2(u, v) := \square v + h(u, v) = F(x, t), \ \ (x, t) \in D_T, \tag{1.7.5}$$

$$u\big|_{\gamma_{1,T}} = u(t, t) = \mu_1(t), \ \ u\big|_{\gamma_{2,T}} = u(0, t) = \mu_3(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{1.7.6}$$

$$v\big|_{\gamma_{1,T}} = v(t, t) = \mu_5(t), \ \ v\big|_{\gamma_{2,T}} = v(0, t) = \mu_6(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{1.7.7}$$

სადაც $\mu_5(t)$ და $\mu_6(t)$ გამოისახებიან მოცემული $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$ და $\mu_4(t)$ ფუნქციების საშუალებით. პირიქით, თუ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(1.7.4) - (1.7.7)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, სადაც $\mu_1, \mu_4 \in C([0, T])$, $\mu_2 \in C^1([0, T])$, $\mu_3 \in C^2([0, T])$, მაშინ u ფუნქცია იქნება $(1.7.3), (1.1.2), (1.1.3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ქვემოთ სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$.

II. შემოგვაქვს $(1.7.4) - (1.7.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნის ცნება: ვთქვათ, $h \in C(R^2)$ და $F \in C(\overline{D}_T)$. u და v ფუნქციათა სისტემას ეწოდება $(1.7.4) - (1.7.7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, თუ $u, v \in C(\overline{D}_T)$ და არსებობს

$$u_n, v_n \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T) := \left\{ w \in C^2(\overline{D}_T) : w\big|_{\gamma_{i,T}} = 0, \ \ i = 1,2 \right\} \tag{1.7.8}$$

მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{1.7.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_1(u_n, v_n)\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|L_2(u_n, v_n) - F\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{1.7.10}$$

აღსანიშნავია, რომ $(1.7.4) - (1.7.7)$ ამოცანის $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ კლასიკური ამონახსნი არის ამავე ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, ამასთან u ფუნქცია იქნება საწყისი $(1.7.3), (1.1.2), (1.1.3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

I და **II** ეტაპების განხილვიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ ჯერ ვაჩვენებთ, რომ $(1.7.4) - (1.7.7)$ ამოცანას გააჩნია C კლასის u, v განზოგადებული

ამონახსნი, ხოლო შემდეგ ვაჩვენებთ, რომ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$, მაშინ u ფუნქცია იქნება საწყისი (1.7.3), (1.1.2), (1.1.3) ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

III ეტაპი ეხება ამონახსნის ერთადერთობას. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\omega = \omega(y)$, $y \in R^n$, ფუნქცია ლიფშიცის ლოკალურ პირობას აკმაყოფილებს, თუ $\forall r = const > 0$

$$|\omega(y_2) - \omega(y_1)| \leq A(r)\|y_2 - y_1\|_{R^n} \quad \forall y_1, y_2 \in R^n : |y_i| \leq r, \ \ i = 1,2, \quad (1.7.11)$$

სადაც $A = A(r) = const \geq 0$. ცხადია, რომ თუ $\omega \in C^1(R^n)$, მაშინ მართებულია (1.7.11) პირობა, სადაც ლაგრანჟის თეორემის თანახმად ამ უტოლობაში შეიძლება ავიღოთ $A(r) = \max\limits_{|y| \leq r} \|\nabla\omega\,(y)\|_{R^n}$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$.

შემდეგი თეორემები მტკიცდება ანალოგიურად თეორემა 1.3.1 და 1.5.1 –ის.

თეორემა 1.7.2 ***(ამონახსნის ერთადერთობა).*** ვთქვათ, $h \in C(R^2)$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ h ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.7.11) ლიფშიცის ლოკალურ პირობას, მაშინ (1.7.4) – (1.7.7) ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

განვიხილოთ შემდეგი პირობა, დადებული $h(u, v)$ ფუნქციაზე:

$$|h(u, v)| \leq M_0 + M_1|u| + M_2|v| \quad \forall u, v \in R, \qquad (1.7.12)$$

სადაც $M_i = const \geq 0$, $i = 0, 1, 2$.

IV ეტაპი ეხება დასმული ამოცანის ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას. შენიშვნა 1.4.1 –ის და (1.2.2) პირობის გათვალისწინებით მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.7.3 ***(ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა).*** თუ $h \in C^1(R^2)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.7.12) პირობას. მაშინ ნებისმიერი $F \in C^1(\overline{D}_T)$ ფუნქციისათვის (1.7.4) – (1.7.7) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს ამ ამოცანის $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ კლასიკურ ამონახსნს D_T არეში და როგორც ზემოთ შევნიშნეთ ფუნქცია u იქნება (1.7.3), (1.1.2), (1.1.3) საწყისი ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

იმ შემთხვევაში, როცა $h(u, v)$ ფუნქცია წარმოდგება შემდეგი სახით

$$h(u,v) = f(v) + g(u)$$

განხილული იყო ზემოთ და შესაბამისი პირობების შესრულების შემთხვევაში დამტკიცებული იყო თეორემები 1.3.1– 1.7.1.

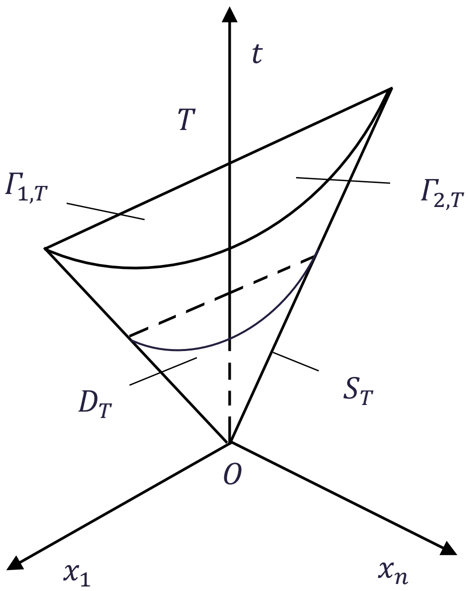
თავი II. დარბუს ტიპის მრავალგანზომილებიანი ამოცანა მაღალი რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის

2.1. ამოცანის დასმა

ევკლიდეს $x := (x_1, \dots, x_n)$ და t ცვლადების $\mathbb{R}^{n+1}$ სივრცეში განვიხილოთ შემდეგი სახის არაწრფივი ჰიპერბოლური განტოლება მთავარ ნაწილში იტერირებული ტალღის ოპერატორით

$$\square^2 u + f(\square u) + g(u) = F(x,t), \tag{2.1.1}$$

სადაც f, g და F მოცემული, ხოლო u უცნობი სკალარული ფუნქციებია, $n \geq 2$; $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.



ნახ. 3 მრავალგანზომილებიანი ამოცანის დასმის კონუსური არე

აღვნიშნოთ $D_T: |x| < t < T,\ x_n > 0$ –თი კონუსური არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $S_T: t = |x|,\ x_n \geq 0,\ \ 0 \leq t \leq T$ მახასიათებელი $S: t = |x|$ კონუსის ნაწილით, $\Gamma_{1,T}: x_n = 0,\ \ |x| \leq t \leq T$ დროითი ორიენტაციის $x_n = 0$ სიბრტყის ნაწილით და $\Gamma_{2,T}: t = T,\ |x| \leq T,\ x_n \geq 0$ სივრცითი ორიენტაციის $t = T$ სიბრტყის ნაწილით (ნახ.3), როდესაც $T = \infty$ გვექნება $D_\infty: t > |x|,\ x_n > 0,\ \Gamma_{1,\infty}: t \geq |x|,\ \ x_n = 0$.

(2.1.1) განტოლებისათვის D_T არეში განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა (Bibilashvili, 2023): ვეძებოთ D_T არეში (2.1.1) განტოლების $u = u(x,t)$ ამონახსნი, რომელიც საზღვრის S_T და $\Gamma_{1,T}$ ნაწილებზე შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს

$$u\big|_{S_T} = u(x,|x|) = \mu_1(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{S_T} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,|x|) = \mu_2(x),$$

$$0 \leq |x| \leq T,\ \ x_n \geq 0, \tag{2.1.2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_{1,T}} = u(x',0,t) = \mu_3(x',t),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big|_{\Gamma_{1,T}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x',0,t) =$$

$$= \mu_4(x',t),\ \ |x'| \le t \le T, \tag{2.1.3}$$

სადაც $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$, μ_i, $i = 1, \dots, 4$, მოცემული სკალარული ფუნქციებია, ამასთან μ_1 u μ_3 ფუნქციები S_T და $\Gamma_{1,T}$ ზედაპირების საერთო წერტილებში აკმაყოფილებენ შეთანხმებულების პირობას $\mu_1\big|_{S_T \cap \Gamma_{1,T}} = \mu_3\big|_{S_T \cap \Gamma_{1,T}}$, $\nu := (\nu_x, \nu_t) = (\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_n}, \nu_t)$ არის ∂D_T –ის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი.

აღსანიშნავია, რომ მეორე რიგის შემდეგი სახის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

$$\Box u + f(x,t,u) = F(x,t)$$

D_T კონუსურ არეში დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო პირობებით S_T და $\Gamma_{1,T}$ საზღვრის ნაწილებზე დარბუს ტიპის ამოცანები გამოკვლეული იყო (Kharibegashvili S. , 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2008), (S. Kharibegashvili B. M., 2019) შრომებში.

შენიშვნა 2.1.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ u, სადაც $u, \Box u \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(2.1.1) - (2.1.3)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მაშინ $v := \Box u$ ფუნქციის შემოღებით ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგ სასაზღვრო ამოცანაზე u და v უცნობი ფუნქციების მიმართ:

$$L_1(u,v) \coloneqq \Box u - v = 0,\ \ (x,t) \in D_T, \tag{2.1.4}$$

$$L_2(u,v) \coloneqq \Box v + f(v) + g(u) = F(x,t),\ \ (x,t) \in D_T, \tag{2.1.5}$$

$$u\Big|_{S_T} = \mu_1(x),\ \ 0 \le |x| \le T,\ \ x_n \ge 0,\ \ u\Big|_{\Gamma_{1,T}} = \mu_3(x',t),\ \ |x'| \le t \le T, \tag{2.1.6}$$

$$v\Big|_{S_T} = \tilde{\mu}_2(x),\ \ 0 \le |x| \le T,\ \ x_n \ge 0,\ \ v\Big|_{\Gamma_{1,T}} = \tilde{\mu}_4(x',t),\ \ |x'| \le t \le T, \tag{2.1.7}$$

სადაც

$$\tilde{\mu}_2(x) := -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_i^2} - 2\frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_2(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{|x|}\mu_{1x_i}(x)\right)\right] -$$

$$-\left(\frac{n}{|x|} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_2(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{|x|}\mu_{1x_i}(x)\right),\ \ 0 \le |x| \le T,\ \ x_n \ge 0, \tag{2.1.8}$$

$$\tilde{\mu}_4(x',t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mu_3(x',t) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\mu_3(x',t) - \mu_4(x',t), \ \ |x'| \le t \le T. \qquad (2.1.9)$$

პირიქით, თუ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, სადაც $\mu_1 \in C^2(S_T)$, $\mu_3 \in C^2(\Gamma_{1,T})$, $\mu_2 \in C^1(S_T)$, $\mu_4 \in C(\Gamma_{1,T})$, მაშინ u ფუნქცია იქნება $(2.1.1) - (2.1.3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ცხადია, რომ თუ $(2.1.1) - (2.1.3)$ ამოცანაში $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, მაშინ $(2.1.8)$ და $(2.1.9)$ ტოლობების ძალით $(2.1.7)$ სასაზღვრო პირობებშიც $\tilde{\mu}_2 = 0$, $\tilde{\mu}_4 = 0$.

ვთქვათ, $\overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}) := \{u \in W_2^1(D_T) : u\,|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0\}$, სადაც $W_2^1(D_T)$ კარგად ცნობილი სობოლევის სივრცეა, რომელიც შეიცავს $L_2(D_T)$ კლასის ფუნქციებს, რომლებსაც გააჩნიათ ამავე კლასის პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებულები. ამასთან $u\,|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0$ ტოლობა უნდა გავიგოთ კვალის თეორიის აზრით (O.A.Ladyzhenskaya, 1973). შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად $\overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ და $W_2^1(D_T)$ სივრცეებს გააჩნიათ ერთი და იგივე ნორმა.

განსაზღვრება 2.1.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in L_2(D_T)$ და სიმარტივისათვის $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. ფუნქციათა u და v სისტემას ეწოდება $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი, თუ $u, v \in \overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ და არსებობს

$$u_m, v_m \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T}) := \{w \in C^2(\overline{D}_T) : w\,|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0\} \qquad (2.1.10)$$

ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_2^1(D_T)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|v_m - v\|_{W_2^1(D_T)} = 0, \qquad (2.1.11)$$

$$\lim_{m\to\infty} \|L_1(u_m, v_m)\|_{L_2(D_T)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|L_2(u_m, v_m) - F\|_{L_2(D_T)} = 0. \qquad (2.1.12)$$

შენიშვნა 2.1.2. ცხადია, რომ $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის $u, v \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ კლასიკური ამონახსნი წარმოადგენს იმავდროულად ამავე ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს.

2.2. აპრიორული შეფასებები

ლემა 2.2.1. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in L_2(D_T)$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, მაშინ $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის ნებისმიერი W_2^1 კლასის განზოგადებული u, v ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$\|u\|_{W_2^1(D_T)} \leq c\|v\|_{L_2(D_T)}, \tag{2.2.1}$$

სადაც $c = \sqrt{T} exp \frac{1}{2} T(1+T)$ მუდმივი არ არის დამოკიდებული u, v და F ფუნქციებზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, u, v არის $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი. მაშინ განმარტების თანახმად არსებობს ისეთი u_m, v_m, $m = 1,2, \dots$ მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $(2.1.10) - (2.1.12)$ პირობებს.

განვიხილოთ $u_m \in \overset{0}{C}(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ფუნქცია, როგორც შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$L_1(u_m, v_m) := \square u_m - v_m = G_m(x,t), \ \ (x,t) \in D_T, \tag{2.2.2}$$

$$u_m \big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0 \tag{2.2.3}$$

კლასიკური ამონახსნი, სადაც

$$G_m := L_1(u_m, v_m) \tag{2.2.4}$$

ფუნქცია $(2.1.12)$ –ის თანახმად აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{m \to \infty} \|G_m\|_{L_2(D_T)} = 0. \tag{2.2.5}$$

გავამრავლოთ $(2.2.2)$ განტოლების ორივე მხარე $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $D_\tau := \{(x,t) \in D_T : t < \tau\}$ არეზე, სადაც $0 < \tau \leq T$, გვექნება

$$\frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t} \right)^2 dxdt - \int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i^2} \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt - \int\limits_{D_\tau} v_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt =$$

$$\int_{D_\tau} G_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt. \qquad (2.2.6)$$

ვთქვათ, $D_\tau \coloneqq D_\infty \cap \{t = \tau\}, 0 < \tau \le T,$ და აღვნიშნოთ $v = (v_1, \dots, v_n, v_0)$ −ით D_τ არის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი. თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.2.3) ტოლობას და იმას, რომ $v\big|_{\Omega_\tau} = (0, \dots, 0, 1)$ და $v\big|_{\Gamma_{1,\tau}} = (0, \dots, 0, -1, 0)$ ნაწილობითი ინტეგრებით ადვილად მივიღებთ

$$\int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dxdt = \int_{\partial D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 v_0 ds = \int_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dx + \int_{S_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 v_0 ds, \quad (2.2.7)$$

$$\int_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i^2} \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt = \int_{\partial D_\tau} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial t} v_i ds - \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 dxdt =$$

$$\int_{S_\tau} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial t} v_i ds - \frac{1}{2} \int_{\partial D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 v_0 ds = \int_{S_\tau} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial t} v_i ds -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{S_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 v_0 ds. \qquad (2.2.8)$$

(2.2.7) და (2.2.8) −ის გათვალისწინებით (2.2.6) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{D_\tau} v_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt + \int_{D_\tau} G_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt =$$

$$= \int_{S_\tau} \frac{1}{2v_0} \left[\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_0 - \frac{\partial u_m}{\partial t} v_i \right)^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 \left(v_0^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right) \right] ds +$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 \right] dx. \qquad (2.2.9)$$

რადგან S_τ არის მახასიათებელი მრავალსახეობა, ამიტომ

$$\left(v_0^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right) \Big|_{S_\tau} = 0. \qquad (2.2.10)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ იმ ფაქტს, რომ $\left(v_0 \frac{\partial}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial}{\partial t} \right)$, $1 \le i \le n,$ არის შიგა დიფერენციალური ოპერატორი S_τ −ზე, (2.2.3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_0 - \frac{\partial u_m}{\partial t} v_i\right) \Big|_{S_\tau} = 0, \;\; 1 \le i \le n. \qquad (2.2.11)$$

საბოლოოდ (2.2.10) და (2.2.11) –ის ძალით (2.2.9) –დან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2\right] dx = 2 \int\limits_{D_\tau} v_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt + 2 \int\limits_{D_\tau} G_m \frac{\partial u_m}{\partial t} dxdt. \qquad (2.2.12)$$

(2.2.5) –ის გათვალისწინებით (2.2.12) –დან მივიღებთ (2.2.1) უტოლობას, რომელშიც c მუდმივი მოიცემა შემდეგი ტოლობით (S. Kharibegashvili, 2009): $c = \sqrt{T} exp\left\{\frac{1}{2} T(1+T)\right\}$.

განვიხილოთ f და g ფუნქციებზე დადებული შემდეგი პირობები

$$f \in C(\mathbb{R}), \;\; \int\limits_0^s f(\tau)\, d\tau \ge -M_1 - M_2 s^2 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \;\; M_i = const \ge 0, \;\; i = 1,2, \quad (2.2.13)$$

$$g \in C(\mathbb{R}), \;\; |g(s)| \le N_1 - N_2|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}, \;\; N_i = const \ge 0, \;\; i = 1,2. \qquad (2.2.14)$$

ლემა 2.2.2. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in L_2(D_T)$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, ამასთან f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ (2.2.13) და (2.2.14) პირობებს. მაშინ (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანის ნებისმიერი W_2^1 კლასის (u, v) განზოგადებული ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასება

$$\|u\|_{W_2^1(D_T)} \le C_1 \|F\|_{L_2(D_T)} + C_2,$$

$$\|v\|_{W_2^1(D_T)} \le C_3 \|F\|_{L_2(D_T)} + C_4,$$

სადაც $C_i = const \ge 0$, $i = 1, \dots, 4$, სიდიდეები არ არიან დამოკიდებული u, v და F ფუნქციებზე, ამასთან $C_1 > 0$, $C_3 > 0$.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ ამ ლემის დამტკიცების მოკლე სქემა. ვთქვათ, (u, v) არის (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი. მაშინ არსებობს (u_m, v_m) მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.1.10) – (2.1.12) პირობებს.

განვიხილოთ $v_m \in \overset{0}{C^2}\left(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right)$ ფუნქცია, როგორც შემდეგი სასაზღვრო

ამოცანის

$$L_2(u_m, v_m) \coloneqq \square v_m + f(v_m) + g(u_m) = Q_m(x,t), \;\; (x,t) \in D_T, \tag{2.2.15}$$

$$v_m\big|_{S_T} = 0, \;\; v_m\big|_{\Gamma_{1,T}} = 0$$

კლასიკური ამონახსნი, სადაც

$$Q_m \coloneqq L_2(u_m, v_m) \tag{2.2.16}$$

ფუნქცია (2.1.12) –ის ძალით აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{m\to\infty} \|L_2(u_m, v_m) - F\|_{L_2(D_T)} = 0. \tag{2.2.17}$$

გავამრავლოთ (2.2.15) განტოლების ორივე მხარე $\frac{\partial v_m}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $D_\tau \coloneqq \{(x,t) \in D_T : t < \tau\}$ არეზე, სადაც $0 < \tau \leq T$, გვექნება

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt - \int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2}\frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt + \int\limits_{D_T} f(v_m)\frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt +$$

$$\int\limits_{D_\tau} g(u_m)\frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt = \int\limits_{D_\tau} Q_m \frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt. \tag{2.2.18}$$

ანალოგიურად იმისა, როგორც ლემა 2.2.1 –ის დამტკიცებისას (2.2.6) –დან მივიღეთ (2.2.12), (2.2.18) –დან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right] dx = -2\int\limits_{D_\tau} f(v_m)\frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt -$$

$$2\int\limits_{D_\tau} g(u_m)\frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt + 2\int\limits_{D_\tau} Q_m \frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt. \tag{2.2.19}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$I(s) := \int\limits_0^s f(\tau)\, d\tau, \tag{2.2.20}$$

მაშინ

$$\frac{\partial I(v_m)}{\partial t} = f(v_m)\frac{\partial v_m}{\partial t}$$

და იმის გათვალისწინებით, რომ $I(0)=0$, $v_m\big|_{S_T\cup\Gamma_{1,T}}=0$ და, მაშასადამე $I(v_m)\big|_{S_T\cup\Gamma_{1,T}}=0$, აგრეთვე $v\big|_{\Omega_\tau}=(0,\dots,0,1)$ ტოლობისა და გრინის ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$-2\int\limits_{D_\tau} f(v_m)\frac{\partial v_m}{\partial t}dxdt=-2\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial I(v_m)}{\partial t}dxdt=-2\int\limits_{\partial D_\tau} I(v_m)v_t ds=$$

$$-2\int\limits_{\Omega_\tau} I(v_m)dx-2\int\limits_{S_\tau\cup\Gamma_{1,\tau}} I(v_m)v_t ds=-2\int\limits_{\Omega_\tau} I(v_m)dx. \qquad (2.2.21)$$

უტოლობა (2.2.13) −ის ძალით (2.2.20) და (2.2.21) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$-2\int\limits_{D_\tau} f(v_m)\frac{\partial v_m}{\partial t}dxdt\le 2\int\limits_{\Omega_\tau}(M_1+M_2v_m^2)dx\le M_1\omega_n\tau^n+2M_2\int\limits_{\Omega_\tau} v_m^2dx, \quad (2.2.22)$$

სადაც $\omega_n\tau^n$ არის $|x|<\tau$ ბირთვის მოცულობა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში.

თუ გავითვალისწინებთ (2.2.14) პირობას გვექნება

$$-2\int\limits_{D_\tau} g(u_m)\frac{\partial v_m}{\partial t}dxdt\le\int\limits_{D_\tau}\left(g^2(u_m)+\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right)dxdt\le$$

$$\int\limits_{D_\tau}(N_1+N_2|u_m|)^2dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2dxdt\le$$

$$\int\limits_{D_\tau}(2N_1^2+2N_2^2u_m^2)dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2dxdt=$$

$$\omega_n\frac{\tau^{n+1}}{n+1}N_1^2+2N_2^2\int\limits_{D_\tau}u_m^2dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2dxdt, \qquad (2.2.23)$$

სადაც მხედველობაში იყო მიღებული მარტივი უტოლობები: $2ab\le a^2+b^2$, $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ და ტოლობა $\int_{D_\tau}1dxdt=\frac{\omega_n}{2(n+1)}\tau^{n+1}$.

იმის გათვალისწინებით, რომ $u_m\big|_{S_T}=0$ და $u_m(x,t)=\int_{|x|}^{t}\frac{\partial u_m(x,\tau)}{\partial t}d\tau$, $(x,t)\in D_T$ სტანდარტული გზით მიიღება შემდეგი უტოლობები (S. Kharibegashvili, 2009)

$$\int\limits_{\Omega_\tau}u_m^2dx\le T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2dxdt,\quad \int\limits_{D_\tau}u_m^2dxdt\le$$

$$T^2 \int\limits_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dxdt\,,\ \ 0 < \tau \le T. \qquad (2.2.24)$$

ანალოგიურად მიიღება უტოლობები:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} v_m^2 dx \le T \int\limits_{D_\tau} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt, \quad \int\limits_{D_\tau} v_m^2 dxdt \le$$

$$T^2 \int\limits_{D_\tau} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt\,,\ \ 0 < \tau \le T. \qquad (2.2.25)$$

(2.2.12) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dx \le \int\limits_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2\right] dx \le \int\limits_{D_\tau} \left(v_m^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2\right) dxdt +$$

$$\int\limits_{D_\tau} \left[G_m^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2\right] dxdt = 2 \int\limits_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dxdt + \|v_m\|^2_{L_2(D_\tau)} + \|G_m\|^2_{L_2(D_\tau)}. \qquad (2.2.26)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$w(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dx$$

და მხედველობაში მივიღებთ ტოლობას

$$\int\limits_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dxdt = \int\limits_0^\tau w(\sigma) d\sigma$$

(2.2.26) –დან გვექნება

$$w(\tau) \le 2 \int\limits_0^\tau w(\sigma) d\sigma + \|v_m\|^2_{L_2(D_\tau)} + \|G_m\|^2_{L_2(D_\tau)},$$

საიდანაც გრონუოლის ლემის ძალით გამომდინარეობს

$$w(\tau) \le \left(\|v_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|G_m\|^2_{L_2(D_T)}\right) e^{2T}. \qquad (2.2.27)$$

თავის მხრივ (2.2.27) –დან მივიღებთ

$$\int\limits_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dxdt = \int\limits_0^\tau w(\sigma) d\sigma \le T e^{2T} \left(\|v_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|G_m\|^2_{L_2(D_T)}\right). \qquad (2.2.28)$$

(2.2.28) −დან (2.2.24) −ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_{D_\tau} u_m^2 dxdt \le T^2 \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)^2 dxdt \le T^3 e^{2T}\left(\|v_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|G_m\|^2_{L_2(D_T)}\right). \quad (2.2.29)$$

ახლა (2.2.22) − (2.2.25), (2.2.29) −ის ძალით (2.2.19) −დან მივიღებთ

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx \le M_1\omega_n\tau^n + 2M_2\int_{\Omega_\tau} v_m^2 dx + \omega_n\frac{\tau^{n+1}}{n+1}N_1^2 +$$

$$2N_2^2\int_{D_\tau} u_m^2 dxdt + \int_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{D_\tau}\left(Q_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right)dxdt \le$$

$$M_1\omega_n T^n + 2M_2T^2\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt + \omega_n\frac{T^{n+1}}{n+1}N_1^2 +$$

$$2N_2^2T^3e^{2T}\left(\|v_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|G_m\|^2_{L_2(D_T)}\right) + \int_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt + \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)} +$$

$$\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt = (2M_2T+2)\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt + 2N_2^2T^3e^{2T}\int_{D_T} v_m^2 dxdt +$$

$$M_1\omega_n T^n + \omega_n\frac{T^{n+1}}{n+1}N_1^2 + 2N_2^2T^3e^{2T}\left(\|G_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)}\right) \le$$

$$(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + 2)\int_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dxdt +$$

$$\omega_n T^n\left(M_1 + \frac{T}{n+1}N_1^2\right) + 2N_2^2T^3e^{2T}\left(\|G_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)}\right). \quad (2.2.30)$$

თუ (2.2.30) უტოლობას შევკრებთ (2.2.25) −ის პირველ უტოლობასთან გვექნება

$$\int_{\Omega_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx \le$$

$$(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2)\int_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dxdt +$$

$$\omega_n T^n\left(M_1 + \frac{T}{n+1}N_1^2\right) + 2N_2^2T^3e^{2T}\left(\|G_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)}\right). \quad (2.2.31)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\omega(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} \left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2 \right] dx, \tag{2.2.32}$$

მაშინ

$$\int\limits_{D_\tau} \left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2 \right] dxdt = \int\limits_0^\tau \omega(\sigma) d\sigma. \tag{2.2.33}$$

(2.2.32) და (2.2.33) –ის გათვალისწინებით (2.2.31) უტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\omega(\tau) \le (2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2) \int\limits_0^\tau \omega(\sigma)d\sigma + \omega_n T^n \left(M_1 + \frac{T}{n+1} N_1^2\right) +$$

$$2N_2^2T^3e^{2T} \|G_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)}. \tag{2.2.34}$$

გრონუოლის ლემის ძალით (2.2.34) –დან მივიღებთ

$$\omega(\tau) \le \left[\omega_n T^n \left(M_1 + \frac{T}{n+1} N_1^2\right) + \right.$$

$$\left. 2N_2^2T^3e^{2T} \left(\|G_m\|^2_{L_2(D_T)} + \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)} \right) \right] e^{T\left(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2\right)}. \tag{2.2.35}$$

(2.2.33) და (2.2.35) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\|v_m\|^2_{W_2^1(D_T)} = \int\limits_{D_T} \left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2 \right] dxdt = \int\limits_0^T \omega(\tau)d\tau \le$$

$$T \left[\omega_n T^n \left(M_1 + \frac{T}{n+1} N_1^2\right) + 2N_2^2T^3e^{2T} \|G_m\|^2_{L_2(D_T)} + \right.$$

$$\left. \|Q_m\|^2_{L_2(D_T)} \right] e^{T\left(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2\right)}. \tag{2.2.36}$$

(2.1.11), (2.2.4), (2.2.5) და (2.2.16), (2.2.17) –ის გათვალისწინებით, თუ გადავალთ ზღვარზე (2.2.36) უტოლობაში, როცა $m \to \infty$, მივიღებთ

$$\|v\|^2_{W_2^1(D_T)} \le \left[\omega_n T^{n+1} \left(M_1 + \frac{T}{n+1} N_1^2\right) + \|F\|^2_{L_2(D_T)} \right] e^{T\left(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2\right)} =$$

$$e^{T\left(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2\right)} \|F\|^2_{L_2(D_T)} +$$

$$\left[\omega_n T^{n+1} \left(M_1 + \frac{T}{n+1} N_1^2\right) \right] e^{T\left(2M_2T + 2N_2^2T^3e^{2T} + T + 2\right)}. \tag{2.2.37}$$

მარტივი უტოლობის $\left(\sum_{i=1}^{k} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{k}|a_k|$ გამოყენებით (2.2.37) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\|v\|_{W_2^1(D_T)} \leq C_3\|F\|_{L_2(D_T)} + C_4, \tag{2.2.38}$$

სადაც

$$C_3 = e^{\frac{1}{2}T\left(2M_2T+2N_2^2T^3e^{2T}+T+2\right)}, \tag{2.2.39}$$

$$C_4 = \left[\omega_n T^{n+1}\left(M_1 + \frac{T}{n+1}N_1^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}T\left(2M_2T+2N_2^2T^3e^{2T}+T+2\right)}. \tag{2.2.40}$$

$(2.2.38)-(2.2.40)$ $-$ის გათვალისწინებით $(2.2.1)$ $-$დან გამომდინარეობს, რომ

$$\|u\|_{W_2^1(D_T)} \leq C_1\|F\|_{L_2(D_T)} + C_2, \tag{2.2.41}$$

სადაც გათვალისწინებულია $\|v\|_{L_2(D_T)} \leq \|v\|_{W_2^1(D_T)}$ უტოლობა და

$$C_1 = cC_3,\ \ C_2 = cC_4,\ \ c = \sqrt{T}exp\frac{1}{2}T(1+T). \tag{2.2.42}$$

(2.2.38) და (2.2.41) უტოლობების მიღებით დამტკიცებულია ლემა 2.2.2.

2.3. $(2.1.4)-(2.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის არსებობა

სანამ $(2.1.4)-(2.1.7)$ არაწრფივი ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხის შესწავლაზე გადავიდოდეთ განვიხილოთ შესაბამისი წრფივი ამოცანა, ანუ როცა $f = g = 0$, ე.ი. შემდეგ ამოცანაზე ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით

$$L_1(u,v) := \Box u - v = 0,\ \ (x,t) \in D_T, \tag{2.3.1}$$

$$L_2^0(v) := \Box v = F(x,t),\ \ (x,t) \in D_T, \tag{2.3.2}$$

$$u\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0, \tag{2.3.3}$$

$$v\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0. \tag{2.3.4}$$

ამ შემთხვევაში, როცა $F \in L_2(D_T)$ ანალოგიურად შემოდის $(2.3.1)-(2.3.4)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნის ცნება: u და v ფუნქციათ წყვილს ეწოდება $(2.3.1)-(2.3.4)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი, თუ

$$u, v \in \overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}) := \{w \in W_2^1(D_T) : w\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0\} \tag{2.3.5}$$

და არსებობს

$$u_m, v_m \in \overset{0}{C^2}(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T}) \coloneqq \{w \in C^2(\overline{D}_T) : w\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0\} \tag{2.3.6}$$

ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_2^1(D_T)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|v_m - v\|_{W_2^1(D_T)} = 0, \tag{2.3.7}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|L_1(u_m, v_m)\|_{L_2(D_T)} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|L_2^0(v_m) - F\|_{L_2(D_T)} = 0. \tag{2.3.8}$$

შევნიშნოთ, რომ $(2.3.1)-(2.3.4)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნისათვის აგრეთვე მართებულია $(2.2.38), (2.2.41)$ აპრიორული შეფასებები, სადაც ამ შემთხვევაში, იმის გამო, რომ $(2.2.13)$ და $(2.2.14)$ პირობებში $M_i = N_i = 0$, $i = 1,2$, გვექნება $C_2 = C_4 = 0$ და მას აქვს შემდეგი სახე

$$\|u\|_{W_2^1(D_T)} \le c e^{\frac{1}{2}T(T+2)} \|F\|_{L_2(D_T)}, \tag{2.3.9}$$

$$\|v\|_{W_2^1(D_T)} \le c e^{\frac{1}{2}T(T+2)} \|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.3.10}$$

აქ c მუდმივი, რომელიც ფიგურირებს $(2.2.1)$ უტოლობაში არ არის დამოკიდებული u, v და F ფუნქციებზე.

რადგან D_T არეში უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფინიტური ფუნქციების სივრცე $C_0^\infty(D_T)$ მკვრივია $L_2(D_T)$ სივრცეში, ამიტომ მოცემული $F \in L_2(D_T)$ ფუნქციისათვის არსებობს $F_m \in C_0^\infty(D_T)$ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{m\to\infty} \|F_m - F\|_{L_2(D_T)} = 0. \tag{2.3.11}$$

გავაგრძელოთ F_m ფუნქცია კენტად x_n ცვლადის მიმართ D_T არის გარეთ იგივე აღნიშვნით ისე, რომ

$$F_m \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}), \ \ supp F_m \subset G_\infty \coloneqq \{(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : t > |x|\}, \tag{2.3.12}$$

სადაც $\mathbb{R}_+^{n+1} := \mathbb{R}^{n+1} \cap \{t \ge 0\}$. აღვნიშნოთ v_m −ით კოშის შემდეგი ამოცანის

$$L_2^0(v_m) \coloneqq \square v_m = F_m(x,t), \ \ (x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{2.3.13}$$

$$v_m\big|_{t=0} = 0, \ \ \frac{\partial v_m}{\partial t}\big|_{t=0} = 0 \tag{2.3.14}$$

ამონახსნი. როგორც ცნობილია, (2.3.12) პირობების შესრულების შემთხვევაში, კოშის (2.3.13), (2.3.14) ამოცანის ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და ამასთან (S. Kharibegashvili, 2009)

$$v_m \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+^{n+1}),\ \ supp v_m \subset G_\infty \coloneqq \{(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}: t > |x|\}. \tag{2.3.15}$$

(2.3.15) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$v_m\big|_{S_T} = 0. \tag{2.3.16}$$

რადგან F_m ფუნქცია კენტია x_n ცვლადის მიმართ, ამიტომ $\tilde{v}_m(x,t) := -v_m(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n, t)$ ფუნქცია აგრეთვე იქნება კოშის (2.3.13), (2.3.14) ამოცანის ამონახსნი და ერთადერთობის გამო გვექნება: $\tilde{v}_m(x,t) = v_m(x,t)$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $v_m\big|_{x_n=0} = 0$. კერძოდ,

$$v_m\big|_{\Gamma_{1,T}} = 0. \tag{2.3.17}$$

თუ ჩვენ v_m ფუნქციის შეზღუდვისათვის D_T არეზე დავიტოვებთ იგივე აღნიშვნას, მაშინ (2.3.16) და (2.3.17) −ის ძალით, მივიღებთ, რომ ასეთი წესით აგებული v_m ფუნქცია წარმოადგენს $\overset{0}{C^2}(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ კლასის (2.3.2), (2.3.4) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს, როცა $F = F_m$.

იგივე მსჯელობებით მტკიცდება, რომ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\square u = v_m(x,t),\ \ (x,t) \in D_T, \tag{2.3.18}$$

$$u\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0, \tag{2.3.19}$$

გააჩნია $\overset{0}{C^2}(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ კლასის u_m ამონახსნი.

ლემა 2.2.1 −ის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ v_m ფუნქციისათვის, რომელიც წარმოადგენს (2.3.2), (2.3.4) ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, როცა $F = F_m$, მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$\|v_m\|_{W_2^1(D_T)} \le c\|F_m\|_{L_2(D_T)}, \tag{2.3.20}$$

ხოლო იქიდან გამომდინარე, რომ (2.3.2) განტოლება წრფივია, ვღებულობთ, რომ

$$\|v_m - v_k\|_{W_2^1(D_T)} \le c\|F_m - F_k\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.3.21}$$

რადგან $(2.3.11)-$ის ძალით $\{F_m\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია $L_2(D_T)$ სივრცეში, ამიტომ $(2.3.21)-$დან გამომდინარეობს $\{v_m\}$ მიმდევრობის ფუნდამენტურობა $W_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ბანახის სივრცეში. ამიტომ არსებობს ფუნქცია $v \in W_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m - v\|_{W_2^1(D_T)} = 0. \qquad (2.3.22)$$

თუ გავიმეორებთ იგივე მსჯელობებს $u_m \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ფუნქციისათვის, რომელიც წარმოადგენს $(2.3.18), (2.3.19)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მივიღებთ, რომ

$$\|u_m - u_k\|_{W_2^1(D_T)} \le c\|v_m - v_k\|_{L_2(D_T)} \le c\|v_m - v_k\|_{W_2^1(D_T)}. \qquad (2.3.23)$$

$(2.3.22)$ და $(2.3.23)-$დან გამომდინარეობს, რომ $\{u_m\}$ მიმდევრობა არის ფუნდამენტური $W_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ბანახის სივრცეში და, მაშასადამე არსებობს ფუნქცია $u \in W_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_2^1(D_T)} = 0. \qquad (2.3.24)$$

რადგან u_m წარმოადგენს $(2.3.18), (2.3.19)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, ამიტომ ლემა $2.2.1-$ის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობის მართებულება

$$\|u_m\|_{W_2^1(D_T)} \le c\|v_m\|_{L_2(D_T)},$$

საიდანაც $(2.3.20)-$ის ძალით მივიღებთ

$$\|u_m\|_{W_2^1(D_T)} \le c^2\|F_m\|_{L_2(D_T)}. \qquad (2.3.25)$$

$(2.3.11), (2.3.22)$ და $(2.3.24)-$ის გათვალისწინებით, თუ გადავალთ ზღვარზე $(2.3.20)$ და $(2.3.25)$ უტოლობებში, როცა $m \to \infty$, მივიღებთ

$$\|u\|_{W_2^1(D_T)} \le c^2\|F\|_{L_2(D_T)}, \qquad (2.3.26)$$

$$\|v\|_{W_2^1(D_T)} \le c\|F\|_{L_2(D_T)}. \qquad (2.3.27)$$

$(2.3.22), (2.3.24), (2.3.18), (2.3.19), (2.3.11)$ და $(2.3.13)-$დან გამომდინარეობს, რომ ზემოთ აგებული u და v ფუნქციათა სისტემა აკმაყოფილებს $(2.3.5)-(2.3.8)$ პირობებს და წარმოადგენს $(2.3.1)-(2.3.4)$ წრფივი ამოცანის W_2^1 კლასის

განზოგადებულ ერთადერთ ამონახსნს, რომლისთვისაც მართებულია (2.3.26) და (2.3.27) შეფასებები. თუ ამ წყვილს $(u,v) \in \overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ აღვნიშნავთ $K(F) = \big(K_1(F), K_2(F)\big) -$ ით, ანუ

$$K = (K_1, K_2), \ \ u = K_1(F), \ \ v = K_2(F), \tag{2.3.28}$$

მაშინ (2.3.26) და (2.3.27) $-$ის ძალით გვექნება

$$\|K_1(F)\|_{W_2^1(D_T)} \le c^2 \|F\|_{L_2(D_T)}, \tag{2.3.29}$$

$$\|K_2(F)\|_{W_2^1(D_T)} \le c \|F\|_{L_2(D_T)}, \tag{2.3.30}$$

სადაც $c := \sqrt{T} exp\left\{\frac{1}{2}T(1+T)\right\}$ მუდმივია, რომელიც ლემა 2.2.1 $-$ში ფიგურირებს.

ამრიგად, წრფივი ოპერატორი

$$K: L_2(D_T) \to \overset{0}{W}{}_2^1\big(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\big), \tag{2.3.31}$$

რომელიც (2.3.28) $-$ის ძალით იძლევა (2.3.1) $-$ (2.3.4) წრფივი ამოცანის W_2^1 კლასის ერთადერთ განზოგადებულ ამონახსნს, არის უწყვეტი, რადგანაც მართებულია (2.3.29) და (2.3.30) უტოლობები და, მაშასადამე, აქედან გამომდინარე მისი ნორმა შეფასდება შემდეგნაირად

$$\|K\|_{L_2(D_T) \to \overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})} \le c(1+c). \tag{2.3.32}$$

შენიშვნა 2.3.1. თუ $K = (K_1, K_2)$ ოპერატორის საშუალებით შევაბრუნებთ (2.1.4) $-$ (2.1.7) ამოცანის წრფივ ნაწილს და შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$U := (u, v), \tag{2.3.33}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1\big(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\big)$ სივრცეში მივიღებთ შემდეგ ფუნქციონალურ განტოლებას

$$U = K(-f(v) - g(u) + F) = -K\big(f(v)\big) - K\big(g(u)\big) + K(F). \tag{2.3.34}$$

ამასთან, ადგილი აქვს (2.1.4) $-$ (2.1.7) ამოცანის და (2.3.34) ფუნქციონალური განტოლების ეკვივალენტობას შემდეგი აზრით:

თუ $u, v \in \overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ფუნქციათა სისტემა განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით წარმოადგენს (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს, მაშინ $U = (u, v)$ აკმაყოფილებს (2.3.34) განტოლებას და პირიქით, თუ $U = (u, v)$ არის (2.3.34) ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნი, მაშინ $\overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრცეში $u, v \in \overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგანებულ ამონახსნს განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით. (2.3.28) −ის ძალით (2.3.34) განტოლება $\overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრცეში შეიძლება გადავწეროთ განტოლებათა შემდეგი სისტემის სახით

$$u = K_1(-f(v) - g(u) + F), \;\; v = K_2(-f(v) - g(u) + F). \qquad (2.3.35)$$

შენიშვნა 2.3.2. როგორც ცნობილია, ჩართვის $I: W_2^1(D_T) \to L_q(D_T)$ ოპერატორი არის წრფივი, უწყვეტი და კომპაქტური, როცა $1 < q < \frac{2(n+1)}{n-1}$ და $n > 1$ (O.A.Ladyzhenskaya, 1973). ამავე დროს ნემიცკის $N_1^0: L_q(D_T) \to L_2(D_T)$ ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს შემდეგი ფორმულით $N_1^0(v) = f(v)$, სადაც

$$f \in C(\mathbb{R}), \;\; |f(v)| \le \gamma_1 + \gamma_2 |v|^\alpha, \;\; \alpha = const \ge 0, \;\; v \in \mathbb{R}\,, \qquad (2.3.36)$$

ხოლო $\gamma_i = const \ge 0$, $i = 1,2$, არის უწყვეტი და შემოსაზღვრული, როცა $q \ge 2\alpha$ (S.Fuchik, 1980). ამიტომ, თუ

$$\alpha < \frac{n+1}{n-1}\,, \qquad (2.3.37)$$

მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი q, რომ $1 < q < \frac{2(n+1)}{n-1}$ და $q > 2\alpha$. ამიტომ ამ შემთხვევაში ოპერატორი

$$N_1^0 I: \overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}) \to L_2(D_T) \qquad (2.3.38)$$

იქნება უწყვეტი და კომპაქტური. ანალოგიურად, თუ $g \in C(\mathbb{R})$ ფუნქციისაგან მოვითხოვთ (2.2.14) პირობის შესრულებას და N_2^0 −ით აღვნიშნავთ ნემიცკის ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს შემდეგი ფორმულით $N_2^0(u) = g(u)$, მაშინ ოპერატორი

$$N_2^0 I: \overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right) \to L_2(D_T) \tag{2.3.39}$$

აგრეთვე იქნება უწყვეტი და კომპაქტური. ამ პირობებში, (2.3.38) და (2.3.39) −ის გათვალისწინებით, თუ (2.3.34) განტოლებას გადავწერთ შემდეგნაირად

$$U = AU \coloneqq -KN_1^0(v) - KN_2^0(u) + K(F), \tag{2.3.40}$$

მივიღებთ, რომ $A: \overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right) \to \overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right)$ ოპერატორი, რომელიც ფიგურირებს (2.3.40) განტოლებაში, არის უწყვეტი და კომპაქტური. ამასთან, თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ f ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (2.2.13) პირობას, მაშინ ლემა 2.2.2 −ის ძალით (2.3.40) განტოლების ამონახსნისათვის $\overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right)$ სივრციდან, რომელიც შენიშვნა 2.3.1 −ის თანახმად აგრეთვე წარმოადგენს (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს განსაზღვრება 2.1.1 −ის ძალით, მართებულია (2.2.38) და (2.2.41) აპრიორული შეფასებები. (2.3.40) განტოლებისა და (2.2.38) და (2.2.41) აპრიორულ შეფასებებში შემავალი C_i, $i = 1, \dots, 4$, მუდმივების სტრუქტურიდან გამომდინარეობს, რომ $U = \tau AU$ განტოლების $\overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right)$ კლასის ამონახსნი, სადაც პარამეტრი $\tau \in [0,1]$, აგრეთვე აკმაყოფილებს იგივე (2.2.38) და (2.2.41) აპრიორულ შეფასებებს, რომლებშიც C_i, $i = 1, \dots, 4$, მუდმივები (2.2.13), (2.2.14), (2.2.39), (2.2.40) და (2.2.42) −ის ძალით არ არიან დამოკიდებული F ფუნქციასა და τ პარამეტრზე. ამიტომ იმის გათვალისწინებით, რომ (2.3.40) განტოლებაში შემავალი

$$A: \overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right) \to \overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right)$$

ოპერატორი უწყვეტია და კომპაქტური, ლერე-შაუდერის თეორემის თანახმად (V.A.Trenogin, 1993) (2.3.40) განტოლებას გააჩნია $\overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right)$ სივრცეში ერთი მაინც ამონახსნი, რომელიც როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ აგრეთვე წარმოადგენს (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით.

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი შენიშვნების გათვალისწინებით მართებულია შემდეგი

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ $f, g \in C(\mathbb{R})$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ $(2.2.13), (2.2.14)$ და $(2.3.36), (2.3.37)$ პირობებს, $\mu_i = 0,\ i = 1, \dots, 4.$ მაშინ ნებისმიერი $F \in L_2(D_T)$ ფუნქციისათვის $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი განსაზღვრება $2.1.1$ –ის აზრით.

2.4. $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა

ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ $(2.1.1)$ განტოლებაში შემავალი f და g ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$f \in C^1(\mathbb{R}),\ |f'(s)| \le d_1 + d_2|s|^\gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}\,, \tag{2.4.1}$$

$$g \in C^1(\mathbb{R}),\ |g'(s)| \le d_3 + d_4|s|^\gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}\,, \tag{2.4.2}$$

სადაც $d_i,\ \gamma = const \ge 0,\ i = 1, \dots, 4.$

შენიშვნა 2.4.1. ცხადია, რომ $(2.4.1)$ –დან გამომდინარეობს $(2.3.36)$ პირობა, როცა $\gamma = \alpha - 1,$ ხოლო როცა $\gamma < \frac{2}{n-1},$ მაშინ ადგილი აქვს $(2.3.37)$ უტოლობას.

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ, შესრულებულია $(2.4.1), (2.4.2)$ პირობები, როცა $0 \le \gamma < \frac{2}{n-1}$ და $F \in L_2(D_T),\ \mu_i = 0\ \ i = 1, \dots, 4.$ მაშინ $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი განსაზღვრება $2.1.1$ –ის აზრით.

დამტკიცება. ვთქვათ, u^1, v^1 და u^2, v^2 წარმოადგენენ $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის განზოგადებულ ამონახსნებს $\overset{0}{W}{}_2^1(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრციდან განსაზღვრება $2.1.1$ –ის აზრით, რაც ნიშნავს ისეთ მიმდევრობათა

$$u_m^i, v_m^i \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, S_T, \Gamma_{1,T}) := \{w \in C^2(\overline{D}_T) : w\,\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0\},\ \ i = 1,2, \tag{2.4.3}$$

არსებობას, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\left\|u_m^i-u^i\right\|_{W_2^1(D_T)}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\left\|v_m^i-v^i\right\|_{W_2^1(D_T)}=0,\ \ i=1,2, \qquad (2.4.4)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left\|L_1\left(u_m^i,v_m^i\right)\right\|_{L_2(D_T)}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\left\|L_2\left(u_m^i,v_m^i\right)-F\right\|_{L_2(D_T)}=0,\ \ i=1,2. \qquad (2.4.5)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u:=u^2-u^1,\ \ v=v^2-v^1,\ \ u_m:=u_m^2-u_m^1,\ \ v_m=v_m^2-v_m^1\,, \qquad (2.4.6)$$

მაშინ (2.4.3) – (2.4.5) –ის ძალით გვექნება

$$u,v\in \overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T,S_T,\Gamma_{1,T}\right),\ \ u_m,v_m\in \overset{0}{C}\left(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T}\right) \qquad (2.4.7)$$

და აგრეთვე შემდეგი ზღვრული ტოლობები

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{W_2^1(D_T)}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\|v_m-v\|_{W_2^1(D_T)}=0, \qquad (2.4.8)$$

$$\lim_{m\to\infty}\|L_1(u_m,v_m)\|_{L_2(D_T)}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\|L_2(u_m^2,v_m^2)-L_2(u_m^1,v_m^1)\|_{L_2(D_T)}=0. \qquad (2.4.9)$$

განვიხილოთ $u_m\in \overset{0}{C}\left(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T}\right)$ ფუნქცია, როგორც შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$L_1(u_m,v_m):=\square u_m-v_m=G_m(x,t),\ \ (x,t)\in D_T, \qquad (2.4.10)$$

$$u_m\big|_{S_T\cup\Gamma_{1,T}}=0 \qquad (2.4.11)$$

კლასიკური ამონახსნი, სადაც

$$G_m:=L_1(u_m,v_m) \qquad (2.4.12)$$

ფუნქცია (2.4.9) –ის გათვალისწინებით აკმაყოფილებს შემდეგ ზღვრულ ტოლობას

$$\lim_{m\to\infty}\|G_m\|_{L_2(D_T)}=0. \qquad (2.4.13)$$

(2.4.8) – (2.4.13) –ის ძალით, თუ ჩვენ გავიმეორებთ მსჯელობებს, რომლებიც მოყვანილი იყო ლემა 2.2.1 –ის დამტკიცებისას მივიღებთ

$$\|u_m\|_{W_2^1(D_T)}\le c\left(\|v_m\|_{L_2(D_T)}+\|G_m\|_{L_2(D_T)}\right). \qquad (2.4.14)$$

ახლა განვიხილოთ $v_m\in \overset{0}{C}{}^2\left(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T}\right)$ ფუნქცია, როგორც შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$\Box v_m + f(v_m^2) - f(v_m^1) + g(u_m^2) - g(u_m^1) = Q_m(x,t), \ \ (x,t) \in D_T, \qquad (2.4.15)$$

$$v_m \big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0 \qquad (2.4.16)$$

კლასიკური ამონახსნი, სადაც

$$Q_m := L_2(u_m^2, v_m^2) - L_2(u_m^1, v_m^1) \qquad (2.4.17)$$

ფუნქცია (2.4.9) –ის ძალით აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{m \to \infty} \|Q_m\|_{L_2(D_T)} = 0. \qquad (2.4.18)$$

თუ გავიმეორებთ იმ მსჯელობებს, რომელთა საშუალებით (2.2.2) და (2.2.3) –დან მივიღეთ (2.2.12) გამოსახულება, (2.4.15) და (2.4.16) –ის ძალით ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას

$$\int_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx = -2 \int_{D_\tau} [f(v_m^2) - f(v_m^1)] \frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt -$$

$$2 \int_{D_\tau} [g(u_m^2) - g(u_m^1)] \frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt + 2 \int_{D_\tau} Q_m \frac{\partial v_m}{\partial t} dxdt, \ \ 0 < \tau \le T. \qquad (2.4.19)$$

რადგან

$$f(v_m^2) - f(v_m^1) = (v_m^2 - v_m^1) \int_0^1 f'\big(v_m^1 + s(v_m^2 - v_m^1)\big)\, ds,$$

ამიტომ

$$[f(v_m^2) - f(v_m^1)] \frac{\partial v_m}{\partial t} = (v_m^2 - v_m^1) \frac{\partial v_m}{\partial t} \int_0^1 f'\big(v_m^1 + s(v_m^2 - v_m^1)\big)\, ds\,. \qquad (2.4.20)$$

ანალოგიურად,

$$[g(u_m^2) - g(u_m^1)] \frac{\partial v_m}{\partial t} = (u_m^2 - u_m^1) \frac{\partial v_m}{\partial t} \int_0^1 g'\big(u_m^1 + s(u_m^2 - u_m^1)\big)\, ds\,. \qquad (2.4.21)$$

(2.4.1) –დან და მარტივი უტოლობიდან $|\xi + \eta|^\gamma \le 2^\gamma max(|\xi|^\gamma, |\eta|^\gamma) \le 2^\gamma(|\xi|^\gamma + |\eta|^\gamma)$, როცა $\gamma \ge 0$; $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ გვექნება

$$\left| \int_0^1 f'\big(v_m^1 + s(v_m^2 - v_m^1)\big)\, ds \right| \le \int_0^1 [d_1 + d_2 |(1-s) v_m^1 + s v_m^2|^\gamma]\, ds \le$$

$$d_1 + 2^\gamma d_2(|v_m^1|^\gamma + |v_m^2|^\gamma). \tag{2.4.22}$$

ანალოგიურად, (2.4.2) –დან გვექნება

$$\left|\int_0^1 g'\big(u_m^1 + s(u_m^2 - u_m^1)\big)\,ds\right| \le d_3 + 2^\gamma d_4(|u_m^1|^\gamma + |u_m^2|^\gamma). \tag{2.4.23}$$

(2.4.20) – (2.4.23) –დან (2.4.6) –ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left|[f(v_m^2) - f(v_m^1)]\frac{\partial v_m}{\partial t}\right| \le \big(d_1 + 2^\gamma d_2(|v_m^1|^\gamma + |v_m^2|^\gamma)\big)|v_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right| \le$$

$$\frac{1}{2}d_1\left(v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right) + 2^\gamma d_2(|v_m^1|^\gamma + |v_m^2|^\gamma)|v_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|. \tag{2.4.24}$$

$$\left|[g(u_m^2) - g(u_m^1)]\frac{\partial v_m}{\partial t}\right| \le \big(d_3 + 2^\gamma d_4(|u_m^1|^\gamma + |u_m^2|^\gamma)\big)|u_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right| \le$$

$$\frac{1}{2}d_3\left(u_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right) + 2^\gamma d_4(|u_m^1|^\gamma + |u_m^2|^\gamma)|u_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|. \tag{2.4.25}$$

(2.4.19) და (2.4.24), (2.4.25) –დან მივიღებთ

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx \le \int_{D_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + Q_m^2\right]dxdt +$$

$$d_1\int_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right]dxdt + 2^{\gamma+1}d_2\int_{D_\tau}(|v_m^1|^\gamma + |v_m^2|^\gamma)|v_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|dxdt +$$

$$d_3\int_{D_\tau}\left[u_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right]dxdt + 2^{\gamma+1}d_4\int_{D_\tau}(|u_m^1|^\gamma + |u_m^2|^\gamma)|u_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|dxdt. \tag{2.4.26}$$

ჰელდერის უტოლობის ძალით (S.Fuchik, 1980) გვექნება

$$\int_{D_\tau}(|v_m^1|^\gamma + |v_m^2|^\gamma)|v_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|dxdt \le$$

$$\big(\||v_m^1|^\gamma\|_{L_{n+1}(D_\tau)} + \||v_m^2|^\gamma\|_{L_{n+1}(D_\tau)}\big)\|v_m\|_{L_p(D_\tau)}\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)}, \tag{2.4.27}$$

$$\int_{D_\tau}(|u_m^1|^\gamma + |u_m^2|^\gamma)|u_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|dxdt \le$$

$$\big(\||u_m^1|^\gamma\|_{L_{n+1}(D_\tau)} + \||u_m^2|^\gamma\|_{L_{n+1}(D_\tau)}\big)\|u_m\|_{L_p(D_\tau)}\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)}, \tag{2.4.28}$$

(2.4.27) და (2.4.28) –ში $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}=1$, ე.ი.

$$p=\frac{2(n+1)}{n-1}\,. \qquad (2.4.29)$$

როგორც ცნობილია (O.A.Ladyzhenskaya, 1973)

$$\|v\|_{L_q(D_\tau)} \le C_q(T)\|v\|_{W_2^1(D_\tau)} \quad \forall v \in W_2^1(D_\tau),\ \ 0<\tau<T, \qquad (2.4.30)$$

სადაც $C_q(T)$ დადებითი მუდმივი არ არის დამოკიდებული v –სა და τ –ზე.

თეორემა 2.4.1 –ში მოყვანილი პირობის გამო $\gamma<\frac{2}{n-1}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\gamma(n+1)<\frac{2(n+1)}{n-1}$. ამიტომ (2.4.29) და (2.4.30) –ის ძალით გვექნება

$$\left\||v_m^i|^\gamma\right\|_{L_{n+1}(D_\tau)}=\left\|v_m^i\right\|^\gamma_{L_{\gamma(n+1)}(D_\tau)} \le C^\gamma_{\gamma(n+1)}(T)\left\|v_m^i\right\|^\gamma_{W_2^1(D_\tau)},\quad i=1,2, \quad (2.4.31)$$

$$\left\||u_m^i|^\gamma\right\|_{L_{n+1}(D_\tau)}=\left\|u_m^i\right\|^\gamma_{L_{\gamma(n+1)}(D_\tau)} \le C^\gamma_{\gamma(n+1)}(T)\left\|u_m^i\right\|^\gamma_{W_2^1(D_\tau)},\quad i=1,2, \quad (2.4.32)$$

$$\|v_m\|_{L_p(D_\tau)} \le C_p(T)\|v_m\|_{W_2^1(D_\tau)}\,, \qquad (2.4.33)$$

$$\|u_m\|_{L_p(D_\tau)} \le C_p(T)\|u_m\|_{W_2^1(D_\tau)}\,. \qquad (2.4.34)$$

(2.4.4) ტოლობების ძალით არსებობს ნატურალური რიცხვი m_0 ისეთი, რომ როცა $m\ge m_0$, მაშინ

$$\left\|v_m^i\right\|^\gamma_{W_2^1(D_\tau)} \le \left\|v^i\right\|^\gamma_{W_2^1(D_\tau)}+1,\ \ i=1,2;\ \ m\ge m_0, \qquad (2.4.35)$$

$$\left\|u_m^i\right\|^\gamma_{W_2^1(D_\tau)} \le \left\|u^i\right\|^\gamma_{W_2^1(D_\tau)}+1,\ \ i=1,2;\ \ m\ge m_0. \qquad (2.4.36)$$

ზემოთმოყვანილი (2.4.27) – (2.4.36) უტოლობების ძალით გვექნება

$$2^{\gamma+1}d_2\int_{D_\tau}(|v_m^1|^\gamma+|v_m^2|^\gamma)|v_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|dxdt+$$

$$2^{\gamma+1}d_4\int_{D_\tau}(|u_m^1|^\gamma+|u_m^2|^\gamma)|u_m|\left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right|dxdt\le$$

$$2^{\gamma+1}d_2C^\gamma_{\gamma(n+1)}(T)\Big(\|v^1\|^\gamma{}_{W_2^1(D_\tau)}+\|v^2\|^\gamma{}_{W_2^1(D_\tau)}+$$

$$2)C_p(T)\|v_m\|^\gamma{}_{W_2^1(D_\tau)}\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)}+$$

$$2^{\gamma+1}d_4C^\gamma_{\gamma(n+1)}(T)\Big(\|u^1\|^\gamma{}_{W_2^1(D_\tau)}+$$

$$\|u^2\|^{\gamma}{}_{W_2^1(D_\tau)} + 2\Big) C_p(T)\|u_m\|^{\gamma}{}_{W_2^1(D_\tau)} \left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)}. \qquad (2.4.37)$$

(2.4.14) –დან ვღებულობთ, რომ

$$\|u_m\|^2{}_{W_2^1(D_T)} \leq 2c\left(\|v_m\|^2{}_{L_2(D_T)} + \|G_m\|^2{}_{L_2(D_T)}\right). \qquad (2.4.38)$$

შევნიშნოთ, რომ (2.4.38) უტოლობა მართებულია, როცა $T = \tau$. იგივე c მუდმივით, რომელიც ფიგურირებს (2.2.1) უტოლობაში.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$M_5 = max\Big\{2^{\gamma+1} d_2 C^{\gamma}_{\gamma(n+1)}(T)\left(\|v^1\|^{\gamma}{}_{W_2^1(D_\tau)} + \|v^2\|^{\gamma}{}_{W_2^1(D_\tau)} + 2\right) C_p(T),$$

$$2^{\gamma+1} d_4 C^{\gamma}_{\gamma(n+1)}(T)\left(\|u^1\|^{\gamma}{}_{W_2^1(D_\tau)} + \|u^2\|^{\gamma}{}_{W_2^1(D_\tau)} + 2\right) C_p(T)\Big\}. \qquad (2.4.39)$$

(2.4.37) – (2.4.39) –ის გათვალისწინებით (2.4.26) –დან მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right] dx \leq \int\limits_{D_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + Q_m^2\right] dxdt +$$

$$d_1 \int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right] dxdt + d_3 \int\limits_{D_\tau}\left[u_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right] dxdt +$$

$$M_5\left(\left(\|v_m\|_{W_2^1(D_\tau)} + \|u_m\|_{W_2^1(D_\tau)}\right)\right)\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)} \leq$$

$$\int\limits_{D_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + Q_m^2\right] dxdt + d_1 \int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right] dxdt +$$

$$d_3 \int\limits_{D_\tau}\left[2cv_m^2 + 2cG_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right] dxdt +$$

$$M_5\left[\|v_m\|_{W_2^1(D_\tau)} + c\left(\|v_m\|_{L_2(D_\tau)} + \|G_m\|_{L_2(D_\tau)}\right)\right]\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)}. \qquad (2.4.40)$$

თუ გამოვიყენებთ ცნობილ უტოლობებს: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ და $\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \leq k\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ გვექნება

$$\left[\|v_m\|_{W_2^1(D_\tau)} + c\|v_m\|_{L_2(D_\tau)} + c\|G_m\|_{L_2(D_\tau)}\right]\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)} \leq$$

$$\left[(1+c)\|v_m\|_{W_2^1(D_\tau)} + c\|G_m\|_{L_2(D_\tau)}\right]\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)} \leq$$

$$\frac{1}{2}\left[(1+c)\|v_m\|_{W_2^1(D_\tau)} + c\|G_m\|_{L_2(D_\tau)}\right] + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)} \leq$$

$$(1+c)^2\|v_m\|^2{}_{W_2^1(D_\tau)} + c^2\|G_m\|^2{}_{L_2(D_\tau)} + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right\|_{L_2(D_\tau)} =$$

$$(1+c)^2\int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dxdt +$$

$$\int\limits_{D_\tau}\left[cG_m^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right]dxdt. \qquad (2.4.41)$$

(2.4.41) –ის გათვალისწინებით (2.4.40) –დან მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx \leq \int\limits_{D_\tau}\left[\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + Q_m^2\right]dxdt +$$

$$d_1\int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right]dxdt + d_3\int\limits_{D_\tau}\left[2cv_m^2 + 2cG_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right]dxdt +$$

$$(1+c)^2\int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dxdt +$$

$$\int\limits_{D_\tau}\left[cG_m^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2\right]dxdt \leq M_6\int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dxdt +$$

$$\|Q_m\|^2{}_{L_2(D_T)} + (2cd_3 + c)\|G_m\|^2{}_{L_2(D_T)}, \qquad (2.4.42)$$

სადაც

$$M_6 := max\left\{\frac{3}{2} + d_1 + d_3 + (1+c)^2; d_1 + 2cd_3 + (1+c)^2\right\}.$$

ანალოგიურად (2.2.24) –ის პირველი უტოლობისა, მართებულია შემდეგი უტოლობა

$$\int\limits_{\Omega_\tau} v_m^2 dx \leq T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2 dxdt. \qquad (2.4.43)$$

(2.4.42) და (2.4.43) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[v_m^2+\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx \le$$

$$(M_6+1)\int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2+\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx\,dt+\|Q_m\|^2{}_{L_2(D_T)}+$$

$$(2cd_3+c)\|G_m\|^2{}_{L_2(D_T)}\,. \qquad (2.4.44)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$w(\tau):=\int\limits_{\Omega_\tau}\left[v_m^2+\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx$$

და მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\int\limits_{D_\tau}\left[v_m^2+\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2\right]dx\,dt=\int\limits_0^\tau w(\sigma)d\sigma$$

(2.4.44) $-$დან გვექნება

$$w(\tau)\le(M_6+1)\int\limits_0^\tau w(\sigma)d\sigma+\|Q_m\|^2{}_{L_2(D_T)}+(2cd_3+c)\|G_m\|^2{}_{L_2(D_T)}\,.$$

აქედან გრონუოლის ლემის თნახმად გამომდინარეობს უტოლობა

$$w(\tau)\le\left[\|Q_m\|^2{}_{L_2(D_T)}+(2cd_3+c)\|G_m\|^2{}_{L_2(D_T)}\right]e^{(M_6+1)\tau}. \qquad (2.4.45)$$

(2.4.45) $-$დან მივიღებთ, რომ

$$\|v_m\|^2_{W_2^1(D_\tau)}=\int\limits_0^T w(\tau)d\tau\le T\left[\|Q_m\|^2{}_{L_2(D_T)}+\right.$$

$$\left.(2cd_3+c)\|G_m\|^2{}_{L_2(D_T)}\right]e^{(M_6+1)T}, \qquad (2.4.46)$$

საიდანაც (2.4.13) და (2.4.18) $-$დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\|v_m\|_{W_2^1(D_T)}=0. \qquad (2.4.47)$$

(2.4.14) $-$ის ძალით (2.4.47) $-$დან გამომდინარეობს

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m\|_{W_2^1(D_T)}=0. \qquad (2.4.48)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.4.6) აღნიშვნებს და (2.4.8), (2.4.47), (2.4.48) ზღვრულ ტოლობებს, გვექნება

$$\|v\|_{W_2^1(D_\tau)} = \|v^2 - v^1\|_{W_2^1(D_\tau)} = \lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{W_2^1(D_T)} = 0,$$

$$\|u\|_{W_2^1(D_\tau)} = \|u^2 - u^1\|_{W_2^1(D_\tau)} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{W_2^1(D_T)} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $u^2 = u^1$ და $v^2 = v^1$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2.3.1 და 2.4.1 −დან შენიშვნა 2.4.1 −ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 2.4.2. ვთქვათ f, g ფუნქციები აკმაყოფილებენ (2.2.13), (2.3.14), (2.4.1), (2.4.2) პირობებს, სადაც $\gamma < \frac{2}{n-1}$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. მაშინ ნებისმიერი $F \in L_2(D_T)$ ფუნქციისათვის (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანას განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით გააჩნია ერთადერთი $W_2^1(D_T)$ კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

2.5. $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის გლობალური ამოხსნადობა და გლობალური ამონახსნის არსებობა

განსაზღვრება 2.5.1. ვთქვათ $f, g \in C(\mathbb{R})$, F ფუნქცია განსაზღვრულია D_∞ არეში და $F\big|_{D_T} \in L_2(D_T)$ $\forall T > 0$. (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანას ეწოდება გლობალურად ამოხსნადი $W_2^1(D_T)$ კლასში, თუ $\forall T > 0$ −ისათვის (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანას D_T არეში გააჩნია განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით ერთი მაინც $W_2^1(D_T)$ კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

თეორემა 2.3.1 −დან გამომდინარეობს

თეორემა 2.5.1. ვთქვათ $f, g \in C(\mathbb{R})$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (2.2.13), (2.2.14) და (2.3.36), (2.3.37) პირობებს $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. მაშინ D_∞ არეში განსაზღვრული ნებისმიერი ისეთი F ფუნქციისათვის, რომ $F\big|_{D_T} \in L_2(D_T)$ $\forall T > 0$ −ისათვის (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანა გლობალურად ამოხსნადია W_2^1 კლასში განსაზღვრება 2.5.1 −ის აზრით.

განსაზღვრება 2.5.2. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, F ფუნქცია განსაზღვრულია D_∞ არეში და $F\big|_{D_T} \in L_2(D_T)$ $\forall T > 0$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. D_∞ არეში განსაზღვრულ u და v ფუნქციათა სისტემას ეწოდება W_2^1 კლასის $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის გლობალური ამონახსნი, თუ $\forall T > 0$ −ისათვის $u\big|_{D_T}$ და $v\big|_{D_T}$ ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს.

თეორემა 2.4.2 −დან გამომდინარეობს

თეორემა 2.5.2. ვთქვათ f, g ფუნქციები აკმაყოფილებენ $(2.2.13), (2.2.14)$, $(2.4.1), (2.4.2)$ პირობებს, სადაც $\gamma < \frac{2}{n-1}$, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. მაშინ D_∞ არეში განსაზღვრული ისეთი ნებისმიერი F ფუნქციისათვის, რომ $F\big|_{D_T} \in L_2(D_T)$ $\forall T > 0$ −ისათვის $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი W_2^1 კლასის გლობალური ამონახსნი.

დამტკიცება. თეორემა 2.4.2 −დან გამომდინარეობს, რომ D_T არეში განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით არსებობს $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის W_2^1 კლასის ერთადერთი u_k, v_k კლასის განზოგადებული ამონახსნი, სადაც $T = k \in N$. რადგან $u_{k+1}\big|_{D_k}$ აგრეთვე წარმოადგენს $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს D_k არეში, ამიტომ ამონახსნის ერთდერთობის გამო გვექნება $u_{k+1}\big|_{D_k} = u_k$ და $u_{k+1}\big|_{D_k} = v_k$. აქედან გამომდინარე u და v ფუნქციები აიგება შემდეგი წესით: $u(x,t) = u_k(x,t)$, $v(x,t) = v_k(x,t)$, როცა $k = [t] + 1$, სადაც $[t]$ წარმოადგენს t რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო $(x,t) \in D_k$. ამასთან ასეთი წესით აგებული ამონახსნი D_∞ არეში არის განსაზღვრება 2.5.2 −ის აზრით $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის ერთადერთი გლობალური ამონახსნი. ამით თეორემა 2.5.2 დამტკიცებულია.

2.6. $(2.1.4)-(2.1.7)$ ამოცანის ამონახსნის არარსებობა

როცა თეორემა 2.4.2 −ში შემავალი პირობები დარღვეულია, მაშინ (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანას საზოგადოდ შეიძლება განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით არ გააჩნდეს W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

მართლაც, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$g=0, \tag{2.6.1}$$

f ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.3.36) და (2.3.37) პირობებს ამასთან

$$f(\tau)\leq -|\tau|^p \quad \forall\tau\in\mathbb{R},\ \ p=const>1. \tag{2.6.2}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.6.2) პირობის შესრულების შემთხვევაში დაირღვევა (2.2.13) პირობა, რომელიც ფიგურირებს თეორემა 2.3.1 −ში.

ვთქვათ შესრულებულია (2.3.36), (2.3.37), (2.6.1), (2.6.2) პირობები, $\mu_i=0$, $i=1,\dots,4$, $F\in L_2(D_T)$ და u,v ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს განსაზღვრება 2.1.1 −ის აზრით (2.1.4) − (2.1.7) ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს. მაშინ არსებობენ u_m და v_m მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.1.10) − (2.1.12) პირობებს. აქედან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ $v_m\in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T})$ ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$\square v_m+f(v_m)=F_m(x,t),\ \ (x,t)\in D_T, \tag{2.6.3}$$

$$v\big|_{S_T}=0,\quad v\big|_{\Gamma_{1,T}}=0 \tag{2.6.4}$$

კლასიკურ ამონახსნს, სადაც

$$F_m\in C(\overline{D}_T),\quad \lim_{m\to\infty}\|F_m-F\|_{L_2(D_T)}=0. \tag{2.6.5}$$

ავიღოთ საცდელი ფუნქცია φ, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\varphi\in C^2(\overline{D}_T),\ \ \varphi\big|_{D_T}>0,\ \ \varphi\big|_{\partial D_T}=\nabla\varphi\big|_{\partial D_T}=0, \tag{2.6.6}$$

სადაც $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

გავამრავლოთ (2.6.3) ტოლობის ორივე მხარე φ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ D_T არეზე, რის შედეგად მივიღებთ

$$\int_{D_T} v_m \Box \varphi dxdt + \int_{D_T} f(v_m)\varphi dxdt = \int_{D_T} F_m \varphi dxdt. \tag{2.6.7}$$

(2.6.3) და (2.6.6) –ის ძალით (2.6.7) ტოლობის მარცხენა მხარეში შემავალი პირველი ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\int_{D_T} \Box v_m \varphi dxdt = -\int_{D_T} f(v_m)\varphi dxdt + \int_{D_T} F_m \varphi dxdt. \tag{2.6.8}$$

რადგან (2.1.11) –ის ძალით $\lim_{m\to\infty} \|v_m - v\|_{W_2^1(D_T)} = 0$ და f ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.3.36) და (2.3.37) პირობებს, ამიტომ შენიშვნა 2.3.2 –ის თანახმად გვექნება

$$\lim_{m\to\infty} \|f(v_m) - f(v)\|_{L_2(D_T)} = 0. \tag{2.6.9}$$

(2.1.11), (2.6.5) და (2.6.9) –ის ძალით, თუ გადავალთ ზღვარზე (2.6.8) ტოლობაში, როცა $m \to \infty$ მივიღებთ

$$\int_{D_T} v \Box \varphi dxdt = -\int_{D_T} f(v)\varphi dxdt + \int_{D_T} F\varphi dxdt. \tag{2.6.10}$$

(2.6.2) და (2.6.6) –ის ძალით (2.6.10) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{D} |v|^p \varphi dxdt \leq \int_{D_T} v \Box \varphi dxdt - \int_{D_T} F\varphi dxdt. \tag{2.6.11}$$

თუ იუნგის უტოლობაში

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p'-1}} b^{p'},\ \ a, b \geq 0,\ \ p' = \frac{p}{p-1},$$

სადაც ε დადებითი პარამეტრია, ავიღებთ $a = |v|\varphi^{\frac{1}{p}}$ და $b = \frac{|\Box\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{p}}}$ მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{p'}{p} = p' - 1$ მივიღებთ

$$|v\Box\varphi| = |v|\varphi^{\frac{1}{2}} \frac{|\Box\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{p}|v|^p \varphi + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}} \frac{|\Box\varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}}. \tag{2.6.12}$$

(2.6.11) და (2.6.12) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{p}\right)\int\limits_{D_T}|v|^p\varphi dxdt \le \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}}dxdt - \int\limits_{D_T}F\varphi dxdt,$$

საიდანაც, როცა $\varepsilon < p$ მივიღებთ

$$\int\limits_{D_T}|v|^p\varphi dxdt \le \frac{p}{(p-\varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|\varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}}dxdt - \frac{p}{p-\varepsilon}\int\limits_{D_T}F\varphi dxdt. \qquad (2.6.13)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ტოლობებს $p' = \frac{p}{p-1}$, $p = \frac{p'}{p'-1}$ და $\min\limits_{0<\varepsilon<p}\frac{p}{(p-\varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}} = 1$, რომელიც მიიღწევა, როცა $\varepsilon = 1$, (2.6.13) −დან გვექნება

$$\int\limits_{D_T}|v|^p\varphi dxdt \le \int\limits_{D_T}\frac{|\Box\varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}}dxdt - p'\int\limits_{D_T}F\varphi dxdt. \qquad (2.6.14)$$

ახლა შევარჩიოთ საცდელი ფუნქცია φ ისეთი, რომ (2.6.6) პირობებთან ერთად ადგილი ჰქონდეს შემდეგ პირობას

$$k_0 := \int\limits_{D_T}\frac{|\Box\varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}}dxdt < +\infty. \qquad (2.6.15)$$

მართლაც, შემდეგი ფორმულით აგებული ფუნქცია

$$\varphi(x,t) = [x_n(t^2 - |x|^2)(T-t)]^m$$

საკმარისად დიდი ნატურალური m −ისათვის აკმაყოფილებს (2.6.6) და (2.6.15) პირობებს.

ავიღოთ F ფუნქცია შემდეგნაირად: $F = \beta F_0$, სადაც $F_0 \ge 0$, $F_0 \in L_2(D_T)$, $\|F_0\|_{L_2(D_T)} \ne 0$ და $\beta := const > 0$. მაშინ (2.6.15) −ის გათვალისწინებით (2.6.14) უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int\limits_{D_T}|v|^p\varphi dxdt \le \int\limits_{D_T}\frac{|\Box\varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}}dxdt - p'\beta\int\limits_{D_T}F_0\varphi dxdt. \qquad (2.6.16)$$

φ და F_0 ფუნქციებზე დადებული პირობების თანახმად გვექნება

$$0 < k_1 := \int\limits_{D_T}F_0\varphi dxdt < +\infty. \qquad (2.6.17)$$

აღვნიშნოთ $\psi(\beta)$ –ით (2.6.16) უტოლობის მარჯვენა მხარე, რომელიც წრფივია β პარამეტრის მიმართ. მაშინ (2.6.15) – (2.6.17) –დან მივიღებთ

$$\psi(\beta) < 0, \text{ როცა } \beta > \beta_0 \text{ და } \psi(\beta) > 0, \text{ როცა } \beta < \beta_0, \tag{2.6.18}$$

სადაც

$$\psi(\beta) := k_0 - p'\beta k_1, \quad \beta_0 = \frac{k_0}{p'k_1}.$$

(2.6.18) –ის ძალით, როცა $\beta > \beta_0$ (2.6.16) უტოლობის მარჯვენა მხარე უარყოფითია, როცა ამავე უტოლობის მარცხენა მხარე არაუარყოფითია. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ასეთნაირად აგებული F ფუნქციებისათვის (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანას არ გააჩნია განსაზღვრება 2.1.1 –ის აზრით W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

ამრიგად, დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 2.6.1. ვთქვათ, შესრულებულია (2.3.36), (2.3.37), (2.6.1), (2.6.2) პირობები, $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, $F = \beta F_0$, სადაც $F_0 \geq 0$, $F_0 \in L_2(D_T)$, $\|F_0\|_{L_2(D_T)} \neq 0$, $\beta = const > 0$. მაშინ მოიძებნება რიცხვი $\beta_0(F_0, p) > 0$ ისეთი, რომ როცა $\beta > \beta_0$ (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანას არ გააჩნია განსაზღვრება 2.1.1 –ის აზრით W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

2.7. $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანის ლოკალური ამოხსნადობა

განსაზღვრება 2.7.1. ვთქვათ, f, $g \in C(\mathbb{R})$, ამასთან F ფუნქცია განსაზღვრულია D_∞ არეში და $F\big|_{D_T} \in L_2(D_T)$ $\forall T > 0$. (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანას ეწოდება ლოკალურად ამოხსნადი W_2^1 კლასში, თუ არსებობს რიცხვი $T_0 = T_0(F) > 0$, ისეთი რომ (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი განსაზღვრება 2.1.1 –ის აზრით D_T არეში, როცა $T \leq T_0$.

ვთქვათ, g ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.2.14) –ს, ხოლო f ფუნქცია (2.3.36) და (2.3.37) პირობებს. მათი შესრულების შემთხვევაში, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, (2.1.4) – (2.1.7) ამოცანა ეკვივალენტურია (2.3.40) ფუნქციონალური

განტოლების $\overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრცეში. ამასთან (2.3.40) განტოლებაში შემავალი A ოპერატორი უწყვეტია და კომპაქტური $\overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრცეში, აქედან გამომდინარე ამ განტოლების ამონახსნის არსებობისათვის შაუდერის თეორემის თანახმად (V.A.Trenogin, 1993) საკმარისია ვაჩვენოთ ისეთი დადებითი $T_0 = T_0(F)$ რიცხვის არსებობა, რომ $T < T_0$ −სათვის A ოპერატორს $\overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრცის გარკვეული $R: = R(F)$ რადიუსის მქონე ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით ნულოვან ელემენტში

$$B(O; R) := \left\{ w \in \overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}) : \|w\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})} \le R \right\}$$

გადაჰყავს თავის თავში.

როგორც ცნობილია, თუ შესრულებულია (2.3.36) და (2.3.37) პირობები, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას (O.A.Ladyzhenskaya, 1973)

$$\|v\|_{L_{2\alpha}(D_T)} \le c_0 l_{\alpha,n} T^{\delta_{\alpha,n}} \|v\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})} \quad \forall v \in \overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}), \qquad (2.7.1)$$

სადაც

$$l_{\alpha,n} = \left(\frac{\omega_n}{n+1}\right)^{\frac{\delta_{\alpha,n}}{n+1}}, \quad \delta_{\alpha,n} = \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right)(n+1),$$

ω_n არის ერთეულოვანი ბირთვის მოცულობა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, დადებითი მუდმივი c_0 არ არის დამოკიდებული v და T −ზე, ამასთან $\delta_{\alpha,n} > 0$ პირობა ტოლფასია (2.3.37) პირობის.

(2.3.36), (2.3.37), (2.7.1) უტოლობების ძალით შენიშვნა 2.3.2 −ში შემოღებული N_1^0 ოპერატორისათვის, რომელიც მოქმედებს $N_1^0(v) = f(v)$ ფორმულით გვექნება

$$\|N_1^0(v)\|_{L_2(D_T)} = \|f(v)\|_{L_2(D_T)} \le \|\gamma_1 + \gamma_2 |v|^\alpha\|_{L_2(D_T)} \le$$

$$\gamma_1 (mesD_T)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \||v|^\alpha\|_{L_2(D_T)} = \gamma_1 (mesD_T)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \|v\|_{L_{2\alpha}(D_T)}^{\alpha} \le$$

$$\gamma_1(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2\left[c_0 l_{\alpha,n} T^{\delta_{\alpha,n}}\right]^{\alpha} \|v\|^{\alpha}_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})}, \qquad (2.7.2)$$

სადაც $mesD_T$ არის D_T არის მოცულობა და $\frac{\omega_n}{2(n+1)}T^{n+1}$ –ის ტოლია, ω_n არის $\|x\| < 1$ ბირთვის მოცულობა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.2.14) პირობას, მაშინ შენიშვნა 2.3.2 –ში შემოღებული N_2^0 ოპერატორისათვის, რომელიც მოქმედებს შემდეგი ფორმულით $N_2^0(u) = g(u)$ გვექნება

$$\|N_2^0(u)\|_{L_2(D_T)} = \|g(u)\|_{L_2(D_T)} \le \|N_1 + N_2|u|\|_{L_2(D_T)} \le$$

$$N_1(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + N_2\|u\|_{L_2(D_T)}. \qquad (2.7.3)$$

$(2.3.28) - (2.3.35)$ –ის ძალით და $(2.7.2), (2.7.3)$ შეფასებების გათვალისწინებით A ოპერატორისათვის (2.3.40) განტოლებიდან გვექნება

$$\|AU\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} \le \|k_1(-f(v) - g(u) + F)\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} +$$

$$\|k_2(-f(v) - g(u) + F)\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} \le c^2\|(-f(v) - g(u) + F)\|_{L_2(D_T)} +$$

$$+c\|(-f(v) - g(u) + F)\|_{L_2(D_T)} \le c^2\left(\|f(v)\|_{L_2(D_T)} + \|g(u)\|_{L_2(D_T)} + \|F\|_{L_2(D_T)}\right) +$$

$$c\left(\|f(v)\|_{L_2(D_T)} + \|g(u)\|_{L_2(D_T)} + \|F\|_{L_2(D_T)}\right) \le$$

$$(c^2 + c)\left(\gamma_1(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2\left[c_0 l_{\alpha,n} T^{\delta_{\alpha,n}}\right]^{\alpha} \|v\|^{\alpha}_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} +\right.$$

$$\left. N_1(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + N_2\|u\|_{L_2(D_T)} + \|F\|_{L_2(D_T)}\right) \le$$

$$(c^2 + c)\left(\gamma_1(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2\left[c_0 l_{\alpha,n} T^{\delta_{\alpha,n}}\right]^{\alpha} \|v\|^{\alpha}_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} +\right.$$

$$\left. N_1(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + N_2\|u\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} + \|F\|_{L_2(D_T)}\right) \le$$

$$(c^2 + c)\left((\gamma_1 + N_1)(mesD_T)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2\left[c_0 l_{\alpha,n} T^{\delta_{\alpha,n}}\right]^{\alpha} R^{\alpha} + N_2 R + \|F\|_{L_2(D_T)}\right), \qquad (2.7.4)$$

სადაც $\|U\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} = \|u\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} + \|v\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} \leq R$, ხოლო R ფიქსირებული დადებითი რიცხვია.

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$c = \sqrt{T} exp \frac{1}{2} T(1+T), \ \ mesD_T = \frac{\omega_n}{2(n+1)} T^{n+1}$$

და ამასთან $\lim\limits_{T\to\infty} \|F\|_{L_2(D_T)} = 0$ $(2.7.4)$ $-$დან გვექნება

$$\|AU\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} \leq R, \text{ როცა } \|U\|_{\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})} \leq R$$

თუ $T \leq T_0$, სადაც $T_0 = T_0(F) > 0$ საკმარისად მცირე რიცხვია, რაც ნიშნავს, რომ A ოპერატორს $\overset{0}{W_2^1}(D_T,S_T,\Gamma_{1,T})$ სივრცის $B(O;R)$ ბირთვი გადაჰყავს თავის თავში.

ამით დამტკიცებულია შემდეგი

თორემა 7. ვთქვათ, g ფუნქცია აკმაყოფილებს $(2.2.14)$ პირობას, ხოლო f ფუნქცია $(2.3.36)$ და $(2.3.37)$ პირობებს. ამასთან $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$; F ფუნქცია განსაზღვრულია D_∞ არეში და $F\big|_{D_T} \in L_2(D_T)$ $\forall T > 0$. მაშინ $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანა ამოხსნადია ლოკალურად W_2^1 კლასში, ანუ არსებობს რიცხვი $T_0 = T_0(F) > 0$, ისეთი რომ $(2.1.4) - (2.1.7)$ ამოცანას გააჩნია განსაზღვრება $2.1.1$ $-$ის აზრით ერთი მაინც W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში, როცა $T \leq T_0$.

თავი III. სასაზღვრო ამოცანა მაღალი რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის

3.1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ მეოთხე რიგის შემდეგი სახის არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემა

$$\square^2 u_i + f_i(u_1, \dots, u_N) = F_i(x,t), \;\; i = 1, \dots, N, \tag{3.1.1}$$

სადაც $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $f = (f_1, \dots, f_N)$ და $F = (F_1, \dots, F_N)$ მოცემული, ხოლო $u = (u_1, \dots, u_N)$ უცნობი $N-$განზომილებიანი ვექტორ$-$ფუნქციებია, $N \geq 2$.

შემოვიღოთ $D_T : 0 < x < t, \;\; t < T$ კუთხოვანი არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\gamma_{1,T} : x = t, \;\; 0 \leq t \leq T$ მახასიათებელი სეგმენტით, დროითი $\gamma_{2,T} : x = 0, \;\; 0 \leq t \leq T$ და სივრცითი $\gamma_{3,T} : t = T, \;\; 0 \leq x \leq T$ ორიენტაციის სეგმენტებით (იხ. ნახ.1).

(3.1.1) განტოლებისათვის D_T არეში განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა (T. Bibilashvili, 2024), (Bibilashvili, 2024): ვეძებოთ D_T არეში (3.1.1) განტოლების $u = (u_1, \dots, u_N)$ ამონახსნი, რომელიც D_T არის $\partial D_T := \gamma_{1,T} \cup \gamma_{2,T} \cup \gamma_{3,T}$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ ერთგვაროვან პირობებს

$$u|_{\gamma_{1,T}} := u(t,t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{3.1.2}$$

$$u|_{\gamma_{2,T}} := u(0,t) = 0, \;\; u_x|_{\gamma_{2,T}} := u_x(0,t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{3.1.3}$$

$$u|_{\gamma_{3,T}} := u(x,T) = 0, \;\; u_t|_{\gamma_{3,T}} := u_t(x,T) = 0. \tag{3.1.4}$$

შემოვიღოთ შემდეგი სივრცე

$$\overset{0}{C^k}(\overline{D}_T, \partial D_T) := \{ v \in C^k(\overline{D}_T) : v|_{\gamma_{1,T}} = 0, \;\; v|_{\gamma_{2,T}} = v_x|_{\gamma_{2,T}} = 0,$$

$$v|_{\gamma_{3,T}} = v_t|_{\gamma_{3,T}} = 0 \}, \;\; k \geq 1. \tag{3.1.5}$$

ვთქვათ, $u \in \overset{0}{C^4}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ არის $(3.1.1) - (3.1.4)$ სასაზღვრო ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ნებისმიერი $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \overset{0}{C^2}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ საცდელი

ფუნქციისათვის ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით ადვილად მოწმდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ინტეგრალურ ტოლობას

$$\int\limits_{D_T} \varphi \, \square^2 u dxdt = \int\limits_{\partial D_T} \varphi \frac{\partial}{\partial N} \square u ds - \int\limits_{\partial D_T} \frac{\partial \varphi}{\partial N} \square u ds + \int\limits_{D_T} \square u \square \varphi dxdt, \qquad (3.1.6)$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial N} = \nu_t \frac{\partial}{\partial t} - \nu_x \frac{\partial}{\partial x}$ არის წარმოებული კონორმალის მიმართულებით, $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ არის ∂D_T −ის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი. რადგან $\varphi \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$, ამიტომ ცხადია, რომ

$$\varphi|_{\gamma_{2,T} \cup \gamma_{3,T}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N}|_{\gamma_{2,T} \cup \gamma_{3,T}} = 0. \qquad (3.1.7)$$

ამასთან, იმის გათალისწინებით, რომ $\gamma_{1,T}$ მახასიათებელ წირზე $\frac{\partial}{\partial N}$ წარმოადგენს წარმოებულს ამ წირის მხები მიმართულებით, ამიტომ იქიდან, რომ

$$\varphi \big|_{\gamma_{1,T}} = 0 \qquad (3.1.8)$$

აგრეთვე გამომდინარეობს ტოლობა

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} \big|_{\gamma_{1,T}} = 0. \qquad (3.1.9)$$

(3.1.7) − (3.1.9) −ის გათვალისწინებით (3.1.6) −დან მივიღებთ

$$\int\limits_{D_T} \varphi \square^2 u dxdt = \int\limits_{D_T} \square u \square \varphi dxdt. \qquad (3.1.10)$$

რადგან ვექტორ−ფუნქცია u დაშვების თანახმად წარმოადგენს (3.1.1) სისტემის კლასიკურ ამონახსნს, რომელიც ვექტორულად ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\square^2 u = -f(u) + F(x,t), \;\; (x,t) \in D_T, \qquad (3.1.11)$$

ამიტომ ნებისმიერი $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$ ვექტორ−ფუნქციისათვის

(3.1.10) −დან გამომდინარეობს შემდეგი ინტეგრალური ტოლობა

$$\int\limits_{D_T} \square u \square \varphi dxdt + \int\limits_{D_T} f(u) \varphi dxdt = \int\limits_{D_T} F \varphi dxdt, \qquad (3.1.12)$$

სადაც ინტეგრალის ქვეშ გამოსახულებებში ვექტორ–ფუნქციათა ნამრავლი უნდა გავიგოთ როგორც სტანდარტული სკალარული ნამრავლი $\mathbb{R}^N$ ევკლიდურ სივრცეში, ვთქვათ: $\square u \square \varphi = \sum_{i=1}^{N} \square u_i \square \varphi_i$.

შემოვიღოთ $\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ ჰილბერტის სივრცე, როგორც კლასიკური $\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$ სივრცის გასრულება შემდეგი ნორმით

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T),} := \int_{D_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (\square u)^2\right] dxdt, \qquad (3.1.13)$$

სადაც $u^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2$.

(3.1.13) –დან გამომდინარეობს, რომ თუ $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$, მაშინ $u \in \overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$ და $\square u \in L_2(D_T)$. აქ $W_2^1(D_T)$ წარმოადგენს სობოლევის ცნობილ სივრცეს, რომელიც შედგება $L_2(D_T)$ სივრცის იმ ელემენტებისაგან, რომლებსაც განზოგადებული პირველი რიგის კერძოწარმოებულები გააჩნიათ x და t ცვლადების მიმართ იმავე $L_2(D_T)$ სივრციდან. ამასთან $\overset{0}{W}{}^1_2(D_T) := \{u \in W_2^1(D_T) : u\big|_{\partial D_T} = 0\}$, სადაც ტოლობა $u\big|_{\partial D_T} = 0$ კვალის თეორიის აზრით უნდა გავიგოთ (O.A.Ladyzhenskaya, 1973).

ინტეგრალური (3.1.12) ტოლობა იდება საფუძვლად (3.1.1) – (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის განსაზღვრისას.

ქვემოთ (3.1.1) სისტემაში შემავალი f ვექტორ–ფუნქციისაგან მოვითხოვთ, რომ

$$f \in C(\mathbb{R}^N), \ |f(u)| \leq M_1 + M_2|u|^\alpha, \ \alpha = const > 1, \ u \in \mathbb{R}^N, \qquad (3.1.14)$$

სადაც $|\cdot|$ არის ნორმა $\mathbb{R}^N$ სივრცეში, $M_i = const \geq 0, \ i = 1,2$.

შენიშვნა 3.1.1. რადგან $D_T \subset \mathbb{R}^2$ კუთხოვანი არის განზომილება ორის ტოლია, ამიტომ ჩართვის ოპერატორი

$$I: W_2^1(D_T) \to L_q(D_T), \qquad (3.1.15)$$

როგორც ცნობილია წარმოადგენს წრფივ და კომპაქტურ ოპერატორს ნებისმიერი ფიქსირებული $q = const > 1$ –ისათვის (O.A.Ladyzhenskaya, 1973), ამასთან

ნემიცკის ოპერატორი $K: L_q(D_T) \to L_2(D_T)$, რომელიც $Ku = f(u)$ ფორმულით მოქმედებს, სადაც $u := (u_1, \dots, u_N) \in L_q(D_T)$, ხოლო ვექტორ–ფუნქცია $f := (f_1, \dots, f_N)$ აკმაყოფილებს (3.1.14) პირობას, არის უწყვეტი და შემოსაზღვრული, როცა $q \geq 2\alpha$ (S.Fuchik, 1980). ამიტომ, თუ ავიღებთ $q = 2\alpha$, მაშინ ოპერატორი

$$K_0 = KI: W_2^1(D_T) \to L_2(D_T) \tag{3.1.16}$$

იქნება უწყვეტი და კომპაქტური, სადაც I არის ჩართვის ოპერატორი (3.1.15), აქედან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $u \in W_2^1(D_T)$, მაშინ $f(u) \in L_2(D_T)$ და იქიდან, რომ $W_2^1(D_T)$ სივრცეში $u^m \to u$ გამომდინარეობს, რომ $L_2(D_T)$ სივრცეში $f(u^m) \to f(u)$.

აქ და ქვემოთ ყველგან იგულისხმება, რომ $v := (v_1, \dots, v_N)$ ვექტორ–ფუნქციის მიკუთვნება რაიმე X სივრცეს ნიშნავს თითოეული v_i, $1 \leq i \leq N$, კომპონენტის მიკუთვნებას X სივრცეს.

განსაზღვრება 3.1.1. ვთქვათ, f ვექტორ–ფუნქცია აკმაყოფილებს (3.1.14) პირობას, ხოლო $F \in L_2(D_T)$. ვექტორ–ფუნქციას $u \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^1(D_T)$ ეწოდება (3.1.1) – (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნი, თუ ნებისმიერი $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^1(D_T)$ ვექტორ–ფუნქციისათვის მართებულია (3.1.12) ინტეგრალური ტოლობა, ანუ

$$\int_{D_T} \square u \square \varphi dxdt + \int_{D_T} f(u) \varphi dxdt = \int_{D_T} F \varphi dxdt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^1(D_T). \tag{3.1.17}$$

აღვნიშნოთ, რომ შენიშვნა 3.1.1 –ის ძალით

$$\int_{D_T} f(u) \varphi dxdt$$

ინტეგრალი (3.1.17) ტოლობაში კორექტულად არის განსაზღვრული, რადგან, თუ $u \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^1(D_T)$, მაშინ $f(u) \in L_2(D_T)$ და აქედან გამომდინარე, $f(u)\varphi \in L_1(D_T)$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $(3.1.1)-(3.1.4)$ ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნი u განსაზღვრება 3.1.1 −ის აზრით ეკუთვნის $\overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T,\partial D_T)$ კლასს, მაშინ ის იქნება ამ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

3.2. ჰილბერტის სივრცეში $(3.1.1)-(3.1.4)$ სასაზღვრო ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე

მართებულია შემდეგი

ლემა 3.2.1. ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)}\le c\|\Box u\|_{L_2(D_T)}\quad \forall u\in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T), \tag{3.2.1}$$

სადაც ნორმა $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ სივრცეში (3.1.13) ტოლობით განისაზღვრება, ხოლო დადებითი c მუდმივი არ არის დამოკიდებული u −ზე.

დამტკიცება. რადგან $\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T,\partial D_T)$ სივრცე მკვრივია $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ სივრცეში, ამიტომ საკმარისია (3.2.1) უტოლობა დავამტკიცოთ, როცა $u\in\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T,\partial D_T)$, სადაც $\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T,\partial D_T)$ სივრცე (3.1.5) ტოლობითაა განსაზღვრული.

ავიღოთ ნებისმიერი $u\in\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T,\partial D_T)$ ვექტორ−ფუნქცია და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$v:=\Box u. \tag{3.2.2}$$

თუ გავამრავლებთ სკალარულად (3.2.2) ტოლობის ორივე მხარეს $\frac{\partial u}{\partial t}$ ვექტორ−ფუნქციაზე და ვაინტეგრებთ $D_\tau:=\{(x,t)\in D_T: t<\tau\}$ არეზე, სადაც $0<\tau\le T$, გვექნება

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt-\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-\int\limits_{D_\tau} v\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=0. \qquad (3.2.3)$$

მიღებული (3.2.3) ტოლობის მარცხენა მხარის პირველ ორ წევრზე გრინის ფორმულების და ნაწილობით ინტეგრების გამოყენებით, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \nu_t ds, \qquad (3.2.4)$$

$$-\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=-\int\limits_{\partial D_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\nu_x ds+\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dxdt=$$

$$-\int\limits_{\partial D_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\nu_x ds+\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt=$$

$$-\int\limits_{\partial D_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\nu_x ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \nu_t ds, \qquad (3.2.5)$$

სადაც $\nu=(\nu_x,\nu_t)$ არის ∂D_τ −ის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი.

რადგან $\partial D_\tau=\gamma_{1,\tau}\cup\gamma_{2,\tau}\cup\omega_\tau$, სადაც $\gamma_{i,\tau}=\gamma_{i,T}\cap\{t\le\tau\}$, $i=1,2$, და $\omega_\tau:=\partial D_\tau\cap\{t=\tau\}=\{t=\tau,\ 0\le x\le\tau\}$, ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$(\nu_x,\nu_t)\big|_{\gamma_{1,\tau}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (3.2.6)$$

$$(\nu_x,\nu_t)\big|_{\gamma_{2,\tau}}=(-1,0),\quad (\nu_x,\nu_t)\big|_{\omega_\tau}=(0,1), \qquad (3.2.7)$$

$$(\nu_x^2-\nu_t^2)\big|_{\gamma_{1,\tau}}=0. \qquad (3.2.8)$$

იქიდან, რომ $u\in\overset{0}{C}{}^2(\bar{D}_T,\partial D_T)$ გამომდინარეობს ტოლობა $u\big|_{\gamma_{2,T}}=0$ და მაშასადამე $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{\gamma_{2,T}}=0$. ამის გათვალისწინებით, თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.2.6) − (3.2.8) ტოლობებს, (3.2.4) და (3.2.5) −დან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \nu_t ds=\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \nu_t ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{2,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \nu_t ds=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 v_t ds, \qquad (3.2.9)$$

$$-\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=-\int\limits_{\partial D_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}v_x ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 v_t ds=$$

$$-\int\limits_{\omega_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}v_x dx-\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}v_x ds-\int\limits_{\gamma_{2,\tau}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}v_x ds+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 v_t dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 v_t ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{2,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 v_t ds=$$

$$0-\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}v_x ds-0+\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot 1dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 v_t ds+0=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 v_t ds-\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}v_x ds. \qquad (3.2.10)$$

(3.2.8) −ის გათვალისწინებით (3.2.9) და (3.2.10) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt-\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx+$$

$$\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{1}{2v_t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}v_t-\frac{\partial u}{\partial t}v_x\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(v_t^2-v_x^2)\right]ds=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx+\int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{1}{2v_t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}v_t-\frac{\partial u}{\partial t}v_x\right)^2 ds. \qquad (3.2.11)$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\left(v_t\frac{\partial}{\partial x}-v_x\frac{\partial}{\partial t}\right)$ წარმოადგენს წარმოებულს მხები მიმართულებით, ანუ შიგა დიფერენციალურ ოპერატორს $\gamma_{1,\tau}$ წირზე, ამიტომ $u\big|_{\gamma_{1,\tau}}=0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{\partial u}{\partial x}v_t-\frac{\partial u}{\partial t}v_x=0$, რის შედეგად (3.2.11) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt-\int\limits_{D_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx. \qquad (3.2.12)$$

(3.2.3) და (3.2.12) −დან გვექნება

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx=2\int\limits_{D_\tau}v\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\,,\quad 0<\tau\leq T. \tag{3.2.13}$$

რადგან $u\big|_{\gamma_{1,\tau}}=u(t,t)=0,\ \ 0<t\leq T,$ ამიტომ

$$u(x,\tau)=\int\limits_x^\tau\frac{\partial u}{\partial t}(x,\sigma)d\sigma,\quad (x,\tau)\in D_T,$$

საიდანაც კოშის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$u^2(x,\tau)\leq\int\limits_x^\tau 1^2d\sigma\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,\sigma)d\sigma=$$

$$(\tau-x)\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,\sigma)d\sigma\leq T\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,\sigma)d\sigma, \tag{3.2.14}$$

სადაც გამოყენებული იყო ის ფაქტი, რომ თუ $(x,\tau)\in D_T,$ მაშინ $x<\tau<T.$

ინტეგრებით x ცვლადის მიმართ (3.2.14) −დან გვექნება

$$\int\limits_{\omega_\tau}u^2dx=\int\limits_0^\tau u^2(x,\tau)dx\leq$$

$$T\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_x^\tau\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,\sigma)d\sigma\right]dx=T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxdt. \tag{3.2.15}$$

(3.2.13) −დან მარტივი უტოლობის $2v\frac{\partial u}{\partial t}\leq v^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ გამოყენებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx\leq\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxdt+\int\limits_{D_\tau}v^2dxdt. \tag{3.2.16}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$w(\tau)=\int\limits_{\omega_\tau}\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx \tag{3.2.17}$$

და შევკრიბავთ (3.2.15) და (3.2.16) უტოლობებს, გვექნება

$$w(\tau)\leq T\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxdt+\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxdt+\int\limits_{D_\tau}v^2dxdt\leq$$

$$(1+T)\int\limits_{D_\tau}\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdt+\int\limits_{D_\tau}v^2\,dxdt=$$

$$(1+T)\int\limits_0^\tau w(\sigma)d\sigma+\int\limits_{D_\tau}v^2\,dxdt,\ \ 0<\tau\le T. \tag{3.2.18}$$

გრონუოლის ლემის გამოყენებით (3.2.18) −დან მივიღებთ

$$w(\tau)\le\left[\int\limits_{D_\tau}v^2\,dxdt\right]e^{(1+T)\tau}\le$$

$$\left[\int\limits_{D_\tau}v^2\,dxdt\right]e^{(1+T)T}\le\|v\|^2_{L_2(D_T)}e^{(1+T)T}. \tag{3.2.19}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.1.13), (3.2.2) და (3.2.17) აღნიშვნებს და (3.2.19) უტოლობას, გვექნება

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)}=\int\limits_{D_T}\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+(\Box u)^2\right]dxdt=$$

$$\int\limits_{D_T}\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt+\int\limits_{D_T}v^2\,dxdt=$$

$$\int\limits_0^T w(\tau)d\tau+\|v\|^2_{L_2(D_T)}\le\int\limits_0^T\|v\|^2_{L_2(D_T)}e^{(1+T)T}d\tau+$$

$$\|v\|^2_{L_2(D_T)}=\left[1+Te^{(1+T)T}\right]\|v\|^2_{L_2(D_T)},$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)}\le\left[1+Te^{(1+T)T}\right]^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(D_T)},$$

ანუ რადგან $v=\Box u$ მივიღებთ (3.2.1) უტოლობას, სადაც

$$c=\left[1+Te^{(1+T)T}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.20}$$

ამით დამტკიცებულია ლემა 3.2.1.

ქვემოთ ჩვენ ჯერ განვიხილავთ (3.1.1) − (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანის წრფივ შემთხვევას, ანუ როცა $f=0$. ამ შემთხვევაში ანალოგიურად შემოდის სუსტი

განზოგადებული $u \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)$ ამონახსნის ცნება შემდეგი ინტეგრალური იგივეობის სახით

$$(u,\varphi)_{\square} \coloneqq \int_{D_T} \square u \square \varphi dxdt = \int_{D_T} F\varphi dxdt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T). \qquad (3.2.21)$$

(3.1.13) –ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\left|(\square u, \square \varphi)_{L_2(D_T)}\right| = \left| \int_{D_T} \square u \square \varphi dxdt \right| \leq$$

$$\|\square u\|_{L_2(D_T)} \|\square \varphi\|_{L_2(D_T)} \leq \|u\|_{\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)} \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)}. \qquad (3.2.22)$$

მეორეს მხრივ, თუ მხედველობაში მივიღებთ კოში–ბუნიაკოვსკისა და (3.2.1) უტოლობას, გვექნება

$$\left|(u,\varphi)_{\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)}\right| \leq \|u\|_{\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)} \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)} \leq$$

$$c^2 \|\square u\|_{L_2(D_T)} \|\square \varphi\|_{L_2(D_T)}. \qquad (3.2.23)$$

(3.2.22) და (3.2.23) –დან გამომდინარეობს, რომ (3.2.21) –ში განსაზღვრული ორადწრფივი ფორმა

$$(u,\varphi)_{\square} \coloneqq \int_{D_T} \square u \square \varphi dxdt$$

წარმოადგენს ევკლიდურ სკალარულ ნამრავლს $\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)$ ჰილბერტის სივრცეში.

ამასთან, რადგან $\forall F \in L_2(D_T)$ და $\forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)$

$$\left| \int_{D_T} F\varphi dxdt \right| \leq \|F\|_{L_2(D_T)} \|\varphi\|_{L_2(D_T)} \leq \|F\|_{L_2(D_T)} \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)} \qquad (3.2.24)$$

და, მაშასადამე, $\int_{D_T} F\varphi dxdt$ წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს $\overset{0}{W}{}_{2,\square}^{1}(D_T)$ ჰილბერტის სივრცეში, ამიტომ რისის თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი

ვექტორ–ფუნქცია $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$, რომელიც აკმაყოფილებს (3.2.21) ინტეგრალურ იგივეობას. აქედან გამომდინარე, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $u = L_0^{-1}F$, მივიღებთ, რომ $(3.1.1) - (3.1.4)$ –ის შესაბამის წრფივ ამოცანას შეესაბამება წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი

$$L_0^{-1}: L_2(D_T) \longrightarrow \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T),$$

რომლის ნორმისათვის (3.2.24) –ის ძალით გვექნება

$$\|L_0^{-1}\|_{L_2(D_T)\longrightarrow \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \leq 1. \tag{3.2.25}$$

ამრიგად, რადგან $u = L_0^{-1}F \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ $\forall F \in L_2(D_T)$, ამიტომ (3.117) ინტეგრალური იგივეობა განსაზღვრება 3.1.1 –დან, რომელიც ეკვივალენტურია $(3.1.1) - (3.1.4)$ სასაზღვრო ამოცანის $\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ ჰილბერტის სივრცეში, შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი არაწრფივი ფუნქციონალური განტოლების სახით

$$u = L_0^{-1}[-f(u) + F]. \tag{3.2.26}$$

3.3. $(3.1.1) - (3.1.4)$ ამოცანის ამონახსნის არსებობა

განვიხილოთ შემდეგი პირობა

$$\lim_{|u|\to\infty} inf \frac{uf(u)}{|u|^2} \geq 0, \tag{3.3.1}$$

სადაც

$$uf(u) = \sum_{i=1}^{N} u_i f_i(u), \ \ |u|^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2.$$

ლემა 3.3.1. ვთქვათ $F \in L_2(D_T)$ და შესრულებულია (3.1.14) და (3.3.1) პირობები. მაშინ $(3.1.1) - (3.1.4)$ სასაზღვრო ამოცანის ნებისმიერი სუსტი $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ განზოგადებული ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასება

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \leq c_1\|F\|_{L_2(D_T)} + c_2, \tag{3.3.2}$$

სადაც $c_1 > 0$ და $c_2 \geq 0$ მუდმივები არ არიან დამოკიდებული u და F −ზე.

დამტკიცება. რადგან $f \in C(\mathbb{R}^N)$, ამიტომ (3.3.1) −დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ −ისათვის არსებობს რიცხვი $M_\varepsilon \geq 0$ ისეთი, რომ

$$uf(u) \geq -M_\varepsilon - \varepsilon u^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \tag{3.3.3}$$

სადაც $u^2 = |u|^2$.

თუ (3.1.17) ტოლობაში ავიღებთ $\varphi = u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ და მხედველობაში მივიღებთ (3.1.14) და (3.3.3) პირობებს, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ −ის გვექნება

$$\|\square u\|^2_{L_2(D_T)} = \int_{D_T} (\square u)^2 dxdt = -\int_{D_T} uf(u)dxdt + \int_{D_T} Fudxdt \leq$$

$$M_\varepsilon mes D_T + \varepsilon \int_{D_T} u^2 dxdt + \int_{D_T} \left(\frac{1}{4\varepsilon}F^2 + \varepsilon u^2\right) dxdt \leq$$

$$\frac{1}{4\varepsilon}\int_{D_T} F^2 dxdt + M_\varepsilon mes D_T + 2\varepsilon\|\square u\|^2_{L_2(D_T)} \leq$$

$$\frac{1}{4\varepsilon}\int_{D_T} F^2 dxdt + M_\varepsilon mes D_T + 2\varepsilon\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)}. \tag{3.3.4}$$

(3.2.1) −ის გათვალისწინებით (3.3.4) −დან მივიღებთ

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \leq c^2\|\square u\|^2_{L_2(D_T)} \leq \frac{c^2}{4\varepsilon}\int_{D_T} F^2 dxdt +$$

$$c^2 M_\varepsilon mes D_T + 2c^2\varepsilon\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)},$$

საიდანაც, როცა $\varepsilon = \frac{1}{4c^2}$ გვექნება

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \leq 2c^4\|F\|^2_{L_2(D_T)} + 2c^2 M_\varepsilon mes D_T. \tag{3.3.5}$$

(3.3.5) უტოლობიდან გამომდინარეობს (3.3.2) აპრიორული შეფასება, როცა $c_1^2 = 2c^4$ და $c_2^2 = 2c^2 M_\varepsilon mesD_T$, სადაც $\varepsilon = \frac{1}{4c^2}$. ამით დამტკიცებულია ლემა 3.3.1.

შენიშვნა 3.3.1. რადგან (3.1.13) –ის ძალით $\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ სივრცე უწყვეტად არის ჩართული $\overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$ სივრცეში, ამასთან, როცა შესრულებულია (3.1.14) პირობა, შენიშვნა 3.1.1 –ში მოტანილი (3.1.15) ჩართვის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ ოპერატორი

$$K_1 = KII_1 \colon \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T) \longrightarrow L_2(D_T), \tag{3.3.6}$$

სადაც $I_1 \colon \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T) \longrightarrow \overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$ არის ჩართვის ოპერატორი, აგრეთვე იქნება უწყვეტი და კომპაქტური.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.3.6) –ს, მაშინ (3.2.26) ფუნქციონალური განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით

$$u = Au := L_0^{-1}(K_1 u + F). \tag{3.3.7}$$

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, თუ გავითვალისწინებთ (3.2.25) და შენიშვნა 3.3.1 –ს, დავასკვნით, რომ ოპერატორი

$$A \colon \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T) \longrightarrow \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$$

(3.3.7) –დან არის უწყვეტი და კომპაქტური. ამავე დროს შესაბამისად (3.3.2) აპრიორული შეფასებისა ლემა 3.3.1 –დან, სადაც $c_1^2 = 2c^4$ და $c_2^2 = 2c^2 M_\varepsilon mesD_T$, ხოლო c მუდმივი მოცემულია (3.2.20) ტოლობით, ყოველი $\tau \in [0,1]$ რიცხვისათვის და ამ τ პარამეტრის შემცველი $u = \tau Au$ ნებისმიერი ამონახსნისათვის მართებულია (3.3.2) აპრიორული შეფასება იგივე c_1 და c_2 მუდმივებით, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული u, F და τ –ზე. ამიტომ ლერე–შაუდერის თეორემის თანახმად უძრავი წერტილის შესახებ (V.A.Trenogin, 1993) (3.3.7) განტოლებას და მაშასადამე (3.1.1) – (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანას

გააჩნია ერთი მაინც სუსტი განზოგადებული ამონახსნი $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,1}(D_T)$. ამრიგად, მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.3.1. ვთქვათ, შესრულებულია (3.1.14) და (3.3.1) პირობები. მაშინ ნებისმიერი $F = (F_1, \dots, F_N) \in L_2(D_T)$ ვექტორ−ფუნქციისათვის არსებობს (3.1.1) − (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანის ერთი მაინც სუსტი განზოგადებული $u = (u_1, \dots, u_N)$ ამონახსნი $\overset{0}{W}{}^1_{2,□}(D_T)$ სივრციდან.

3.4. $(3.1.1) - (3.1.4)$ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა

განვიხილოთ f ვექტორ−ფუნქციაზე დადებული შემდეგი პირობა

$$\big(f(u) - f(v)\big)(u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4.1}$$

თეორემა 3.4.1. ვთქვათ, f ვექტორ−ფუნქცია აკმაყოფილებს (3.1.14) და (3.4.1) პირობებს. მაშინ ნებისმიერი $F \in L_2(D_T)$ ვექტორ−ფუნქციისათვის (3.1.1) − (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი განზოგადებული ამონახსნი $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,□}(D_T)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $F \in L_2(D_T)$, ხოლო u_1 და u_2 (3.1.1) − (3.1.4) ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნებია $\overset{0}{W}{}^1_{2,□}(D_T)$ სივრციდან, ანუ შესაბამისად (3.1.17) ინტეგრალური იგივეობისა

$$\int\limits_{D_T} □u_i□\varphi dxdt + \int\limits_{D_T} f(u_i)\varphi dxdt = \int\limits_{D_T} F\varphi dxdt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,□}(D_T), \ \ i = 1,2. \tag{3.4.2}$$

(3.4.2) −დან $v = u_2 - u_1$ სხვაობისათვის გვექნება

$$\int\limits_{D_T} □v□\varphi dxdt = -\int\limits_{D_T} \big(f(u_2) - f(u_1)\big)\varphi dxdt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,□}(D_T). \tag{3.4.3}$$

თუ (3.4.3) ტოლობაში ავიღებთ $\varphi = v \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ მივიღებთ

$$\int_{D_T} (\Box v)^2 dxdt = -\int_{D_T} \big(f(u_2) - f(u_1)\big)(u_2 - u_1) dxdt. \tag{3.4.4}$$

(3.4.1) და (3.4.4) −დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{D_T} (\Box v)^2 dxdt \le 0,$$

და, მაშასადამე, $\Box v = 0$, საიდანაც (3.1.13) −ის ძალით მივიღებთ $v = 0$, ანუ $u_2 = u_1$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 3.3.1 და 3.4.1 −დან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.4.2. ვთქვათ შესრულებულია (3.1.14), (3.3.1) და (3.4.1) პირობები. მაშინ ნებისმიერი $F = (F_1, \dots, F_N) \in L_2(D_T)$ ვექტორ−ფუნქციისათვის არსებობს (3.1.1) − (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი სუსტი განზოგადებული $u = (u_1, \dots, u_N)$ ამონახსნი $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ სივრციდან .

3.5. $(3.1.1) - (3.1.4)$ ამოცანის ამონახსნის არარსებობის ზოგიერთი შემთხვევა

განვიხილოთ $f := (f_1, \dots, f_N)$ ვექტორ−ფუნქციაზე შემდეგი პირობა: არსებობს რიცხვები $l_1, \dots, l_N$, $\sum_{i=1}^N |l_i| \ne 0$, ისეთი რომ

$$\sum_{i=1}^N l_i f_i(u) \le -\left|\sum_{i=1}^N l_i u_i\right|^\beta \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad \beta = const > 1 \ . \tag{3.5.1}$$

თეორემა 3.5.1. ვთქვათ ვექტორ−ფუნქცია $f = (f_1, \dots, f_N)$ აკმაყოფილებს (3.1.14) და (3.5.1) პირობებს, ამასთან $F^0 = (F_1^0, \dots, F_N^0) \in L_2(D_T)$, $G = \sum_{i=1}^N l_i F_i^0 > 0$, ხოლო $F = \mu F^0$, $\mu = const > 0$. მაშინ არსებობს რიცხვი $\mu_0 = \mu_0(G, \beta) > 0$ ისეთი, რომ

$(3.1.1)-(3.1.4)$ ამოცანას არ გააჩნია სუსტი განზოგადებული ამონახსნი $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$, როცა $\mu > \mu_0$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ თეორემის პირობები შესრულებულია და $(3.1.1)-(3.1.4)$ ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნი $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ არსებობს ნებისმიერი ფიქსირებული $\mu > 0$ −თვის. დავუშვათ აგრეთვე, რომ $(3.1.17)$ ინტეგრალურ ტოლობაში $\varphi = (l_1\varphi_0, \dots, l_N\varphi_0)$, სადაც სკალარული φ_0 ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\varphi_0 \geq 0,\ \ \varphi_0 \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T), \tag{3.5.2}$$

სადაც $\overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T) \subset \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ სივრცე განსაზღვრულია $(3.1.5)$ ტოლობით.

თუ ავიღებთ $v = \sum_{i=1}^{N} l_i\, u_i$ და მხედველობაში მივიღებთ $(3.5.1)$ და $(3.5.2)$, $(3.1.17)$ −დან გვექნება

$$\int\limits_{D_T} \square u \square \varphi_0 dxdt \geq \int\limits_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 dxdt + \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 dxdt. \tag{3.5.3}$$

რადგან $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$, $\varphi_0 \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T)$, ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად ადვილად ვრწმუნდებით, რომ

$$\int\limits_{D_T} \square u \square \varphi_0 dxdt = \int\limits_{D_T} u \square^2 \varphi_0 dxdt. \tag{3.5.4}$$

$(3.5.4)$ −ის ძალით $(3.5.3)$ უტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\int\limits_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 dxdt \leq \int\limits_{D_T} v \square^2 \varphi_0 dxdt - \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 dxdt. \tag{3.5.5}$$

ქვემოთ ვისარგებლოთ საცდელ ფუნქციათა მეთოდით (E. Mitidieri, 2001) და საცდელი ფუნქციის სახით ავიღოთ $\varphi_0 \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\varphi_0 \big|_{D_T} > 0$. თუ იუნგის უტოლობაში

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{\beta} a^{\beta} + \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} b^{\beta'}, \quad a, b > 0, \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

სადაც ε დადებითი პარამეტრია, ავიღებთ $a = |v| \varphi_0^{\frac{1}{\beta}}$, $b = |\square^2 \varphi_0| \varphi_0^{\frac{-1}{\beta}}$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\frac{\beta'}{\beta} = \beta' - 1$ გვექნება

$$|v \square^2 \varphi_0| = |v| \varphi_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{|\square^2 \varphi_0|}{\varphi_0^{\frac{1}{\beta}}} \leq \frac{\varepsilon}{\beta} |v|^{\beta} \varphi_0 + \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \frac{|\square^2 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \ . \tag{3.5.6}$$

(3.5.5) და (3.5.6) $-$დან მივიღებთ

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \int_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 dxdt \leq \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \int_{D_T} \frac{|\square^2 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} dxdt - \mu \int_{D_T} G \varphi_0 dxdt,$$

საიდანაც, როცა $\varepsilon < \beta$ გვექნება

$$\int_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 dxdt \leq \frac{\beta}{(\beta - \varepsilon) \beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \int_{D_T} \frac{|\square^2 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} dxdt - \frac{\beta \mu}{\beta - \varepsilon} \int_{D_T} G \varphi_0 dxdt. \tag{3.5.7}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\beta' = \frac{\beta}{\beta - 1}$, $\beta = \frac{\beta'}{\beta' - 1}$ და $\min\limits_{0<\varepsilon<\beta} \frac{\beta}{(\beta-\varepsilon)\beta'\varepsilon^{\beta'-1}} = 1$, რომელიც მიიღწევა, როცა $\varepsilon = 1$, მაშინ (3.5.7) $-$დან გვექნება

$$\int_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 dxdt \leq \int_{D_T} \frac{|\square^2 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} dxdt - \beta' \mu \int_{D_T} G \varphi_0 dxdt. \tag{3.5.8}$$

ადვილი საჩვენებელია ისეთი საცდელი φ_0 ფუნქციის არსებობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\varphi_0 \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T), \ \ \varphi_0 \big|_{D_T} > 0, \ \ \varkappa_0 := \int_{D_T} \frac{|\square^2 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} dxdt < +\infty. \tag{3.5.9}$$

მართლაც, ადვილად შესამოწმებელია, რომ ფუნქცია

$$\varphi_0(x,t) = [x(t-x)(T-t)]^m$$

საკმარისად დიდი დადებითი m რიცხვისათვის აკმაყოფილებს (3.5.9) პირობებს.

რადგან თეორემაში მოყვანილი პირობის თანახმად $G \in L_2(D_T)$, $G > 0$, ამასთან $mesD_T < +\infty$ და $\varphi_0 \big|_{D_T} > 0$ ამიტომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$0 < \varkappa_1 := \int\limits_{D_T} G\varphi_0 dxdt < +\infty. \tag{3.5.10}$$

აღვნიშნოთ $g(\mu)$ −თი (3.5.8) უტოლობის მარჯვენა მხარე, რომელიც არის წრფივი ფუნქცია μ პარამეტრის მიმართ. ამის გათვალისწინებით (3.5.9) და (3.5.10) −ის ძალით გვექნება

$$g(\mu) < 0, \text{ როცა } \mu > \mu_0 \text{ და } g(\mu) > 0, \text{ როცა } \mu < \mu_0 , \tag{3.5.11}$$

სადაც

$$g(\mu) = \varkappa_0 - \beta'\mu\varkappa_1 , \;\; \mu_0 = \frac{\varkappa_0}{\beta'\varkappa_1} > 0 .$$

(3.5.11) −დან გამომდინარეობს, რომ (3.5.8) უტოლობის მარჯვენა მხარე უარყოფითია, როცა ამავე დროს მისი მარცხენა მხარე არაუარყოფითია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

შევნიშნოთ, რომ როცა (3.5.1) პირობა შესრულებულია, მაშინ (3.3.1) პირობა იქნება დარღვეული. მართლაც, ამისათის საკმარისია ავიღოთ $u = \lambda(l_1, \dots, l_N)$, როცა $\lambda \to +\infty$.

შენიშვნა 3.5.1. თეორემა 3.5.1 დარჩება მართებული, თუ (3.5.1) პირობას შევცვლით უფრო ზოგადი პირობით:

$$\sum_{i=1}^{N} l_i \, f_i(u) \le -d_0 \left| \sum_{i=1}^{N} l_i \, u_i \right|^{\beta} \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad \beta = const > 1 \;, \tag{3.5.12}$$

სადაც $d_0 = const > 0$. ნამდვილად, (3.5.12) პირობა დაიყვანება (3.5.1) პირობაზე, თუ l_i −ის შევცვლით $\tilde{l}_i$ −ით შემდეგი ფორმულით $l_i = \lambda\tilde{l}_i$, სადაც $\lambda = d_0^{\frac{1}{1-\beta}}$. ამ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ (3.5.1) პირობას, სადაც l_i −ის ნაცვლად ეწერება $\tilde{l}_i$. ახლა მოვიყვანოთ f ვექტორ−ფუნქციათა ერთი კლასი, რომლებისთვისაც შესრულებულია (3.5.12) პირობა:

$$f_i(u_1, \dots, u_N) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \left|u_j\right|^{\beta_{ij}} + b_i \,, \;\; i = 1, .., N, \tag{3.5.13}$$

სადაც a_{ij}, β_{ij} და b_i მუდმივები აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს

$$a_{ij} > 0, \quad \beta_{ij} = const > 1\,, \quad \sum_{i=1}^{N} b_i > 0, \;\; i,j = 1, \dots, N. \tag{3.5.14}$$

(3.5.13) შემთხვევაში ჩვენ უნდა ავიღოთ $l_1 = l_2 = \cdots = l_N = -1$. მართლაც (3.5.14) $-$ის ძალით შეიძლება a_0 $-$ის და β $-$ს შერჩევა ისე, რომ

$$0 < a_0 \le \min_{i,j} a_{ij}\,, \quad \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \ge 0, \;\; 1 < \beta < \beta_{ij}, \;\; i,j = 1, \dots, N. \tag{3.5.15}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $|s|^{\beta_{ij}} \ge |s|^{\beta} - 1 \quad \forall s \in (-\infty, \infty)$. თუ გამოვიყენებთ ცნობილ უტოლობას (Fichtengolz, 1969)

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i|^{\beta} \ge N^{1-\beta} \left| \sum_{i=1}^{N} y_i \right|^{\beta} \quad \forall y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \beta = const > 1,$$

მაშინ (3.5.13) $-$ (3.5.15) $-$ის ძალით გვექნება

$$\sum_{i=1}^{N} f_i\,(u_1, \dots, u_N) \ge a_0 \sum_{i,j=1}^{N} \left|u_j\right|^{\beta_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} b_i \ge a_0 \sum_{i,j=1}^{N} \left(\left|u_j\right|^{\beta} - 1 \right) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i \ge a_0 N \sum_{j=1}^{N} \left|u_j\right|^{\beta} - a_0 N^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i \ge$$

$$a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta} + \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \ge a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta}. \tag{3.5.16}$$

(3.5.16) $-$ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ თუ შესრულებულია (3.5.13) და (3.5.14) პირობები, მაშინ ადგილი აქვს (3.5.12) უტოლობას, სადაც $l_1 = \cdots = l_N = -1$ და $\alpha_0 = a_0 N^{2-\beta}$.

დასკვნა

დისერტაციაში მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებებისა და სისტემების ერთი კლასისათვის განხილულია სასაზღვრო ამოცანები ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში და მათი ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი შესაბამისად კუთხოვან ან კონუსურ არეში, როცა საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში მოცემულია დირიხლეს, ნეიმანის ან სხვა სახის დიფერენციალური პირობები. ამ ამოცანებით აღიწერება სიმის რხევა ბლანტ სითხეში, სორბენტის მიერ აირის შთანთქმის პროცესი, სოლის ჰარმონიული რხევა ზებგერით ნაკადში და სხვა. ორგანზომილებიან შემთხვევაში მეოთხე რიგის სკალარული არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის ახალი უცნობი ფუნქციის შემოღებით ხდება დასმული ამოცანის რედუცირება შესაბამის მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლური სისტემისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანაზე. მიღებული სასაზღვრო ამოცანისათვის შემოდის განზოგადებული ამონახსნის ცნება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. არაწრფივ წევრებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში მახასიათებელთა და აპრიორულ შეფასებათა მეთოდების გამოყენებით მტკიცდება განზოგადებული ამონახსნის არსებობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. უფრო მეტიც, სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე გარკვეული სიგლუვის მოთხოვნის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ განზოგადებული ამონახსნი არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი კუთხოვან არეში, საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ ამ ამონახსნის ერთერთი კომპონენტი წარმოადგენს საწყისი სასაზღვრო ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს. განიხილება აგრეთვე ამ ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც. ორგანზომილებიან შემთხვევაში იმავე კუთხოვანი არის შემთხვევაში განიხილება სასაზღვრო ამოცანა მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის, სადაც განსხვავებით სკალარული შემთხვევისა კუთხოვანი არის მთელი საზღვარია დაკავებული. ამ შემთხვევაში, რადგან დასმული ამოცანის გამოკვლევა მახასიათებელთა მეთოდით აწყდება დიდ სირთულეებს შემოთავაზებულია სხვა მიდგომა. ეს ამოცანა არა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, არამედ სობოლევის სივრცეში ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში

მიღებულია ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება სობოლევის სივრცეში, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. ამასთან განხილულია დასმული ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც. დისერტაციაში განხილულია აგრეთვე ორგანზომილებიანი ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებებათა ერთი კლასისათვის. სობოლევის სივრცეში ფუნქციონალური მეთოდების გამოყენებით ეს ამოცანა ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. განტოლების არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მისი ამონახსნისათვის დამტკიცებულია აპრიორული შეფასება, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. განხილულია აგრეთვე ის შემთხვევები, როცა სასაზღვრო ამოცანას არ გააჩნია ამონახსნი, ან ადგილი აქვს მის ერთადერთობას. აღსანიშნავია, რომ განსხვავებით ორგანზომილებიანი შემთხვევისა, როცა განტოლებაში საძიებელი ამონახსნის მიმართ შემავალი ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი შეიძლება იყოს რა გინდ დიდი, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში ეს რიგი უნდა იყოს ნაკლები ე.წ. კატოს რიცხვზე, რაც დაკავშირებულია ჩართვის თეორემებთან სობოლევის სივრცეში.

ლიტერატურა

Bibilashvili, T. (2023). A boundary value problem for a class for of higher – order nonlinear hyperbolic equations. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 37, 3-6.

Bibilashvili, T. (2023). Darboux type multi-dimensional problem for a class of higher-order nonlinear hyperbolic equations. Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute, 177 No.1, 135-137.

Bibilashvili, T. (2024). The boundary value problem for one class of high-order nonlinear hyperbolic systems. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 38.

Bitsadze, A. (1975). Influence of lower terms on the correctness of formulation of characteristic problems for second order hyperbolic systems. (Russian) Dorkl. Akad. Nauk SSSR, 225, No.1.

Bitsadze, A. (1975). To the analysis of the formulation of characteristic problems for second order hyperbolic systems. (Russian) Dokl. Acad. Nauk SSSR, 223, No. 6, .

Bitsadze, A. (1981). Some classes of partial differential equations. (Russian) Nauka, Moscow.

Darboux, G. (1896). Lecons sur la theorie generale des surface. Paris: P.4. Gautier-villars.

E. Mitidieri, S. P. (2001). A priori estimates and the absence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities. (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 234; English trannsl.: Proc. Steklov Inst. Math. No. 3(234).

Fichtengolz, C. (1969). Course of Differential and Integral Calculus. Vol. I. (Russian) Nauka, Moscow.

Firmani, B. (1982). Sui casi singolari della problems di Goursat. Rend. Mat. Appl. (7) 2, No. 2, 239-256.

G. Berikelashvili, O. D. (2011). Finite difference solution of a nonlinear Klein-Gordon equation with an external source. Mathematics of Computation, 80, №274, 847-862.

G.K. Berikelashvili, O. D. (2008). On the existence and absence of global solutions of the first Darboux problem for non-linear wave equations. Differential Equations, 44, №3, 374-389.

Goman, O. (1968). Equation of the reflected wave. Vestn, Mosk. Univ. Ser. I 23, No. 2, 84-87.

Goursat, E. (1956). Cours d'analyse mathematique. Paris: t. 1-3, ed. 5, Gautier-Villars.

Jokadze, O. (2009). The Cauchy-Goursat problem for one-dimensional semilinear wave equations. Communications in Partial Differential Equations, 34,№4, 367-382.

Jokhadze, O. (2008). On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy-Goursat problem for nonlinear wave equations. J. Math. Anal. Appl. 340, 1033-1045 .

Kharibegashvili, S. (1985). On a boundary value problem for a second order hyperbolic equation. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 280, No. 6.

Kharibegashvili, S. (1995). Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems. Mem. Differential Equations math. Phys. 4, 1-127.

Kharibegashvili, S. (2008). On the solvability of the Cauchy characteristic problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part. J. Mat. Anal. 338, 71-84.

Mel'nik, Z. (1980). An example of non-classical boundary value problem for the equation of dtring oscillation. (Russian) Ukrain. Mat. Zh. 32, No. 5, 671-674.

Mel'nik, Z. (1980). An example of non-classical boundary value problem for the equation of string oscillation. (Russian) Ukrain. MAt. Zb. 32, No. 5, 671-674.

Mel'tser, L. (1946). On non-correct formulation of the Goursat problem. (Russian) Mat. Sb. 18 (60), No. 1, 59-104.

Mikhailov, V. (1957). On analytic solution of the Goursat problem for a system of differential equations. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 115, No. 3.

Mikhailov, V. (1957). On non-analytic solutions of the Goursat problem for a system of differential equations with two independent variables. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 117, No. 5.

O. Jokhadze, B. M. (2008). The first Darboux problem for nonlinear wave equations with a nonlinear positive sourse term. Nonlinear Anal. 69, 3005-3015.

O. Jokhadze, S. K. (2015). On the Cauchy and Cauch-Darboux problems for semilinear wave equations. Georgian Math. J. 22 (1), 81-104.

O.A.Ladyzhenskaya. (1973). Boundary Value Problems of Mathematical Physics. (Russian) Nauka, Moscow.

O.M. Dzhokhadze, S. K. (2008). First Darboux problem for nonlinear hyperbolic equations of second order. Mathematical Notes. 84,№5, 646-663.

S. Kharibegashvili. (2009). Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. 46, 1-114.

S. Kharibegashvili, B. M. (2008). On one boundary value problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part. Georgian Math. J. 15, No. 3, 541-554.

S. Kharibegashvili, B. M. (2008). Solvability of characteristic boundary value problem for nonlinear equations wath iterated wave operator in the principal part. Electron. J. Differential Equations, No. 72, 1-12.

S. Kharibegashvili, B. M. (2019). On the existence, uniqueness, and nonexistence of solitions of one boundary value problem for a semilinear hyperbolic equation. Ukr. Mat. Zh. 71, No. 8, 1123-1132.

S. Kharibegashvili, O. J. (2016). The Cauchy-Darboux problem for wave equations with a nonlinear dissipative term. Mem. Differential Equations Math. Phys. 69, 53-75.

S. Kharibegashvili, O. J. (2016). The second Darboux problem for the wave equation with integral nonlinearity. Trans. A. Razmadze Math. Inst, 170, No. 3, 385-394.

S.Fuchik, A. K. (1980). Nonlinear Differential Equations. Studies in Applied Mechanics, 2. Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam – New York.

S.S. Kharibegashvili, O. D. (2013). Second Darboux problem for the wave equation with a power-law nonlinearity. Differential Equations, 49, №12, 1577-1595.

S.S. Kharibegashvili, O. J. (2013). The Cauchy-Darboux problem for the one-dimensional wave equation with power nonlinearity. Siberian Math. J. 54, No. 6, 1120-1136.

S.S. Kharibegashvili, O. J. (2013). The Cauchy-Goursat Problem for wave equations with nonlinear dissipative term. Mathematical Notes, 94, №6, 913-929.

S.S. Kharibegashvili, O. J. (2016). On the solvability of a boundary value problems for nonlinear wave equations in angulae domains. Differential Equations, 52, No. 5, 665-686.

Samarskii, A. T. (1977). Equations of mathematical physics. 5th ed. (Russian). Nauka, Moscow.

Sobolev, S. (1931). On analytic solutions of systems of partial differential equations with two independent variables. (Russian) Mat. Sb. 38, No. 1-2, 107-147.

T. Bibilashvili, S. K. (2022). Darboux type problem for one nonlinear hyperbolic equation of the fourth order. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 36, 11-14.

T. Bibilashvili, S. K. (2023). Darboux type problem for a class of fourth-order nonlinear hyperbolic equations. Mem. Differential Equations Math. Phys., 89, 39-59.

T. Bibilashvili, S. K. (2024). On the solvability of the boundary value problem for one class of higher-order nonlinear hyperbolic systems. Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute, 178 issue 2, 317-319.

Troitskaya, S. (1998). On a boundary value problem for hyperbolic equations. (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 62, No. 2.

V.A.Trenogin. (1993). Functional Analysis. (Russian) Second edition. Nauka, Moscow.

Z.O.Mel'nik. (1981). A boundary value problem free from boundary conditions for a hyperbolic system of second order. (Russian) In: Boundary value problems of mathematical physics. (Russian) Kiev.