ა. შავგულიძე

ტექნიკური ხაზვის სპეციალური კურსი

პირველი ნაწილი

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ პოლიტექნიკური ინსტიტუტის სამთო-გეოლოგიური და სამშენებლო ფაკულტეტების სტუდენტთათვის.

გამომცემლობა „განათლება“
თბილისი—1969

შესავალი

1. ჩვენი მიზანი

უმაღლესი სკოლებისათვის დამტკიცებული მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის მოქმედი პროგრამა და ამ პროგრამით შედგენილი სახელმძღვანელოები შეიცავენ სივრცითი საგნების ბრტყელ გამოსახულებათა მიღების მხოლოდ აუცილებელ და ზოგად საფუძვლებს. ტექნიკურ სპეციალობათა სიმრავლის გამო ამ პროგრამაში არ არის და არც შეიძლება იყოს გათვალისწინებული ცალკეული დარგების სპეციფიკა. ეს გარემოება, თავის მხრივ, საინჟინრო გრაფიკის დარგობრივი გამოყენების პრობლემას აყენებს. თუ გადავხედავთ ამ პრობლემის გადაწყვეტის ცდებს საინჟინრო გრაფიკის ლიტერატურაში, იოლად შევამჩნევთ, რომ ტექნიკური ხაზვის მოქმედი პროგრამის პარალელურად წარმოქმნილია ორი დამატებითი მიმართულება. ერთი მხრივ შექმნილია ტექნიკური ხაზვის სპეციალიზებული წიგნები, ხოლო მეორე მხრივ, სპეციალური დისციპლინების ისეთი სახელმძღვანელოები, რომელთა შესავალი ნაწილი გრაფიკული გამოსახულებების აგების მეთოდების აღწერას აქვს დათმობილი.

პირველ შემთხვევაში ხაზვის მოსამზადებელი ნაწილია უგულებელყოფილი. ამის გამო ლოგიკურად ისმება კითხვა: ამ სპეციალობის პირმა სწავლის რომელ ეტაპზე უნდა შეისწავლოს ნახაზების შედგენის ესოდენ საჭირო ელემენტარული წესები? რასაკვირველია, საშუალო სკოლის პროგრამა ამას ვერ უზრუნველყოფს. ჩვენი შეხედულებით, ხაზვის ასეთი კურსი, როგორ მაღალ დონეზედაც არ უნდა იყოს იგი დაწერილი, მაინც ვერ განაპირობებს საგნის ღრმად და შემოქმედებითად შესწავლას.

მეორე შემთხვევა შედარებით ახალია და რამდენადმე იძულებით ფორმას წარმოადგენს. იგი არ შეიმჩნევა ადრე გამოცემულ ამავე დარგის ლიტერატურა'ში. შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მაშინ იგულისხმებოდა საინჟინრო გრაფიკის ზოგადი კურსით უზრუნველყოფა, მაგრამ როდესაც პრაქტიკამ უარყოფითი შედეგი აჩვენა, სახელმძღვანელოების ავტორებმა გამოსავალი ამ გზით იპოვეს. უნდა ვაღიაროთ, რომ ეს გზაც პრინციპული ნაკლოვანებებით ხასიათდება. სახელდობრ, ამ შემთხვევაში გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების სპეციალური მეთოდების აღწერა შემოკლებული ფორმის დანამატს წარმოადგენს და ნაწილობრივ თუ უზრუნველყოფს თავის მიზანს. გარდა ამისა, იგი გარკვეულად ზღუდავს აღებული დისციპლინის საკუთარი საკითხების ფართო მასშტაბით გადმოცემას (სხვანაირად წიგნის მოცულობა ყოველგვარ ნორმებს გადააჭარბებს).

შევეხოთ ერთ კონკრეტულ შემთხვევას, კერძოდ, სამთო საქმეში ტექნიკური ხაზვის გამოყენების საკითხს. სამთო სამარკშეიდერო პრაქტიკა მოი-

თხოვს გრაფიკული გამოსახულებების აგების ისეთი საკითხების ცოდნას, რომლებსაც არ შეიცავს ტექნიკური ხაზვის ზოგადი კურსი. ასეთებია მაგალითად, ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი, თვალსაჩინო გამოსახულებების აგების სპეციალური ხერხები, ფეოდოროვის გეგმილები, აფინური გარდაქმნები, გრაფიკული სამუშაოების მექანიზაციისა და ავტომატიზაციის საკითხები და სხვ. მთელი ეს მასალა სხვადასხვა ფორმითა და მოცულობით გაბნეულია მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის მრავალრიცხოვან სახელმძღვანელოებსა და სამეცნიერო შრომებში. მათი მოძებნა და პრაქტიკული გამოყენება მთელ რიგ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული როგორც სტუდენტების, ასევე ინჟინერ-ტექნიკური პერსონალისათვის.

სამთო გეომეტრიის ადრე გამოცემულ სახელმძღვანელოებში (მაგ., **Рыжов П. А.—Геометрия недр, 1952; Гутт А. Е.—Курс горной геометрии, 1933**) შეტანილი იყო ამ საგნის მხოლოდ სპეციალური საკითხები. რაც შეეხება გრაფიკული გამოსახულებების აგების მეთოდებს, იგულისხმებოდა, რომ მათი შესწავლა უნდა მომხდარიყო მხაზველობითი გეომეტრიისა და ხაზვის კურსების საშუალებით. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ამ კურსების პროგრამა არ შეიცავს სამთო გეომეტრიისათვის საჭირო სპეციფიკურ საკითხებს. ამ გარემოებამ განაპირობა სამთო გეომეტრიის თანამედროვე ლიტერატურაში (მაგ., **Рыжов П. А.—Геометрия недр, 1964; Ушаков И. Н.—Горная геометрия, 1962**) გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების მეთოდების შეტანა.

სამთო საქმეში არსებული შესაბამისი ლიტერატურის შესწავლამ და ანალიზმა გვიჩვენა გრაფიკული ამოცანების გადაწყვეტის ზოგიერთი ხარვეზიც. ამის მიზეზი, ჩვენი აზრით, სამთო საქმეში მხაზველობითი გეომეტრიისა და ტექნიკური ხაზვის არასრული გამოყენების შედეგი უნდა იყოს.

ვფიქრობთ, რომ გამოსახულებების აგების იმ სპეციალურ თემებს, რომელთა ცოდნაც ერთი რაიმე დარგისათვისაა საჭირო, მიზანშეწონილია თავი მოვუყაროთ ერთ შრომაში, რომელსაც, მისი მოცულობის შესაბამისად, შესაძლოა ეწოდოს „ტექნიკური ხაზვის სახელმძღვანელოს დარგობრივი დანართი“ ან „ტექნიკური ხაზვის სპეციალური კურსი“. ასეთი კურსის გამოყენება ნავარაუდევი უნდა იყოს მხაზველობითი გეომეტრიისა და ხაზვის ზოგადი კურსების შესწავლის შემდეგ.

ჩვენ მივედით იმ დასკვნამდე, რომ საჭიროა დეტალურად იქნეს შესწავლილი ის მოთხოვნები, რომლებსაც სამთო საქმე და სახელდობრ, სამთო გეომეტრია აყენებს გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების მეთოდების წინაშე. ამის მიხედვით უნდა დამუშავდეს ტექნიკური ხაზვის ისეთი სპეციალური კურსი, რომელშიც ყველა ეს მოთხოვნები გათვალისწინებული იქნება. ასეთი კურსის შედგენის აუცილებლობის შესახებ პირველად აზრი გამოთქვა სამთო საქმის ერთ-ერთმა გამოჩენილმა მეცნიერმა პროფ. პ. რიჟოვმა და დაასაბუთა მისი მნიშვნელობა (იხ. **Рыжов П. А.—Проекции применяемые в геолого-маркшейдерском деле, 1951**). ჩვენი მიზანია უფრო ფართოდ და დეტალურად გავაშუქოთ ამ საქმესთან დაკავშირებული თემები, გამოვიყენოთ მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის თანამედროვე მიღწევები და ზოგი რამ შევავსოთ საკუთარი გამოკვლევებით.

წინამდებარე ნაშრომი წარმოადგენს „ტექნიკური ხაზვის სპეციალური კურსის“ პირველ ნაწილს. მასში გადმოცემულია ნიშნულებიანი გეგმილების

მეთოდის აღწერა და ამ მეთოდის გამოყენება საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტულ ამოცანებში. მეორე ნაწილში განხილული იქნება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის ახალი ინტერპრეტაცია, თვალსაჩინო გამოსახულებათა აგების სპეციალური მეთოდები, ფეოდოროვის გეგმილები, გეგმილური გეომეტრიის სამთო საქმეში გამოყენების საკითხები, სტერეოგრაფიული გეგმილები, გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების ავტომატიზაციის სახეები და სხვ.

საერთოდ, მთელი კურსი განკუთვნილია სამთო-გეოლოგიური სპეციალობის სტუდენტებისა და ამ დარგში მომუშავე ინჟინერ-ტექნიკური პერსონალისათვის. ნაწილობრივ მისი გამოყენება შეუძლიათ სამშენებლო დარგის სტუდენტებსაც.

კურსის მიზანია სივრცითი საგნების გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების სპეციალური მეთოდების შესწავლა და ამ მეთოდებით მიღებულ გამოსახულებებზე სამარკშეიდერო პრაქტიკის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნაში დახელოვნება.

კურსი დაწერილია სსრკ-ს უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებული წიაღის გეომეტრიის პროგრამის პირველი ნაწილის—„გეოლოგიურ და სამარკშეიდერო საქმეში გამოყენებული გეგმილების“ მიხედვით.

ნაშრომში, თანმიმდევრობით დაგეგმილების თითოეული მეთოდისათვის, გადმოცემულია ძირითადი გეომეტრიული ელემენტების დაგეგმილების, ურთიერთდამოკიდებულებისა და მათზე მოქმედებების თეორია და მაგალითები. თითოეული საკითხის გეომეტრიული მხარე ისეა შერჩეული და დამუშავებული, რომ მისი პრაქტიკული გამოყენება რაც შეიძლება მარტივი იყოს. სახელდობრ, ყოველი გეომეტრიული მოქმედება არჩეულია შესაბამისი სამთო-გეომეტრიული ხასიათის ამოცანის ან ამოცანების ჯგუფის მოთხოვნილებების მიხედვით. დაგეგმილების თითოეული მეთოდის მოცულობა განსაზღვრულია სამთო საქმეში მისი გამოყენების ინტენსივობის შესაბამისად. თეორიული ნაწილის ახსნაში ნაგულისხმებია, რომ ამ კურსის გავლას წინ უსწრებს მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის ზოგადი კურსების შესწავლა.

ნიშნულებიანი გეგმილების ახალ ინტერპრეტაციაში (მეორე ნაწილი) ეს მეთოდი წარმოდგენილია სივრცის აქსიომატიკურ მოდელირებაზე დაყრდნობით. სახელდობრ, ახალი მოდელის საფუძვლად მიღებულია სივრცის ბრტყელი მოდელების ერთ-ერთი სახე (იხ. Джапаридзе И. С.—Основные плоскостные модели пространства и их производные, ვ. ი. ლენინის სახ. სპი-ს „შრომები“, № 3/96, 1964, მოდელი α-5). ამ მოდელის განზოგადებით შესრულებულია ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცის დაგეგმილება. ამის შედეგად გადაწყვეტილია სამთო-გეომეტრიული ხასიათის ის ამოცანები, რომლებშიც გრაფიკული გამოსახულების აგება ოთხი კომპონენტის მეშვეობით ხორციელდება.

დაგეგმილების მეთოდების განხილვის სტრუქტურა ურთიერთანალოგიურია და განვითარების ერთ საერთო პრინციპს ექვემდებარება. სახელდობრ, პირველად გადმოცემულია საკითხის თეორია, ხოლო მისი პრაქტიკული გამოყენება უშუალოდ სამარკშეიდერო პრაქტიკის კონკრეტულ მაგალითებშია გადმოცემული. ჩვენი აზრით, ასეთი მიდგომა კურსს რამდენადმე კომპაქტურს ხდის და აადვილებს მის დანიშნულებისამებრ გამოყენებას.

გრაფიკული ამოცანების ამოხსნის გამარტივების მიზნით მთელი კურსი-

სათვის დამახასიათებელია ორთოგონალური გეგმილების გარდაქმნის მეთოდების ხშირი გამოყენება. ზოგიერთი ამ მეთოდთაგანი წარმოდგენილია რამდენადმე გადამუშავებული სახით.

2. პირობითი აღნიშვნების სისტემა და ტერმინოლოგია

ძირითადი პირობითი აღნიშვნების სისტემა და ტერმინოლოგია შერჩეულია მხაზველობითი გეომეტრიის სტაბილურ სახელმძღვანელოებში გავრცელებული აღნიშვნებისა და ტერმინების მიხედვით. მხედველობაშია მიღებული აგრეთვე სამთო საქმეში მათი გამოყენების სპეციფიკა:

1. სივრცეში განლაგებული წერტილები აღნიშნულია ლათინური ანბანის ასომთავრულით: A, B, C, D, E, F,...

2. წერტილების თანმიმდევრობა: A_1, A_2, A_3,...

3. სივრცეში განლაგებული ხაზები (სწორი ან მრუდი)—ლათინური ანბანის ნუსხური ასოებით; a_0, b_0, c_0,... თუ სწორი ხაზი განსაზღვრულია მისი რომელიმე ორი წერტილით, მაშინ იგი აღინიშნება წერტილების აღნიშვნელი ასოებით, მაგალითად: AB, BC, CD,...

4. სიბრტყეები და საერთოდ ზედაპირები—ბერძნული ანბანის ასომთავრულით: Α, Β, Γ, Δ,...

იმისათვის, რომ განისაზღვროს სიბრტყის მოცემა, აღინიშნება ის ელემენტები, რომლითაც მოცემულია იგი. მაგალითად:

ABC (სიბრტყე მოცემულია სამი წერტილით),
$a \parallel b$ („ „ ორი პარალელური ხაზით),
$m \times n$ („ „ ორი გადაკვეთილი ხაზით).

ამის შესაბამისად, მაგეგმილებელი სიბრტყეები აღინიშნება იმ ელემენტებით, რომლებითაც განსაზღვრული არიან ისინი. მაგალითად, AB ან a.

4. ძირითადი გეგმილთსიბრტყე, როდესაც მას თარაზული მდებარეობა უჭირავს, აღინიშნება Π ასოთი და ნიშნულით, რომელიც აღნიშნავს მის დონეს (აბსოლუტური ან პირობითი ზედაპირიდან) ზომის გარკვეულ ერთეულებში. მაგალითად: $\Pi(0)$, $\Pi(10)$, $\Pi(15)$ და ა. შ.

გეგმილთსიბრტყე, როდესაც მას შვეული ან დახრილი მდებარეობა უჭირავს აღინიშნება ქვემოინდექსიანი Π ასოთი. (მაგალითად, Π_1, Π_2,...).

5. წერტილების გეგმილები—ლათინური ანბანის ასომთავრულით და ნიშნულით, რომელიც მას მიეწერება მარჯვენა მხრიდან ფრჩხილებში. მაგალითად:

$$A(100),\ B(15.2),\ C(-52.0),\ldots$$

მიღებულია წერტილის გეგმილის აღნიშვნა რიცხვებით (განსაკუთრებით მონაკვეთების გრადუირების დროს) იმ პირობით, რომ დასმული რიცხვით განისაზღვრებოდეს წერტილის ნიშნული.

6. ხაზების გეგმილები—ლათინური ანბანის ნუსხური ასოებით:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ldots$$

იმ შემთხვევაში, როცა ხაზი მოცემულია ორი წერტილით, ამ ხაზის გეგმილი აღინიშნება შესაბამისი წერტილების გეგმილებით. მაგალითად: $A(5)B(15)$.

დონის ხაზის გეგმილის აღმნიშვნელ ასოს მარჯვენა მხრიდან ფრჩხილებში ემატება შესაბამისი დონის ნიშნული. მაგალითად, $a(5)$, $b(-6)$,... დასაშ-

ვებია ასეთი ხაზების უშუალოდ რიცხვებით აღნიშვნა, იმ პირობით, რომ მიწერილი რიცხვი მოცემული ხაზის დონეს გამოსახავდეს.

7. კუთხეების აღსანიშნავად ხმარებულია ბერძნული ანბანის ნუსხური ასოები:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$$

აქედან α-თი აღინიშნება აზიმუტი (დირექციული კუთხე);

β-თი აღინიშნება სწორი ხაზის გეგმილთსიბრტყის მიმართ დახრის კუთხე;

δ-თი აღინიშნება სიბრტყის გეგმილთსიბრტყის მიმართ დახრის კუთხე.

8. კოორდინატთა სისტემის ღერძები სივრცეში და გეგმაზე აღინიშნება:

OX—აბსცისების ღერძი;
OY—ორდინატების ღერძი;
OZ—აპლიკატების ღერძი.

პირობით OX ღერძი ემთხვევა მერიდიანის ჩრდილოეთ მიმართულებას.

9. გეომეტრიული ელემენტების დამთხვევა გეგმაზე აღინიშნება ნიშნით $\equiv$; მაგალითად, $a \equiv b$; $A(15) \equiv B(25)$.

10. ორი ელემენტის ურთიერთკუთვნილება (ინციდენტობა) აღინიშნება ნიშნით $\supset$ ან $\subset$; მაგალითად, თუ M წერტილი ეკუთვნის λ სიბრტყეს, ეს კუთვნილება ჩაიწერება ასე: $M \subset \lambda$ ან $\lambda \supset M$.

11. გეომეტრიული აგებების შედეგი აღინიშნება ნიშნით $=$, მაგალითად, $A = b \times \Sigma$—ეს ნიშნავს, რომ A წერტილი მიღებულია b სწორი ხაზის Σ სიბრტყესთან გადაკვეთის შედეგად.

I

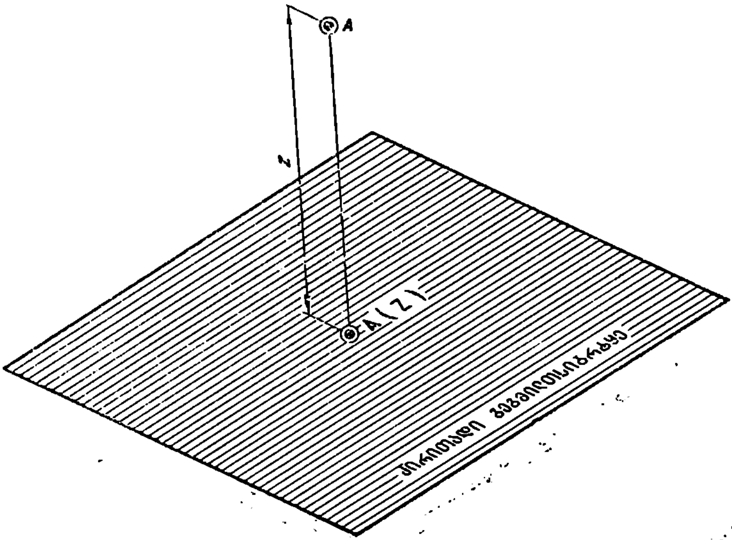
ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი

ძირითადი დებულებები

§ 1. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის არსი და მისი გამოყენება

1. მეთოდის არსი

როდესაც დასაგეგმილებელი ობიექტის ერთი მიმართულებით გავრცელება საგრძნობლად აღემატება მის მეორე მიმართულებით გავრცელებას (მაგალითად, დედამიწის ზედაპირის რელიეფის გამოხაზვის დროს), მაშინ ჩვენთვის აქამდე ცნობილი დაგეგმილების მეთოდები (მაგალითად, მონჟის მეთოდი) პრინციპულ წინააღმდეგობებს აწყდება. ასეთ შემთხვევებში ძირითადად იყენებენ ე. წ. ნიშნულებიანი გეგმილე-



ნახ. 1

ბის მეთოდს. ამ მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს: სივრცის მოცემული წერტილის ორთოგონალური დაგეგმილებით რაიმე ერთ სიბრტყეზე, რომელსაც ძირითადი გეგმილთსიბრტყე ეწოდება, მიიღება ამ წერტილის გეგმილი. დაგეგმილების შებრუნებული ამოცანის გადასაწყვეტად წერტილის გეგმილს მარჯვენა მხრიდან ეწერება რიცხვი (ნიშნული), რომელიც განსაზღვრავს მოცემული წერტილის დაშორებას გეგმილთსიბრტყიდან (ნახ. 1). ასეთ შემთხვევაში წერტილის მდებარეობა სივრცეში სავსებით განსაზღვრულია ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მიმართ.

საინჟინრო პრაქტიკაში საჭიროა, რომ დასაგეგმილებელი სივრცითი ობიექტები განსაზღვრული იყოს რაიმე კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამის გამო ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს პრაქტიკულად რომელიმე კოორდინატთა სისტემაზე დაყრდნობით განიხილავენ.

2. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაზე დაყრდნობით

განვიხილოთ სამი ურთიერთმართობული გეგმილთსიბრტყისაგან შედგენილი სამწახნაგა (ნახ. 2). X, Y და Z ღერძებისათვის შემოვიღოთ ზომის ერთეული (n), ანათვლების სათავედ მივიღოთ გეგმილთსიბრტყეების შეხვედრის O წერტილი.

მიღებული O_{xyz} სისტემა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების სისტემა სივრცეში.

$OEA(Z)A$ ტეხილს, რომელიც განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სივრცეში O_{xyz} სისტემის მიმართ, საკოორდინატო ტეხილი ხაზი ეწოდება; მის შემადგენელ გვერდებს კი — საკოორდინატო მონაკვეთები. სახელდობრ: OE-ს აბსცისების მონაკვეთი ეწოდება და აღინიშნება x ასოთი, $EA(Z)$-ს — ორდინატების მონაკვეთი და აღინიშნება y ასოთი, ხოლო $A(Z)A$-ს აპლიკატების მონაკვეთი და აღინიშნება z ასოთი.

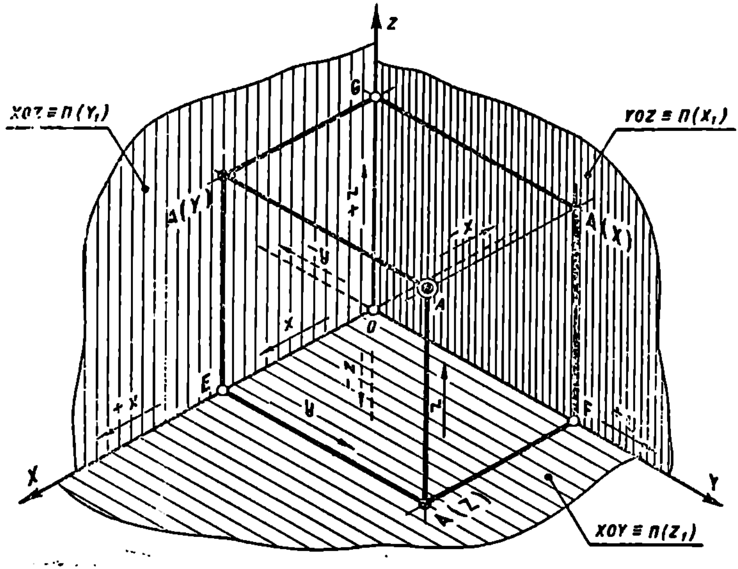
საკოორდინატო მონაკვეთებს, გაზომილს მიღებულ ზომის ერთეულებში (n), მოცემული წერტილის კოორდინატები ჰქვია. მაგალითად, აღებულ შემთხვევაში მოცემული წერტილი შემდეგი კოორდინატებითაა განსაზღვრული:

$x = \frac{OE}{n}$ (აბსცისა), $y = \frac{EA(Z)}{n}$ (ორდინატა) და $z = \frac{A(Z)A}{n}$ (აპლიკატა).

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ A წერტილის კოორდინატები შესაძლოა განხილული იქნეს, როგორც ამ წერტილის დაშორებანი საკოორდინატო სიბრტყეებიდან, ხოლო $A(Z)$, $A(Y)$ და $A(X)$ წერტილები — როგორც მისი ორთოგონალური გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე. შევნიშნოთ ისიც, რომ საკოორდინატო მონაკვეთები OE, $OF=EA(Z)$ და $OG=A(Z)A$ შესაძლოა მიღებულ იქნეს A წერტილის კოორდინატთა ღერძებზე ორთოგონალური დაგეგმილებით.

სამთო-სამარკშეიდერო პრაქტიკაში ძირითად გეგმილთსიბრტყეს თარაზულ ან შვეულ მდებარეობაში იღებენ (უპირატესობა პირველს აქვს მინიჭებული). აქედან გამომდინარე, განხილული სისტემის ნებისმიერი საკოორდინატო სიბრტყე შესაძლოა მიღებული იქნეს ძირითად გეგმილთსიბრტყედ და მის მიმართ ჩამოყალიბდეს სივრცითი წერტილის კომპლექსურ ნახაზზე მოცემის პირობები.

მაგალითად, ძირითად გეგმილთსიბრტყედ მივიღოთ O_{xyz} სისტემის XOY საკოორდინატო სიბრტყე. როგორც ვხედავთ, მას ამ სისტემაში თარაზული მდებარეობა უჭირავს (ნახ. 2). აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი $\Pi(Z)$-ით



ნახ. 2

და შევთანხმდეთ, რომ Π-ს მარჯვნივ მინაწერი ნიშნული (Z) რიცხობრივად გამოსახავს სიბრტყის დაშორებას რაიმე პირობითი ან აბსოლუტური დონის ზედაპირიდან (პირველ შემთხვევაში გეგმილთსიბრტყის დონე პირობითი იქნება, მეორეში—აბსოლუტური).

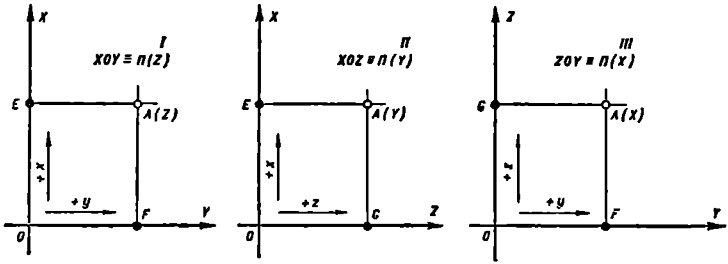
$\Pi(Z)$ გეგმილთსიბრტყეზე მოთავსებული და OE და OF საკოორდინატო მონაკვეთებით განსაზღვრული $A(Z)$ წერტილი სივრცის ერთადერთი წერტილის გეგმილად შეიძლება ჩაითვალოს, თუ ფრჩხილებში ჩასმული ნიშნული (Z), მიღებულ ზომის ერთეულებში, აპლიკატების ანუ მოცემული წერტილის გეგმილთსიბრტყიდან დაშორების მონაკვეთს გამოსახავს (ნახ. 3-I).

კომპლექსურ ნახაზზე ანუ გეგმაზე კოორდინატთა სისტემის ორიენტირების საკითხი განხილულია გეოდეზიის სახელმძღვანელოებში (მაგალითად, А. С. Чеботарев, геодезия, ч. I, 1955, §§ 51—56), ჩვენ კი მივიღოთ საკოორდინატო ღერძების განლაგების პირობითი სისტემა, კერძოდ ისეთი, როგორიც მე-3 ნახაზზეა მოცემული. ამ ნახაზზე თანმიმდევრობით ნაჩვენებია საკოორდინატო ღერძების პირობითი განლაგება კომპლექსურ ნახაზზე, შესაბამისად იმისა, თუ რომელი საკოორდინატო სიბრტყეა მიღებული ძირითად გეგმილთსიბრტყედ. აქვე შევნიშნოთ, რომ სამთო საქმეში OX (ან OZ) ღერძის დადებითი მიმართულება ჩვეულებრივად მერიდიანის ჩრდილოეთის მიმართულების თანხვდენილია.

თუ ძირითად გეგმილთსიბრტყედ მივიღებთ XOZ საკოორდინატო სიბრ-

ტყეს, შევთანხმდეთ, რომ მას ყოველთვის აღვნიშნავთ $\Pi(Y)$-ით (სადაც Y— გეგმილთსიბრტყის ნიშნულია). ამ შემთხვევაში A წერტილის მდებარეობა კომპლექსურ ნახაზზე განისაზღვრება OE და OG საკოორდინატო მონაკვეთებით და ნიშნულით (Y), რომელიც მიღებულ ზომის ერთეულებში ორდინატების მონაკვეთს გამოსახავს (ნახ. 3-II).

თუ ძირითად გეგმილთსიბრტყედ მივიღებთ YOZ საკოორდინატო სიბრტყეს, შევთანხმდეთ, რომ მას ყოველთვის აღვნიშნავთ $\Pi(X)$-ით (სადაც X— გეგმილთსიბრტყის პირობითი ნიშნულია). ამ შემთხვევაში A წერტილის მდებარეობა კომპლექსურ ნახაზზე განისაზღვრება OF და OG საკოორდინატო



ნახ. 3

მონაკვეთებით და ნიშნულით (X), რომელიც მიღებულ ზომის ერთეულებში აბსცისების მონაკვეთს გამოსახავს (ნახ. 3-III).

იმისათვის, რომ წერტილის კოორდინატების ყოველი სამეული სივრცის მხოლოდ ერთადერთ წერტილთან იყოს დაკავშირებული, გარდა კომპლექსურ ნახაზზე საკოორდინატო ღერძების მოცემული სისტემისა, საჭიროა დავადგინოთ ნიშნულებისადმი ნიშნის (+ ან —) მიკუთვნების წესი. ამასთან დაკავშირებით ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ორი პირობა:

1) ძირითად გეგმილთსიბრტყედ მიჩნეული საკოორდინატო სიბრტყის ღერძთა მონაკვეთები სათავიდან ზევით და მარჯვნივ მივიღოთ დადებითად, სათავიდან ქვევით და მარცხნივ—უარყოფითად (ნახ. 3);

2) წერტილის ნიშნულის ნიშანი განისაზღვროს ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მიმართ:

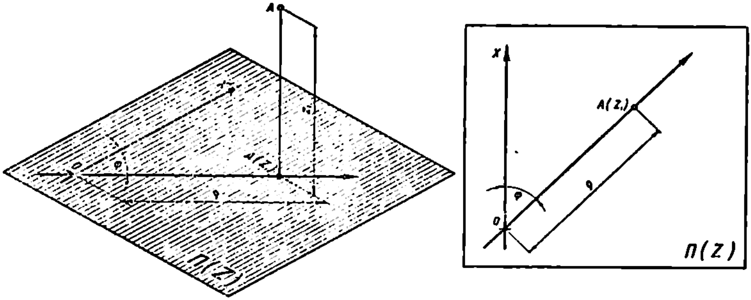
ა) $XOY\equiv\Pi(Z)$—ძირითადი გეგმილთსიბრტყის ზემოთ განლაგებული წერტილებისათვის ნიშნულები მივიღოთ დადებითად, ქვემოთ განლაგებული წერტილებისათვის—უარყოფითად (ნახ. 3-I);

ბ) $XOZ\equiv\Pi(Y)$—ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მარჯვნივ განლაგებული წერტილებისათვის ნიშნულები მივიღოთ დადებითად, მარცხნივ განლაგებული წერტილებისათვის კი—უარყოფითად, იმ პირობით თუ დამკვირვებელი პირისახით OZ მიმართულებით დადგება (ნახ. 3-II);

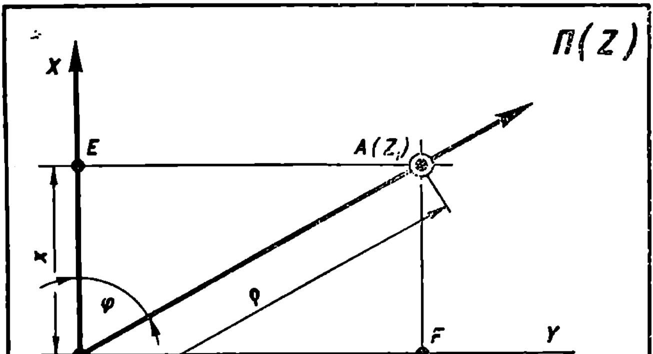
გ) $ZOY\equiv\Pi(X)$—ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მარჯვნივ განლაგებული წერტილებისათვის ნიშნულები მივიღოთ დადებითად, მარცხნივ განლაგებული წერტილებისათვის — უარყოფითად, იმ პირობით, თუ დამკვირვებელი პირისახით OY მიმართულებით დადგება (ნახ. 3-III).

3. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი პოლარული კოორდინატების სისტემაზე დაყრდნობით

გავეცნოთ სიბრტყის წერტილის სხვა სპეციალურ კოორდინაციას (ნახ. 4). ავიღოთ სიბრტყეზე ერთი საკოორდინატო ღერძი OX და ვუწოდოთ მას პოლარული ღერძი. ამავე სიბრტყის ნებისმიერი A წერტილი შევაერთოთ O სათავესთან ანუ პოლუსთან. მიღებული OA მონაკვეთი აღვნიშნოთ ρ ასოთი და ვუწოდოთ მას პოლარული რადიუს-ვექტორი. კუთხე, რომელზედაც მობრუნდება OX ღერძი ρ რადიუს-ვექტორთან შესათავსებლად, აღვნიშნოთ φ ასოთი და ვუწოდოთ პოლარული კუთხე. ამ კუთხეს ჩავთვლით დადებითად, თუ OX ღერძის მობრუნება ρ რადიუს-ვექტორთან შესათავსებლად ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგივე კუთხე უარყოფითად უნდა ჩავთვალოთ.



ნახ. 4



ნახ. 5

რადიუს-ვექტორის იმ ნაწილს, რომელსაც შეუთავსდება OX ღერძის დადებითი მიმართულება (OX ღერძის დადებითი მიმართულება მერიდიანის

ჩრდილოეთის მიმართულების თანხვდენილად მივიღოთ) φ კუთხით მობრუნების დროს, ვუწოდოთ დადებითი ნაწილი, მეორეს კი — უარყოფითი ნაწილი. ამრიგად, A წერტილს სიბრტყეზე შეგვიძლია დავუკავშიროთ რიცხვების წყვილი — φ და ρ, რაც ასე ჩაიწერება: $A(\varphi, \rho)$. აღნიშნულ წყვილს წერტილის პოლარული კოორდინატები ეწოდება, ხოლო მიღებულ სისტემას — პოლარული კოორდინატების სისტემა. სამთო საქმეში უპირატესად დადებით პოლარულ კოორდინატებს იყენებენ.

პოლარული კოორდინატები მარტივად უკავშირდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მე-5 ნახაზი, საიდანაც ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

დეკარტის კოორდინატების მიხედვით შესაძლებელია პოლარული კოორდინატების განსაზღვრაც:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \text{ აქ ყოველთვის დადებითია})$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

თუ განხილული კოორდინატთა სისტემის $\Pi(Z)$ სიბრტყეს მივიღებთ ძირითად გეგმილთსიბრტყედ, ხოლო ამ სისტემაში განსაზღვრულ წერტილს გვერდით მივუწერთ რიცხვს, რომელიც გამოსახავს მის დაშორებას ძირითადი გეგმილთსიბრტყიდან, მივიღებთ სივრცითი წერტილის კომპლექსურ ნახაზზე მოსაცემად საკმარის პირობებს. სახელდობრ, $A(\varphi, \rho, Z_1)$, სადაც φ და ρ პოლარული კოორდინატებია, Z_1 კი — A წერტილის ნიშნული.

მივიღოთ, რომ Z_1 ნიშნული დადებითია, თუ წერტილი მოთავსებულია ძირითადი გეგმილთსიბრტყის ზემოთ (გეგმილთსიბრტყის თარზული მდებარეობის დროს) ან მარჯვნივ (გეგმილთსიბრტყის შვეული მდებარეობის დროს), წინააღმდეგ შემთხვევაში ნიშნული უარყოფითი იქნება.

§ 2. წერტილის, სწორი ხაზისა და სიბრტყის გეგმილის აგება

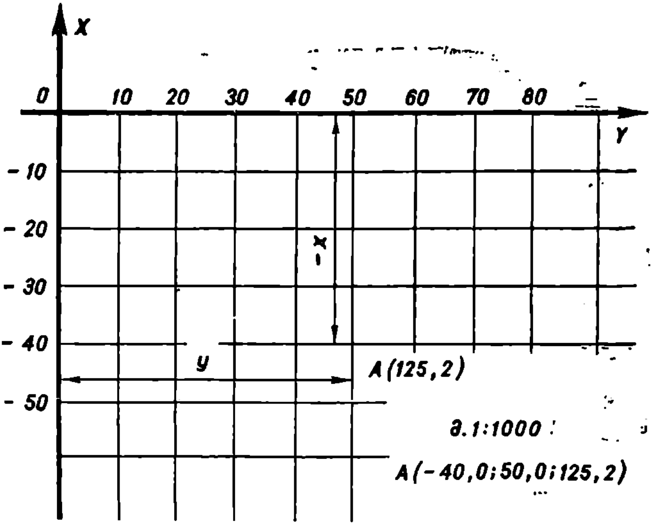
1. მოცემული კოორდინატებით წერტილის ნიშნულიანი გეგმილის აგება

ვიდრე მაგალითების განხილვას შევუდგებოდეთ, საჭიროა მივიღოთ ზოგიერთი პირობა: ა) ზომის ერთეულად წინასწარ მივიღოთ მეტრი და რიცხობრივი მაჩვენებლები ვიხმაროთ განზომილების ერთეულების მიწერის გარეშე.

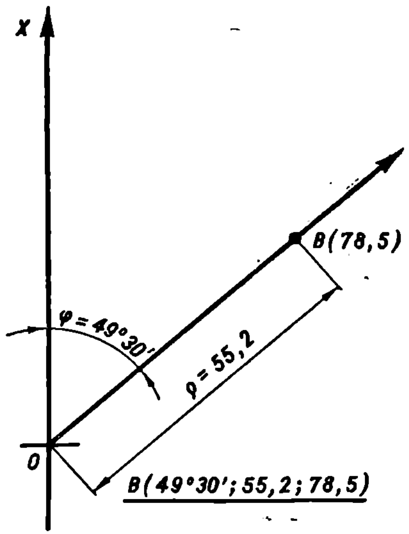
ბ) ჩვენს მიერ შედგენილ კომპლექსურ ნახაზს მომავალში ვუწოდოთ გეგმა, რომელზედაც, როგორც წესი, მოცემული იქნება ნახაზის მასშტაბი.

გ) წერტილის ნიშნული შეიძლება გამოისახოს მთელი ან ათწილადი რიცხვებით; მძიმის შემდეგ ათწილადი ნიშნების რაოდენობა დამოკიდებულია ნახაზის მასშტაბზე;

დ) ორ წერტილს შორის სიმაღლეთა სხვაობა ნიშნავს მათი ნიშნულების სხვაობას. იგი აღინიშნება h ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსის სახით



ნახ. 6



ნახ. 7

მიეწერება წერტილების აღმნიშვნელი ასოები. მაგალითად, h_{AB}— ნიშნავს A და B წერტილების სიმაღლეთა სხვაობას. მივიღოთ, რომ ასეთი ორი წერტილიდან ერთ-ერთი იქნება გამოსავალი; თუ მეორე მასზე მაღლა აღმოჩნდება, გვექნება აღმავალი მიმართულება და დადებითი სხვაობა, წინააღმდეგ შემთხვევაში—დაღმავალი მიმართულება და უარყოფითი სხვაობა. h-ის ქვემო ინდექსში პირველად გამოსავალი წერტილი აღინიშნება (მაგ., h_{AB}— გამოსავალია A წერტილი, h_{CD}— გამოსავალია C და ა. შ.).

პირველი მაგალითი. მოცემულია A წერტილი, რომლისთვისაც $x=-40{,}0$; $y=50{,}0$ და $z=125{,}2$; ნახაზის მასშტაბია $1:1000$. ავაგოთ A წერ-

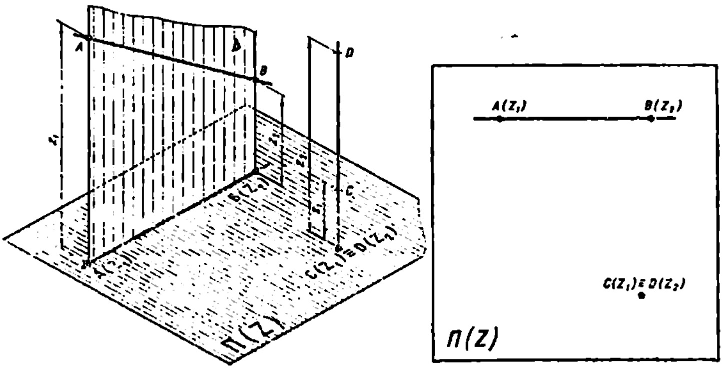
ტილის ნიშნულიანი გეგმილი მოცემული მართკუთხა კოორდინატების მიხედვით (ნახ. 6).

მ ე ო რ ე მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია B წერტილი, რომლისთვისაც $\varphi=49°30'$; $\rho=55,2$ და $z=78,5$; ნახაზის მასშტაბია 1 : 1000. ავაგოთ B წერტილის ნიშნულიანი გეგმილი მოცემული პოლარული კოორდინატების მიხედვით (ნახ. 7).

2. სწორი ხაზის დაგეგმილება

სწორი ხაზის გეგმილი, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ სწორზე მდებარე ყველა წერტილების გეგმილების ერთობლიობა, ისევ სწორი ხაზია. გამონაკლისს წარმოადგენს გეგმილთსიბრტყის მართობული ანუ მაგეგმილებელი სწორი ხაზი, რომელიც წერტილის სახით გეგმილდება.

თუ სივრცეში აღებული სწორი ხაზის ნებისმიერ ორ წერტილს ჩვენთვის ცნობილი წესით დავაგეგმილებთ და მიღებულ გეგმილებს სწორი ხაზით



ნახ. 8

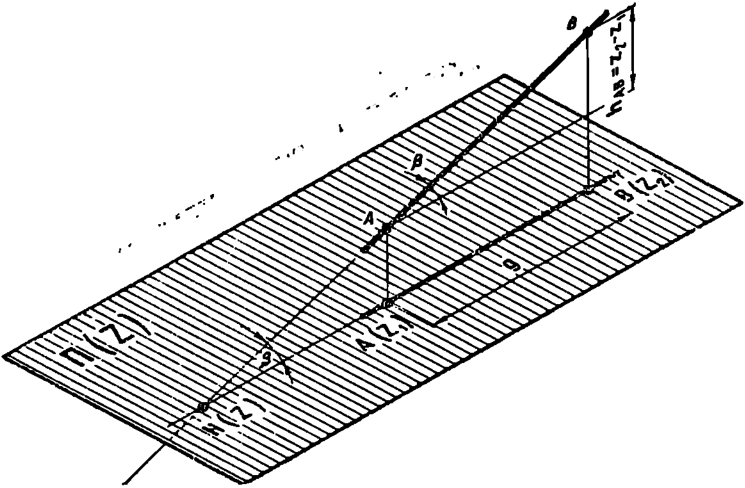
შევაერთებთ, მივიღებთ მოცემული სწორი ხაზის გეგმილს. შებრუნებული პირობაც სრულიად განსაზღვრული ხასიათისაა — გეგმაზე აღებულ ყოველ ორ წერტილს სივრცეში ერთადერთი სწორი ხაზი შეესაბამება (ნახ. 8).

შემოვიღოთ ზოგიერთი განსაზღვრები, ტერმინები და აღნიშვნები.

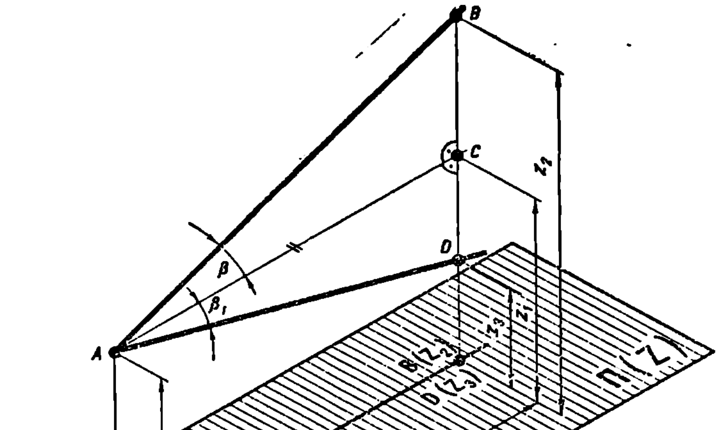
სწორი ხაზის მონაკვეთის გეგმილს ვუწოდოთ ქ ვ ე დ ე ბ უ ლ ი და აღვნიშნოთ g ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსის სახით მიეწერება სწორი ხაზის განმსაზღვრელი ელემენტები, მაგალითად, g_{AB} ნიშნავს AB ხაზის ქვედებულს ან g_a — a ხაზის ქვედებულს და ა. შ.

უმცირეს კუთხეს, რომელსაც მოცემული ხაზი გეგმილთსიბრტყესთან შეადგენს, ვუწოდოთ ამ ხაზის დ ა ხ რ ი ს კ უ თ ხ ე და აღვნიშნოთ β ასოთი (ნახ. 9).

სწორი ხაზის გეგმილთსიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილს ვუწოდოთ ამ ხაზის კ ვ ა ლ ი და აღვნიშნოთ ქვემოინდექსიანი H-ით; მაგალითად H_{AB} ნიშნავს AB ხაზის კვალს.



ნახ. 9



ნახ. 10

სწორი ხაზის მონაკვეთის ბოლოების სიმაღლეთა სხვაობის შეფარდებას მისი კვეთებულის სიგრძესთან ვუწოდოთ მოცემული სწორი ხაზის ქ ა ნ ო ბ ი და აღვნიშნოთ i ასოთი.

თუ AB მიმართულება აღმავალია, მაშინ მის დახრის კუთხეს აღმართის კუთხე ვუწოდოთ (ნახ. 10). ამ დროს ქანობი დადებითი იქნება. წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება დაღმართის კუთხე და უარყოფითი ქანობი. საილუსტრაციოდ გავარჩიოთ მე-10 ნახაზი:

$$\triangle ACB\text{-დან} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{z_2 - z_1}{g_{AB}} = \frac{h_{AB}}{g_{AB}} = i. \text{ (ქანობი დადებითია)}$$

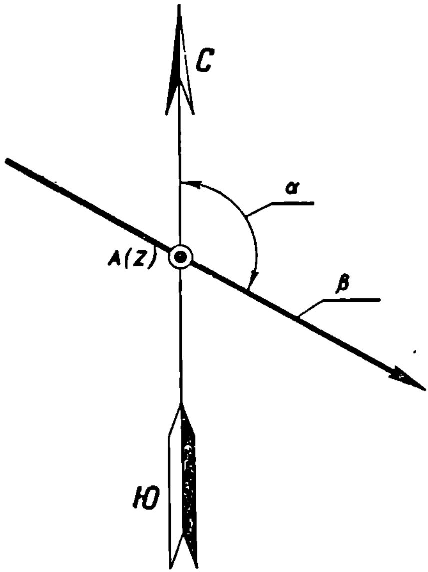
$$\triangle ACD\text{-დან} \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{z_3 - z_1}{g_{AD}} = \frac{h_{AD}}{g_{AD}} = i. \text{ (ქანობი უარყოფითია)}$$

განვიხილოთ სწორი ხაზის გეგმაზე მოცემის მეორე შემთხვევა.

სწორი ხაზი სავსებით განსაზღვრულია, თუ მოცემულია მისი ერთი წერტილი და მიმართულება.

სწორი ხაზის მიმართულება ორი კუთხური სიდიდით განისაზღვრება: თარაზულ სიბრტყეში — განერცობის α კუთხით, ხოლო შვეულ სიბრტყეში — გეგმილთსიბრტყის მიმართ დახრის β კუთხით.

ხაზის განერცობის კუთხე ეწოდება მარჯვენა ვექტორულ კუთხეს, ათვლილს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, აბსცისების ღერძის დადებითი მიმართულებიდან (ან მერიდიანის ჩრდილოეთ მიმართულებიდან) სწორი ხაზის გეგმილამდე.



ნახ. 11

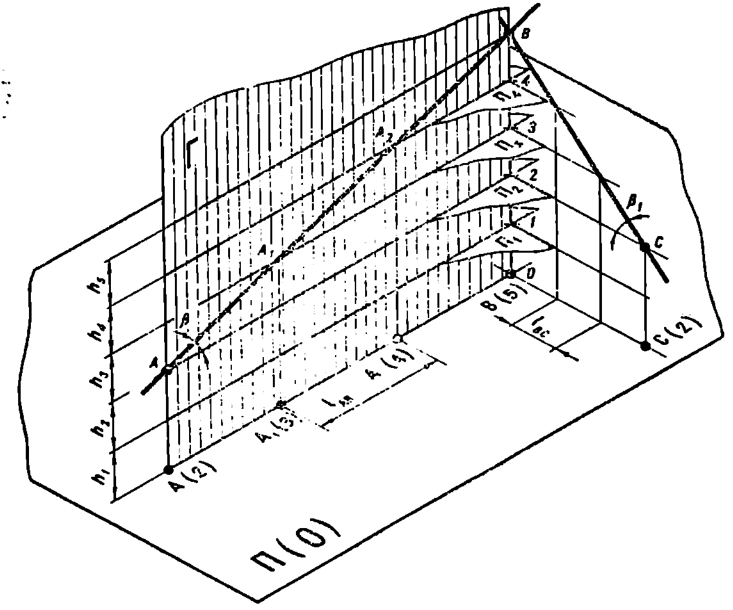
მივიღოთ რომ მოცემული წერტილი იქნება გამოსავალი. ამის მიხედვით, თუ ამ წერტილში ხაზის განერცობით (აღინიშნება ისრით) დახრის კუთხე დადებითია, გვექნება აღმავალი მიმართულება და დადებითი ქანობი, წინააღმდეგ შემთხვევაში — დაღმავალი მიმართულება და უარყოფითი ქანობი.

მე-11 ნახაზზე ნაჩვენებია გეგმაზე სწორი ხაზის მოცემის განხილული შემთხვევა, სახელდობრ, როდესაც ცნობილია სწორი ხაზის ერთი წერტილი (A) და მიმართულება (α და β).

ვ. სწორი ხაზის გრადუირება

მრავალი ამოცანისათვის საჭიროა, რომ სწორი ხაზის გეგმილზე აღნიშნული იყოს წერტილების რიგი, რომელთა ნიშნულები მთელი რიცხვები იქნება. ასეთი წერტილების მოძებნას სწორი ხაზის გრადუირება ეწოდება.

მოცემულია სივრცის AB სწორი ხაზი და მისი გეგმილი $\Pi(0)$ გეგმილთსიბრტყეზე. წარმოვიდგინოთ, რომ გეგმილთსიბრტყის ზემოთ გატარებულია დონის $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3, \ldots$ სიბრტყეები, რომელთა დონეები თანამიმდევრულად მაღლდება მიღებულ ზომის თითო ერთეულით (ნახ. 12). ყოველ ორ პარალელურ



ნახ. 12

სიბრტყეს შორის უმოკლეს მანძილს კვეთის სიმაღლე ეწოდება და აღინიშნება h ასოთი ($h_1=h_2=h_3=\ldots$). მოცემული სწორი ხაზით ასეთი სიბრტყეების გადაკვეთა მოხდება შესაბამისი სიბრტყის დონის ნიშნულიან წერტილში. რადგან თითოეული მკვეთი პარალელური სიბრტყის დონე მთელი რიცხვია, მიღებული წერტილების ($A_1 A_2 A_3 \ldots$) ნიშნულებიც მთელი რიცხვები იქნება.

თუ ორი მეზობელი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობა ერთი ერთეულის ტოლია (მაგ., A_1 და A_2), მაშინ ასეთ წერტილებს შორის მოქცეული მონაკვეთის ქვედებულს მოცემული ხაზის ინტერვალი ეწოდება და აღინიშნება l ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსად ეწერება თვით ხაზის აღმნიშვნელი ასოები. მაგალითად, l_{AB} ნიშნავს A და B წერტილებით განსაზღვრული სწორი ხაზის ინტერვალს, l_a კი — ნიშნავს, რომ l ინტერვალი ეკუთვნის სწორ ხაზს, რომელიც a ასოთია აღნიშნული.

შევნიშნოთ, რომ ინტერვალი და ქანობი ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია. მაგალითად, როცა $g=l$, ქანობის ფორმულა შემდეგ სახეს ღებულობს:

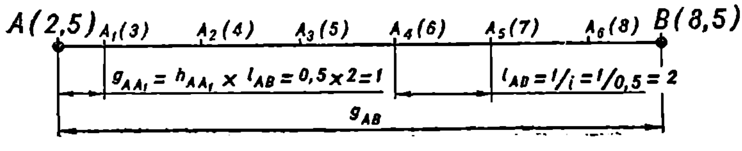
$$i=\frac{1}{l}$$

აქედან

$$l=\frac{1}{i}=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\beta.$$

მე-12 ნახაზზე ნაჩვენებია მეორე სწორი ხაზიც (BC), რომლის დახრის β_1 კუთხე მეტია AB ხაზის დახრის β კუთხეზე. ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ რაც უფრო მეტია დახრის კუთხე, მით უფრო მცირეა ინტერვალი და პირიქით.

სავალდებულო არ არის, რომ მკვეთი სიბრტყეები სწორი ხაზის დაყოფის ყოველ წერტილზე იქნეს გატარებული: ეს დამოკიდებულია ხაზის დახრის კუთხესა და ნახაზის მასშტაბზე. მაგალითად, ზოგჯერ საჭიროა, რომ მიღებული ზომის ერთი ერთეული დაიყოს რამდენიმე ტოლ ნაწილად (მაგ., ოთხად) და დაყოფის წერტილებში გატარდეს დონის სიბრტყეები, ზოგჯერ კი საჭიროა პირიქით, დონის სიბრტყეები გავატაროთ ყოველ მე-2, მე-5, მე-10 და ა. შ. ზომის ერთეულზე. ამას ეწოდება მოცემული სწორი ხაზის გრადუირება 0,25; 2; 5; 10 და ა. შ. ინტერვალით. ამრიგად, თუ მიღებული კვეთის სიმაღლე (დონის სიბრტყეებს შორის მანძილი) ერთ ერთეულს აღემატება, საჭიროა ზემოთ აღნიშნული ფორმულით გამოთვლილი ინტერვალი გადავამრავლოთ მიღებულ კვეთის სიმაღლეზე. ინტერვალის გრაფიკულად გამოთვლის დროს საჭიროა ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთი კათეტი მიღებული კვეთის სიმაღლის, ხოლო ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხე მოცემული სწორი ხაზის დახრის კუთხის (β) ტოლი იქნება. ასეთი მართ-



ნახ. 13

კუთხა სამკუთხედის მეორე კათეტი, მოცემული სწორი ხაზის (მიღებული კვეთის სიმაღლის მიხედვით) გრადუირებისათვის საჭირო ინტერვალს იძლევა.

მოცემულია სწორი ხაზის მონაკვეთის $A(2.5)$ $B(8.5)$ გეგმილი. დავაგრადუიროთ იგი ისე, რომ დაყოფის წერტილებს შორის მანძილი ერთი ინტერვალის ტოლი იყოს (ნახ. 13).

ნახაზზე გავზომოთ მოცემული მონაკვეთის ქვედებულის სიგრძე ($g_{AB}=12,5$), გამოვითვალოთ მოცემული წერტილების სიმაღლეთა სხვაობა ($h_{AB}=6$). გამოვითვალოთ ხაზის ქანობი:

$$i=\frac{h_{AB}}{g_{AB}}=\frac{6}{12,5}\approx 0,5,$$

მაშინ:

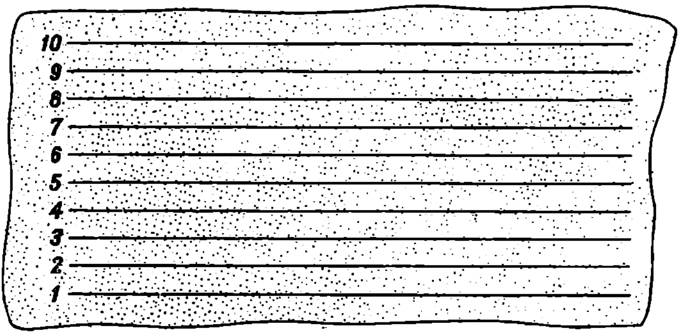
$$l_{AB} = \frac{1}{i} = \frac{1}{0,5} = 2$$

$$l_{AB} = 2.$$

A (2,5) წერტილის მომდევნო A_1 წერტილის ნიშნული იქნება 3. A (2,5) A_1 (3) მონაკვეთის სიგრძე (g_{AA_1}) A და A_1 წერტილების სიმაღლეთა სხვაობისა (h_{AA_1}) და ინტერვალის (l_{AB}) ნამრავლის ტოლი იქნება ($0,5 \times 2 = 1$). A_1 (3) წერტილიდან მოცემულ g_{AB} მონაკვეთზე, მიმდევრობით გადავზომოთ ინტერვალის ტოლი მონაკვეთები. მივიღებთ A_2(4), A_3(5), A_4(6), A_5(7) და A_6(8) წერტილებს.

სწორი ხაზის გრადუირების აღწერილი ხერხის გარდა, პრაქტიკაში გავრცელებულია გრაფიკული მეთოდებიც. სახელდობრ, პროფილისა და ტრაფარეტის მეთოდები. ამასთან არსებობს სამამულო წარმოების ხელსაწყოები, რომლებიც სწორი ხაზების ქვედებულების გრადუირებას მექანიკურად აწარმოებენ. განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი.

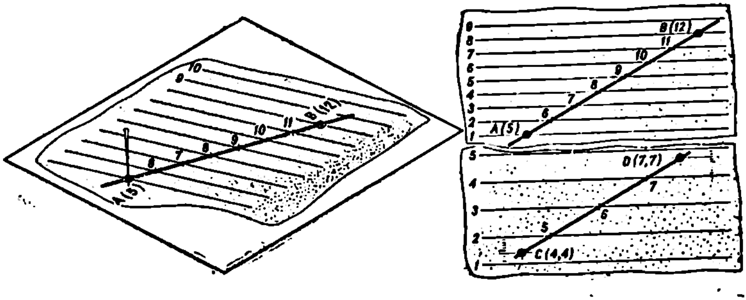
ტრაფარეტის მეთოდი. საჭიროა გამჭვირვალე ქაღალდზე წინასწარ გამოვსახოთ პარალელური ხაზების სისტემა, ე. ი. მოვამზადოთ ტრაფარეტი (ნახ. 14). ხაზებს შორის მანძილი და მონაკვეთების სიგრძე დამოკიდებულია ნახაზის მასშტაბზე.



ნახ. 14

მოცემულია A (5) B (12) სწორი ხაზის გეგმილი. მისი გრადუირებისათვის დავადოთ მასზე ტრაფარეტი ისე, რომ კიდურა ხაზი შეუთავსდეს A (5) წერტილს. შეთავსების ადგილი დავამაგროთ ნემსით ან ქინძისთავით. ტრაფარეტი ვაბრუნოთ ნემსის გარშემო იქამდე, ვიდრე B (12) წერტილი არ აღმოჩნდება ტრაფარეტის მე-8 ხაზზე (8 მიღებულია A და B წერტილების სიმაღლეთა სხვაობას დამატებული ერთი). ამის შემდეგ მოცემული ქვედებულის გადაკვეთა ტრაფარეტის ხაზებთან მოგვცემს 6, 7, 8,...,11 საძიებელ წერტილებს.

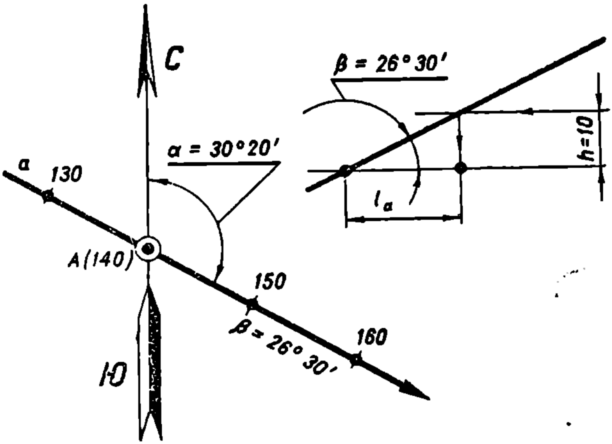
თუ მონაკვეთის ბოლოების ნიშნულები წილადი რიცხვებია, ტრაფარეტის ხმარების წესი არ იცვლება, მაგრამ ასეთ შემთხვევაში მოცემულ წერ-



ნახ. 15

ტილებს ვათავსებთ არა ტრაფარეტის ხაზთან, არამედ ხაზებს შორის მოქცეულ მოცემულ წილადის შესაბამის შუალედთან (ნახ. 15).

დავაგრადუიროთ *a* ხაზი ისე, რომ დაყოფის წერტილებს შორის მანძილი 10 ინტერვალის ტოლი იყოს, (ე. ი. $h=10$). მოცემულია სწორი ხაზის



ნახ. 16

ერთი წერტილი A (140) და მისი დახრისა ($\beta=26°30'$) და განვრცობის ($\alpha=30°20'$) კუთხეები.

გრადუირებისათვის საჭირო ინტერვალი შესაძლოა გამოვითვალოთ გრაფიკულად (მე-16 ნახაზზე ნაჩვენებია ცალკე) ან ჩვენთვის ცნობილი ფორმულით:

$$l=\mathrm{ctg}\,\beta.$$

ალებულ შემთხვევაში:

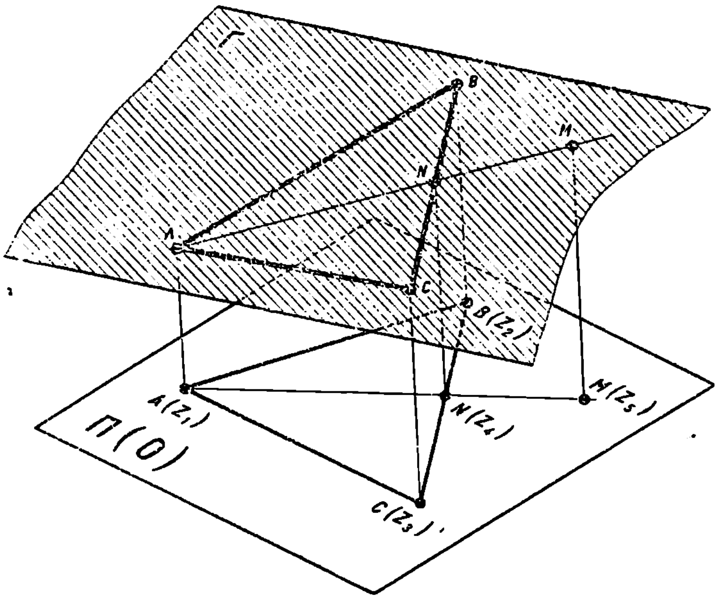
$$l=\operatorname{ctg} 26°30'=2.000,$$

$$l=2.0.$$

ორივე შემთხვევაში აუცილებელ საჭიროებას წარმოადგენს ნახაზის მასშტაბის გათვალისწინება; გარდა ამისა, მეორე შემთხვევაში მიღებული შედეგი უნდა გადამრავლდეს მოცემული კვეთის სიმაღლეზე.

4. სიბრტყის დაგეგმილება

სამი წერტილი, რომლებიც ერთ სწორ ხაზზე არ მდებარეობენ, ერთადერთ სიბრტყეს განსაზღვრავს სივრცეში. ავიღოთ სივრცის სამი ასეთი წერტილი (A, B, C) და ჩვენთვის ცნობილი წესით დავაგეგმილოთ (ნახ. 17). თვალსაჩინოებისათვის წერტილები შევაერთოთ ხაზებით. მივიღებთ ABC სამკუთხედით მოცემული სიბრტყის გეგმილს. შევნიშნოთ, რომ სამი წერტილით, რომლებიც ერთ სწორ ხაზზე არ მდება-



ნახ. 17

რეობენ, სიბრტყის მოცემის შემთხვევაში ნახაზზე ცალსახად განისაზღვრება ამ სიბრტყის კუთვნილი ყველა დანარჩენი წერტილი. მაგალითად, ABC სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილისათვის შეიძლება განისაზღვროს ნიშნული Z ისე, რომ მიღებულმა $M(Z)$ გეგმილმა მოცემულ ABC სიბრტყეზე მდებარე ერთადერთი M წერტილი განსაზღვროს.

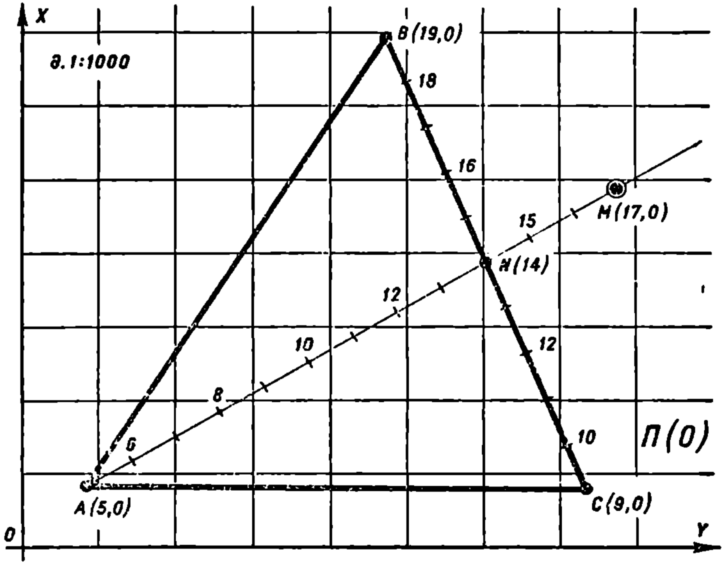
საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მე-18 ნახაზი. გეგმაზე მოცემულია ABC სიბრტყე და M წერტილი. საჭიროა განისაზღვროს M წერტილის ნიშნული

ისე, რომ მისი შესაბამისი წერტილი სივრცეში მოცემული სიბრტყის კუთვნილი იყოს. ამისათვის შეგვიძლია მოვიქცეთ ასე:

ა) A (5,0) წერტილი შევაერთოთ M წერტილთან და B (19,0) C (9,0) მონაკვეთის გრადუირებით განვსაზღვროთ $N = AM \times BC$ წერტილის ნიშნული;

ბ) AN სწორი ხაზის გრადუირებით განისაზღვრება M წერტილის ნიშნული. მიღებული M (17,0) წერტილი ABC სიბრტყეზე მდებარე M წერტილის გეგმილი იქნება.

განხილული ნახაზების მიხედვით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ სიბრტყის განსაზღვრის სხვა შემთხვევებზეც. მაგალითად, თუ მოცემული წერტილებიდან



ნახ. 18

შევაერთებთ მხოლოდ ორს (მაგ., A-სა და B-ს) მივიღებთ სწორი ხაზითა (AB) და მის გარეშე მდებარე წერტილით (C) სიბრტყის განსაზღვრის შემთხვევას. თუ ABC სამკუთხედის მხოლოდ ორ გვერდს (მაგ., AB და AC) გამოვსახავთ — მივიღებთ შემთხვევას, როცა სიბრტყე ორი გადაკვეთილი ხაზითაა განსაზღვრული. შევნიშნოთ, რომ თუ სწორი ხაზების გადაკვეთის წერტილს უსასრულობაში გადავიტანთ, მივიღებთ სიბრტყის განსაზღვრის კიდევ ერთ შემთხვევას, სახელდობრ, როცა იგი ორი პარალელური ხაზითაა მოცემული.

როგორც ვხედავთ, სიბრტყის დაგეგმილების ჩამოთვლილი შემთხვევები წარმოადგენს არაერთ სწორ ხაზზე მდებარე სამი წერტილით სიბრტყის განსაზღვრის შედეგებს.

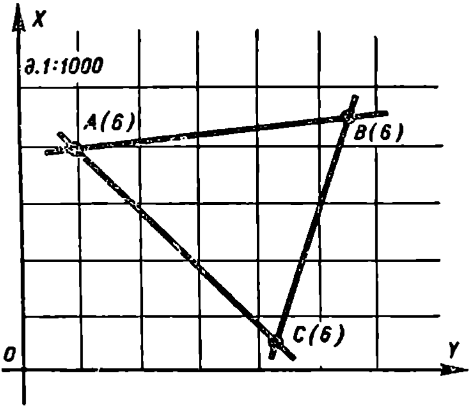
სიბრტყე სივრცეში ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მიმართ სამი უმთავრესი მდებარეობით ხასიათდება. ესენია:

ა) ზოგადი მდებარეობის ანუ ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მიმართ დახრილი სიბრტყე (ნახ. 18);

ბ) ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელური სიბრტყე: ასეთი მდებარეობის სიბრტყეს დონის სიბრტყე ეწოდება (ნახ. 19); შესაბამისად ასეთ სიბრტყეში მდებარე ყოველი ხაზი—დონის ხაზია.

გ) ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მართობული სიბრტყე. ასეთი მდებარეობის სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყე ეწოდება. იგი შესაძლოა გეგმაზე მოცემული იქნეს განსაზღვრული სწორი ხაზით (ნახ. 20).

განვიხილოთ ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის დაგეგმილების კიდევ ერთი შემთხვევა, რომელიც განსაკუთრებით გავრცელებულია ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ 21-ე ნახაზი.



ნახ. 19

მოცემულია ძირითადი გეგმილთსიბრტყე $\Pi(O)$ და ზოგადი მდებარეობის E სიბრტყე. გავატაროთ E სიბრტყის მკვეთი და ერთმანეთისაგან თანაბრად დაშორებული A, B, Γ,... დონის სიბრტყეები. ორ უახლოეს პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილს კვეთის სიმაღლე ვუწოდოთ და აღვნიშნოთ h ასოთი ($h_1 = h_2 = h_3 = \ldots$). დონის სიბრტყეები E სიბრტყესთან გადაიკვეთებიან დონის ხაზებზე. თითოეულ ასეთ დონის ხაზს ექნება თავისი გეგმილი და ნიშნული ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე ($s(O)$, $s_1(Z_1)$, $s_2(Z_2)$, $s_3(Z_3)$,...) რადგანაც ისინი სივრცეში ურთიერთპარალელურნი და ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით დაშორებულები არიან, გეგმაზედაც მათი გეგმილები ურთიერთპარალელური და ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით დაშორებული სწორი ხაზები იქნება. ვინაიდან ორი პარალელური სწორი ხაზი სივრცეში ერთადერთ სიბრტყეს განსაზღვრავს, ამიტომ აღნიშნული დონის ხაზების ნებისმიერი წყვილი გეგმაზე მხოლოდ E სიბრტყეს იძლევა.

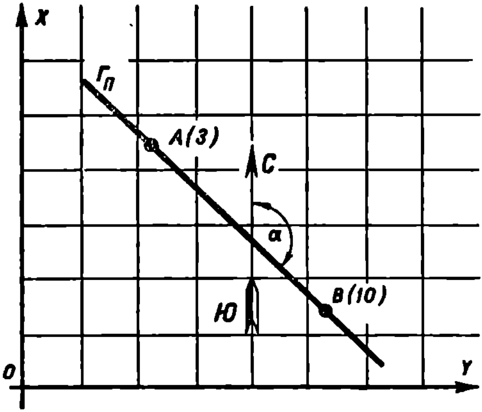
სიბრტყის განსაზღვრისათვის ხშირად გამოიყენება მისი მახასიათებელი სხვა ელემენტებიც; სახელდობრ: სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის ხაზი, დახრის კუთხე, ინტერვალი, ქანობის მასშტაბი, განვრცობის კუთხე (იხ. ნახ. 21).

სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის ხაზი ეწოდება ამ სიბრტყეში აღებულ და თარაზულების მართობულად გატარებულ ხაზს.

სიბრტყის ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი **დახრის ორწახნაგა კუთხე** იზომება მისი უდიდესი ვარდნილობის ხაზის ძირითად გეგმილთსიბ-

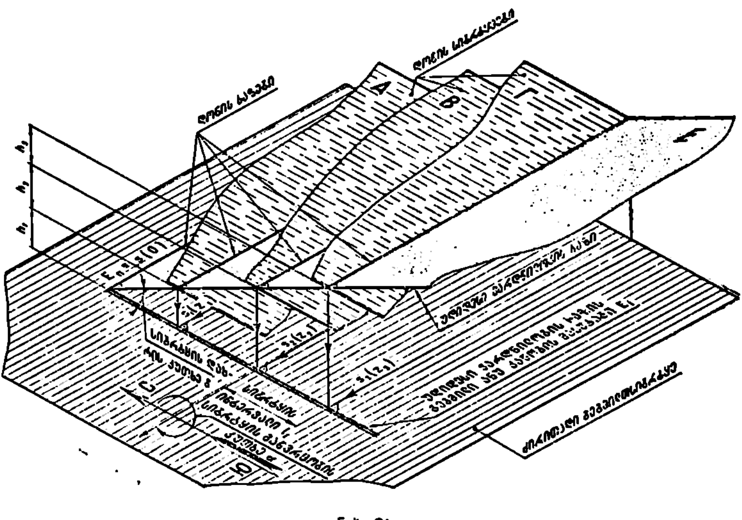
რტყისადმი დახრის ხაზოვანი კუთხით. იგი აღინიშნება ð ასოთი. ამ კუთხეს ხშირად სიბრტყის *ვარდნილობის კუთხესაც* უწოდებენ.

უდიდესი ვარდნილობის ხაზის მონაკვეთს ორ მეზობელ თარაზულას შორის კვეთის დახრილი სიმაღლე ჰქვია, ხოლო მის გეგმილს — მოცემული სიბრტყის *ინტერვალი*, მოცემული კვეთის სიმაღლისათვის. სიბრტყის ინტერვალი l ასოთი აღინიშნება.



ნახ. 20

უდიდესი ვარდნილობის ხაზის გეგმილს *ქანობის მასშტაბი* ეწოდება და აღინიშნება სიბრტყის აღმნიშვნელი ასოთი, რომელსაც ემატება i ქვემო ინდექსად (მაგალითად, E_i). აქვე შევნიშნოთ, რომ, თუ გრადუირების დროს გამოყენებული კვეთის სიმაღლე და მოცემული სიბრტყის მკვეთ პარალელურ სიბრტყეთა შორის h მანძილი ერთმანეთის ტო-



ნახ. 21

ლია, ქანობის მასშტაბის გრადუირების შედეგად მიღებული მონაკვეთები აღებული სიბრტყის ინტერვალის ტოლია.

თუ დამკვირვებელი დადგება პირისახით უდიდესი ვარდნილობის ხაზის ამაღლობისაკენ, მაშინ მარჯვენა მიმართულებას პირობით **სიბრტყის განვრცობას** უწოდებენ. სიბრტყის განმსაზღვრელ თარაზულებზე ასეთი მიმართულება ისრით აღინიშნება.

ხშირად საჭიროა მოცემული სიბრტყის განვრცობის ორიენტირება ქვეყნის მხარეების მიმართ. ამისათვის იყენებენ სიბრტყის განვრცობის აზიმუტს ან დირექციულ კუთხეს.

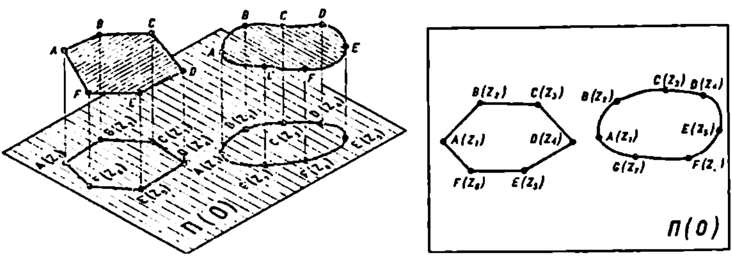
სიბრტყის განვრცობის დირექციული კუთხე ეწოდება მარჯვენა ვექტორულ კუთხეს, რომელიც აითვლება მერიდიანის ჩრდილოეთის (ან აბსცისების დადებითი) მიმართულებიდან სიბრტყის თარაზულების მიმართულებამდე. ხშირად ამ კუთხეს სიბრტყის **განვრცობის კუთხეს** უწოდებენ და აღნიშნავენ α ასოთი.

მოცემული სიბრტყის ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან გადაკვეთის ხაზს ანუ სიბრტყის იმ თარაზულას, რომელსაც გეგმილთსიბრტყის ნიშნული ექნება, ვუწოდოთ მოცემული სიბრტყის კვალი და აღვნიშნოთ სიბრტყის აღმნიშვნელი ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსად ექნება გეგმილთსიბრტყის აღმნიშვნელი ასო, მაგალითად, E_{Π} ან Δ_{Π_1} და ა. შ.

5. ბრტყელი გეომეტრიული ნაკვეთების დაგეგმილება

მხაზველობითი გეომეტრიის კურსიდან ჩვენ ვიცნობთ ბრტყელ გეომეტრიულ ნაკვთებს, ანუ სიბრტყის ნაწილებს შემოსაზღვრულს ჩაკეტილი ტეხილი ან მრუდე ხაზით. პირველს ბრტყელი მრავალკუთხედი ეწოდება (ყველა წვერო ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული), ხოლო მეორეს — ბრტყელი მრუდე ნაკვთი (შემომსაზღვრელი ჩაკეტილი მრუდის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული).

ბრტყელი გეომეტრიული ნაკვთების გამოსახვა ნიშნულებიან გეგმილებში ძნელი არ არის და ეყრდნობა წერტილების დაგეგმილების საკითხს. მა-



ნახ. 22

გალითად, ბრტყელი მრავალკუთხედის დასაგეგმილებლად საკმარისია მისი წვეროების, ხოლო მრუდე ნაკვთისათვის — მახასიათებელი წერტილების დაგეგმილება. მიღებული გეგმილები კი უნდა შეერთდეს იმავე თანამიმდევრობით, როგორც შეერთებულია მათი შესაბამისი წერტილები თვით გეომეტრიულ ნაკვთში (ნახ. 22).

ნაკვთის სიბრტყე შესაძლებელია იყოს ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელური, მართობული ან დახრილი მის მიმართ. პირველ შემთხვევაში იგი ნატურალური ფორმითა და ზომით გეგმილდება, ხოლო მეორეში — სწორი ხაზის სახით. როცა ნაკვთი დახრილია გეგმილთსიბრტყის მიმართ, მის ასეთ მდებარეობას ზოგადი მდებარეობა ეწოდება. ამ შემთხვევაში ნაკვთის გეგმილი დამახინჯებულია (22-ე ნახაზზე ნაჩვენები შემთხვევა).

§ 3. ორთოგონალური გეგმილების გარდაქმნის ზოგიერთი ხერხების გამოყენება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში

1. ზოგადი ცნობები

სივრცითი ამოცანების ამოხსნა კომპლექსურ ნახაზზე ხშირად რთულდება იმის გამო, რომ მოცემული გეომეტრიული ობიექტებისა (ორიგინალები) და გეგმილთსიბრტყეების ურთიერთგანლაგება ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნისათვის არახელსაყრელია. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ორთოგონალური გეგმილების გარდაქმნის ზოგიერთი ხერხი, რომლებიც ჩვენს მიერ რამდენადმე ახალი ინტერპრეტაციით არიან დამუშავებული ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდისათვის.

მხაზველობით გეომეტრიაში შეისწავლება აღნიშნული გარდაქმნების ორი ძირითადი გზა:

1. სივრცითი ობიექტების და გეგმილთსიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შეცვლა, ზოგადიდან კერძოზე გადასვლის მიზნით;

2. დაგეგმილების მიმართულების შეცვლა (მაგალითად, ორთოგონალურიდან კონუსურზე), ერთდროულად ახალი გეგმილთსიბრტყის შემოტანით ან ძველი სისტემის დატოვებით.

არსებობს სივრცითი ობიექტების და გეგმილთსიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შეცვლის ორი ძირითადი ხერხი:

ა) გეგმილთსიბრტყეების აღებული სისტემის შეცვლა ისე, რომ სივრცის უძრავი ობიექტი აღმოჩნდეს კერძო დამოკიდებულებაში გეგმილთსიბრტყეების ახალი სისტემის მიმართ (გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხი);

ბ) ობიექტის გადაადგილება სივრცეში ისე, რომ იგი აღმოჩნდეს კერძო დამოკიდებულებაში გეგმილთსიბრტყეების მოცემული სისტემის მიმართ (ბრუნვის ხერხი).

2. გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხი

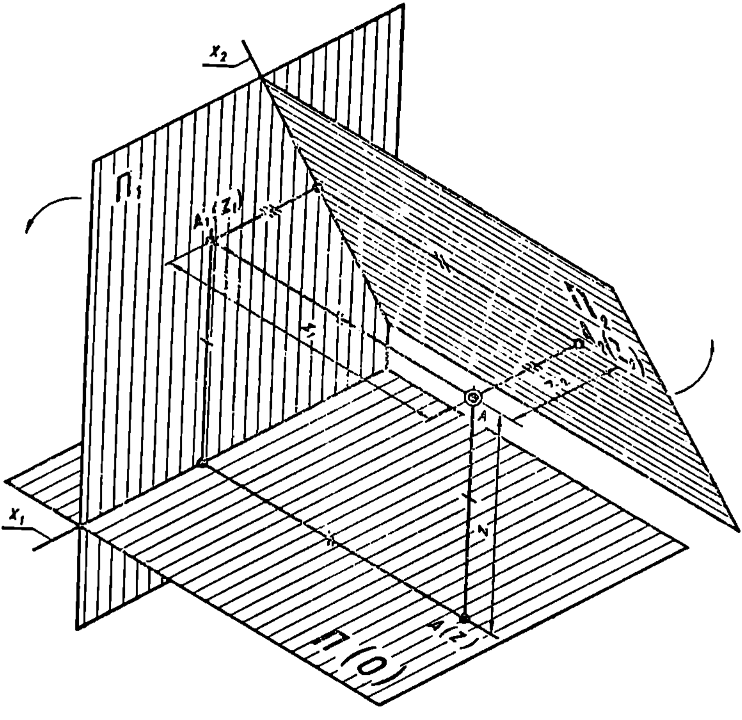
ახალი გეგმილთსიბრტყე შეიძლება იყოს ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელური ან მართობული.

პირველ შემთხვევაში მარტივად იცვლება გეგმილთსიბრტყის და, შესაბამისად, დასაგეგმილებელი ობიექტის მახასიათებელი წერტილების ნიშნულებიც. პირობით შევთანხმდეთ, რომ თუ ახალი სიბრტყე აღებული იქნება ძირითადი გეგმილთსიბრტყის ზევით (ძირითადი გეგმილთსიბრტყის თარაზული მდებარეობისათვის) ან მარჯვნივ (ძირითადი გეგმილთსიბრტყის შვეული მდებარეობისათვის), მაშინ მისი ნიშნული იყოს დადებითი, წინააღმდეგ შემთხვევაში — უარყოფითი.

მეორე შემთხვევისათვის, ე. ი. როცა ახალი გეგმილთსიბრტყე ძირითადის მართობულია, განვიხილოთ ნიშნულებიან გეგმილების მეთოდში გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენების შემდეგი გზა:

ჩვეულებრივი წესით სივრცის A წერტილი დავაგეგმილოთ ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე ($\Pi(O)$) და დავნიშნოთ მისი ნიშნულიანი გეგმილი — $A(Z)$ (ნახ. 23).

შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე Π_1 ($\Pi_1 \perp \Pi(O)$), მასზე ორთოგონალურად დავაგეგმილოთ იგივე A წერტილი და დავნიშნოთ მისი ახალი გეგმილი Π_1 სიბრტყეზე — $A_1(Z_1)$. შევთანხმდეთ, რომ ყოველი ახალი გეგ-



ნახ. 23

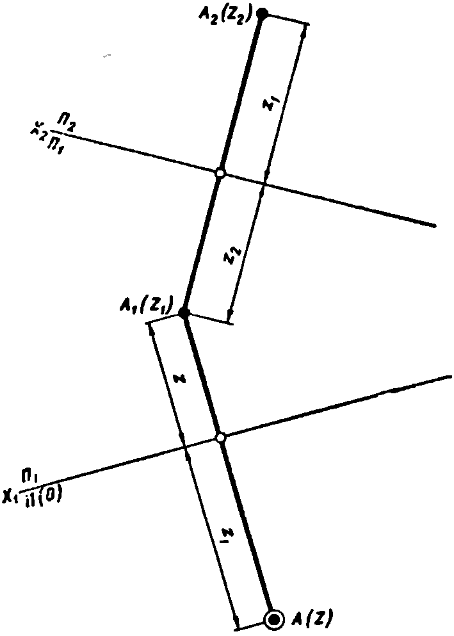
მილთსიბრტყის შემოტანას აღრიცხავს ამ სიბრტყეზე მიღებული გეგმილის ქვემო ინდექსი (მაგალითად, A_2—ახალი გეგმილთსიბრტყის ორჯერ შემოტანაზე მიუთითებს). ძველი და ახალი გეგმილთსიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი, ანუ გეგმილთღერძი, აღვნიშნოთ X ასოთი, რომელსაც მიწერილი ექნება ქვემო ინდექსი (X_1, X_2, X_3,...) იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ყოველი ახალი გეგმილთსიბრტყის შემოტანას აღრიცხავს და გარდა ამისა ყოველი ახალი სისტემის ნომერს უჩვენებს.

კვლავ მოვახდინოთ გეგმილთსიბრტყის შეცვლა. შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე $\Pi_2 (\Pi_2 \perp \Pi_1)$ და პირველის ანალოგიურად მასზე დავნიშნოთ A წერტილის ახალი გეგმილი — $A_2(Z_2)$.

ახალი გეგმილთსიბრტყის შემოტანა კომპლექსურ ნახაზზე X ღერძის გავლებით ვაჩვენოთ (ნახ. 24).

მივიღოთ, რომ ყოველი ასეთი ღერძი მიმართული იქნება მარცხნიდან მარჯვნივ და მარცხენად ჩაითვლება ის მხარე, საითაც სწერია X.

ღერძის მიმართ გეგმილთსიბრტყეების განლაგებაში, ანუ კომპლექსური ნახაზის წარმოქმნის პირობებში, გარკვევისათვის გავაკეთოთ შესაბამისი მინაწერები. მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში, (ნახ. 24) X_1 ღერძის ქვემოთ წერია $\Pi(O)$, ხოლო ზემოთ — Π_1. აქედან გამომდინარეობს A წერტილის ძველი და ახალი გეგმილების განლაგება X_1 ღერძის მიმართ.



ნახ. 24

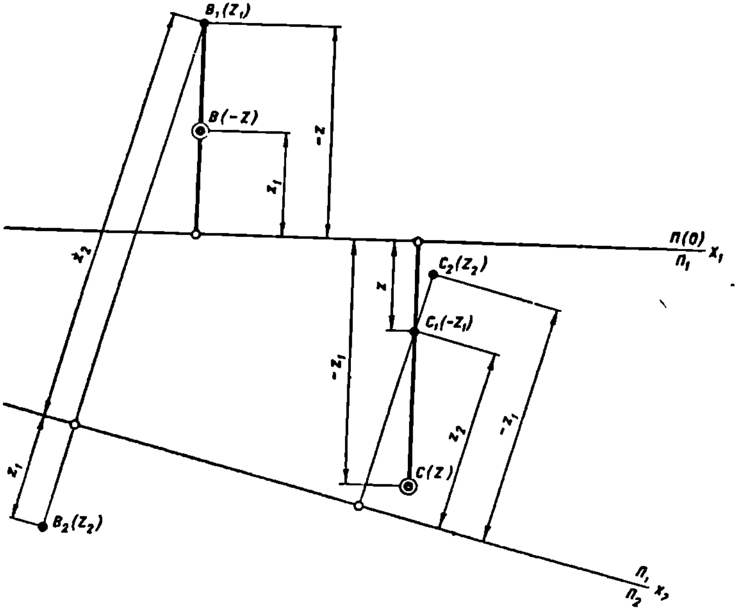
სივრცის ნებისმიერი წერტილის რაიმე ახალ გეგმილთსიბრტყეზე დაგეგმილების საკითხში დავაზუსტოთ ამ სიბრტყის მიმართ წერტილის ნიშნულის ნიშნის განსაზღვრის პირობები. საფუძვლად მივიღოთ § 1-ში აღნიშნული შეთანხმება და დავადგინოთ კომპლექსური ნახაზის წარმოქმნის შემდეგი პირობა: კომპლექსურ ნახაზზე ყოველი ახალი სიბრტყე ძირითად გეგმილთსიბრტყესთანაა შეთავსებული; ეს შეთავსება, როგორც წესი, უნდა მოხდეს ახალი სიბრტყის შემობრუნებით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ დამკვირვებელი იმყოფება ღერძის მარცხნივ და იყურება მის გასწვრივ.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ 25-ე ნახაზი. აქ ნაჩვენებია B და C წერტილების ახალი გეგმილების აგება.

B წერტილი უარყოფითნიშნულიანია ძირითადი გეგმილთსიბრტყის ($\Pi(O)$) მიმართ, ხოლო C უარყოფითნიშნულიანია ახალი გეგმილთსიბრტყის (Π_1) მიმართ.

განვიხილოთ ახალი გეგმილების ნიშნულების განსაზღვრის ხერხი. ამისათვის დავუბრუნდეთ 24-ე ნახაზს. X_1 სისტემაში A წერტილის ახალი გეგმილის საპოვნელად საკმარისია მოცემული $A(Z)$ გეგმილიდან X_1 ღერძზე დავუშვათ მართობი და ამავე მართობზე, ღერძის ზემოთ ან ქვემოთ (ეს დამო-

კიდებულია ნიშნულის ნიშანზე), გადავზომოთ მონაკვეთი, რომელიც Z-ის რიცხვითი მნიშვნელობის, ანუ წერტილის ძირითადი $\Pi(O)$ გეგმილთსიბრტყიდან დაშორების ტოლი იქნება. ამ გზით Π_1 გეგმილთსიბრტყეზე ავაგებთ A წერტილის ახალ გეგმილს, რომელსაც A_1-ით აღვნიშნავთ. რაც შეეხება მის ნიშნულს (Z_1), იგი მიიღება $A(Z)$ გეგმილიდან X_1 ღერძამდე მანძილის უშუა-



ნახ. 25

ლო გაზომვით. მართლაც, სივრცეში სწორედ ეს მონაკვეთი გამოსახავს მანძილს მოცემული A წერტილიდან ჩვენს მიერ შემოტანილ Π_1 გეგმილთსიბრტყემდე.

აღნიშვნებისა და მოქმედებების რეკომენდებული სისტემა ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენების მარტივ შესაძლებლობებს იძლევა.

ახალი გეგმილებისათვის ნიშნულების გამოთვლა კი, როგორც ამას უშუალოდ ამოცანების გადაწყვეტის დროს დავინახავთ, ჩატარებული გრაფიკული აგებების სიზუსტის ერთ-ერთი მაჩვენებელი იქნება.

3. ბრუნვის ხერხი

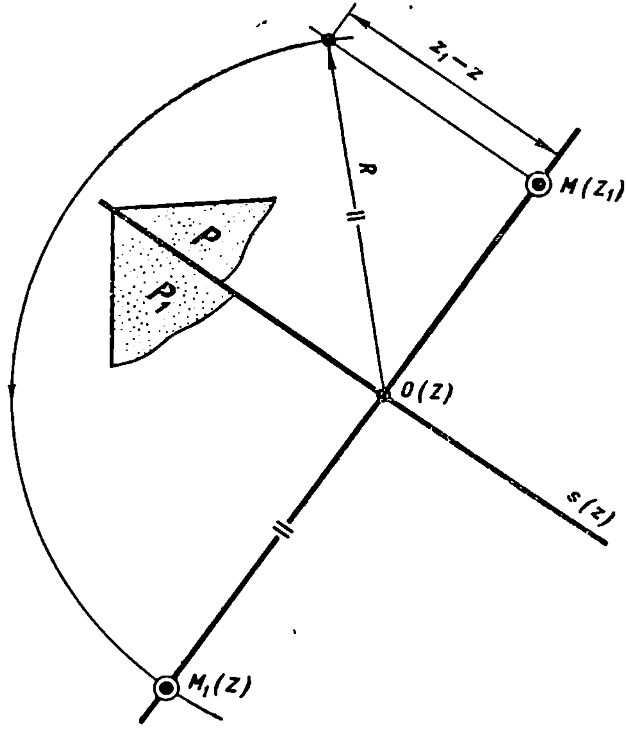
განვიხილოთ ბრტყელი წერტილოვანი ველის ბრუნვის ყველაზე გავრცელებული შემთხვევა — შეთავსება (ნახ. 26). ამ დროს ბრუნვა ხდება დონის ხაზის გარშემო ამავე დონის სიბრტყესთან შეთავსებამდე.

მოცემული წერტილის თარაზულას გარშემო ბრუნვით რაიმე დონის სიბრტყესთან შეთავსებისათვის საჭიროა ბრუნვის რადიუსის (R) განსაზღვრა.

უკანასკნელი წარმოადგენს უმოკლეს მანძილს მოცემული წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე. ამ მანძილის საპოვნელად საკმარისია მოცემული წერტილის გეგმილიდან ($M(Z_1)$) დავუშვათ მართობი ბრუნვის ღერძის გეგმილზე ($s(Z)$) და ვიპოვოთ მიღებული მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე სამკუთხედის წესით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდის განსაზღვრის საკითხი განხილულია მესამე თავში—„მეტრული ამოცანები".

აღსანიშნავია, რომ შესათავსებელი წერტილების სიმრავლის შემთხვევაში ასეთი სამკუთხედების აგება ართულებს გრაფიკულ სამუშაოს და ამცირებს შედეგის სიზუსტეს. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ შეთავსების სხვა ვარიანტები, რომლებიც ხასიათდებიან გრაფიკული სამუშაოების ნაკლები სირთულით და მეტი თვალსაჩინოებით.

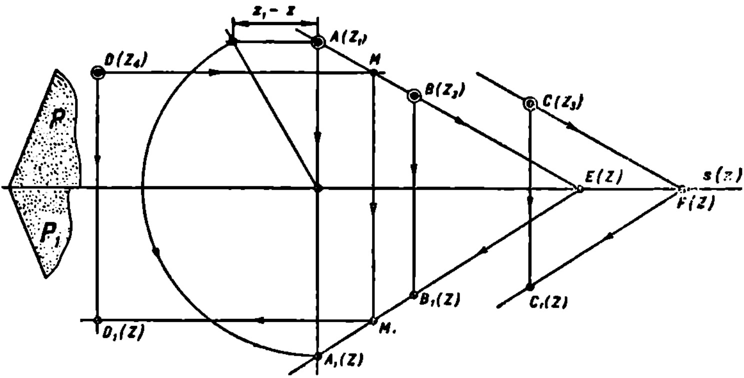


ნახ. 26

წინასწარ მივიღოთ აღნიშვნების გარკვეული სისტემა — მოცემულ წერტილს ახალ მდებარეობაში გადატანის შემდეგ მივაკუთვნოთ იმ სიბრტყის ნიშნული, რომელთანაც მოვახდინეთ მისი შეთავსება. შეთავსებული წერტილი აღვნიშნოთ იმავე ასოთი, რომლითაც იგი თავის პირვანდელ მდგომარეო-

ბაში იყო აღნიშნული. განსხვავებისათვის დავუმატოთ რიცხვითი მაჩვენებელი ქვემო ინდექსის სახით, იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ამ წერტილის ბრუნთა რაოდენობას გამოსახავს. ბრუნვის ღერძი აღვნიშნოთ s ასოთი, რომელსაც მარჯვნივ ფრჩხილებში მიწერილი ექნება შესაბამისი დონის ნიშნული.

პირველი ვარიანტი მოცემულია P ბრტყელი ველის A, B, C და D წერტილები (ნახ. 27). საჭიროა შევათავსოთ ეს წერტილები $s(Z)$ თარაზულას დონის სიბრტყესთან. მივიღოთ $s(Z)$ ბრუნვის ღერძად და ცნობილი ხერხით



ნახ. 27

(ბრუნვის რადიუსის განსაზღვრა სამკუთხედის წესით) $A(Z_1)$ წერტილი შევათავსოთ $s(Z)$ თარაზულას დონის P_1 სიბრტყესთან.

შეთავსებული $A_1(Z)$ წერტილის პოვნის შემდეგ ნახაზზე წარმოიქმნება ნათესაური შესაბამობა, რომელიც მოცემულია A და A_1 წერტილებით და s სწორი ხაზით. ამრიგად, P და P_1 სიბრტყეები წარმოადგენენ ნათესაურად შესაბამ სიბრტყეებს, $s(Z)$—შესაბამობის ღერძს, AA_1—შესაბამობის მიმართულებას და A და A_1 წერტილები ნათესაურად შესაბამ წერტილებს.

გამოვიყენოთ ნათესაური შესაბამობის ცნობილი თვისებები (იხ. Н. Глаголев, проективная геометрия, 1964) და დანარჩენი წერტილების შესათავსებლად განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) მოცემული წერტილი $A(Z_1)$ შევაერთოთ $B(Z_2)$ წერტილთან. AB ხაზის ბრუნვის ღერძთან გადაკვეთის $E(Z)$ წერტილი შევაერთოთ $A_1(Z)$ წერტილთან. B წერტილი, AA_1 მიმართულების პარალელურად, გადავიტანოთ $E(Z)A_1(Z)$ ხაზზე. მიღებული $B_1(Z)$ წერტილი მოცემული $B(Z_2)$ წერტილის P_1 სიბრტყესთან შეთავსება იქნება;

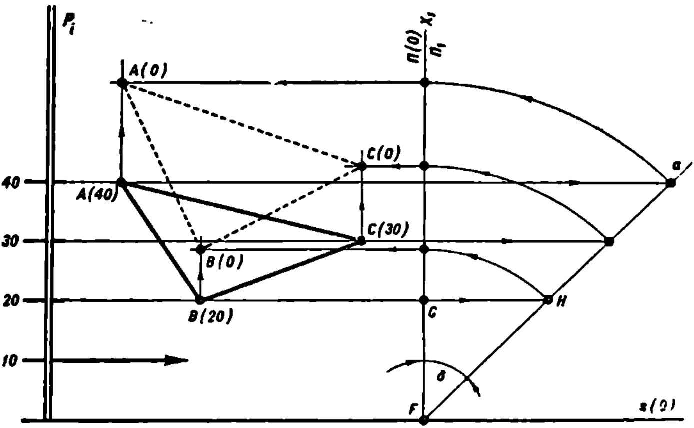
2) $C(Z_3)$ წერტილის P_1 სიბრტყესთან შესათავსებლად გავატაროთ დამხმარე სწორი ხაზები—$CF \parallel AE$, $FC_1 \parallel EA_1$ და $CC_1 \parallel AA_1$, მიღებული $C_1(Z)$ წერტილი მოცემული $C(Z_3)$ წერტილის P_1 სიბრტყესთან შეთავსება იქნება;

3) იმისათვის, რომ $D(Z_4)$ წერტილი შევათავსოთ P_1 სიბრტყესთან, გავატაროთ მასზე ბრუნვის ღერძის პარალელური სწორი ხაზი, რომელიც AE

ხაზს M წერტილში გადაკვეთს. ვიპოვოთ M წერტილის შეთავსება P_1 სიბრტყესთან — M_1. უკანასკნელზე გავატაროთ ბრუნვის ღერძის პარალელური ხაზი და მასზე გადმოვიტანოთ მოცემული $D(Z_1)$ წერტილი. ამრიგად, მივიღებთ შეთავსებულ $D_1(Z)$ წერტილს.

სამივე შემთხვევა ერთმანეთის ტოლფასია, არჩევა კი დამოკიდებულია ამოცანის ხასიათზე და შესათავსებელი წერტილების განლაგებაზე.

მ ე ო რ ე ვ ა რ ი ა ნ ტ ი განვიხილოთ ABC სამკუთხედის შეთავსება. ვთქვათ, ამ სამკუთხედის სიბრტყე (P) ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი დახრილია δ კუთხით (ნახ. 28). ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლისა



ნახ. 28

და ბრუნვის ხერხების ერთობლივი გამოყენებით.

მოცემული ნაკვეთი ვაბრუნოთ P სიბრტყის კვალის ($s(O)$) გარშემო უახლოესი გზით ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან შეთავსებამდე. შეთავსების შემდეგ წერტილების ახალი გეგმილების ასაგებად შემოვიტანოთ ახალი Π_1 სიბრტყე ისე, რომ P სიბრტყეს მის მიმართ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა ეჭიროს. ავაგოთ P სიბრტყის კვალი (a) Π_1 სიბრტყეზე. შეთავსებისათვის საჭირო შემდგომი მოქმედებანი ნახაზზე ისრებითაა ნაჩვენები.

მაგალითად, A_1 წერტილის მოსაძებნად ვსარგებლობთ FGH მართკუთხა სამკუთხედით, რომელიც a კვალის აგების შემდეგ ნახაზზე თითქმის თავისთავად გამოისახება. ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა (FH) წარმოადგენს შეთავსებისათვის საჭირო ბრუნვის რადიუსს.

შეთავსების განხილული ვარიანტების გამოყენების დროს დამხმარე გრაფიკული აგებანი, ძირითადად, მარტივი და სისტემატიზებული სწორი ხაზების გავლებით ხორციელდება. ამით, სხვა ანალოგიურ ხერხებთან შედარებით, საგრძნობლად მცირდება გრაფიკული სამუშაოს მოცულობა და, შესაბამისად, დიდდება მიღებული შედეგის სიზუსტე.

პოზიციური ამოცანები

§ 4. დამხმარე პოზიციური ამოცანები

1. ზოგადი ცნობები

პოზიციურ ამოცანებში, ძირითადად, გაერთიანებულია გეომეტრიული ელემენტების ურთიერთკუთვნილებისა და ურთიერთგადაკვეთის ამოცანები. მაგალითად, როგორიცაა წერტილის აღება ხაზზე და ზედაპირზე, სწორი ხაზის აღება ზედაპირზე, მოცემულ ხაზზე ზედაპირის გატარება, ხაზისა და ზედაპირის ან ორი ზედაპირის ურთიერთკვეთა და სხვ.

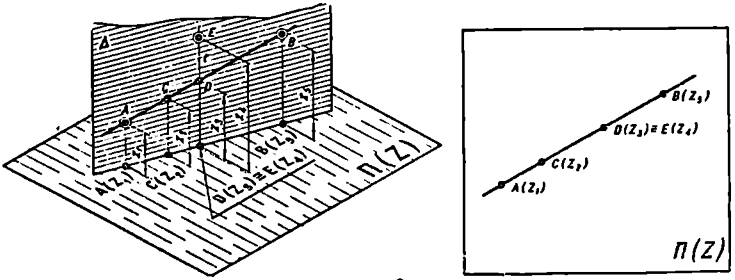
პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტაში არ მონაწილეობს გეომეტრიული ფიგურების ე. წ. მეტრული თვისებები, ე. ი. ის თვისებები, რომლებიც შესაძლოა გამოვლინდეს გაზომვების შედეგად.

ძირითადი პოზიციური ამოცანებია: 1) სწორი ხაზის სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილისა და 2) ორი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზის განსაზღვრა.

ვიდრე ძირითადი ამოცანების გადაწყვეტას შევუდგებოდეთ, საჭიროა განვიხილოთ დამხმარე პოზიციური ამოცანები.

2. წერტილი სწორ ხაზზე

ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში წერტილისა და სწორი ხაზის კუთვნილების პირობა ასეთნაირად განისაზღვრება: თუ წერტილი სივრცეში რაიმე სწორ ხაზს ეკუთვნის, მაშინ გეგმაზე წერტილის გეგმილი ძევს სწორი ხაზის გეგმილზე და შეთავსების წერტილში ხაზსა და წერტილს ერთი და იგივე ნიშნული გააჩნიათ.



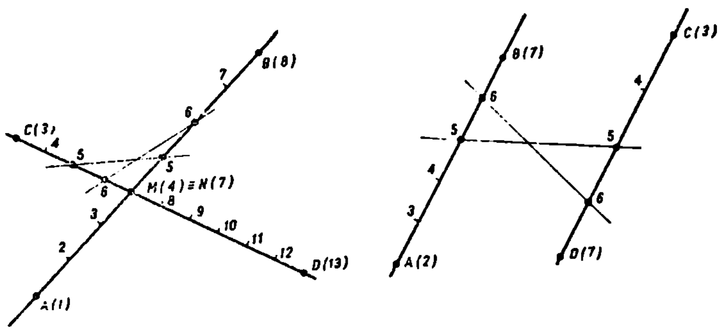
ნახ. 29

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ 29-ე ნახაზი. როგორც თვალსაჩინო გამოსახულებიდან ჩანს, წერტილის გეგმილი სწორი ხაზის გეგმილს მხოლოდ ორ შემთხვევაში შეიძლება დაემთხვეს—ერთი როცა წერტილი ძევს ხაზზე (მაგ., C და D წერტილები) და მეორე, როცა წერტილი არ ძევს ხაზზე, მაგრამ მოთავსებულია ამ ხაზზე გამავალ მაგეგმილებელ Δ სიბრტყეში (საგალითად, E წერტილი). ამ ორი შემთხვევის ერთმანეთისაგან განსასხვავებლად განვიხილოთ E და D წერტილები. ისინი გეგმილთსიბრტყის მართობულ ერთი და იგივე Δ სიბრტყის l მაგეგმილებელ სხივზე მდებარეობენ. ამიტომ მათი გეგმილები გეგმაზე AB ხაზის გეგმილის ერთ წერტილში არიან შეთავსებული; მიუხედავად ამისა, მათი ნიშნულების მიხედვით იოლად ირკვევა, თუ რომელი ძევს ხაზზე და რომელი მის გარეთ.

3. სწორი ხაზების ურთიერთდამოკიდებულება

სივრცეში ორი სწორი ხაზი შეიძლება იყოს აცდენილი ან ჰკვეთდეს ერთმანეთს. პირველ შემთხვევაში მათ არ გააჩნიათ საერთო წერტილი და არ შეიძლება მათზე გატარდეს რაიმე ერთი საერთო სიბრტყე. მეორე შემთხვევაში მათ გააჩნიათ ერთი საერთო წერტილი (საკუთრივი ან არა საკუთრივი) და მათზე შეიძლება ერთი და მხოლოდ ერთი სიბრტყის გატარება. თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე გადაკვეთილი ხაზების საერთო წერტილი არასაკუთრივია, ასეთ ხაზებს პარალელური ხაზები ეწოდება.

თუ ორი სწორი ხაზი სივრცეში აცდენილია (ნახ. 30), მაშინ გეგმაზე მათი გეგმილების ურთიერთდამოკიდებულების ორი შემთხვევა განიხილება.



ნახ. 30

სახელდობრ, ასეთი ხაზების გეგმილები ან იკვეთებიან ან ურთიერთპარალელურნი არიან. პირველ შემთხვევაში $(A(1)\,B(8) \times C(3)\,D(13))$ ხაზების აცდენილობა გამოირკვევა გეგმილების გადაკვეთის წერტილის შემოწმებით. ამ წერტილში ხაზებს სხვადასხვა ნიშნულები ექნებათ ($M(4) \supset AB$ და $N(7) \supset CD$). მეორე შემთხვევაში, ე. ი. როცა გეგმილები ურთიერთპარალელურია ($A(2)\,B(7) \parallel C(3)\,D(7)$), ხაზების აცდენილობის მაჩვენებელია დახრის კუთხეების უტოლობა, ინტერვალების უტოლობა ან ნიშნულების ზრდის განსხვავე-

ბული მიმართულება. გარდა ამისა, სწორი ხაზების აცდენილობის ერთ ერთ მაჩვენებლად ისიც შეიძლება ჩაითვალოს, რომ აცდენილი ხაზების ერთნაირნიშნულიანი წერტილების შემაერთებელი სწორი ხაზები ურთიერთპარალელურნი არ არიან, მაგალითად, 5—5∦6—6,

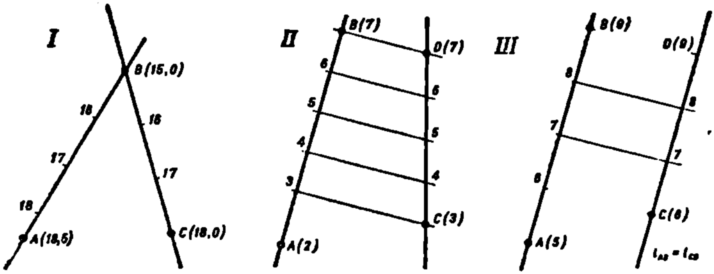
თუ ორი სწორი ხაზი სივრცეში ერთმანეთს კვეთს (ნახ. 31), გეგმაზე სამი ძირითადი შემთხვევა განიხილება:

1) სწორი ხაზების გეგმილები იკვეთებიან საკუთრივ წერტილში და ეს უკანასკნელი ნახაზის ფარგლებშია მოთავსებული (ნახ. 31-I);

2) სწორი ხაზების გეგმილები იკვეთებიან საკუთრივ წერტილში და ეს უკანასკნელი არ მდებარეობს ნახაზის ფარგლებში (ნახ. 31-II);

3) სწორი ხაზების გეგმილები ურთიერთპარალელურნი არიან (ნახ. 31-III).

პირველ შემთხვევაში, თუ მოცემული სწორი ხაზების გრადუირების შედეგად გეგმილების გადაკვეთის წერტილმა ერთი და იგივე სიდიდის ნიშნული მიიღო, ბუნებრივია, ეს წერტილი ჩაითვლება ორივე ხაზის საერთო წერტილად და მოცემული ხაზები კი ურთიერთგადაკვეთილ ხაზებად.

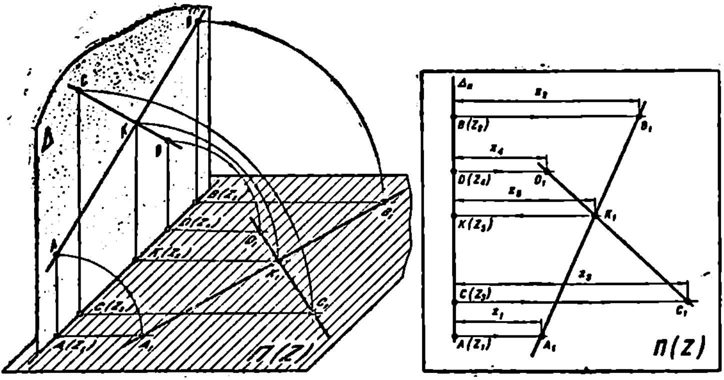


ნახ. 31

მეორე შემთხვევაში სწორი ხაზების გადაკვეთილობის ერთ-ერთი მაჩვენებელია ერთნაირნიშნულიანი წერტილების შემაერთებელი სწორი ხაზების ურთიერთპარალელობა.

მესამე შემთხვევაში, თუ გეგმილების პარალელობასთან ერთად, ამ ხაზების დახრის კუთხეები (ან ინტერვალები) ტოლი აღმოჩნდება და აღმავლობის მიმართულებანი თანხვდენილი, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ასეთი სწორი ხაზები სივრცეში ურთიერთპარალელურნი არიან და აქვთ გადაკვეთის არასაკუთრივი წერტილი.

როგორც გამონაკლისი, განვიხილოთ სივრცის ისეთი ორი ურთიერთგადაკვეთილი ხაზი, რომლებზედაც გამავალი სიბრტყე მაგეგმილებელია (ნახ. 32). ასეთ შემთხვევაში გეგმაზე გეგმილები ერთმანეთს ემთხვევა. ჩათი დამოკიდებულების გამორკვევისათვის საკმარისია აღნიშნული მაგეგმილებელი სიბრტყე შევუთავსოთ ძირითად გეგმილთსიბრტყეს ისე, როგორც ეს მე-32 ნახაზზეა ნაჩვენები.

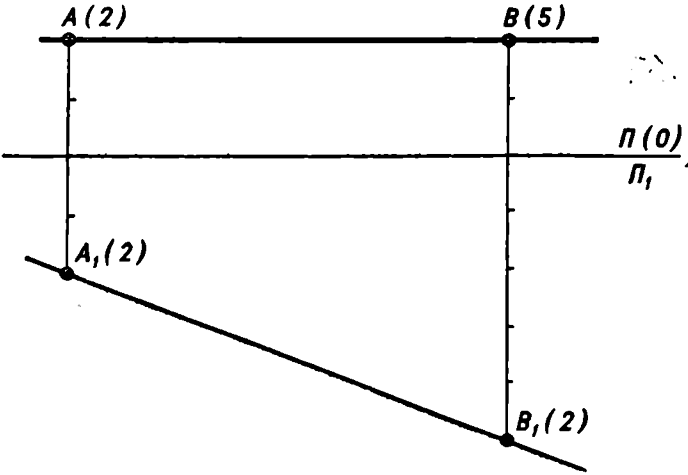


ნახ. 32

4. ზოგადი მდებარეობის ხაზის დონის ხაზად გარდაქმნა

მოცემულია ზოგადი მდებარეობის $A(2)\,B(5)$ სწორი ხაზი. ამ ხაზის დონის ხაზად გარდაქმნისათვის ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით (ნახ. 33).

ახალი გეგმილთსიბრტყე Π_1 დავაყენოთ $A(2)\,B(5)$ გეგმილის პარალელურად, ე. ი. გეგმილთღერძი გავავლოთ $A(2)\,B(5)$ გეგმილის პარალელურად და ავაგოთ AB ხაზის ახალი $A_1(2)\,B_1(2)$

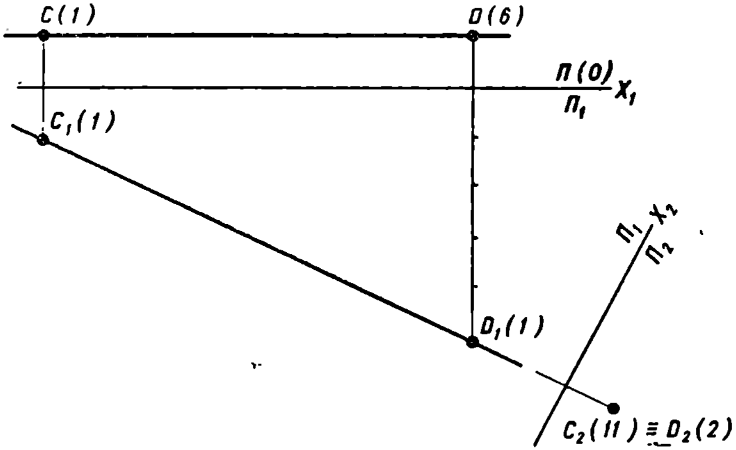


ნახ. 33

გეგმილი X_1 სისტემაში. მოცემული AB ხაზი X_1 სისტემაში დონის ხაზად გარდაიქმნება.

5. ზოგადი მდებარეობის სწორი ხაზის მაგეგმილებელ ხაზად გარდაქმნა

მოცემულია ზოგადი მდებარეობის სწორი ხაზი $C(1)D(6)$. იმისათვის, რომ ეს ხაზი მაგეგმილებელ ხაზად გარდავქმნათ დაგვჭირდება გეგმილთსიბრტყის ორჯერ შეცვლა (ნახ. 34). პირველად ხაზი გარდავქმნათ Π_1 გეგმილთსიბრტყის მიმართ დონის ხაზად. Π_2 გეგმილთსიბრტყის შემოტანით ($\Pi_2 \perp C_1D_1$) მოცემული სწორი ხაზი Π_2 გეგმილთსიბრტყის მიმართ მაგეგმილებელ ხაზად გარდაიქმნება.

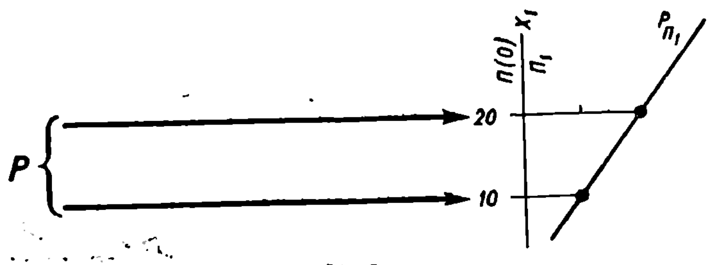


ნახ. 34

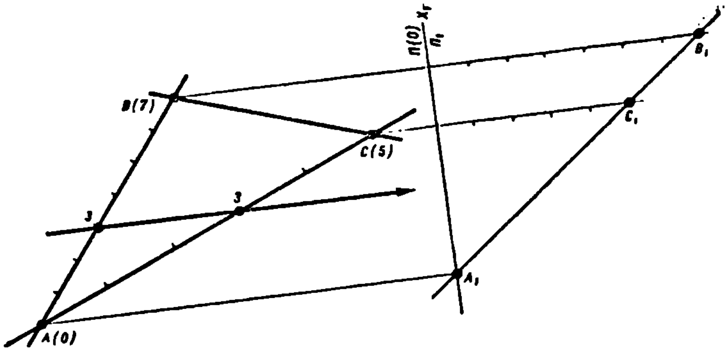
6. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გარდაქმნა მაგეგმილებელ სიბრტყედ

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე თარაზულებით. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ახლით (Π_1), რომელიც მოცემული თარაზულების მართობული იქნება (ნახ. 35). ახალი გეგმილთსიბრტყის ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან შეთავსებით მივიღებთ P სიბრტყის P_{Π_1} კვალს Π_1 სიბრტყეზე. მოცემული სიბრტყე ახალი გეგმილთსიბრტყის (Π_1) მიმართ მაგეგმილებელი იქნება.

36-ე ნახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა სიბრტყე მოცემულია სამი წერტილით.



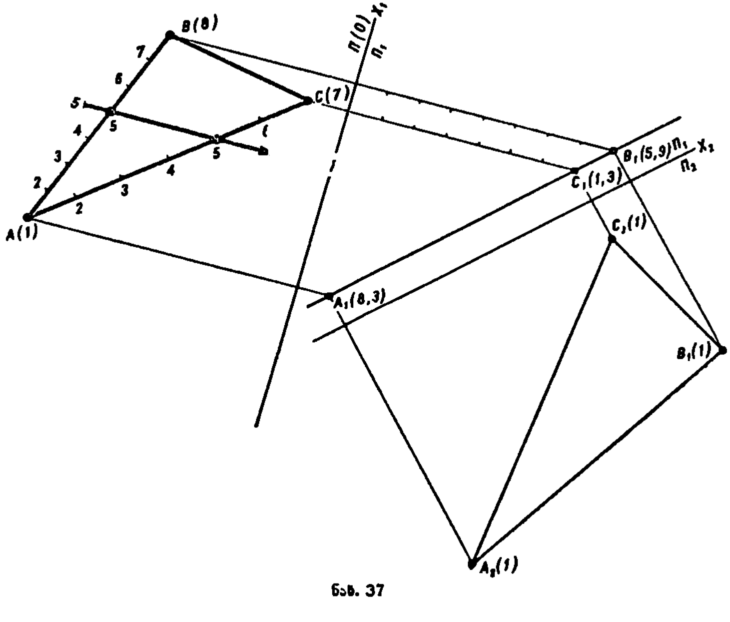
ნახ. 35



ნახ. 36

7. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გარდაქმნა დონის სიბრტყედ

მოცემულია ABC სიბრტყე (ნახ. 37). რომელსაც ძირითადი გეგმილთსიბრტყის ($\Pi(0)$) მიმართ ზოგადი მდებარეობა უჭირავს. იმისათვის, რომ მოცემული სიბრტყე დონის სიბრტყედ გარდავქმნათ საჭიროა გეგმილთსიბრტყის ორჯერ შეცვლა. პირველად მოცემულ სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მივანიჭოთ, ხოლო მეორედ, გარდავქმნათ დონის სიბრტყედ.



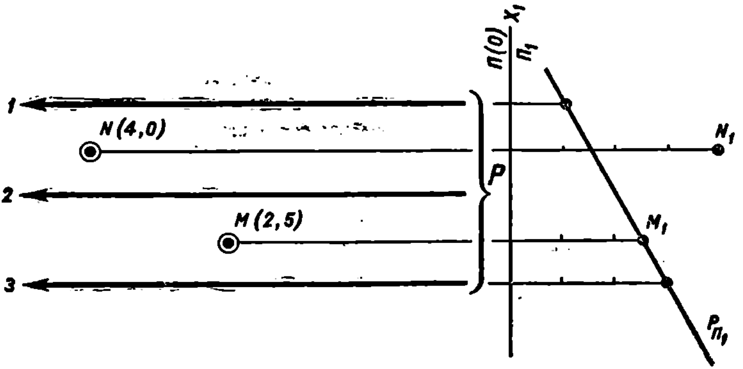
ნახ. 37

8. სიბრტყეზე მდებარე წერტილი

როგორც ცნობილია, თუ წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, ეს იმას ნიშნავს, რომ ეს წერტილი ეკუთვნის ხაზს, რომელიც თავის მხრივ ეკუთვნის სიბრტყეს. კერძო შემთხვევებში, როცა გეგმაზე ეს პირობები ცნობილია, რაიმე დამხმარე აგებები საჭირო არ არის. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა:

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და M და N წერტილები. იმის გამოსარკვევად, თუ რომელი მათგანი ეკუთვნის P სიბრტყეს და რომელი არა, ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით (ნახ. 38).

შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე (Π_1) ისეთნაირად, რომ მოცემულ სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მივანიჭოთ. ახალ სის-



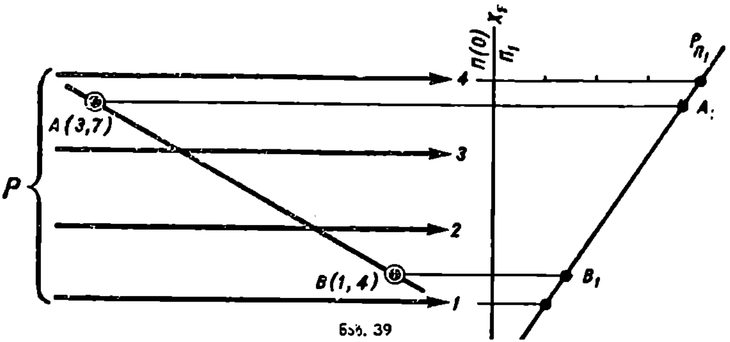
ნახ. 38

ტემაში წერტილის გეგმილისა და სიბრტყის P_{Π_1} კვალის ურთიერთდამოკიდებულება მოცემული წერტილის მოცემულ სიბრტყეზე მდებარეობის მაჩვენებელი იქნება. მაგალითად, აღებულ შემთხვევაში M წერტილი ეკუთვნის P სიბრტყეს, N კი — არა.

9. სიბრტყეზე მდებარე სწორი ხაზი

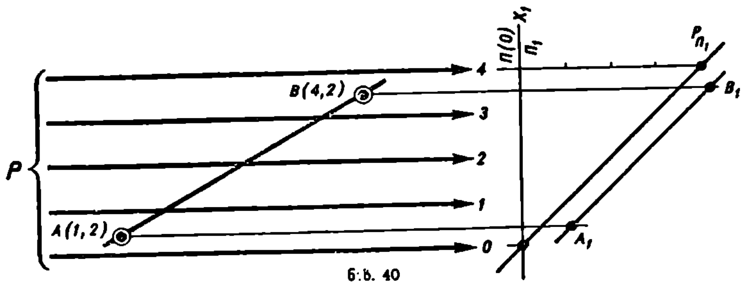
როგორც ცნობილია, თუ სწორი ხაზის რაიმე ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ მთლიანად ეს სწორი ხაზი ეკუთვნის ამ სიბრტყეს. კერძო შემთხვევაში, თუ ასეთი ცალკეული პირობები ცნობილია გეგმაზე, დამხმარე აგებები საჭირო არ არის. ზოგად შემთხვევაში შეგვიძლია ვისარგებლოთ ქვემოთ ნაჩვენები გზით:

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და AB სწორი ხაზი (ნახ. 39). მათი ურთიერთკუთვნილების დასადგენად ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით. შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე (Π_1) ისეთნაირად, რომ მოცემულ სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მივანიჭოთ. შეთავსების შემდეგ ხაზის ახალი გეგმილისა და სიბრტყის P_{Π_1} კვალის ურთიერთდამთხვევა მოცემული სიბრტყისა და სწორი ხაზის ურთიერთკუთვნილების მაჩვენებელი იქნება.



ნახ. 39

10. სიბრტყის პარალელური სწორი ხაზი სწორი ხაზი სიბრტყის პარალელურია, თუ ეს ხაზი პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე რაიმე სწორი ხაზისა. თუ ასეთი შესადარებელი სწორი ხაზი გეგმაზე არსებობს, რაიმე დამხმარე აგებები საჭირო არ არის. ზოგად შემთხვევაში ხაზისა და სიბრტყის პარალელობის დასადგენად შეგვიძლია ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით (ნახ. 40). ამ შემთხვევაშიც ახალი გეგმილთ-



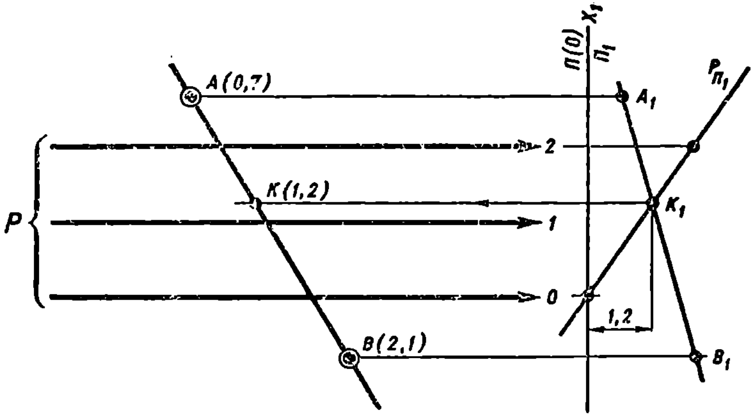
ნახ. 40

სიბრტყე (Π_1) ისე უნდა იყოს შემოტანილი, რომ მოცემულმა სიბრტყემ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდგომარეობა დაიჭიროს. სწორი ხაზის ახალი გეგმილისა (A_1B_1) და სიბრტყის კვალის (P_{Π_1}) პარალელობა მოცემული სწორი ხაზისა (AB) და სიბრტყის (P) ურთიერთპარალელობის მაჩვენებელი იქნება.

§ 5. ძირითადი პოზიციური ამოცანები

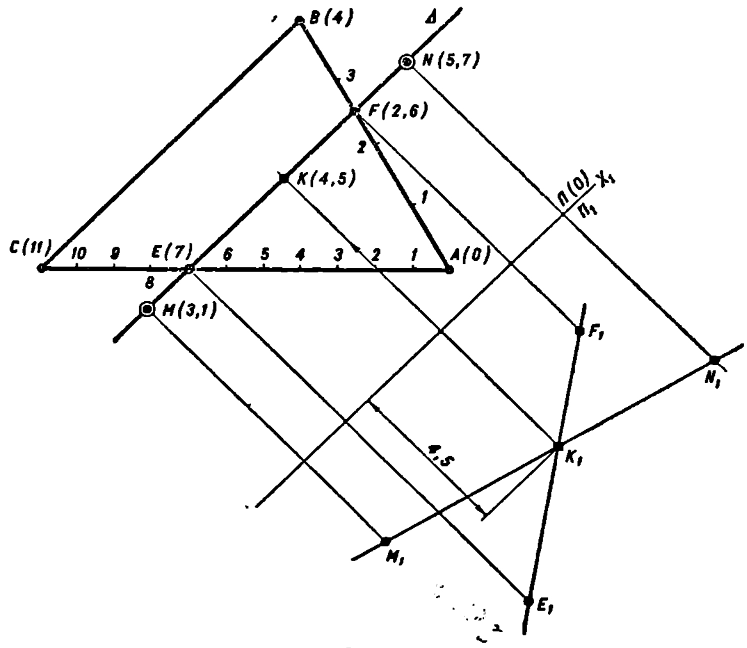
1. სწორი ხაზისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის განსაზღვრა სწორი ხაზი კვეთს სიბრტყეს, თუ მათ მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი გააჩნიათ. განვიხილოთ ასეთი წერტილის განსაზღვრის სამი შემთხვევა:

1) მოცემულია P სიბრტყე (თარაზულებით) და $A(0,7)$ $B(2,1)$ სწორი ხაზი (ნახ. 41). გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად გამოვიყენოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხი. ახალ X_1 სის-



A(0,7)
A₁
П(0)
X₁
П₁
P_П₁
2
K(1,2)
K₁
P
1
0
1,2
B(2,1)
B₁

ნახ. 41

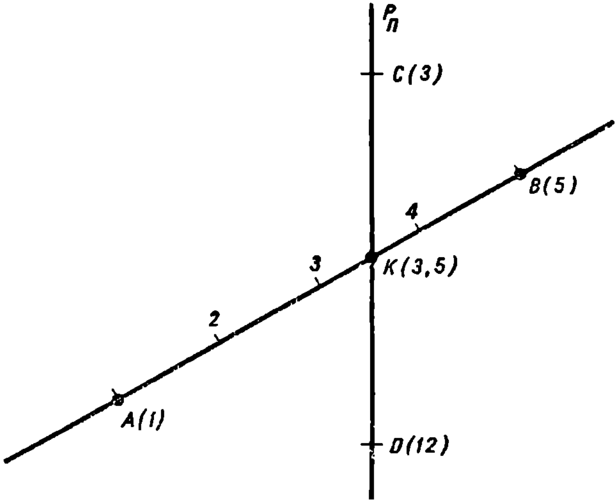


B(4)
Δ
N(5,7)
3
F(2,6)
2
K(4,5)
1
П(0)
X₁
П₁
C(11)
10
9
E(7)
6
5
4
3
2
1
A(0)
8
M(3,1)
F₁
N₁
4,5
K₁
M₁
E₁

ნახ. 42

ტემაში $\Pi_1 \perp P$ და $K_1 = A_1B_1 \times P_{\Pi_1}$. K_1 წერტილის დაბრუნებით ძველ სისტემაში ვიპოვით საძიებელ K წერტილს. მიღებული წერტილის ნიშნული ორნაირად განისაზღვრება: K_1 გეგმილიდან X_1 ღერძამდე მანძილის უშუალო გაზომვით და AB ხაზის გრადუირებით.

2) მოცემულია ABC სიბრტყე და MN სწორი ხაზი (ნახ. 42). გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად მოცემულ ხაზზე გავატაროთ მაგეგმილებელი Δ სიბრტყე. სამკუთხედის გვერდები Δ სიბრტყეს $E(7,0)$ და $F(2,6)$ წერტილებში გადაკვეთს (სწორი ხაზის გადაკვეთა მაგეგმილებელ სიბრტყესთან). ამრიგად, Δ სიბრტყეში მოთავსებული AB და EF ხაზების გადაკვეთა საძიებელი წერტილი იქნება. ამ წერტილის განსაზღვრისათვის შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში Δ სიბრტყემ დონის სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს.



ნახ. 43

K წერტილის ნიშნულის განსაზღვრა პირველი შემთხვევის ანალოგიურია.

3) თუ მოცემული სიბრტყე მაგეგმილებელია (ნახ. 43), მაშინ სიბრტყის P_Π კვალის გადაკვეთა, რომელიც C და D წერტილებითაა განსაზღვრული, სწორი ხაზის გეგმილთან საძიებელი K წერტილის გეგმილი იქნება, ე. ი.

$$K = P_\Pi \times AB.$$

ასეთი წერტილის ნიშნულის განსაზღვრისათვის საჭიროა მოცემული AB სწორი ხაზის გრადუირება.

2. სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთა

ორი სიბრტყე სივრცეში ყოველთვის გადაკვეთილია. როგორც ცნობილია, ორი სიბრტყე ერთმანეთს ერთ სწორ ხაზზე ჰკვეთს. ამასთან, ეს სწორი ხაზი შეიძლება იყოს საკუთრივი და არასაკუთრივი. თუ ორი სიბრტყე გადაკვეთისას არასაკუთრივ ხაზს იძლევა, გეგმაზე მათი თარაზულები ურთიერთპარა-

ლელურნი არიან, უდიდესი ვარდნილობის ხაზებს ტოლი ინტერვალები აქვთ და ვარდნილობათა მიმართულება თანხვდენილია. ასეთ სიბრტყეებს ურთიერთპარალელური სიბრტყეები ეწოდება, ე. ი. სივრცეში ორი სიბრტყის პარალელობისათვის საჭიროა გეგმაზე მათი დახრის კუთხეები იყოს ერთნაირი, ხოლო განვრცობის ხაზები (თარაზულები) ურთიერთპარალელური.

როცა ორი სიბრტყის განმსაზღვრელი ელემენტები გეგმაზე არ აკმაყოფილებენ პარალელობის პირობებს, ასეთი სიბრტყეები საკუთრივ ხაზზე იკვეთებიან.

ორი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზის აგებისას ჯერ უნდა გამოირკვეს მათი ურთიერთგანლაგება, ამისათვის ყურადღება უნდა მიექცეს შემდეგ პირობებს:

1) გადაკვეთილია თუ არა მათი ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები;

2) თარაზულების პარალელობის შემთხვევაში, აქვთ თუ არა მათ ურთიერთსაწინააღმდეგო განვრცობები;

3) თარაზულების პარალელობის და მათ განვრცობათა თანმთხვევის დროს, აქვს თუ არა ადგილი მათი ინტერვალების უტოლობას.

თუ ამ პირობებიდან ერთი მაინც შესრულებულია, მაშინ ასეთი ორი სიბრტყე გადაკვეთის საკუთრივ ხაზს იძლევა.

გადაკვეთის ხაზის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ ურთიერთმკვეთი სიბრტყეების ორი საერთო წერტილი ან ერთი საერთო წერტილი და საძიებელი ხაზის მიმართულება.

არის შემთხვევები, როცა ორივე საერთო წერტილი ადვილად მოიძებნება და შესაბამისად გადაკვეთის ხაზიც ნაპოვნი იქნება. ზოგჯერ გეგმაზე იოლად იძებნება მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი. ამ შემთხვევაში საჭიროა გადაკვეთის ხაზის მიმართულების განსაზღვრის შესაძლებლობის შემოწმება. არის შემთხვევები, როცა გეგმაზე ვერც საერთო წერტილებს ვპოულობთ და არც გადაკვეთის ხაზის მიმართულების დადგენაა შესაძლებელი.

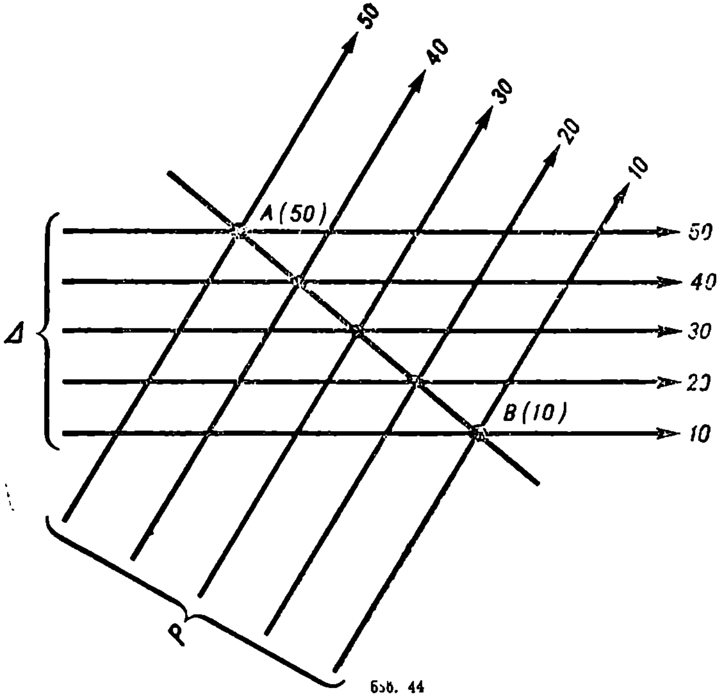
განვიხილოთ რამდენიმე გავრცელებული შემთხვევა.

1) *სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზის აგება, როცა მათი ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები იკვეთებიან ნახაზის ფარგლებში* (ნახ. 44). დავნიშნოთ მოცემული P და Δ სიბრტყეების ერთნაირნიშნულიანი თარაზულების გადაკვეთის ორი წერტილი, მაგალითად, $A(50)$ და $B(10)$.

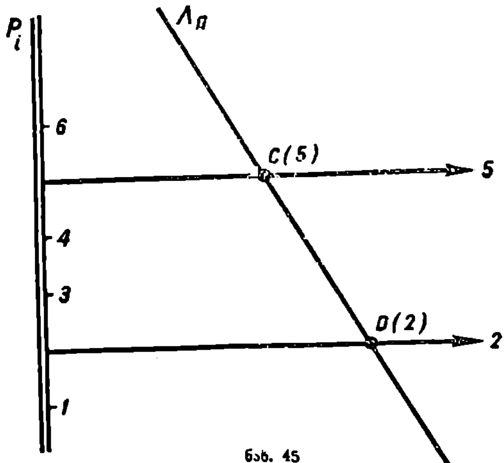
ამ წერტილების შემაერთებელი სწორი ხაზი მოცემული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი იქნება.

2) *სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზის აგება როცა ერთი მათგანი მაგეგმილებელია* (ნახ. 45). ამ შემთხვევაში წინასწარ ცნობილია, რომ გადაკვეთის ხაზის გეგმილი მაგეგმილებელი სიბრტყის კვალს დაემთხვევა. გადაკვეთის ხაზის განსაზღვრისათვის საკმარისია გავავლოთ მოცემული ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის ორი თარაზულა და დავნიშნოთ მაგეგმილებელ სიბრტყესთან მათი გადაკვეთის ორი წერტილი. მიღებული $C(5)\,D(2)$ ხაზი საძიებელი განკვეთის ხაზი იქნება.

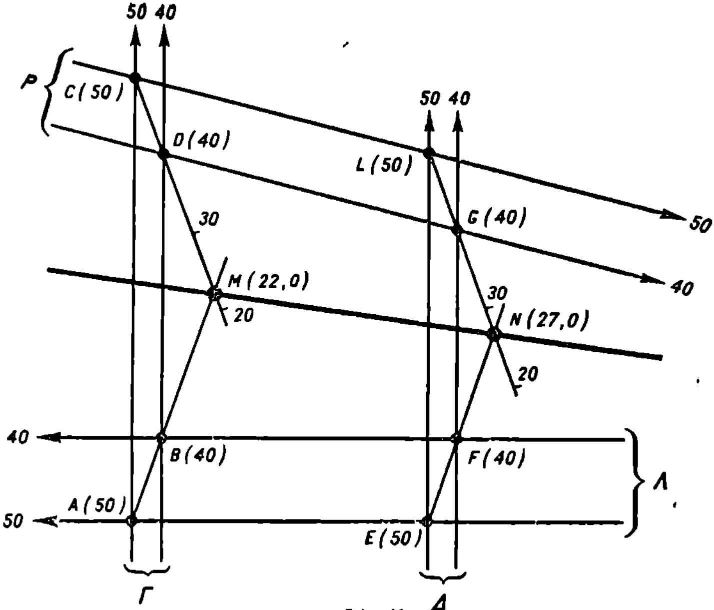
3) *სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზის აგება, როცა მათი ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები არ იკვეთებიან ნახაზის ფარგლებში* (ნახ. 46—47). გამოვიყენოთ Γ და Δ დამხმარე სიბრტყეები (ნახ. 46). ამით ამოცანას დავიყვანთ იმ შემთხვევაზე, როცა ურთიერთმკვეთი სიბრტყეების ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები ნახაზის ფარ-


50
40
30
20
10
A (50)
50
40
30
20
10
Δ
B (10)
P

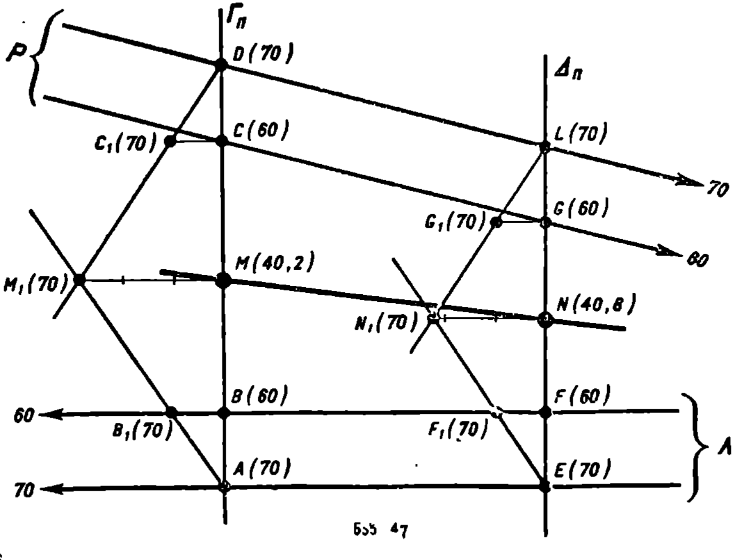
ნახ. 44


P_i
Λ_∂
6
C (5)
5
4
3
D (2)
2
1

ნახ. 45


50 40
P
C(50)
D(40)
30
M(22,0)
20
50 40
L(50)
G(40)
50
40
30
N(27,0)
20
40
B(40)
F(40)
A(50)
50
E(50)
Λ
Г
Δ

Бэб. 46


Гп
P
D(70)
Δп
C₁(70)
C(60)
L(70)
70
G₁(70)
G(60)
60
M₁(70)
M(40,2)
N(40,8)
N₁(70)
B(60)
F(60)
60
B₁(70)
F₁(70)
Λ
A(70)
E(70)
70

Бэб 47

გლებში იკვეთებიან. სახელდობრ, ჩვენთვის უკვე ცნობილი ხერხით ავაგებთ Γ' და Λ სიბრტყეების განკვეთის $A(50)\,B(40)$ და P და Γ სიბრტყეების განკვეთის $C(50)\,D(40)$ ხაზებს. მიღებული ხაზების გადაკვეთის $M(22{,}0)$ წერტილი P და Λ სიბრტყეების საერთო წერტილი იქნება. ანალოგიურად, Δ სიბრტყის დახმარებით ავაგებთ მოცემული სიბრტყეებისათვის საერთო მეორე $N(27{,}0)$ წერტილს მიღებული $M(22{,}0)\,N(27{,}0)$ სწორი ხაზი მოცემული P და Λ სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი იქნება.

47-ე ნახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა დამხმარე სიბრტყეებად გამოყენებულია მაგეგმილებელი Γ' და Δ სიბრტყეები. ეს მოქმედება სიმბოლურად ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\Lambda\times\Gamma=A(70)\,B(60),$$
$$P\times\Gamma=C(60)\,D(70),$$
$$A(70)\,B(60)\times C(60)\,D(70)=M(40{,}2).$$

$M(40{,}2)$ წერტილის ასაგებად დამხმარე Γ სიბრტყე შეთავსებულია ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან.

$$\Delta\times\Delta=E(70)\,F(60),$$
$$P\times\Delta=L(70)\,G(60),$$
$$E(70)\,F(60)\times L(70)\,G(60)=N(40{,}8).$$

$N(40{,}8)$ წერტილის ასაგებად დამხმარე Δ სიბრტყე შეთავსებულია ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან.

მიღებული $M(40{,}2)\,N(40{,}8)$ სწორი ხაზი მოცემული P და Λ სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი იქნება.

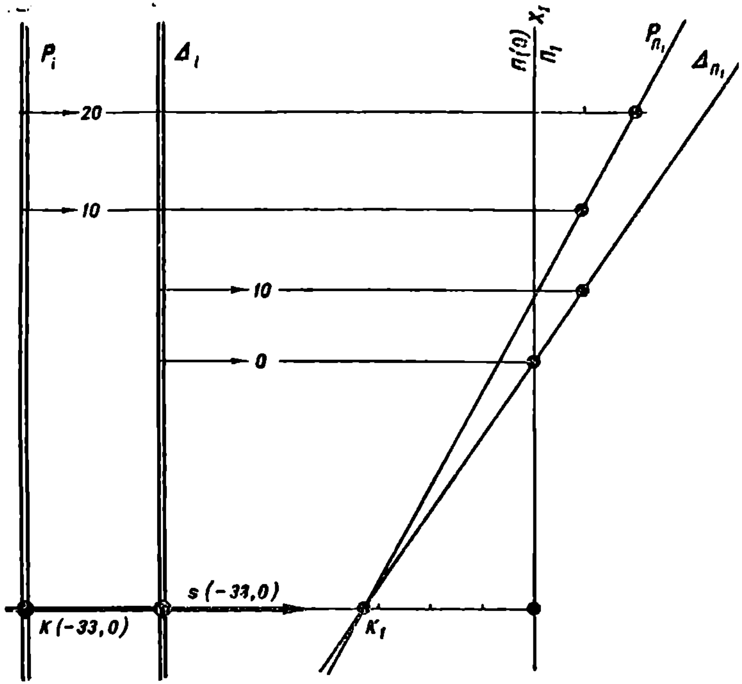
4) სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზის აგება, როცა მათი ქანობის მასშტაბები გეგმაზე ურთიერთპარალელურია (ნახ. 48).

წინასწარ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში საძიებელი გადაკვეთის ხაზი მკვეთი სიბრტყეების საერთო თარაზულა იქნება. ამის გამო საკმარისია ერთადერთი საერთო წერტილის აგება.

ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით. ახალი გეგმილთსიბრტყე Π_1 მოცემული სიბრტყეების ქანობის მასშტაბების (P_i და Δ_i) პარალელურად შემოვიტანოთ. ახალ X_1 სისტემაში P და Δ სიბრტყეების კვალების (P_{Π_1} და Δ_{Π_1}) გადაკვეთა ჩვენთვის საინტერესო წერტილს (K_1) მოგვცემს. უკანასკნელი დავაბრუნოთ ძველ სისტემაში. მიღებულ $K(33{,}0)$ წერტილზე გამავალი $s(33{,}0)$ თარაზულა საძიებელი გადაკვეთის ხაზი იქნება.

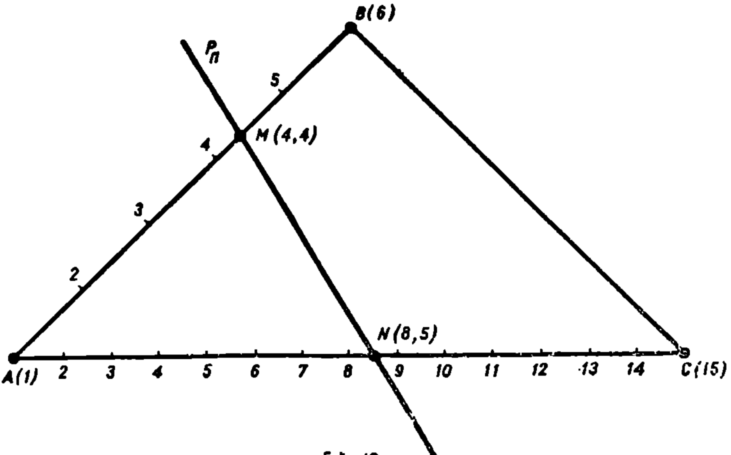
5) სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგება, როცა ერთი მათგანი მაგეგმილებელია, ხოლო მეორე მოცემულია სამი წერტილით (ნახ. 49). თუ მოცემულ წერტილებს სწორი ხაზებით შევაერთებთ და ამ ხაზების გრადუირებით განვსაზღვრავთ სიბრტყის კვალის მათთან გადაკვეთის წერტილების ნიშნულებს, მივიღებთ ABC სიბრტყის P სიბრტყესთან გადაკვეთის MN ხაზს. რასაკვირველია, ეს უკანასკნელი P_{Π} კვალზე იქნება მოთავსებული.

6) სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგება, როცა თითოეული მათგანი სამ-სამი წერტილითაა მოცემული (ნახ. 50).



P_1
Δ_1
$\frac{\Pi(0)}{\Pi_1}$ X_1
P_{Π_1}
Δ_{Π_1}
20
10
10
0
s (-33,0)
K (-33,0)
K'_1

ნახ. 48

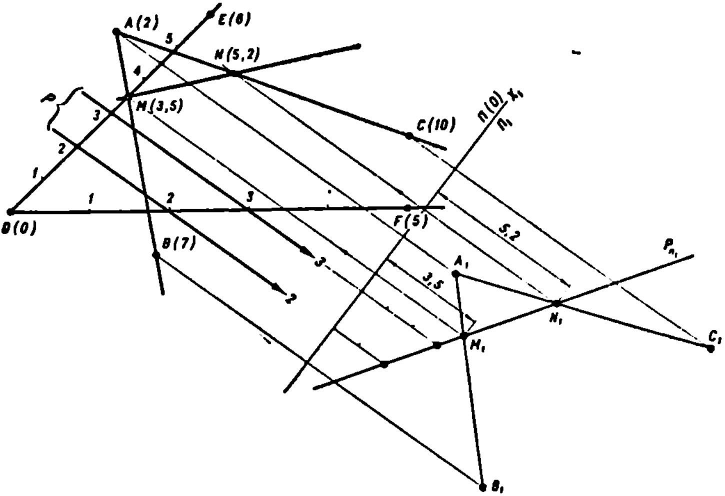


B(6)
P_Π
5
M (4,4)
4
3
2
N (8,5)
A(1) 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 C(15)

ნახ. 49

ამ შემთხვევაში, საძიებელი გადაკვეთის ხაზის აგებამდე, წინასწარ, ავაგოთ მოცემული სიბრტყეების თარაზულები. ამით ამოცანას დავიყვანთ ზემოთ განხილულ რომელიმე შემთხვევამდე.

ამისგან განსხვავებით, დასმული ამოცანა შეიძლება ამოეხსნათ გეგმილთსიბრტყის შეცვლით (ნახ. 50), სახელდობრ, ისე, რომ ერთ-ერთ სიბრტყეს მივანიჭოთ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა. ამით ახალ სისტემაში



ნახ. 50

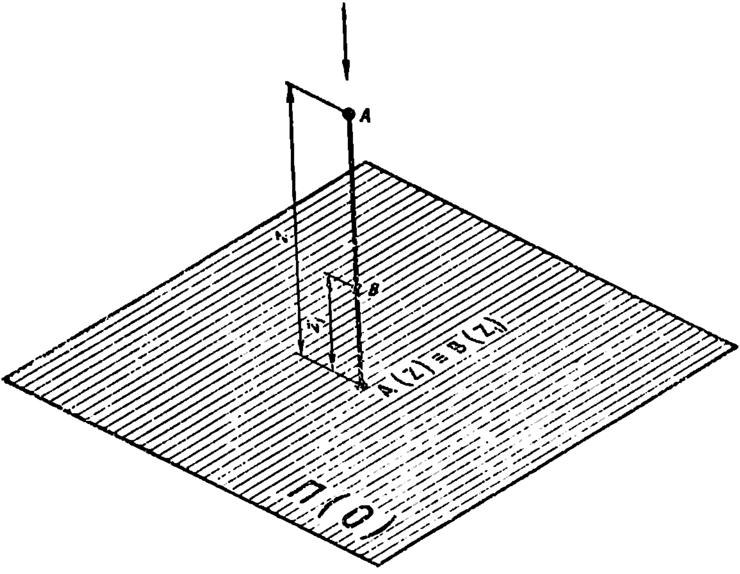
მივიღებთ 49-ე ნახაზზე განხილულ შემთხვევას. მიღებული M_1 და N_1 წერტილების დაბრუნებით ძველ სისტემაში ავაგებთ საძიებელ $M(3,5)$ $N(5,2)$ გადაკვეთის ხაზს.

ვ. ხილვადობის პირობითობა

ნახაზის თვალსაჩინოების გაზრდის მიზნით მიმართავენ პირობითს ხილვადობას. ჩვენი მხედველობის აპარატი ცენტრალური დაგეგმილების პრინციპის ანალოგიურია, მაგრამ პარალელურ გეგმილებში შესრულებული ნახაზის დამზერის დროს ხედვის სხივები დაგეგმილების მიმართულების პარალელურად განიხილება.

ვთქვათ A და B წერტილები განლაგებულია ხედვის სხივზე (ნახ. 51). ნახაზზე დაგეგმილების ანუ ნახაზის დამზერის მიმართულება ნაჩვენებია ისრით.

მოცემული წერტილების ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე ხილვადობის საკითხი შემდეგნაირად განიხილება: ხილვადია ის წერტილი, რომელიც უფრო დიდი მანძილითაა დაშორებული $\Pi(O)$ სიბრტყიდან. აღებულ შემთხვევაში A წერტილის დაშორება ძირითადი გეგმილთსიბრტყიდან, ანუ ამ წერტილის ნიშნული (Z) მეტია B წერტილის ნიშნულზე (Z_1), რაც იმაზე მიუთითებს, რომ A წერტილი უფრო მაღლაა მოთავსებული ვიდრე B. ამის გამო B წერტილი ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე დაფარულია A წერტილით.



ნახ. 51

§ 6. ამოცანები ბრტყელ გეომეტრიულ ნაკვთებზე

1. ბრტყელი ნაკვთის გადაკვეთა სწორი ხაზით

ეს ამოცანა სწორი ხაზით სიბრტყის გადაკვეთის ამოცანის ანალოგიურია, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ აქ საქმე გვაქვს ჩაკეტილი ტეხილი (ან მრუდი) ხაზით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილთან.

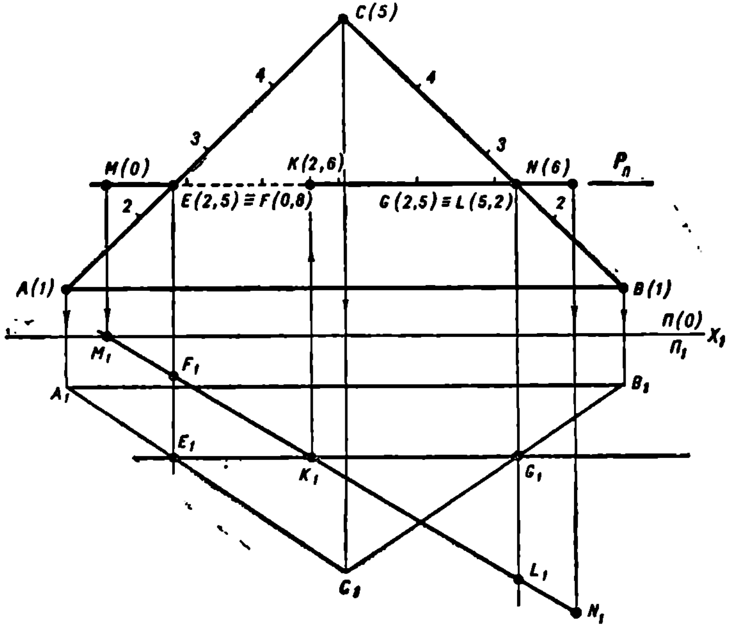
განვიხილოთ ABC სამკუთხა ფირფიტის გადაკვეთა MN სწორი ხაზით (ნახ. 52).

გადაკვეთის წერტილის (K) ასაგებად MN ხაზზე გავატაროთ მაგეგმილებელი P სიბრტყე, რომელიც ABC სამკუთხედს EG ხაზზე გადაკვეთს. შევნიშნოთ, რომ

$$K = MN \times EG.$$

ვინაიდან MN და EG ხაზები ერთსა და იმავე P მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარეობენ, ამიტომ ნახაზზე მათი გადაკვეთის წერტილი დამხმარე გრაფიკული აგებების გარეშე ვერ მოიძებნება. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ ახალი Π_1 სიბრტყის მიმართ P სიბრტყე დონის სიბრტყედ გადავაქციოთ. X_1 სისტემაში კი იოლად განვსაზღვრავთ K წერტილის მდებარეობას. მისი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ ამოცანის პასუხს.

მივიღოთ, რომ ABC სამკუთხედი გაუმჭვირი მასალისგანაა დამზადებული. ეს განაპირობებს MN ხაზის ხილული და უხილავი ნაწილების არსებობას. ხილვადობის პირობებში გარკვევისათვის მივმართოთ შემდეგ მსჯელობას: AC და MN ხაზების გეგმილების გადაკვეთის წერტილში ფაქტიურად ორი წერტილია შეთავსებული. ერთი მათგანი (E) ეკუთვნის AC ხაზს, ხოლო მეორე (F)$-MN$ ს. მათი ნიშნულები კი გვიჩვენებენ, რომ ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მიმართ E წერტილი ($E \supset AC$) უფრო მაღლა მდებარეობს



ნახ. 52

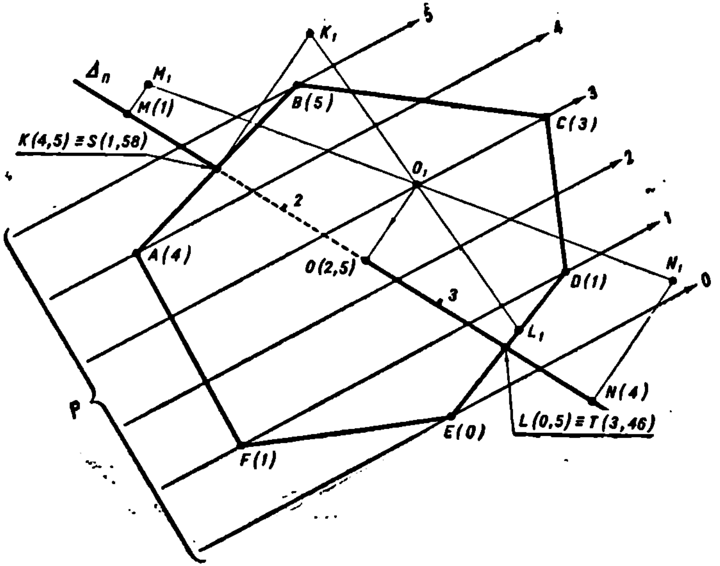
ვიდრე $F(F \supset MN)$. აქედან გამომდინარე, MN ხაზის FK მონაკვეთი უხილავი იქნება.

ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე MN ხაზის KN მონაკვეთი მთლიანად ხილვადია.

53-ე ნახაზზე ნაჩვენებია $ABCDEF$ ბრტყელი ექვსკუთხედის გადაკვეთა MN სწორი ხაზით. აქ გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად MN ხაზზე გატარებულია მაგეგმილებელი Δ სიბრტყე, რომელიც თავისივე კვალის გარშემო შემობრუნებით შეთავსებულია ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან. შეთავსების შემდეგ მივიღებთ

$$O_1 = M_1N_1 \times K_1L_1.$$

O_1-ის დაბრუნებით MN ხაზზე მიღებულია საძიებელი $O(2,5)$ წერტილი. მკვეთი ხაზის ხილული და უხილავი ნაწილები განსაზღვრულია ზემომოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე.



ნახ. 53

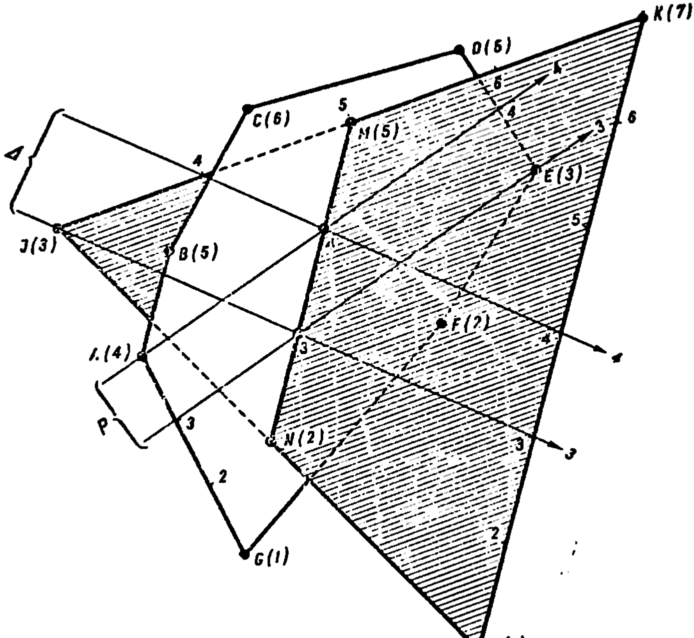
2. ბრტყელი ნაკვეთების ურთიერთგადაკვეთა

ეს ამოცანა ორი სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგების ანალოგიურია. იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სწორი ხაზით ბრტყელი ნაკვეთის ორჯერ გადაკვეთის შემთხვევა.

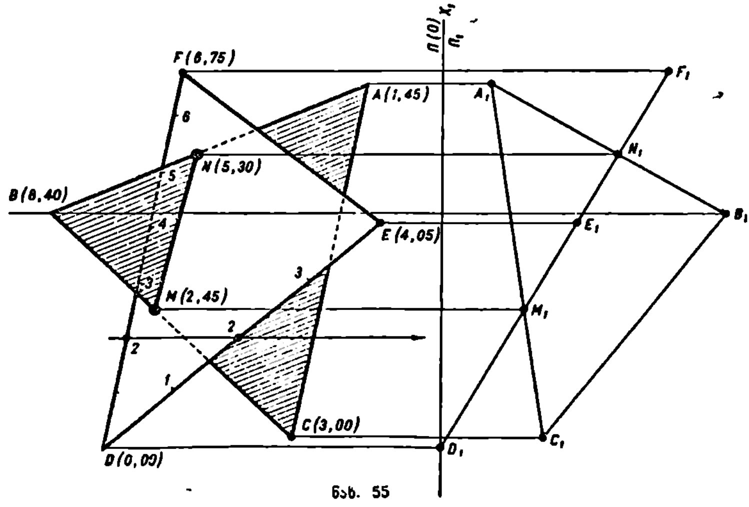
ვთქვათ, მოცემულია $ABCDEFG$ და JKL ბრტყელი ნაკვეთები (ნახ. 54). ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ორი სიბრტყის გადაკვეთის იმ სახესთან, როცა ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები ნახაზის ფარგლებში იკვეთებიან. ამის საილუსტრაციოდ ავაგოთ როგორც ერთი, ისე მეორე ნაკვეთის ერთნაირნიშნულებიანი თარაზულების ორი წყვილი. მათი გადაკვეთის წერტილების (3 და 4) შემაერთებელი ხაზის ის მონაკვეთი, რომელიც საერთოა ორივე ნაკვეთისათვის, იქნება ამოცანის პასუხი. თუ წარმოვიდგენთ, რომ მოცემული ნაკვეთები გაუმჭვირი მასალისაგან დამზადებულ ფირფიტებს წარმოადგენს, რასაკვირველია, აქაც დაისმება ხილული და უხილავი ნაწილების გამორკვევის საკითხი.

ანალოგიურ ამოცანებში ხშირად ხელსაყრელია გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენებაც. ასეთი შემთხვევა ნაჩვენებია 55-ე ნახაზზე.

აქ ახალი სიბრტყე შემოტანილია ისე, რომ ერთ-ერთი ნაკვეთის სიბრტყეს (DEF) X_1 სისტემაში მინიჭებული აქვს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა. ამავე სისტემაში უშუალოდაა განსაზღვრული ნაკვეთების გადაკვეთის M_1N_1 ხაზი. ძველ სისტემაში დაბრუნებით ნაპოვნია ამოცანის პასუხი. ხილული და უხილავი ნაწილები განსაზღვრულია ჩვენთვის უკვე ცნობილი მსჯელობის საფუძველზე.


K(7)
D(6)
C(6)
M(5)
E(3)
J(3)
B(5)
F(2)
I(4)
N(2)
G(1)
L(1)
Δ
P

ნახ. 54


F(6,75)
A(1,45)
N(5,30)
B(8,40)
E(4,05)
M(2,45)
C(3,00)
D(0,00)
$\Pi(0)$
X_1
Π_1
F_1
A_1
N_1
B_1
E_1
M_1
C_1
D_1

ნახ. 55

მეტრული ამოცანები

§ 7. ურთიერთმართობულობა

1. ზოგადი ცნობები

საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევა, როდესაც საჭიროა სხვადასხვა გეომეტრიული სიდიდეების, მაგალითად, მონაკვეთების სიგრძის, კუთხეების, ფართობებისა და სხვათა გაზომვა. ასეთ ამოცანებს, განსხვავებით პოზიციური ამოცანებისაგან, რომლებიც დაკავშირებული არიან დასაგეგმილებელი ობიექტების ურთიერთგანლაგებასთან სივრცეში, მ ე ტ რ უ ლ ი ა მ ო ც ა ნ ე ბ ი ეწოდება.

მეტრული ამოცანების ამოხსნის დროს ზოგჯერ მიზანშეწონილია კომპლექსური ნახაზების გარდაქმნის რომელიმე ხერხით სარგებლობა.

ხშირად მეტრული ამოცანა ითხოვს ურთიერთმართობული სწორი ხაზებისა და სიბრტყეების გამოყენებას. ამის გამო აუცილებელია წინასწარ ჩამოყალიბდეს ის პირობები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ ნახაზზე ავაგოთ სივრცეში ურთიერთმართობული სწორი ხაზები და სიბრტყეები.

2. ურთიერთმართობული სწორი ხაზები

განვიხილოთ თეორემა, რომლის მეშვეობითაც შეგვეძლება ავაგოთ სივრცეში ურთიერთმართობული სწორი ხაზების ნიშნულებიანი გეგმილები, აგრეთვე ვიმსჯელოთ ნიშნულებიან გეგმილებში გამოხაზული ორი სწორი ხაზის სივრცეში ურთიერთმართობულობის საკითხზე.

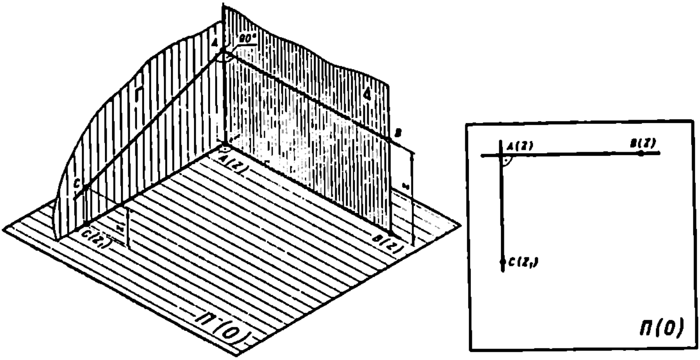
თ ე ო რ ე მ ა: იმისათვის, რომ მართი კუთხე ორთოგონალურად ისევ მართ კუთხედ დაგეგმილდეს, აუცილებელი და საკმარისია კუთხის შემადგენელი გვერდებიდან ერთი მაინც იყოს ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელური, ხოლო მეორე არ იყოს უკანასკნელის მართობული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ CAB მართი კუთხის AB გვერდი წარმოადგენს თარაზულას (ნახ. 56). ავაგოთ მოცემული კუთხის ნიშნულებიანი გეგმილი $C(Z_1)\,A(Z)\,B(Z)$. დავამტკიცოთ, რომ $\angle C(Z_1)\,A(Z)\,B(Z)$ მართი კუთხეა. თეორემის პირობით $AB \parallel \Pi(O)$; აქედან გამომდინარე $AB \parallel A(Z)\,B(Z)$.

$AA(Z) \perp \Pi(O)$, აქედან $AA(Z) \perp A(Z)\,B(Z)$. გამოდის, რომ AB გვერდი I' სიბრტყეში მდებარე ორი ($AA(Z)$ და AC) სწორი ხაზის მართობულია; მაშასადამე, $AB \perp I'$. რადგან $AB \parallel A(Z)\,B(Z)$, ამიტომ $A(Z)\,B(Z) \perp I'$ და შესაბამისად I' სიბრტყეში მდებარე $A(Z)\,C(Z_1)$ სწორი ხაზისა, ე. ი.

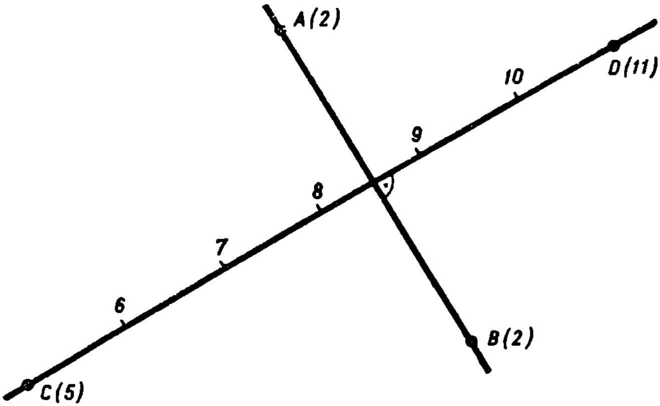
$$A(Z)\,B(Z) \perp A(Z)\,C(Z_1).$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.



ნახ 56

ეს თეორემა ეხება მართი კუთხის,ანუ ურთიერთმართობული გადაკვეთილი სწორი ხაზების დაგეგმილებას. იგი ვრცელდება ურთიერთმართობული, აცდენილი სწორი ხაზების დაგეგმილებაზეც (ნახ. 57).



ნახ. 57

3. სწორი ხაზისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობა

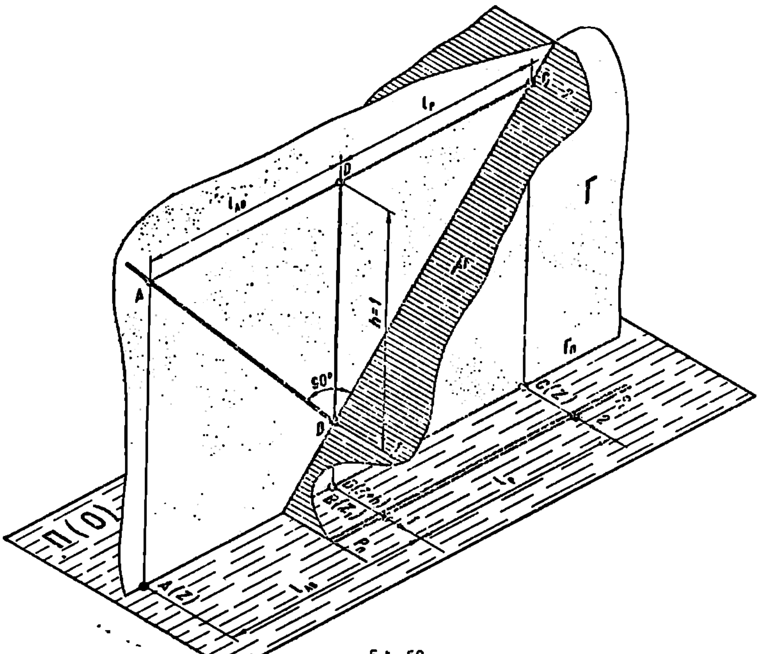
განვიხილოთ თეორემა, რომლის მეშვეობითაც შეგვეძლება ავაგოთ სივრცეში ურთიერთმართობული სწორი ხაზისა და სიბრტყის ნიშნულებიანი გეგმილი; აგრეთვე ვიმსჯელოთ ნიშნულებიან გეგმილებში გამოხაზული სწორი ხაზისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობის საკითხზე.

თ ე ო რ ე მ ა: თუ სივრცეში სწორი ხაზი სიბრტყის მართობულია, მაშინ გეგმაზე ამ ხაზის გეგმილი ქანობის მასშტაბის პარალელურია (ანუ თარაზულების მართობი), ხოლო მისი ინტერვალის სიდიდე სიბრტყის ინტერვალის სიდიდის შებრუნებული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: განვიხილოთ 58-ე ნახაზი. აქ ნაჩვენებია ზოგადი მდებარეობის P სიბრტყისა და მისი მართობი AB ხაზის თვალსაჩინო სურათი. ორი ხაზის ურთიერთმართობულობის თეორემის ძალით AB ხაზის გეგმილი P სიბრტყის გამომსახველი თარაზულების მართობულია, ე. ი. ამავე სიბრტყის ქანობის მასშტაბის პარალელური,

$$A(Z)\,B(Z_1) \parallel P_i.$$

ამით მტკიცდება თეორემის პირველი ნაწილი. მეორე ნაწილის, ე. ი. ხაზისა და სიბრტყის ინტერვალების ურთიერთშებრუნებულობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედი. მართი კუთხის B წვე-



ნახ. 58

როდან AC ჰიპოტენუზაზე დაშვებული BD სიმაღლე, ჩვენივე შერჩევით, კვეთის სიმაღლის ტოლია ($h=1$). ამავე სამკუთხედიდან შეგვიძლია დავწეროთ ცნობილი ფარდობა:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}, \tag{1}$$

სადაც $AD=l_{AB}$ (AB ხაზის ინტერვალი), $DC=l_P$ (P სიბრტყის ინტერვალი), ხოლო $BD=h$ (კვეთის სიმაღლე). ამ მნიშვნელობების ჩასმით (1) ფარდობაში მივიღებთ:

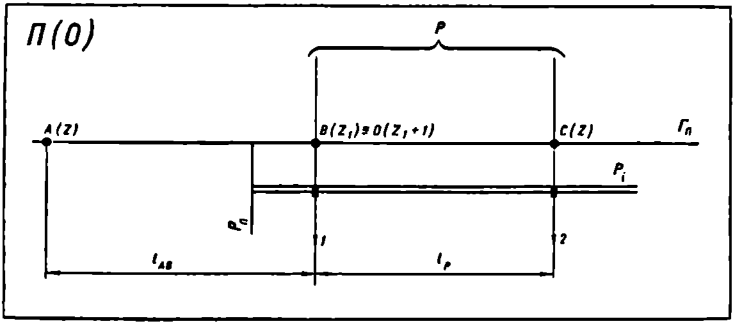
$$\frac{l_{AB}}{h} = \frac{h}{l_P}.$$

როცა $h=1$ მ, მაშინ

$$l_{AB}=\frac{1}{l_p},$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

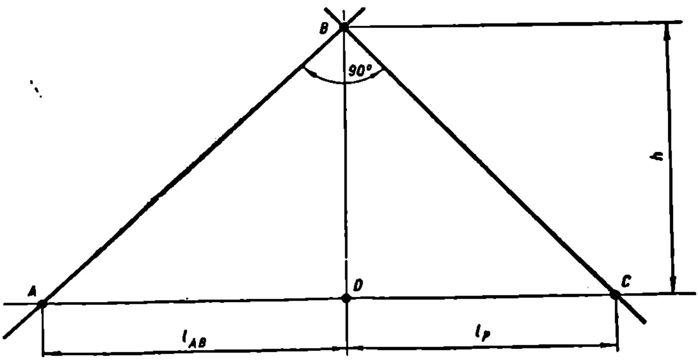
59-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ურთიერთმართობული სწორი ხაზისა და სიბრტყის გრაფიკული გამოსახულება გეგმაზე.



ნახ. 59

58-ე ნახაზიდან შეგვიძლია, აგრეთვე, დავადგინოთ სიბრტყის მართობული სწორი ხაზის ინტერვალის გამოთვლის გრაფიკული ხერხი, როდესაც ცნობილია სიბრტყის ინტერვალი ან პირიქით.

ცალკე გამოვიტანოთ ABC სამკუთხედი. მე-60 ნახაზზე იგი პირობით გადმობრუნებულია ისე, რომ მართი კუთხის B წვერო ზევითაა მოქცეული



ნახ. 60

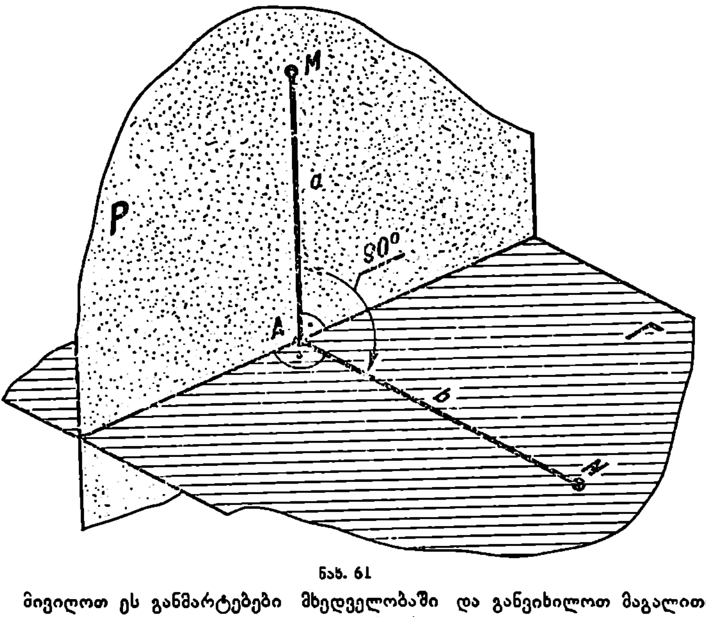
(ეს არის სამკუთხედის სწორედ ის მდებარეობა, რომელიც რეკომენდებულია აღნიშნული ხერხის გამოყენების დროს).

მე-60 ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ, თუ წინასწარ მოცემული გვექნება სიბრტყის ინტერვალი და კვეთის სიმაღლე შევძლებთ ამ სიბრტყის მართობული ხაზის ინტერვალის განსაზღვრას, და პირიქით.

4. ურთიერთმართობული სიბრტყეები

სტერეომეტრიიდან ცნობილია, რომ, თუ ორი სიბრტყე (P და Γ) ურთიერთმართობულია, მაშინ თითოეული მათგანი გადის მეორე სიბრტყის მართობულ სწორ ხაზზე (ნახ. 61). მაგალითად, P სიბრტყე გადის Γ სიბრტყის მართობულ სწორ ხაზზე (a), ხოლო Γ სიბრტყე — P სიბრტყის მართობულ სწორ ხაზზე (b).

სივრცის M წერტილზე (ნახ. 61) შეიძლება გატარდეს Γ სიბრტყის მართობული სიბრტყეების უსასრულოდ დიდი რაოდენობა, მაგრამ ყველა ისინი გაივლიან M წერტილიდან Γ სიბრტყეზე დაშვებულ a მართობზე.



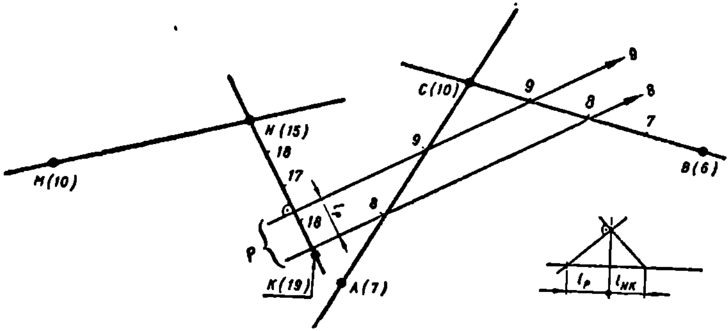
ნახ. 61

მივიღოთ ეს განმარტებები მხედველობაში და განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია ზოგადი მდებარეობის MN ხაზი და ABC სიბრტყე. საჭიროა მოცემულ ხაზზე გავატაროთ მოცემული სიბრტყის მართობული სიბრტყე (ნახ. 62).

მოცემული ხაზის ნებისმიერი წერტილიდან (მაგ., N) დავუშვათ მართობი ABC სიბრტყეზე. ამისათვის დაგვჭირდება ABC სიბრტყის ორი თარაზულას აგება და დაშვებული მართობისათვის ინტერვალის გამოთვლა. მიღებული სიბრტყე, რომელიც MN და NK ურთიერთმკვეთი ხაზებით იქნება განსაზღვრული — მოცემული სიბრტყის მართობი იქნება.

ამ მაგალითის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულება: თუ გეგმაზე მოცემული ორი სიბრტყიდან ერთზე შესაძლებელია გავა-



ნახ. 62

ტაროთ მეორის მართობული სწორი ხაზი, ასეთი სიბრტყეები სივრცეში ურთიერთმართობულნი არიან.

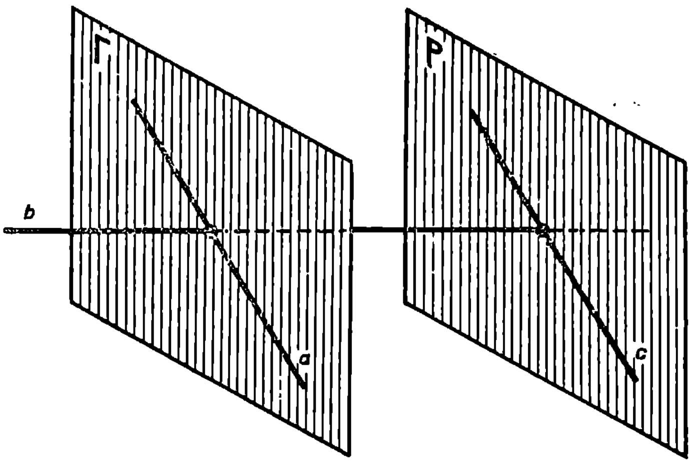
5. ზოგადი მდებარეობის სწორი ხაზების ურთიერთმართობულობა

ზოგადი მდებარეობის ხაზებს შორის მოთავსებული მართი კუთხე ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე, როგორც წესი, დამახინჯებულად გეგმილდება.

იმისათვის, რომ გეგმაზე გამოვარკვიოთ ორი ზოგადი მდებარეობის სწორი ხაზის მართობულობა, ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი პირობით:

გეგმაზე მოცემული ორი სწორი ხაზი სივრცეში მხოლოდ იმ შემთხვევაშია ურთიერთმართობული, თუ შეიძლება თითოეულ მათგანზე მეორის მიმართ მართობული სიბრტყის გატარება.

ეს პირობა შეგვიძლია გავიგოთ ასე (ნახ. 63): თუ რაიმე *a* და *b* სწორი ხაზები ურთიერთმართობულია, მაშინ *a*-ზე შესაძლებელია გატარდეს Γ სიბრ-



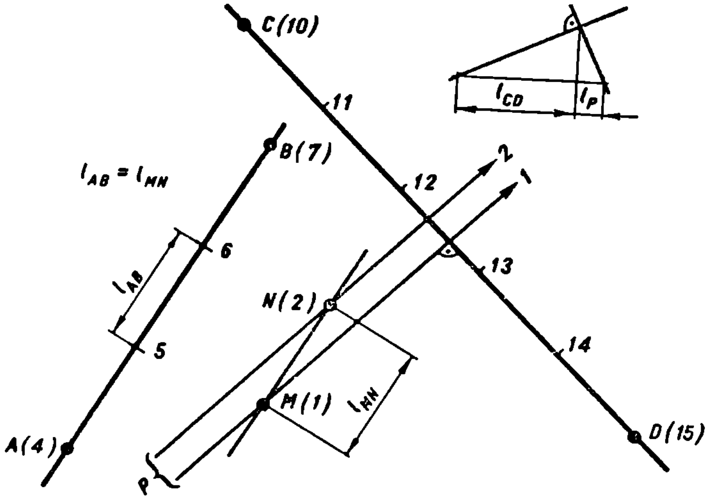
ნახ. 63

ტყე b-ს მართობულად, ეს სიბრტყე კი, თავის მხრივ, პარალელური იქნება b-ს მართობული რაიმე P სიბრტყის. გამოდის, რომ a სწორი ხაზი პარალელური უნდა იყოს P სიბრტყის და ამიტომ ამ სიბრტყეში მდებარე ერთი რაიმე C სწორი ხაზისა.

ამრიგად, იმისათვის, რომ ზოგადი მდებარეობის a და b სწორი ხაზები ურთიერთმართობულნი იყვნენ სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ გეგმაზე ერთ-ერთი სწორი ხაზი (მაგალითად a) იყოს მეორე სწორი ხაზის (მაგალითად b) მართობულ P სიბრტყეში მდებარე სწორი ხაზის (c) პარალელური. ეს დამოკიდებულება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$a \parallel c; \ c \supset P; \ P \perp b.$$

ვთქვათ, გეგმაზე მოცემულია ორი ზოგადი მდებარეობის AB და CD ხაზები (ნახ. 64). მათი ურთიერთმართობულობის გამოსარკვევად საჭიროა გა-



ნახ. 64

ვატაროთ ერთ-ერთი ხაზის (მაგალითად CD) მართობი P სიბრტყე. თუ ამ სიბრტყეში შესაძლებელი იქნება მეორე ხაზის (ანუ AB) პარალელური რაიმე MN ხაზის გავლება, ე. ი., თუ დაცული იქნება პარალელობის, კუთვნილებისა და მართობულობის შემდეგი პირობა:

$$AB \parallel MN; \ MN \supset P; \ P \perp CD,$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემული AB და CD ხაზები სივრცეში ურთიერთმართობულნი არიან.

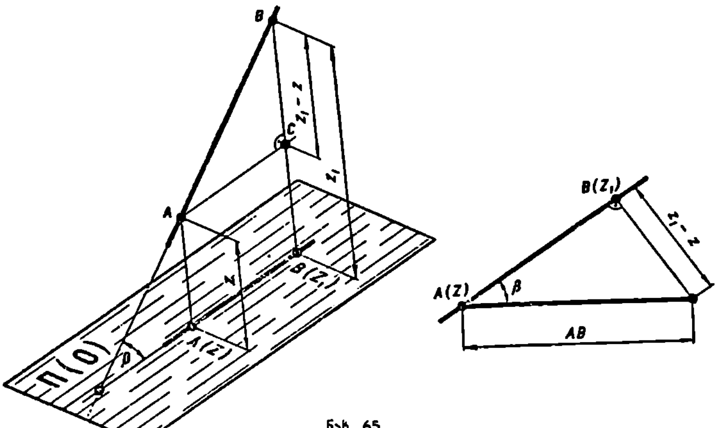
ჩამოთვლილი პირობებისა და განხილული მაგალითის საფუძველზე შესაძლებლობა გვეძლევა დავადგინოთ გეგმაზე მოცემული ზოგადი მდებარეობის ორი სწორი ხაზის ურთიერთმართობულობა სივრცეში; გარდა ამისა, საჭიროების შემთხვევაში ავაგოთ მოცემული ზოგადი მდებარეობის ერთი სწორი ხაზის მართობული სწორი ხაზი.

§ 8. მონაკვეთების, კუთხეებისა და ფართობების გაზომვა

1. სწორი ხაზის მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდისა და ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან დახრის კუთხის გაზომვა

როგორც ცნობილია, სწორი ხაზის მონაკვეთი თავისი ნამდვილი სიდიდით მხოლოდ ერთადერთ შემთხვევაში გეგმილდება, როცა იგი ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელურია. ყველა სხვა შემთხვევაში სწორი ხაზის მონაკვეთის გეგმილი, ანუ ქვედებული ნაკლებია მის ნატურალურ ზომაზე. ამასთან დაკავშირებით, ხშირია შემთხვევა, როდესაც დასმული ამოცანა მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდის გაზომვას ითვალისწინებს. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

სამკუთხედის წესი. A წერტილზე (ნახ. 65) გავატაროთ $A(Z)B(Z_1)$ გეგმილის პარალელური სწორი ხაზი. $\triangle ACB$ მართკუთხა სამკუთხედია, რომელშიც ჰიპოტენუზა დასაგეგმილებელი მონაკვეთის (AB) ნატურალური სიდიდეა, AC კათეტი — მისი გეგმილი, ხოლო მეორე BC კათეტი — A და B წერტილების სიმაღლეთა სხვაობა. აქედან გამომდინარე, მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე უდრის ისეთ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, რომლის ერთი კათეტია ამ მონაკვეთის ნიშნულებიანი გეგმილი, ხოლო მეორე — მონაკვეთის ბოლო წერტილების სიმაღლეთა სხვაობა.

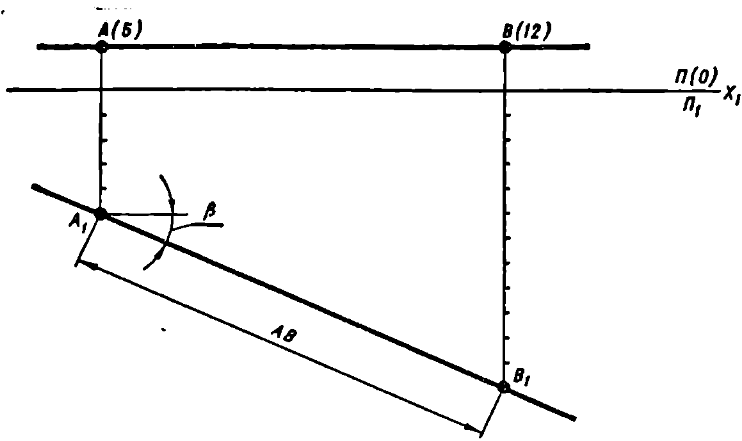


ნახ. 65

შევნიშნოთ, რომ მონაკვეთის ნამდვილ სიდიდესთან ერთად აქვე იზომება მისი ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი დახრის β კუთხე (იხ. ნახ. 65).

გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხი. ვთქვათ, გეგმაზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის მონაკვეთის $A(5)\,B(12)$ გეგმილი (ნახ. 66).

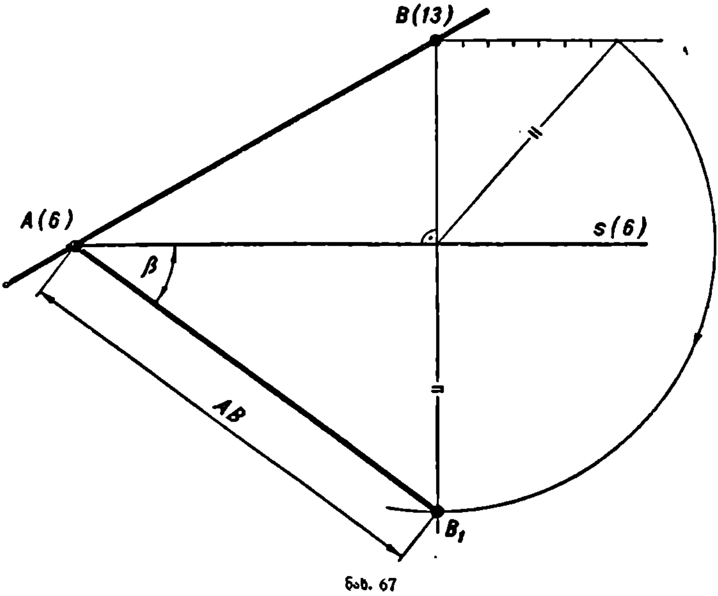
შევცვალოთ ძირითადი გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ მოცემულ ხაზს დონის ხაზის მდებარეობა მივანიჭოთ. AB მონაკვეთი X_1 სისტემაში თავისი ნამდვილი სიდიდით გამოისახება. A_1 წერტილში შექმნილი უმცირესი კუთხე AB ხაზის ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი დახრის კუთხე (β) იქნება.



ნახ. 66

ბ რ უ ნ ვ ი ს ხ ე რ ხ ი. ვთქვათ გეგმაზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის მონაკვეთის $A(6)\,B(13)$ გეგმილი (ნახ. 67).

$A(6)$ გეგმილზე გავატაროთ $s(6)$ თარაზულა და მის გარშემო AB მონაკვეთის შემობრუნებით უკანასკნელი $s(6)$ თარაზულას დონის სიბრტყესთან



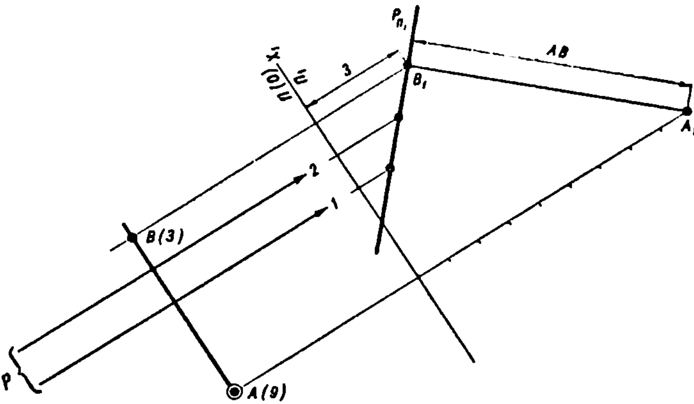
ნახ. 67

შევათავსოთ. მიღებული ახალი გეგმილი წოცემული მონაკვეთის ნატურალური სიდიდე იქნება, ხოლო $A(6)B_1$ ხაზის მიერ $x(6)$ თარაზულასთან შექმნილი კუთხე — AB ხაზის დახრის კუთხე (β).

2. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის გაზომვა

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა მოცემული წერტილიდან დავუშვათ მართობი მოცემულ სიბრტყეზე და განვსაზღვროთ ამ მართობის ფუძე. მიღებული მონაკვეთი ამოცანის პასუხი იქნება.

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და $A(9)$ წერტილი (ნახ. 68). მათ შორის უმოკლესი მანძილის გასაზომად A წერტილზე გავატაროთ P სიბრტყის



ნახ. 68

თარაზულების მართობი ხაზი, ანუ მოცემულ წერტილიდან დავუშვათ მართობი მოცემულ სიბრტყეზე. ამ მართობის P სიბრტყესთან შეხვედრის წერტილის მოსაძებნად შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში P სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდგომარეობა მიეცეს.

A წერტილის ახალი A_1 გეგმილიდან X_1 სისტემაში P სიბრტყის P_{Π_1} კვალზე უშუალოდ მართობის დაშვებით მივიღებთ გადაკვეთის წერტილის B_1 გეგმილს. მისი დაბრუნებით ძველ სისტემაში განვსაზღვრავთ მართობის ფუძეს.

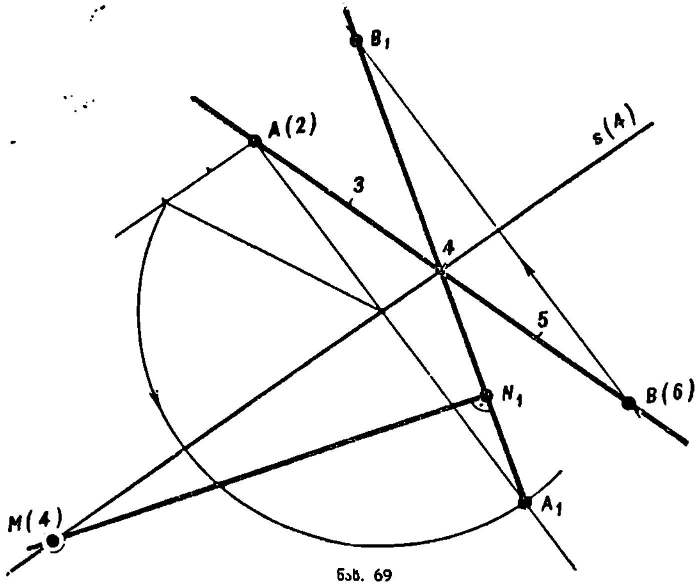
B წერტილის ნიშნული შეიძლება განისაზღვროს ორი გზით: 1) B_1-დან X_1 ღერძამდე მანძილის უშუალო გაზომვით და 2) AB ხაზის ინტერპოლირებით. ამისათვის საჭირო ინტერვალი გამოითვლება სიბრტყის ინტერვალის მიხედვით (იხ. ხაზისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობა).

შევნიშნოთ, რომ მიღებული AB მონაკვეთი, ანუ საძიებელი მანძილი, თავისი ნამდვილი სიდიდით X_1 სისტემაში დაგეგმილდება.

3. წერტილიდან სწორ ხაზამდე უმოკლესი მანძილის გაზომვა

ეს ამოცანა მოცემული წერტილიდან მოცემულ ხაზზე მართობის დაშვებას ითვალისწინებს.

ამოცანის პასუხი იოლად მოიძებნება, როცა მოცემული წერტილითა და სწორი ხაზით განსაზღვრული სიბრტყე ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელურია.



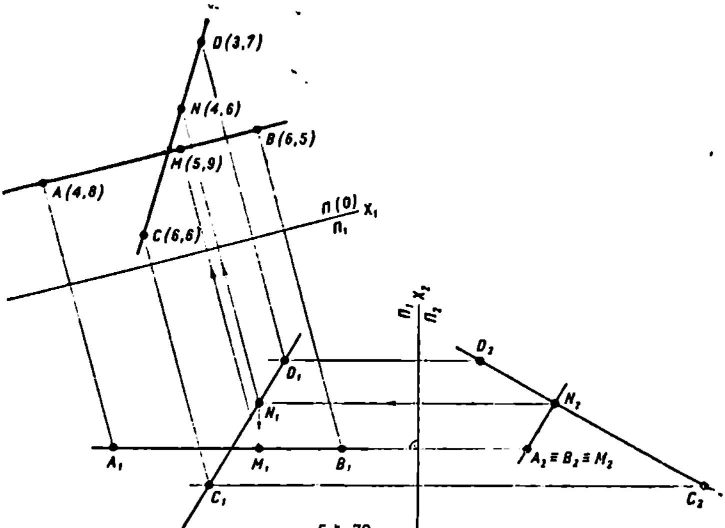
ნახ. 69

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა (ნახ. 69). ბრუნვის ხერხის გამოყენებით შევცვალოთ მოცემული ელემენტებისა და გეგმილთსიბრტყის ურთიერთდამოკიდებულება. ამისათვის M წერტილზე გავატაროთ MAB სიბრტყის $s(4)$ თარაზულა, უკანასკნელი მივიღოთ ბრუნვის ღერძად და AB ხაზი მისი დონის სიბრტყესთან შევათავსოთ. ამის შემდეგ $M(4)$ წერტილიდან A_1B_1 ხაზზე დაშვებული მართობი საძიებელ მანძილს გამოსახავს.

4. ორ აცდენილ სწორ ხაზს შორის უმოკლესი მანძილის გაზომვა

ამოცანის ამოხსნის სიმარტივე დიდად არის დამოკიდებული მოცემული აცდენილი ხაზების განლაგებაზე გეგმილთსიბრტყეების მიმართ. ყველაზე ხელსაყრელ შემთხვევად შეიძლება ჩაითვალოს ის, როცა ერთ-ერთი ხაზი მაგეგმილებელია. ასეთ შემთხვევაში მაგეგმილებელი ხაზის გეგმილიდან მეორე ხაზის გეგმილზე დაშვებული მართობი საძიებელი მანძილი იქნება.

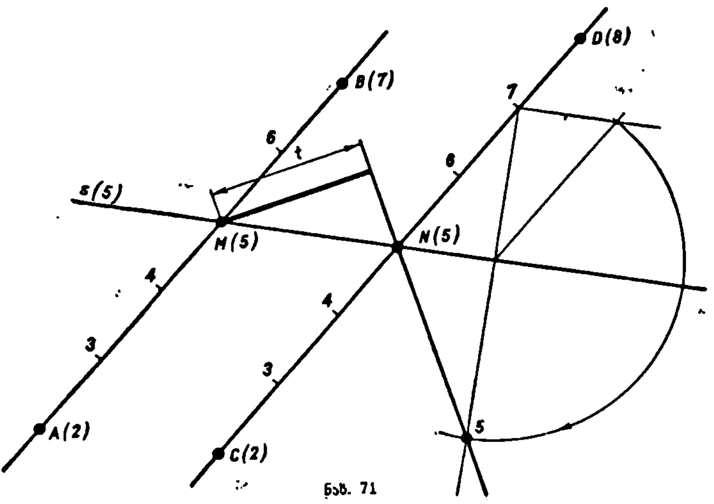
განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა (ნახ. 70). მოცემულია $A(4,8)$ $B(6,5)$ და $C(6,6)$ $D(3,7)$ ზოგადი მდებარეობის აცდენილი სწორი ხაზები. მათ შორის უმოკლესი მანძილის გასაზომად ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით. ერთ-ერთი ხაზი (მაგ., AB) გარდავქმნათ მაგეგმილებელ ხაზად. X_2 სისტემაში მივიღებთ ამოცანის ამოხსნისათვის ხელსაყრელ პირობებს. A_2B_2 გეგმილიდან C_2D_2 გეგმილზე დაშვებული მართობი საძიებელი M_2N_2 მანძილი იქნება. M და N წერტილების ძველ სისტემაში (ნახაზზე ნაჩვენებია ისრებით) დაბრუნებით მივიღებთ მოცემული აცდენილი სწორი ხაზების ორი უახლოესი წერტილების გეგმილებს. M და N წერტილების ნიშნულების ორი გზით გამოთვლა შესრულებული გრაფიკული სამუშაოს კონტროლის საშუალებაა.



ნახ. 70

5. ორ პარალელურ სწორ ხაზს შორის მანძილის გაზომვა

ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ბრუნვის ხერხით (ნახ. 71). გავავლოთ AB და CD პარალელური ხაზებით განსაზღვრული სიბრტყის $s(5)$ თარაზულა. უკანასკნელის გარშემო ბრუნვით CD ხაზი შევათავსოთ $s(5)$ თარაზულას დონის სიბრტყესთან. AB ხაზის კუთვნილი $M(5)$ წერტილიდან შე-

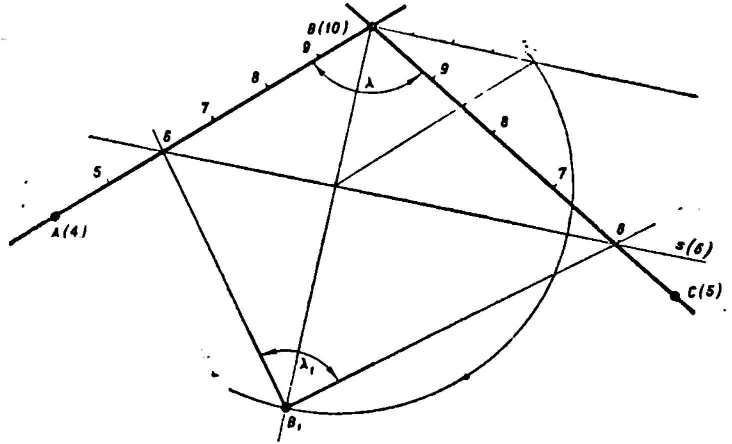


ნახ. 71

თავსებულ CD ხაზზე დაშვებული მართობი (l) საძიებელ მანძილს გამოსახავს.

6. ორ ურთიერთგადაკვეთილ სწორ ხაზს შორის კუთხის გაზომვა

ნებისმიერი ხაზოვანი კუთხე თავისი ნამდვილი სიდიდით მხოლოდ მაშინ გეგმილდება, როცა ამ კუთხის სიბრტყე ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელურია. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა (ნახ. 72). მოცემულია ზოგადი მდებარეობის $A(4)\,B(10)$ და $B(10)\,C(5)$ ურთიერთგადაკვეთილი სწორი ხაზები. B წვეროში მოთავსებული λ კუთხის გასაზომად ვისარგებლოთ ბრუნვის ხერხით. გავავლოთ ABC სიბრტყის $s(6)$ თარაზულა და უკანასკნე-



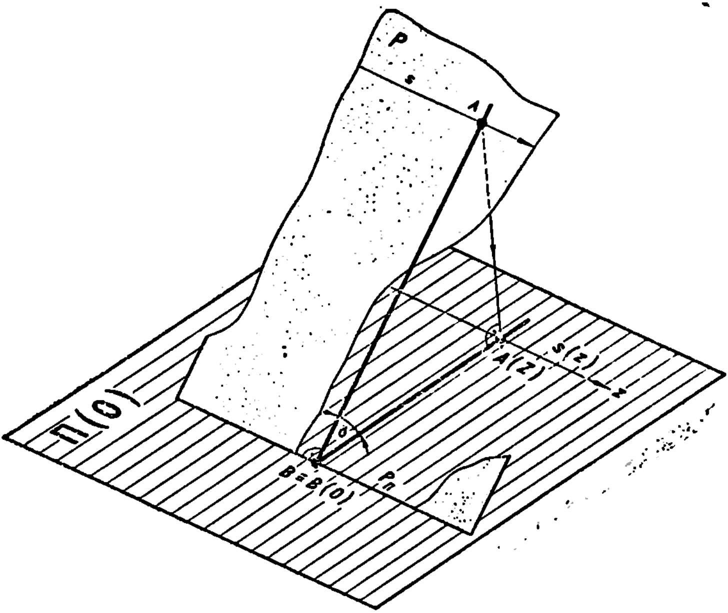
ნახ. 72

ლის გარშემო ბრუნვით ABC სიბრტყე დონის სიბრტყედ გარდავქმნათ. ამისათვის საკმარისია მხოლოდ B წერტილის შეთავსება. მიღებული $\angle\lambda_1$ საძიებელი კუთხის ნატურალური სიდიდე იქნება.

7. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი დახრის კუთხის გაზომვა

ზოგადი მდებარეობის სიბრტყეზე მდებარე ხაზებს შორის არსებობენ სწორი ხაზები, რომლებიც ამ სიბრტყის თარაზულების მართობულები არიან და ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან უდიდეს კუთხეს ქმნიან. ასეთ ხაზებს, როგორც ამის შესახებ უკვე აღვნიშნეთ, უდიდესი ვარდნილობის ხაზები ეწოდება. მათი მეშვეობით ხშირად იზომება მოცემული სიბრტყის ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი დახრის კუთხე.

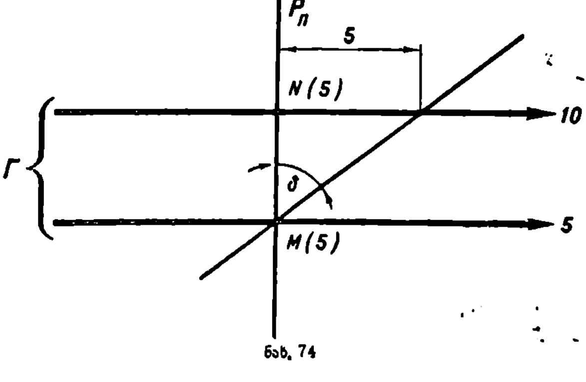
განვიხილოთ 73-ე ნახაზი. ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე, რომელიც ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე P_{Π} კვალს იძლევა. უკანასკნელი შეიძლება გასაზომი ორწახნაგა კუთხის წიბოდ ჩაითვალოს. P სიბრტყის ნებისმიერი A წერტილიდან დავუშვათ მართობი P_{Π} კვალზე ($AB \perp P_{\Pi}$). სწორი ხაზების ურთიერთმართობულობის თეორემის ძალით $A(Z)\,B(O) \perp P_{\Pi}$. აქედან გა-



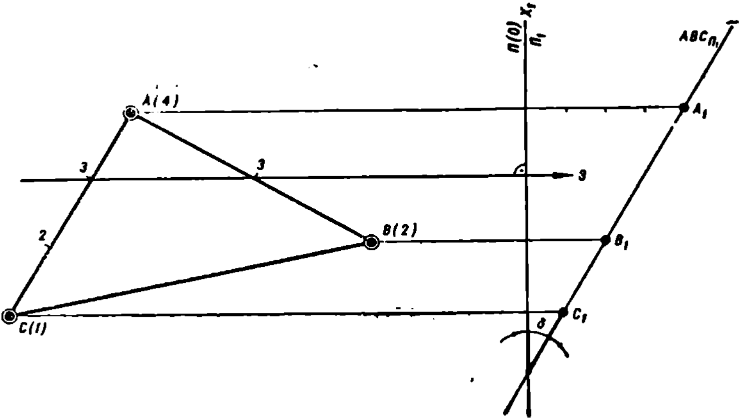
ნახ. 73

მომდინარე $AA(Z)B(O)$ სამკუთხედის სიბრტყე $P_Π$ წიბოს მართობულია. ამავე სამკუთხედის $B(O)$ წვეროსთან მდებარე კუთხე (ϑ) საძიებელ ორწახნაგა კუთხეს გამოსახავს.

74-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სიბრტყის დახრის კუთხის გაზომვა, როდესაც სიბრტყე თარაზულებითაა მოცემული. MN მონაკვეთი $Γ$ სიბრტყის უდიდე-



ნახ. 74



ნახ. 75

სი ვარდნილობის ხაზია. მისი ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან შეთავსებით ნაპოვნია საძიებელი დახრის კუთხე (δ). შემობრუნება მოხდა I' სიბრტყის თარაზულების მართობული P მაგეგმილებელი სიბრტყის კვალის (P_{Π}) გარშემო.

იგივე ამოცანა შესაძლებელია გადაწყდეს გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენებით. 75-ე ნახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა სიბრტყე სამი წერტილითაა მოცემული.

პირველთან შედარებით ამ გზის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ კუთხის გაზომვისათვის საჭირო გრაფიკული აგებანი შეიძლება ჩავატაროთ ნახაზის თავისუფალ ადგილზე.

8. ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვა

ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს (P და Δ) შორის მოთავსებული ორწახნაგა კუთხეების გამზომი λ და γ ხაზოვანი კუთხეები მოთავსებულია ამ სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზის (a), ანუ გასაზომი კუთხის წიბოს, მართობულ სიბრტყეში (I') (ნახ. 76). ამ დებულების მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ამოცანის ამოხსნის შემდეგი გზა (ნახ. 77).

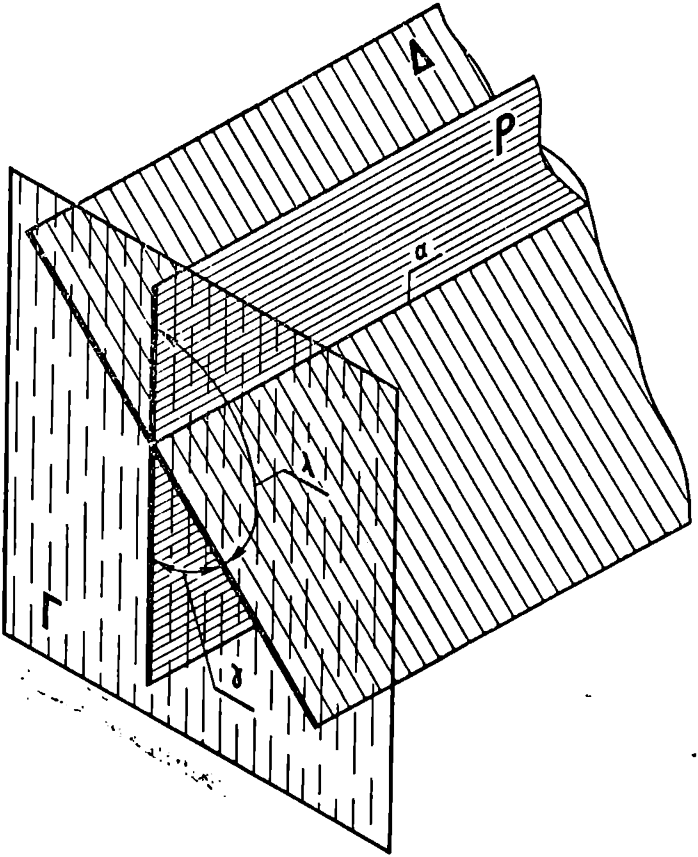
ვთქვათ მოცემულია P და Δ სიბრტყეები თარაზულებით. საძიებელი ორწახნაგა კუთხის გასაზომად ვიპოვოთ მათი გადაკვეთის MN ხაზი, გავატაროთ MN ხაზის მართობი I' სიბრტყე, ავაგოთ I' სიბრტყის მოცემულ სიბრტყეებთან განკვეთის NE და NF ხაზები. მიღებული $E(60)\,N(90)\,F(60)$ კუთხე საძიებელი კუთხის გეგმილი იქნება. უკანასკნელი ვაბრუნოთ EF თარაზულას დონის სიბრტყესთან შეთავსებამდე. მივიღებთ საძიებელ λ და γ კუთხეებს.

განხილული გზა საკმაოდ შრომატევადია განსაკუთრებით იმ შემთხვევებში, როცა ნახაზზე გადაკვეთის ხაზების ასაგებად საჭირო პირობები არახელსაყრელია.

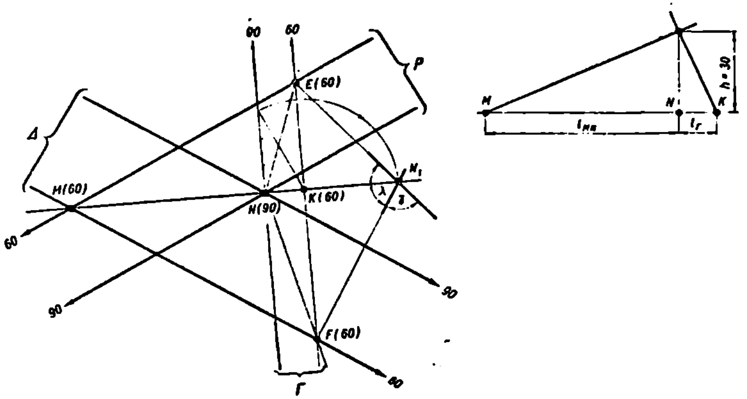
ხშირ შემთხვევებში ორწახნაგა კუთხის გასაზომად მისი წიბოს აგება

საჭირო არ არის. მაგალითად, (ნახ. 78), თუ მოცემულ P და Γ სიბრტყეებზე ნებისმიერი M წერტილიდან დავუშვებთ მართობებს ($MA \perp \Gamma$ და $MB \perp P$), M წერტილთან, ამ მართობების სიბრტყეში $\left(\Sigma \perp \begin{cases} P \\ \Gamma \end{cases}\right)$ მივიღებთ ორ ბრტყელ კუთხეს (λ, γ), რომლებიც P და Γ სიბრტყეებით შექმნილი ორწახნაგა კუთხეების ხაზოვან კუთხეებს წარმოადგენენ.

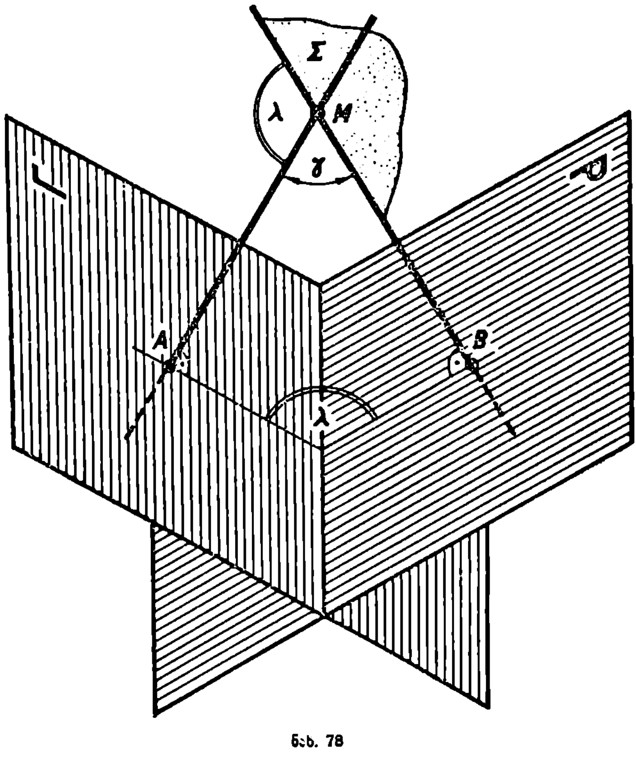
გავარჩიოთ მაგალითი. მოცემულია P და Γ სიბრტყეები. მათ მიერ შექმნილი კუთხეების (λ და γ) გასაზომად ნებისმიერი M წერტილიდან თითოეულზე დავუშვათ მართობი. M წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეებზე დაშვებული მართობების (a და b) მიერ შექმნილი Σ სიბრტყე ამავე სიბრტყის



ნახ. 76

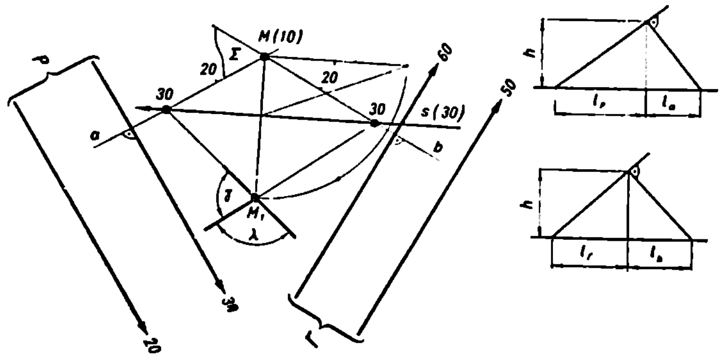


ნახ. 77



ნახ. 78

ნებისმიერი თარაზულას გარშემო ბრუნვით გადავაქციოთ დონის სიბრტყედ (ნახ. 79). Σ სიბრტყის თარაზულას აგებისათვის საჭიროა *a* და *b* მართობების გრადუირება.

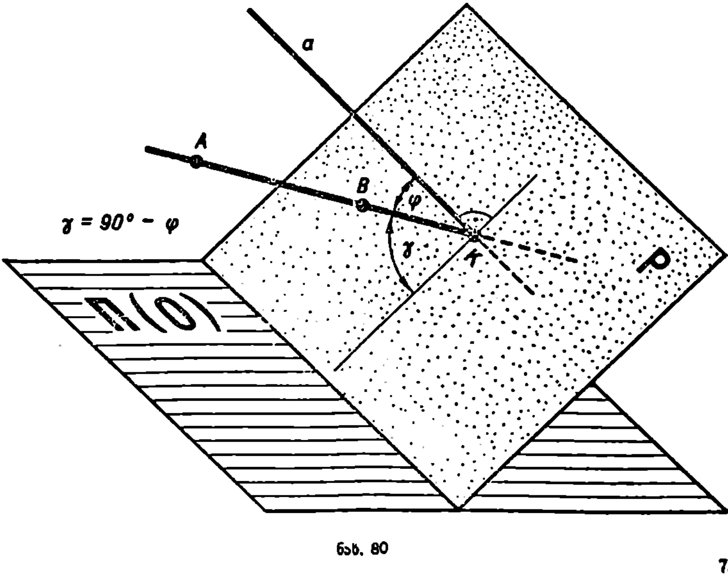


ნახ. 79

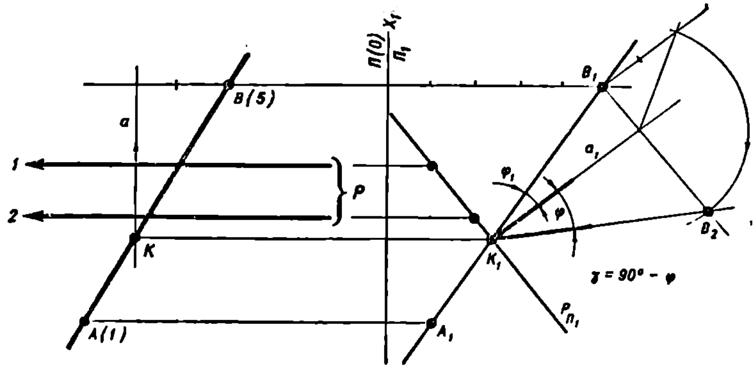
9. სწორ ხაზსა და სიბრტყეს შორის მოთავსებული კუთხის გაზომვა

სწორ ხაზსა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება იმ მახვილ კუთხეს, რომელიც მოთავსებულია ამ სწორ ხაზსა და მოცემულ სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის. განვიხილოთ ასეთი კუთხის გაზომვის ორი გზა.

1) ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და AB სწორი ხაზი (ნახ. 80). $K=AB\times P$ წერტილიდან აღვმართოთ P სიბრტყის a მართო-

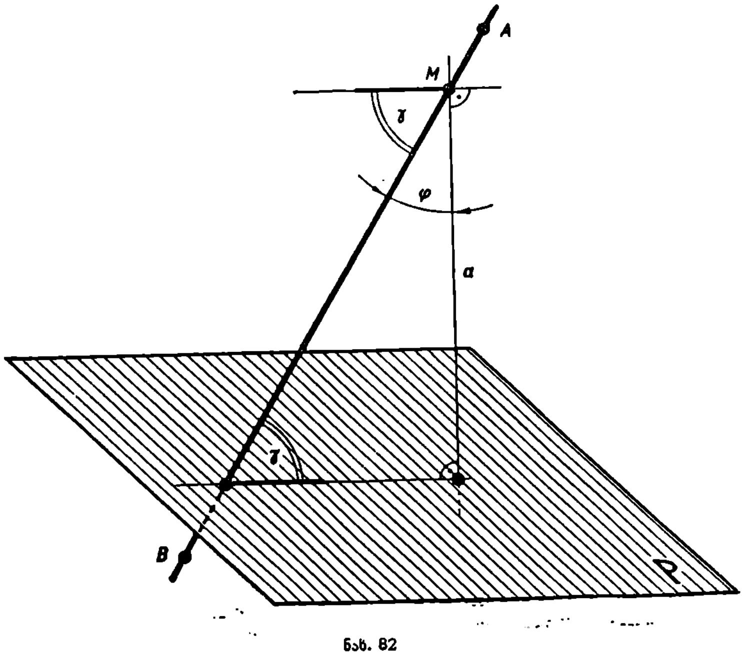


ნახ. 80



ნახ. 81

ბი. მოცემულ AB ხაზსა და a მართობს შორის მოთავსებული φ კუთხე γ საძიებელი კუთხის 90°-დე შემავსებელი იქნება. ამ მსჯელობის საფუძველზე ჩვენი ამოცანა გეგმაზე შეგვიძლია შემდეგი თანამიმდევრობით გადავწყვიტოთ (ნახ. 81).

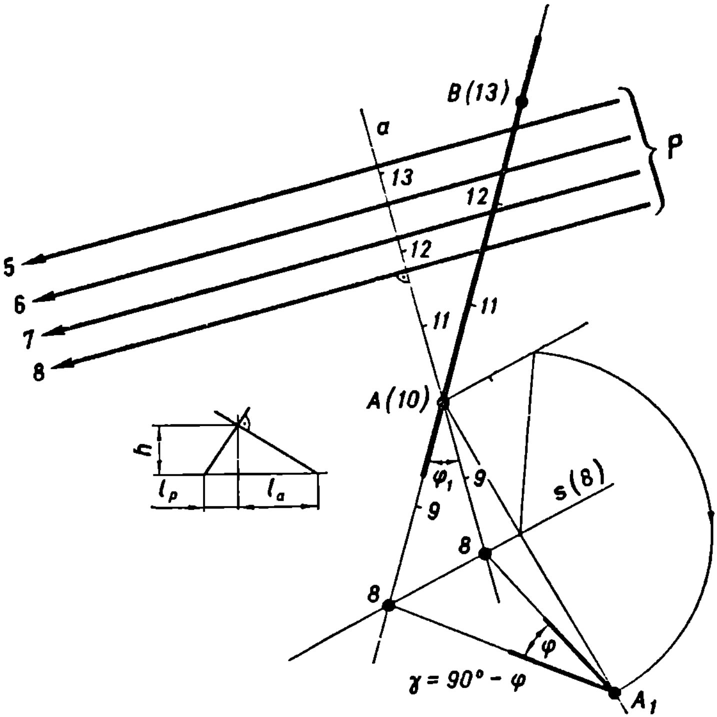


ნახ. 82

შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ მოცემულ P სიბრტყეს ახალ სისტემაში მაგეგმილებელი სიბრტყის ზდებარეობა მიეცეს.

X_1 სისტემაში $K_1=P_{\Pi_1}\times A_1B_1$ წერტილიდან აღვმართოთ P სიბრტყის მიმართ მართობი (a_1). A_1B_1-სა და a_1 მართობს შორის მოთავსებული φ_1 მახვილი კუთხე საძიებელი კუთხის 90°-მდე შემავსებელი იქნება; მაგრამ ეს კუთხე გეგმაზე თავისი ნამდვილი სიდიდით არ არის გამოსახული. მისი ნატურალური სიდიდის აღსადგენად ვისარგებლოთ ბრუნვის ხერხით. ბრუნვის ღერძად კი a მართობი გამოვიყენოთ, რომელიც X_1 სისტემაში დონის ხაზს წარმოადგენს. ვაბრუნოთ B_1 წერტილი a_1 ღერძის გარშემო, მანამ სანამ იგი ამ ღერძის დონის სიბრტყეს შეუთავსდება. მივიღებთ B_2 წერტილს. კუთხე, რომელიც შეიქმნება B_2K_1 სწორსა და a_1 მართობს შორის φ კუთხის ნატურალური სიდიდე იქნება. მისი დახმარებით კი გამოითვლება საძიებელი γ კუთხე.

2) თუ AB ხაზის ნებისმიერი M წერტილიდან P სიბრტყეზე (ნახ- 82) დავუშვებთ a მართობს, მახვილი კუთხე (φ), რომელიც შეიქმნება M წერტილთან, AB ხაზსა და a მართობს შორის, საძიებელი γ კუთხის 90°-დე შემავსებელი იქნება.

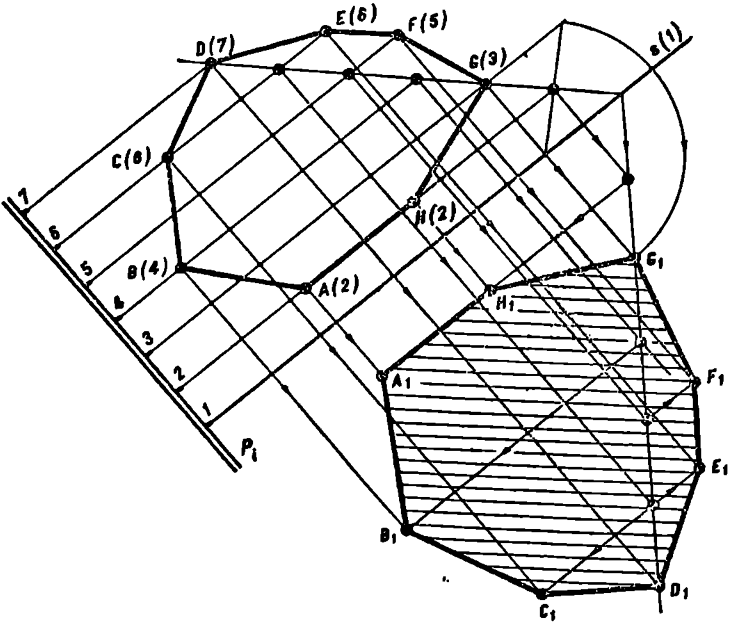


ნახ. 83

მივიღოთ მხედველობაში აღნიშნული მსჯელობა და განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი (ნახ. 83): მოცემულია P სიბრტყე და $A(10)B(13)$ სწორი ხაზი. მათ შორის მოთავსებული კუთხის გასაზომად A წერტილიდან P სიბრტყეზე a მართობი დავუშვათ. A წერტილთან მივიღებთ φ მახვილი კუთხის გეგმილს (φ_1), რომელიც γ კუთხის 90°-მდე შემავსებელი იქნება. φ კუთხის ნამდვილი სიდიდის გასაზომად ვისარგებლოთ ბრუნვის ხერხით. ბრუნვის ღერძის განსაზღვრისათვის დაგვჭირდება, როგორც AB ხაზის, ისე a მართობის დაგრადუირება.

10. ბრტყელი გეომეტრიული ნაკვთების ნამდვილი სიდიდით აგება

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ბრტყელი გეომეტრიული ნაკვთები ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე ნატურალური ფორმითა და ზომით იმ შემთხვევაში გამოისახება, თუ ნაკვთის სიბრტყე გეგმილთსიბრტყის პარალელურია. სხვა შემთხვევებში გეგმაზე ხშირად საჭიროა ნატურალური ზომების აღდგენა. ამას უმთავრესად ბრუნვის ხერხის გამოყენებით აღწევენ. ამ ამოცანის გადაწყვეტა გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერ-



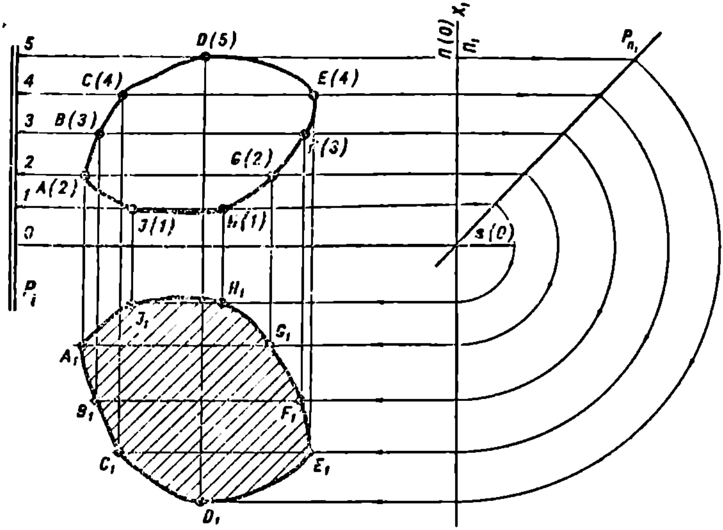
ნახ. 84

ხითაც შეიძლება. შევნიშნოთ, რომ ასეთი ამოცანები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის დონის სიბრტყედ გარდაქმნა.

84-ე ნახაზზე ნაჩვენებია P სიბრტყეში მოთავსებული $ABC\ldots$ მრავალკუთხედის ნამდვილი სიდიდით აგება. ამისათვის გამოყენებულია ბრუნვის

ხერხი. აქ სამკუთხედის აგებით ჯ(1) თარაზულას დონის სიბრტყესთან შეთავსებულია მხოლოდ G წვერო. დანარჩენი წერტილების ასაგებად გამოყენებულია პერსპექტულ-აფინური შესაბამისობის თვისებები (იხ. ბრუნვის ხერხი).

ბრტყელი მრუდე ნაკვთის ნამდვილი სიდიდის განსაზღვრა მრავალკუთხედისათვის განხილული შემთხვევის ანალოგიურია. 85-ე ნახაზზე გამოყენებულია ნამდვილი სიდიდის აგების სხვა ვარიანტი, კერძოდ, ნაჩვენებია ბრუნვისა და გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხების ერთობლივი გამოყენების შემთხვევა.



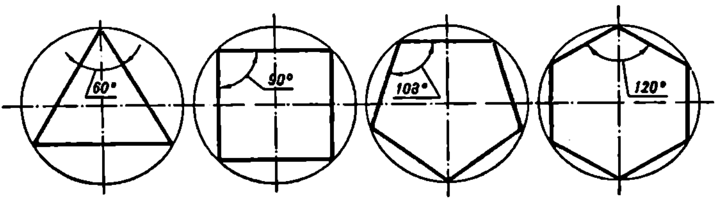
ნახ. 85

მეოთხე თავი

მრავალწახნაგები

§ 9. მრავალწახნაგათა სახეები და მათი გეგმილების აგება

1. მრავალწახნაგათა სახეები ბრტყელი მრავალკუთხედებით შემოსაზღვრულ სხეულს მრავალწახნაგა ეწოდება. მისი ელემენტებია წვეროები, წიბოები და წახნაგები. ამ ელემენტების ერთობლიობას მრავალწახნაგას ბადე ეწოდება. თუ მრავალწახნაგას წახნაგები მოთავსებულია მისი ყოველი წახნაგის მიმართ ერთ მხარეს, მას ამოზნექილი მრავალწახნაგა ეწოდება. თუ ეს პირობა დარღვეულია, ე. ი. მრავალწახნაგას წახნაგები განლაგებულია მისი რომელიმე წახნაგის ორივე მხარეს, ასეთ მრავალწახნაგას



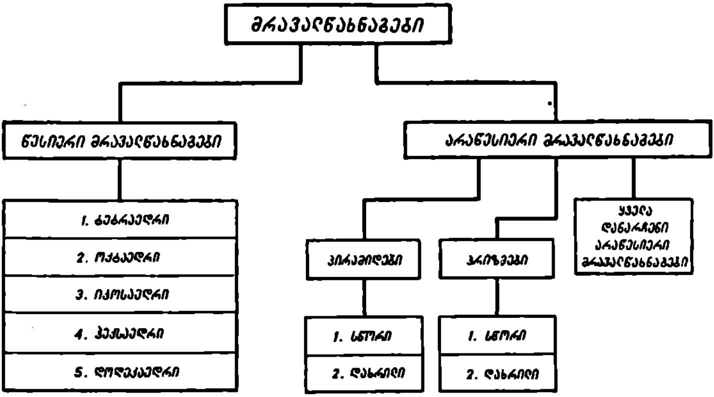
ნახ. 86

ჩაზნექილი ეწოდება. ამოზნექილი მრავალწახნაგას წახნაგები ამოზნექილ მრავალკუთხედებს წარმოადგენს.

მრავალწახნაგები სივრცითი სხეულების ერთ ჯგუფს ქმნიან. ეს ჯგუფი, თავის მხრივ, ორ ქვეჯგუფად იყოფა: წესიერი და არაწესიერი მრავალწახნაგები.

წესიერი ეწოდება ისეთ მრავალწახნაგებს, რომელთა წახნაგები წესიერ მრავალკუთხედებს წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ წესიერი მრავალკუთხედების რიცხვი უსასრულოდ დიდია, წესიერი მრავალწახნაგებისა კი ხუთს არ აღემატება. ეს გარემოება გამოწვეულია იმით, რომ მრავალწახნაგას წვერო შედგება არა ნაკლებ სამი წახნაგისაგან, გარდა ამისა წვეროსთან შექმნილი კუთხეების ჯამი 360°-ზე ნაკლები უნდა იყოს. თუ ამ კუთხეების ჯამი 360°-ს გაუტოლდა, მაშინ წვეროში თავმოყრილი წიბოები ერთ სიბრტყეში აღმოჩნდება და ვეღარ მივიღებთ წახნაგოვან კუთხეს (ნახ. 86). ამ მსჯელობის სა-

ფუძეელზე გამოდის, რომ წესიერი მრავალწახნაგას წახნაგებად შეიძლება გამოდგეს მხოლოდ ტოლგვერდა სამკუთხედები (ტეტრაედრი, ოქტაედრი, იკოსაედრი), კვადრატები (ჰექსაედრი), ან ხუთკუთხედები (დოდეკაედრი).

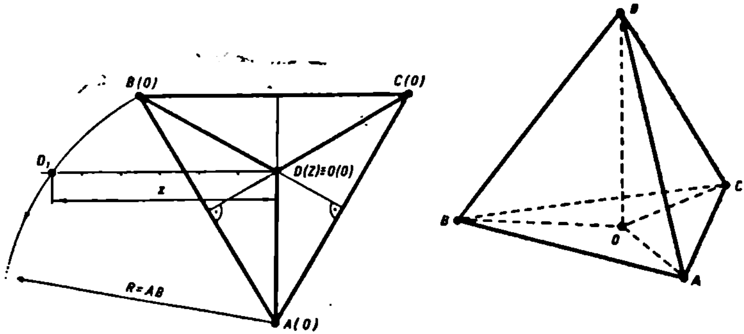


ნახ. 87

87-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მრავალწახნაგების კლასიფიკაცია. განვიხილოთ ზოგიერთი მრავალწახნაგას გეგმილის აგება.

2. ტეტრაედრის გეგმილის აგება ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის ოთხი წახნაგისაგან, აქვს ოთხი წვერო და ექვსი წიბო, წესიერი ოთხწახნაგა, ანუ ტ ე ტ რ ა ე დ რ ი ეწოდება (ნახ. 88).

ტეტრაედრის გეგმილის ასაგებად საკმარისია მოცემული იყოს მისი ერთი წახნაგი (მაგ., ABC), რომელიც მოთავსებული იქნება უშუალოდ ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე ან მის პარალელურზე.

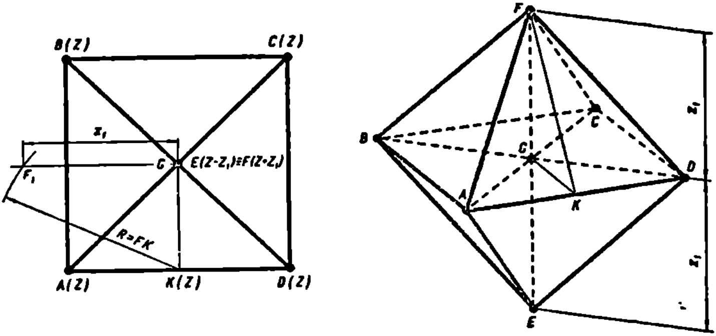


ნახ. 88

თად გეგმილთსიბრტყეზე ან მის პარალელურზე. მეოთხე წვეროს (D) მდებარეობა მოცემული წვეროებიდან მოპირდაპირე გვერდებზე დაშვებული მარ-

თობების გადაკვეთით განისაზღვრება, ხოლო მისი ნიშნული (Z), მაგალითად, $\triangle AOD$-ს გეგმილთსიბრტყესთან შეთავსებით.

3. ოქტაედრის გეგმილის აგება ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის რვა წახნაგისაგან, აქვს ექვსი წვერო და თორმეტი წიბო, წესიერი რვაწახნაგა, ანუ ოქტაედრი ეწოდება (ნახ. 89). როგორც ნახაზიდან ჩანს, იგი ორი მართი და წესიერი ოთხწახნაგა პირამიდისაგან შედგება. ოქტაედრის A, B, C და D წვეროები ქმნიან კვადრატს, რომლის თითოეული გვერდი მოცემული მრავალ-



ნახ. 89

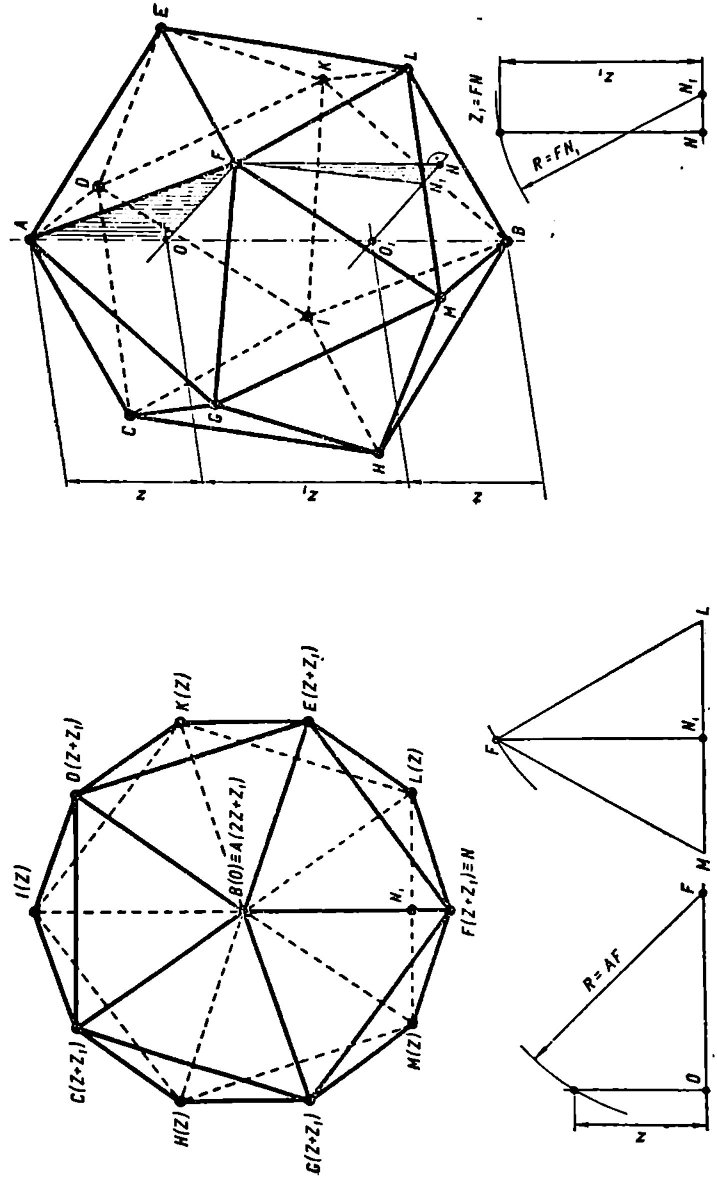
წახნაგას შემქმნელი ტოლგვერდა სამკუთხედების გვერდის ტოლია. ოქტაედრის სიმეტრიულობის გამო E და F წვეროების შემაერთებელი სწორი ხაზი $ABCD$ კვადრატის სიბრტყის მართობულია და მისი AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის G წერტილში გადის. გარდა ამისა

$$EG = GF = Z_1.$$

ოქტაედრის გეგმილის აგების გასამარტივებლად მისი EF ღერძი ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მართობულად ავიღოთ. თუ გეგმაზე მოცემული იქნება $ABCD$ კვადრატის ერთი გვერდი, ჩვენ იოლად ავაგებთ დანარჩენ გვერდებსაც, სახელდობრ, დიაგონალების გადაკვეთით ავაგებთ E და F წვეროების გეგმილს, მათ ნიშნულებს კი განვსაზღვრავთ მაგ., EGK სამკუთხედის $ABCD$ კვადრატის სიბრტყესთან შეთავსებით.

4. იკოსაედრის გეგმილის აგება ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის ოცი წახნაგისაგან, აქვს 12 წვერო და ოცდაათი წიბო წესიერი ოცწახნაგა, ანუ იკოსაედრი ეწოდება (ნახ. 90).

იკოსაედრის გეგმილის აგების გასამარტივებლად A და B წვეროები სწორი ხაზით შევაერთოთ და უკანასკნელი ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მართობულად დავაყენოთ. ამის შედეგად A და B წვეროების გეგმილები ერთ წერტილში შეთავსდება. ზედა და ქვედა წესიერი $ACDEFG$ და $BMLKJH$ პირამიდების $CDEFG$ და $MLKJH$ ფუძეთა სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია და AB ღერძის მართობული. ამის გამო ისინი დაუმახინჯებლად გეგ-

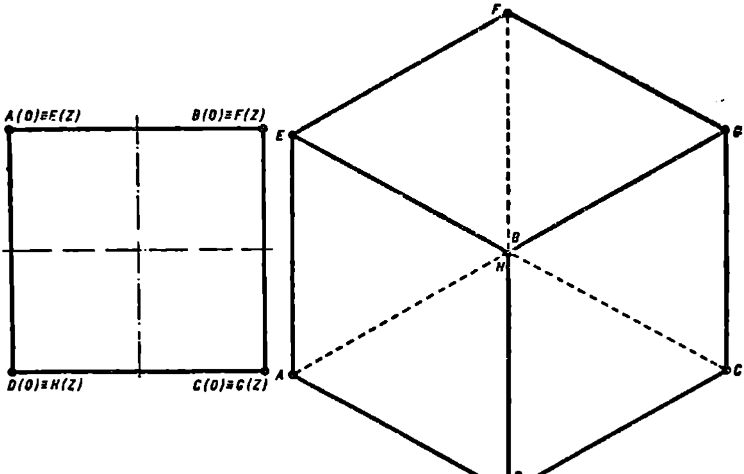


ნახ. 90

მიღდებიან. იკოსაედრის სიმეტრიულობის გამო გეგმაზე ამ ხუთკუთხედებს ცენტრები ერთ წერტილში ექნებათ შეთავსებული, ხოლო ერთის წვეროები მეორის გვერდების შუა წერტილებიდან აღმართულ მართობებზე იქნება მოთავსებული. ასეთნაირად მიღებული წვეროების თანმიმდევრული შეერთება სწორი ხაზებით მოგვცემს მთელი იკოსაედრის გეგმილს (ნახ. 89). ნახაზზე იკოსაედრის საბოლოოდ მოცემისათვის საჭიროა განისაზღვროს მისი თითოეული წვეროს ნიშნული. AB ღერძის გეგმილთსიბრტყისადმი მართობულობის შემთხვევაში იკოსაედრის წვეროები სხვადასხვა დონის ოთხ სიბრტყეში იქნება განლაგებული. მივიღოთ, რომ B წვერო გეგმილთსიბრტყეზეა მოთავსებული; შესაბამისად, მისი ნიშნული გეგმილთსიბრტყის ნიშნულის ტოლი იქნება (აღებულ შემთხვევაში 0). დანარჩენი წვეროების ნიშნულების გამოსათვლელად დაგვჭირდება ზედა და ქვედა პირამიდების სიმაღლეებისა ($Z=AO=BO_1$) და ამ პირამიდების ფუძეებს შორის არსებული უმოკლესი მანძილის ($Z_1=OO_1$) გაზომვა. ამას ადვილად მოვახერხებთ, შესაბამისად, AOF და FNN_1 მართკუთხა სამკუთხედების თითო უცნობი გვერდის გაზომვით (90-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ცალკე).

5. ჰექსაედრის გეგმილის აგება

ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება კვადრატის ფორმის ექვსი წახნაგისაგან, აქვს 12 წიბო და რვა წვერო წესიერი ექვსწახნაგა, ანუ ჰ ე ქ ს ა ე დ რ ი ეწოდება. ხშირად ასეთ სხეულს კუბს უწოდებენ.



ნახ. 91

91-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ჰექსაედრის თვალსაჩინო გამოსახულება და მისი გეგმილი. აღებულ შემთხვევაში იგი ერთ-ერთი წახნაგით დევს ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე.

6. დოდეკაედრის გეგმილის აგება

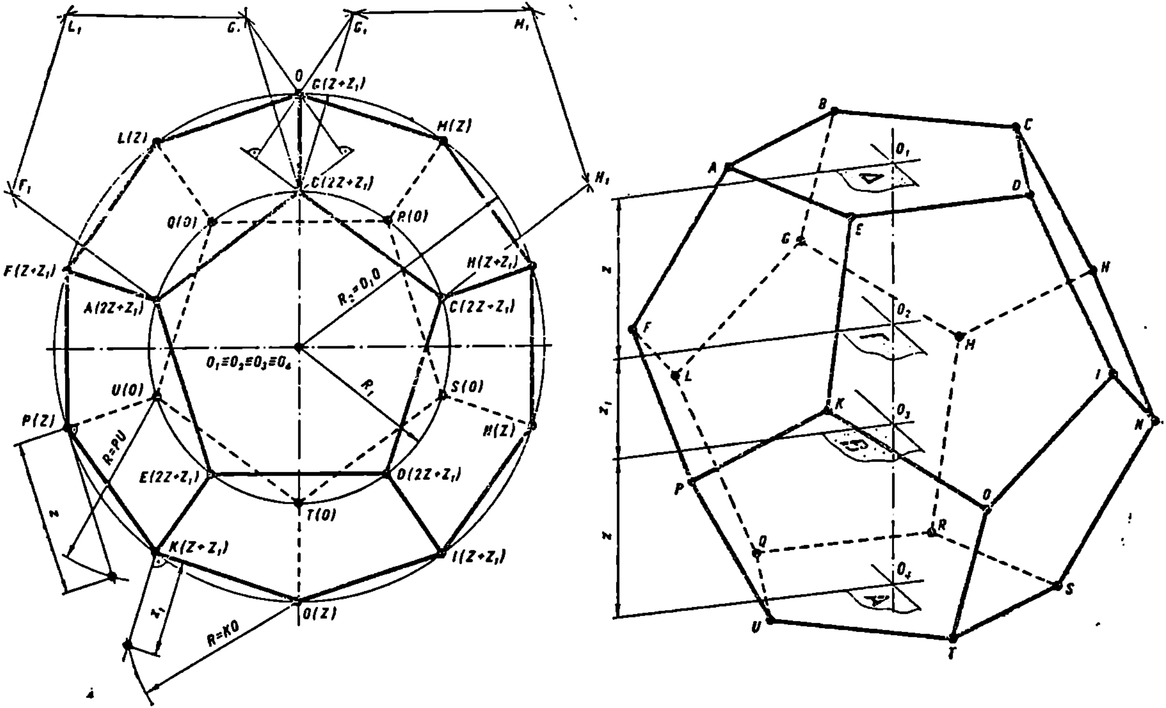
ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება წესიერი ხუთკუთხედის ფორმის 12 წახნაგისაგან, აქვს 30 წიბო და 20 წვერო წესიერი თორმეტწახნაგა, ანუ დოდეკაედრი ეწოდება (ნახ. 92). დოდეკაედრის გეგმილის აგების გასამარტივებლად წარმოვიდგინოთ, რომ იგი გეგმილთსიბრტყეზე თავისი ერთ-ერთი წახნაგით (მაგ. $QRSTU$) დევს, ხოლო ამ წახნაგის ცენტრზე გეგმილთსიბრტყის მართობულად გამავალი სწორი ხაზი (O_1O_4) დასაგეგმილებელი დოდეკაედრის ღერძად მივიღოთ. დასაგეგმილებელი ობიექტისა და გეგმილთსიბრტყის არჩეული განლაგების შემთხვევაში $QRSTU$ და მისი მოპირდაპირე $ABCDE$ წახნაგები თავისი ნამდვილი სიდიდით დაგეგმილდებიან. ასე, რომ, თუ ჩვენთვის ცნობილი იქნება ამ წახნაგების რომელიმე ერთი გვერდი და ცენტრი, შევძლებთ მთელი დოდეკაედრის გეგმილის აგებას. მაგალითად, თუ მოცემული იქნება QK გვერდი და O_4 ცენტრი; გამოვითვლით ხუთკუთხედის მომვლები წრეხაზის რადიუსს ($R_1=d:1{,}176$, სადაც d მოცემული გვერდის სიგრძეა). ამით $QRSTU$ და $ABCDE$ წახნაგების გეგმილებს მოცემულ წრეხაზში წესიერი ხუთკუთხედების ჩახაზვით ავაგებთ, მხოლოდ იმ პირობით, რომ ერთი ხუთკუთხედის წვეროები მეორის გვერდების შუა წერტილიდან ამართულ მართობებზე იქნება მოთავსებული.

დოდეკაედრის სიმეტრიულობის გამო მისი დანარჩენი წვეროების გეგმილები წრეში ჩახაზული წესიერი ათკუთხედის წვეროებზე განლაგდება. აქედან გამომდინარე, საკმარისია ვიპოვოთ ერთ-ერთი ასეთი წვეროს გეგმილი, ამით განისაზღვრება ხსენებული ათკუთხედის მომვლები წრეხაზის რადიუსიც და ამ წრეხაზზე წვეროების განლაგებაც. იმისათვის, რომ ავაგოთ ასეთი ერთ-ერთი წვეროს გეგმილი, საჭიროა შემდეგნაირად მოვიქცეთ: ავირჩიოთ ორი მეზობელი წახნაგი, მაგალითად, $AFLGB$ და $BGMHC$. თითოეული მათგანის სიბრტყე, შესაბამისად, AB და BC გვერდების გარშემო ბრუნვით დონის სიბრტყედ ვაქციოთ. ამ წახნაგების საერთო წერტილებიდან B წერტილი არ შეიცვლის თავის მდებარეობას, ხოლო G წერტილი ორად გაიყოფა. მიღებული ორი G_1 წერტილიდან დავუშვათ მართობები, შესაბამისად, AB და BC გვერდებზე (იხ. 92-ე ნახაზი). ამ მართობების გადაკვეთის O წერტილი G წვეროს გეგმილი იქნება. O_1O რადიუსიან წრეხაზში ჩავხაზოთ წესიერი ათკუთხედი ისე, რომ მისი ერთ-ერთი წვერო ჩვენს მიერ მოძებნილ G წერტილს დაემთხვეს. ასეთი ათკუთხედის წვეროები დასაგეგმილებელი დოდეკაედრის წვეროების გეგმილები იქნება. ისინი შევაერთოთ პირველად აგებული ხუთკუთხედების (შესაბამისად ზედა და ქვედა წახნაგების) წვეროებთან ისე, რომ ყოველი ორი წვეროს შემაერთებელი ხაზის მიმართულება O_1 ცენტრზე გადიოდეს.

დასაგეგმილებელი დოდეკაედრის წვეროები ოთხ სხვადასხვა დონის სიბრტყეშია განლაგებული (A, B, Γ, Δ). ჩვენთვის ცნობილია A სიბრტყის ნიშნული (გეგმილთსიბრტყესთან მისი შეთავსების გამო) და, შესაბამისად, ამ სიბრტყეში მოთავსებული $QRSTU$ წახნაგის წვეროების ნიშნულები.

მომდევნო B სიბრტყეში განლაგებულია P, L, M, N და O წვეროები. ამ სიბრტყის ნიშნულის გასაგებად საკმარისია გამოვთვალოთ ორი მეზობელი (მაგალითად, U და P) წვეროს სიმაღლეთა სხვაობა (Z).

Γ სიბრტყეში განლაგებულია F, G, H, J და K წვეროები. მათი ნიშნულების გამოსათვლელად საჭიროა გავიგოთ Γ სიბრტყის დონე. ამაში


L₁
G₁
G₁
H₁
O
C(Z+Z₁)
L(Z)
H(Z)
F₁
C(2Z+Z₁)
H₁
Q(0)
P(0)
F(Z+Z₁)
H(Z+Z₁)
A(2Z+Z₁)
R₂=O₁O
C(2Z+Z₁)
O₁≡O₂≡O₃≡O₄
U(0)
R₁
S(0)
P(Z)
R=PU
N(Z)
E(2Z+Z₁)
D(2Z+Z₁)
T(0)
K(Z+Z₁)
I(Z+Z₁)
R=KO
O(Z)
Z
Z₁
A
B
C
D
E
G
F
H
H
L
I
K
N
P
O
R
Q
S
U
T
O₁
O₂
O₃
O₄

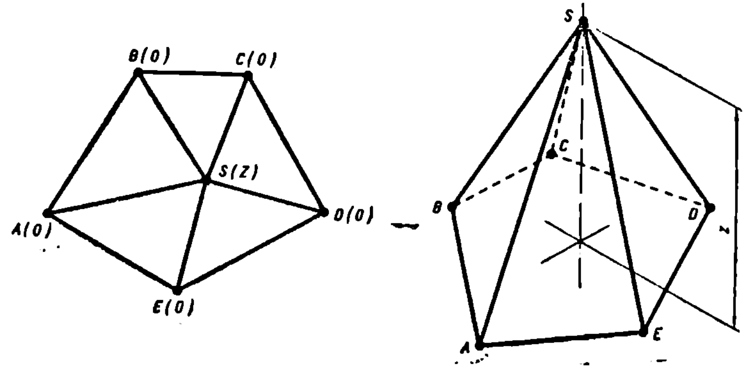
ნახ. 92

დაგვეხმარება ისევ ორი მეზობელი წერტილის (მაგალითად, K და O) სიმაღლეთა სხვაობის (Z_1) გამოთვლა.

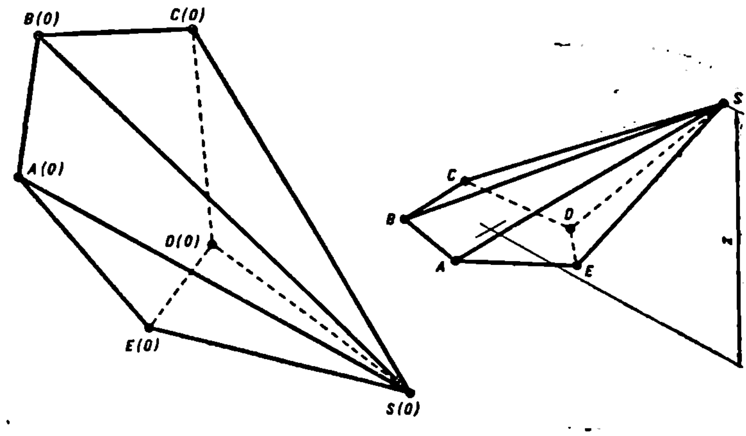
A, B, C, D და E წვეროების ნიშნულები ადვილად გამოითვლება, რადგანაც Γ და Δ სიბრტყეების დონეთა სხვაობა A და B სიბრტყეების დონეთა სხვაობის ტოლია და უდრის ჩვენ მიერ უკვე ნაპოვნ Z მნიშვნელობას.

7. პირამიდისა და პრიზმის გეგმილის აგება

თუ პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე დაშვებული მართობი ამ სიბრტყეს ფუძის მრავალკუთხედის შიგნით კვეთს, მაშინ ასეთი პირამიდა მართი იქნება (ნახ. 93), წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — დახრილი (ნახ. 94). როგორც ერთი, ისე მეორე სახის პირამიდის გეგმაზე განსაზღვრისათვის საჭიროა მოცემული იყოს მისი ყველა წვეროს და წიბოს გეგმილი.

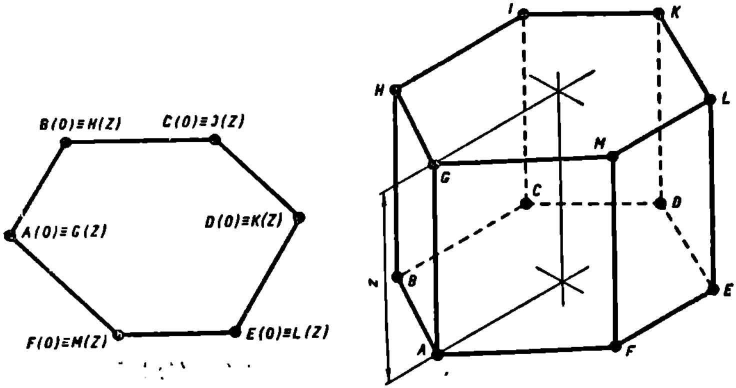


ნახ. 93



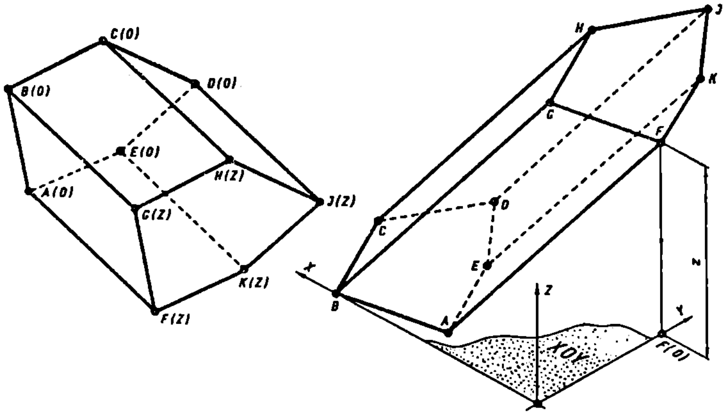
ნახ. 94

თუ პრიზმის წიბოები მისი ფუძის სიბრტყისადმი მართობულნი არიან, ასეთ პრიზმას მართი პრიზმა ეწოდება (ნახ. 95), წინააღმდეგ შემთხვევაში —



ნახ. 95

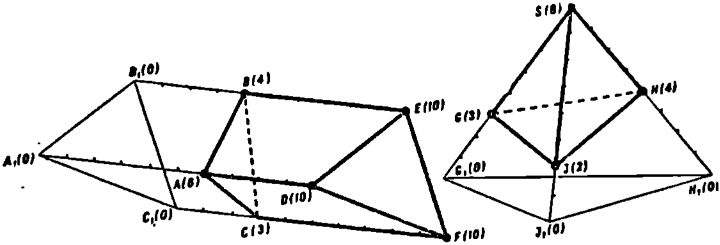
დახრილი (ნახ. 96). როგორც ერთი, ისე მეორე პრიზმის გეგმაზე მოცემისათვის საჭიროა ცნობილი იყოს მისი ყველა წიბოსა და წვეროს გეგმილი.



ნახ. 96

8. ცნება ცრუ ფუძის შესახებ

რიგი ამოცანების ამოხსნის დროს სასურველია, რომ მრავალწახნაგას ფუძე მოთავსებული იყოს გეგმილთსიბრტყეზე. სხვა შემთხვევებში, ჩვეულებრივ, მიმართავენ ე. წ. ცრუ ფუძის აგებას (ნახ. 97), ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ მოცემული მრავალწახნაგას წიბოების კვლები და ისინი შევაერთოთ თანამიმდევრულად. მიღებულ შედეგს (მაგ., $A_1(O)\,B_1(O)\,C_1(O)$) მოცემული მრავალწახნაგას ცრუ ფუძე ეწოდება.



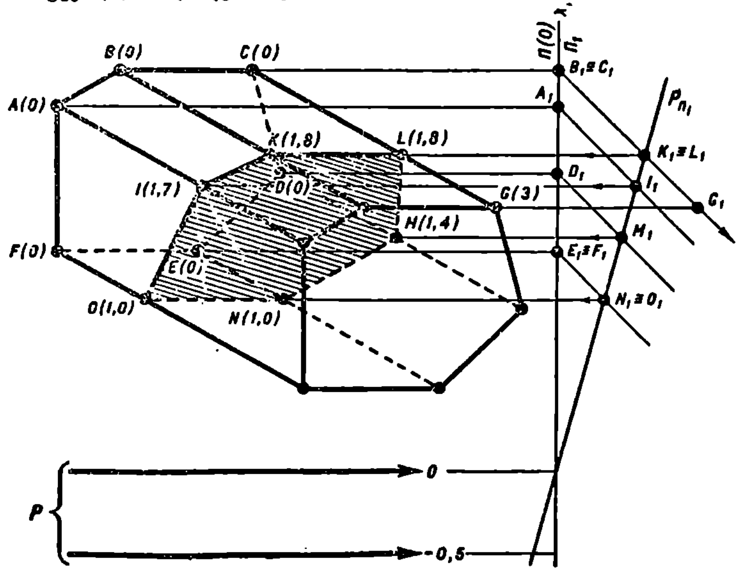
ნახ. 97

§ 10. ამოცანები მრავალწახნაგებზე

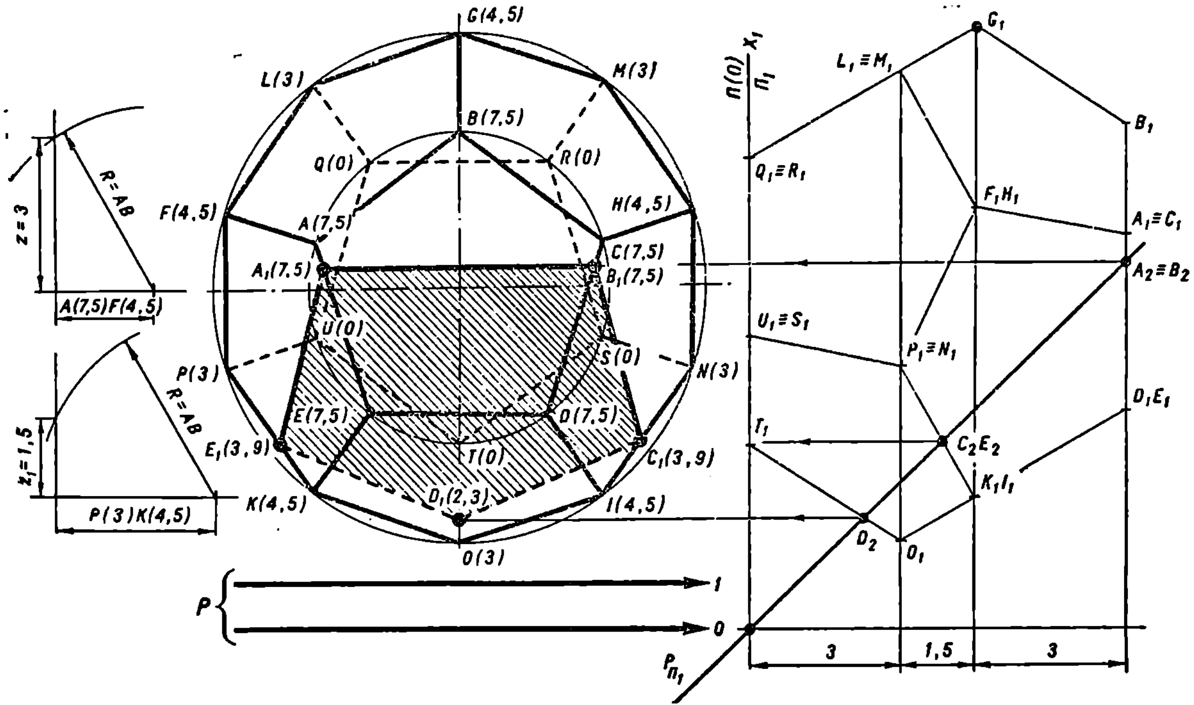
1. მრავალწახნაგათა გადაკვეთა სიბრტყით

განვიხილოთ დახრილი პრიზმის გადაკვეთა ზოგადი მდებარეობის *P* სიბრტყით (ნახ. 98).

შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ მოცემულმა სიბრტყემ (*P*) ახალ მდგომარეობაში მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა



ნახ. 98

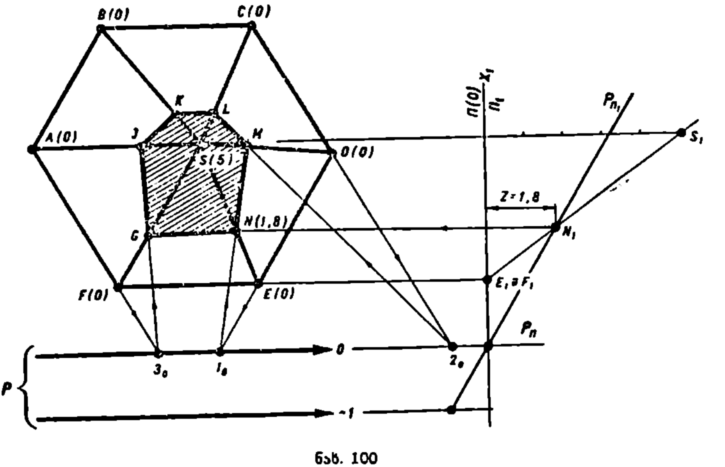

G(4,5)
L(3)
M(3)
B(7,5)
Q(0)
R(0)
F(4,5)
H(4,5)
A(7,5)
C(7,5)
A₁(7,5)
B₁(7,5)
U(0)
S(0)
P(3)
N(3)
E(7,5)
D(7,5)
E₁(3,9)
C₁(3,9)
T(0)
K(4,5)
I(4,5)
D₁(2,3)
O(3)
R=AB
z=3
A(7,5)F(4,5)
R=AB
z₁=1,5
P(3)K(4,5)
P
1
0
П(0)
П₁
X₁
G₁
L₁≡M₁
B₁
Q₁≡R₁
F₁H₁
A₁≡C₁
A₂≡B₂
U₁≡S₁
P₁≡N₁
D₁E₁
T₁
C₂E₂
K₁I₁
D₂
O₁
P_{П₁}
3
1,5
3

ნახ. 99

შიილოს. X_1 სისტემაში პრიზმის ახალი გეგმილის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ მისი ფუძის გეგმილი (რომელიც ღერძს დაემთხვევა) და განვსაზღვროთ ერთ-ერთი (მაგალითად, CG) წიბოს მიმართულება. დანარჩენი წიბოების გეგმილების ასაგებად ვისარგებლოთ პრიზმის წიბოების ურთიერთპარალელობით. $JKLMNO$ მრავალკუთხედის გვერდებიდან OJ, JK და KL იქნება ხილვადი, რადგან ისინი ხილვად წახნაგებზე არიან მოთავსებული; LM, MN და NO გვერდები კი, როგორც უხილავ წახნაგებზე მოთავსებულები, უხილავნი იქნებიან. (იხ. ხილვადობის პირობითობა § 5—3).

99-ე ნახაზზე ნაჩვენებია წესიერი დოდეკაედრის გადაკვეთა ზოგადი მდებარეობის სიბრტყით. ამოცანის ამოხსნის გასამარტივებლად აქაც გამოყენებულია გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხი.

შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ, მსგავსი ამოცანების ამოხსნისას, ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ჰომოლოგიის თვისებებით (იხ., Н. Ф. Четверухин и др.,



ნახ. 100

Начертательная геометрия, 1963, გვ. 24). ასეთი შემთხვევა განხილულია მე-100 ნახაზზე.

აქ მოცემულია გეგმილთსიბრტყეზე ფუძით დადებული პირამიდა და ზოგადი მდებარეობის P სიბრტყე ორი თარაზულათი, რომელთაგან ერთი (O) ამ სიბრტყის კვალს წარმოადგენს.

ვთქვათ, კვეთი აგებულია. თუ მივიღებთ, რომ პირამიდის ფუძის სიბრტყე არის გეგმილთსიბრტყე, ხოლო წვერო (S) დაგეგმილების ცენტრი, მაშინ პირამიდის $ABCDEF$ ფუძე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $JKLMNG$ კვეთის ცენტრალური გეგმილი, და პირიქით. თუ კვეთის სიბრტყეს მივიღებთ გეგმილთსიბრტყედ S დაგეგმილების ცენტრის შენარჩუნებით, მაშინ $JKLMNG$ კვეთი განიხილება, როგორც $ABCDEF$ ფუძის ცენტრალური გეგმილი. ამის შედეგად, პირამიდის ფუძე და ამ პირამიდის ნებისმიერი ბრტყელი კვეთი ურთიერთჰომოლოგიურია. ჰომოლოგიური იქნება მათი გეგმილებიც. კვეთისა

და ფუძის შესაბამისი გვერდების გაგრძელების გადაკვეთის წერტილები ერთ სწორ ხაზზე, ანუ ჰომოლოგიის ღერძზე განლაგდება. აქედან გამომდინარე პირამიდის ბრტყელი კვეთის აგებისათვის ავირჩიოთ შემდეგი გზა.

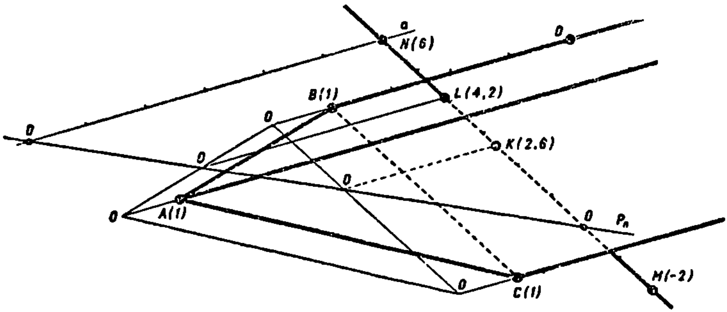
გეგმილთსიბრტყის შეცვლით ვიპოვოთ პირამიდის ერთ-ერთი წიბოს (მაგ., SE) P სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი, ე. ი. ავაგოთ კვეთის ერთ-ერთი წვერო (N). დარჩენილი წვეროების ასაგებად ვისარგებლოთ ჰომოლოგიის თვისებებით, ჩვენ შემთხვევაში ჰომოლოგია განსაზღვრულია S ცენტრით, ჰომოლოგიის P_{Π} ღერძით და E და N შესაბამისი წერტილებით.

მაგალითად, M წერტილის მისაღებად გავაგრძელოთ ფუძის DE გვერდი P_{Π} კვალის გადაკვეთამდე (1_0). მიღებული წერტილი შევაერთოთ N წერტილთან და გავაგრძელოთ SD წიბოს გადაკვეთამდე. ანალოგიურად ავაგებთ L და J წვეროებს. კვეთის NG და LK გვერდები, ფუძის შესაბამისი გვერდების ჰომოლოგიის ღერძთან პარალელობის გამო, ამავე ღერძის პარალელურნი იქნებიან.

კვეთის წვეროების ნიშნულების საპოვნელად ვისარგებლოთ P_{Π_1} კვალით (N წერტილის შემთხვევა) ან შესაბამისი წიბოების გრადუირებით.

2. მრავალწახნაგათა გადაკვეთა სწორი ხაზით

განვიხილოთ დახრილი პრიზმის სწორი ხაზით გადაკვეთის მაგალითი (ნახ. 101). გადაკვეთის წერტილების ასაგებად გამოვიყენოთ ისეთი დამხმარე სიბრტყე, რომელიც მოცემულ ხაზზე მოცემული პრიზმის წიბოების პარალელურად გაივლის. ასეთი სიბრტყე პრიზმის წახნაგებს წიბოების პარალელურ სწორ ხაზებზე გადაკვეთს. ამ ხაზების ასაგებად კი საკმარისია დავნიშნოთ დამხმარე სიბრტყის კვალისა და პრიზმის ფუძის (რომელიც გეგმილთსიბრტყეზე უნდა იყოს მოთავსებული) გვერდების გადაკვეთის წერტილები. ამ წერტილები-

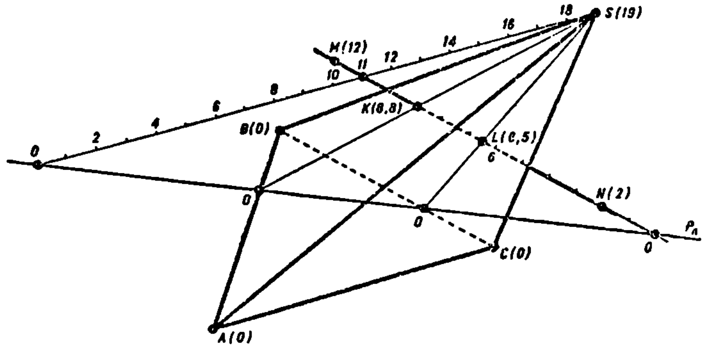


ნახ. 101

დან პრიზმის წიბოების პარალელურად გავლებული ხაზების მოცემულ ხაზთან გადაკვეთით მივიღებთ საძიებელ წერტილებს.

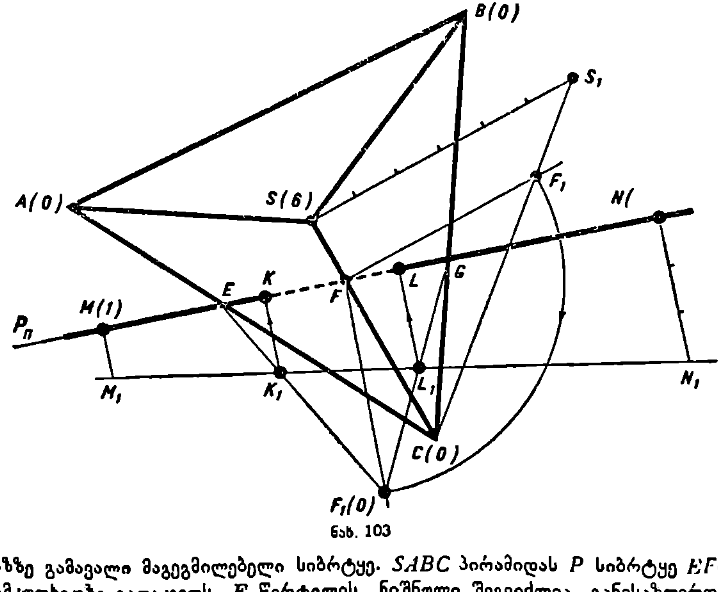
101-ე ნახაზზე ნაჩვენებ შემთხვევაში მოცემული პრიზმის ფუძე არ დევს გეგმილთსიბრტყეზე. ამიტომ, ნაპოვნია მისი ე. წ. ცრუ ფუძე. დამხმარე P სიბრტყის კვალის (P_{Π}) ასაგებად მოცემული ხაზის N წერტილზე პრიზმის წიბოების პარალელურად გავლებულია a სწორი ხაზი და მოძებნილია ამ ორი ურთიერთგადამკვეთილი სწორი ხაზის კვალები.

102-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დახრილი პირამიდის გადაკვეთა სწორი ხაზით. გადაკვეთის წერტილების მოსაძებნად გამოყენებულია მოცემულ ხაზზე და პირამიდის წვეროზე გამავალი P სიბრტყე.



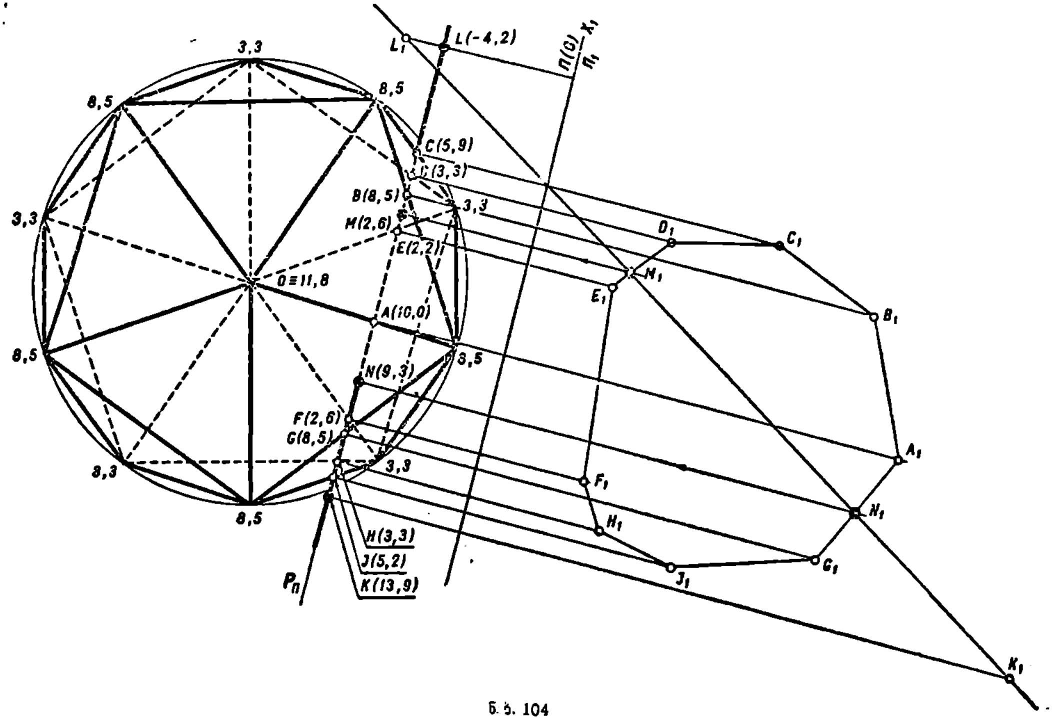
ნახ. 102

103-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მართი პირამიდის გადაკვეთა MN სწორი ხაზით. გადაკვეთის წერტილების საპოვნელად აქ გამოყენებულია მოცემულ



ნახ. 103

ხაზზე გამავალი მაგეგმილებელი სიბრტყე. $SABC$ პირამიდას P სიბრტყე EFG სამკუთხედზე გადაკვეთს. F წერტილის ნიშნული შეგვიძლია განვსაზღვროთ SC წიბოს გრადუირებით ან SC წიბოს შეთავსებით გეგმილთსიბრტყესთან


3,3
8,5
8,5
3,3
8,5
8,3
8,5
3,3
3,5
3,3
O≡11,8
L(-4,2)
L_1
$\Pi(0)$
X_1
Π_1
C(5,9)
B(8,5)
M(2,6)
E(2,2)
A(10,0)
N(9,3)
F(2,6)
G(8,5)
H(3,3)
J(5,2)
K(13,9)
P_Π
A_1
B_1
C_1
D_1
E_1
F_1
G_1
H_1
J_1
K_1
M_1
N_1

Б. 5. 104

(ნახაზზე ნაჩვენები შემთხვევა). P_{II} კვალის გარშემო ბრუნვით MN ხაზი და EFG სამკუთხედი შეთავსებულია გეგმილთსიბრტყესთან. K_1 და L_1 წერტილების დაბრუნებით $M(1)\,N(3)$ გეგმილზე მიღებულია საძიებელი K და L წერტილები. მათი ნიშნულები კი განისაზღვრება ორი გზით: 1) MN ხაზის გრადუირებით და 2) შესაბამისად, K_1K და LL_1 მონაკვეთების სიგრძეებით. ერთი და იმავე წერტილისათვის სხვადასხვა გზით ნაპოვნი ორი ნიშნულის ერთმანეთთან შედარებით შესრულებული გრაფიკული სამუშაოს სიზუსტეს დავადგენთ.

104-ე ნახაზზე მოცემულია წესიერი იკოსაედრის გადაკვეთა სწორი ხაზით. გადაკვეთის წერტილების ასაგებად გამოყენებულია მოცემულ KL ხაზზე გამავალი P მაგეგმილებელი სიბრტყე, რომელიც იკოსაედრს $BCDE...$ მრავალკუთხედზე კვეთს. ამ კვეთისა და სწორი ხაზის გადაკვეთის იმ წერტილების ასაგებად, რომლებიც იმავე დროს საძიებელ წერტილებს წარმოადგენენ, დამხმარე P სიბრტყე გარდაქმნილია დონის სიბრტყედ. X_1 სისტემაში მიღებული M_1 და N_1 წერტილების უკან დაბრუნებით მიღებულია ამოცანის პასუხი.

კვეთის N წერტილი მოთავსებულია იკოსაედრის ხილულ წახნაგზე, ამის გამო KN მონაკვეთი ხილულია. M წერტილი კი მოთავსებულია იკოსაედრის უხილავ წახნაგზე, ამის გამო KL ხაზი N წერტილიდან დაწყებული, ვიდრე არ გასცდება იკოსაედრის კონტურს (C) მთლიანად უხილავი იქნება.

ვ. მრავალწახნაგათა ურთიერთგადაკვეთა

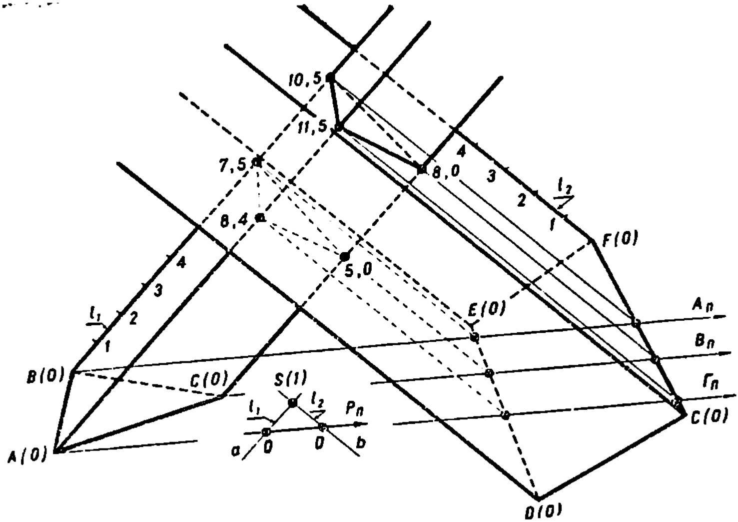
ორი მრავალწახნაგას ურთიერთგადაკვეთის ხაზი ზოგად შემთხვევაში წარმოადგენს ჩაკეტილ სივრცით ტეხილს, ანუ ირიბ მრავალკუთხედს, რომელიც შეიძლება დაიშალოს ორ და მეტ მრავალკუთხედად. ეს მრავალკუთხედები შეიძლება იყოს, როგორც ბრტყელი, ასევე სივრცითი. მათი თითოეული გვერდი შესაბამისი წახნაგების გადაკვეთის ხაზს წარმოადგენს, ხოლო თითოეული წვერო წიბოებისა და წახნაგების გადაკვეთის წერტილს. კერძო შემთხვევაში გადაკვეთის მრავალკუთხედის წვერო შეიძლება წიბოების კვეთის შედეგად იყოს მიღებული.

მრავალწახნაგათა ურთიერთგადაკვეთის ხაზის მოსაძებნად ძირითადად ორი გზა არსებობს. ესენია: ა) ტეხილი ხაზის წვეროების მოძებნა (წიბოების ხერხი) და ბ) ტეხილი ხაზის გვერდების მოძებნა (წახნაგების ხერხი).

პირველ შემთხვევაში საძიებელი ტეხილის აგება დაიყვანება სწორი ხაზით მრავალწახნაგას გადაკვეთის ამოცანამდე, ხოლო მეორე შემთხვევაში—ორი სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთამდე.

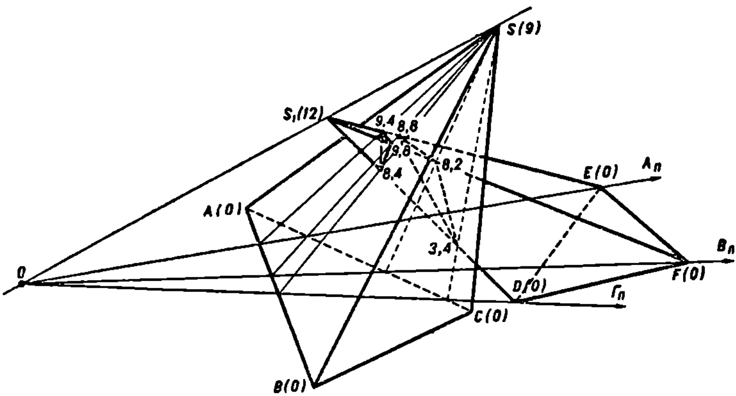
განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი. 105-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი პრიზმის ურთიერთგადაკვეთის შემთხვევა. აქ დამხმარე სიბრტყეებად გამოყენებულია მოცემული პრიზმების წიბოების პარალელური სიბრტყეები. ამისათვის ნებისმიერად აღებულ S წერტილზე გავლებულია მოცემული პრიზმების წიბოების პარალელური a და b სწორი ხაზები. ამ ორი ურთიერთგადაკვეთილი ხაზით განსაზღვრული P სიბრტყის პარალელურად გატარებულია დამხმარე A, B და Γ სიბრტყეები.

106-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი პირამიდის ურთიერთგადაკვეთის შემთხვევა. აქ გამოყენებულია მოცემული პირამიდების წვეროებზე გამავალი A, B და Γ სიბრტყეები. მათი კვალების აგებისათვის წინასწარ აგებულია SS_1 სწორი ხაზის კვალი (o).



ნახ. 105

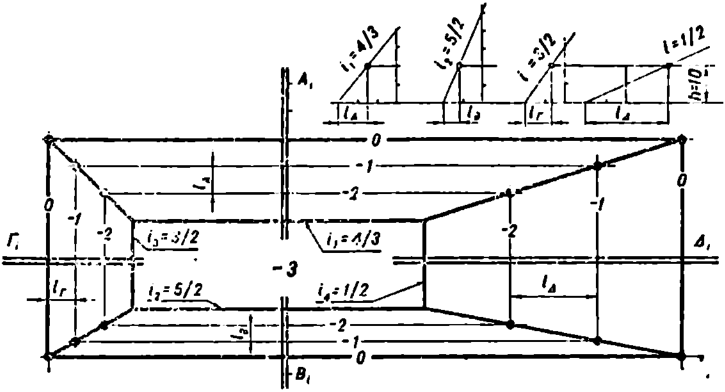
განხილულ ორივე შემთხვევაში ჩვენ გამოვიყენეთ ე. წ. წიბოების ხერხი. შევნიშნოთ, რომ ასეთი ხერხის გამოყენება ზოგჯერ არახელსაყრელია და საძიებელ შედეგს უფრო მარტივად წახნაგების ხერხის გამოყენებით ღებულობენ.



ნახ. 106

107-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მოცემული ოთხკუთხედის დაკავშირება ნულოვანი დონის ზედაპირთან მოცემული ქანობის სიბრტყეების მეშვეობით. ამისათვის წინასწარ აგებულია ქანობის მასშტაბები. ისინი დაგრადუირებულ-

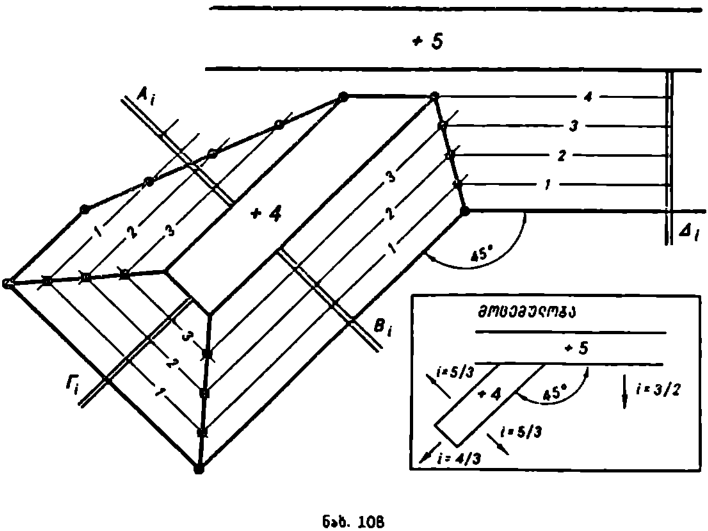
ნი არიან მოცემული ქანობების მიხედვით. მეზობელი წახნაგების ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგება დაყვანილია ორი სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთის ხა-



ნახ. 107

ზის აგების მარტივ შემთხვევაზე, როცა სიბრტყეების ერთსახელა თარაზულები ნახაზის ფარგლებში იკვეთებიან.

108-ე ნახაზზე ნაჩვენები ამოცანაც ანალოგიური ხერხითაა ამოხსნილი.

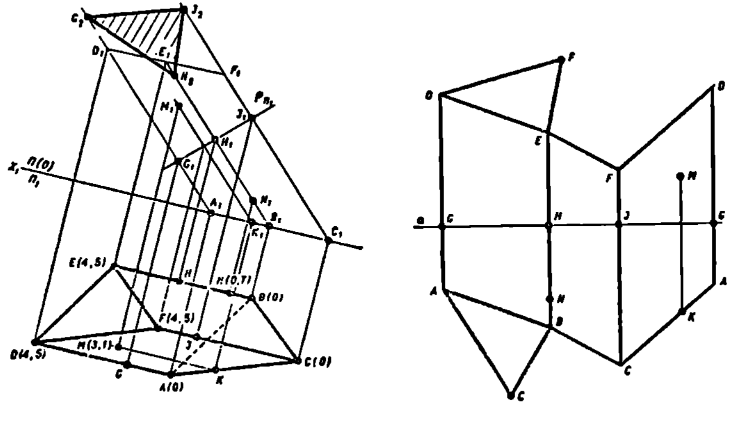


ნახ. 108

4. მრავალწახნაგათა ზედაპირის განფენა სიბრტყეზე

მრავალწახნაგას ზედაპირის განფენა ნიშნავს მისი ყველა წახნაგის შეთავსებას ნახაზის სიბრტყესთან. ყოველ ორ მეზობელ წახნაგს ერთი წიბო საერთო აქვთ. ამის გამო ნახაზზეც ერთი წახნაგი მეორე წახნაგს საერთო წიბოთი უნდა უერთდებოდეს. წახნაგოვანი სხეულის წახნაგების ასეთი განფენის თარგს თუ გამოვჭრით, სათანადო წიბოებზე მისი მოკეცვით და შეწებებით თვით წახნაგოვანი სხეულის მოდელს მივიღებთ. ვინაიდან განფენაზე წახნაგები თავისი ნატურალური სიდიდით გამოისახებიან, ამიტომ ვიდრე განფენას შევუდგებოდეთ საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს აღებული მრავალწახნაგას წახნაგის შესაბამისი ბრტყელი მრავალკუთხედის აგებისათვის საჭირო ყველა ელემენტი.

განვიხილოთ დახრილი სამწახნაგა პრიზმის ზედაპირის განფენა (ნახ. 109). როგორც ნახაზიდან ჩანს, ცნობილია მხოლოდ ფუძის გვერდები, რაც



ნახ. 109

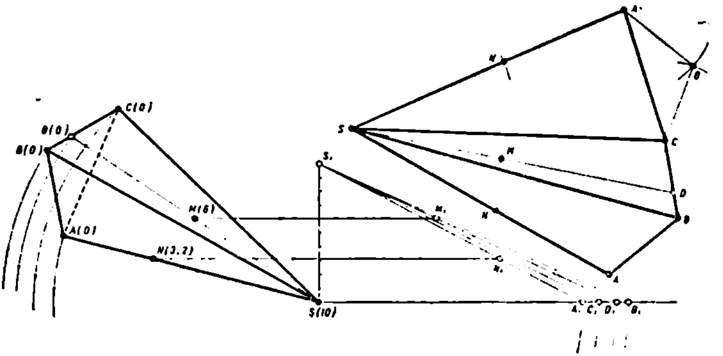
შეეხება გვერდითს წიბოებს და წახნაგების სიგანეს, მათი განსაზღვრისათვის მოგვიხდება გეგმილთსიბრტყის შეცვლა. თუ ახალ სიბრტყეს პრიზმის გვერდითი წიბოების პარალელურად დავაყენებთ, მაშინ X_1 სისტემაში ისინი თავისი ნატურალური სიდიდით დაგეგმილდებიან. ასეც მოვიქცეთ და ავაგოთ პრიზმის ახალი გეგმილი X_1 სისტემაში. წახნაგების სიგანის გასაზომად ავაგოთ პრიზმის მართობული კვეთი. ამისათვის გავატაროთ წიბოების მართობული და X_1 სისტემაში მაგეგმილებელი P სიბრტყე. ავაგოთ კვეთი ნამდვილი სიდიდით. მიღებული $G_2H_2J_2$ სამკუთხედის გვერდები შესაბამისი წახნაგების სიგანეებს გამოსახავენ.

მას შემდეგ, რაც ცნობილი გახდება ყველა საჭირო ელემენტი, შევუდგეთ თვით განფენას. ამისათვის ნახაზის ნებისმიერ თავისუფალ ადგილას გავავლოთ რაიმე a სწორი ხაზი და მასზე გავშალოთ პრიზმის მართობული კვეთი, ანუ $G_2H_2J_2$ სამკუთხედი. მიღებულ G, H, J და G წერტილებზე გავატაროთ a ხაზის მართობი სწორი ხაზები და მათზე გადავზომოთ შესაბა-

მისი წიბოების ნატურალური სიდიდეები. მაგალითად, G წერტილზე გამავალ მართობზე გადავზომოთ G_1D_1 (ზევით) და G_1A_1 (ქვევით) მონაკვეთები. მივიღებთ A და D წვეროებს. ანალოგიურად მოიძებნება დანარჩენი წვეროებიც, რომლებსაც შემდეგ ტეხილი ხაზებით შევაერთებთ. გრაფიკული აგების სიზუსტის შესამოწმებლად შეგვიძლია გავზომოთ ამ ტეხილის თითოეული გვერდი და შევადაროთ მოცემული პრიზმის ფუძეების შესაბამის გვერდებს. მაგალითად, განფენაზე მიღებული AB' მონაკვეთი მოცემული $A(0)\,B(0)$ გეგმილის ტოლი უნდა იყოს და ა. შ.

განფენის დამთავრებისათვის განფენილ წახნაგებს უნდა მიეუხაზოთ ფუძეები. ამგვარად, მთელი პრიზმის ზედაპირის განფენას მივიღებთ. ამ განფენის მიხედვით კი შესაძლებელია მოცემული პრიზმის მოდელის აგება.

როგორც ვხედავთ, განფენისათვის გამოვიყენეთ მოცემული მრავალწახნაგას ბადის ძირითადი წერტილები. მათივე მეშვეობით ჩვენ შეგვიძლია განფენაზე გადავიტანოთ ისეთი წერტილებიც, რომლებიც მოთავსებულნი არიან



ნახ. 110

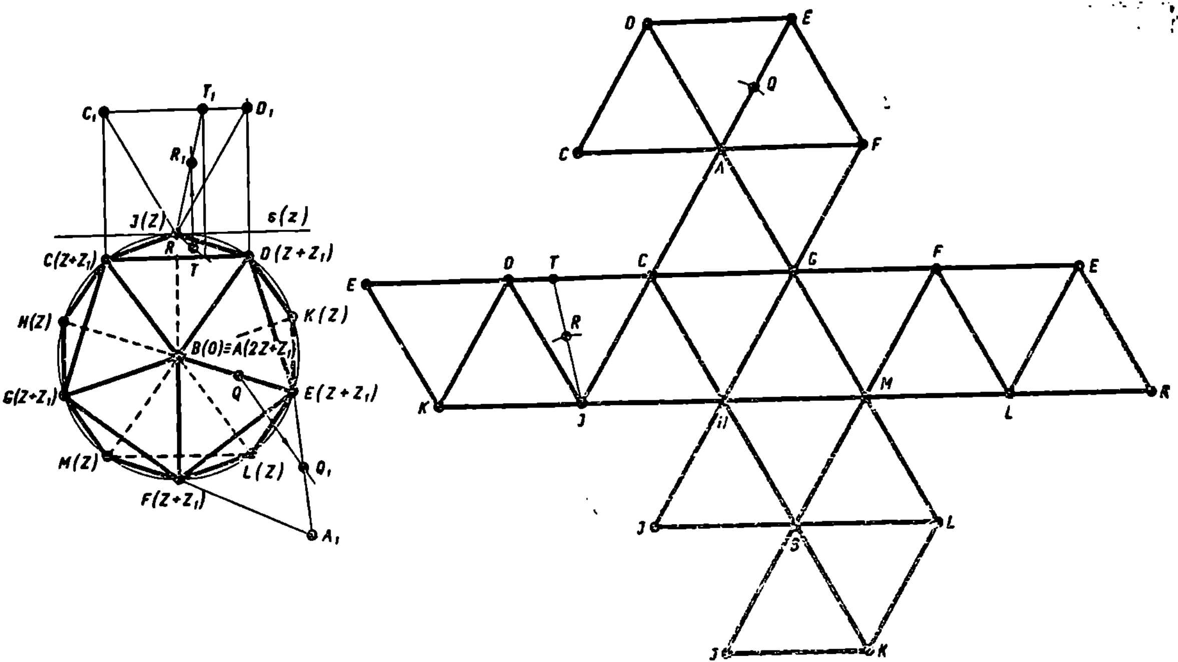
წიბოებზე ან წახნაგებზე. მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში პრიზმის ზედაპირზე მოცემულია ორი წერტილი — M (წახნაგზე) და N (წიბოზე).

M წერტილის განფენაზე გადასატანად საჭიროა მასზე გავავლოთ ე. წ. ცრუ წიბო, ვიპოვოთ ამ წიბოს ახალი გეგმილი და ძირითადი წიბოებისა და წერტილების ანალოგიურად გადავიტანოთ განფენაზე.

N წერტილის გადატანისათვის კი საკმარისია მოვძებნოთ მისი გეგმილი X_1 სისტემაში და მიღებული B_1N_1 მონაკვეთი გადავზომოთ B წერტილიდან BE წიბოზე.

შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა, ე. ი. როდესაც წერტილი მოცემულია განფენაზე და საჭიროა მისი გეგმილების აგება, ძნელი არ არის.

საყურადღებოა განფენის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ შესაძლებელია მისი მეშვეობით აღებული მრავალწახნაგას მოდელის დამზადება, გარდა ამისა, განფენის საშუალებით შესაძლებელია წახნაგოვანი ზედაპირის საერთო ფართობის გამოთვლა ან მის წახნაგებზე მო-


C₁
T₁
D₁
R₁
J(Z)
s(z)
R
T
C(Z+Z₁)
D(Z+Z₁)
K(Z)
H(Z)
B(0)≡A(2Z+Z₁)
G(Z+Z₁)
Q
E(Z+Z₁)
M(Z)
L(Z)
Q₁
F(Z+Z₁)
A₁
D
E
Q
C
A
F
E
D
T
C
G
F
E
R
K
J
M
L
R
J
L
S
J
K

6зb. 111

თავსებულ ორ წერტილს შორის უმოკლესი მონაკვეთის აგება, ასეთი მონაკვეთის გაზომვა და სხვა.

განვიხილოთ პირამიდის ზედაპირის განფენა. ამ შემთხვევაში საკმარისია ფუძისა და წიბოების ნატურალური ზომების ცოდნა.

110-ე ნახაზზე ნაჩვენებ მაგალითში პირამიდის ფუძე ცნობილია. წიბოების ნატურალური სიდიდის გასაგებად ავაგოთ ისეთი მართკუთხა სამკუთხედები, რომელთაგან თითოეულის ერთი კათეტი იქნება აღებული წიბოს გეგმილი (მაგ., $A(O)S(O)$), ხოლო მეორე — ამ წიბოს ბოლოების სიმაღლეთა სხვაობა (მაგ., h_{AS}). ასეთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა საძიებელი წიბოს ნატურალური სიდიდის ტოლი იქნება (მაგ., S_1A_1).

გრაფიკული სამუშაოების გამარტივებისათვის, აღნიშნული ჰიპოტენუზების აგება რეკომენდებულია 110-ე ნახაზზე ნაჩვენები გზით — შეთავსებით. ამის შემდეგ შეგვიძლია შევუდგეთ თვით განფენას. ნახაზის თავისუფალ ადგილზე თანმიმდევრობით ავაგოთ ASB, BSC და CSA ერთმანეთზე საერთო გვერდებით მიერთებული სამკუთხედები. ფუძის ნებისმიერ გვერდს (მაგ., AB-ს) მივუხაზოთ მთელი ფუძე.

წინა მაგალითის ანალოგიურად, აქაც ნაჩვენებია პირამიდის ზედაპირზე განლაგებული წერტილების გადატანა განფენაზე.

M წერტილის გადასატანად საჭიროა ცრუ წიბოს აგება. რაც შეეხება N წერტილს, იგი მოიძებნება SA წიბოზე S წერტილიდან S_1N_1 მონაკვეთის გადაზომვით.

111-ე ნახაზზე ნაჩვენებია წესიერი მრავალწახნაგას, იკოსაედრის, ზედაპირის განფენა. როგორც ვიცით, იკოსაედრი ოცი ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის წახნაგებითაა შემოსაზღვრული. მისი განფენა 20 ასეთი ტოლგვერდა სამკუთხედის აგებას ითვალისწინებს, იმ პირობით, რომ ერთი წახნაგი მეორე წახნაგს მოსაზღვრე წიბოთი უერთდებოდეს.

განვიხილოთ იკოსაედრის ზედაპირზე მოთავსებული წერტილების გადატანა განფენაზე.

ვთქვათ, R წერტილი მოთავსებულია CJD წახნაგზე. ამ წერტილზე და J წვეროზე გავატაროთ JT სწორი ხაზი. CJD სამკუთხედის სიბრტყე $s(z)$ თარაზულას გარშემო შემობრუნებით დონის სიბრტყედ გარდავქმნათ. ამის შემდეგ, აღებული R წერტილის განფენაზე გადატანა ძნელი არ არის.

მოცემული Q წერტილი იკოსაედრის AE წიბოზეა მოთავსებული. AFE სამკუთხედის სიბრტყე EF თარაზულას დონის სიბრტყესთან შევათავსოთ. მივიღებთ A_1Q_1 მონაკვეთს, რომლის მეშვეობითაც Q წერტილის მდებარეობას იკოსაედრის განფენაზე ადვილად ვიპოვით.

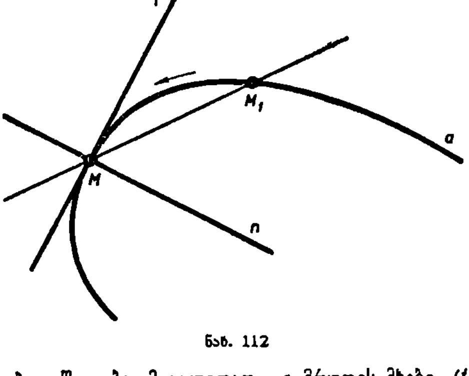
მრუდე ხაზები და მრუდე ზედაპირები

§ 11. მრუდე ხაზების ზოგიერთი სახეები და მათი გეგმილის აგება

1. ძირითადი ცნებები და განსაზღვრები

მხაზველობით გეომეტრიაში მრუდე ხაზები განიხილება კინემატიკურად, ე. ი. როგორც მოძრავი წერტილის ტრაექტორია. წერტილის მოძრაობისას ორ მნიშვნელოვან შემთხვევას აქვს ადგილი: 1) წერტილი ისე მოძრაობს, რომ ყოველთვის ერთ სიბრტყეში რჩება და 2) წერტილი თავისი მოძრაობისას ერთ სიბრტყეში არ რჩება. ამის მიხედვით მრუდე ხაზები ორ ძირითად ჯგუფად იყოფა. პირველ ჯგუფში გაერთიანებულია ე. წ. ბ რ ტ ყ ე ლ ი, ხოლო მეორეში — ს ი ვ რ ც ი თ ი მრუდები.

ბრტყელი მრუდებიდან პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ე. წ. მეორე რიგის მრუდები — წრეხაზი, ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა. მრუდებს, რომლებიც ალგებრული განტოლებით განისაზღვრება ეწოდება ალგებრული. ამასთან, განტოლების ხარისხი მრუდის რიგს გამოსახავს. მრუდის რიგი განისაზღვრება აგრეთვე ამ მრუდის სწორი ხაზით გადაკვეთის წერტილთა მაქსიმალური რაოდენობით. მაგალითად, ნებისმიერი მდებარეობის სწორი ხაზი მეორე რიგის მრუდს არა უმეტეს ორ წერტილში ჰკვეთს.



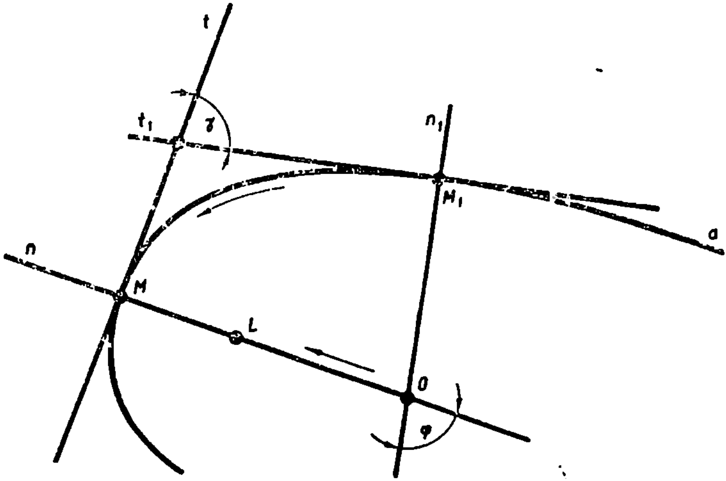
ნახ. 112

ისეთ სწორ ხაზს, რომელსაც მეორე რიგის მრუდთან საერთო აქვს მხოლოდ ერთი წერტილი, ამ მრუდის მ ხ ე ბ ი ეწოდება. მაგალითად, a მრუდის მხები (t) M წერტილში განიმარტება, როგორც ზღვრული სწორი ხაზი M წერტილზე გამავალი მკვეთი სწო-

რისა, როცა ამავე სწორის მრუდთან გადაკვეთის მეორე M_1 წერტილი M წერტილისაკენ მიისწრაფვის (ნახ. 112).

სწორ ხაზს (n), რომელიც გადის შეხების წერტილში მხების მართობულად და მოთავსებულია აღებული მრუდის სიბრტყეში, ამ მრუდის ნორმალი ეწოდება (ნახ. 112).

ნებისმიერი ბრტყელი მრუდის (a) M და M_1 წერტილებში გავავლოთ t და t_1 მხებები. ამავე წერტილებში ავაგოთ n და n_1 ნორმალები და დავნიშნოთ მათი გადაკვეთის O წერტილი (ნახ. 113).



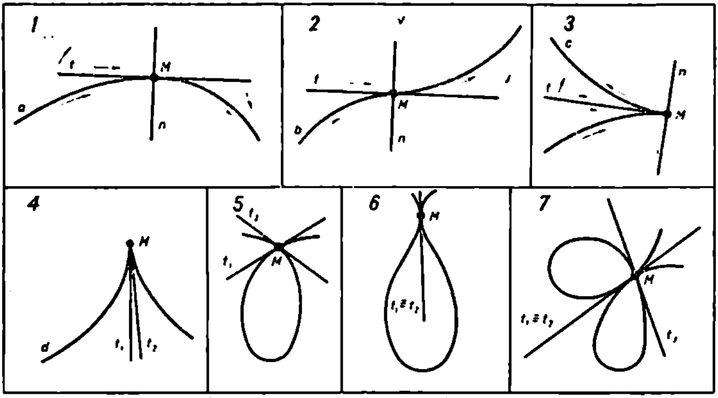
ნახ. 113

რადგან $t \perp n$ და $t_1 \perp n_1$, n და n_1 ნორმალებს შორის მოთავსებული φ კუთხე t და t_1 მხებების გადაკვეთით შექმნილი γ კუთხის ტოლი იქნება. თუ M_1 წერტილს გადავაადგილებთ M წერტილთან შეთავსებამდე, n_1 ნორმალიც იმოძრავებს და ამ მოძრაობისას n უძრავ ნორმალს სხვადასხვა წერტილში გადაკვეთს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ასეთი გადაადგილების დროს ნორმალების გადაკვეთის O წერტილი n უძრავ ნორმალზე მოძრაობს და მიისწრაფვის ამავე ნორმალზე მდებარე L ზღვრული წერტილისაკენ. L წერტილი წარმოადგენს a მრუდის სიმრუდის ცენტრს M წერტილში, ხოლო LM მონაკვეთი, ამავე M წერტილში a მრუდის სიმრუდის რადიუსია. მრუდის ფორმის მიხედვით მის თითოეულ წერტილს გარკვეული სიმრუდის ცენტრი და რადიუსი შეესაბამება.

თუ მრუდი აღებული წერტილის ახლოს, ამ წერტილზე გამავალ t მხების ერთ მხარეს მდებარეობს, მაშინ მრუდის ასეთ წერტილს „ჩვეულებრივი" წერტილი ეწოდება (ნახ. 114-1). მაგრამ მრუდებს (როგორც ბრტყელს ასევე სივრცითს) ზოგჯერ გააჩნიათ ე. წ. „განსაკუთრებული" წერტილები. მაგალითად, თუ მრუდი მხების ერთი მხრიდან მეორე მხარეს გადადის (114-2), შეხების წერტილს გადაღუნვის წერტილი (M) ეწოდება.

თუ მრუდზე წერტილის მოძრაობის მიმართულება შეხების წერტილში იცვლება საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 114-3), მაშინ ასეთ წერტილს უკუქცევის წერტილი ეწოდება.

გარდა განხილული წერტილებისა, განსაკუთრებულ წერტილებს მიეკუთვნება აგრეთვე ამავე ნახაზზე ნაჩვენები სხვა წერტილებიც. ასეთებია, მაგა-



ნახ. 114

ლითად, კუთხის, ანუ გარდატეხის წერტილი (ნახ. 114-4), ორმაგი წერტილები (ორი სხვადასხვა (ნახ. 114-5) ან თანხვედრილი (ნახ. 114-6) მხებებით), სამმაგი წერტილი (ნახ. 114-7) და სხვა.

მხაზველობით გეომეტრიაში მრუდები მათი გეგმილების მიხედვით შეისწავლება.

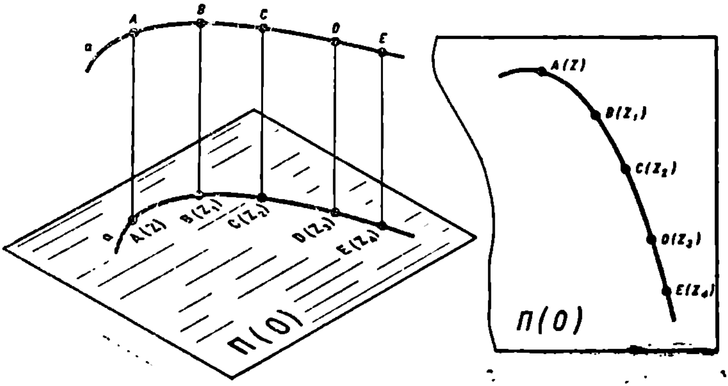
2. ბრტყელი მრუდების გეგმილის აგება

რაიმე *a* მრუდის ნებისმიერი *A* წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება მისი ნიშნულიანი გეგმილით — $A(Z)$. ამის შედეგად, ნახაზზე მრუდის გრაფიკულად მოცემისათვის, ზოგად შემთხვევაში, სავსებით საკმარისია მოცემული იყოს ამ მრუდის რამდენიმე მახასიათებელი წერტილის ნიშნულიანი გეგმილი (ნახ. 115).

ამასთან, შევნიშნოთ, რომ ზოგად შემთხვევაში მრუდის ნიშნულებიანი გეგმილი მრუდის სახის (ბრტყელი თუ სივრცითი) დადგენის უშუალო შესაძლებლობას არ იძლევა. მოცემული მრუდის მიახლოვებითი შემოწმებისათვის საკმარისია ქორდებით შევაერთოთ მისი რამდენიმე წერტილი (ნახ. 116) და გამოვარკვიოთ ამ ქორდების ურთიერთგანლაგება: თუ ისინი იკვეთებიან მრუდი ბრტყელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში — სივრცითი. 116-ე ნახაზზე ნაჩვენები მრუდი ბრტყელია (მიახლოვებით), რადგან აღებული ქორდები ურთიერთგადაკვეთილ AB და CD სწორ ხაზებს წარმოადგენს. რასაკვირველია, რაც მეტს ავიღებთ ასეთი ქორდების წყვილებს, მით უფრო ზუსტად დავადგენთ მოცემული მრუდის სახეს.

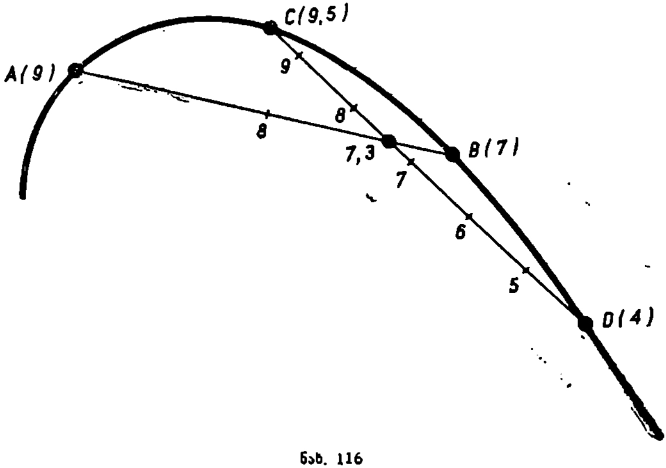
ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ბრტყელი a მრუდი (ნახ. 117). ცნობილია მისი სამი წერტილი (A, B და C). ამ მრუდის ნებისმიერი წერტილის ნიშნულის განსაზღვრისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი ორი გზით:

ა) შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ A, B და C წერტილებით მოცემულ P სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მიეცეს. a მრუ-



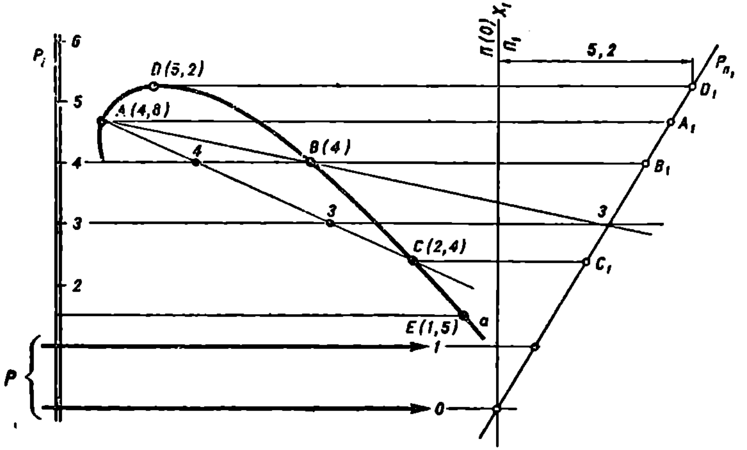
ნახ. 115

დის ნებისმიერი D წერტილის ახალი გეგმილი X_1 სისტემაში P_{Π_1} კვალთან იქნება შეთავსებული, ხოლო D_1 გეგმილის დაშორება X_1 ღერძიდან (5,2) a მრუდის D წერტილის ნიშნული იქნება ძველ სისტემაში.



ნახ. 116

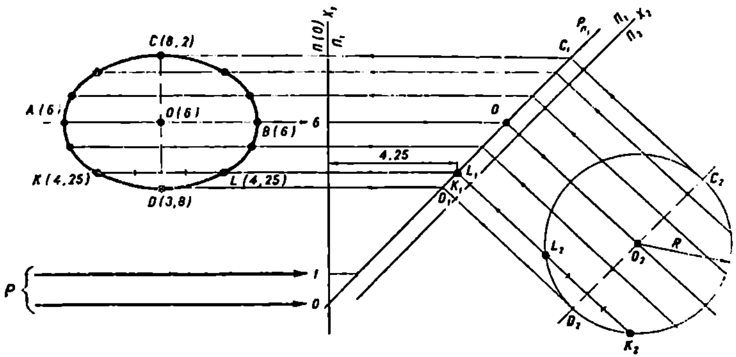
ბ) ავაგოთ ABC სიბრტყის ქანობის მასშტაბი (ნახ. 117). ამისათვის საკმარისია AB და BC სწორი ხაზების დაგრადუირება. a მრუდის ნებისმიერი



ნახ. 117

E წერტილის ნიშნულის განსაზღვრისათვის ამ წერტილზე გავავლოთ დამხმარე თარაზულა და ქანობის მასშტაბის საშუალებით ვიპოვოთ მისი დონის ნიშნული.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ ბრტყელი მრუდები, როცა მათი სიბრტყე მაგეგმილებელია, სწორი ხაზების სახით გეგმილდებიან. თუ ბრტყელი მრუდის



ნახ. 118

სიბრტყე გეგმილთსიბრტყის პარალელურია, მაშინ მრუდის გეგმილი თვით მრუდის კონგრუენტული გამოდის.

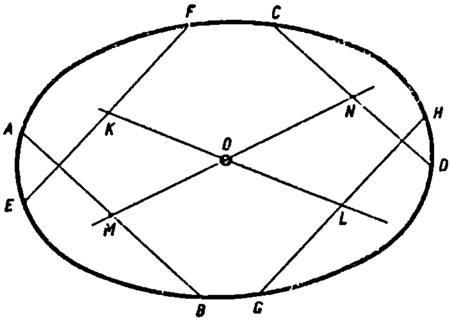
წრეხაზის ნიშნულიანი გეგმილი ზოგად შემთხვევაში ელიფსს წარმოადგენს, ხოლო კერძო შემთხვევაში იმავე რადიუსიან წრეხაზს (როცა წრეხაზის

სიბრტყე დონის სიბრტყეა) ან მისი დიამეტრის ტოლ სწორი ხაზის მონაკვეთს (როცა წრეხაზის სიბრტყე მაგეგმილებელია).

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, მოცემულია წრეხაზის სიბრტყე (თარაზულებით), ცენტრი და რადიუსი (ნახ. 118). ასეთი წრეხაზის გეგმილის ასაგებად გამოვიყენოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხი. ორჯერადი შეცვლით წრეხაზის სიბრტყე დონის სიბრტყედ გადავაქციოთ. X_2 სისტემაში O_2 წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან მოცემული R რადიუსით შემოვხაზოთ წრეხაზი (მოცემული R რადიუსიანი წრეხაზი აქ ამავე რადიუსიან წრეხაზად დაგეგმილდება). ამ ახალ სისტემაში R რადიუსიანი წრეხაზის K_2L_2 ქორდა თარაზულას წარმოადგენს. იგივე ქორდა X_1 სისტემაში მაგეგმილებელი ხაზია, ხოლო ძველ სისტემაში — ისევ თარაზულა. K_2 და L_2 წერტილები წრეხაზის C_2D_2 დიამეტრის მიმართ, რომელიც P სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის ხაზს წარმოადგენს, განლაგებულია სიმეტრიულად. ეს სიმეტრია დაცული იქნება ძველ სისტემაშიც. ამიტომ ჩვენ შევძლებთ K და L წერტილების აგებას ძველ სისტემაში. ანალოგიურად აიგება ყველა დანარჩენი წერტილი. მათი შეერთებით კი მივიღებთ მოცემული წრეხაზის გეგმილს.

ვ. ზოგიერთი აგებანი ელიფსზე

ა) მოცემულია ელიფსი და საჭიროა მისი ცენტრის აგება (ნახ. 119). გავატაროთ ელიფსის ორი წყვილი ქორდა ისე, რომ წყვილები ერთმანეთის პარალელური იყოს — $AB \parallel CD$ და $EF \parallel GH$. ვიპოვოთ თითოეული ქორდის შუა წერტილი (M, N, K და L). პარალელური ქორდების შუა წერტილების შემაერთებელი სწორი ხაზები ელიფსის დიამეტრებს წარმოადგენს (დამტკიცება იხ. ე. მჭედლიშვილი, გ. ვაჩნაძე — მხაზველობითი გეომეტრია, 1953), ამიტომ მათი გადაკვეთის $O = MN \times LK$ წერტილი მოცემული ელიფსის ცენტრი იქნება.



ნახ. 119

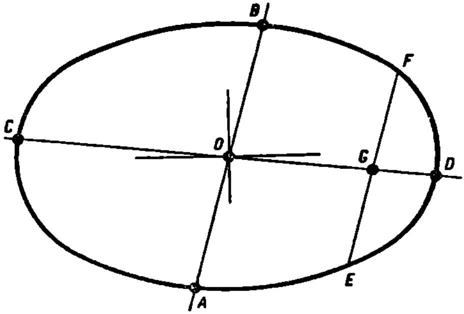
ბ) მოცემულია ელიფსი და საჭიროა მისი შეუღლებული დიამეტრების აგება (ნახ. 120). ელიფსის ცენტრზე გავატაროთ ნებისმიერი AB დიამეტრი. გავავლოთ აგრეთვე AB დიამეტრის პარალელური რომელიმე EF ქორდა და დავნიშნოთ ამ ქორდის შუა წერტილი (G). O და G წერტილებზე გამავალი CD სწორი ხაზი მოცემული ელიფსის AB დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრი იქნება.

გ) ელიფსის მხების აგება. ვიდრე დასმული ამოცანის გადაწყვეტას შევუდგებოდეთ, დავამტკიცოთ ერთი ასეთი თეორემა:

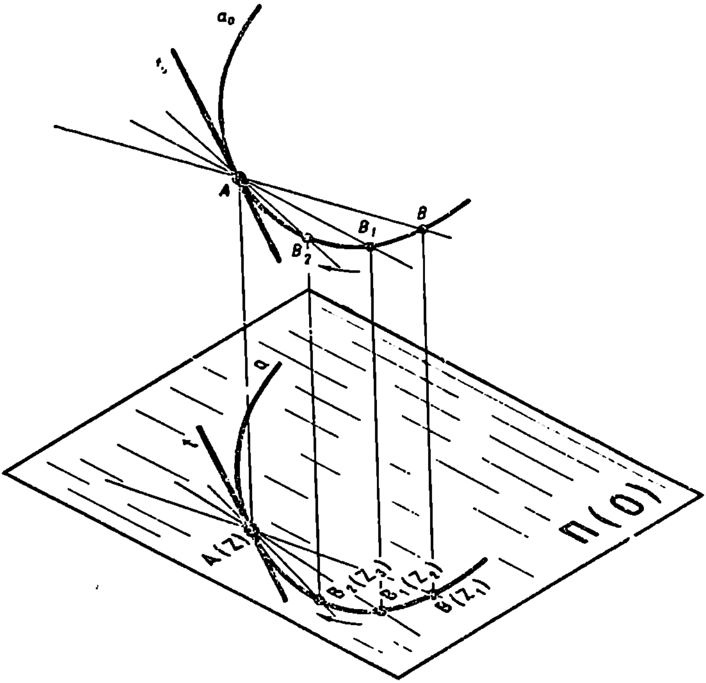
ბრტყელი მრუდის (a_0) მხები (t_0), თუ იგი გეგმილთსიბრტყის მართობული არ არის, ამ მრუდის გეგმილის (a) მხებად (t) გეგმილდება.

ვთქვათ სივრცეში მოცემულია რაიმე a_0 ბრტყელი მრუდი (ნახ. 121),

რომლის გეგმილი $\Pi(O)$ სიბრტყეზე არის a მრუდი. იმისათვის, რომ ავაგოთ a_0 მრუდის t_0 მხები A წერტილში, წინასწარ გავატაროთ AB მკვეთი ხაზი. მისი გეგმილი $\Pi(O)$ სიბრტყეზე იქნება $A(Z)\,B(Z_1)$. თუ B წერტილს გადავაადგილებთ a_0 მრუდზე ისე, რომ იგი მიისწრაფოდეს A წერტილისაკენ, მაშინ t_0 მხები, A უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას, თანდათან დაიჭერს AB_1, $AB_2, \ldots$ მდებარეობებს. ბოლოს დადგება ზღვრული მომენტი, როცა B წერტილი დაემთხვევა A წერტილს და AB მკვეთი მიიღებს t_0 მხების მდებარეობას. რადგა-

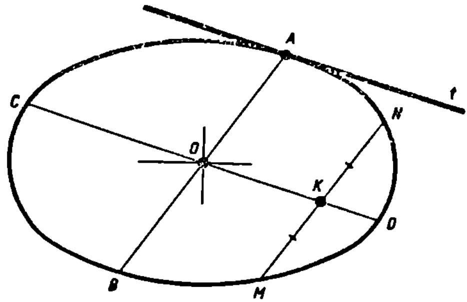


ნახ. 120



ნახ. 121

ნაც AB მკვეთი ხაზის A უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას გეგმილური კავშირი AB ხაზსა და მის გეგმილს შორის არც ერთ მომენტში არ დარღვეულა, არ დაირღვევა არც მაშინ, როდესაც AB მკვეთი ზღვრულ მდებარეობას მიიღებს. ამის შედეგად a_0 მრუდის t_0 მხები სივრცეში ამავე მრუდის გეგმილის (a) მხებად (t) დაგეგმილდება.

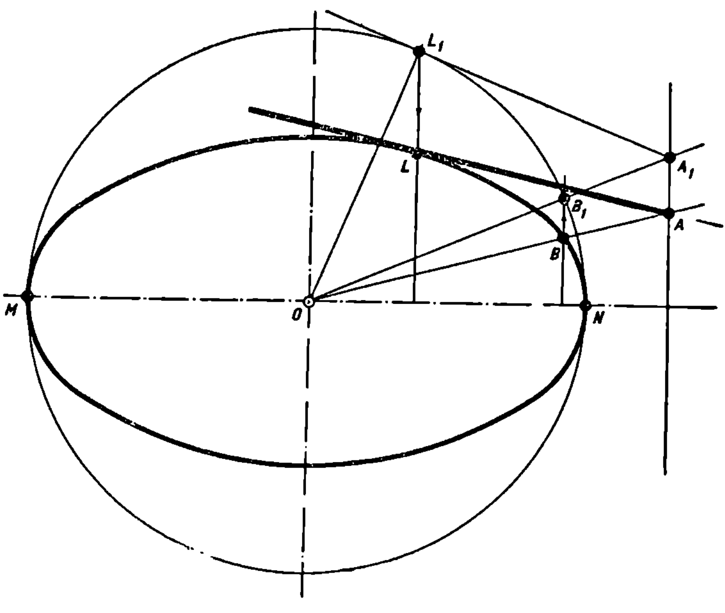


ნახ. 122

ეს თეორემა ძალაშია სივრცითი მრუდების შემთხვევაშიც.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა ძალაში არ არის.

ვთქვათ მოცემულია ელიფსი O ცენტრით და საჭიროა მის A წერტილზე გავატაროთ t მხები (ნახ. 122). მოცემული A წერტილი შევაერთოთ O



ნახ. 123

ცენტრთან და განვაგრძოთ ელიფსის გადაკვეთამდე. მივიღებთ მოცემული ელიფსის დიამეტრს. ჩვენთვის უკვე ცნობილი წესით ავაგოთ ამ დიამეტრის შეუღლებული CD დიამეტრი.

რადგანაც ერთი დიამეტრის ბოლოში ელიფსის მხები ამ დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრის პარალელურია, ამიტომ A წერტილზე გამავალი და CD დიამეტრის პარალელური სწორი ხაზი მოცემული ელიფსის t მხები იქნება.

მოცემულია ელიფსი და მის გარეთ მდებარე A წერტილი. საჭიროა A წერტილზე გავატაროთ ისეთი სწორი ხაზი, რომელიც მოცემული ელიფსის მხები იქნება (ნახ. 123).

მოცემული A წერტილი ელიფსის O ცენტრთან შევაერთოთ. დავნიშნოთ AO სწორი ხაზის ელიფსთან გადაკვეთის B წერტილი. O წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ წრეხაზი, რომლის დიამეტრიც მოცემული ელიფსის დიდი დიამეტრის ტოლი იქნება. ეს წრეხაზი მოცემულ ელიფსთან ნათესაურ შესაბამისობაშია (იხ. Н. Ф. Четверухин и др., Начертательная геометрия, 1963). ელიფსის დიდი ღერძი (MN) შეიძლება განვიხილოთ როგორც შესაბამისობის ღერძი, ხოლო მისი პატარა ღერძი — როგორც შესაბამისობის მიმართულება. თუ B წერტილს გადავაადგილებთ შესაბამისობის მიმართულების პირალელურად, წრეხაზის რკალზე მივიღებთ მის შესაბამის B_1 წერტილს. O ცენტრი შევაერთოთ B_1 წერტილთან და განვაგრძოთ. OB სწორ ხაზს OB_1 სწორი ხაზი შეესაბამება, ხოლო A წერტილს — A_1 წერტილი. A_1 წერტილიდან გავატაროთ წრეხაზის A_1L_1 მხები. L_1 წერტილი შეხების წერტილია. ამ წერტილს ელიფსზე L წერტილი შეესაბამება. AL სწორი ხაზი A_1L_1 სწორი ხაზის შესაბამისია და ამიტომ ელიფსის საძიებელ მხებს წარმოადგენს.

4. ნებისმიერი ბრტყელი მრუდის მხებისა და ნორმალის აგების ზოგიერთი შემთხვევები

ა) მოცემულია ნებისმიერი ბრტყელი მრუდი (a) და მის გარეშე მდებარე M წერტილი; საჭიროა მოცემულ წერტილზე მოცემული მრუდის მხები გავავლოთ (ნახ. 124).

M წერტილზე გავატაროთ a მრუდის მკვეთი სხივების კონა. დავნიშნოთ მიღებული AA_1, BB_1,... ქორდების შუა წერტილები O_1, O_2, O_3,... ამ წერტილების შემაერთებელი b მრუდის გადაკვეთით a მრუდთან მივიღებთ N წერტილს ($N=a\times b$). MN სწორი ხაზი საძიებელი t მხები იქნება.

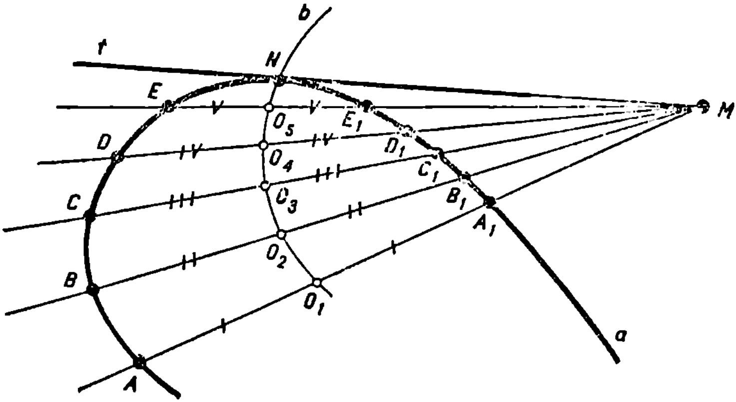
ბ) მოცემულია a მრუდი და საჭიროა გავატაროთ ამ მრუდის მხები, მოცემული l მიმართულების პარალელურად (ნახ. 125).

გავავლოთ l მიმართულების პარალელური და a მრუდის მკვეთი სწორი ხაზები. დავნიშნოთ მიღებული ქორდების შუა წერტილები (O_1, O_2, O_3,...) და შევაერთოთ მრუდი ხაზით (b). ამ მრუდის (b) გადაკვეთა მოცემულ მრუდთან (a) მოგვცემს წერტილს (M), სადაც საძიებელმა მხებმა (t) უნდა გაიაროს ($t \parallel l$).

გ) მოცემულია მრუდი (a) და წერტილი ($A\subset a$); საჭიროა A წერტილზე გავატაროთ a მრუდის t მხები (ნახ. 126).

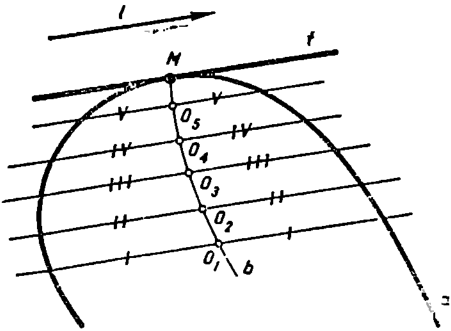
ავიღოთ რაიმე დამხმარე სწორი ხაზი (f), რომელსაც დაახლოებით საძიებელი მხების მართობული მიმართულება ექნება.

A წერტილზე გავატაროთ სხივების კონა ისე, რომ თითოეულმა სხივმა გადაკვეთოს როგორც მრუდი (*a*), ისე დამხმარე სწორი ხაზი (*f*). სხივისა და



ნახ. 124

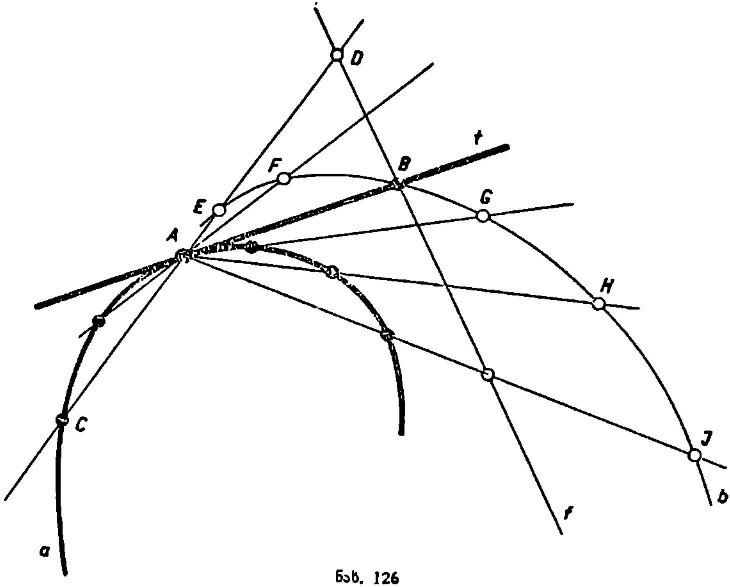
f სწორის გადაკვეთის წერტილიდან ამავე სხივზე გადავზომოთ ამ სხივით მიღებული ქორდის სიგრძის ტოლი მონაკვეთი (მაგ., $DE=AC$). ამასთან, მხედველობაში მივიღოთ შემდეგი: *A* წერტილიდან ერთ მხარეს დახრილ სხივებზე ქორდების ზომები *f* ხაზის ერთ მხარეს გადავზომოთ, ხოლო მეორე მხარეს დახრილ სხივებზე — *f* სწორი ხაზის საწინააღმდეგო მხარეს. ამ გზით მიღებული *E*, *F*, *G*, ... წერტილების შემაერთებელი *b* მრუდი *f* სწორ ხაზთან გადაკვეთაში მოგვცემს *B* წერტილს. *A* და *B* წერტილების შემაერთებელი *t* სწორი ხაზი საძიებელი მხები იქნება.



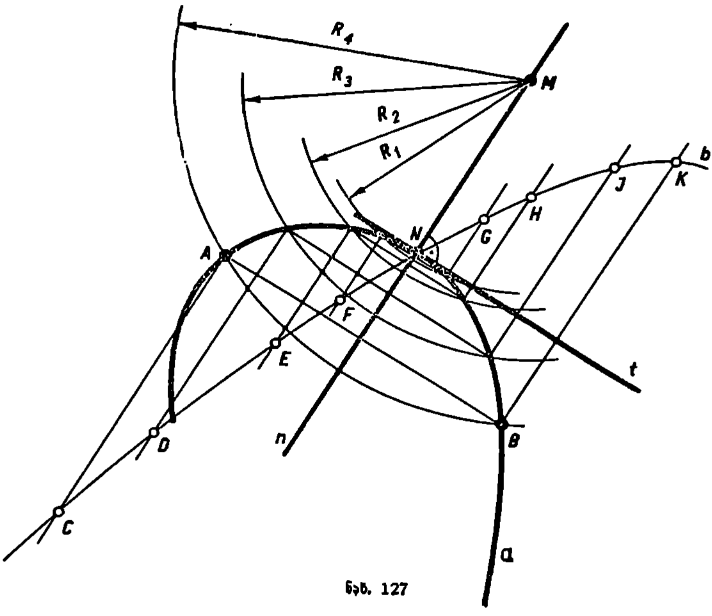
ნახ. 125

დ) მოცემულია *a* მრუდი და მის გარეშე მდებარე *M* წერტილი. საჭიროა *M* წერტილზე *a* მრუდის ნორმალის გატარება (ნახ. 127).

მოცემული *M* წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, ნებისმიერი R_1, R_2, R_3,... რადიუსიანი რკალები შემოვხაზოთ. ასეთი რკალების *a* მრუდთან გადაკვეთის ყოველი ორი წერტილი მოგვცემს ქორდას. თითოეული ასეთი ქორდის ბოლოებიდან ქორდის მიმართ აღვმართოთ სხვადასხვა მხარეს მიმართუ-



ნახ. 126



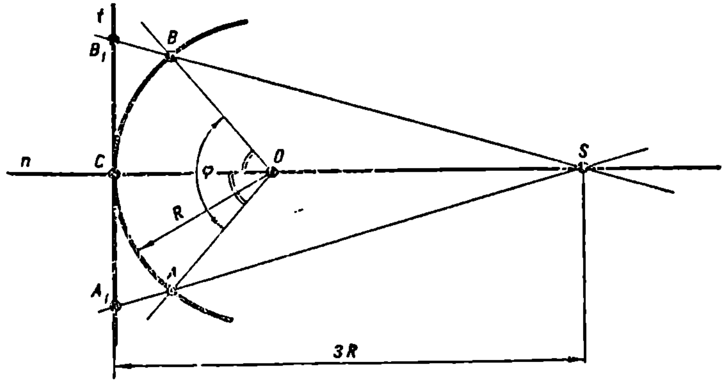
ნახ. 127

ლი მართობები (მაგ., $AC \perp AB$ და $BK \perp AB$); ამ მართობებზე კი გადავზომოთ შესაბამისი ქორდის სიგრძის ტოლი მონაკვეთები (მაგ., $AB=AC=BK$). ამნაირად მიღებული C, D, E, F,... წერტილების შემაერთებელი მრუდის (b) მოცემულ მრუდთან (a) გადაკვეთა მოგვცემს N წერტილს. MN სწორი ხაზი კი საძიებელი n ნორმალი იქნება.

5. ბრტყელი მრუდის გაშლის მიახლოვებითი ხერხი

განვიხილოთ მიახლოებითი გრაფიკული ხერხი, რომელიც მცირე ქორდების სახელითაა ცნობილი.

ვთქვათ, მოცემულია R რადიუსიანი წრეხაზის AB რკალი (ნახ. 128). ამ რკალის შუა წერტილში (C) ავაგოთ მხები (t) და ნორმალი (n). C წერტილიდან ნორმალის მიმართულებით გადავზომოთ $3R$-ის ტოლი მონაკვეთი და მიღებული წერტილი აღვნიშნოთ S-ით. უკანასკნელი შევაერთოთ A და B წერტილებთან და გან-



ნახ. 128

ვაგრძოთ t მხების გადაკვეთამდე. AB რკალის სიგრძე A_1B_1 სწორი ხაზის მონაკვეთის ტოლად შეგვიძლია მივიღოთ.

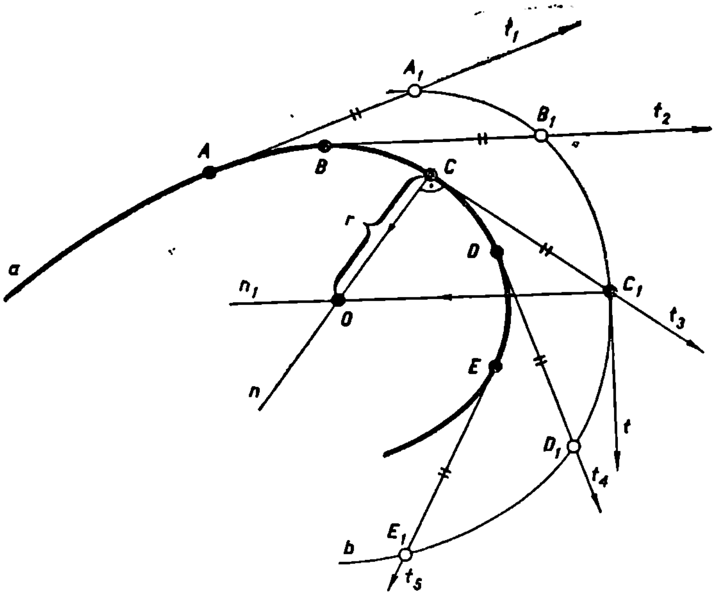
ასეთი აგების სიზუსტე (როცა $\varphi \leqslant 60°$) ხშირად სრულიად საკმარისია პრაქტიკული მიზნებისათვის.

არსებობს მრუდის გაშლის ორი შემთხვევა: 1) როდესაც მას უთავსებენ სწორ ხაზს და 2) როცა მას სხვა მრუდზე შლიან. პირველ შემთხვევაში მცირე ქორდებს თანმიმდევრობით გადაზომავენ რაიმე სწორ ხაზზე. მიღებულ მთელ მონაკვეთს მოცემული მრუდის სიგრძის ტოლად ღებულობენ. მეორე შემთხვევაში მცირე ქორდებს გადაზომავენ იმ მრუდზე, რომელზედაც მოცემულ მრუდს შლიან.

6. სიმრუდის ცენტრისა და რადიუსის განსაზღვრა ბრტყელი მრუდის მოცემულ წერტილში

მოცემულია a მრუდი და C წერტილი ($C \subset a$). საჭიროა ამ წერტილში განისაზღვროს სიმრუდის ცენტრი (O) და რადიუსი (r).

a მრუდზე დავნიშნოთ A, B, D,... დამატებითი წერტილები (ნახ. 129) და თითოეულ მათგანზე გავატაროთ t_1, t_2, t_3,... მხებები. მრუდზე აღებული წერტილებიდან თითოეულ ასეთ მხებზე გადავზომოთ ნებისმიერი სიგრძის ტოლი მონაკვეთები. ასეთნაირად მიღებული A_1, B_1, C_1,... წერტილები შე-



ნახ. 129

ვაერთოთ მრუდით (b). b მრუდს a მრუდის ეკვივალენტური მრუდი ეწოდება. a მრუდის C წერტილს შეესაბამება b მრუდის C_1 წერტილი. ამ წერტილებში გამავალი n და n_1 ნორმალების გადაკვეთით მივიღებთ წერტილს (O), რომელიც მოცემული a მრუდის სიმრუდის ცენტრი იქნება C წერტილში, OC მონაკვეთი კი სიმრუდის რადიუსი (r).

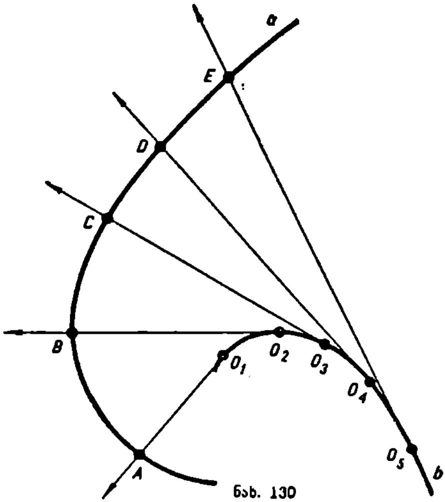
7. ევოლუტა და ევოლვენტა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მრუდის ფორმის მიხედვით მის თითოეულ წერტილს გარკვეული სიმრუდის ცენტრი და შესაბამისი სიმრუდის რადიუსი გააჩნია. O_1, O_2, O_3,... არის a მრუდის სიმრუდის ცენტრები (ნახ. 130), შესაბამისად A, B, C,... წერტილებში. ამ ცენტრების შემაერთებელ b მრუდს a მრუდის ევოლუტა ეწოდება, ხოლო a მრუდს—b მრუდის ევოლვენტა.

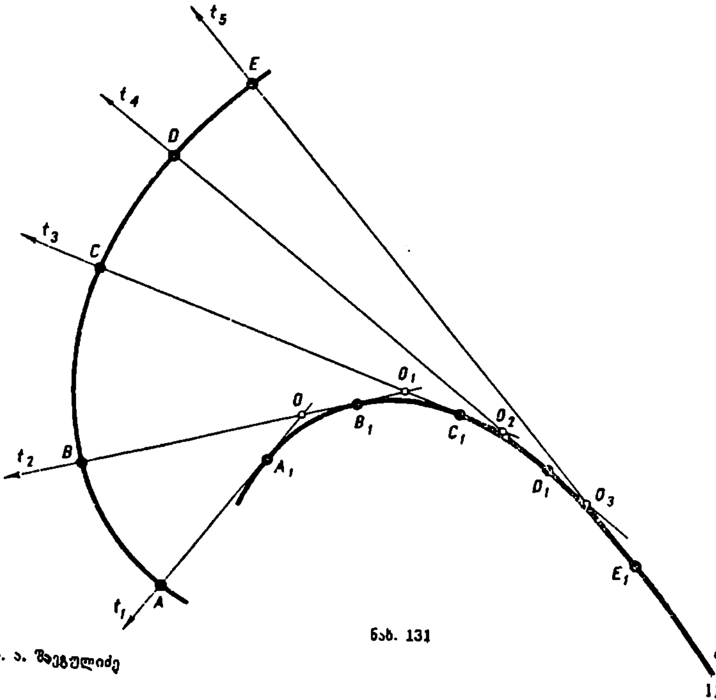
შევნიშნოთ, რომ ევოლვენტის ნორმალები ევოლუტის მხებ სწორ ხაზებს წარმოადგენს.

განვიხილოთ მაგალითი, როდესაც მოცემულია ევოლუტა (a) და ევოლვენტის ერთი წერტილი (A). საჭიროა ფარგლის საშუალებით ევოლვენტის აგება (ნახ. 131).

მოცემულ A წერტილზე გავატაროთ ევოლუტის (a) მხები (t) და დავნიშნოთ შეხების A_1 წერტილი. ამის შემდეგ ევოლუტაზე ავიღოთ კიდევ რამდენიმე წერტილი (B_1, C_1, D_1,...) და თითოეულზე გავავლოთ მხები. დავნიშნოთ მეზობელი მხებების გადაკვეთის O, O_1, O_2,... წერტილები. ამის შემდეგ O წერტილიდან OA რადიუსით t_1 და t_2 მხებებს შორის შემოვხაზოთ AB



ნახ. 130



ნახ. 131

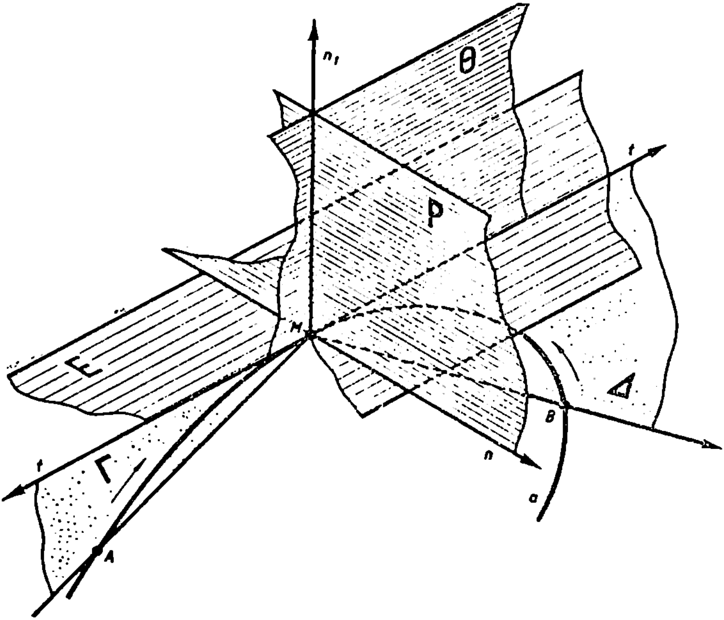
რკალი. O_1 წერტილიდან O_1B რადიუსით t_2 და t_3 მხებებს შორის შემოვხაზოთ BC რკალი და ა. შ. მივიღებთ მოცემული ევოლუტის $ABC...$ ევოლვენტას, რომელიც მოცემულ წერტილზე გაივლის.

საყურადღებოა, რომ ყოველ ბრტყელ მრუდს გააჩნია ევოლვენტების უსასრულოდ დიდი რაოდენობა; ამასთან ევოლუტის მხების ერთ წერტილზე შესაძლებელია ერთადერთი ევოლვენტის გატარება.

8. ზოგიერთი ცნება სივრცითი მრუდების შესახებ

სივრცითი მრუდის ყოველი სამი წერტილით განსაზღვრულ სიბრტყეებს ზოგად შემთხვევაში სხვადასხვა მიმართულება აქვს.

განვიხილოთ 132-ე ნახაზი. აქ მოცემულია a მრუდი. მის ნებისმიერ M წერტილზე გატარებულია MA და MB მკვეთი სწორი ხაზები. თუ A და B წერტილებს ვამოძრავებთ a მრუდზე M წერტილისაკენ, ამ დროს MA და MB მკვეთი ხაზები, ზოგად შემთხვევაში,



ნახ. 132

მრავალჯერ შეიცვლიან თავიანთ მიმართულებას და ზღვრულ მდებარეობაში მიიღებენ t მხების მიმართულებას (შევნიშნოთ, რომ აღებული M წერტილი ჩვეულებრივი წერტილია). ამ მხებზე შესაძლებელია გავატაროთ სიბრტყეების უსასრულოდ დიდი რაოდენობა. ყოველი მათგანი M წერტილში a მრუდის მხები სიბრტყე იქნება.

განვიხილოთ Γ და Δ სიბრტყეები. ისინი განსაზღვრული არიან t მხებითა და MA და MB მკვეთი ხაზებით. ამ სიბრტყეებს სხვადასხვა მიმართუ-

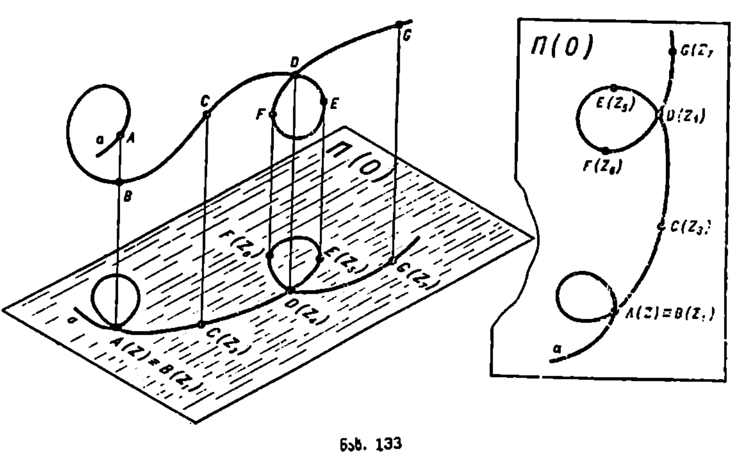
ლება გააჩნიათ, მაგრამ, როდესაც A და B წერტილები a მრუდზე მოძრაობის დროს მიისწრაფვიან M ჩვეულებრივი წერტილისაკენ, ამ დროს Γ და Δ სიბრტყეების მიმართულებაც მრავალჯერ შეიცვლება. როცა მკვეთი ხაზები მიიღებენ თავიანთ ზღვრულ მდებარეობას, ე. ი. t მხების მიმართულებას, მაშინ ეს სიბრტყეებიც თავიანთ ზღვრულ მდებარეობას მიიღებენ. ვინაიდან M წერტილი ჩვეულებრივი წერტილია, ამიტომ მკვეთი ხაზების მიმართულებანი ასეთ ზღვრულ მდებარეობაში ერთმანეთს დაემთხვევა და მივიღებთ ე. წ. მიმხებ სიბრტყეს (E). მიმხები სიბრტყე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მრუდის ისეთი სამი წერტილით განსაზღვრული სიბრტყე, რომელთა შორის მანძილები უსასრულოდ მცირეა.

სივრცითი მრუდის ნებისმიერ წერტილში შეიძლება გავლებული იქნეს ნორმალების სიმრავლე. ამ ნორმალების გეომეტრიული ადგილი იქნება სიბრტყე, რომელსაც ნორმალი სიბრტყე (P) ეწოდება. ნორმალების სიმრავლიდან ერთ-ერთი (n) მოთავსებული იქნება მიმხებ სიბრტყეში. ასეთ ნორმალს მთავარი ნორმალი ეწოდება. ნორმალს, რომელიც მიმხები სიბრტყის მართობულია (n_1), ბინორმალი ეწოდება. სიბრტყეს (Θ), რომელიც ბინორმალითა (n_1) და მხებით (t) განისაზღვრება, მოცემულ წერტილში მრუდის გამწრფევი სიბრტყე ეწოდება.

9. სივრცითი მრუდების გეგმილის აგება

სივრცითი მრუდის დაგეგმილება, ანუ მისი მოცემა გეგმაზე ჩვეულებრივი წესით ხორციელდება. ვირჩევთ მის მახასიათებელ წერტილებს, ვპოულობთ მათ გეგმილებს ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე და მრუდე ხაზით ვაერთებთ (ნახ. 133).

საყურადღებოა მრუდის განსაკუთრებული წერტილების გეგმაზე გამორჩევის საკითხი. მაგალითად, a მრუდის A და B წერტილები, მიუხედავად იმისა, რომ მრუდის სხვადასხვა ადგილზე მდებარეობენ და ჩვეულებრივ წერტილებს წარმოადგენენ, გეგმაზე ერთ წერტილში არიან შეთავსებული. გეგმაზე ანალოგიურ სურათს იძლევა D განსაკუთრებული წერტილიც. ამ შემთხვევე-

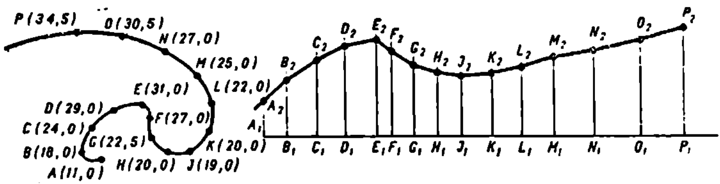


ნახ. 133

ბის ერთმანეთისაგან განსხვავებისათვის ყურადღება უნდა მიექცეს გამოსარ-კვევი წერტილების ნიშნულებს.

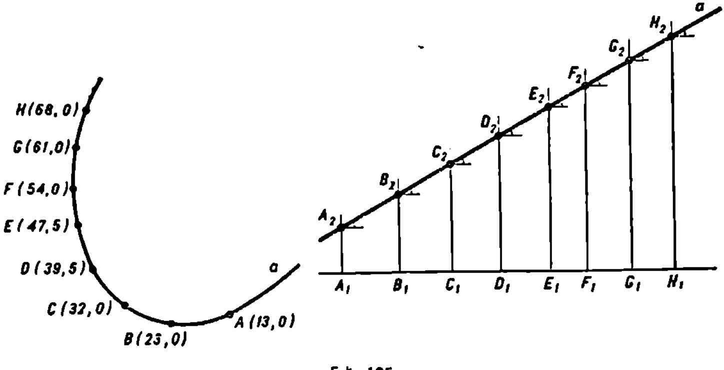
10. სივრცითი მრუდების ზოგიერთი ამოცანები

ა) სივრცითი მრუდის გაშლა. პრაქტიკაში ხშირად მიმართავენ სივრცითი მრუდების ე. წ. მიახლოვებით გაშლას. ვთქვათ მოცემულია a მრუდი (ნახ. 134). მისი გაშლისათვის საჭიროა მასზე აღინიშნოს მახასიათებელი წერტილების რიგი. ცალკე აღებული რაიმე სწორი ხაზის A_1 წერტილიდან თანამიმდევრობით გადავზომოთ AB, BC, CD,... ქორდები. მიღებულ (A_1, B_1, C_1, D_1,...) წერტილებში აღვმართოთ მართობები და თითოეულ მათგანზე გადავზომოთ შესაბამისი წერტილების ნიშნულების ტოლი



ნახ. 134

მონაკვეთები. ასეთნაირად მიღებული $A_2B_2C_2$... ტეხილი (ან მრუდე) ხაზი მოცემული მრუდის ნამდვილ სიგრძეს გამოსახავს (მიახლოვებით). გარდა ამისა მრუდის ასეთნაირი გაშლის დროს განისაზღვრება თითოეული მონაკვეთის ქანობი. როგორც ვხედავთ, განხილულ შემთხვევაში მოცემული მრუდი ცვალებად ქანობიანია. არსებობს სივრცითი მრუდების ისეთი სახეც, როცა მი-

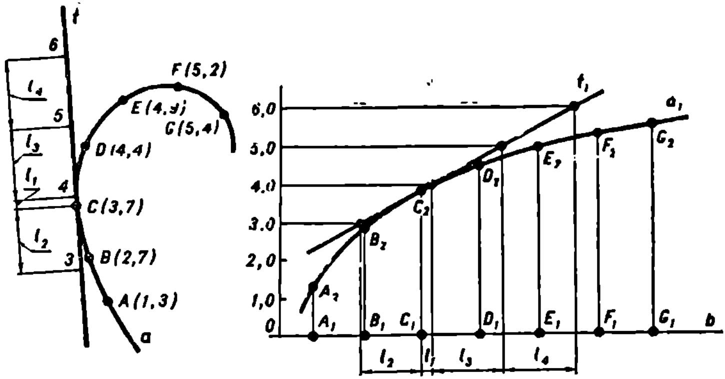


ნახ. 135

სი ნებისმიერი მონაკვეთისათვის დამახასიათებელია ქანობის მუდმივობა. ასეთ მრუდებს ტოლქანობიანი მრუდები ეწოდება.

ტოლქანობიანი მრუდის გაშლის შედეგად მიიღება სწორი ხაზი (ნახ. 135).

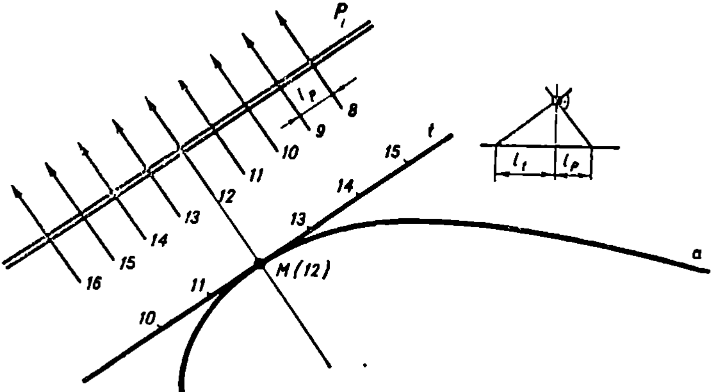
ბ) მხების გრადუირება (ნახ. 136). მოცემულია მრუდის გეგმილი (a) და მხები (t), რომელიც მრუდის C წერტილში გადის.



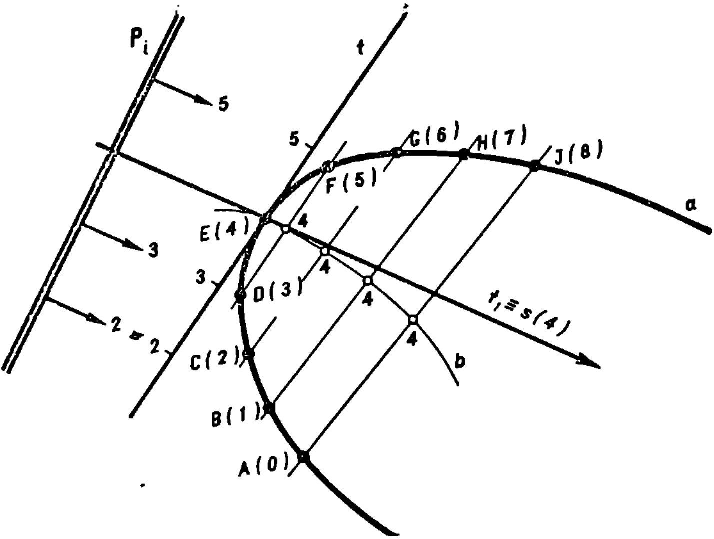
ნახ. 136

ჩვენთვის უკვე ცნობილი ხერხით გავშალოთ მოცემული მრუდი. მიღებული მრუდის (a_1) C_2 წერტილში ავაგოთ ამ მრუდის მხები (t_1). t_1 მხებზე დავნიშნოთ წერტილები, რომელთა ნიშნულებიც მთელი რიცხვები იქნება. ეს წერტილები ჯერ გადავიტანოთ b სწორზე, ხოლო შემდეგ—t მხებზე.

გ) მრუდის (a) მოცემულ წერტილში (M) ნორმალი სიბრტყის (P) აგება. (ნახ. 137). ნორმალი სიბრტყე გადის მოცემულ წერტილზე და მართობულია ამავე წერტილზე გამავალი მხებისა. აქედან გამომ-



ნახ. 137



ნახ. 138

დინარე დასმული ამოცანა დაიყვანება მოცემულ წერტილზე მოცემული სწორი ხაზის მართობული სიბრტყის გატარებაზე (იხ. მესამე თავი, § 6).

დ) მრუდის (a) მოცემულ წერტილში (E) მიმხები სიბრტყის (P) აგება (ნახ. 138). a მრუდზე დავნიშნოთ E წერტილის ორივე მხარეს მდებარე და მისგან თანაბარი მანძილებით დაშორებული წერტილები. მოპირდაპირე წერტილები შევაერთოთ ქორდებით. დავაგრადუიროთ ეს ქორდები და თითოეულ მათგანზე დავნიშნოთ E წერტილის დონის წერტილები. ამ წერტილებზე კი გავავლოთ b მრუდი. E წერტილში გავატაროთ a და b მრუდების მხებები (t და t_1). t და t_1 გადაკვეთილი სწორი ხაზებით განსაზღვრული სიბრტყე საძიებელი მიმხები სიბრტყე (P) იქნება, ხოლო t_1 მხები — ამ სიბრტყის $s(4)$ თარაზულა.

ე) მთავარი ნორმალის აგება. როგორც ცნობილია მთავარი ნორმალი მიმხები და ნორმალი სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის შედეგია. ამიტომ ეს ამოცანა ორი სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთის შემთხვევაზე დაიყვანება.

ვ) ბინორმალის აგება. ბინორმალი მიმხები სიბრტყის მართობულ და შეხების წერტილში გამავალ სწორ ხაზს წარმოადგენს. ამიტომ, თუ ნახაზზე მოცემულია მიმხები სიბრტყე და შეხების წერტილი, ეს ამოცანა მოცემული წერტილიდან მოცემული სიბრტყის მიმართ მართობის აღმართვას გულისხმობს.

ზ) მოცემულ წერტილში მრუდის გამწრფევი სიბრტყის აგება. გამწრფევი სიბრტყე, მრუდის მოცემულ წერტილში, ამ წერტილზე გამავალი მხებითა და ბინორმალით განისაზღვრება. ამიტომ ამოცანა ნახაზზე, მოცემულ წერტილში მხებისა და ბინორმალის აგებით გადაწყდება.

§ 12. მრუდე ზედაპირების ზოგადი კლასიფიკაცია

1. ძირითადი ცნებები მხაზველობით გეომეტრიაში, უპირატესად, ზედაპირების წარმოქმნის კინემატიკური ხერხით სარგებლობენ. ამ შემთხვევაში ზედაპირი განიხილება, როგორც რაიმე ხაზის (მსახველის) სივრცეში უწყვეტად მოძრაობის შედეგი. მსახველმა რომ კანონზომიერად იმოძრაოს, მოძრაობის ნებისმიერ მომენტში მას წინასწარ გარკვეული მდებარეობა უნდა ჰქონდეს. რაც იმას ნიშნავს, რომ მოძრავი მსახველი რაიმე ხაზებს უნდა ეყრდნობოდეს და მოძრაობის ყოველ მომენტში წინასწარ ცნობილ პირობებს აკმაყოფილებდეს. მსახველის ასეთნაირი კანონზომიერი მოძრაობის შემთხვევაში კანონზომიერი, ანუ წესიერი ზედაპირი მიიღება. თუ მსახველის მოძრაობა შემთხვევითია, მაშინ ზედაპირიც შემთხვევითი, ანუ არაწესიური იქნება.

მსახველის მოძრაობის დროს ორ უმთავრეს შემთხვევას განიხილავენ: 1) როცა მსახველი თავისი მოძრაობის ყველა მომენტში ინარჩუნებს პირვანდელ ფორმას და 2) როცა მისი ფორმაც და მდებარეობაც უწყვეტად ცვალებადია. ამრიგად, კინემატიკური ზედაპირის სახე დამოკიდებულია მსახველის ფორმაზე და მისი სივრცეში გადაადგილების კანონზე. ამასთან დაკავშირებით, კინემატიკური ზედაპირის ყოველი კლასისათვის, ჩვეულებრივ, მოცემულია ე. წ. წინასწარი განსაზღვრა. ამ განსაზღვრაში მითითებულია მსახველის ფორმა და სივრცეში მისი მოძრაობის კანონი.

ზედაპირის ელემენტების ერთობლიობას, რომელიც მოცემულ ზედაპირს გამოჰყოფს (გამოარჩევს) ყველა სხვა სახის ზედაპირებისაგან, ზედაპირის განმსაზღვრელი ეწოდება.

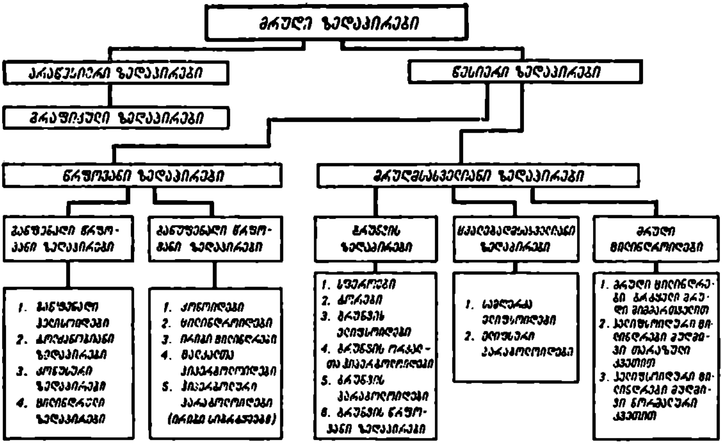
ვიდრე უშუალოდ ზედაპირების გეგმილების აგებაზე გადავიდოდეთ, ზედაპირების ნახაზზე მოცემის საკითხთან დაკავშირებით შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი წინასწარი მოსაზრება: ზედაპირის მოცემისათვის საკმარისია ნახაზზე განისაზღვროს ამ ზედაპირის განმსაზღვრელი ელემენტების გეგმილები. ზედაპირის ასეთნაირი გრაფიკული მოცემის დროს სრული შესაძლებლობა გვექნება ამ ზედაპირზე გადავწყვიტოთ ნებისმიერი პოზიციური და მეტრული ხასიათის ამოცანები.

ეხლა კი შევეხოთ მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაციის საკითხს.

2. მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაცია მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაციის სხვადასხვა სქემები არსებობს. ჩვენ ვისარგებლოთ პროფ. ე. მჭედლიშვილისა და პროფ. გ. ვაჩნაძის მიერ რეკომენდებული სქემით (ნახ. 139).

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ მრუდე ზედაპირების ნაჩვენები კლასიფიკაცია დამყარებულია მსახველთა ფორმაზე და მათ სხვადასხვანაირ მოძრაობაზე.

კლასიფიკაციაში აღნიშნული ზედაპირებიდან ნებისმიერი ზედაპირის აგება შეიძლება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდით. მომდევნო პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ, პრაქტიკაში შედარებით უფრო გავრცელებული, წესიერი მრუდე ზედაპირების გეგმილის აგებას.



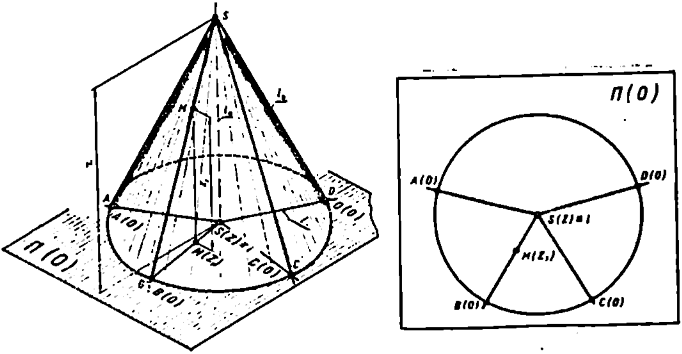
ნახ. 139

§ 13. ზოგიერთი სახის წესიერი მრუდი ზედაპირები და მათი გეგმილის აგება

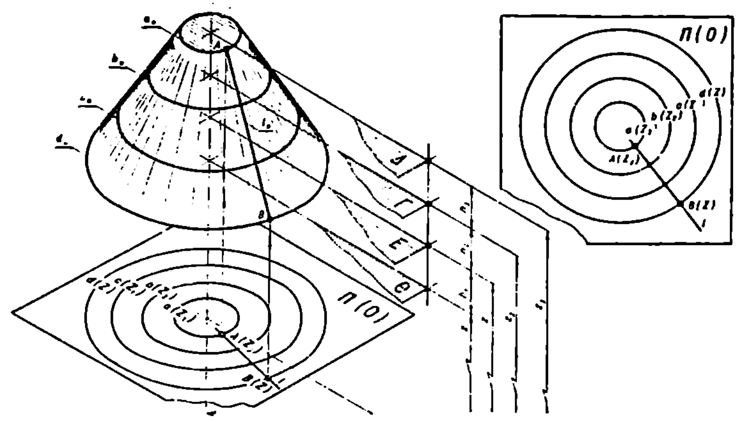
1. კონუსური ზედაპირის გეგმილის აგება

კონუსური ზედაპირი განფენადი წრფოვანი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის.

კონუსური ზედაპირის გეგმილის ასაგებად საკმარისია ნახაზზე მოცემული იყოს წვერო და მიმმართველი მრუდის გეგმილი.



ნახ. 140



ნახ. 141

განვიხილოთ 140-ე ნახაზი. აქ ნაჩვენებია მართი წრიული კონუსის ნიშნულიანი გეგმილის აგება. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ჩვენ შეგვიძლია გეგმაზე, რომელზედაც მოცემულია კონუსის მიმმართველი (წრეხაზი) და წვერო (S), განვსაზღვროთ მის ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი წერტილის (M) მდებარეობა.

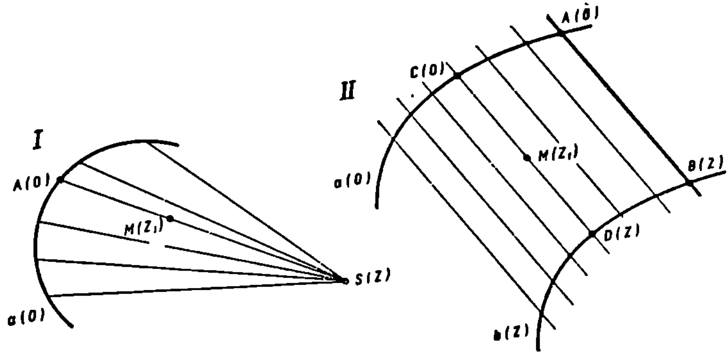
141-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მართი, წრიული კონუსის დაგეგმილების კიდევ ერთი ვარიანტი. მოცემული კონუსი გადაკვეთილია ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით დაშორებული დონის სიბრტყეებით (ფუძის სიბრტყე გეგმილთსიბრტყის პარალელურია). კვეთაში მიღებული წრეხაზების (a_0, b_0, c_0,...) დაგეგმილებით კი მიღებულია კონუსის გეგმილი. წინა შემთხვევის ანალოგიურად ამ შემთხვევაშიც მოცემული კონუსის ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი წერტილის გეგმაზე განსაზღვრის სრული შესაძლებლობა გვეძლევა.

დახრილი კონუსის მოცემისათვის საკმარისია გეგმაზე მოცემული იყოს ამ კონუსის წვერო და მიმმართველი (ნახ. 142-I). მის ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი M წერტილის განსაზღვრისათვის სავსებით საკმარისია ამ წერტილზე გავატაროთ მსახველი (SA) და დავაგრადუიროთ იგი.

2. ცილინდრული ზედაპირის გეგმილის აგება

ცილინდრული ზედაპირიც განფენადი წრფოვანი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის. ცილინდრული ზედაპირის გეგმილის ასაგებად საკმარისია მოცემული იყოს მიმმართველი და ერთ-ერთი მსახველი (ნახ. 142-II).

ვთქვათ მოცემულია გეგმილთსიბრტყეზე მდებარე a მრუდი და მსახველი $A(O)\,B(Z)$. a მრუდის ნებისმიერ წერტილზე მოცემული მსახველის პარალელურად გატარებული ყოველი სწორი ხაზი ამ ზედაპირის მსახველი იქნება. ასეთნაირად მოცემულ ცილინდრულ ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი M წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ამ წერტილზე გავავლოთ დამხმარე მსახველი (CD) და დავაგრადუიროთ იგი.

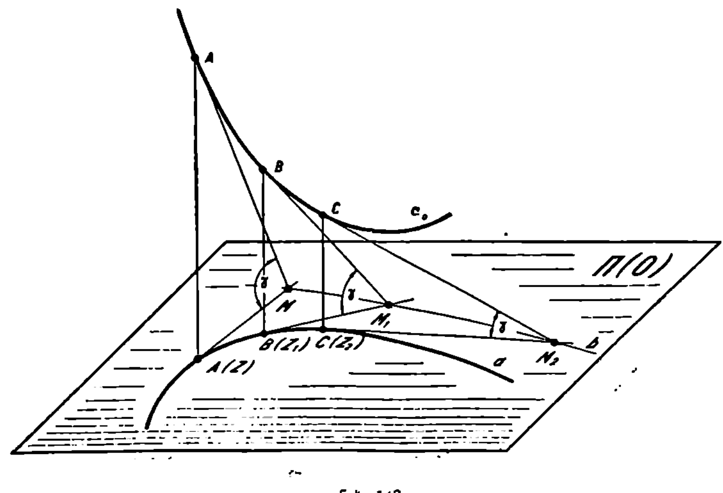


ნახ. 142

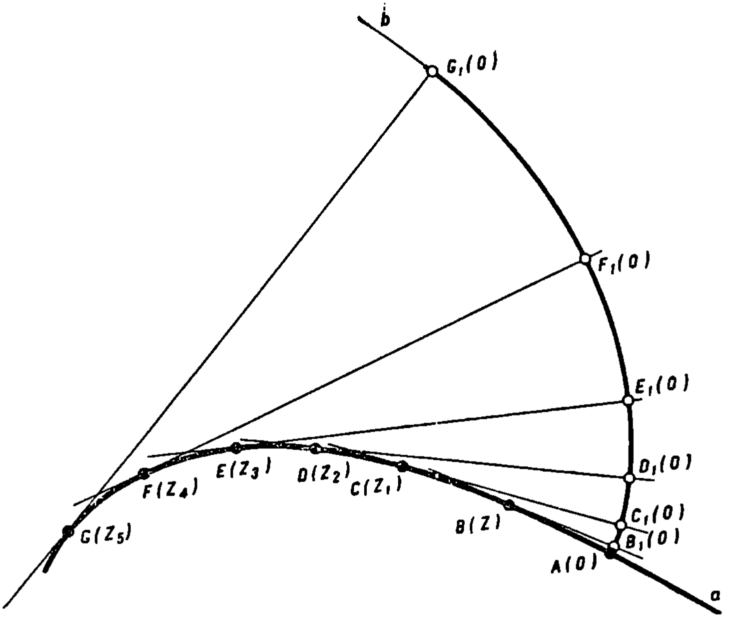
3. ტოლქანობიანი ზედაპირი და მისი გეგმილის აგება

თუ განფენადი წრფოვანი ზედაპირისმსახველები ერთი და იმავე კუთხით არის დახრილი რომელიმე სიბრტყისადმი, მაშინ ასეთ ზედაპირს ტოლქანობიანი ზედაპირი ეწოდება.

143-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ასეთი ტოლქანობიანი ზედაპირი. ამ ზედაპირის AM, BM_1, CM_2,... მსახველები გეგმილთსიბრტყისადმი ერთი და იმავე γ კუთხით არის დახრილი. a_0 მრუდს ამ ზედაპირის უკუქცევის წიბო ეწოდება. უკუქცევის წიბო (a_0) ორთოგონალურად დავაგეგმილოთ $\Pi(O)$ გეგმილთსიბრტყეზე და ავაგოთ მისი ნიშნულიანი გეგმილი $A(Z)\,B(Z_1)\,C(Z_2)$... გარდა ამისა ავაგოთ ამ წერტილებში გამავალ მსახველთა (ანუ უკუქცევის წიბოს მხებთა) კვალების (M, M_1, M_2,...) მომვლები



ნახ. 143



ნახ. 144

მრუდი (b). იგი მოცემული ზედაპირის გეგმილთსიბრტყესთან გადაკვეთის მრუდი იქნება, ხოლო უკუქცევის წიბოს გეგმილი (a)—ამ მრუდის ევოლუტა.

შევნიშნოთ, რომ, როდესაც წრფოვანი ზედაპირის უკუქცევის წიბო კერძო შემთხვევაში წერტილს წარმოადგენს, ვღებულობთ კონუსურ ზედაპირს. თუ მსახველების თავმოყრის წერტილს უსასრულობაში გადავიტანთ, მივიღებთ ცილინდრულ ზედაპირს.

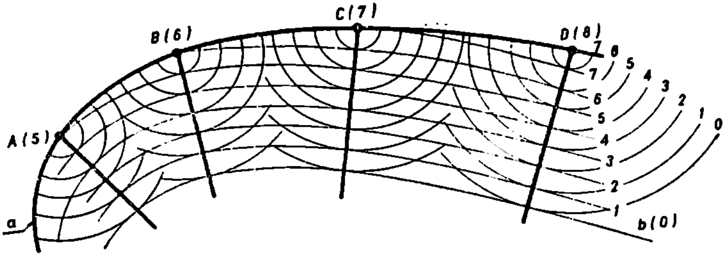
ვთქვათ, მოცემულია ასაგები ზედაპირის უკუქცევის წიბო (a). პირობით მივიღოთ, რომ ამ ზედაპირის მსახველები გეგმილთსიბრტყის მიმართ ერთნაირად არიან დახრილი (ნახ. 144).

როგორც უკვე ვიცით, ტოლქანობიანი ზედაპირის უკუქცევის წიბოს გეგმილი მოცემული ზედაპირის გეგმილთსიბრტყესთან გადაკვეთის ევოლუტას წარმოადგენს.

მივიღოთ მხედველობაში ეს გარემოება და მოცემული ევოლუტის (a) მიხედვით ავაგოთ მის $A(O)$ წერტილზე გამავალი ევოლვენტა (b). ამ ევოლვენტის B_1, C_1, D_1,... წერტილებზე გამავალი ნორმალები საძიებელი ზედაპირის მსახველების გეგმილები იქნება. ანალოგიურად შეგვიძლია ავაგოთ ნებისმიერი სხვა მსახველი და შესაბამისად განვსაზღვროთ ამ ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა.

არსებობს ტოლქანობიანი ზედაპირების აგების სხვა ინტერპრეტაციებიც.

წარმოვიდგინოთ, რომ რაიმე სივრცით მრუდზე (a) მოძრაობს მართი



ნახ. 145

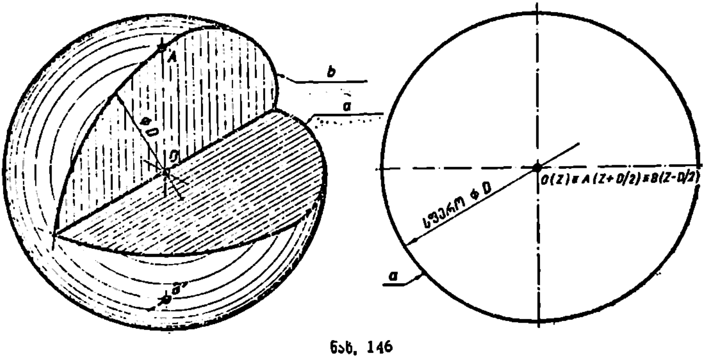
წრიული კონუსის წვერო ისე, რომ ნებისმიერ მომენტში ამ კონუსის ღერძი გეგმილთსიბრტყის მართობულია. მოძრავი კონუსის სხვადასხვა მდებარეობების მომვლები ზედაპირი ტოლქანობიანი ზედაპირი იქნება. ამ ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გამავალი უდიდესი ვარდნილობის ხაზის დახრის კუთხე ყოველთვის მოცემული კონუსის მსახველის გეგმილთსიბრტყისადმი დახრის კუთხის ტოლი იქნება.

145-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ასეთნაირად წარმოქმნილი ტოლქანობიანი ზედაპირის გეგმილის აგება. სახელდობრ, აგებულია ამ ზედაპირის კვალი $b(O)$ და თარაზულები 1, 2, 3, 4,... როგორც ნახაზიდან ჩანს, ზედაპირის ნებისმიერი თარაზულა კონუსის სხვადასხვა მდებარეობის ერთსახელიანი თარაზულების მომვლებს წარმოადგენს. ზედაპირის თარაზულებისა და კონუსის ერთსახელა თარაზულების შეხების წერტილების შემაერთებელი სწორი ხაზი ზედაპირის თარაზულების მართობულია და შესაბამის წერტილში ამ ზედაპირის ვარდნილობის ხაზს წარმოადგენს.

4. სფეროს გეგმილის აგება

სფეროები მრუდმსახველიანი ბრუნვის ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის. სფერული ზედაპირი შეიძლება მივიღოთ დიამეტრის გარშემო წრეხაზის ბრუნვით. ბრუნვის ღერძის სფეროს ზედაპირთან გადაკვეთის წერტილებს (A და B) პოლუსები ეწოდება (ნახ. 146).

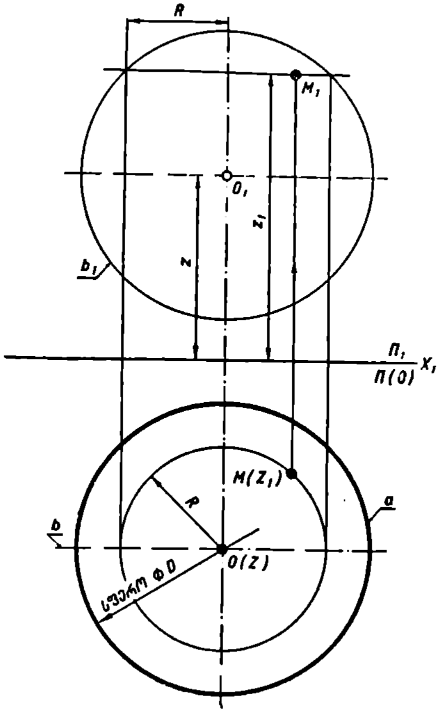
სფეროს ცენტრზე ბრუნვის ღერძის მართობულად გამავალი სიბრტყე



ნახ. 146

სფეროს ზედაპირს ყველაზე დიდი დიამეტრის წრეხაზზე (*a*) ჰკვეთს. ამ წრეხაზს ეკვატორი ეწოდება. იგი სფეროს ორ ნახევარსფეროდ ყოფს. ეკვატორის პარალელური კვეთები სფეროს ზედაპირზე აგრეთვე წრეხაზებს წარმოადგენს. ამ წრეხაზებს პარალელები ეწოდება. ბრუნვის ღერძზე გამავალი სიბრტყეები სფეროს ზედაპირთან კვეთაში იძლევა წრეხაზებს, რომლებსაც მერიდიანები ეწოდება (მაგ., *b*).

სფეროს ნიშნულიანი გეგმილის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ მისი ცენტრის კოორდინატები, ბრუნვის ღერძის მდებარეობა და დიამეტრი. თუ სფეროს დიამეტრს (*AB*) გეგმილთსიბრტყის მართობულად დავაყენებთ და *O* ცენტრიდან შემოვხაზავთ *D* დიამეტრიან წრეხაზს, მივიღებთ სფეროს ნიშნულიან გეგმილს (ნახ. 146). პოლუსების ნიშნულების გამოთვლა ნაჩვენებია ნახაზზე.



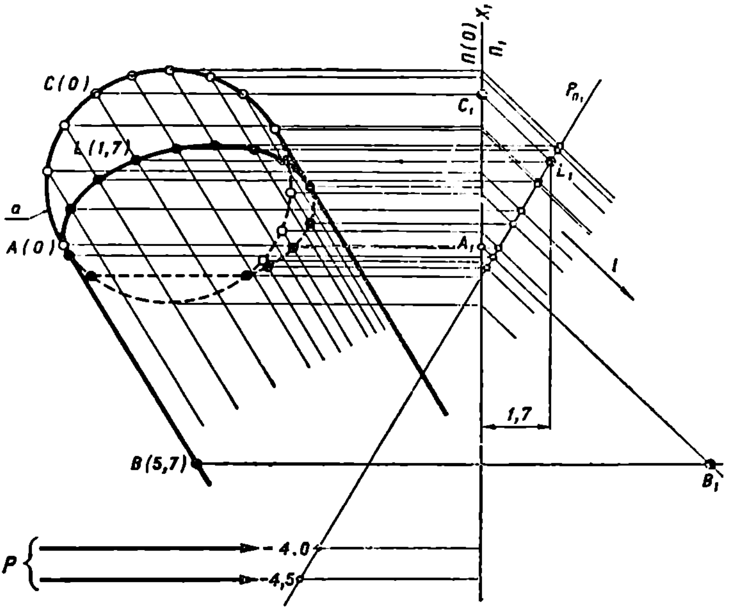
ნახ. 147

ვთქვათ, მოცემულია სფეროს ნიშნულიანი გეგმილი (ნახ. 147), და საჭიროა გამოვითვალოთ მის ზემო ნახევარსფეროზე მოთავსებული ნებისმიერი *M* წერტილის Z_1 ნიშნული. ამისათვის შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ($\Pi_1 \parallel b$) და ავაგოთ *M* წერტილზე გამავალი *R* რადიუსიანი პარალელის გეგმილი. ამის შემდეგ საძიებელ ნიშნულს (Z_1) უშუალოდ ნახაზზე გაზომვით მივიღებთ.

§ 14. ამოცანები მრუდ ზედაპირებზე

1. მრუდი ზედაპირების გადაკვეთა სიბრტყით

განვიხილოთ დახრილი ცილინდრის გადაკვეთა სიბრტყით (ნახ. 148). ცილინდრი მოცემულია *a* ფუძით და *AB* მსახველით. მკვეთი სიბრტყე (*P*) კი — თარაზულებით. კვეთის აგებისათვის მოცემული ცილინდრის ზედაპირზე ავიღოთ დამხმარე მსახველები.

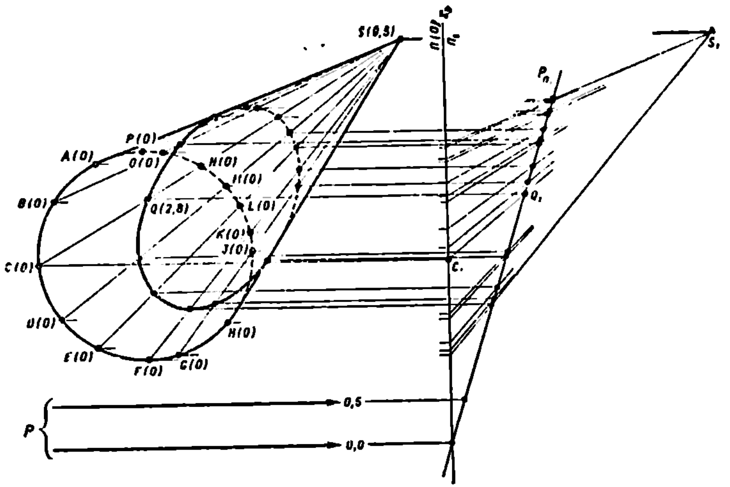


ნახ. 148

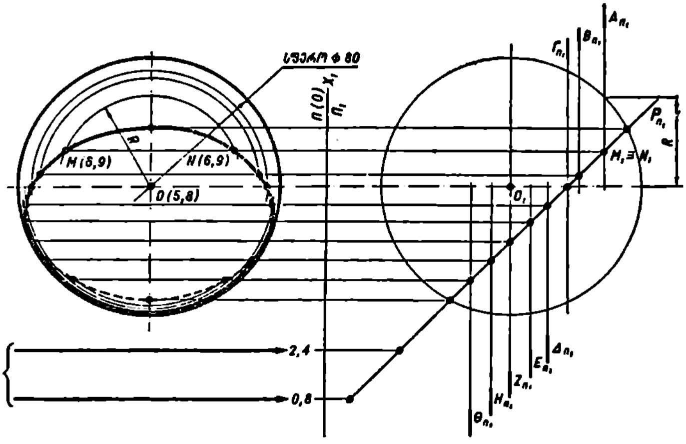
შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ($\Pi_1 \perp P$) და ავაგოთ AB მსახველის ახალი გეგმილი. ამით ჩვენ მივიღებთ ახალ სისტემაში დანარჩენი მსახველების l მიმართულებას. დამხმარე მსახველებისა და P_{Π_1} კვალის გადაკვეთის წერტილები X_1 სისტემაში საძიებელი კვეთის წერტილების გეგმილები იქნება. მათი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ ამოცანის პასუხს. კვეთის თითოეული წერტილისათვის ნიშნულის გამოთვლა (მაგალითად L წერტილისათვის) ჩვენთვის ცნობილი წესით ხდება. მოცემული ცილინდრის განაპირა მსახველების აგებით შესაძლებლობა გვეძლევა დავიცვათ ხილვადობის პირობითობა.

149-ე ნახაზზე ნაჩვენებია კონუსის გადაკვეთა სიბრტყით. კვეთის აგება წინათგანხილული მაგალითის ანალოგიურია და რაიმე დამატებით განმარტებას არ ითხოვს.

ვთქვათ მოცემულია სფერო, რომლის დიამეტრია 80 მმ და P სიბრტყე (ნახ. 150). სფეროს ბრტყელი კვეთი მის ზედაპირზე ყოველთვის წრეხაზს იძლევა, მაგრამ ვინაიდან მოცემული სიბრტყე დახრილია, ამის გამო კვეთაში მიღებული წრეხაზი ელიფსის სახით დაგეგმილდება. გეგმილთსიბრტყის შეცვლით ($P \perp \Pi_1$) და მიღებული ახალი X_1 სისტემის დახმარებით ამოცანის ამოხსნა მეტად მარტივდება. ვიყენებთ მკვეთ პარალელურ სიბრტყეებს (A, B, Γ, Δ,...). თითოეული მათგანი სფეროსთან კვეთაში გვაძლევს წრეხაზს, ხოლო P სიბრტყესთან კვეთაში — სწორ ხაზს. ერთი და იმავე სიბრ-



ნახ. 149



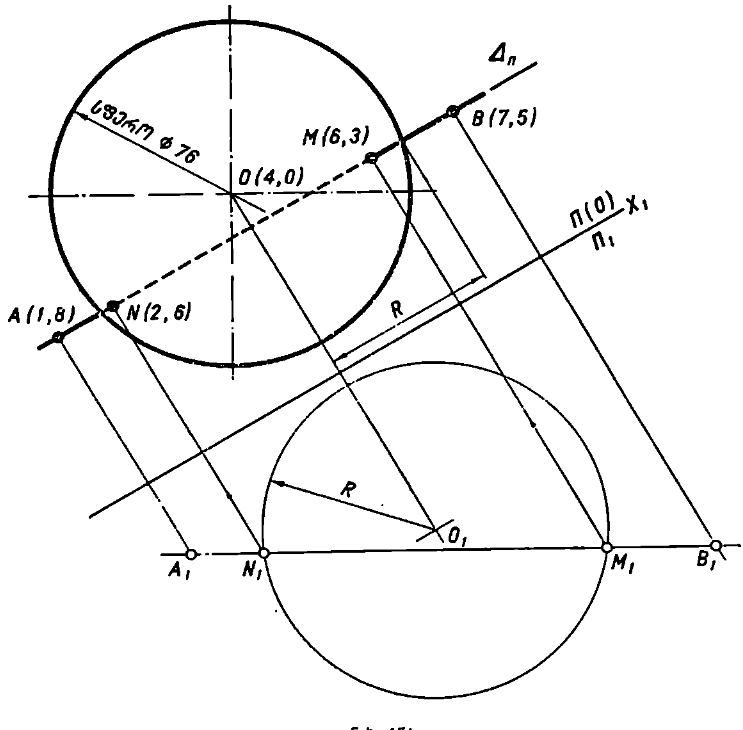
ნახ. 150

ტყით მიღებული წრეხაზისა და სწორი ხაზის ურთიერთგადაკვეთა (მაგ., M და N) საძიებელი ელიფსის წერტილებია. სფეროს ზედაპირზე მიღებული წერტილებიდან $\Pi(O)$ ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მიმართ, ნაწილი განლაგებულია ზემო, ხოლო ნაწილი ქვემო ნახევარსფეროზე. ამის მიხედვით ირკვევა კვეთის ხილული და უხილავი ნაწილები.

2. მრუდი ზედაპირების გადაკვეთა სწორი ხაზით

იმისათვის, რომ ავაგოთ სფეროს ზედაპირის სწორი ხაზით გადაკვეთის წერტილები — შემდეგნაირად მოვიქცეთ (ნახ. 151):

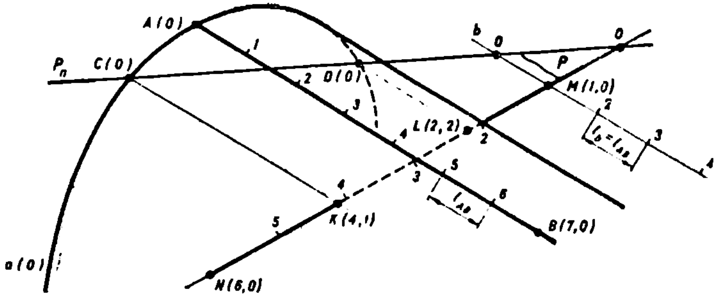
მოცემულ AB სწორ ხაზზე გავატაროთ Δ მაგეგმილებელი სიბრტყე. ეს სიბრტყე მოცემულ სფეროს R რადიუსიან წრეხაზზე გადაკვეთს. ამ წრეხაზისა და AB ხაზის გადაკვეთის წერტილები საძიებელი წერტილები იქნება. მათი მოძებნისათვის AB ხაზი და მასზე გამავალი Δ სიბრ-



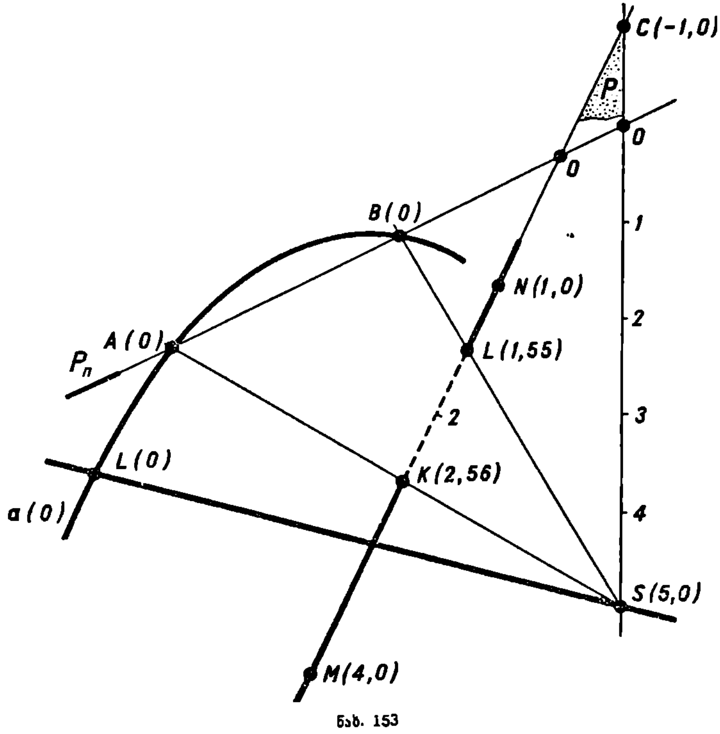
ნახ. 151

ტყე შესაბამისად დონის ხაზად და დონის სიბრტყედ გარდავქმნათ. X_1 სისტემაში შესაძლებლობა მოგვეცემა უშუალოდ აღვნიშნოთ საძიებელი M და N წერტილების გეგმილები. მათი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ ამოცანის პასუხს. მოძებნილი წერტილების ნიშნულები ცნობილი წესითაა ნაპოვნი. ხილვადობის პირობებსაც ახალი სისტემის საშუალებით გავიგებთ.

მოცემულია ცილინდრული ზედაპირი a მიმმართველით და AB მსახველით. მოცემულია აგრეთვე MN სწორი ხაზი და საჭიროა ამ სწორი ხაზით მოცემული ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთის წერტილების აგება (ნახ. 152).



ნ.ხ. 152



ნახ. 153

MN ხაზის ნებისმიერ წერტილზე (მაგ., M-ზე) გავატაროთ AB მსახველის პარალელური b სწორი ხაზი. ავაგოთ $P = MN \times b$ სიბრტყის კვალი a მიმმართველის დონის სიბრტყეზე (აღებულ შემთხვევაში a მრუდი $\Pi(O)$ გეგმილთსიბრტყეზეა მოთავსებული). P_{Π} კვალით a მიმმართველის გადაკვეთის

$C(O)$ და $D(O)$ წერტილებში AB მსახველის პარალელურად გავატაროთ დამხმარე მსახველები. მათი MN ხაზთან გადაკვეთით მივიღებთ საძიებელ K და L წერტილებს. ამ წერტილების ნიშნულები გამოითვლება MN ხაზის გრადუირებით. შემოწმებისათვის შეგვიძლია CK და DL მსახველების გრადუირებაც.

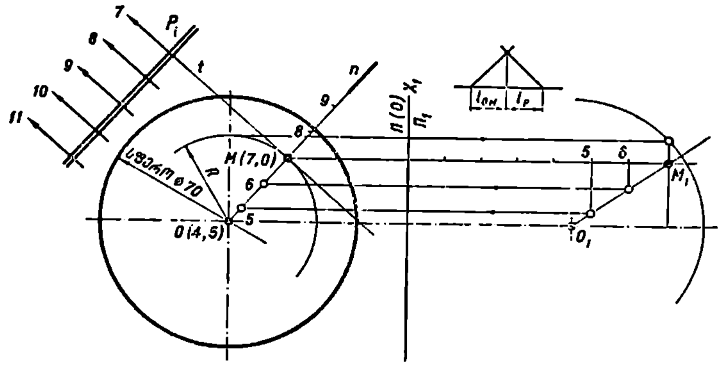
განვიხილოთ a მიმმართველითა და S წვეროთი მოცემული კონუსური ზედაპირის გადაკვეთა MN სწორი ხაზით (ნახ. 153).

S წვეროზე გავატაროთ MN ხაზის მკვეთი SC სწორი ხაზი. ავაგოთ $P=SC\times MN$ სიბრტყის კვალი a მიმმართველის დონის სიბრტყეზე (აქაც a მრუდი გეგმილთსიბრტყეზეა მოთავსებული). P_{Π} კვალის a მრუდთან გადაკვეთის $A(O)$ და $B(O)$ წერტილები შევაერთოთ S წვეროსთან. SA და SB მსახველების გადაკვეთა MN სწორ ხაზთან საძიებელი K და L წერტილები იქნება. თითოეული მათგანის ნიშნული ორნაირად გამოითვლება -- MN სწორი ხაზისა და შესაბამისი მსახველის გრადუირებით.

ვ. მრუდე ზედაპირისადმი მხები სიბრტყის აგება

მოცემულია სფეროს ნიშნულიანი გეგმილი და მის ზემოთა ნახევარზე მდებარე M წერტილი. საჭიროა ამ წერტილში გავატაროთ სფეროს მხები სიბრტყე (ნახ. 154). ვინაიდან სფერო მრუდმსახველიან ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის, ამიტომ მხებ სიბრტყეს მასთან შეხების ერთადერთი წერტილი ექნება.

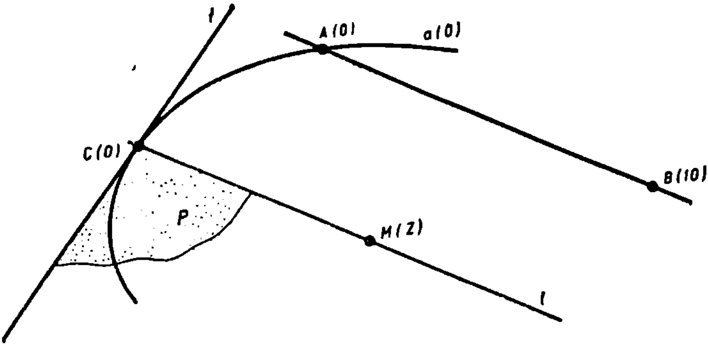
M წერტილში ავაგოთ სფეროს მხები (t) და ნორმალი (n). საძიებელი სიბრტყე t მხებზე გამავალი და n ნორმალის მართობული იქნება. ცნობილი



ნახ. 154

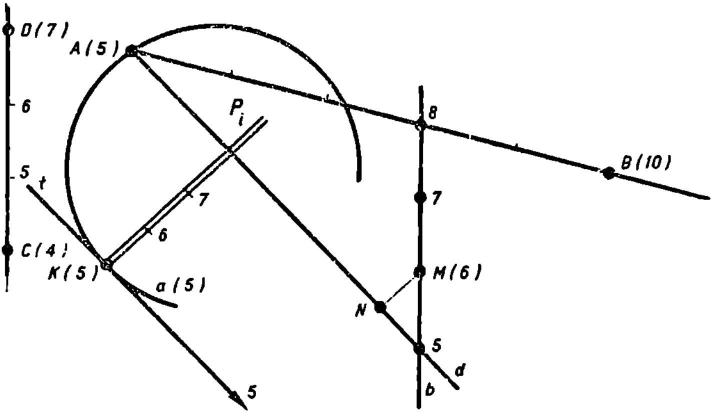
წესით გამოვითვალოთ M წერტილის ნიშნული და დავაგრადუიროთ n ნორმალი. t მხები საძიებელი სიბრტყის (P) თარაზულა იქნება და მისი ნიშნული M წერტილის ნიშნულის ტოლი. P სიბრტყის დანარჩენი თარაზულების ასაგებად ვისარგებლოთ ამ სიბრტყისა და n ნორმალის მართობულობით. ამით ჩვენ გამოვითვლით P სიბრტყის ინტერვალს და განვსაზღვრავთ ვარდნილობის მიმართულებას.

გავარჩიოთ ცილინდრულ ზედაპირზე აღებული ნებისმიერ M წერტილში ამ ზედაპირისადმი მხები სიბრტყის აგების მაგალითი (ნახ, 155).



ნახ. 155

ცილინდრული ზედაპირები სწორმსახველიანი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის. ამის გამო მხები სიბრტყე ასეთ ზედაპირს მთლიანად ერთ გარკვეულ მსახველზე ეხება. აქედან გამომდინარე მოცემულ M წერტილზე გავავლოთ დამხმარე l მსახველი და დავნიშნოთ მისი a მიმმართველთან გადაკვეთის C



ნახ. 156

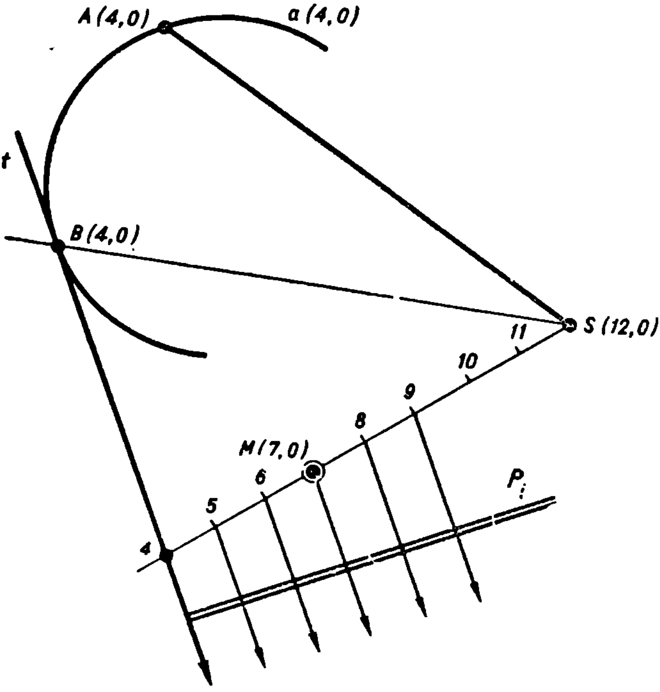
წერტილი. ამ წერტილში ავაგოთ a მრუდის t მხები. t მხებითა და l მსახველით განსაზღვრული სიბრტყე ($P = t \times l$) საძიებელი მხები სიბრტყე იქნება.

ხშირია შემთხვევები, როდესაც საჭიროა, რომ მოცემული მრუდე ზედაპირისადმი მხები სიბრტყე გატარებული იქნეს რაიმე სხვა დამატებითი პირობის დაცვით. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

ა) მოცემულია ცილინდრული ზედაპირი a მიმმართველითა და AB მსახველით; მოცემულია აგრეთვე CD სწორი ხაზი (ნახ. 156). საჭიროა გავატაროთ ცილინდრული ზედაპირის მხები და CD სწორი ხაზის პარალელური P სიბრტყე.

AB მსახველის ნებისმიერ წერტილზე (8) გავატაროთ *CD* სწორი ხაზის პარალელური სწორი (*b*) და დავაგრადუიროთ. *AB* მსახველი და მისი მკვეთი *b* სწორი ხაზი საძიებელი სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს განსაზღვრავს. *AB* მსახველზე და *b* სწორ ხაზზე ავირჩიოთ ერთნაირნიშნულიანი ორი წერტილი და შევაერთოთ ისინი სწორი ხაზით (*d*). უკანასკნელის პარალელურად ავაგოთ *a* მიმმართველის მხები (*t*). ეს იქნება საძიებელი სიბრტყის ერთ-ერთი თარაზულა (5). მის მიმართ ავაგოთ *P* სიბრტყის ქანობის მასშტაბი P_i. *P* სიბრტყის ინტერვალი ნახაზზე ნაჩვენები *MN* მონაკვეთის ტოლი იქნება.

ბ) მოცემულია კონუსური ზედაპირი *a* მიმმართველითა და *S* წვეროთი. მოცემულია აგრეთვე ამ ზედაპირის გარეშე მდებარე *M* წერტილი (ნახ. 157).



ნახ. 157

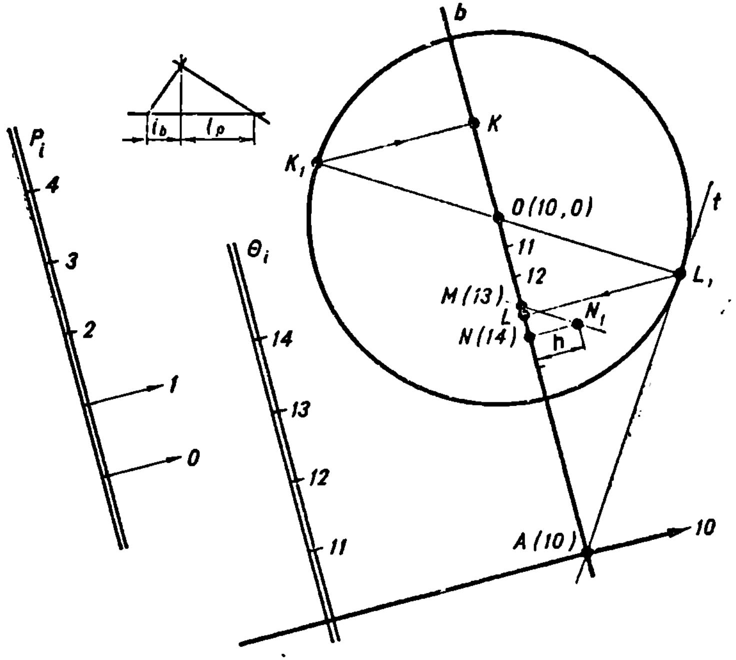
საჭიროა ავაგოთ კონუსური ზედაპირის ისეთი მხები სიბრტყე, რომელიც მოცემულ წერტილზე (*M*) გაივლის.

კონუსის წვერო (*S*) შევაერთოთ *M* წერტილთან და *SM* ხაზი დავაგრადუიროთ, ავირჩიოთ მასზე *a* მიმმართველის დონის წერტილი და უკანასკნელზე გავატაროთ ამ მიმმართველის მხები (*t*).

საძიებელი სიბრტყე *SB* და *SM* ურთიერთგადამკვეთი სწორი ხაზებით განისაზღვრება. *t* მხები ამ სიბრტყის ერთ-ერთი თარაზულა იქნება, ხოლო *SB* — შეხების მსახველი.

გ) მოცემულია სფერო და P სიბრტყე. საჭიროა ავაგოთ სფეროს მხები და P სიბრტყის პარალელური სიბრტყე (ნახ. 158).

სფეროს ცენტრზე P სიბრტყის მართობულად გავავლოთ b დიამეტრი და ვიპოვოთ ამ დიამეტრის სფეროს ზედაპირთან გადაკვეთის წერტილები. ამისათვის b დიამეტრის ნებისმიერი მონაკვეთი (მაგ., MN) შევათავსოთ M წერტილის დონის სიბრტყესთან. სფეროს ცენტრზე გავატაროთ $M(13)N_1$ მონაკვეთის პარალელური სწორი ხაზი და დავნიშნოთ ეკვატორთან მისი გადაკვეთის L_1 და K_1 წერტილები. დავაბრუნოთ ეს წერტილები b დიამეტრზე. KL მონაკვეთი მოცემული P სიბრტყის მართობული დიამეტრის გეგმილი იქ-



ნახ. 158

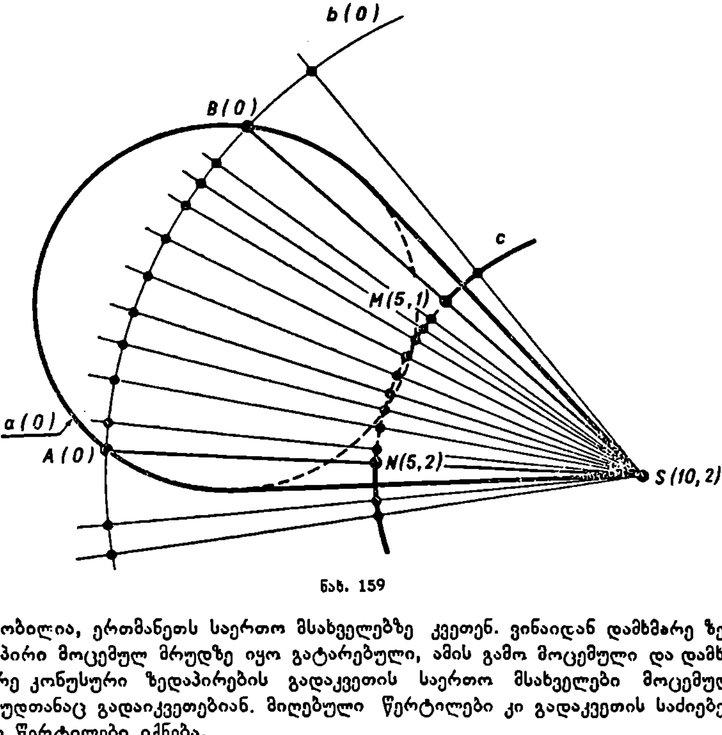
ნება, K და L წერტილები კი — ამ დიამეტრის სფეროს ზედაპირთან შეხვედრის წერტილები.

შევნიშნოთ, რომ დასმულ ამოცანას ორი პასუხი გააჩნია, ე. ი. საძიებელი სიბრტყე მოცემულ სფეროს შეიძლება შეეხოს როგორც K, ასევე L წერტილში. ავირჩიოთ, მაგალითად, L. L_1 წერტილში ავაგოთ ეკვატორის მხები (t). t მხები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც საძიებელი სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის ხაზის შეთავსება ეკვატორის დონის სიბრტყესთან, რომლის გეგმილი ამავე სიბრტყეზე b სწორ ხაზს დაემთხვევა. აქედან იოლად ავაგებთ t მხების ეკვატორულ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის გეგმილს — $A(10)$.

ამ წერტილზე გაივლის საძიებელი სიბრტყის (Θ) ერთ-ერთი თარაზულა მოცემული სიბრტყის (P) თარაზულების პარალელურად. P და Θ სიბრტყეების პარალელობის გამო მათი ინტერვალები ტოლია და ვარდნილობის მიმართულებანი თანხვდენილი.

4. მრუდი ზედაპირის გადაკვეთა მრუდი ხაზით

მოცემულია დახრილი წრიული კონუსი და C მრუდი (ნახ. 159). კონუსის ზედაპირის მოცემული მრუდით გადაკვეთის წერტილების ასაგებად შეგვიძლია ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი მოსაზრებით: მოცემული მრუდე ხაზი მივიღოთ ისეთი კონუსის მიმმართველად, რომლის წვეროც მოცემული კონუსის წვეროსთან იქნება შეთავსებული. ასეთი კონუსური ზედაპირები, როგორც



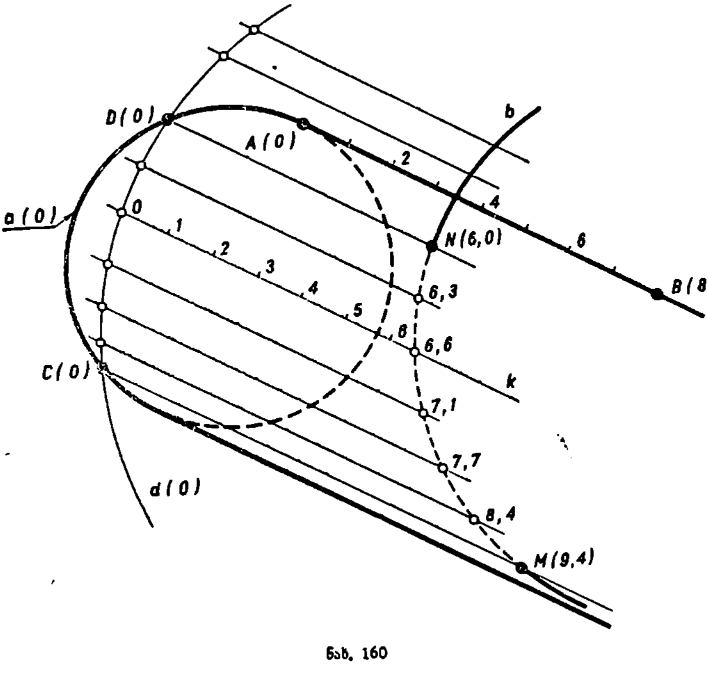
ნახ. 159

ცნობილია, ერთმანეთს საერთო მსახველებზე კვეთენ. ვინაიდან დამხმარე ზედაპირი მოცემულ მრუდზე იყო გატარებული, ამის გამო მოცემული და დამხმარე კონუსური ზედაპირების გადაკვეთის საერთო მსახველები მოცემულ მრუდთანაც გადაიკვეთებიან. მიღებული წერტილები კი გადაკვეთის საძიებელი წერტილები იქნება.

c მრუდზე ავიღოთ წერტილების რიგი და თითოეული მათგანი კონუსის წვეროსთან შევაერთოთ. შემაერთებელი სწორი ხაზები დამხმარე კონუსური ზედაპირის მსახველებად მივიღოთ. თითოეული ასეთი მსახველის გრადუირებით ყოველ მათგანზე დავნიშნოთ მოცემული კონუსის a მიმმართველის დონის წერტილები, ხოლო ეს წერტილები შევაერთოთ b მრუდით. b მრუდის გადაკვეთა a მიმმართველთან მოგვცემს A და B წერტილებს. ამ წერტილების S წვეროსთან შეერთებით მივიღებთ მოცემული და დამხმარე კონუსუ-

რი ზედაპირების საერთო მსახველებს (SA და SB). ამ მსახველების გადაკვეთით c მრუდთან მივიღებთ M და N საძიებელ წერტილებს.

ახლა განვიხილოთ ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთა მრუდე ხაზით (ნახ. 160). ამ შემთხვევაში, მოცემულ მრუდზე გავატაროთ ისეთი დამხმარე ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველები მოცემული ზედაპირის მსახველების პარალელური იქნება. დამხმარე და მოცემული ზედაპირები, საერთო მსახველებზე გადაიკვეთებიან. ამ მსახველების მოცემულ მრუდთან გადაკვეთით ვიპოვით საძიებელ M და N წერტილებს. საერთო მსახველების ასაგე-



ნახ. 160

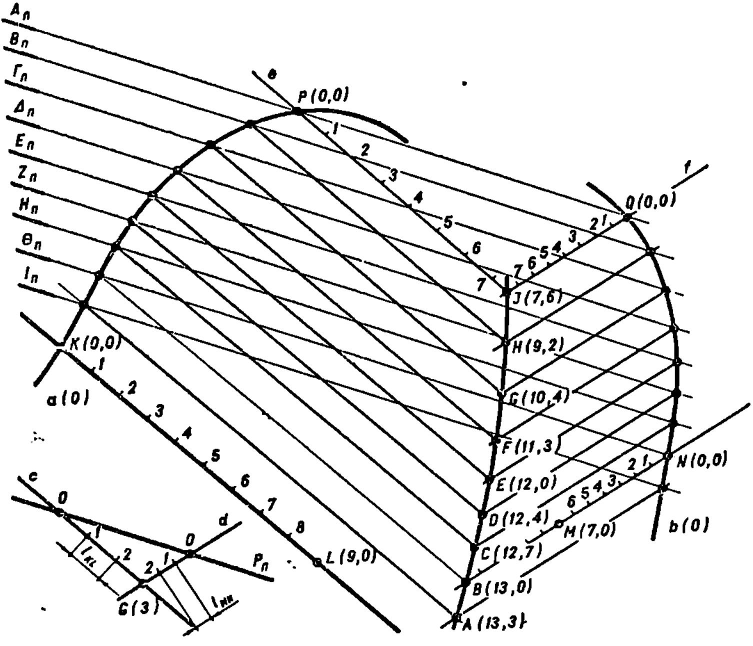
ბად a მიმმართველის დონის სიბრტყეში ჯავაგოთ d მრუდი, რომელიც დამხმარე ზედაპირის მსახველებზე აღებული a მრუდის დონის ნიშნულებიანი წერტილების გეომეტრიული ადგილი იქნება. a და d მრუდების გადაკვეთის C და D წერტილებში სხვა მსახველების პარალელურად გამავალი სწორი ხაზები მოცემული და დამხმარე ცილინდრული ზედაპირების საერთო მსახველები იქნება, ხოლო მოცემულ მრუდთან (b) მათი გადაკვეთის წერტილები — ამოცანის პასუხი.

5. მრუდე ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთა

განვიხილოთ ცილინდრული ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგების მაგალითი (ნახ. 161).

ვთქვათ, მოცემულია ორი ცილინდრული ზედაპირი. თითოეული მათგანი განსაზღვრულია მიმმართველითა და მსახველით. მათი ურთიერთგადაკვეთის ხაზის ასაგებად გამოვიყენოთ ორივე

ცილინდრული ზედაპირის მსახველებისადმი პარალელური დამხმარე სიბრტყეები. ასეთი სიბრტყეების გამოყენება შესაძლებელია ძირითადად ორ შემთხვევაში: 1) როდესაც მოცემული ზედაპირების მიმმართველები მოთავსებულია ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე და 2) როდესაც ეს მიმმართველები დონის მრუდ ხაზებს წარმოადგენს. აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ ეს პირობები დაცული არ არის, ე. ი. მოცემული ცილინდრული ზედაპირები (ერთი ან ორივე) განსაზღვრულია მსახველითა და სივრცითი მრუდე მიმმართველით, დასმული



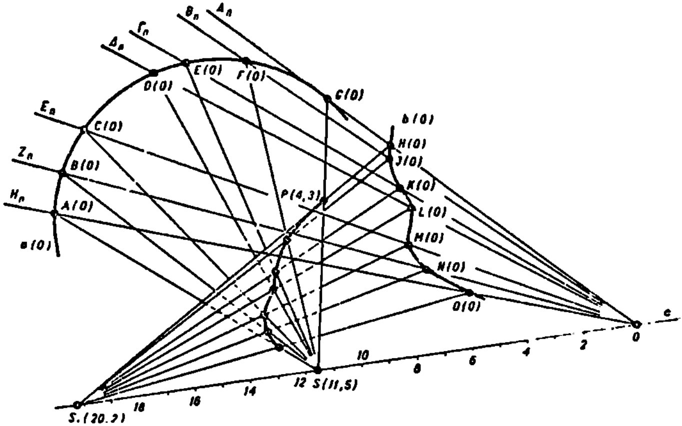
ნახ. 161

ამოცანის გადაწყვეტა მაინც შეიძლება მსახველების პარალელური სიბრტყეების გამოყენებით. სახელდობრ, ასეთ შემთხვევაში საჭიროა მოცემული მიმმართველის წერტილებზე ავაგოთ მსახველების რიგი და განვსაზღვროთ თითოეულის კვალი (ნულოვანი წერტილი). ამ კვალების შემაერთებელი მრუდის საშუალებით ამოცანას დავიყვანთ პირველ შემთხვევამდე. შეიძლება აგრეთვე ზედაპირის მსახველების ერთნაირი დონის წერტილების შემაერთებელი მრუდის გამოყენებაც (მეორე შემთხვევა).

დავუბრუნდეთ ისევ 161-ე ნახაზს. ნებისმიერ წერტილზე (მაგ., $G(3)$) გავატაროთ ორი სწორი ხაზი (c და d) ისე, რომ ერთი მათგანი ერთი ზედაპირის მსახველების, ხოლო მეორე — მეორე ზედაპირის მსახველების პარალელური იყოს ($c \parallel KL$ და $d \parallel MN$). მსახველებთან პარალელობის დაცვით ეს ხაზები დავაგრადუიროთ. ნულოვანნიშნულიანი წერტილების შემაერთებელი

სწორი ხაზი c და d ურთიერთგადამკვეთილი სწორი ხაზებით განსაზღვრული P სიბრტყის P_{Π} კვალი იქნება. ამ კვალის პარალელური ნებისმიერი ხაზი მოცემული ზედაპირების მსახველების პარალელური სიბრტყის კვალად შეგვიძლია მივიღოთ. გავატაროთ P_{Π} კვალის პარალელური ხაზები, ანუ ორივე ზედაპირის მსახველებისადმი პარალელური სიბრტყეების კვალები A_{Π}, B_{Π}, Γ_{Π}... ისე, რომ მათ გადაკვეთონ მოცემული a და b მიმმართველები. გადაკვეთის წერტილებში გავატაროთ დამხმარე მსახველები, ანუ აღებული სიბრტყით მოცემული ცილინდრული ზედაპირების გადაკვეთის ხაზები. ერთი და იმავე სიბრტყით მიღებული მსახველების გადაკვეთის წერტილი საძიებელი გადაკვეთის მრუდის ერთ-ერთი წერტილი იქნება. განვიხილოთ, მაგალითად, J წერტილის აგება და მისი ნიშნულის გამოთვლა: A_{Π} კვალი a და b მიმმართველებს P და Q წერტილებში კვეთს. ამ წერტილებში გამავალი e და f მსახველების გადაკვეთით მიღებულია J წერტილი, ხოლო ამავე მსახველების გრადუირებით კი — J წერტილის ნიშნული (7,6).

162-ე ნახაზზე ნაჩვენებია კონუსური ზედაპირების განკვეთის ხაზის აგება. აღებულ შემთხვევაში თითოეული კონუსური ზედაპირი აქ მოცემულია



ნახ 162

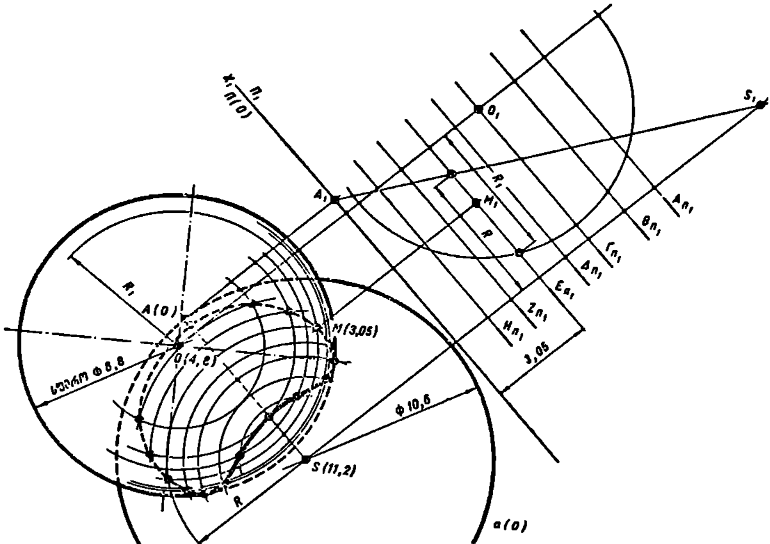
მიმმართველითა და წვეროთი. საძიებელი განკვეთის მრუდის წერტილები კი აგებულია მათი წვეროების შემაერთებელ სწორ ხაზზე (c) გამავალი სიბრტყეების გამოყენებით. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ერთ-ერთი ასეთი წერტილის აგება:

დავაგრადუიროთ SS_1 სწორი ხაზი და მასზე განვსაზღვროთ მოცემული ზედაპირების მიმმართველების დონის ნიშნულიანი წერტილი (აღებულ შემთხვევაში — O). უკანასკნელზე გავატაროთ სწორი ხაზი, რომელიც აღებულ შემთხვევაში შეიძლება განვიხილოთ როგორც დამხმარე A სიბრტყის კვალი. ეს კვალი ორივე მიმმართველს G და H წერტილებში გადაკვეთს. მიღებული წერტილები შევუერთოთ შესაბამის წვეროებს. SG და S_1H მსახველები ერთი

და იმავე A სიბრტყეშია მოთავსებული, მათი გადაკვეთის P წერტილი კი მოცემულ ორივე ზედაპირს ეკუთვნის.

ანალოგიურადაა განსაზღვრული ასაგები მრუდის დანარჩენი წერტილები. ხილვადობის პირობითობა დაცულია ჩვენთვის ცნობილი წესით.

დავუშვათ, რომ მოცემული ზედაპირების მიმმართველები არ არის მოთავსებული არც გეგმილთსიბრტყეზე და არც ერთი დონის რაიმე სხვა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევებში საჭიროა ავაგოთ ზედაპირის დამხმარე მსახველები და დავაგრადუიროთ. დავნიშნოთ ერთნაირნიშნულიანი წერტილები და შევაერთოთ მრუდე ხაზებით; ვიპოვოთ ამავე დონის წერტილი წვეროების შემაერთებელ ხაზზეც. ამის შემდეგ, თუ ზედაპირების მოცემული მიმმართველების ნაცვლად ჩვენ მიერ აგებულ ერთნაირნიშნულებიანი წერტილების შემაერთებელ მრუდებს გამოვიყენებთ, მოცემული ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის ამოცანა განხილულ შემთხვევამდე დაიყვანება.



ნახ. 163

როგორც ვხედავთ, ორი ცილინდრის ურთიერთგადაკვეთის მრუდის ასაგებად ჩვენ გამოვიყენეთ ორივე ცილინდრის მსახველების პარალელური სიბრტყეები; კონუსური ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის მრუდის ასაგებად კი — კონუსების წვეროებზე გამავალი სიბრტყეები. შევნიშნოთ, რომ თუ ამოცანა ითვალისწინებს ცილინდრული და კონუსური ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთას, მაშინ დამხმარე სიბრტყეებად საჭიროა გამოვიყენოთ ცილინდრის მსახველების პარალელური და კონუსის წვეროზე გამავალი სიბრტყეები.

განვიხილოთ სფეროსა და გეგმილთსიბრტყეზე ფუძით დადებული მართი წრიული კონუსის ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგება (ნახ. 163).

სფერო მოცემულია ცენტრით ($O(4,8)$) და ეკვატორის დიამეტრით (8,8). კონუსი მოცემულია ფუძის წრეხაზით ($a(O)$) და წვეროთი ($S(1,2)$). განკვეთის მრუდის ასაგებად გამოვიყენოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე Π_1 და ავაგოთ მოცემული სხეულების გეგმილები X_1 სისტემაში. წარმოვიდგინოთ, რომ სფეროც და კონუსიც გადაკვეთილია ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელური A, B, Γ, E,... სიბრტყეებით. ეს სიბრტყეები მოცემულ ზედაპირებს გარკვეული რადიუსის წრეხაზებზე გადაკვეთს. ერთსა და იმავე სიბრტყეში მოთავსებული კვეთები ურთიერთკვეთაში საძიებელი მრუდის წერტილებს მოგვცემენ. მაგალითად, E სიბრტყე სფეროს R_1 რადიუსიან პარალელზე, ხოლო კონუსს R რადიუსიან წრეხაზზე გადაკვეთს. ამ პარალელისა და წრეხაზის გადაკვეთა მოგვცემს M წერტილს, რომელიც ორივე ზედაპირზე იქნება მოთავსებული. M წერტილის ნიშნული M_1 გეგმილის X_1 ღერძიდან დაშორების გაზომვით განისაზღვრება. M წერტილის ანალოგიურად განისაზღვრება საძიებელი მრუდის დანარჩენი წერტილებიც.

6. მრუდი ზედაპირების განფენა სიბრტყეზე

როგორც მრუდი ზედაპირების კლასიფიკაციიდან დავინახეთ არსებობს ე. წ. განფენადი და განუფენადი ზედაპირები. განფენადი ეწოდება ისეთ ზედაპირებს, რომელიც შეიძლება გავშალოთ და დაუმახინჯებლად შევუთავსოთ სიბრტყეს. განუფენადი ზედაპირები სიბრტყეზე გაშლის დროს განიცდიან დამახინჯებას.

ჩვენ მიერ განხილული ცილინდრული და კონუსური ზედაპირები საერთოდ, განფენადი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნიან, მაგრამ პრაქტიკაში ხშირად განფენის მიახლოებით ხერხს მიმართავენ.

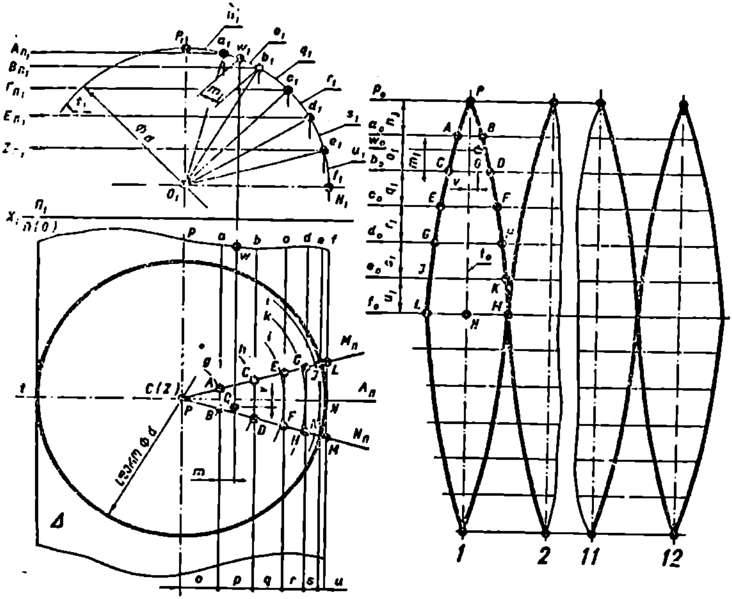
ცილინდრის ზედაპირის სიბრტყეზე მიახლოებითი განფენისათვის საჭიროა მის ფუძეზე ავიღოთ წერტილების რიგი და თანმიმდევრობით შევაერთოთ ქორდებით. ამავე წერტილებიდან გავატაროთ დამხმარე მსახველები. ამით ჩვენ მივიღებთ ცილინდრში ჩახაზულ წახნაგოვან ზედაპირს — პრიზმას და, ფაქტიურად, მის განფენას მოვახდენთ ჩვენთვის ცნობილი წესით. ასევე მოვიქცევით კონუსის ზედაპირის მიახლოებითი განფენისთვისაც. მის ფუძეზე ავიღებთ წერტილებს და შევაერთებთ ქორდებით. ამავე წერტილებს შევაერთებთ წვეროსთან. ამრიგად, მივიღებთ კონუსში ჩახაზულ პირამიდას და, ფაქტიურად, მის განფენას მოვახდენთ.

როგორც ვხედავთ, ცილინდრისა და კონუსის ზედაპირის მიახლოებითი განფენა სიბრტყეზე შესაბამისად პრიზმისა და პირამიდის ზედაპირების განფენის ანალოგიურია და ამიტომ მათ არ განვიხილავთ.

განვიხილოთ სფეროს ზედაპირის განფენა სიბრტყეზე. სფერო, ისევე, როგორც ყველა სხვა მრუდმსახველიანი ზედაპირი, განუფენადი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის. განვიხილოთ სფეროს ზედაპირის სიბრტყეზე მიახლოებით განფენის ერთ-ერთი ვარიანტი (ნახ. 164).

მივიღოთ, რომ სფერო მერიდიანების საშუალებით დაყოფილია რამდენიმე ტოლ ელემენტად (მაგ., თორმეტად). განფენის სიზუსტე დამოკიდებულია ასეთი ელემენტების რაოდენობაზე.

შევარჩიოთ M და N მერიდიანულ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული ელემენტის სიბრტყესთან შეთავსება. სახელდობრ, ავიღოთ მისი მხოლოდ ის ნახევარი, რომელიც ზედა ნახევარსფეროზეა მოთავსებული. M და N სიბრტყეების შუაში გავატაროთ Λ სიბრტყე. იგი სფეროს t მერიდიანზე გადა-



ნახ. 164

კვეთს. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში Δ მერიდიანულმა სიბრტყემ დონის სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს. ავაგოთ t მერიდიანის ახალი გეგმილი — t_1.

წარმოვიდგინოთ, რომ სფეროს ზედაპირზე შემოხვეულია Δ ცილინდრული ზედაპირი ისე, რომ უკანასკნელი სფეროს ზედაპირს t მერიდიანზე ეხება. ასეთი ცილინდრის გეგმილი X_1 სიბრტყეში t მერიდიანის t_1 გეგმილს დაემთხვევა. P_1N_1 რკალი დავყოთ რამდენიმე ტოლ ნაწილად (მაგალითად, ექვსად — n_1, o_1, q_1,...). დაყოფის წერტილებზე გავატაროთ A, B, $Г$,... $П(O)$-ის მიმართ დონის სიბრტყეები. ასეთი სიბრტყეები Δ ცილინდრულ ზედაპირს a, b, c,... მსახველებზე გადაკვეთს. იგივე სიბრტყეები სფერული ზედაპირის კვეთაში g, h, i, k,... პარალელებს მოგვცემს. მივიღოთ შემდეგი დაშვება — ვთქვათ, g პარალელის ის მონაკვეთი, რომელიც M და N მერიდიანულ სიბრტყეებს შორისაა მოთავსებული, გავუტოლოთ g პარალელის მხები მსახველის ამავე მერიდიანულ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ AB სწორ მონაკვეთს. ასევე მოვიქცეთ დანარჩენი პარალელების იმ მონაკვეთების მიმართაც, რომლებიც M და N მერიდიანულ სიბრტყეებს შორის არიან მოთავსებული. ამ დაშვებით ჩვენ სფეროს ზედაპირზე აღებულ განსახილველ ელემენტს Δ ცილინდრულ ზედაპირთან შევათავსებთ და დასმულ ამოცანას ასეთი ცილინდრული ზედაპირის განფენამდე დავიყვანთ.

გავატაროთ f_0 თარაზული სწორი ხაზი (Δ ცილინდრის ერთ-ერთი განაპირა მსახველი) და ნებისმიერად დავნიშნოთ N წერტილი. ამ წერტილზე

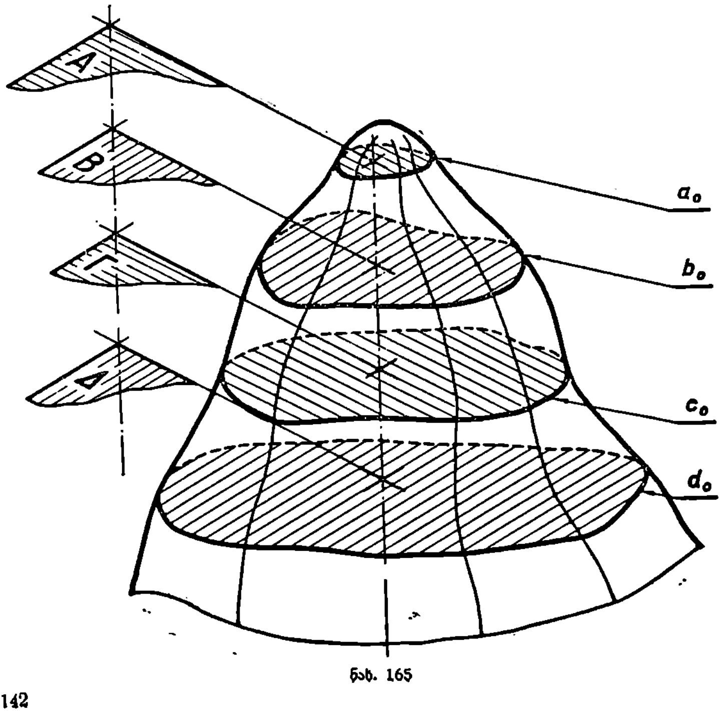
f სწორის მართობულად გავატაროთ t_0 სწორი (t მერიდიანის განშლა) და დავნიშნოთ მასზე P წერტილი ($PN = u_1 + s_1 + r_1 + y_1 + o_1 + n_1$. ანუ $PN = \pi d:4$). PN მონაკვეთი დავყოთ იმდენივე ტოლ ნაწილად, რამდენადაც დაყოფილია მისი შესაბამისი P_1N_1 რკალი. დაყოფის წერტილებში გატარებული e_0, $d_0, \ldots$ თარაზული სწორი ხაზები Δ ცილინდრის მსახველები იქნება. ჩვენთვის ცნობილია, რომ, მაგალითად, A და B წერტილები a მსახველის კუთვნილი წერტილებია და მათ შორის მანძილი თავისი ნატურალური სიდიდით ძირითად გეგმილთსიბრტყეზეა დაგეგმილებული. ასე, რომ A და B წერტილების განფენაზე გადატანისათვის საკმარისია a_0 მსახველზე დავნიშნოთ AB მონაკვეთი, ისე, რომ მისი A და B ბოლოები t_0 სწორის მიმართ სიმეტრიულად იყოს განლაგებული. ასეთივე გზით განფენაზე გადავიტანოთ C, D, E, $F, \ldots$ წერტილები. თუ ამ წერტილებს თანამიმდევრულად მრუდებით შევაერთებთ, მივიღებთ PLM ელემენტის შეთავსებას სიბრტყესთან. ავაგოთ PLM ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი f_0 მსახველის მიმართ. ამით ჩვენ მივიღებთ M და N მერიდიანულ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული ერთი მთლიანი ელემენტის განფენას. რადგანაც სფერო ჩვენ მიერ თავიდან 12 ტოლ ნაწილად იყო დაყოფილი, ამიტომ მისი განფენაც 12 ასეთი ელემენტისაგან იქნება შედგენილი.

განვიხილოთ სფეროს ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი Q წერტილის გადატანა განფენაზე. ამისათვის საკმარისია აღებულ წერტილზე გავატაროთ w დამხმარე მსახველი და Q წერტილთან ერთად გადავიტანოთ განფენაზე. ამისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ორი მონაკვეთი — m_1 და v. ერთი მათგანი (m_1) აიღება X_1 სისტემიდან, ხოლო მეორე (v) — ძირითადი გეგმილთსიბრტყიდან.

ტოპოგრაფიული ზედაპირი

§ 15. ტოპოგრაფიული ზედაპირი და მისი გეგმილის აგება

1. ტოპოგრაფიული ზედაპირი წინა თავში, როდესაც მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაციას ვიხილავდით, ავირჩიეთ ზედაპირების ის კლასიფიკაცია, რომელიც დამყარებულია მსახველების ფორმაზე და მათ ნაირგვაროვან მოძრაობაზე. ვნახეთ, რომ არსებობს ზედაპირების ერთი



ნახ. 165

ჯგუფი, რომელთა მსახველების ფორმა და მოძრაობა შემთხვევითია. ასეთ ზედაპირებს, ვინაიდან მათი გამოსახვა ძირითადად მხოლოდ გრაფიკული ხერხების საშუალებით შეიძლება მხაზველობით გეომეტრიაში გ რ ა ფ ი კ უ ლ ზ ე დ ა პ ი რ ე ბ ს უწოდებენ. ამ ზედაპირებს უმეტეს წილად ტოპოგრაფიაში იყენებენ. ამის გამო გრაფიკული ზედაპირები ლიტერატურაში ტოპოგრაფიული ზედაპირების სახელითაა ცნობილი.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის წარმოქმნა ასეთნაირად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ (ნახ. 165): ავიღოთ ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებზე (A, B, Γ, Δ,...) მდებარე a_0, b_0, c_0, d_0,... შემთხვევითი ფორმის მრუდები. თუ ეს მრუდები ერთმანეთისაგან საკმაოდ მცირე მანძილით იქნებიან დაშორებული, მაშინ ამ მრუდების ერთობლიობა განსაზღვრავს შემთხვევითი ფორმის ზედაპირს, რომელსაც გრაფიკული ანუ ტოპოგრაფიული ზედაპირი ეწოდება.

მხაზველობითი გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ზედაპირი ზოგჯერ შეიძლება მოცემული იყოს ამ ზედაპირზე მდებარე ხაზების გარკვეული ერთობლიობით. ასეთი ხაზების ერთობლიობას ზედაპირის კარკასი ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ კარკასით მოცემული ზედაპირი მთლიანად განსაზღვრულად არ ჩაითვლება, რადგანაც შესაძლებელია ერთმანეთისაგან რამდენადმე განსხვავებულ ზედაპირებს ერთნაირი კარკასი ჰქონდეს. ამიტომ, ზედაპირის მოცემის ასეთი ხერხი ალებულ ზედაპირს მხოლოდ მიახლოებით განსაზღვრავს. მიუხედავად ამისა, კარკასის ხერხი ტოპოგრაფიული ზედაპირის მოცემის ყველაზე გამართლებული და გავრცელებული ვარიანტია.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამოხაზვის დროს კარკასის ხაზებად ზემოხსენებული a_0, b_0, c_0,... მრუდები მიიღება.

2. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმილის აგება

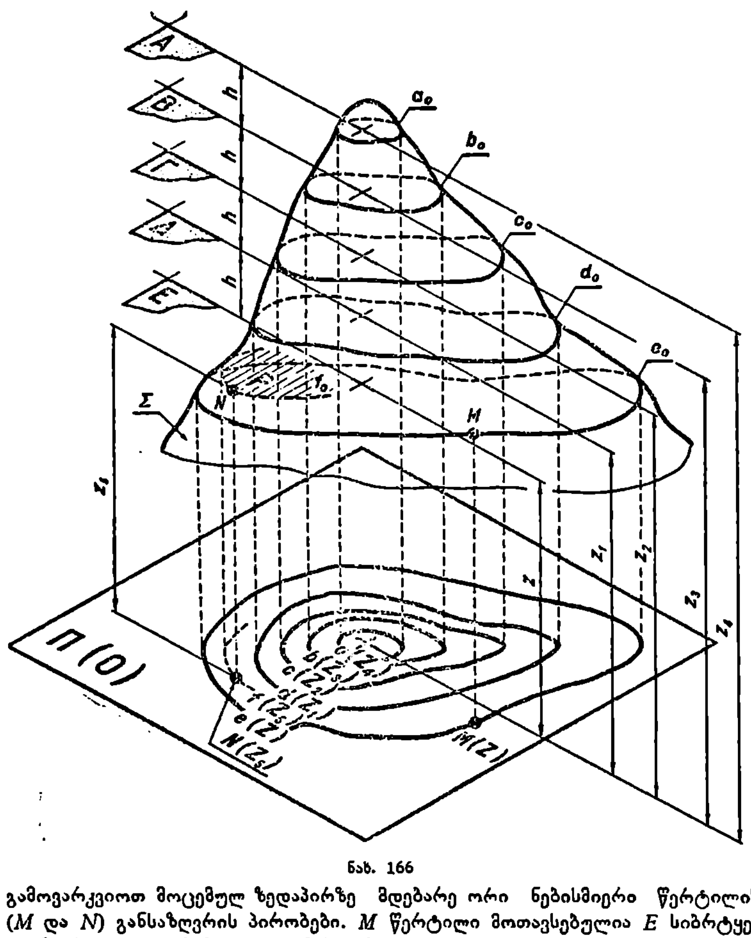
ვთქვათ მოცემულია რაიმე Σ ტოპოგრაფიული ზედაპირი (ნახ. 166). ამ ზედაპირის გეგმილის ასაგებად წარმოვიდგინოთ, რომ იგი გადაკვეთილია ძირითადი გეგმილთსიბრტყის პარალელური და ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით (h) დაშორებული სიბრტყეებით. ყოველი სიბრტყე ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთაში მოგვცემს მრუდს, რომლის თითოეული წერტილის დაშორება ძირითადი გეგმილთსიბრტყიდან ერთნაირი იქნება. ამ მრუდებს ი ზ ო ჰ ი ფ ს ე ბ ი[1] ეწოდება.

როცა ძირითად გეგმილთსიბრტყედ XOY საკოორდინატო სიბრტყეა მიღებული, მაშინ ასეთი იზოჰიფსები თარაზულებს წარმოადგენს. თუ ძირითად გეგმილთსიბრტყედ მიღებულია XOZ ან YOZ საკოორდინატო სიბრტყეები, იზოჰიფსები განიხილებიან როგორც შვეულები.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმილის აგება ნიშნავს ამ ზედაპირის მკვეთ პარალელურ სიბრტყეებში მოთავსებული კვეთების ანუ იზოჰიფსების დაგეგმილებას. აქ გავიხსენოთ, რომ ბრტყელი მრუდის გეგმილის ასაგებად საკმარისია ნახაზზე მოცემული იყოს ამ მრუდის მახასიათებელი წერტილების რიგი.

როგორც ვიცით, ზედაპირი განსაზღვრულია, თუ ნახაზზე შესაძლებელია განისაზღვროს ამ ზედაპირის ყოველი წერტილი. ამასთან დაკავშირებით

[1] იზოჰიფსი — ბერძნული სიტყვაა და ქართულად ერთნაირი სიმაღლის წერტილების შემაერთებელ ხაზს ნიშნავს,



ნახ. 166

გამოვარკვიოთ მოცემულ ზედაპირზე მდებარე ორი ნებისმიერი წერტილის (M და N) განსაზღვრის პირობები. M წერტილი მოთავსებულია E სიბრტყე-ში მდებარე e_0 თარაზულაზე. ამის გამო მისი გეგმილი მოთავსებული იქნება ამავე თარაზულას გეგმილზე, ხოლო ნიშნული განისაზღვრება თარაზულას დონის მიხედვით. N წერტილი არ ემთხვევა არცერთ მკვეთ სიბრტყეს. ამიტომ ამ წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის გავატაროთ მასზე დამატებითი მკვეთი სიბრტყე (P). ავაგოთ ამის შედეგად მიღებული დამატებითი თარაზულას (f_0) გეგმილი ($f(Z_5)$). ამის შემდეგ N წერტილის მდებარეობა M წერტილის ანალოგიურად იქნება განსაზღვრული.

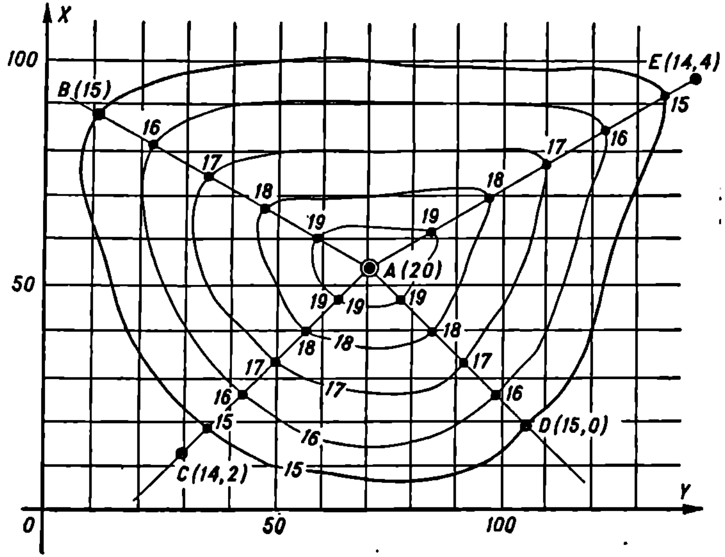
ჩვენ დავუშვით, რომ იზოჰიფსები ბრტყელი მრუდებია. ეს დაშვება, მაგალითად, დედამიწის რელიეფის გამოხაზვის შემთხვევაში, მხოლოდ მცირე უბნებისათვის ვრცელდება. დედამიწის ზედაპირზე მდებარე წერტილების აბ-

სოლუტური სიმაღლეები ზღვის დონიდან განისაზღვრება. ამიტომ დედამიწის რელიეფის დიდი უბნების (როცა უბნის სიგრძე-სიგანე 20 კმ-ს აღემატება) გამოსახვის დროს იზოჰიფსები სივრცით მრუდებს წარმოადგენს.

3. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამოსახვა იზოჰიფსებით

პრაქტიკულად ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმაზე გამოსახაზავად საჭიროა წინასწარ ცნობილი იყოს გამოსახაზავი ზედაპირის მახასიათებელი წერტილების რიგი. სამთო საქმეში ამ წერტილების კოორდინატები განისაზღვრება შესაბამისი საველე და კამერალური სამუშაოების შესრულების შედეგად. ასეთი სახის სამუშაოებთან დაკავშირებული საკითხები შეისწავლება გეოდეზიაში და სამარკშეიდერო საქმეში.

ვთქვათ, ცნობილია რაიმე ტოპოგრაფიული ზედაპირის მახასიათებელი წერტილების (A, B, C, D და E) კოორდინატები (ნახ. 167). მათი საშუალე-



ნახ. 167

ბით მოიძებნება ამ წერტილების გეგმილები. ამით ნახაზზე გრაფიკულად განისაზღვრება ტოპოგრაფიული ზედაპირი. მეტი თვალსაჩინოებისა და რიგი ამოცანების ამოხსნისათვის აუცილებელი პირობების შექმნის მიზნით, ჩვეულებრივ, აგებენ მოცემული ზედაპირის იზოჰიფსებს. ამისათვის მოცემულ წერტილებს აერთებენ სწორ ხაზებით, აგრადუირებენ ამ ხაზებს და ერთნაირნიშნულიან წერტილებს აერთებენ მდოვრე მრუდე ხაზებით. ეს მრუდები მოცემული ზედაპირის იზოჰიფსებს ანუ თარაზულებს (შვეულებს) წარმოადგენს.

შევნიშნოთ, რომ გეგმაზე წინასწარ მოცემული წერტილების ნებისმიერი შეერთებანი, რასაკვირველია, ვარგისად ვერ ჩაითვლება. ამასთან დაკავშირებით არსებობს იზოჰიფსების აგების სხვადასხვა ხერხები. ეს ხერხები გეოდეზიისა და სამარკშეიდერო საქმის შესწავლის ერთ-ერთი საკითხია და

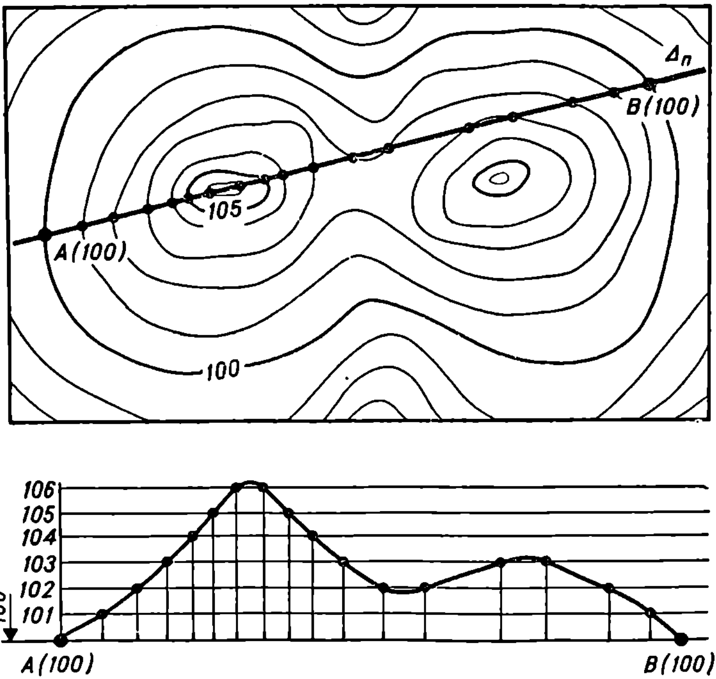
ამიტომ მათი აღწერა შესაბამის სახელმძღვანელოებშია დაწვრილებით გადმოცემული (იხ. 1) А. С. Чеботарев — Геодезия. ч. I, 1955, გვ. 90 — 98; 2) П. А. Рыжов — Проекции применяемые в геолого-маркшейдерском деле, 1951, გვ. 51 — 55).

§16. ამოცანები ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე

1. ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილის აგება

რაიმე მიმართულებით ტოპოგრაფიული ზედაპირის მკაფიო დახასიათებისათვის საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირად მიმართავენ ასეთი ზედაპირის პროფილის აგებას. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მაგეგმილებელი სიბრტყით გადაკვეთის ხაზს ამ ზედაპირის პროფილი ეწოდება.

ვთქვათ, საჭიროა მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილის აგება AB მიმართულებით (ნახ. 168). წარმოვიდგინოთ, რომ AB ხაზზე გატარებულია რაიმე Δ მაგეგმილებელი სიბრტყე. დავნიშნოთ ამ სიბრტყის კვალის (Δ_{Π}) ზედაპირის თარაზულებთან გადაკვეთის ყველა წერტილი და მთლიანად ეს მონაკვეთი, დანიშნულ წერტილებთან ერთად, გადმოვიტანოთ ნახაზის თავისუფალ ადგილზე შეუცვლელად ან რაიმე მასშტაბის გამოყენე-

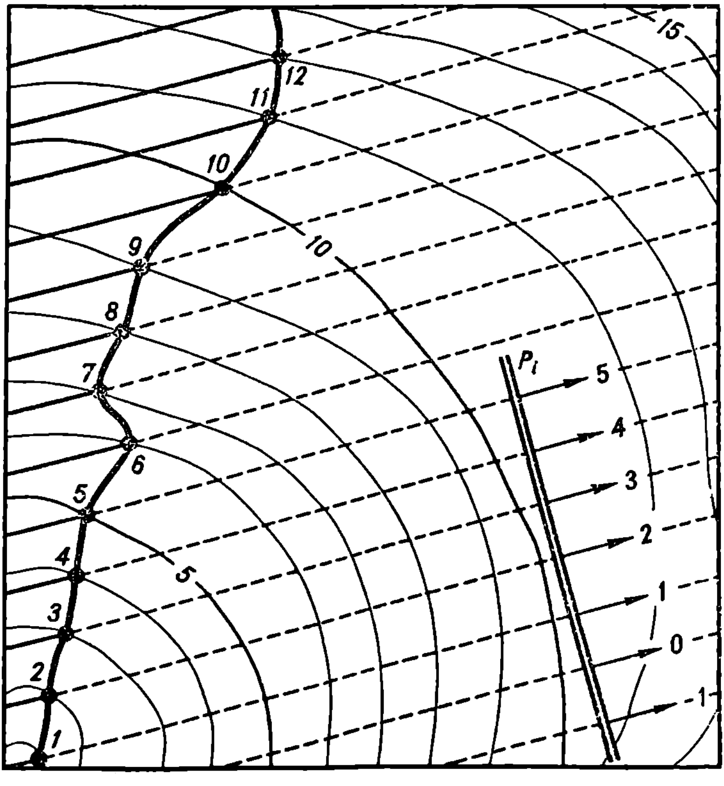


ნახ. 168

ბით, დანიშნული წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები და თითოეულ მათ-განზე გადავზომოთ შესაბამისი წერტილის დონის ნიშნული. ამ გადაზომვების დროს არ არის აუცილებელი გეგმის მასშტაბის გამოყენება. ზოგჯერ რეკომენდებულია გადასაზომი მონაკვეთებისათვის გამადიდებელი მასშტაბის ხმარება. მიღებული წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდე ხაზით. ეს მრუდი იქნება მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილი მოცემული AB მიმართულებით.

2. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა ზოგადი მდებარეობის სიბრტყით

ვთქვათ მოცემულია რაიმე ტოპოგრაფიული ზედაპირი და ზოგადი მდებარეობის სიბრტყე (P). ამ სიბრტყით მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთის ხაზი შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიბრტყისა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის ერთნაირნიშნულიანი თარაზულების გადაკვეთის წერტილების გეომეტრიული ადგილი (ნახ. 169). ამ ამოცანის გადა-

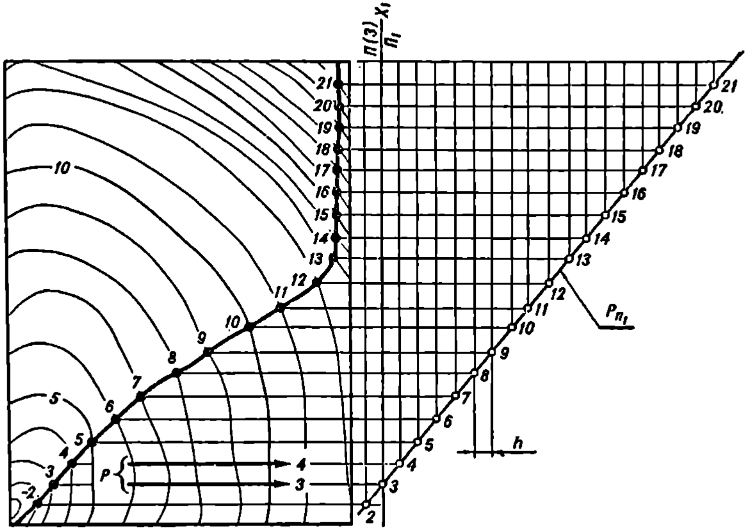


ნახ. 169

საწყვეტად საკმარისია ავაგოთ მოცემული სიბრტყის თარაზულები (მათი კვეთის სიმაღლე ტოლი უნდა იყოს ტოპოგრაფიული ზედაპირის თარაზულებისათვის მიღებული კვეთის სიმაღლის) და ერთნაირნიშნულებიანი თარაზულების გადაკვეთის წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდე ხაზით.

როგორც განხილული მაგალითიდან ჩანს, ერთსა და იმავე ნახაზზე ერთმანეთს ემთხვევა სიბრტყისა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის თარაზულები. გარდა ამისა, თუ გეგმაზე სხვა რაიმე ობიექტებიცაა გამოსახული, მაშინ დასმული ამოცანის ამოხსნა რიგ გრაფიკულ სიძნელეებს აწყდება. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ამოცანის გადაწყვეტის სხვა ვარიანტიც (ნახ. 170).

მოცემულია ზოგადი მდებარეობის P სიბრტყე (ორი თარაზულით) და ტოპოგრაფიული ზედაპირი. P სიბრტყის მართობულად შემოვიტანოთ ახალი



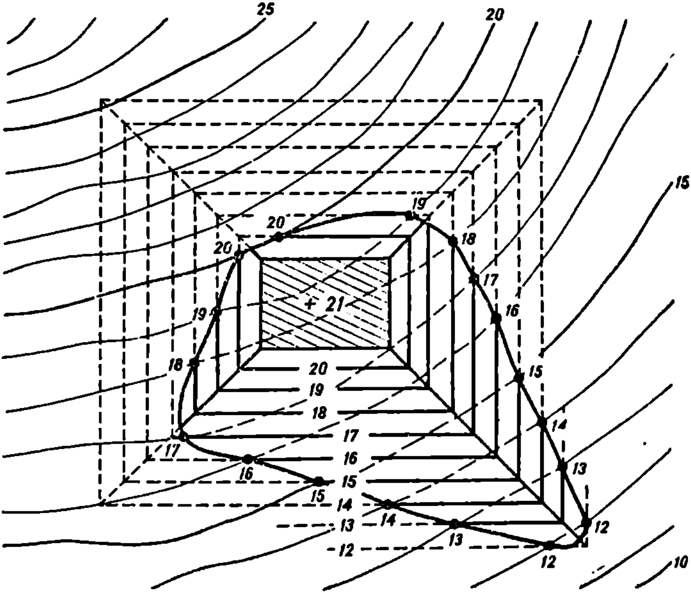
ნახ. 170

გეგმილთსიბრტყე (Π_1). ახალ სისტემაში მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის თარაზულები ურთიერთპარალელური და ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით (h) დაშორებული სწორი ხაზების სახით დაგეგმილდება. თითოეული ასეთი ხაზის გადაკვეთა P_{Π_1} კვალთან საძიებელი მრუდის ერთ-ერთი წერტილის გეგმილი იქნება X_1 სისტემაში. ასეთი გზით მიღებული წერტილები დავაბრუნოთ ძველ სისტემაში. ამ წერტილების შემაერთებელი მრუდი მოგვცემს ამოცანის პასუხს.

3. ტოპოგრაფიული და წახნაგოვანი ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთა

განვიხილოთ წაკვეთილი პირამიდისა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთის ხაზის აგება (ნახ. 171). ეს ამოცანა, თავის მხრივ, ტოპოგრაფიული ზედაპირის სიბრტყით გადაკვეთის ამოცანის ანალოგიურია. მოცემული პირამიდის წახნაგები წარმოვიდგინოთ როგორც ცალკეული სიბრტყეები და ავაგოთ ამ სიბრტყეების თარაზულები ისე, რომ კვეთის სი-

მაღლე მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის კვეთის სიმაღლის ტოლი იყოს. ამის შემდეგ დავნიშნოთ პირამიდის წახნაგებისა და ტოპოგრაფიული ზედა-



ნახ. 171

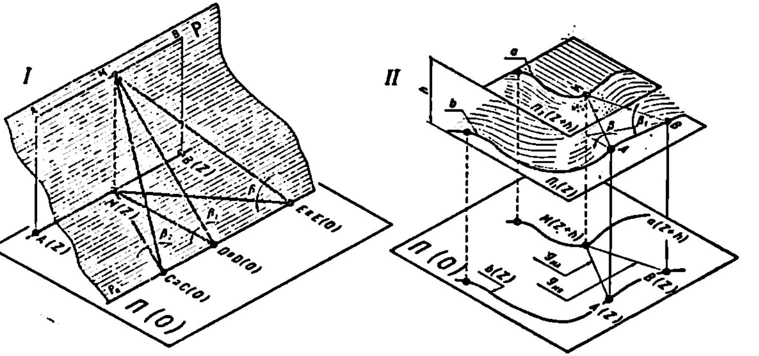
პირის ერთნაირნიშნულიანი თარაზულების გადაკვეთის წერტილები. ეს წერტილები თანმიმდევრულად შევაერთოთ მდოვრე მრუდით. მივიღებთ საძიებელ კვეთის ხაზს.

4. ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე მდებარე სწორი ხაზი

ვინაიდან ტოპოგრაფიული ზედაპირი არაკანონზომიერ მრუდ ზედაპირს წარმოადგენს, ამის გამო სწორი ხაზი ზოგად შემთხვევაში მას მხოლოდ მცირე უბანზე შეიძლება შეუთავსდეს.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის მცირე უბანი შეიძლება მივიღოთ სიბრტყედ. დახრილ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე M წერტილში (ნახ. 172-I) შესაძლებელია გავლებულ იქნეს ამავე სიბრტყეში მდებარე სწორი ხაზების უსასრულოდ დიდი რაოდენობა სხვადასხვანაირი დახრის კუთხეებით. მაგალითად, M წერტილზე გავლებულია P სიბრტყეში მდებარე MA, MC, MD და ME სწორი ხაზები და აგებულია მათი გეგმილები. როგორც ნახაზიდან ჩანს, C, D და E წერტილები მოთავსებულია ძირითად გეგმილთსიბრტყეზე და მათი სიმაღლე M წერტილისაგან Z ნიშნულითაა განსხვავებული. ეს განსხვავება აღვნიშნოთ h ასოთი ($h=Z$) და დავწეროთ ნახაზიდან გამომდინარე შემდეგი ფორმულები:

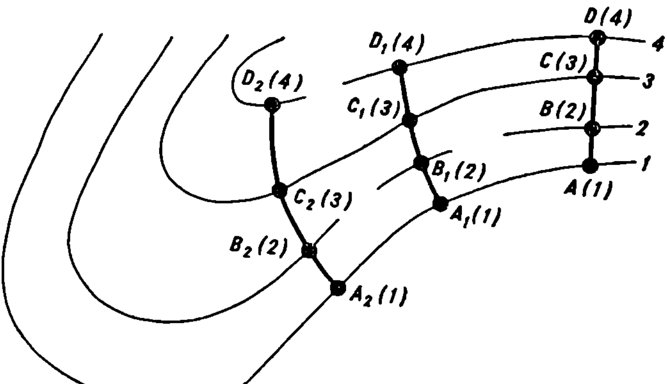
$$M(Z)\,E(O) = h \operatorname{ctg} \beta,$$
$$M(Z)\,D(O) = h \operatorname{ctg} \beta_1,$$
$$M(Z)\,C(O) = h \operatorname{ctg} \beta_2.$$



ნახ. 172

აქედან: $M(Z)E(O) : M(Z)D(O) : M(Z)C(O) = h \operatorname{ctg} \beta : h \operatorname{ctg} \beta_1 : h \operatorname{ctg} \beta_2$. რაც უფრო დიდია ქვედებული, მით მცირეა დახრის კუთხე და პირიქით. აღებულ შემთხვევაში უმცირესი ქვედებული და უდიდესი დახრის კუთხე (β_1) გააჩნია MD ხაზს. ჩვენთვის ცნობილია, რომ ასეთ ხაზს უდიდესი ვარდნილობის ხაზი ეწოდება. უდიდესი ვარდნილობის ხაზი და მისი გეგმილი სიბრტყის კვალის (P_Π) მართობულია ($M(Z)D(O) \perp P_\Pi$; $MD \perp P_\Pi$).

ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ორ თარაზულას შორის მოთავსებულ მცირე უბანს ხშირად აიგივებენ სიბრტყესთან. ვთქვათ მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირის ნაწილი (ნახ. 172-II), რომელიც ზემოდან და ქვემოდან ორი მეზობელი თარაზულათია შემოსაზღვრული. a თარაზულას M წერტილი შევაერთოთ b თარაზულას A და B წერტილებთან. გეგმის მიხედვით ჩვენ



ნახ. 173

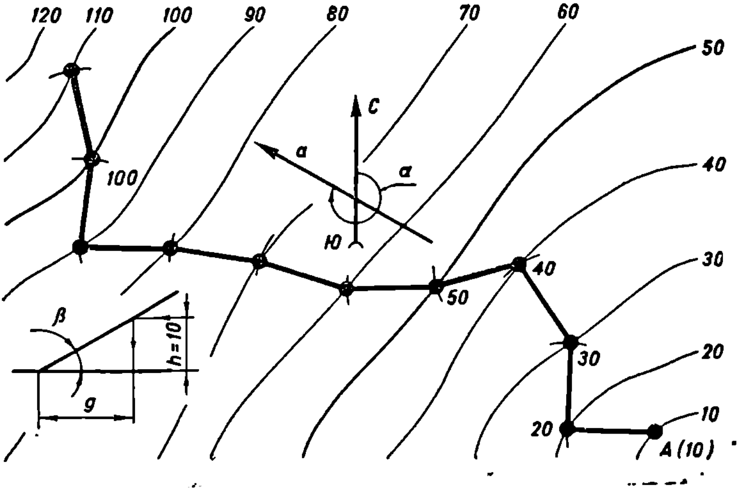
შეგვიძლია გრაფიკულად განვსაზღვროთ ასეთი მონაკვეთების ნამდვილი სიდიდეები და დახრის კუთხეები.

სწორი ხაზების იმ სიმრავლიდან, რომლებითაც შესაძლებელია a თარაზულას M წერტილი დაუკავშირდეს b თარაზულაზე აღებული წერტილების რიგს, MA მონაკვეთს ექნება უდიდესი დახრის კუთხე. ეს მონაკვეთი a და b თარაზულების მიმართულებათა მართობულია და წარმოადგენს უდიდესი ვარდნილობის ხაზს მოცემული ზედაპირის აღებულ ადგილზე. ამრიგად, უდიდესი ვარდნილობის ხაზის მიმართულება თარაზულების მიმართულების მართობულია. აქვე შევნიშნოთ, რომ ეს განმარტება ძალაშია მაშინ, როდესაც მოცემული ზედაპირის თარაზულები აღებულ ადგილზე ურთიერთპარალელურნი არიან. იმ შემთხვევებში, როდესაც თარაზულები ურთიერთპარალელურნი არ არიან, მაშინ უდიდესი ვარდნილობის ხაზის მიმართულება მრუდით გამოისახება. მაგალითად (ნახ. 173), $A(1)\,D(4)$ ხაზი თარაზულების მართობული სწორი ხაზია. რაც შეეხება A_1D_1 და A_2D_2 ხაზებს, ისინი წარმოადგენენ ისეთ უდიდესი ვარდნილობის ხაზებს, რომელთა მიმართულებაც მრუდით განისაზღვრება.

5. მოცემული ქანობის მქონე ტეხილი ხაზის აგება ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე

განვიხილოთ ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ისეთი ტეხილი ხაზის აგება, რომლის თითოეულ გვერდს წინასწარ მოცემული დახრის კუთხე ექნება (ნახ. 174).

ვთქვათ მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირი, ასაგები ტეხილის დახრის კუთხე (β), საწყისი წერტილი (A) და მიმართულება (α). გრაფიკულად განვსაზღვროთ ასაგები ტეხილის თითოეული გვერდის ქვედებული (g). ამ ქვედებულის ტოლი რადიუსით, A წერტილიდან შემოვხაზოთ რკალი მომდევნო თარაზულას გადაკვეთამდე და აღვნიშნოთ მიღებული წერტილი (20). შემდეგ ამ წერტილი-



ნახ. 174

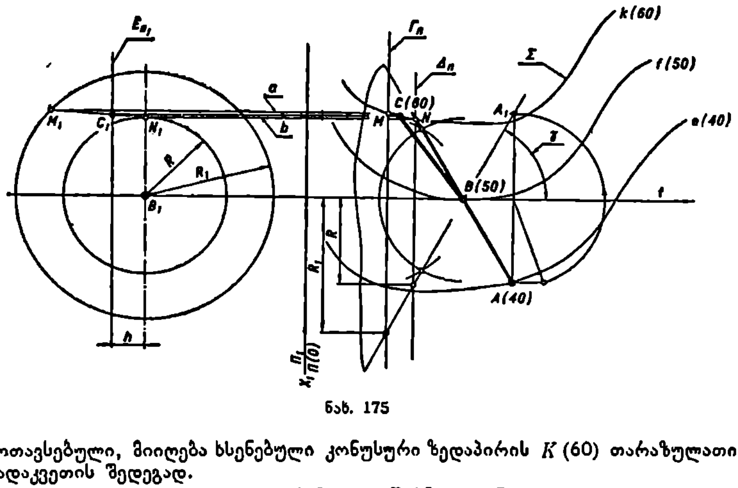
დან შემოვხაზოთ იგივე რადიუსიანი რკალი მომდევნო თარაზულას გადაკვეთამდე (30) და ა. შ. მიღებული წერტილების თანამიმდევრობითი შეერთებით მივიღებთ ტეხილს, რომელსაც წინასწარ მოცემული დახრის კუთხის (β) შესაბამისი ქანობი ექნება.

შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანას მეორე პასუხიც გააჩნია. ვინაიდან როგორც A-დან, ასევე ყველა მომდევნო წერტილიდან შემოხაზული g რადიუსიანი რკალი მეზობელ თარაზულას ორ წერტილში კვეთს. არსებობს აგრეთვე ორი კერძო შემთხვევა. პირველი, როდესაც g რადიუსიანი რკალი მომდევნო თარაზულას მხოლოდ ეხება და მეორე, როდესაც იგი მას არც კი ეხება. პირველ შემთხვევაში ამოცანას მხოლოდ ერთი პასუხი გააჩნია. მეორე შემთხვევაში საჭიროა დამხმარე თარაზულების აგება.

6. მოცემული მიმართულების უმოკლესი ტეხილი ხაზის აგება ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე

ვთქვათ მოცემულია ასაგები ტეხილის ერთი გვერდი — $A(40)\,B(50)$. დანარჩენი გვერდების ასაგებად ვისარგებლოთ პროფ. ნ. რიჟოვის მიერ რეკომენდებული გზით (ნახ. 175).

$B(50)$ წერტილში ავაგოთ $t(50)$ მხები. უკანასკნელი მივიღოთ ისეთი სწორი წრიული კონუსის ღერძად, რომლის წვეროში მოთავსებული კუთხე AB მონაკვეთსა და t მხებს შორის არსებულ უმცირეს კუთხეზე ორჯერ მეტია. საძიებელი წერტილი (C), რომელიც მეზობელ $K(60)$ თარაზულაზე იქნება



ნახ. 175

მოთავსებული, მიიღება ხსენებული კონუსური ზედაპირის K (60) თარაზულათი გადაკვეთის შედეგად.

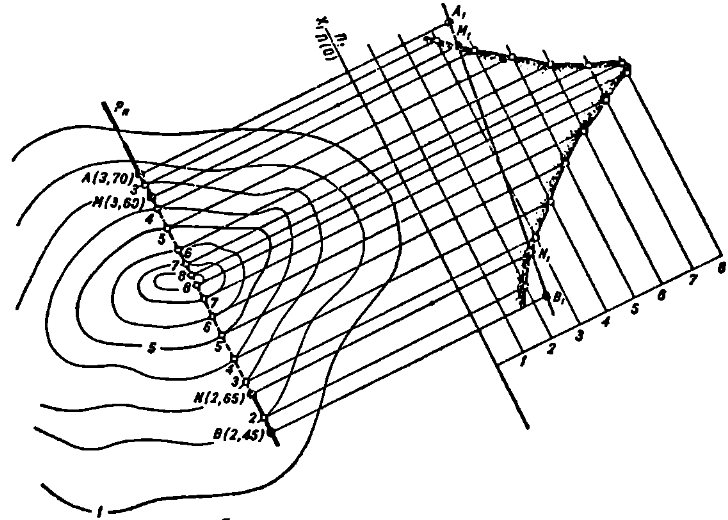
დავუშვათ, რომ $K(60)$ თარაზულა წარმოადგენს ისეთი ცილინდრული ზედაპირის მიმმართველს, რომლის მსახველები ძირითადი გეგმილთსიბრტყის მართობულნი არიან.

ავაგოთ ამ ცილინდრული და კონუსური ზედაპირების გადაკვეთის ხაზი. ამისათვის შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ($\Pi_1 \perp t$) და ახალ X_1 სისტემაში ავაგოთ კონუსის Γ და Δ სიბრტყეებით ($\Gamma \parallel \Delta \parallel \Pi_1$) მიღებული კვეთები. კონუსისა და ცილინდრის ურთიერთგადაკვეთის ხაზი (M_1N_1) X_1 სისტემაში განისაზღვრება შესაბამისად R და R_1-რადიუსიანი წრეხაზების (კონუსის

კვეთები) *a* და *b* სწორ ხაზებთან (ცილინდრის კვეთები) გადაკვეთით. X_1 სისტემაში ავაგოთ *K* თარაზულას დონის სიბრტყის (*E*) კვალი (E_{H_1}). ამ კვალის გადაკვეთა M_1N_1 მრუდთან მოგვცემს საძიებელი წერტილის (*C*) გეგმილს X_1 სისტემაში. მისი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ, მოცემული მიმართულებით, *B* წერტილისათვის უახლოეს *C* წერტილს *K* (60) თარაზულაზე. ანალოგიური გზით აიგება მომდევნო უახლოესი წერტილი და ა. შ.

7. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა სწორი ხაზით

ვთქვათ მოცემულია რაიმე *AB* სწორი ხაზი და ტოპოგრაფიული ზედაპირი (ნახ. 176). მათი ურთიერთგადაკვეთის წერტილების ასაგებად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი ხერხით: *AB* ხაზზე გავატაროთ მაგეგმილებელი *P* სიბრტყე და ახალ სისტემაში ($H_1 \parallel AB$) ავაგოთ როგორც *AB* ხაზის გეგმილი, ასევე ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილი (*P* სიბრტყით კვეთა) *AB* მიმართულებით. X_1 სისტემაში ადვილად განისაზღვრება საძიებე-

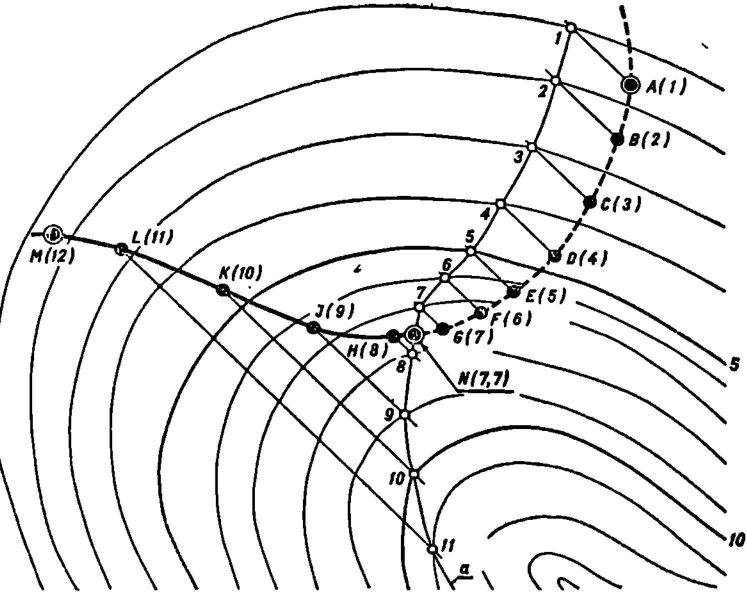


ნახ. 176

ლი წერტილების გეგმილები, ხოლო მათი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ ამოცანის პასუხს.

8. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა მრუდე ხაზით

მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირი და *A* (1) *M* (12) სივრცითი მრუდი (ნახ. 117). მათი გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად მრუდზე ავიღოთ *B*, *C*, *D*,... წერტილების რიგი და გავატაროთ მათზე ურთიერთპარალელური თარაზული სწორი ხაზები. ეს სწორი ხაზები განვიხილოთ, როგორც რაიმე ცილინდრის მსახველები. მაშინ მათი ერთობლიობა მოგვცემს ისეთ ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის მიმმართველი იქნება მოცემული *AM*

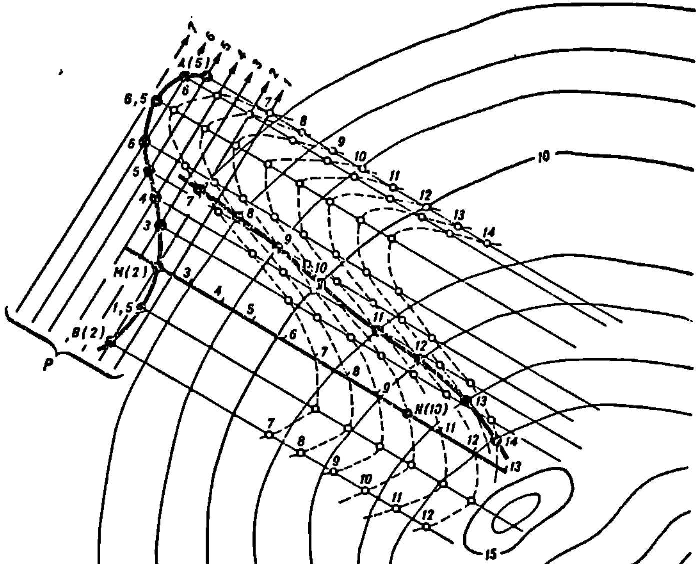


ნახ. 177

მრუდი. ვიპოვოთ ამ ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთა ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან. რადგან ცილინდრული ზედაპირის მსახველები დონის ხაზებს წარმოადგენს, ამიტომ აღებულ შემთხვევაში კვეთის ხაზი მიიღება ერთი და იმავე დონის მსახველებისა და თარაზულების გადაკვეთის წერტილების თანამიმდევრული შეერთებით. ცილინდრული და ტოპოგრაფიული ზედაპირების კვეთის ხაზის (a) გადაკვეთა მოცემულ A (1) M (12) მრუდთან მოგვცემს საძიებელ წერტილს — N (7,7).

თ. ტოპოგრაფიული და ცილინდრული ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთა

ჩვენ ამ საკითხს წინა მაგალითის განხილვისას შევეხეთ. მაშინ ცილინდრული და ტოპოგრაფიული ზედაპირების კვეთის ხაზის აგების შედარებითი სიმარტივე ცილინდრის მსახველების კერძო მდებარეობამ განაპირობა. ამჯერად განვიხილოთ ზოგადი მდებარეობის ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთა ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან. აღებულ შემთხვევაში ცილინდრული ზედაპირი მოცემულია A (5) B (2) ბრტყელი მრუდე მიმმართველით და M (2) N (10) სწორი მსახველით (ნახ. 178). AB მიმმართველის რიგ წერტილებზე გავატაროთ დამხმარე მსახველები და დავაგრადუიროთ ისინი მოცემული MN მსახველის მიხედვით. მსახველების ერთნაირნიშნულებიანი წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდე ხაზებით. მივიღებთ მოცემული ცილინდრული ზედაპირის თარაზულებს. ამ თარაზულების გადაკვეთა ტოპოგრა-



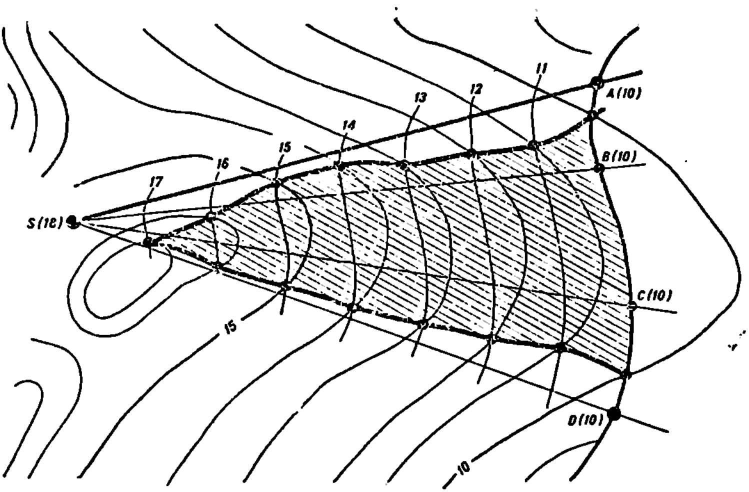
ნახ. 178

ფიული ზედაპირის ერთსახელა თარაზულებთან მოგვცემს 7, 8, 9,... წერტილების რიგს. თითოეული ასეთი წერტილი ერთდროულად მოთავსებული იქნება ორივე ზედაპირზე. მათი თანამიმდევრული შეერთებით მივიღებთ საძიებელ განკვეთის ხაზს.

10. ტოპოგრაფიული და კონუსური ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთა

მოცემულია რაიმე ტოპოგრაფიული და კონუსური ზედაპირები. პირველი განსაზღვრულია თარაზულებით, ხოლო მეორე AD მიმმართველითა და S წვეროთი (ნახ. 179). ამ ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის ხაზის ასაგებად ავაგოთ მოცემული კონუსური ზედაპირის რიგი მსახველები — $S(18)\,A\,(10)$; $S(18)\,B\,(10)$,... დავაგრადუიროთ ეს მსახველები მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის კვეთის სიმაღლის მიხედვით და ერთნაირნიშნულებიანი წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდით. მივიღებთ მოცემული კონუსური ზედაპირის თარაზულებს. კონუსური და ტოპოგრაფიული ზედაპირების ერთსახელა თარაზულების გადაკვეთის წერტილების შეერთებით მივიღებთ საძიებელ მრუდს.

კერძო შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია ისეთი კონუსური ზედაპირი, რომლის თარაზული კვეთები წრეხაზებს წარმოადგენს, საძიებელი გადაკვეთის მრუდის ასაგებად შეიძლება მოვიქცეთ ასე: — გავატაროთ კონუსის მკვეთი დონის სიბრტყეები, მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის კვეთის სიმაღლის შესაბამისად; დავნიშნოთ ერთნაირნიშნულიანი წრეხაზებისა და თარაზულების გადაკვეთის წერტილები და შევაერთოთ მდოვრე მრუდე ხაზით.



ნახ. 179

11. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები და ნორმალი

იმისათვის, რომ მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მოცემულ წერტილში მოცემული მიმართულებით ავაგოთ ამ ზედაპირის მხები საკმარისია შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე მოცემული მიმართულების (a) პარალელურად (ნახ. 180) და ახალ სისტემაში ავაგოთ ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილი. A წერტილი გადავიტანოთ ამ პროფილზე. A_1 წერტილში ავაგოთ მიღებული პროფილის (მრუდის) მხები (t_1) და დავაგრადუიროთ იგი.

ამავე A_1 წერტილში ზედაპირის ნორმალის ($t \perp n$) აგება და მისი გრადუირება ძნელი არ არის და ნახაზიდანაც ნათლად ჩანს.

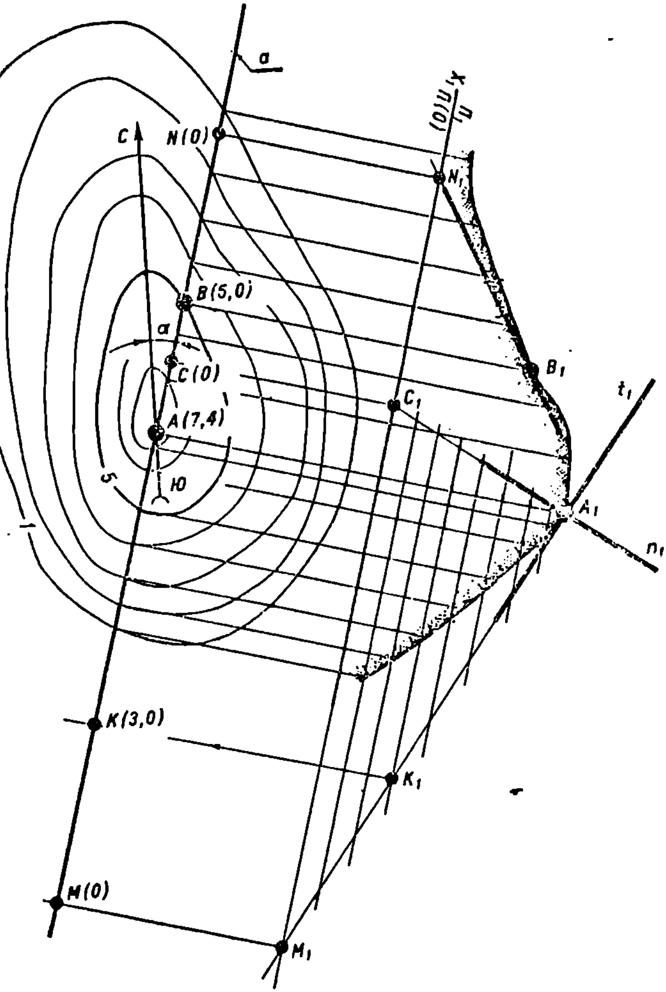
შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ აღებული მხები ტოპოგრაფიულ ზედაპირს ეხება გარედან. ნახაზზე ნაჩვენებია მეორე შემთხვევაც, როდესაც მხები ტოპოგრაფიულ ზედაპირს შიგნიდან ეხება (B).

12. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყე

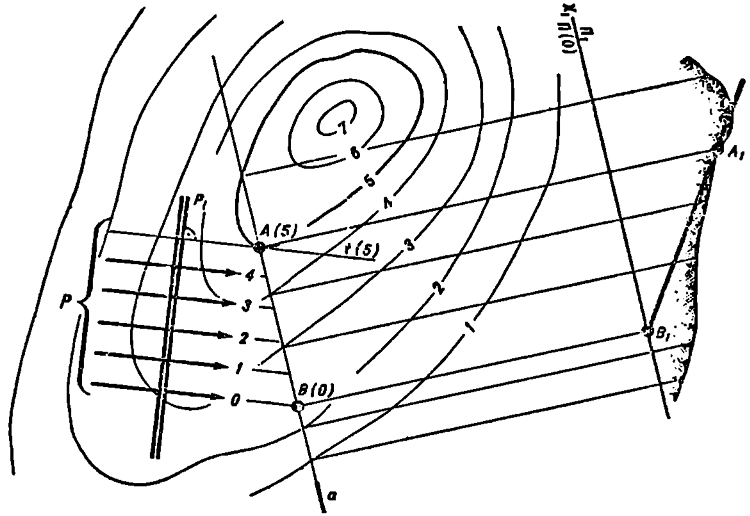
წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხებ სიბრტყეს ამ ზედაპირთან შეიძლება ჰქონდეს ერთი საერთო წერტილი, გადაკვეთოს იგი გაშლილ ან მარყუჟისებურ მრუდზე და სხვ.

საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ზედაპირის მოცემულ წერტილში მხები სიბრტყის აგების ან მოცემულ სწორ ხაზზე ზედაპირის მხები სიბრტყის გატარებისა და შეხების წერტილის განსაზღვრის შემთხვევები. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

ა) ვთქვათ მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირი და ამ ზედაპირზე მდებარე რაიმე A წერტილი (ნახ. 181). საჭიროა ავაგოთ ისეთი სიბრტყე (P), რომელიც მოცემულ ზედაპირს მოცემულ წერტილში შეეხება. ავაგოთ ზედაპირის მე-5 თარაზულას $t(5)$ მხები A წერტილში. ამავე წერტილში გავავლოთ ნებისმიერი a ხაზი და ავაგოთ ზედაპირის პროფილი ამ მიმართუ-



ნახ. 180



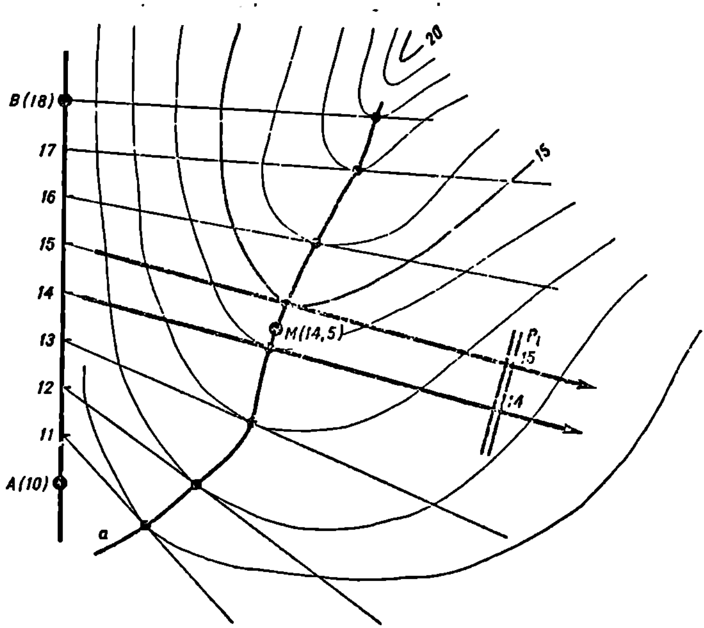
ნახ. 181

ლებით. პროფილზე გადავიტანოთ A წერტილი, მიღებულ A_1 გეგმილზე გავავლოთ მხები პროფილის მიმართ და დავაგრადუიროთ. ნახაზზე საბოლოოდ მივიღებთ ორ მხებს, რომლებიც ურთიერთგადაკვეთილ სწორ ხაზებს $(AB\times t)$ წარმოადგენენ და შესაბამისად განსაზღვრავენ საძიებელ P სიბრტყეს.

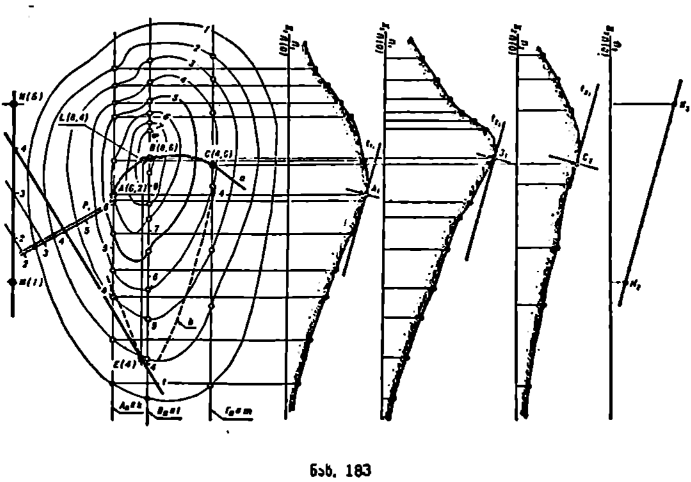
ბ) ვთქვათ მოცემულია რაიმე სწორი ხაზი (AB). საჭიროა მასზე გავატაროთ მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყე და განვსაზღვროთ შეხების წერტილი (ნახ. 182). მოცემული სწორი ხაზის რიგი წერტილებიდან გავატაროთ მხებები ზედაპირის ერთსახელა თარაზულების მიმართ. შეხების წერტილები შევაერთოთ მრუდე ხაზით (a). ამ მხებების ერთობლიობა განსაზღვრავს ირიბ ზედაპირს, რომელსაც კონოიდი ეწოდება. კონოიდის მსახველები ზოგად შემთხვევაში ერთმანეთის პარალელურნი არ არიან, მაგრამ მათ შორის შესაძლებელია ორი მეზობელი ურთიერთპარალელური მსახველის მოძებნა. მსახველების ასეთი წყვილი, AB ხაზთან ერთად, საკმარისი სიზუსტით განსაზღვრავს საძიებელ მხებ სიბრტყეს. შეხების წერტილი (M) კი მოთავსებული იქნება a მრუდზე ხსენებული ორი მსახველის შუაში.

გ) განვიხილოთ 183-ე ნახაზი. მოცემულია სწორი ხაზი (MN) და საჭიროა მასზე გატარდეს მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყე და განისაზღვროს შეხების წერტილი.

ავაგოთ ზედაპირის რამდენიმე პროფილი ისე, რომ მკვეთი სიბრტყეები გატარებული იყოს მოცემული MN ხაზის პარალელურად. იმისათვის, რომ მიღებული კვეთები ახალ სისტემაში ერთმანეთს არ დაემთხვეს ვისარგებლოთ რამდენიმე ურთიერთპარალელური გეგმილთსიბრტყით და თითოეული პროფილი ცალკე $(X_1, X_2, X_3,...)$ ავაგოთ ახალ სისტემაში. MN ხაზის პარალე-



ნახ. 182



ნახ. 183

ლურად გავატაროთ პროფილების მხებები (t_1, t_2, t_3,...) და შეხების წერტილები A, B და C გადმოვიტანოთ ძველ სისტემაში. მიღებული წერტილები A(6.2), B(8.6) და C(4.6) შევაერთოთ მრუდით (a). ეს მრუდი შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც MN ხაზის პარალელური ცილინდრის ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან შეხების მრუდი. ამ ცილინდრის მსახველებად შეგვიძლია მივიღოთ A, B და C სიბრტყეების კვალებთან შეთავსებული k, l და m სწორი ხაზები. დავაგრადუიროთ ეს მსახველები MN ხაზის მიხედვით. მიღებული წერტილებიდან ერთნაირნიშნულიანი წერტილების რომელიმე სამეული შევაერთოთ ერთმანეთთან b მრუდით. ეს მრუდი აღნიშნული ცილინდრის თარაზულა იქნება. MN ხაზზე მდებარე b მრუდის დონის წერტილიდან ამ მრუდის მიმართ გავატაროთ მხები (t). დავნიშნოთ შეხების წერტილი — E(4). E წერტილიდან გავატაროთ MN ხაზის პარალელური სწორი ხაზი და დავნიშნოთ მრუდთან მისი გადაკვეთის L(8,4) წერტილი. E(4) L(8,4) იქნება ცილინდრის ის მსახველი, რომლითაც იგი MN ხაზზე გამავალ სიბრტყეს ეხება. ვინაიდან ეს ცილინდრი მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მომვლებს წარმოადგენს, ამიტომ იგივე სიბრტყე ამ ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხებიც იქნება, შეხების წერტილი (L) კი — EL ხაზის a მრუდთან გადაკვეთით განისაზღვრება.

§ 16. ტოპოგრაფიული ზედაპირის სამთო საქმეში გამოყენების ზოგიერთი საკითხი

1. ძირითადი ცნებები

სამთო-სამარკშეიდერო პრაქტიკაში უმეტესად ისეთ ზედაპირებთან გვაქვს საქმე, რომლებიც შეიძლება გაიგივებულნი იქნენ ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან. ასეთი ზედაპირების ჯგუფს განეკუთვნებიან, მაგალითად:

ა) დედამიწის რელიეფი (დედამიწის ფიზიკური ზედაპირი);

ბ) მიწისქვეშა ნამარხების ზედაპირები, მაგალითად, როგორიცაა სასარგებლო ნამარხის საგები და სახურავი გვერდები;

გ) სამთო ქანების შეხების ზედაპირები, მაგალითად, როგორიცაა ცალკეული სტრატიგრაფიული ჰორიზონტების ზედაპირები და ქანების ლითოლოგიურ ნაირსახეობათა ზედაპირები;

დ) სასარგებლო ნამარხების იზოსიღრმეები;

ე) სასარგებლო ნამარხების იზოსისქეები;

ვ) სამთო ქანების ტექტონიკური დეფორმაციის ზედაპირები და სხვ.

არის შემთხვევები, როდესაც ზედაპირი რეალურად არ არსებობს, მაგრამ მისი წარმოსახვითი სახე გარკვეული მნიშვნელობით სარგებლობს პრაქტიკული მიზნებისათვის. ასეთია, მაგალითად, იზოსისქეების ზედაპირი, იზოსიღრმეების ზედაპირი და სხვ.

ამ ზედაპირების ნახაზზე მოცემის ცნობილ ყველა მეთოდებს შორის უპირატესობა და პრაქტიკული გავრცელება ზემოთ აღწერილმა მეთოდმა მიიღო (იხ. § 14). როგორც მაშინ აღვნიშნეთ, ტოპოგრაფიული ზედაპი-

რის ნახაზზე მოცემისათვის საკმარისია მისი მახასიათებელი რიგი წერტილების მოცემა ნახაზზე. თვალსაჩინოებისა და საინჟინრო პრაქტიკის მრავალი ამოცანის ამოხსნის გამარტივების მიზნით, ჩვეულებრივ, მიმართავენ ერთნაირნიშნულებიანი წერტილების შეერთებას იზოჰიფსებით. ეს არის ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამოხაზვის პირდაპირი გზა. აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ სამარკშეიდერო პრაქტიკაში, როდესაც საქმე მიწისქვეშა ნამარხების ზედაპირების გამოხაზვას ეხება, ყოველთვის შესაძლებელი არ არის საძიებელი ზედაპირის უშუალოდ მოცემა და მისი მიღებისათვის საჭიროა დამხმარე აგებების ჩატარება. ასეთი დამხმარე აგებების მრავალი ხერხია რეკომენდებული; არჩევანი კი დამოკიდებულია იმ საძიებო მონაცემებზე, რომლის საშუალებითაც უნდა აიგოს ამა თუ იმ ზედაპირის გამოსახულება. მაგალითისათვის განვიხილოთ ფენის ჰიფსომეტრული, იზოსისქეებისა და იზოსიღრმეების გეგმების შედგენა. გარდა ამისა, შევეხოთ ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ზოგიერთი მათემატიკური მოქმედების გრაფიკულ ინტერპრეტაციასაც.

2. ფენის ჰიფსომეტრული გეგმის შედგენა

ფენის საგები და სახურავი გვერდების ზედაპირები, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, განიხილება როგორც ტოპოგრაფიული ზედაპირები. ამის გამო ისინი ქაღალდზე ჩვენთვის ცნობილი წესით გამოისახებიან. იმ გეგმებს, რომლებზედაც მოცემულია ფენის საგები ან სახურავი გვერდის იზოჰიფსები, ფენის ჰიფსომეტრულ ანუ სტრუქტურულ გეგმებს უწოდებენ.

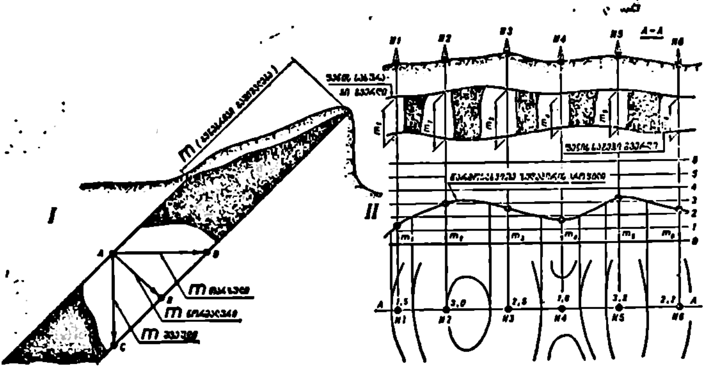
განვიხილოთ ფენის სახურავი გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმის შედგენის ერთ-ერთი მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია საკვლევ უბანზე გაყვანილი ჭაბურღილების პირის (A, B, C,...) კოორდინატები. ცნობილია აგრეთვე თითოეული ჭაბურღილის სიღრმე (d) (ზედაპირიდან ფენის სახურავ გვერდამდე). ამ მონაცემების საშუალებით იოლად განისაზღვრება ჭაბურღილების ფენთან შეხვედრის წერტილების კოორდინატები. მაგალითად, თუ A წერტილის კოორდინატებია X, Y და Z, ხოლო ამ წერტილში გაყვანილი ჭაბურღილის სიღრმე (მანძილი A-დან ფენის სახურავ გვერდთან შეხვედრის წერტილამდე) — d, მაშინ B წერტილის კოორდინატები იქნება X, Y და $Z-d$. როგორც ვხედავთ, X და Y კოორდინატები უცვლელი რჩება და იცვლება მხოლოდ Z-ის სიდიდე. ამ გზით მიღებული წერტილებით განსაზღვრული ტოპოგრაფიული ზედაპირი მოცემული ფენის სახურავი გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმა იქნება. ანალოგიურად იქმნება ფენის საგები გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმაც, ე. ი. ფენის საგები ან სახურავი გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმის შედგენისათვის საკმარისია შესაბამისი გვერდის მახასიათებელი წერტილების მოცემა. შევნიშნოთ, რომ ეს წერტილები, ჩვენ მიერ განხილული შემთხვევისაგან განსხვავებით, შეიძლება მიღებული იყოს სხვა სახის სამთო გამონამუშევრების ან რაიმე დამხმარე აგებების საშუალებით.

3. ფენის სისქე და ფენის იზოსისქეების გეგმის შედგენა

ჩვეულებრივ, ფენის სისქეს ანუ სიმძლავრეს ზომავენ ბუნებრივად გაშიშვლებულ ადგილებში ან სამთო გამონამუშევრებში. იმის გამო, რომ სამთო გამონამუშევრები ფენს სხვადასხვა მიმართულებით კვეთენ, ფენის სისქეც, მისი განვრცობისა და ვარდნილობის მიმართ სხვადასხვა მიმართულებით იზომება. ძირითადად არჩევენ ფენის სისქ-ს სამ სახეს: ნორმალურს, შვეულს და თარაზულს. 184-I ნახაზზე, ნახშირის ფენის ვარდნილობის მიმართულებით შესრულებულ შვეულ ჭრილში, ნაჩვენებია ფენის სისქის

უმთავრესი სახეები. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ფენის ნორმალური სისქე ($m_{ნორმალური}$) უდრის ფენის საგებ და სახურავ გვერდებს შორის უმოკლეს მანძილს მოცემულ წერტილში (A). ფენის საგებ და სახურავ გვერდებს შორის შვეული მიმართულებით გაზომილი მანძილი მოცემულ წერტილში ფენის შვეულ სისქეს ($m_{შვეული}$) გამოსახავს, ხოლო ამავე გვერდებს შორის მოთავსებული უმოკლესი თარაზული მონაკვეთით განისაზღვრება ფენის თარაზული სისქე ($m_{თარაზული}$).

ნამარხის იზოსისქეს უწოდებენ ისეთი წერტილების გეომეტრიულ ადგილს, რომლებშიც ნამარხს, ერთი რომელიმე მიმართულებით, ერთნაირი



ნახ. 184

სისქე გააჩნია. შევნიშნოთ, რომ იზოპიფსებში შეიძლება გამოსახული იყოს ნამარხის სისქის ნებისმიერი სახის ცვლილებები. ჩვეულებრივ, იზოპიფსებით გამოისახება ფენის სისქეთა მნიშვნელობების ცვლილება გეგმილთსიბრტყის მართობული მიმართულებით. მაგალითად, ფენის სისქის ცვლილება შვეული მიმართულებით გამოისახება თარაზულ გეგმილთსიბრტყეზე, თარაზული მიმართულებით — შვეულ გეგმილთსიბრტყეზე, ხოლო ნორმალური მიმართულებით ისეთ გეგმილთსიბრტყეზე, რომელიც ფენის საშუალო განვრცობისა და ვარდნილობის პარალელურია.

ფენის სისქის იზოპიფსები, რომლებიც სისქეთა მნიშვნელობების ცვლილებას ახასიათებენ, თავის მხრივ, ტოპოგრაფიულ ზედაპირს გამოსახავენ. ასეთი ზედაპირები ბუნებაში რეალურად არ არსებობენ, მაგრამ მათი წარმოსახვითი სახე მეტად მნიშვნელოვანია პრაქტიკული მიზნებისათვის.

184-II ნახაზზე, ზემოდან ქვემოთ, თანამიმდევრობით ნაჩვენებია ნამარხის შვეული ჭრილი ($A—A$) ერთი საძიებო ხაზის მიმართულებით, წარმოსახვითი ზედაპირის პროფილი და ნამარხის იზოსისქეების გეგმა.

პრაქტიკაში იზოსისქეების გეგმის შედგენა ძირითადად ორი გზით (პირდაპირი და არაპირდაპირი) ხდება.

პირდაპირი გზით იზოსისქეების გეგმის შედგენის დროს მოცემულია საძიებო ჭაბურღილების წერტილები, რომლებსაც მარჯვენა მხრიდან მიწერი-

ლი აქვთ შესაბამის წერტილში რაიმე ერთი მიმართულებით გაზომილი ფენის სისქის გამომსახველი რიცხვი. თუ ამ წერტილებს მივიღებთ რაიმე ტოპოგრაფიული ზედაპირის წერტილებად და მათ მიხედვით ავაგებთ ამ ზედაპირის იზოჰიფსებს, მივიღებთ მოცემული ნამარხის იზოსისქეების გეგმას.

იზოსისქეების გეგმის შედგენის არაპირდაპირი გზა ითვალისწინებს დამხმარე აგებებს. მას იყენებენ იმ შემთხვევებში, როდესაც სხვადასხვა წერტილებში ფენის სისქეები უშუალოდ არ არის ცნობილი და საჭიროა იზოსისქეების გეგმის შედგენა, მაგალითად, ფენის მოცემული სახურავი და საგები გვერდების ჰიფსომეტრული გეგმების მიხედვით. მსგავს შემთხვევებში რეკომენდებულია მათემატიკური მოქმედებების შესრულება.

4. ფენის იზოსიღრმეების გეგმის შედგენა

იზოსიღრმეებს უწოდებენ ისეთი წერტილების გეომეტრიულ ადგილს, რომლებიც ფენის ზედაპირზე მდებარეობენ და აქვთ სასარგებლო ნამარხის ჩაწოლის სიღრმეთა ერთნაირი მნიშვნელობები. არჩევენ ნამარხის სახურავი და საგები გვერდების იზოსიღრმეებს.

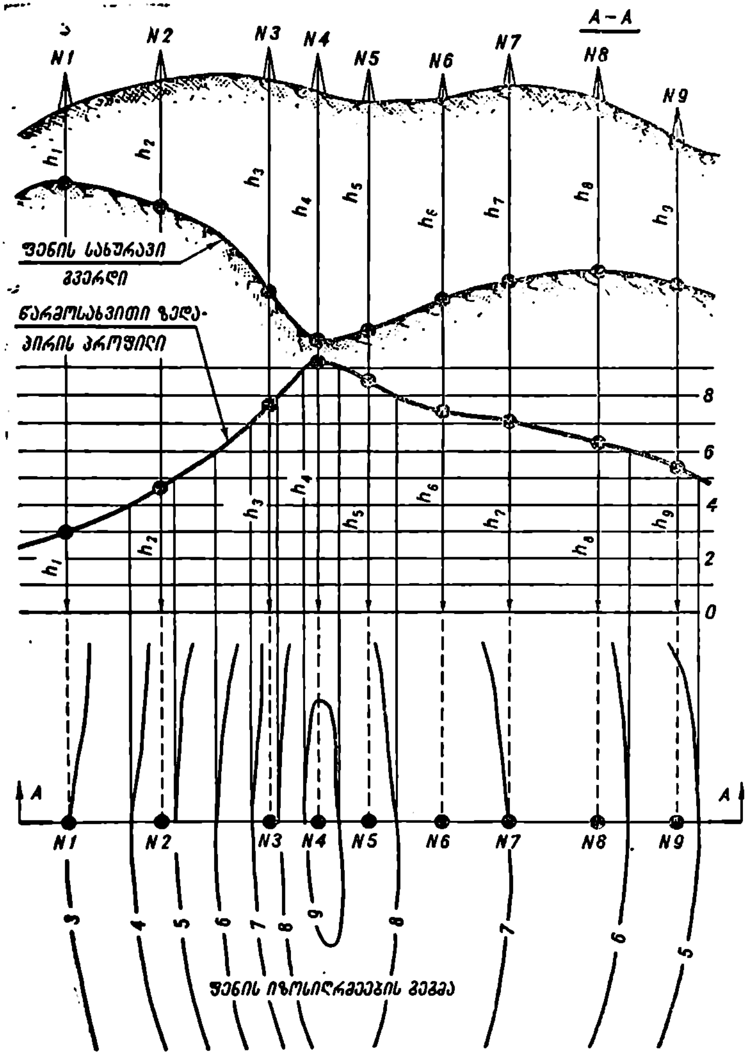
იზოსიღრმეები, ისევე როგორც იზოსისქეები, ისეთ ტოპოგრაფიულ ზედაპირებს წარმოადგენს, რომლებიც ბუნებაში რეალურად არ არსებობენ და მხოლოდ წარმოსახვითი სახე გააჩნიათ. თუ ამ წარმოსახვითს ზედაპირს ჩვენთვის ცნობილი წესით — იზოჰიფსების საშუალებით გამოვსახავთ, მივიღებთ იზოსიღრმეების გეგმას.

არსებობს იზოსიღრმეების გეგმის შედგენის პირდაპირი და არაპირდაპირი გზები.

185-ე ნახაზზე ნაჩვენებია იზოსიღრმეების გეგმის შედგენის პირდაპირი გზა. სახელდობრ, როდესაც ცნობილია შვეული საძიებო ჭაბურღილების მონაცემები. ამ ნახაზზე თანამიმდევრობით (ზემოდან ქვემოთ) ნაჩვენებია ფენის ჭრილი, წარმოსახვითი ზედაპირის პროფილი და იზოსიღრმეების გეგმა.

იზოსიღრმეების გეგმის შედგენა შემდეგი თანამიმდევრობით ხდება: გეგმაზე აგებენ საძიებო ჭაბურღილების პირის შესაბამის წერტილებს (ჩვენ შემთხვევაში ნაჩვენებია მხოლოდ ერთ საძიებო ხაზზე განლაგებული ჭაბურღილები — № 1, № 2, № 3,...). ამ წერტილებს გვერდით ეწერება შესაბამისი სიღრმის რიცხვითი მნიშვნელობა (მანძილი ჭაბურღილის პირიდან მისი ფენის სახურავ. გვერდთან შეხვედრის წერტილამდე — h_1, h_2, h_3,...). თუ დავუშვებთ, რომ ეს წერტილები თავისი ნიშნულებით წარმოადგენს რაიმე ტოპოგრაფიულ ზედაპირს და ამ მონაცემებით ავაგებთ ამ ზედაპირის იზოჰიფსებს, მივიღებთ მოცემული ფენის სახურავი გვერდის იზოსიღრმეების გეგმას.

ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევა, როდესაც საძიებო მონაცემები შვეული ჭაბურღილებითაა განსაზღვრული. იმ შემთხვევებში, როდესაც საძიებო მონაცემები მიღებულია დახრილი ჭაბურღილების მეშვეობით, მაშინ ჯერ აგებენ ფენის სახურავი (ან საგები) გვერდისა და დღის ზედაპირის გეგმებს, ხოლო მათი საშუალებით კი აგებენ ფენის იზოსიღრმეების გეგმას. სახელდობრ, ამ მოქმედებას აწარმოებენ ტოპოგრაფიული ზედაპირების გამოკლებით. ჩვენ ამ საკითხს მომდევნო პარაგრაფში განვიხილავთ.


A – A
N1
N2
N3
N4
N5
N6
N7
N8
N9
h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6 h_7 h_8 h_9
ფენის სახურავი გვერდი
წარმოსახვითი ზედა-პირის პროფილი
8
6
4
2
0
A
A
3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5
ფენის იზოსიღრმეების გეგმა

ნახ. 185

§ 18. ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ზოგიერთი მათემატიკური მოქმედების გრაფიკული ინტერპრეტაცია

1. ძირითადი დებულებები

ტოპოგრაფიული ზედაპირი ანალიზურად გამოისახება ფუნქციით

$$Z = f(X, Y).$$

ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს სასრულობის, ცალსახობის, უწყვეტობისა და სიმდოვრის პირობებს, ე. ი. ტოპოგრაფიული ზედაპირის წერტილის ნიშნული გამოისახება როგორც თარაზული კოორდინატების ფუნქცია.

მადნეულის თვისებამ (P) შეიძლება განიცადოს ცვლილება ყველა მიმართულებით. ამის გამო მისი სივრცითი დახასიათება განიხილება როგორც წერტილის კოორდინატების ფუნქცია

$$P = f(X, Y, Z).$$

გამოდის, რომ სტრუქტურული მაჩვენებელი წარმოადგენს ორი ცვლადის ფუნქციას, თვისობრივი კი — სამისას.

გავარჩიოთ ერთი, ორი და სამი დამოუკიდებელი ცვლადის გრაფიკული გამოსახვა.

ერთი ცვლადის ფუნქციის, $Y = f(X)$, გრაფიკული გამოსახვისათვის საკმარისია XY კოორდინატთა სისტემაში განვსაზღვროთ Y-ის მდებარეობა X-ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის. ამის მიხედვით ავაგოთ გრაფიკი. ეს გრაფიკი აღნიშნული ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამომსახველი იქნება.

ორი ცვლადის ფუნქცია, $Z = f(X, Y)$, ახასიათებს სხეულის ზედაპირს. თუ მივცემთ Z-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებს (მაგ., $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$) მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$m_1 = f_1(X, Y);\ m_2 = f_2(X, Y);\ m_3 = f_3(X, Y); \ldots; m_n = f_n(X, Y).$$

ეს გამოსახულებანი შეგვიძლია შემდეგნაირად დავწეროთ:

$$Y = f_1(X, m_1);\ Y = f_2(X, m_2);\ Y = f_3(X, m_3); \ldots;\ Y = f_n(X, m_n).$$

ამით ჩვენ მივიღებთ ერთი ცვლადის ფუნქციების მთელ წყებას. თითოეული მათგანი გამოისახება როგორც ერთი მრუდი. ყოველი ასეთი მრუდის დამახასიათებელი თავისებურება Z-ის მნიშვნელობის მუდმივობა იქნება. ეს თავისებურება მაჩვენებელია იმისა, რომ ასეთი მრუდები, თავის მხრივ, იზოჰიფსებს წარმოადგენს, ხოლო მათი ერთობლიობით წარმოქმნილი ზედაპირი — ტოპოგრაფიულ ზედაპირს.

სამი ცვლადის ფუნქციის, $P = f(X, Y, Z)$, გრაფიკული გამოსახვისათვის საჭიროა, რომ იგი დავიყვანოთ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებზე. ვთქვათ, $P = f(X, Y, Z)$ გამოსახავს მანგანუმის შემცველობას მადანში. თუ Z-ს თანამიმდევრობით მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს (მაგ., $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$) მივიღებთ:

$$P = f_1(X, Y, m_1);\ P = f_2(X, Y, m_2);\ P = f_3(X, Y, m_3); \ldots; P = f_n(X, Y, m_n).$$

როგორც ვხედავთ თითეული მათგანი წარმოადგენს ორი ცვლადის ფუნქციას და გამოისახება როგორც ტოპოგრაფიული ზედაპირი.

ყოველივე ზემოთ აღნიშნული ერთხელ კიდევ ადასტურებს იმ გარემოებას, რომ იზოჰიფსების საშუალებით შესაძლებელია სასარგებლო ნამარხის ყოველმხრივი დახასიათება.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის გრაფიკულ გამოსახულებებში შეიძლება შესრულდეს ისეთი მათემატიკური მოქმედებანი, როგორიცაა შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა, ახარისხება, ფესვის ამოღება, დიფერენცირება, ინტეგრება. მათემატიკურ მოქმედებათა ეს აპარატი, რომელიც პროფ. პ. კ. ს ო ბ ო ლ ე ვ ს კ ი ს მიერაა დამუშავებული, სამთო და საძიებო საქმის მრავალი საკითხის გადაწყვეტის შესაძლებლობებს იძლევა.

გავაკეთოთ რამდენიმე წინასწარი შენიშვნა: — ზედაპირები, რომლებზედაც უნდა მოვახდინოთ მათემატიკური მოქმედებები, საჭიროა გამოსახული იყოს ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში, გეგმილთსიბრტყეზე და მასშტაბში; ტოპოგრაფიული ზედაპირების შეკრებისა და გამოკლების დროს სასურველია, რომ იზოჰიფსები გამოხაზული იყოს ერთნაირი კვეთის სიმაღლით; თუ ორი ზედაპირი სხვადასხვა გეგმაზეა გამოხაზული, მათზე მათემატიკური მოქმედების შესრულებისათვის საჭიროა ისინი შევუთავსოთ ერთმანეთს ისე, რომ ერთსახელა საკოორდინატო ღერძები ერთმანეთს დაემთხვეს.

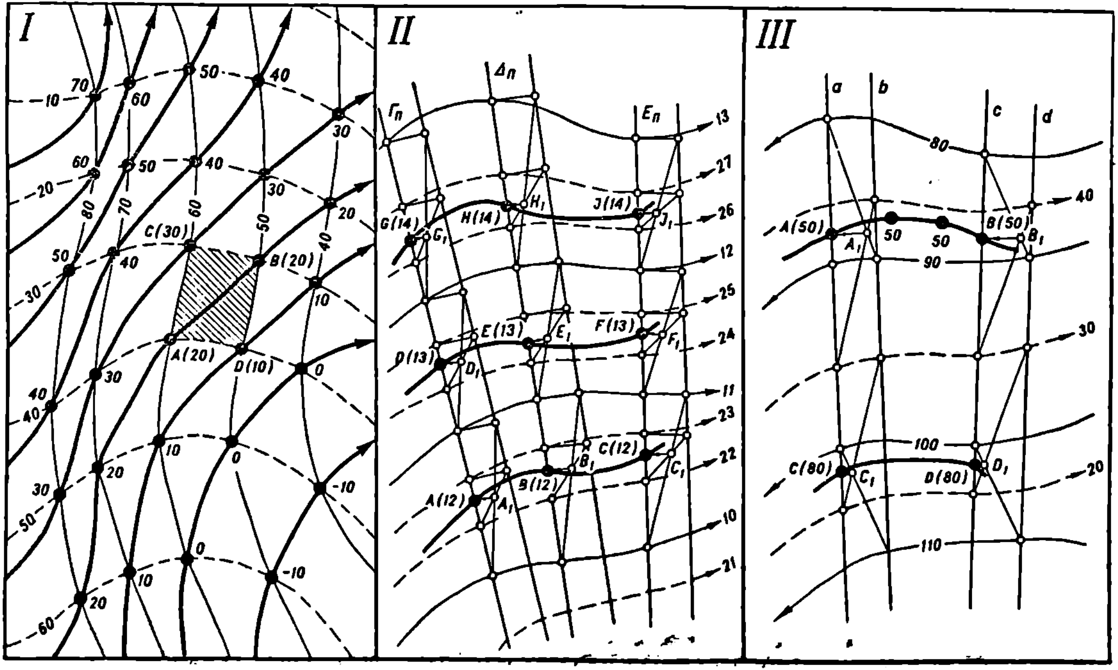
განვიხილოთ ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ზოგიერთი მათემატიკური მოქმედების გრაფიკული ინტერპრეტაცია. ამ საკითხების მათემატიკური საფუძვლების გასაცნობად მსურველებს შეუძლიათ იხილონ — „Труды Всесоюзного горно-технического съезда" — 1926.

2. ტოპოგრაფიული ზედაპირების გამოკლება

ორი ტოპოგრაფიული ზედაპირის სხვაობა ისევ ტოპოგრაფიული ზედაპირია. ამ მოქმედების შესრულების დროს მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირების იზოჰიფსების ურთიერთგანლაგების მიხედვით არჩევენ შემდეგ უმთავრეს შემთხვევებს:

ა) მოცემული ზედაპირების იზოჰიფსები მათი ურთიერთშეთავსების დროს იკვეთებიან და ქმნიან ოთხკუთხედებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 186-I ნახაზზე, ერთსა და იმავე მასშტაბში ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია P (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები. იმისათვის, რომ ავაგოთ მათი სხვაობის ზედაპირი $(\Theta = P - \Sigma)$, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გეგმაზე ავირჩიოთ რომელიმე ოთხკუთხედი, მაგალითად, $ABCD$ და ვიპოვოთ ამ ოთხკუთხედის წვეროების ნიშნულები — საკლები და მაკლები ზედაპირების იზოჰიფსების ნიშნულების სხვაობა. A, B, C და D წერტილებისათვის შესაბამისად მივიღებთ რიცხვით მნიშვნელობებს: 20, 30, 20 და 10. ერთნაირნიშნულიანი წვეროების (A და B) შემაერთებელი მრუდე ხაზი საძიებელი ზედაპირის ერთ-ერთი იზოჰიფსის ელემენტი იქნება. ამავე გზით ავაგებთ ამ იზოჰიფსის დანარჩენ ნაწილსაც. ანალოგიურად მოიძებნება ამ ზედაპირის სხვა იზოჰიფსებიც. შევნიშნოთ, რომ საძიებელი ზედაპირის იზოჰიფსები მოცემული ზედაპირების შეთავსების შედეგად წარმოქმნილი ოთხკუთხედების დიაგონალებს მიჰყვებიან. ნახაზზე სხვაობის ზედაპირის იზოჰიფსები ნაჩვენებია სქელი მთლიანი ხაზებით, ხოლო ამ ზედაპირის განვრცობა — ისრებით.


I
II
III
A(20)
B(20)
C(30)
D(10)
G(14)
H(14)
J(14)
D(13)
E(13)
F(13)
A(12)
B(12)
C(12)
A(50)
B(50)
C(80)
D(80)
a
b
c
d

ნახ. 186

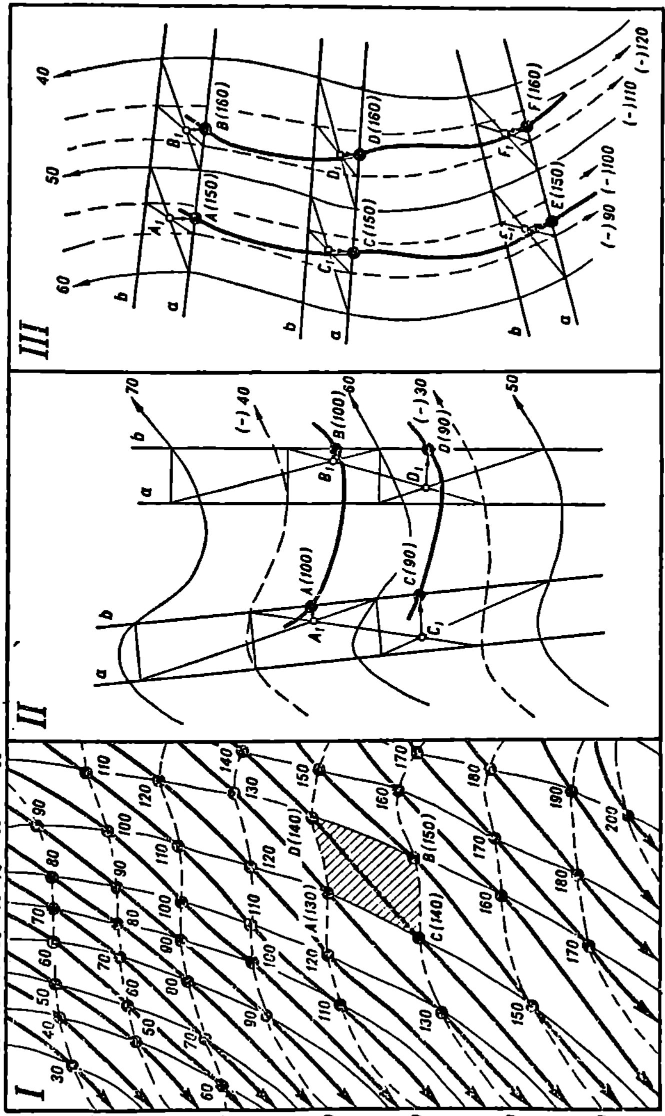
ბ) მოცემული ზედაპირების იზოჰიფსები მათი ურთიერთშეთავსების დროს არ იკვეთებიან და ერთ მხარეს არიან მიმართული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 186-II ნახაზზე, ერთსა და იმავე მასშტაბში, ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია P (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები. მათი სხვაობის ზედაპირის (Θ) ასაგებად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: მოცემული იზოჰიფსების მართობულად (შესაძლებლობის ფარგლებში) გავატაროთ შვეულად მაგეგმილებელი სიბრტყე (Γ), ავაგოთ მეზობელ თარაზულებს შორის მოთავსებული ზედაპირის პროფილი (ნებისმიერ, მაგრამ ორივე ზედაპირისათვის ერთნაირ მასშტაბში), დავინიშნოთ ამ პროფილების გადაკვეთა (მაგ., G_1) და მიღებული წერტილი გადავიტანოთ Γ'_{II} კვალზე. აღებული პროფილების აგებაში მონაწილე ოთხი იზოჰიფსიდან ავირჩიოთ საკლები და მაკლები ზედაპირების ორი უდიდესი (ან უმცირესი) ნიშნულის მქონე იზოჰიფსი. მათი ნიშნულების სხვაობა (მაგ., $27-13=14$ ან $26-12=14$) მიღებული წერტილის (G) ნიშნული იქნება. ანალოგიურად ავაგებთ G წერტილის დონის სხვა წერტილებსაც (H, J,...). ამ წერტილების მრუდე ხაზით შეერთებით კი — საძიებელი ზედაპირის ერთ-ერთ იზოჰიფს მივიღებთ. მომდევნო იზოჰიფსების აგებას ანალოგიური წესით მოვახდენთ.

პრაქტიკულად შესაძლებელია არ ავაგოთ ეს პროფილები უშუალოდ გეგმაზე. ამის ნაცვლად ავიღოთ გამჭვირვალე ქაღალდი (კალკი), გამოვხაზოთ მასზე ორი პარალელური ხაზი, ასეთი ტრაფარეტი დავადოთ გეგმას, ყველა ზემოთ აღნიშნული აგებანი მოვახდინოთ მასზე და გეგმაზე მხოლოდ მიღებული წერტილები გადავიტანოთ.

გ) მოცემული ზედაპირების იზოჰიფსები მათი შეთავსების დროს არ იკვეთებიან და მიმართულნი არიან სხვადასხვა მხარეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი; 186-III ნახაზზე, ერთსა და იმავე მასშტაბში, ერთსა და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია P (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები. მათი სხვაობის (Θ) საპოვნელად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გეგმაზე, მოცემული იზოჰიფსების დაახლოებით მართობულად, გავატაროთ ორი პარალელური ხაზი (a და b). ავირჩიოთ თითოეული ზედაპირის იზოჰიფსებიდან ორი მეზობელი წყვილი. a ხაზის მე 80 იზოჰიფსთან გადაკვეთის წერტილი შევაერთოთ b ხაზის 90-ე იზოჰიფსთან გადაკვეთის წერტილთან — მივიღებთ P ზედაპირის ვექტორს. a ხაზის 30-ე იზოჰიფსთან გადაკვეთის წერტილის b ხაზის მე-40 იზოჰიფსთან გადაკვეთის წერტილთან შეერთებით მივიღებთ Σ ზედაპირის ვექტორს. ამ ორი ვექტორის გადაკვეთის A_1 წერტილის a ხაზზე გადატანით მივიღებთ საძიებელი ზედაპირის (Θ) ერთ-ერთი იზოჰიფსის ერთ წერტილს (A). ამ წერტილის ნიშნული განისაზღვრება აღებული ოთხი იზოჰიფსიდან უდიდესი ან უმცირესი ნიშნულების მქონე იზოჰიფსების სიმაღლეთა სხვაობით ($90-40=50$ ან $80-30=50$). ანალოგიურად განისაზღვრება ამავე დონის B წერტილი და ა. შ. შევნიშნოთ, რომ გამჭვირვალე ქაღალდზე გატარებული ორი პარალელური ხაზი აქაც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს როგორც ტრაფარეტი, რომელზედაც ჩატარდება ზემოაღწერილი დამხმარე აგებები და გეგმაზე მხოლოდ მიღებულ წერტილებს გადავიტანთ.



I
II
III
A(130)
B(150)
C(140)
D(140)
A(100)
B(100)
C(90)
D(90)
A_1
B_1
C_1
D_1
(-) 40
(-) 30
A(150)
B(160)
C(150)
D(160)
E(150)
F(160)
E_1
F_1
(-) 90
(-) 100
(-) 110
(-) 120
a
b

Рис. 167

3. ტოპოგრაფი-ული ზედაპირე-ბის შეკრება ორი ტოპოგრაფიული ზედაპირის ჯამი ისევ ტოპოგრაფიული ზედაპირია. ამ მოქმედების შესრულების დროს მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირების იზოჰიფსების ურთიერთგანლაგების მიხედვით არჩევენ შემდეგ უმთავრეს შემთხვევებს:

ა) მოცემული ზედაპირების იზოჰიფსები ურთიერთშეთავსების დროს იკვეთებიან და ქმნიან ოთხკუთხედებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 187-I ნახაზზე, ერთსა და იმავე მასშტაბში, ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია P (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები. იმისათვის, რომ ავაგოთ მათი ჯამი — ზედაპირი ($\Theta = P + \Sigma$), მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გეგმაზე ავირჩიოთ რომელიმე ოთხკუთხედი, მაგალითად, $ABCD$ და ვიპოვოთ ამ ოთხკუთხედის წვეროების ნიშნულები — შესაკრები ზედაპირების იზოჰიფსების ნიშნულების ჯამი. A, B, C და D წერტილებისათვის მივიღებთ რიცხვით მნიშვნელობებს შესაბამისად, 130, 150, 140 და 140. ერთნაირნიშნულიანი წვეროების (C და D) შემაერთებელი მრუდე ხაზი საძიებელი ზედაპირის (Θ) ერთ-ერთი იზოჰიფსის ელემენტი იქნება. ამავე გზით ავაგებთ ამ იზოჰიფსის დანარჩენ ნაწილსაც. ანალოგიურად მოიძებნება საძიებელი ზედაპირის სხვა იზოჰიფსებიც. შევნიშნოთ, რომ ასაგები ზედაპირის იზოჰიფსები მოცემული ზედაპირების შეთავსების შედეგად წარმოქმნილი ოთხკუთხედების დიაგონალებს მიჰყვებიან. ნახაზზე ჯამის ზედაპირის (Θ) იზოჰიფსები ნაჩვენებია სქელი მთლიანი ხაზებით, ხოლო ამ ზედაპირის განვრცობა — ისრებით.

ბ) მოცემული ზედაპირების იზოჰიფსები ურთიერთშეთავსების დროს არ იკვეთებიან და მიმართულნი არიან ერთ მხარეს.

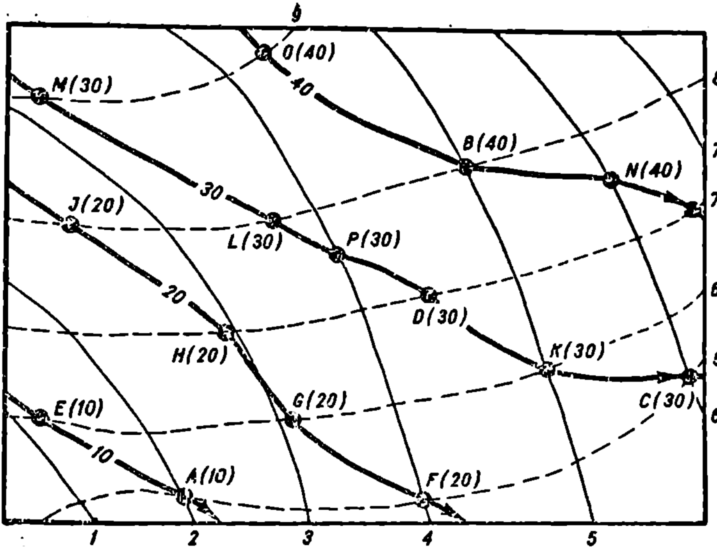
მ ა გ ა ლ ი თ ი. 187-II ნახაზზე, ერთსა და იმავე მასშტაბში, ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია P (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები. მათი ჯამის ზედაპირის (Θ) მთელნიშნულიანი იზოჰიფსების ასაგებად მოცემული ზედაპირების ჯამი შევცვალოთ სხვაობით:

$$\Theta = P + \Sigma = P - (-\Sigma).$$

ამისათვის ერთ-ერთი შესაკრების იზოჰიფსების ნიშნულებს პირობით შევუცვალოთ ნიშნები. ამით შეიცვლება ამ ზედაპირის განვრცობაც. ამით ამოცანა ტოპოგრაფიული ზედაპირების გამოკლების ანალოგიურ შემთხვევამდე დაიყვანება და ამოიხსნება ორი პარალელური ხაზის ან აღნიშნული ტრაფარეტის გამოყენებით.

გ) მოცემული ზედაპირების იზოჰიფსები ურთიერთშეთავსების დროს არ იკვეთებიან და მიმართულნი არიან სხვადასხვა მხარეს. ასეთი ზედაპირების ჯამის ზედაპირის (Θ) იზოჰიფსები წინა მაგალითის ანალოგიურად მოიძებნება და რაიმე დამატებით განმარტებას არ ითხოვს (ნახ. 187-III).

4. ტოპოგრაფი-ული ზედაპირე-ბის გამრავლება ორი ტოპოგრაფიული ზედაპირის ნამრავლი ისევ ტოპოგრაფიულ ზედაპირს წარმოადგენს. 188-ე ნახაზზე, ერთსა და იმავე მასშტაბში, ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია P (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები. იმისათვის, რომ ავაგოთ მათი ნამრავლის ზედაპირი ($\Theta = P \cdot \Sigma$), მოვიქცეთ შემდეგნაირად: განვსაზღვროთ ამ ზედაპირების მინიმალური და მაქსიმალური დონის იზოჰიფსების რიცხვით



ნახ. 188

მნიშვნელობათა ნამრავლი. სახელდობრ, მოცემულ შემთხვევაში P ზედაპირის მინიმალური დონის იზოჰიფსის რიცხვითი მნიშვნელობა უდრის 1-ს, Σ ზედაპირისა კი — 5-ს, ე. ი. მინიმალურ მნიშვნელობათა ნამრავლი $1 \cdot 5 = 5$-ის ტოლია. P ზედაპირის მაქსიმალური დონის იზოჰიფსის რიცხვითი მნიშვნელობა უდრის 7-ს, Σ ზედაპირისა კი — 9-ს, ე. ი. მაქსიმალურ მნიშვნელობათა ნამრავლი $7 \cdot 9 = 63$-ის ტოლია. განვსაზღვროთ აგრეთვე P და Σ ზედაპირების იზოჰიფსების რაოდენობა. ჩვენ შემთხვევაში P ზედაპირისათვის ეს რაოდენობა უდრის 7-ს, Σ ზედაპირისათვის კი — 5-ს.

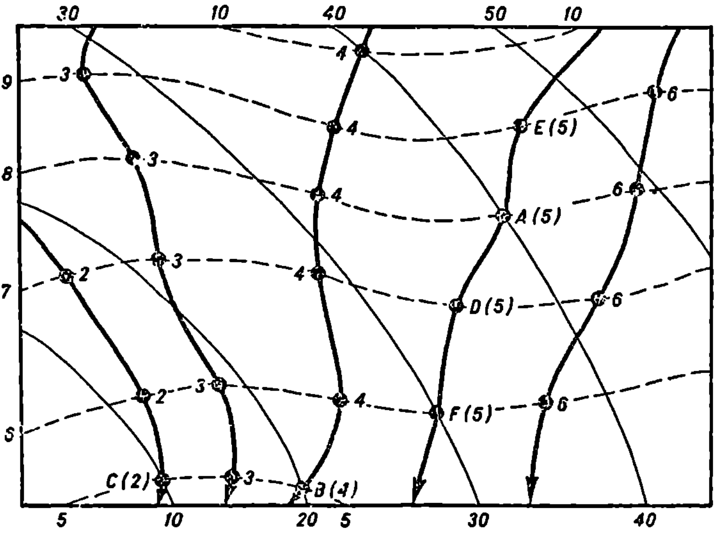
მაქსიმალურ და მინიმარულ მნიშვნელობათა ნამრავლების სხვაობა ($63 - 5 = 58$) გავყოთ ორივე ზედაპირის იზოჰიფსების საშუალო რაოდენობაზე, ე. ი. 6-ზე. მიღებული რიცხვი დავამრგვალოთ უახლოეს ციფრამდე ისე, რომ იგი მთავრდებოდეს 5-ზე ან 0-ზე. ჩვენ შემთხვევაში $58 : 6 \approx 10$. ამით მივიღებთ საძიებელი ზედაპირის კვეთის სიმაღლეს. გეგმაზე დავნიშნოთ ისეთი იზოჰიფსების გადაკვეთის წერტილები, რომელთა რიცხვითი მნიშვნელობების ნამრავლი მიღებული კვეთის სიმაღლის ჯერადი იქნება. მაგალითად, P ზედაპირის მე-4 და Σ ზედაპირის მე-5 იზოჰიფსების გადაკვეთაში მივიღებთ F წერტილს, რომლის ნიშნული იქნება 20. ანალოგიურად განისაზღვრება გეგმაზე ნაჩვენები A, K, B, C წერტილების ნიშნულები. რასაკვირველია, მარტო ამ გზით მიღებული წერტილები საკმარისი არ იქნება საძიებელი ზედაპირის იზოჰიფსების ასაგებად. როგორც ნახაზიდან ჩანს, იზოჰიფსების უშუალო გადაკვეთის შედეგად მოძებნილია C და K ერთნაირნიშნულიანი (30) წერტილები. მათი შემაერთებელი მრუდი Θ ზედაპირის ერთ-

ერთი იზოჰიფსის მონაკვეთს წარმოადგენს. მისი გაგრძელების ასაგებად Σ ზედაპირის მომდევნო მე-7 იზოჰიფსზე განვსაზღვროთ წერტილი (D), რომლის ნიშნულიც P ზედაპირზე $30 : 7 = 4{,}3$ ის ტოლი იქნება. ასეთ წერტილს კი ვიპოვით P ზედაპირის მე-4 და მე-5 იზოჰიფსებს შორის მოთავსებული მონაკვეთის ინტერპოლირებით. ანალოგიურად განვსაზღვრავთ P, L და M წერტილების მდებარეობებს. C, K, D, P, L და M წერტილების შემაერთებელი მრუდე ხაზი საძიებელი ზედაპირის 30-ე იზოჰიფსი იქნება. განხილულის მსგავსად მოიძებნება ზედაპირის დანარჩენი იზოჰიფსებიც.

5. ტოპოგრაფიული ზედაპირების გაყოფა

ორი ტოპოგრაფიული ზედაპირის განაყოფი ზოგად შემთხვევაში ისევ ტოპოგრაფიულ ზედაპირს წარმოადგენს. ამ მოქმედების შესრულების დროს ერთ კერძო შემთხვევას შეიძლება ჰქონდეს ადგილი. სახელდობრ, როდესაც გამყოფის ფუნქცია ნულზე გადის, მაშინ განაყოფი უსასრულობა გამოდის და შედეგი პრაქტიკულ მნიშვნელობას კარგავს.

ვთქვათ, გეგმაზე მოცემულია P (მთლიანი წვრილი ხაზებით) და Σ (წყვეტილი ხაზებით) ტოპოგრაფიული ზედაპირები (ნახ. 189). ერთის მეორეზე



ნახ. 189

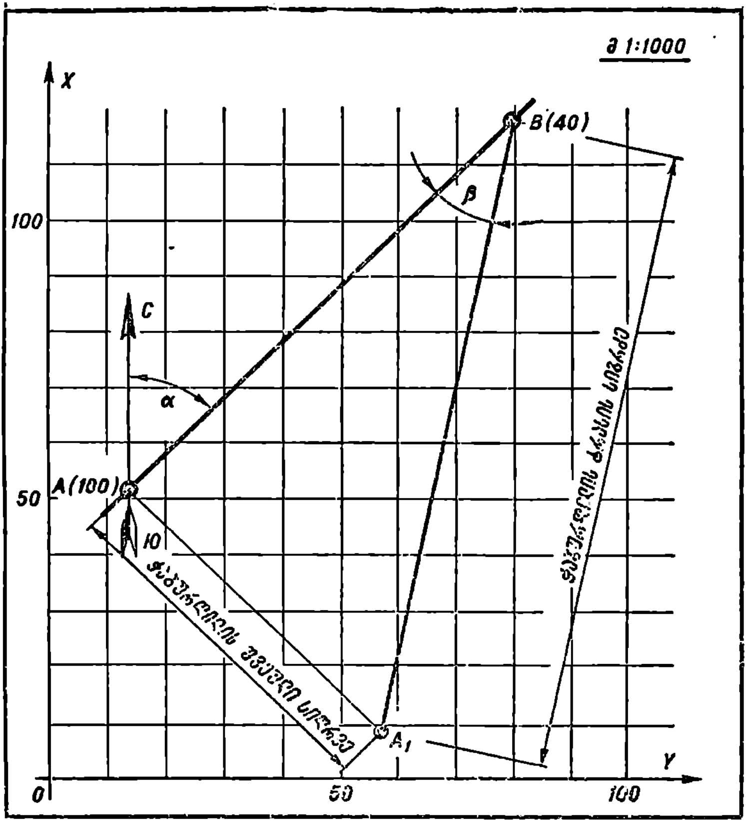
გაყოფის შედეგად მიღებული ზედაპირის (Θ) იზოჰიფსების ასაგებად მოვიქცეთ ასე: წინასწარ დავნიშნოთ ისეთი იზოჰიფსების გადაკვეთის წერტილები, რომელთაგან ერთის ნიშნულის მეორის ნიშნულზე გაყოფით მთელი და კვეთის სიმაღლის ჯერადი რიცხვები მიიღებოდეს. მაგალითად, A წერტილი მიღებულია P ზედაპირის მე-40 იზოჰიფსის Σ ზედაპირის მე-8 იზოჰიფსთან გადაკვეთით, ხოლო ნიშნული (5) — ერთის ნიშნულის მეორის ნიშნულზე გაყო-

ფით. ანალოგიურადაა განსაზღვრული $F(5)$ წერტილი. ამ გზით მიღებული წერტილების რაოდენობა, რასაკვირველია, საკმარისი არ აღმოჩნდება საძიებელი Θ ზედაპირის იზოჰიფსების ასაგებად და საჭირო იქნება დამატებითი წერტილების მოძებნა. მაგალითად, გამყოფის მე-7 იზოჰიფსზე აღებული წერტილი მაშინ იქნება Θ ზედაპირის კუთვნილი, ნიშნულით 5, როცა გასაყოფის ზედაპირზე მისი შესაბამისი ნიშნული იქნება $7 \cdot 5 = 35$.

ზედაპირის 30-ე და მე-40 იზოჰიფსებს შორის, Σ ზედაპირის მე-7 იზოჰიფსზე, ინტერპოლირებით მოვძებნოთ წერტილი, რომლის ნიშნული იქნება 35. ამ წერტილის (D) ნიშნული Θ ზედაპირზე იქნება 5. ანალოგიურად ავაგებთ $E(5)$ წერტილს. F, D, A, E წერტილების შემაერთებელი მრუდი საძიებელი Θ ზედაპირის მე-5 იზოჰიფსი იქნება. ასეთივე წესით განისაზღვრება ამ ზედაპირის დანარჩენი იზოჰიფსებიც.

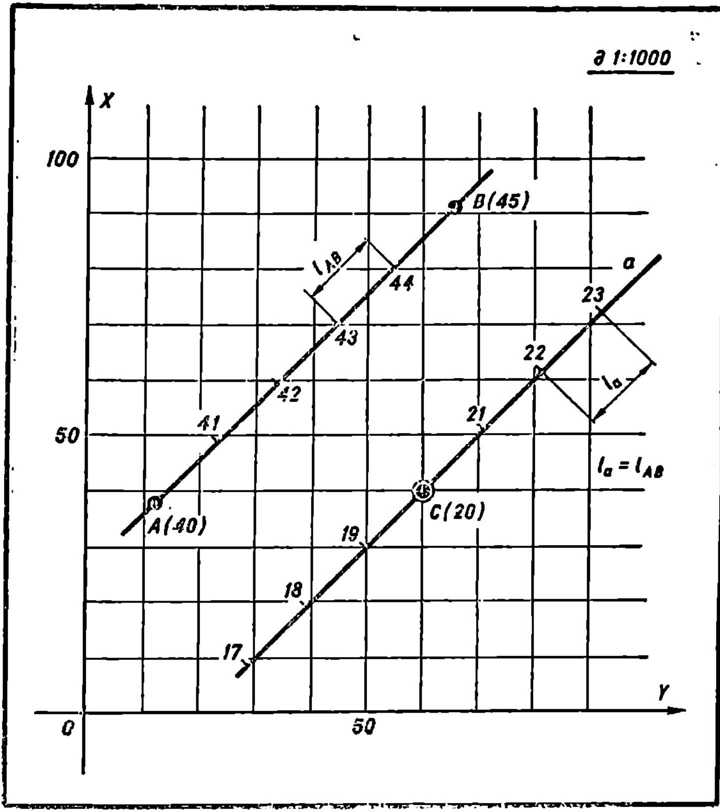
II

ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენება საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტულ მაგალითებში

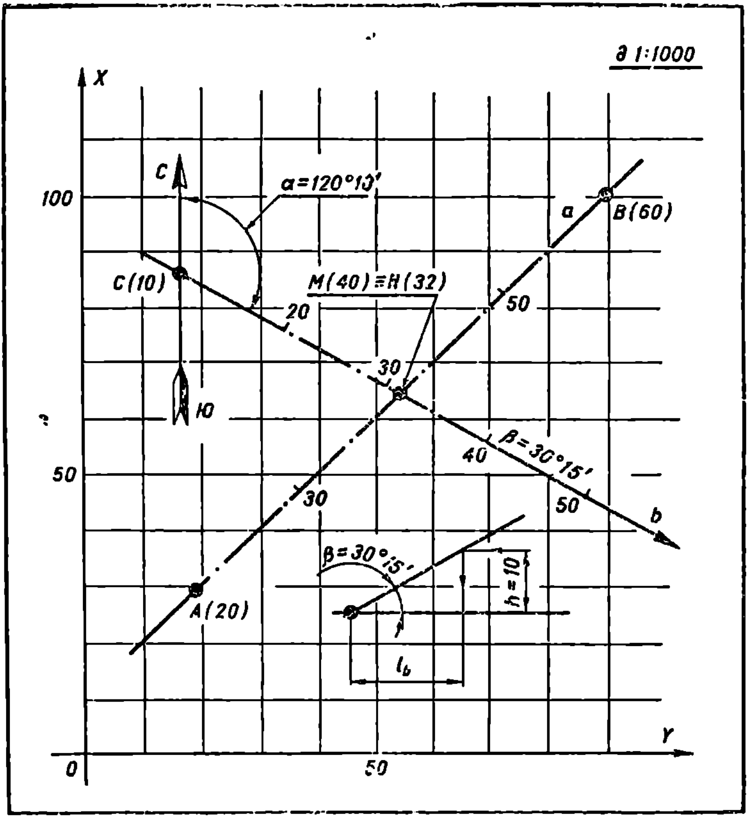


მაგალითი № 1. მოცემულია დახრილი ჭაბურღილის (AB) პირისა (A) და სანგრევის (B) კოორდინატები — A(52; 14; 100) და B(118; 80; 40). საჭიროა განისაზღვროს: 1) ჭაბურღილის ტრასის სიგრძე; 2) ჭაბურღილის ღერძის დახრის კუთხე; 3) ჭაბურღილის შვეული სიღრმე და 4) ჭაბურღილის დირექციული კუთხე (α).

პირველ სამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად საკმარისია ავაგოთ AB მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე სამკუთხედის წესით. $\triangle A_1AB$-ში, რომლის ერთი კათეტი მოცემული A(100) B(40) მონაკვეთის ტოლია, ხოლო მეორე A და B წერტილების სიმაღლეთა სხვაობას უდრის, A_1B ჰიპოტენუზა ჭაბურღილის ტრასის სიგრძეა, B წვეროსთან მდებარე კუთხე, (β)—ჭაბურღილის ღერძის დახრის კუთხე, ხოლო AA_1 კათეტი—ჭაბურღილის შვეული სიღრმე. A წერტილში განვსაზღვროთ მერიდიანის ჩრდილოეთ მიმართულება (პირობითი). ამის შემდეგ საძიებელი დირექციული კუთხე (α) უშუალოდ ნახაზზე გაიზომება-

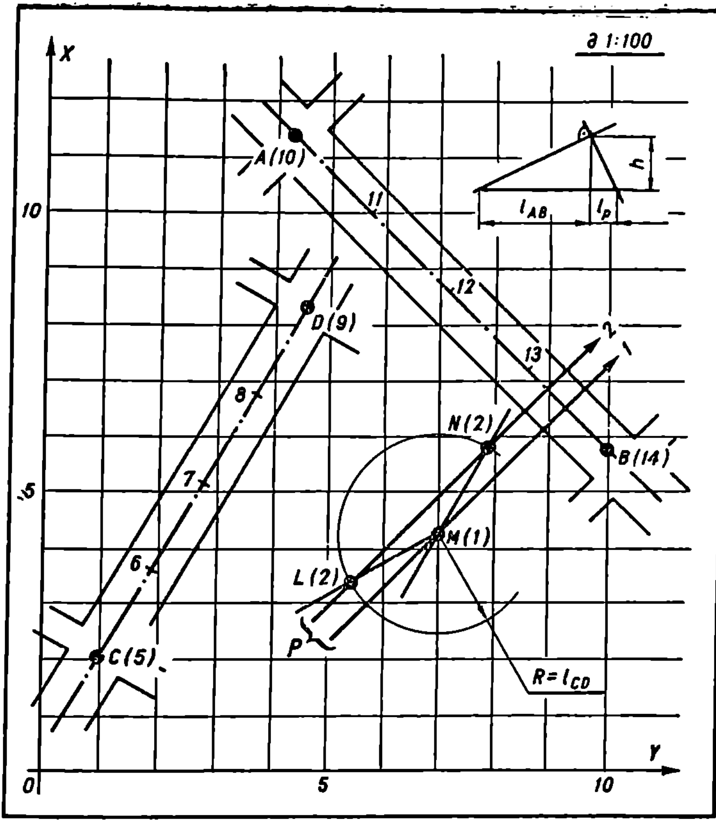


მაგალითი № 2. მოცემულია ჭაბურღილის AB ღერძი და მის გარეშე მდებარე C წერტილი. საჭიროა გეგმაზე განისაზღვროს C წერტილზე გამავალი და მოცემული ჭაბურღილის პარალელური ჭაბურღილის ღერძი (a). ცნობილია: A(37.0; 12.0; 40,0); B(91.0; 66.0; 45.0); C(40.0; 60.0; 20 0). ახალი ღერძის ასაგებად საჭიროა გავიხსენოთ ორი სწორი ხაზის პარალელობის პირობა (იხ. § 4—3). მოცემული კვეთის სიმაღლის მიხედვით დავაგრადუიროთ AB ღერძი. C წერტილზე გავატაროთ AB ღერძის პარალელური სწორი ხაზი და დავიცვათ სივრცეში მათი პარალელობისათვის აუცილებელი დანარჩენი პირობები.

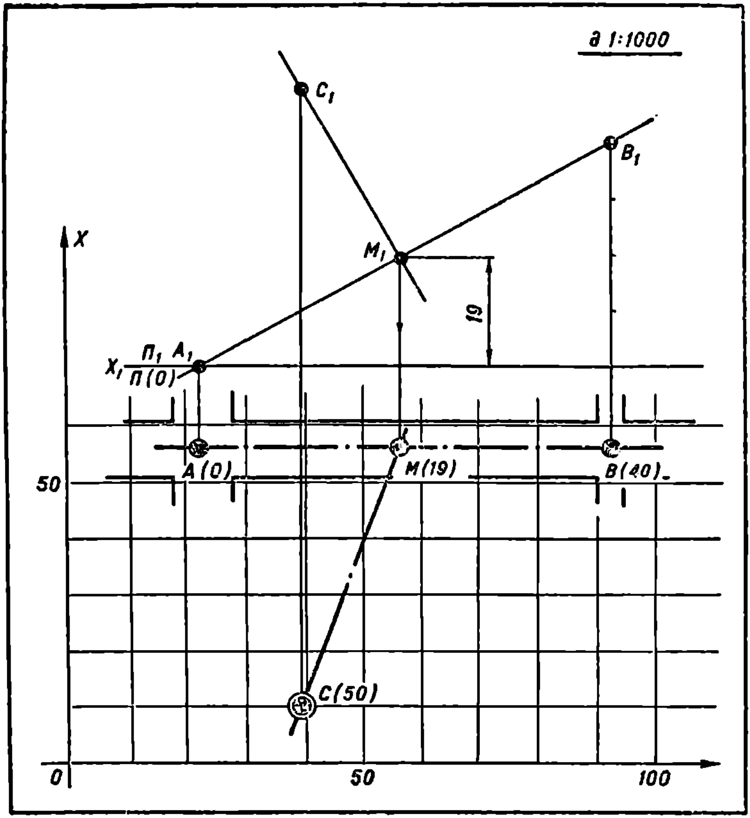


მაგალითი № 3. მოცემულია მიწისქვეშა ორი გამონამუშევარი. ერთი (a) განსაზღვრულია მისი ღერძის ორი წერტილით (A და B), ხოლო მეორე (b) — მისი ღერძის ერთი წერტილითა (C) და მიმართულებით (α — განვრცობისა და β — ვარდნილობის კუთხეებით). საჭიროა გამოვარკვიოთ ამ ღერძების ურთიერთდამოკიდებულება.

წინასწარ დავაგრადუიროთ თითოეული ღერძი მოცემული კვეთის სიმაღლის მიხედვით ($h=10$). როგორც ჩვენთვის ცნობილია, ორი სწორი ხაზის ურთიერთდამოკიდებულება განისაზღვრება სამი ძირითადი შემთხვევით — ურთიერთპარალელობა, ურთიერთგადაკვეთილობა და ურთიერთაცდენილობა. ცნობილია აგრეთვე თითოეული შემთხვევისათვის დამახასიათებელი პირობებიც (იხ. § 4—3). ამ პირობების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ აღებულ შემთხვევაში მოცემული ღერძები ურთიერთაცდენილ სწორ ხაზებს წარმოადგენს.

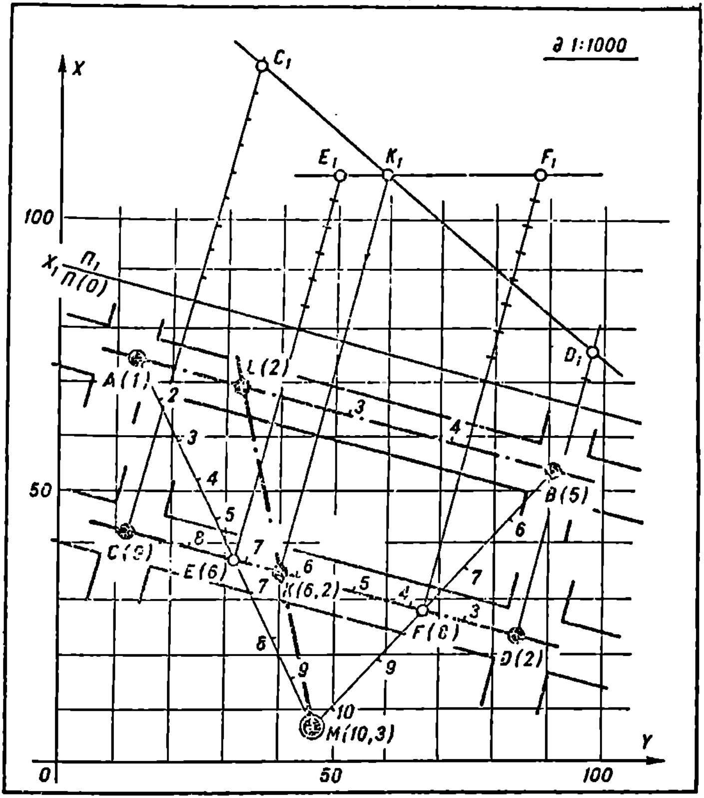


მაგალითი № 4. მოცემულია მიწისქვეშა ორი გამონამუშევრის ღერძი (AB და CD). საჭიროა მათი ურთიერთმართობულობის საკითხის გამოკვლევა. როგორც ნახაზიდან ჩანს, მოცემული ღერძები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ზოგადი მდებარეობის ურთიერთაცდენილი სწორი ხაზები. მათი მიმართულებების ურთიერთმართობულობის დასადგენად ერთ-ერთის (მაგალითად, AB) მიმართ გავატაროთ მართობული P სიბრტყე. ამ სიბრტყის ნებისმიერ თარაზულაზე დავნიშნოთ რაიმე M წერტილი. ამ წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, მეორე ხაზის (CD) ინტერვალის ტოლი რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი ამავე სიბრტყის მომდევნო თარაზულას გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილები (N და L) შევაერთოთ M წერტილთან. თუ მიღებული ორი ხაზიდან ერთ-ერთი CD ხაზის პარალელურია, ნახაზზე ჩამოყალიბდება შემდეგი პირობები: $CD \parallel MN$; $MN \supset P$; $P \perp AB$. ამ პირობების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემული ღერძები სივრცეში ურთიერთმართობულნი არიან (იხ. § 7—2).

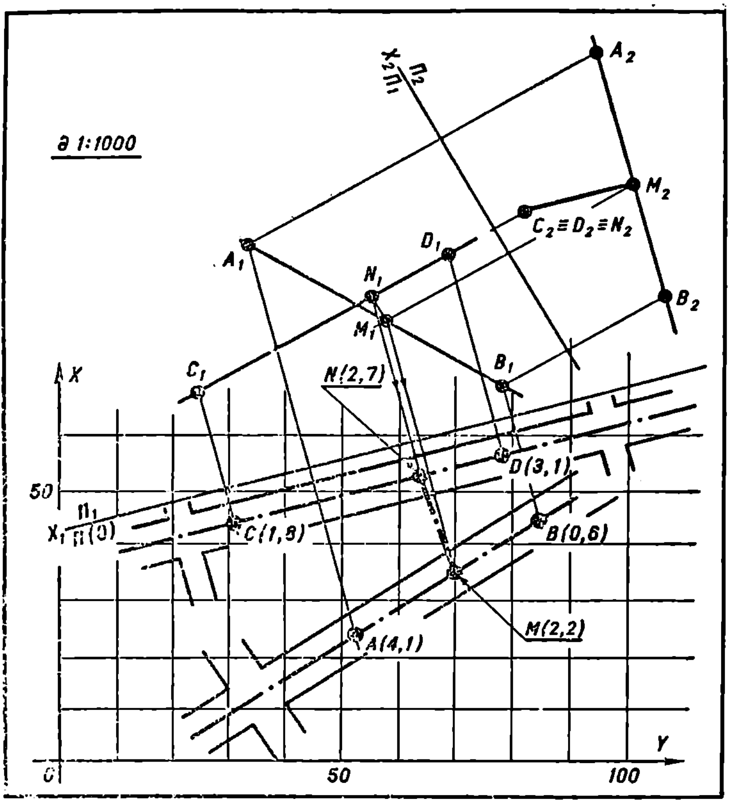


მაგალითი № ჩ. მოცემულია მიწისქვეშა გამონამუშევრის AB ღერძი და მის გარეშე მდებარე C წერტილი. საჭიროა განისაზღვროს C წერტილზე გამავალი AB ღერძის მართობული და მისი მკვეთი დამხმარე გამონამუშევრის ღერძი. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში AB ღერძი დონის ხაზად გარდაიქმნას. C_1 გეგმილიდან A_1B_1 გეგმილზე მართობის დაშვებით განისაზღვრება M_1 წერტილი. უკანასკნელის ძველ სისტემაში გადატანით AB ღერძზე მივიღებთ $M(19)$ წერტილს.

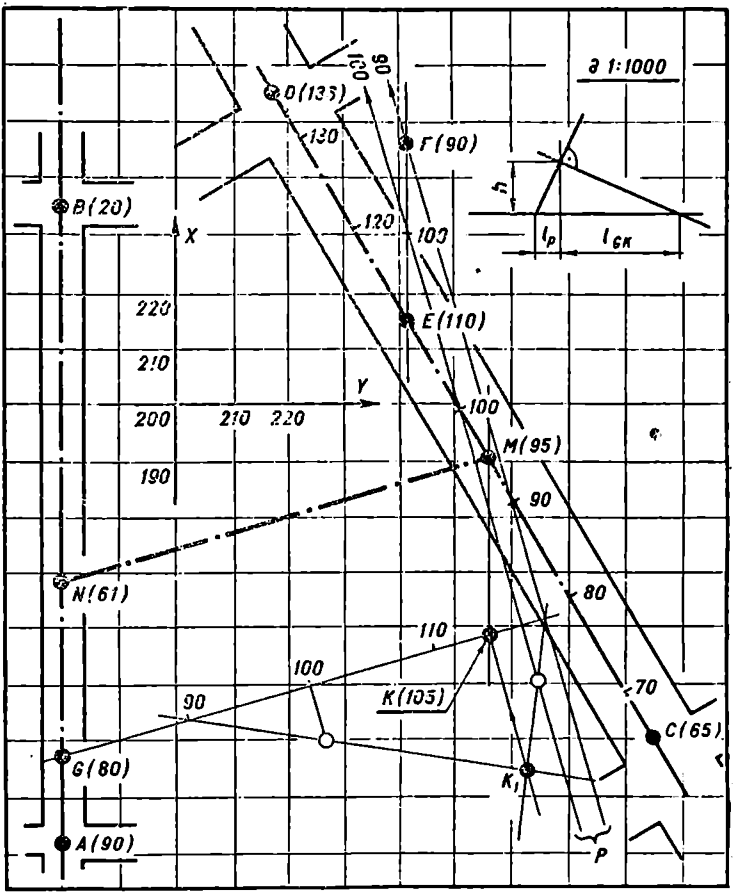
$C(50)$ და $M(19)$ წერტილების შეერთებით მივიღებთ სწორ ხაზს, რომელიც AB ღერძის მკვეთი და მართობული იქნება.



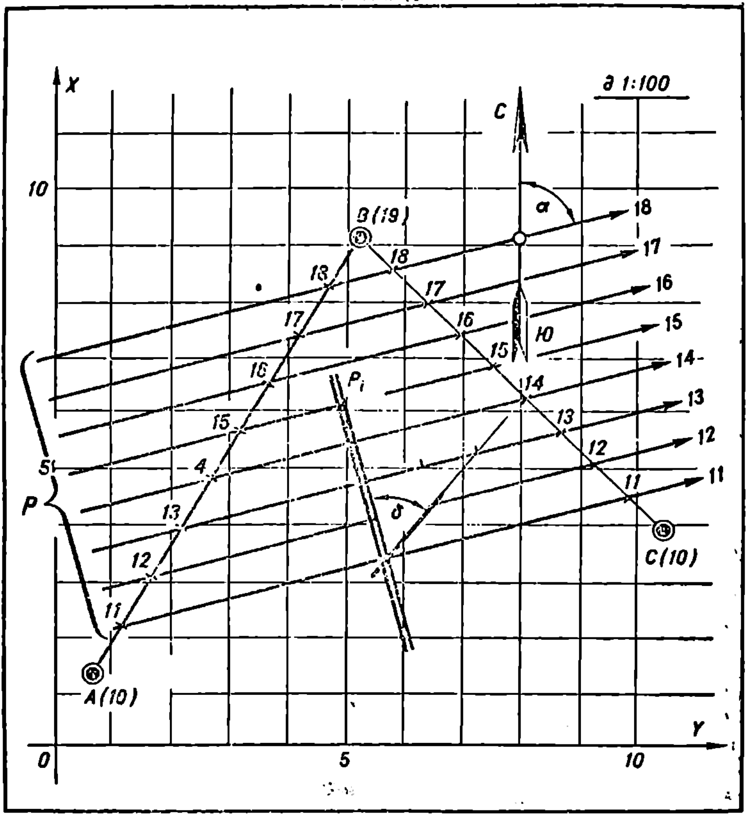
მაგალითი № 6. მოცემულია წერტილი (M) და ორი არსებული გამონამუშევრის ღერძი (AB და CD). საჭიროა მოცემული წერტილიდან გაყვანილი იქნეს დამხმარე გვირაბი, რომელიც არსებულ გამონამუშევრებს გადაკვეთს. სასურველია, რომ ამ გვირაბის ღერძი იყოს სწორი და უმოკლესი სიგრძის. იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ შესაძლებელია თუ არა ამ პირობების დაცვა, მივმართოთ შემდეგ გრაფიკულ ანალიზს: მოცემული წერტილი (M) დავაკავშიროთ ერთ-ერთი ღერძის (AB) ორ წერტილთან. ვიპოვოთ მეორე ღერძის $M\dot{A}B$ სამკუთხედთან გადაკვეთის K წერტილი (გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით). მოცემული M წერტილი შევაერთოთ მიღებულ K წერტილთან და განვაგრძოთ AB ღერძის გადაკვეთამდე (L). ML მონაკვეთი იქნება გასაყვანი გვირაბის საძიებელი ღერძი. როგორც ვხედავთ, აღებულ შემთხვევაში გეომეტრიულად შესაძლებელია მოცემული წერტილიდან გაყვანილ იქნეს მოცემული ორი გამონამუშევრის მკვეთი გვირაბი, რომელსაც ექნება სწორი ღერძი და უმოკლესი სიგრძე.



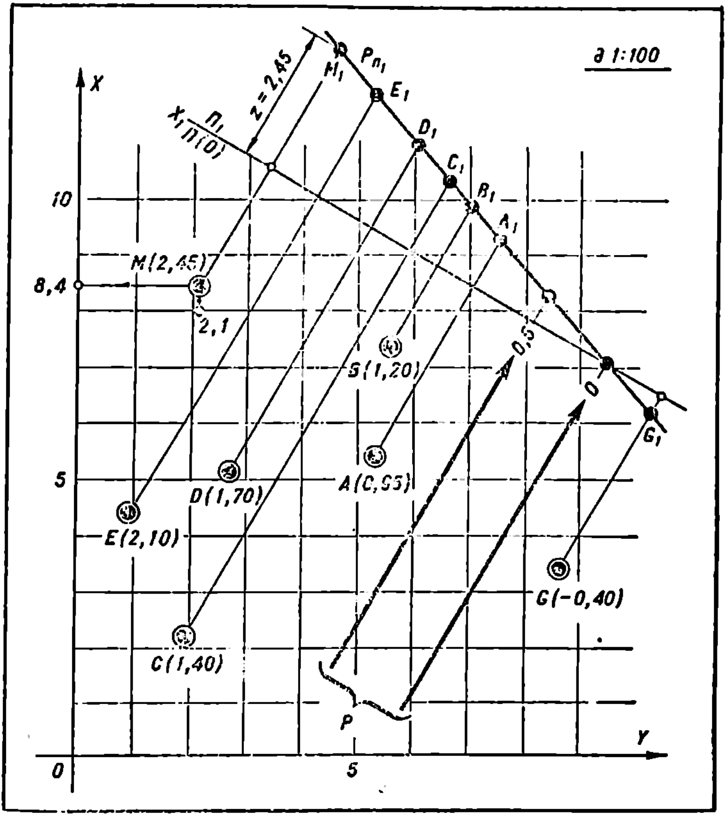
მაგალითი № 7. მოცემულია ორი არსებული გამონამუშევარი, რომელთა ღერძებიც აცდენილ სწორ ხაზებს წარმოადგენს. საჭიროა მათი შემაერთებელი გვირაბის გაყვანა. ამასთან დაკავშირებით წინასწარ უნდა გამოირკვეს სწორი ღერძისა და უმცირესი სიგრძის მქონე გვირაბის გაყვანის გეომეტრიული შესაძლებლობა. ეს ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ ორ აცდენილ სწორ ხაზზე ორი უახლოესი წერტილის მოძებნის ამოცანამდე. ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით და ერთ-ერთ ღერძს მივცეთ მაგეგმილებელი ხაზის მდებარეობა (ორჯერადი ცვლა). X_2 სისტემაში მოცემული ღერძების ორი უახლოესი წერტილი უშუალოდ განისაზღვრება. ძველ სისტემაში მათი გადატანით მივიღებთ საძიებელ M და N წერტილებს. როგორც ნახაზიდან ჩანს, აღებულ შემთხვევაში გეომეტრიულად შესაძლებელია, რომ გასაყვანი გვირაბის ღერძი იყოს სწორი და უმცირესი სიგრძის. აქვე შეიძლება განისაზღვროს MN მონაკვეთის სიგრძე, განვრცობა და ვარდნილობა.



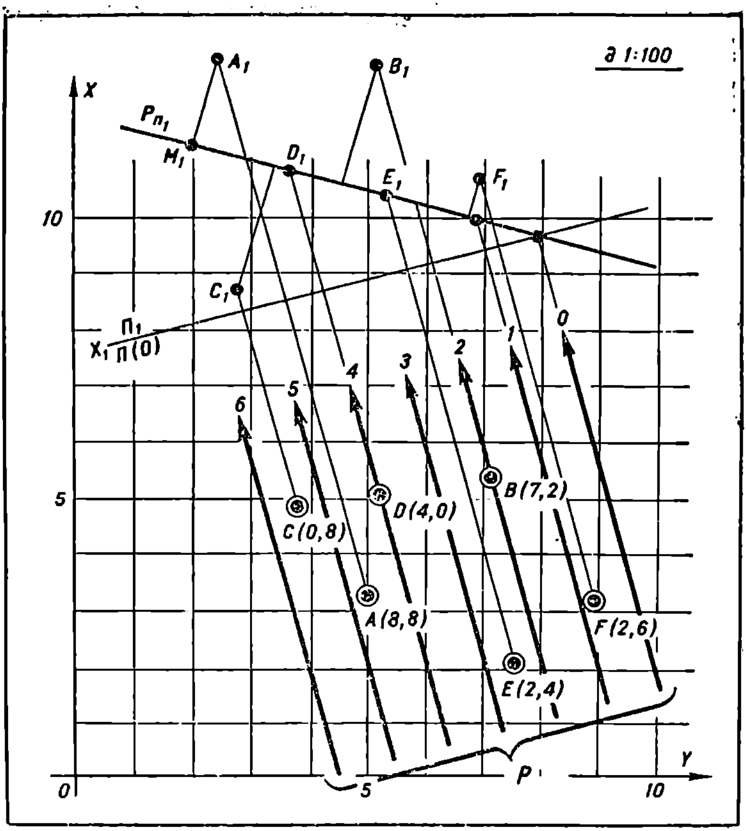
მაგალითი № 8. ზოგიერთ შემთხვევაში მე-7 მაგალითში დასმული ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას სხვა გზითაც: 1) CD ღერძის E წერტილზე გავატაროთ სწორი ხაზი $EF \parallel AB$; 2) AB ღერძის ნებისმიერი G წერტილიდან დავუშვათ მართობი $P=EF\times CD$ სიბრტყეზე; 3) ვიპოვოთ ამ მართობის P სიბრტყესთან გადაკვეთის K წერტილი; 4) K წერტილზე გავატაროთ AB ღერძის პარალელური სწორი ხაზი და დავნიშნოთ CD ღერძთან მისი გადაკვეთის M წერტილი; 5) M წერტილზე GK მართობის პარალელურად, გავატაროთ სწორი ხაზი და დავნიშნოთ მისი AB ღერძთან გადაკვეთის N წერტილი. მიღებული M და N წერტილები AB და CD ღერძების ორი უახლოესი წერტილი იქნება.



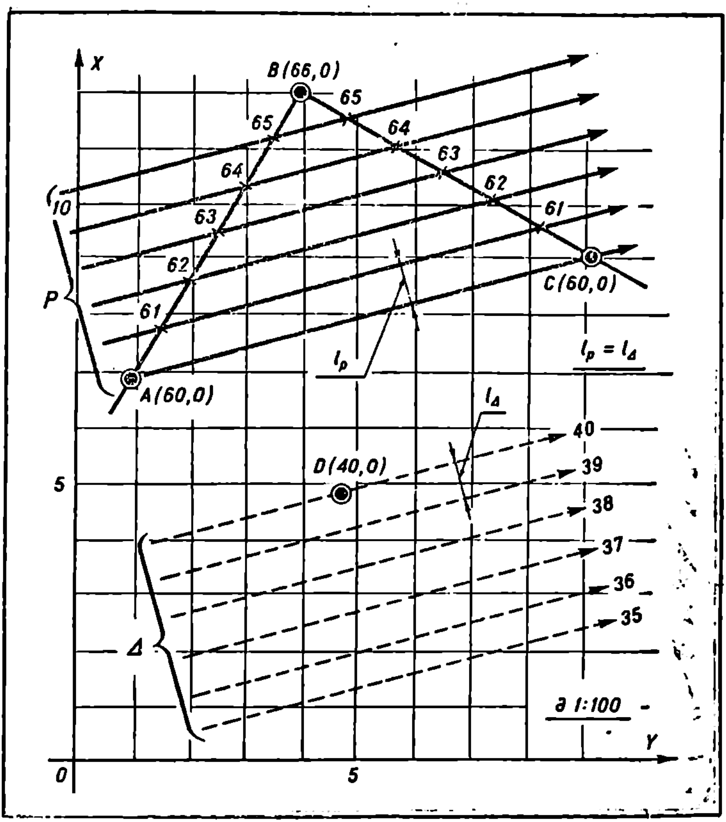
მაგალითი № 9. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდის (პირობით მიღებულია სიბრტყედ) სამი წერტილი (A, B, C), რომლებიც ერთ სწორ ხაზზე არ მდებარეობენ. საჭიროა განისაზღვროს ფენის განლაგების ელემენტები — განვრცობა და ვარდნილობა. შევაერთოთ მოცემული წერტილები სწორი ხაზებით და მიღებული ხაზები დავაგრადუიროთ. ერთნაირნიშნულებიანი წერტილების შემაერთებელი სწორი ხაზები ფენის მოცემული გვერდის თარაზულები იქნება. თარაზულების მიმართულება, ანუ სიბრტყის განვრცობა აღვნიშნოთ ისრებით (იხ. § 2-4). მერიდიანის ჩრდილოეთ მიმართულებიდან თარაზულების მიმართულებამდე საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ათვლილი კუთხე (α) ფენის განვრცობის კუთხე იქნება. ვარდნილობის კუთხის მოსაძებნად ავაგოთ ქანობის მასშტაბი P_1 და შეთავსების საშუალებით განვსაზღვროთ ძირითად გეგმილთსიბრტყისადმი მისი დახრის კუთხე. მიღებული δ კუთხე მოცემული ფენის ვარდნილობის კუთხე იქნება.



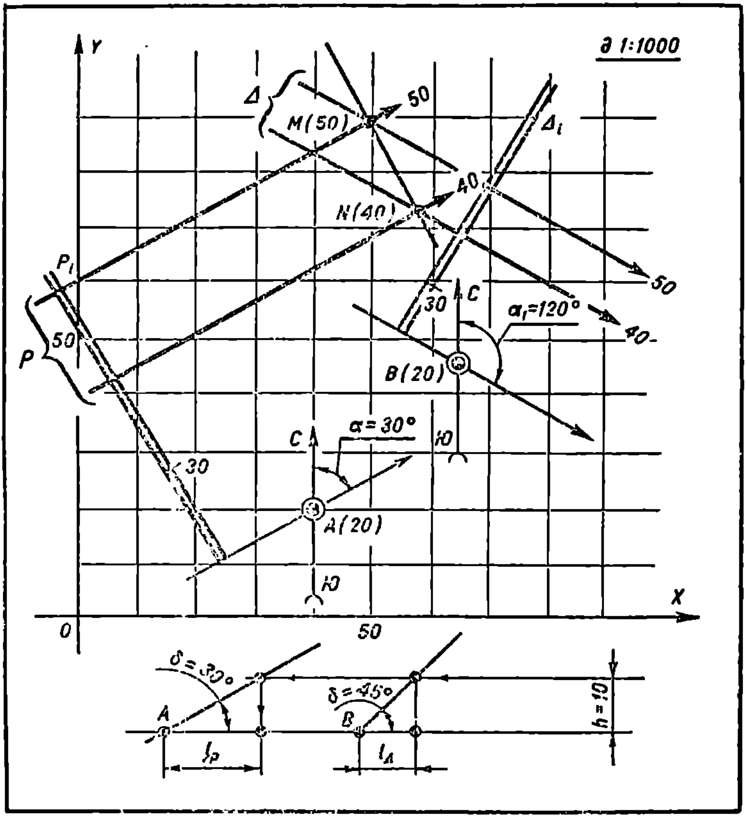
მაგალითი № 10. მოცემულია ფენის სიბრტყე P. გეგმაზე დანიშნულია აგრეთვე A, B, C,... წერტილები. ცნობილია, რომ ეს წერტილები ფენის სიბრტყეში არიან განლაგებული. საჭიროა გრაფიკულად განისაზღვროს ჩათი კოორდინატები. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ მოცემულმა სიბრტყემ (P) ახალ სისტემაში მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს. ვინაიდან მოცემული წერტილები P სიბრტყის კუთვნილ წერტილებს წარმოადგენს, ამის გამო ამ წერტილების ახალი გეგმილები X_1 სისტემაში P სიბრტყის P_{Π_1} კვალზე განლაგდება. თითოეული მათგანის ახალი გეგმილის დაშორება გეგმილთღერძიდან მათ სიმაღლეს ანუ Z ნიშნულს გამოსახავს. მაგალითად, M წერტილის ნიშნული უდრის 2,45, A წერტილისა—0,95 და ა. შ. რაც შეეხება წერტილის დანარჩენ კოორდინატებს (x და y), ისინი უშუალოდ გეგმაზე განისაზღვრებიან საკოორდინატო ბადის დახმარებით (მაგალითად, M წერტილისათვის $x=8,4$ და $y=2,1$).



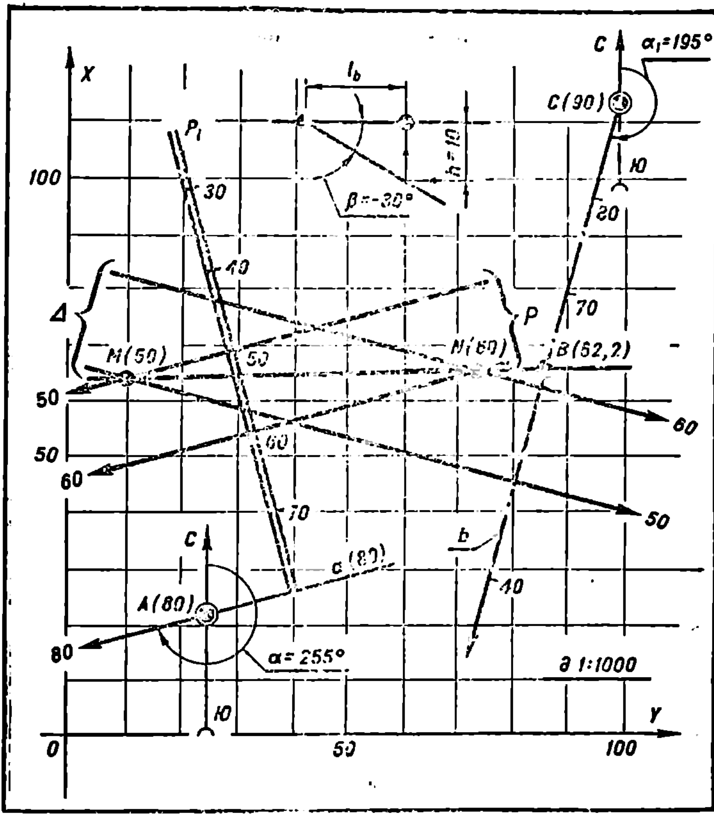
მაგალითი № 11. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდი თარაზულებით და A, B, C,... წერტილები. საჭიროა გამოვარკვიოთ ამ წერტილების განლაგება ფენის სიბრტყის მიმართ. ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყის შეცვლით და ახალ სისტემაში ფენის სიბრტყე მაგეგმილებელ სიბრტყედ გარდავქმნათ. ამ სისტემაში მოვძებნოთ მოცემული წერტილების ახალი გეგმილები A_1, B_1, C_1,... ამის შემდეგ ნახაზზე ნათლად გამოჩნდება, თუ რომელი წერტილი მდებარეობს ფენის სიბრტყის ზემოთ, ქვემოთ და სიბრტყეზე. აქვე შევნიშნოთ, რომ საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებლობა გვეძლევა უშუალოდ გეგმაზე გავზომოთ მანძილები მოცემული წერტილებიდან ფენის სიბრტყემდე. მაგალითად, A წერტილიდან ფენის სიბრტყემდე მანძილს A_1M_1 მონაკვეთი გამოსახავს.



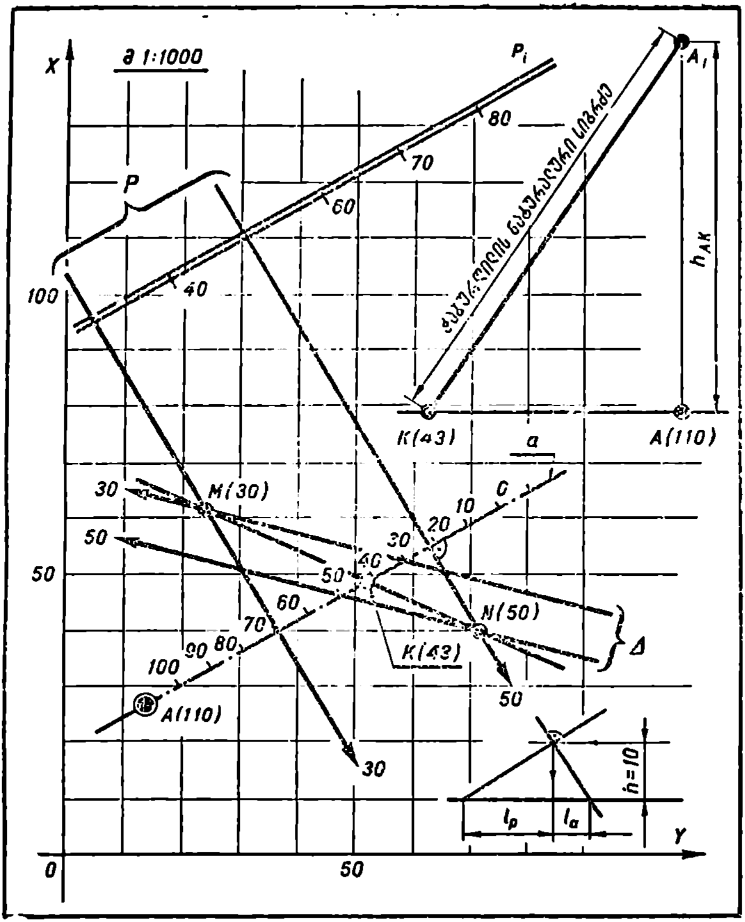
მაგალითი № 12. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდის (P) სამი წერტილი (A, B, C) და საგები გვერდის (Δ) ერთი წერტილი (D). საჭიროა თარაზულებით გამოისახოს ფენის საგები და სახურავი გვერდები იმ პირობით, რომ ეს გვერდები ურთიერთპარალელურ სიბრტყეებს წარმოადგენდეს. ფენის სახურავი გვერდის A, B და C წერტილები შევაერთოთ ერთმანეთთან სწორი ხაზებით და შემაერთებელი მონაკვეთები დავაგრადუიროთ. ერთნაირნიშნულიან წერტილებზე გამავალი სწორი ხაზები ფენის სახურავი გვერდის თარაზულები იქნება. ცნობილი პირობების დაცვით განვსაზღვროთ P სიბრტყის განერცობა და ვარდნილობა. ავაგოთ D წერტილზე გამავალი Δ სიბრტყის თარაზულები ისე, რომ დავიცვათ Δ და P სიბრტყეების ურთიერთპარალელობისათვის აუცილებელი პირობები: — თარაზულების პარალელობა, ინტერვალების ტოლობა და განერცობის თანხვედნა.



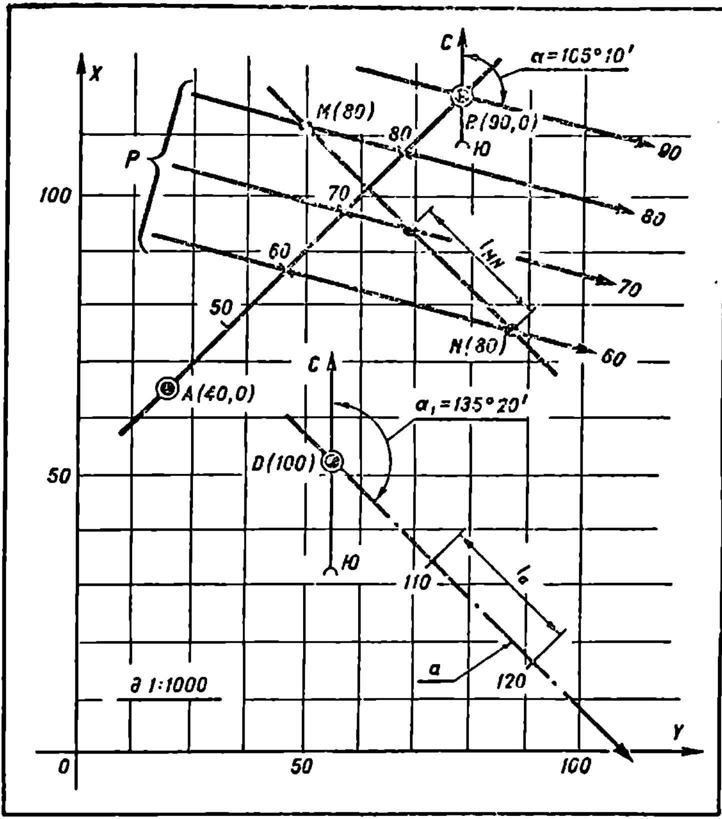
მაგალითი № 13. მოცემულია ფენისა (P) და ნასხლეტის (Δ) სიბრტყეების ჩაწოლის ელემენტები. სახელდობრ, თითოეულისათვის ცნობილია ერთი წერტილი და განვრცობისა და ვარდნილობის კუთხეები. საჭიროა განისაზღვროს ფენისა და ნასხლეტის სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი. გამოსავალი მონაცემებით ავაგოთ როგორც ერთი, ისე მეორე სიბრტყის თარაზულები (საჭირო ინტერვალების გრაფიკული გამოთვლა ნახაზზე ნაჩვენებია ცალკე). თარაზულების აგების შემდეგ, აღებულ შემთხვევაში, ამოცანა დაიყვანება ორი სიბრტყის გადაკვეთის იმ შემთხვევამდე, როდესაც მკვეთი სიბრტყეების ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები უშუალოდ ნახაზის ფარგლებში იკვეთებიან. მიღებული MN ხაზი საძიებელი გადაკვეთის ხაზი იქნება. შევნიშნოთ, რომ განსხვავებულ პირობებში, როდესაც ერთნაირნიშნულიანი თარაზულები ნახაზის ფარგლებში არ იკვეთებიან, საჭიროა ვისარგებლოთ შესაბამისი შემთხვევებისათვის რეკომენდებული გზებით (იხ. § 5·2).



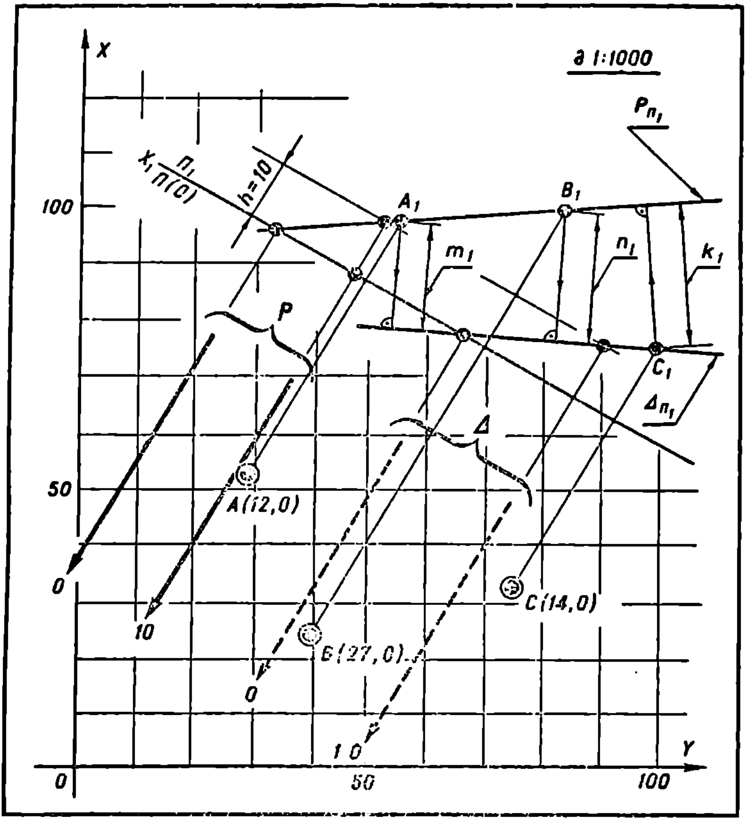
მაგალითი № 14. მოცემულია მიწისქვეშა ფენის სახურავი გვერდი (P), რომელიც განსაზღვრულია ერთი წერტილით (A), განვრცობითა ($\alpha = 255°00'$) და ქანობით ($i=2/3$). მოცემულია აგრეთვე მიწის ზედაპირის C წერტილი და ამ წერტილიდან ფენისაკენ გასაყვანი ჭაბურღილის ღერძის განვრცობისა ($\alpha=195°00'$) და დახრის კუთხე ($\beta=-30°00'$). საჭიროა განისაზღვროს დახრილი ჭაბურღილის ფენთან შეხვედრის წერტილის კოორდინატები. გამოსავალი მონაცემებით ავაგოთ ფენის სახურავი გვერდის (P) ქანობის მასშტაბი. საჭირო ინტერვალი გამოვითვალოთ მოცემული ქანობის მიხედვით. ქანობი და ინტერვალი ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია. ამის გამო, როცა $i=2/3$, მაშინ $l_p=1{,}5$. ავაგოთ C წერტილიდან გასაყვანი ჭაბურღილის ღერძი და დავაგრადუიროთ. საჭირო ინტერვალი გრაფიკულად გამოვითვალოთ, მოცემული კვეთის სიმაღლისა ($h=10$) და დახრის კუთხის მიხედვით. ამის შემდეგ ამოცანა დაიყვანება სწორი ხაზით სიბრტყის გადაკვეთის ამოცანაზე (იხ. § 5·1). მიღებული B წერტილის კოორდინატები უშუალოდ გეგმაზე განისაზღვრება.



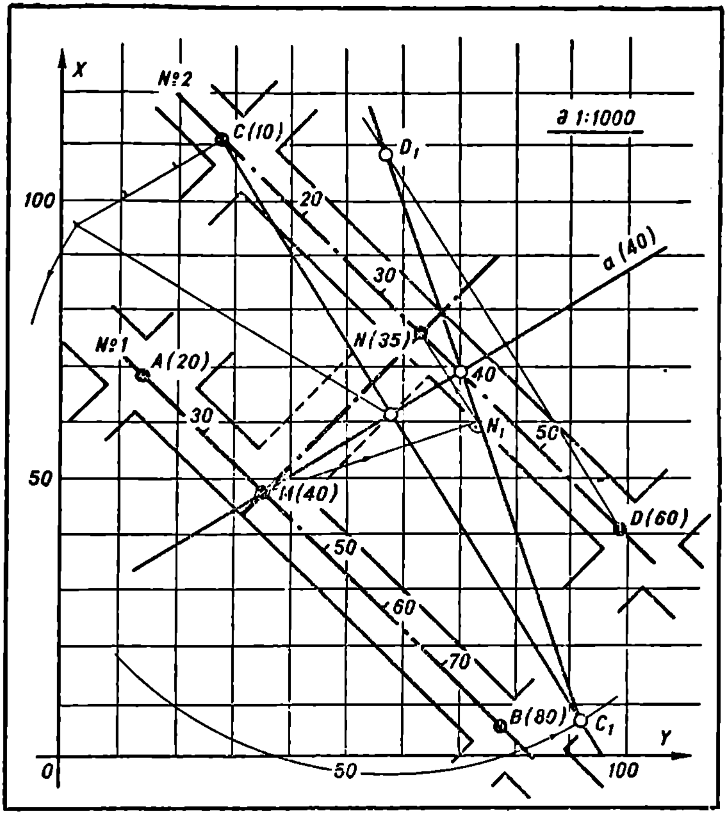
მაგალითი № 15. მოცემულია მიწისქვეშა ფენის სახურავი გვერდის ქანობის მასშტაბი (P_i) და მიწის ზედაპირზე მდებარე A წერტილი. საჭიროა A წერტილიდან ფენთან შეხვედრამდე გაყვანილ იქნეს ჭაბურღილი, რომელსაც უმცირესი სიგრძე ექნება. ეს ამოცანა წერტილიდან სიბრტყეზე მართობის დაშვებისა და სწორი ხაზით სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის განსაზღვრის ამოცანებისაგან შედგება. მოცემული A წერტილიდან დავუშვათ a მართობი P სიბრტყეზე და დავაგრადუიროთ (იხ. § 7-3). განვსაზღვროთ a მართობის P სიბრტყესთან გადაკვეთის K წერტილი (იხ. § 5-1) და გავზომოთ AK მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე სამკუთხედის წესით (ნახაზზე ნაჩვენებია ცალკე).



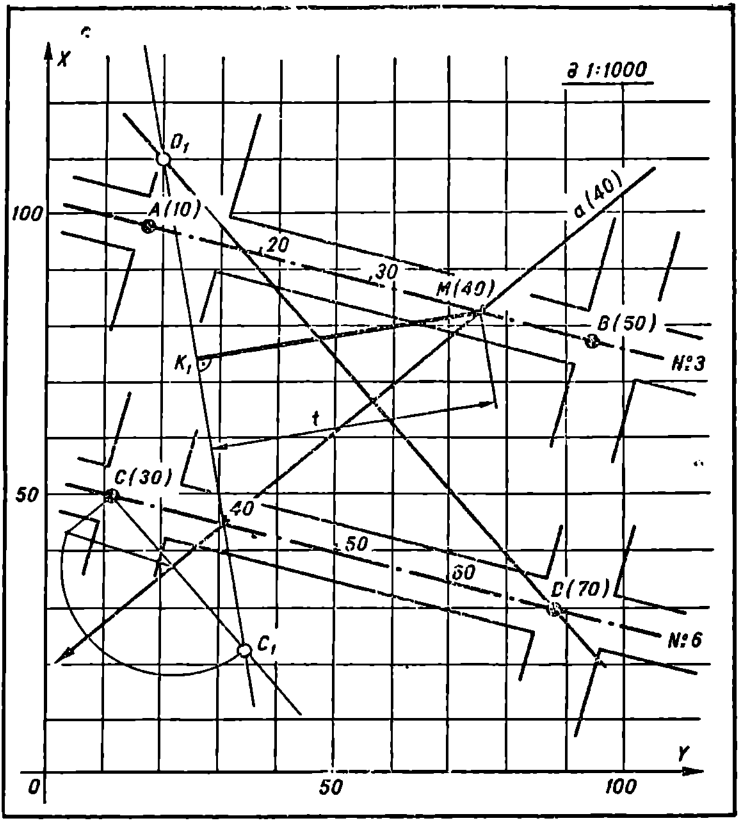
მაგალითი № 16. მოცემულია ფენის ერთ-ერთი გვერდის ორი წერტილი (*A* და *B*) და განვრცობის კუთხე (α). მოცემულია აგრეთვე ფენის სიბრტყის გარეშე მდებარე *D* წერტილი. საჭიროა გეგმაზე განისაზღვროს *D* წერტილიდან გასაყვანი, ფენის სიბრტყის პარალელური და მოცემული დირექციული კუთხით (α_1) მიმართული გამონამუშევრის ღერძი (*a*). ავაგოთ *D* წერტილიდან α_1 დირექციული კუთხით გამომავალი სხივი. იმისათვის, რომ დავიცვათ ამ ღერძის პარალელობა ფენის სიბრტყესთან, საკმარისია ფენის სიბრტყეში ავიღოთ *a* ღერძის პარალელური *MN* სწორი ხაზი და *a* ღერძი დავაგრადუიროთ ისე, რომ მისი ინტერვალი (l_a) უდრიდეს *MN* სწორი ხაზის ინტერვალს (l_{MN}) და მათი ნიშნულების ზრდის მიმართულება იყოს თანხვედრილი. ამ პირობებით განსაზღვრული *a* სხივი გასაყვანი გამონამუშევრის საძიებელი ღერძი იქნება.



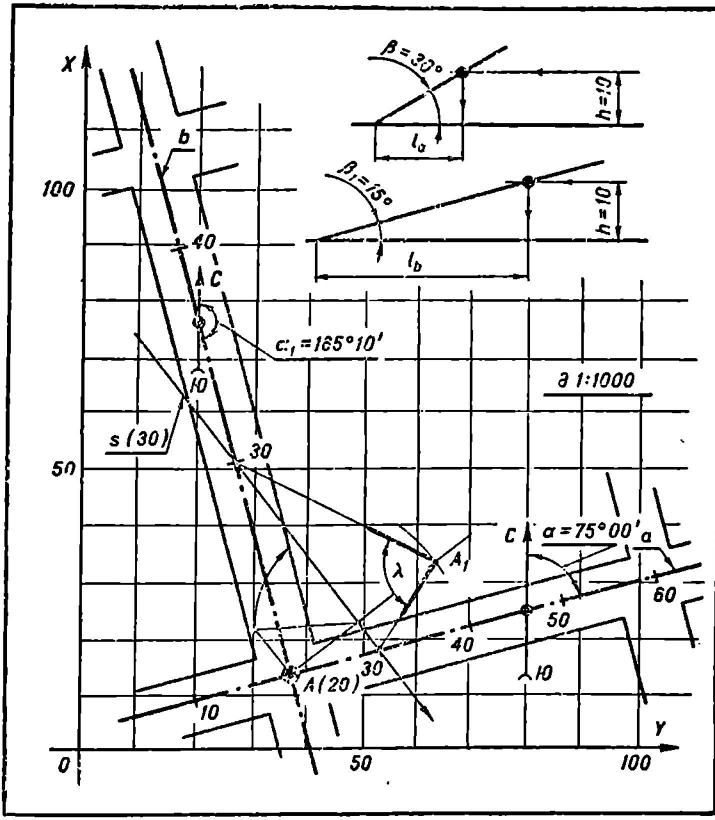
მაგალითი № 17. გეგმაზე მოცემულია ორი სიბრტყე; ერთი მათგანი (P) ერთი ფენის საგებ, ხოლო მეორე (Δ) — მეორე ფენის სახურავ გვერდს წარმოადგენს. მოცემულია აგრეთვე სამი წერტილი (A, B, C). საჭიროა განისაზღვროს ამ სიბრტყეების ურთიერთდამოკიდებულება და მათ შორის არსებული უმცირესი მანძილები მოცემულ წერტილებში. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ მოცემულმა ორივე სიბრტყემ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს (აღებულ შემთხვევაში ეს შესაძლებელია მოცემული სიბრტყეების თარაზულების ურთიერთპარალელობის გამო). ახალ სისტემაში ამ სიბრტყეების ურთიერთდამოკიდებულება უშუალოდ გამოჩნდება. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ისინი ურთიერთდახრილნი არიან, გარდა ამისა, მოცემული წერტილებიდან A და B ეკუთვნის P სიბრტყეს, ხოლო C მოთავსებულია Δ სიბრტყეზე. საძიებელი უმცირესი მანძილი, მაგალითად, A წერტილში A_1 გეგმილიდან Δ_{Π_1} კვალზე მართობის დაშვებით გაიზომება (m_1). B და C წერტილებში საძიებელი მანძილები (n_1 და k_1) ანალოგიურად განისაზღვრება.



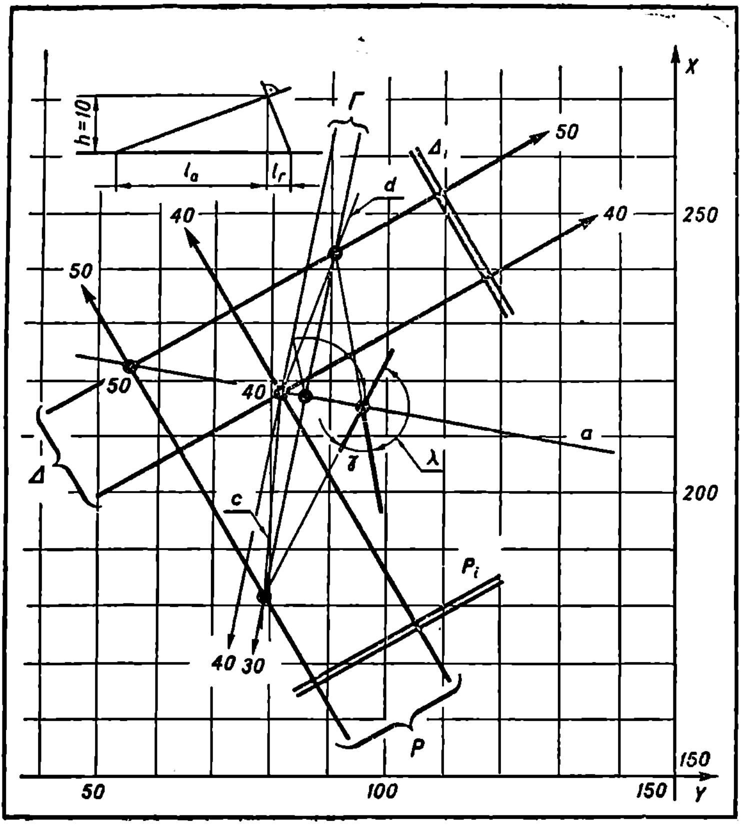
მაგალითი № 18: მოცემულია მიწისქვეშა № 1 და № 2 გამონამუშევრების ღერძები. საჭიროა გეგმაზე განისაზღვროს მათი შემაერთებელი გვირაბის ღერძი იმ პირობით, რომ უკანასკნელი გაყვანილი იქნება № 1 გამონამუშევრის M(40) წერტილიდან და ექნება უმცირესი სიგრძე (მე-5 მაგალითის ანალოგიური შემთხვევა). ამჯერად გამოვიყენოთ შეთავსების ხერხი. მოცემული M წერტილი შევაერთოთ № 2 გამონამუშევრის (40) წერტილთან. № 2 გამონამუშევრის ღერძი მოვაბრუნოთ a(40) თარაზულას გარშემო უკანასკნელის დონის სიბრტყესთან შეთავსებამდე. შეთავსებულ C_1D_1 ხაზზე M წერტილიდან დავუშვათ მართობი. მიღებული MN_1 მონაკვეთი გასაყვანი გვირაბის ნატურალურ სიგრძეს გამოსახავს. გადავიტანოთ N_1 წერტილი № 2 გამონამუშევრის ღერძზე. მიღებული N წერტილი შევაერთოთ მოცემულ M წერტილთან. M(40) N(35) სწორი ხაზი გასაყვანი გვირაბის საძიებელი ღერძი იქნება.



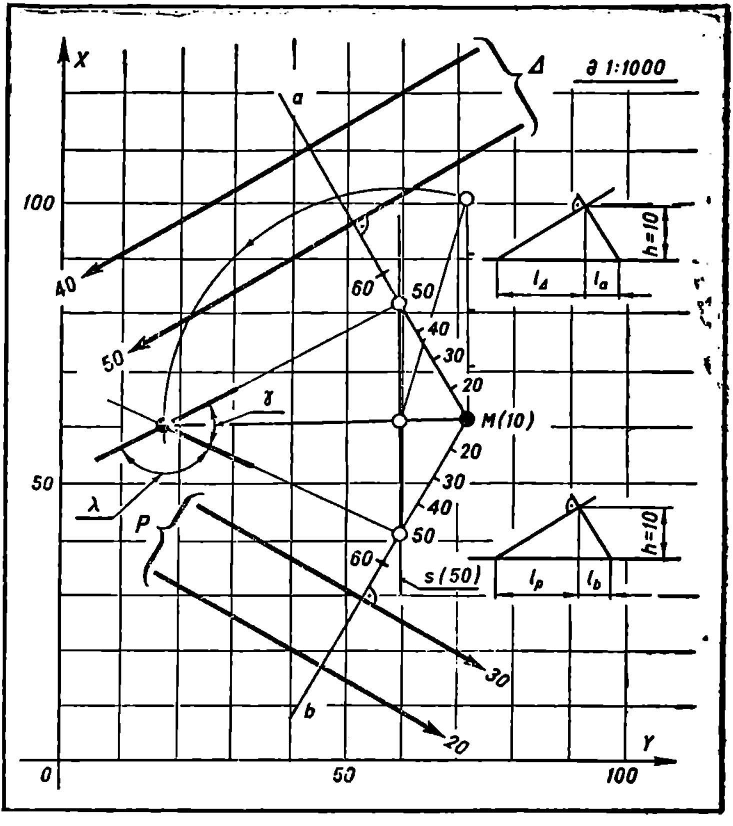
მაგალითი № 19. მოცემულია №3 და №6 გამონამუშევრების ღერძები, რომლებიც ურთიერთპარალელურნი არიან. საჭიროა მათ შორის უმოკლესი მანძილის გაზომვა. დასმული ამოცანა შეიძლება განხილული იქნეს როგორც ორ პარალელურ ხაზს შორის მანძილის გაზომვა. მოცემული პარალელური ღერძებით განსაზღვრული სიბრტყის a(40) თარაზულას გარშემო ბრუნვით № 6 გამონამუშევრის ღერძი (CD) ბრუნვის ღერძის (a) დონის სიბრტყესთან შევათავსოთ. შეთავსებულ C_1D_1 ღერძზე M წერტილიდან დავუშვათ მართობი. მიღებული $MK_1=t$ მონაკვეთი საძიებელი მანძილი იქნება.



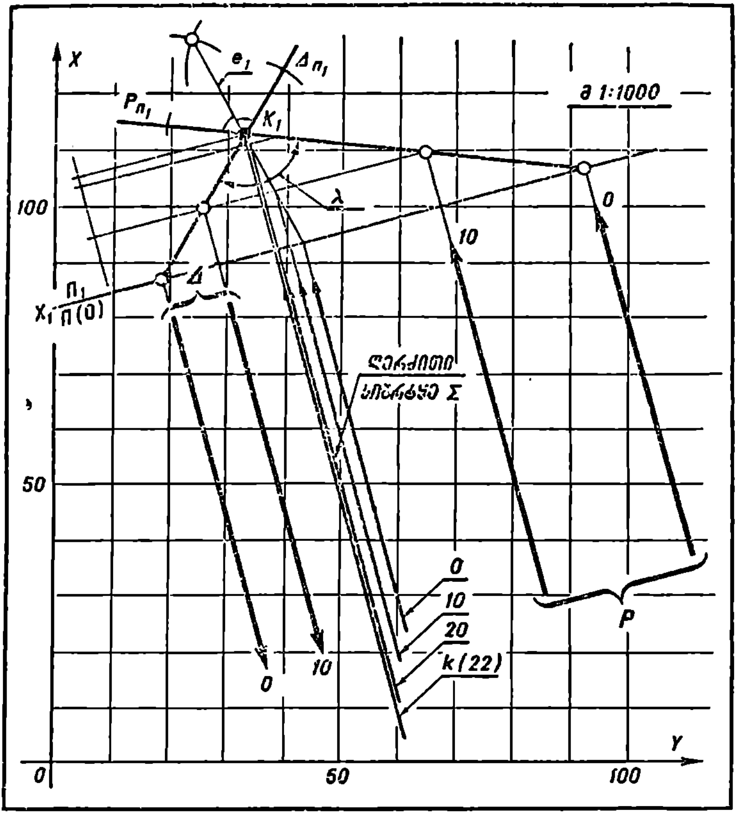
მაგალითი № 20. მოცემულია A წერტილში გამავალი დახრილი გამონამუშევრების a და b ღერძები. საწყისი მონაცემებია: $A(14;\ 37;\ 20)$; $a(A;\ \alpha=75°00';\ \beta=30°00')$; $b(A;\ \alpha_1=165°10';\ \beta_1=15°00')$; $h=10$. საჭიროა გაიზომოს მოცემულ ღერძებს შორის მოთავსებული λ კუთხე. წინასწარი მონაცემებით ავაგოთ A წერტილი და მასზე გამავალი a და b ღერძები. მოცემული დახრის კუთხეებისა და კვეთის სიმაღლის საშუალებით ვიპოვოთ თითოეული ღერძის ინტერვალი (ნახაზზე ნაჩვენებია ცალკე) და დავაგრადუიროთ. ავაგოთ a და b ურთიერთგადაკვეთილი სწორი ხაზებით განსაზღვრული სიბრტყის ნებისმიერი $s(30)$ თარაზულა. უკანასკნელის დონის სიბრტყესთან შეთავსებით გავზომოთ A წერტილთან მდებარე, a და b ღერძებს შორის მოთავსებული λ კუთხე (იხ. § 7-6).



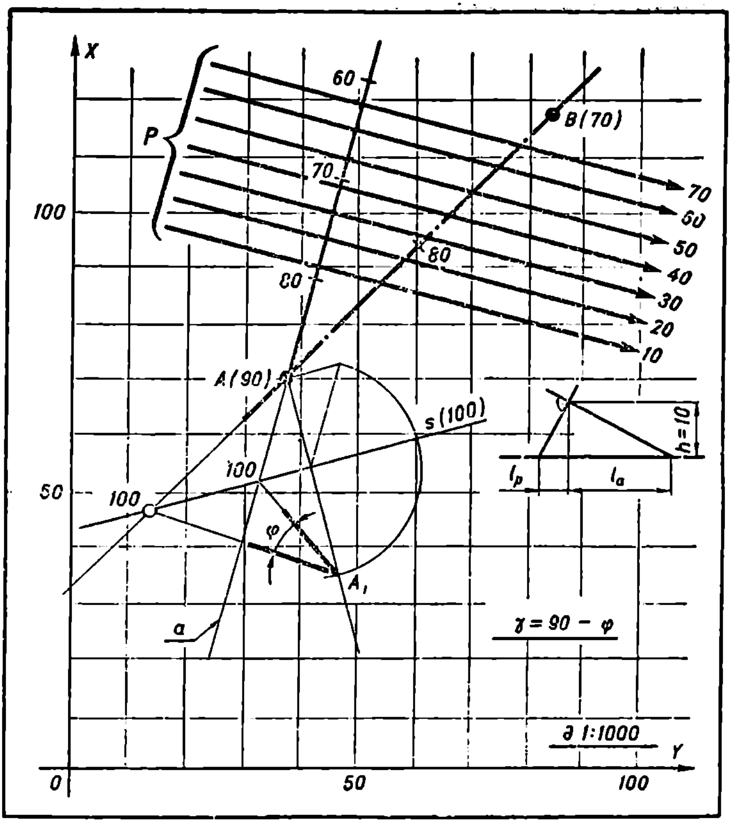
მაგალითი № 21. გეგმაზე მოცემულია ფენისა (P) და ნასხლეტის (Δ) სიბრტყეები. საჭიროა გაიზომოს მათ შორის მოთავსებული ორწახნაგა კუთხეები. ავაგოთ P და Δ სიბრტყეების ურთიერთკვეთის ხაზი ანუ გასაზომი ორწახნაგა კუთხის წიბო (a) და გავზომოთ მისი ინტერვალი (l_a). შემოვიტანოთ a წიბოს მართობული Γ სიბრტყე. საჭირო ინტერვალი l_Γ გამოვითვალოთ გრაფიკულად (ნახაზზე ნაჩვენებია ცალკე). ვიპოვოთ Γ სიბრტყის P და Δ სიბრტყეებთან გადაკვეთის c და d ხაზები. ამ ორი გადაკვეთილი ხაზით განსაზღვრული სიბრტყე, შეთავსების ხერხის გამოყენებით, დონის სიბრტყედ გარდავქმნათ. ამის შემდეგ საძიებელი კუთხეები (λ და γ) ნახაზზე თავისი ნამდვილი სიდიდით დაგეგმილდებიან.



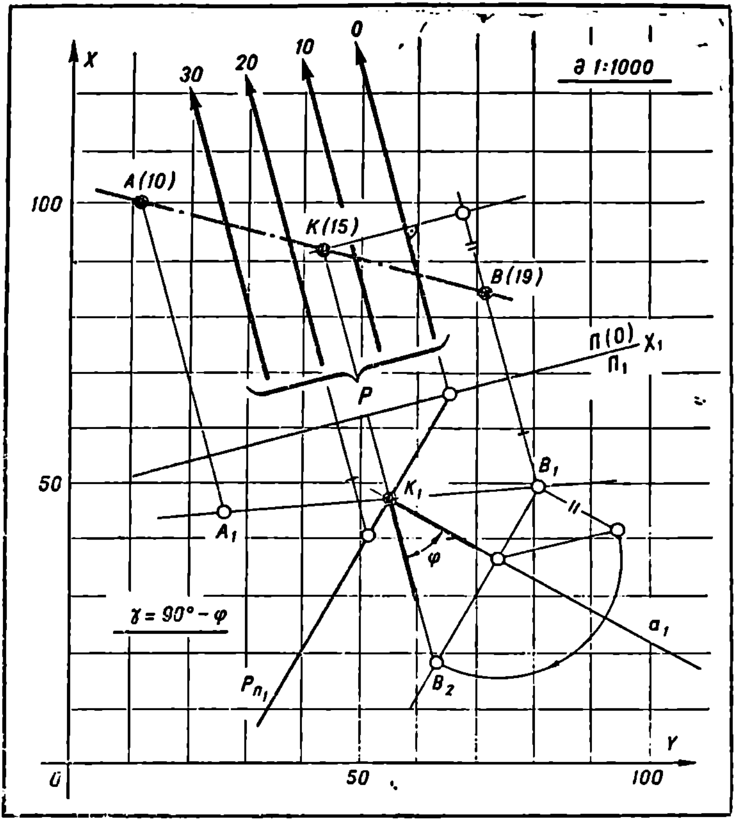
მაგალითი № 22. მოცემულია ფენისა (P) და ნასხლეტის (Δ) სიბრტყეები. საჭიროა გაიზომოს მათ შორის მოთავსებული ორწახნაგა კუთხეები (λ და γ). წინა მაგალითის ანალოგიურად აქაც ამოცანა ორ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვაზე დაიყვანება, მაგრამ აღებულ შემთხვევაში გასაზომი კუთხეების საერთო წიბოს ასაგებად საჭიროა დამხმარე აგებები. ვისარგებლოთ ერთ-ერთი გზით: გეგმაზე ავირჩიოთ ნებისმიერი $M(10)$ წერტილი ისე, რომ ადვილად შეიძლებოდეს ამ წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეებზე მართობის დაშვება. ავაგოთ ასეთი მართობები (a და b) და დავაგრადუიროთ ისინი. საჭირო ინტერვალი გამოვითვალოთ გრაფიკულად. a და b მართობებით განსაზღვრული სიბრტყე თავისივე ნებისმიერი $s(50)$ თარაზულას გარშემო შემობრუნებით დონის სიბრტყედ გარდავქმნათ. ახალ მდებარეობაში a და b მართობებს შორის მოთავსებული კუთხეები საძიებელ λ და γ კუთხეებს გამოსახავენ.



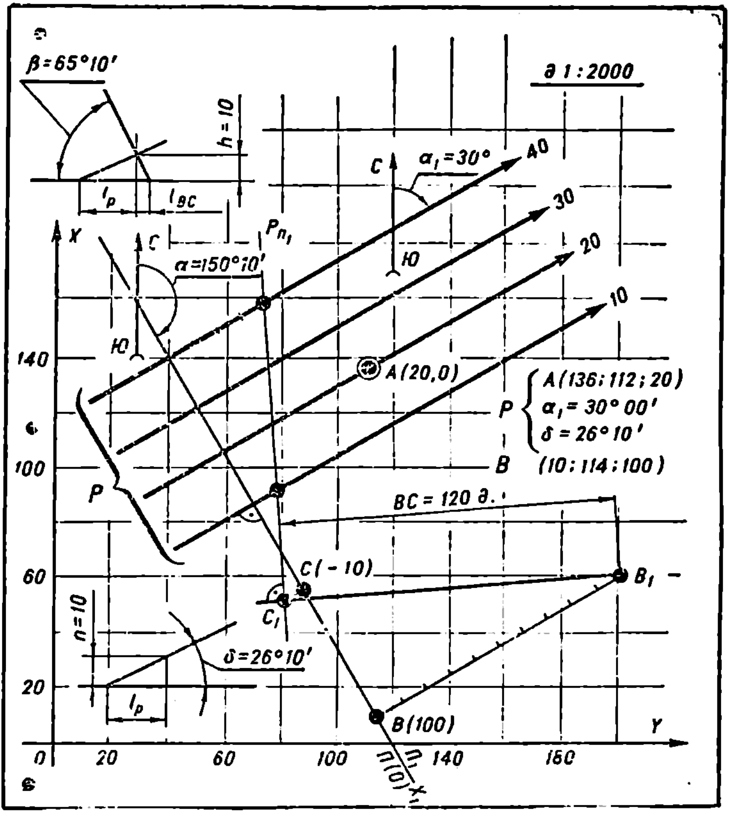
მაგალითი № 23. მოცემულია ნაოჭის ფრთები (P და Δ). საჭიროა: 1) გაიზომოს ნაოჭის ფრთებს შორის მოთავსებული კუთხე (λ); 2) თარაზულებით გამოისახოს ღერძითი სიბრტყე და 3) განისაზღვროს ნაოჭის სახე. შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში P და Δ სიბრტყეებს მაგეგმილებელი სიბრტყეების მდებარეობა მიეცეს (ეს შესაძლებელია, რადგან მოცემული ნაოჭის ფრთების თარაზულები გეგმაზე ურთიერთპარალელურნი არიან). P_{Π_1} და Δ_{Π_1} კვალებს შორის მოთავსებული λ კუთხე საძიებელი კუთხე იქნება, ხოლო ამავე კვალების გადაკვეთის K_1 წერტილზე გამავალი თარაზულა $K(22)$—მოცემული ნაოჭის სახსარი. λ კუთხის e_1 ბისექტრისა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ღერძითი სიბრტყის (Σ) კვალი (Σ_{Π_1}) X_1 სისტემაში. მისი დაგრადუირებით ავაგებთ ღერძითი სიბრტყის დანარჩენ თარაზულებს. ვინაიდან ღერძითი სიბრტყე (Σ) ვარდება სახსრიდან ფრთების ვარდნილობის მიმართულებით, მოცემული ნაოჭი ანტიკლინური სახისაა.



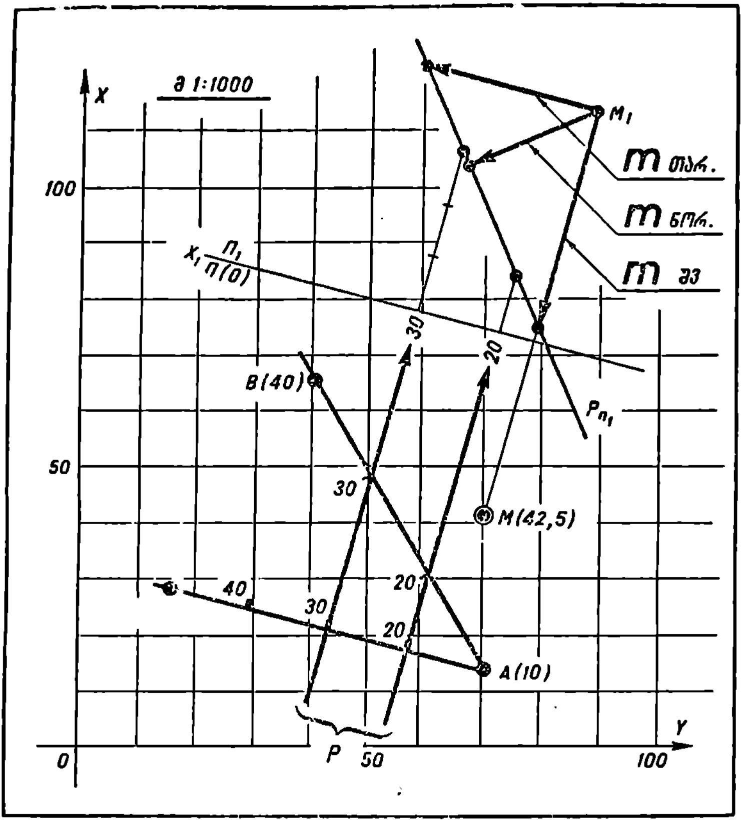
მაგალითი № 24. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდი (P) და ჭაბურღილის ღერძი (AB). საჭიროა განისაზღვროს ფენის სახურავი გვერდის სიბრტყისადმი ჭაბურღილის ღერძის დახრის კუთხე (γ). A წერტილიდან P სიბრტყეზე დავუშვათ მართობი (a) და დავაგრადუიროთ იგი. ავაგოთ AB ღერძითა და a მართობით განსაზღვრული სიბრტყის ნებისმიერი ს(100) თარაზულა. ს თარაზულას გარშემო ბრუნვით, მისივე დონის სიბრტყესთან შეთავსებამდე, ავაგოთ AB ღერძსა და a მართობს შორის მოთავსებული φ კუთხე ნატურალური სიდიდით. ფენის სახურავი გვერდის სიბრტყისადმი ჭაბურღილის ღერძის დახრის კუთხე (γ) მიღებული φ კუთხის 90°-მდე შემავსებელი იქნება. აქედან, საძიებელი კუთხე $\gamma = 90° - \varphi$.



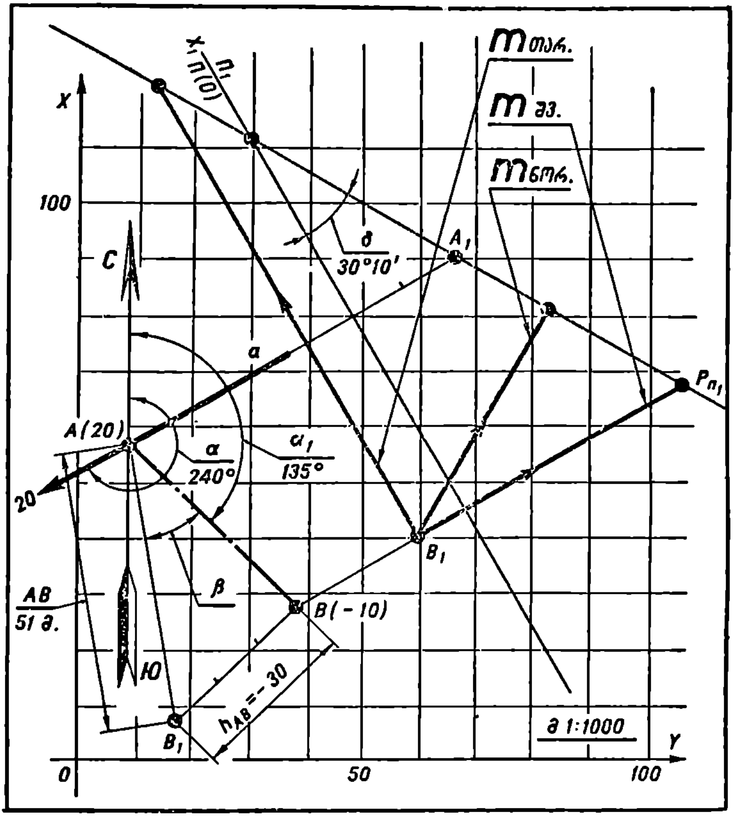
მაგალითი № 25. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდი (P) და ქაბურღილის ღერძი (AB). საჭიროა განისაზღვროს ქაბურღილის ფენთან შეხვედრის წერტილი (K) და ქაბურღილის ფენის სიბრტყისადმი დახრის კუთხე (γ). შევცვალოთ გეგმილთსიბრტყე ისე, რომ მოცემულმა P სიბრტყემ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს. ახალ სისტემაში მივიღებთ: $K_1 = P_{\Pi_1} \times A_1B_1$. K_1 წერტილის ძველ სისტემაში გადატანით განისაზღვრება საძიებელი K წერტილი. მისი ნიშნული გამოითვლება ორი გზით: 1) AB ღერძის გრადუირებით და 2) K_1 გეგმილის X_1 ღერძიდან დაშორების გაზომვით. γ კუთხის გასაზომად K წერტილიდან აღვმართოთ მართობი $a \perp P$ და X_1 სისტემაში ბრუნვის ხერხის გამოყენებით განვსაზღვროთ a და AB ხაზებს შორის მოთავსებული მახვილი კუთხე. როგორც ვიცით (იხ. § 7-9), საძიებელი კუთხე $\gamma = 90^\circ - \varphi$.



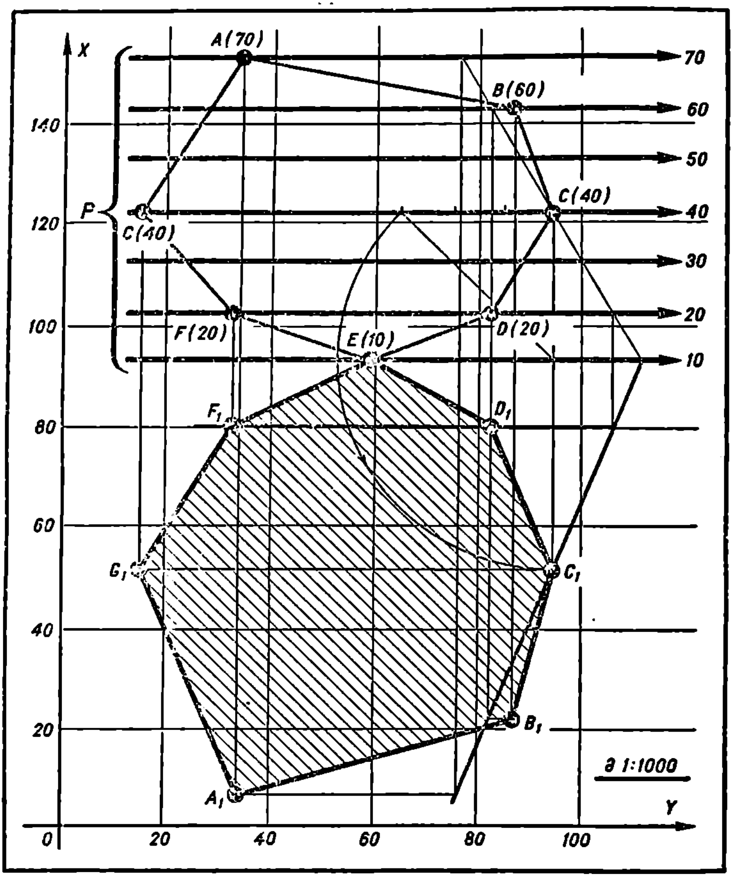
მაგალითი № 26. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდის (P) A წერტილი და ჩაწოლის ელემენტები α_1 და δ. ცნობილია აგრეთვე დღის ზედაპირის B წერტილის კოორდინატები. საჭიროა გეგმაზე გამოიხაზოს B წერტილიდან ფენის მართობულად გასაყვანი ქაბურღილის ღერძი, განისაზღვროს მისი ფენთან შეხვედრის წერტილი (C), სიგრძე (BC) და მიმართულება (განვრცობა (α) და ვარდნილობა (β)). მოცემული B წერტილიდან დავუშვათ მართობი P სიბრტყეზე და გეგმილთსიბრტყეების შეცვლის ხერხით განვსაზღვროთ ამ მართობის P სიბრტყესთან გადაკვეთის C წერტილი. BC სწორი ხაზი გასაყვანი გამონამუშევრის ღერძი იქნება, ხოლო ახალ სისტემაში მიღებული B_1C_1 გეგმილი — მისი ნატურალური სიგრძე (120 მეტრი). BC ღერძის მიერ მერიდიანის ჩრდილოეთ მიმართულებასთან შედგენილი მარჯვენა ვექტორული კუთხის გაზომვით განისაზღვრება გასაყვანი გამონამუშევრის ღერძის განვრცობა ($\alpha = 150°10'$), სიბრტყისა და სწორი ხაზის მართობულობის პირობის (იხ. § 7-3) გამოყენებით კი — BC ღერძის დახრის კუთხე ($\beta = 65°10'$).



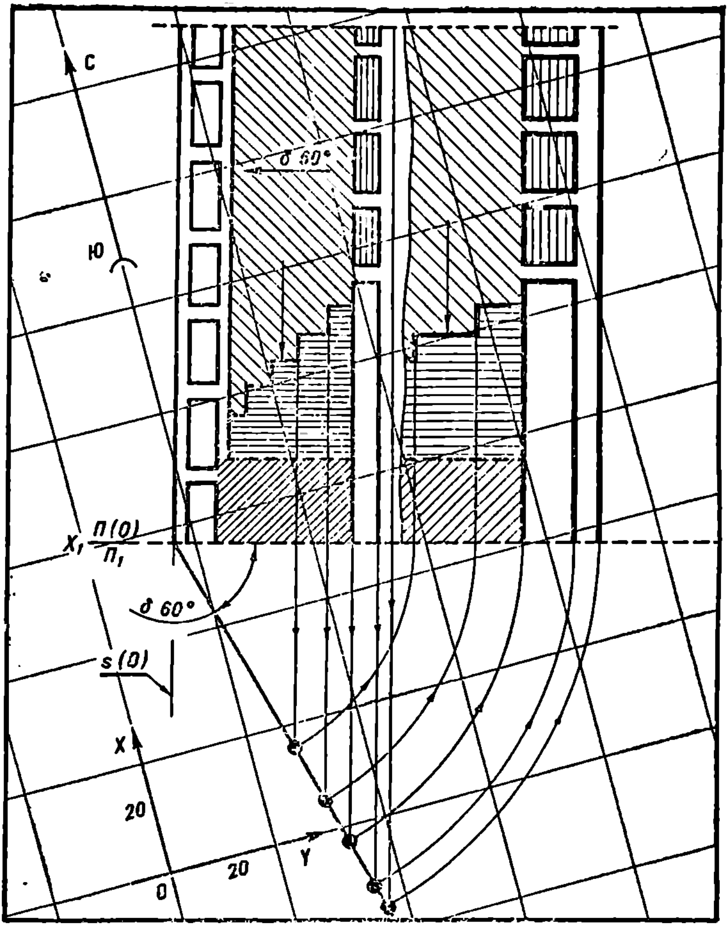
მაგალითი № 27. მოცემულია ფენის საგები გვერდის სამი წერტილი (A, B, C) და სახურავი გვერდის ერთი წერტილი (M). საჭიროა M წერტილში განისაზღვროს ფენის შვეული, თარაზული და ნორმალური სიმძლავრე (სისქე). ფენის საგები გვერდის ABC მცირე უბანი მივიღოთ სიბრტყედ (P) და ავაგოთ მისი თარაზულები. P სიბრტყის განვრცობის ჯვარედინად შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე (Π_1). ავაგოთ ახალ სისტემაში P სიბრტყის კვალი — P_{Π_1} და M წერტილის M_1 გეგმილი. M_1 გეგმილიდან P_{Π_1} კვალზე დაშვებული მართობი ფენის ნორმალურ სიმძლავრეს ($m_{\text{ნორმალური}}$) გამოსახავს. M_1 გეგმილზე გავლებული X_1 ღერძის მართობული და პარალელური სწორი ხაზების მონაკვეთები, M_1 გეგმილიდან P_{Π_1} კვალამდე, შესაბამისად ფენის შვეულ ($m_{\text{შვეული}}$) და თარაზულ ($m_{\text{თარაზული}}$) სიმძლავრეებს განსაზღვრავენ.



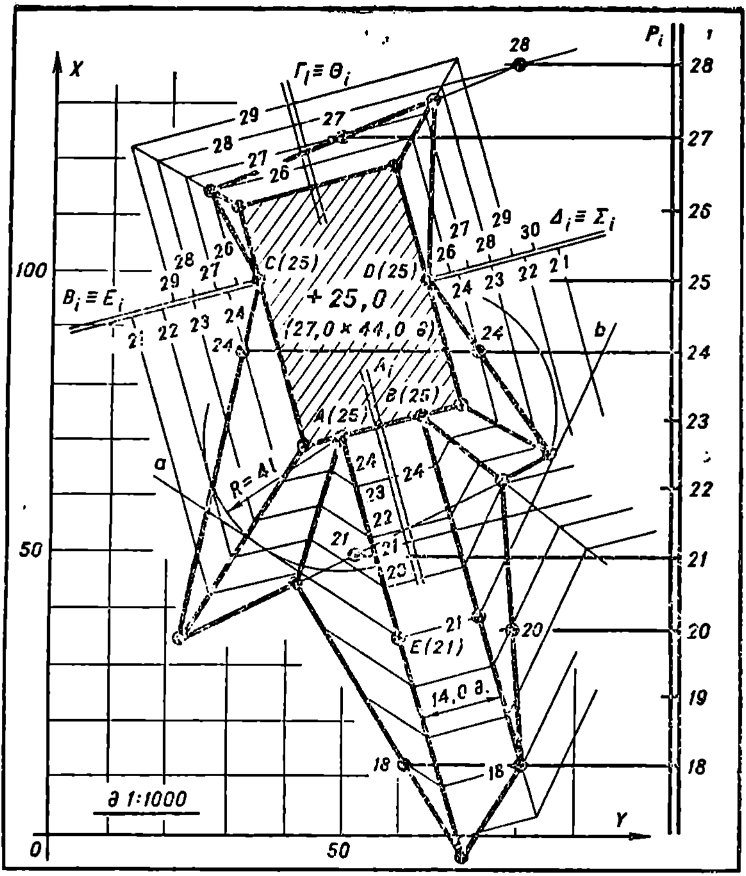
მაგალითი № 28. ვთქვათ, მოცემული ფენის განვრცობისა და ვარდნილობისადმი ირიბად გაყვანილმა ჭაბურღილმა ფენის სახურავი გვერდი (P) გადაკვეთა A წერტილში, ხოლო საგები — B წერტილში. ცნობილია ფენის სახურავი გვერდის A წერტილის კოორდინატები და ჩაწოლის ელემენტები α და δ. ცნობილია აგრეთვე AB მონაკვეთის სიგრძე ($l_{\text{აბ}}$) და მიმართულება (α_1 და β). საჭიროა განისაზღვროს B წერტილში ფენის სიმძლავრე საჭიეე მიმართულებით. მოცემულობის მიხედვით ავაგოთ ფენის სახურავი გვერდის a თარაზულა და განვსაზღვროთ AB გამონამუშევრის ღერძი. AB მონაკვეთისა და β დახრის კუთხის საშუალებით ავაგოთ B წერტილის გეგმილი და განვსაზღვროთ მისი ნიშნული (-10). ფენის სახურავი გვერდის ჯვარედინად შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე (Π_1); a თარაზულასა და δ დახრის კუთხის საშუალებით ავაგოთ P სიბრტყის კვალი (P_{Π_1}) X_1 სისტემაში, ამავე სისტემაში განვსაზღვროთ B წერტილის ახალი გეგმილი (B_1). ამის შემდეგ საძიებელი სისქეები წინა მაგალითის ანალოგიურად განისაზღვრება.



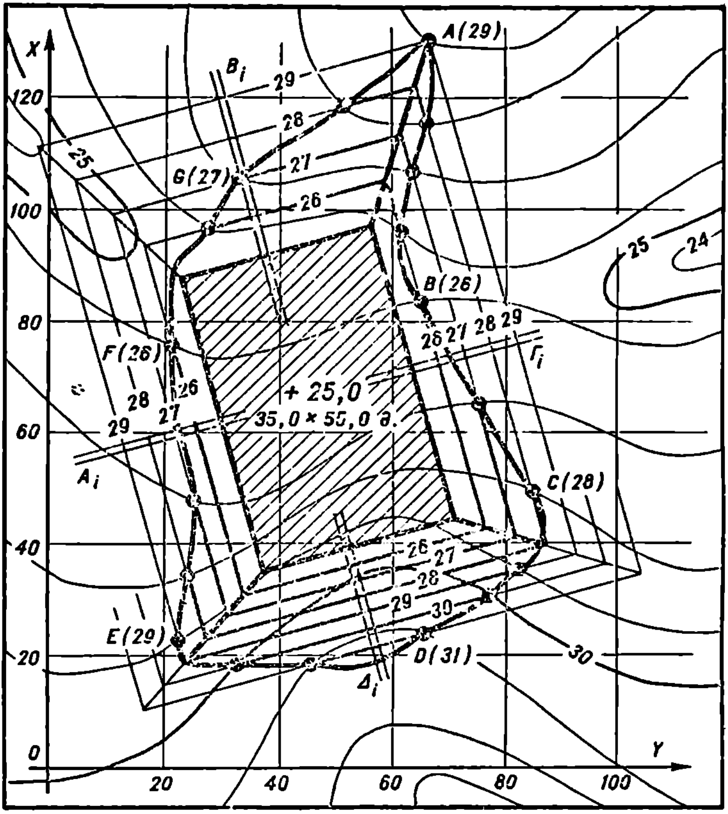
მაგალითი № 29. გეგმაზე მოცემულია საანგარიშო პერიოდში ნახშირის დახრილ ფენში გამომუშავებული $ABC...G$ ფართობი. საჭიროა ამ ფართობის ნამდვილი სიდიდის განსაზღვრა. მოცემული $ABC...G$ მრავალკუთხედი მივიღოთ ბრტყელ გეომეტრიულ ნაკვთად და ჩვენთვის ცნობილი ხერხით განვსაზღვროთ მისი ნამდვილი სიდიდე (იხ. § 7-10).



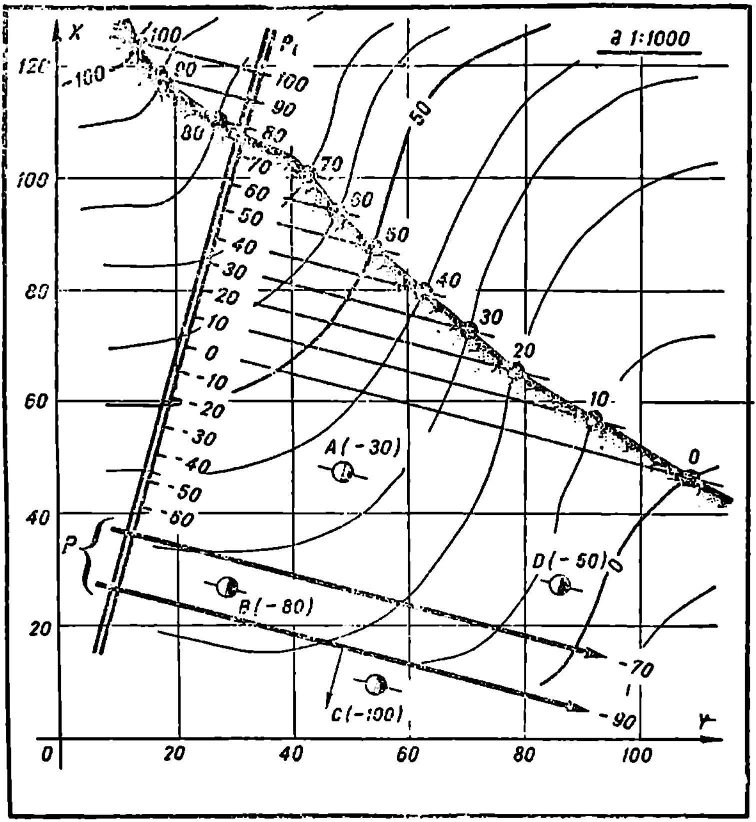
მაგალითი № 30. მოცემულია სამთო სამუშაოების უბნის გეგმა. ფენის დიდი კუთხით ვარდნილობის გამო უბნის ცალკეული ელემენტები მათ ნატურალურ სიდიდეებთან შედარებით დამახინჯებულადაა დაგეგმილებული. საჭიროა მოცემული უბნის გეგმა გარდავქმნათ ისე, რომ აღვადგინოთ უბნის ცალკეული ელემენტების ნატურალური ფორმა და ზომები. ვისარგებლოთ გეგმილთსიბრტყეების შეცვლისა და ბრუნვის ხერხების ერთობლივი გამოყენებით. ბრუნვის ღერძად მივიღოთ თარაზულა, $s(O)$. ფენის განვრცობის მართობულად შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთსიბრტყე (Π_1). თითოეული წერტილის შეთავსება მოვახდინოთ ჩვენთვის ცნობილი გზით (იხ. § 7-10). იმისათვის, რომ მიღებულმა ახალმა გეგმამ არ დაფაროს ძველი, სასურველია ეს გარდაქმნა და შესაბამისად ახალი გეგმის შედგენა მოხდეს გამჭვირვალე ქაღალდზე (კალკზე).



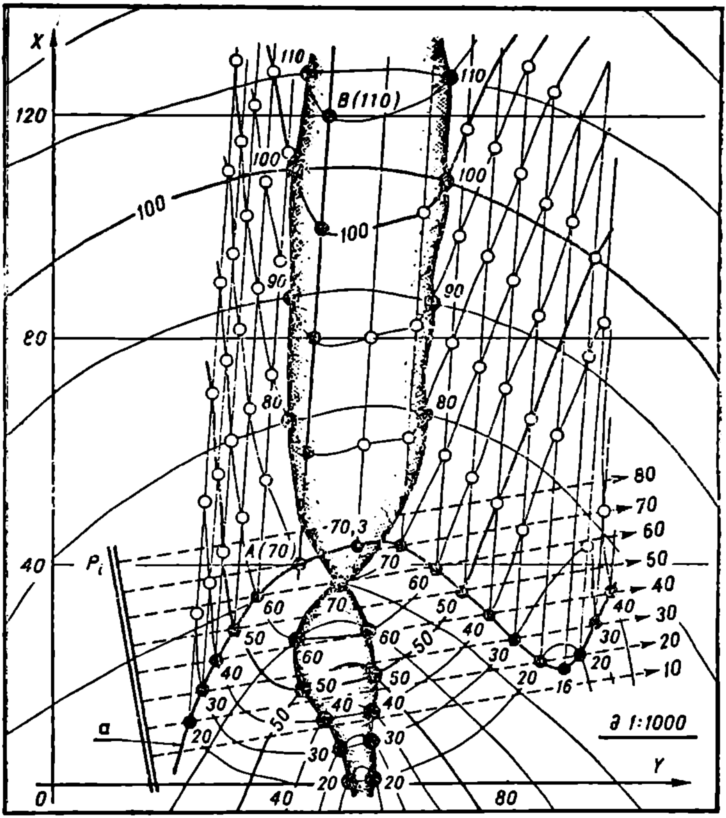
მაგალითი № 31. მოცემულია +25,0 მ სიმაღლეზე მოთავსებული 27,0×44,0 მ ზომის ჰორიზონტალური ბაქანი. მისი ვიწრო მხრიდან დედამიწის ზედაპირის (მიღებულია P სიბრტყედ) ვარდნილობის მიმართულებით, გამოდის 14 მ სიგანის დახრილი აპარელი (A სიბრტყე). მოცემული ბაქანი ერთი მხრიდან შემოსაზღვრულია თხრილით, ხოლო მეორე მხრიდან — ნაყარით. თითოეული გვერდი გაიგივებულია სიბრტყესთან და მოცემულია ამ სიბრტყეების ქანობის მასშტაბები. საჭიროა ვიპოვოთ გვერდების გადაკვეთა P სიბრტყესთან და ურთიერთშორის. ავაგოთ A, B, Γ, Δ, E და Σ სიბრტყეების თარაზულები და ვიპოვოთ მეზობელი სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის ხაზები. გარდა ამისა, ვიპოვოთ თითოეული სიბრტყის P სიბრტყესთან გადაკვეთის ხაზი. აპარელის გვერდების თარაზულების აგებისათვის მისი გვერდის, მაგალითად, $E(21)$ წერტილში გავავლოთ მოცემული $A(25)$ წერტილიდან შემოხაზული $R=4l$ რადიუსიანი რკალის მხები (a); მივიღებთ აპარელის ერთი გვერდის თარაზულების მიმართულებას. იგივეს გავიმეორებთ მეორე გვერდისთვისაც.



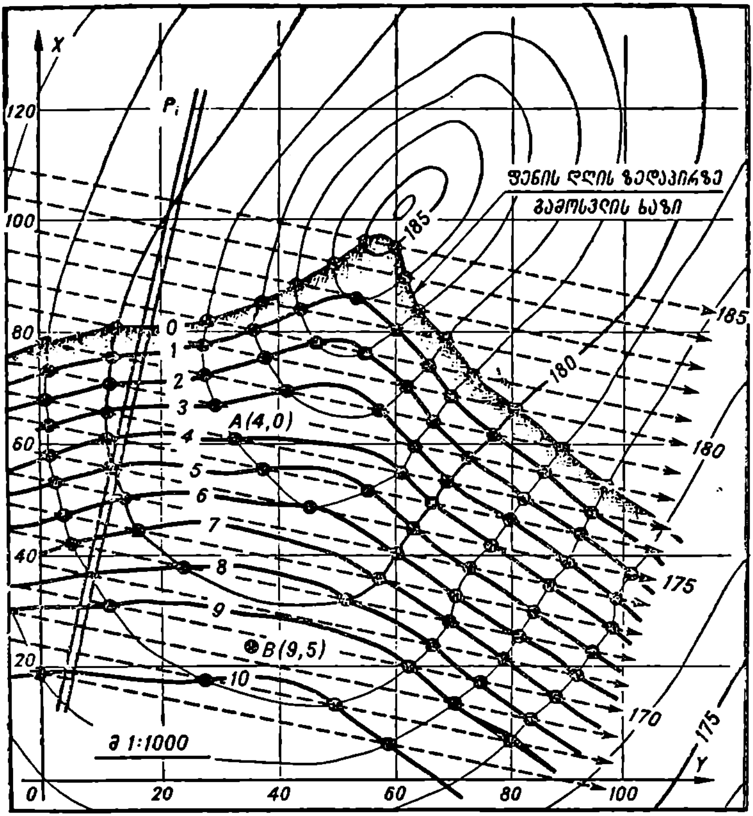
მაგალითი № 32. ღია სამთო სამუშაოების დაგეგმარების დროს ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც მოცემულია კარიერის ძირი (ჩვენ შემთხვევაში +25,0 მ სიმაღლეზე მოთავსებული 35,0×55,0 მ ზომის ჰორიზონტალური ბაქანი) და საჭიროა მისი გვერდითი კედლების (A, B, Γ და Δ სიბრტყეები) ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან გადაკვეთის ხაზის აგება. ეს ამოცანა ტოპოგრაფიული ზედაპირის სიბრტყით გადაკვეთის ამოცანამდე დაიყვანება. ამისათვის ავაგოთ კარიერის გვერდითი კედლების თარაზულები და დავნიშნოთ ტოპოგრაფიული ზედაპირის ერთსახელა იზოჰიფსებთან მათი გადაკვეთის წერტილები. მივიღებთ $A(29)$, $B(26)$, $C(28)$, $D(31)$ და ა. შ. წერტილებს. ამ წერტილების შემაერთებელი მრუდი მოცემული კარიერის გვერდითი კედლების ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან გადაკვეთის ხაზი იქნება.



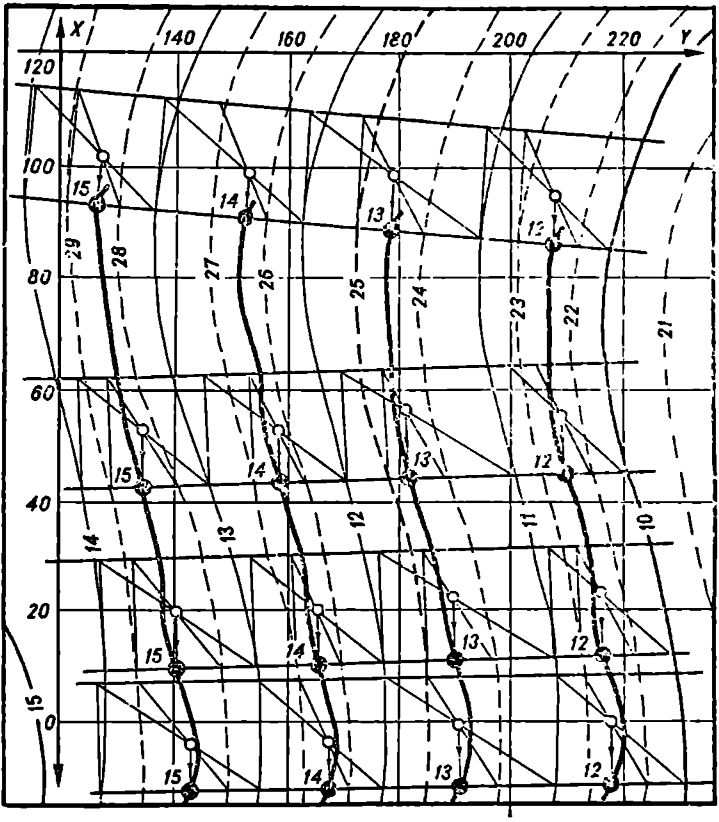
მაგალითი № 33. განვიხილოთ ფენის დღისეულ ზედაპირზე გამოსვლის ხაზის აგება. ეს შემთხვევა, როდესაც ფენის გარკვეული უბანი შეიძლება გაიგივებულ იქნეს სიბრტყესთან, განიხილება როგორც ტოპოგრაფიული ზედაპირის სიბრტყით გადაკვეთის ამოცანა. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ტოპოგრაფიული ზედაპირი და მის სიღრმეში ჩაწოლილი ფენის სახურავი გვერდის ოთხი წერტილი — $A(-30)$; $B(-80)$; $D(-50)$ და $C(-100)$. ფენის დღისეულ ზედაპირზე გამოსვლის ხაზის ასაგებად დავუშვათ, რომ მოცემული წერტილები მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში (P) და ავაგოთ ამ სიბრტყის თარაზულები. დავნიშნოთ სიბრტყესა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის ერთნაირი დონის თარაზულების გადაკვეთის წერტილები 0; 10; 20; 30;... მიღებული წერტილები თანამიმდევრობით შევაერთოთ მდოვრე მრუდით. ეს მრუდე ხაზი მოცემული ფენის დღისეულ ზედაპირზე გამოსვლის ხაზი იქნება.



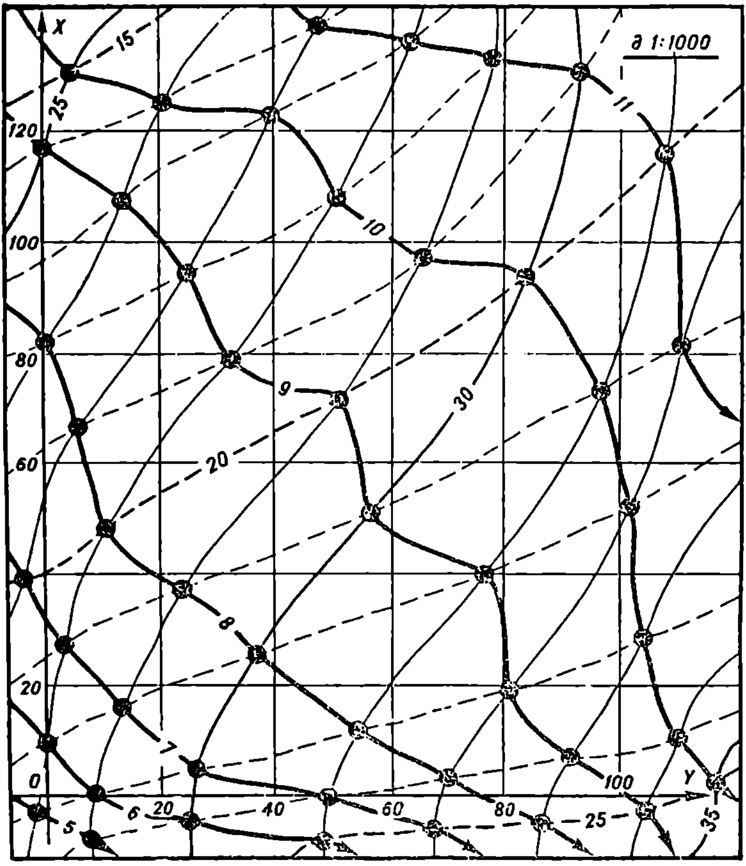
მაგალითი № 34. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მოცემული ფენის ზედაპირს აქვს ცილინდრული ზედაპირის ფორმა და საძიებო მონაცემებით განსაზღვრულია ამ ზედაპირის მიმმართველი ბრტყელი მრუდი (*a*) და სწორი მსახველი (*A*(70) *B*(110)). საჭიროა ამ ფენის დღისეულ ზედაპირზე გამოსვლის ხაზის აგება. ეს შემთხვევა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ტოპოგრაფიული და ცილინდრული ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთის ხაზის აგება. *a* მიმმართველზე დავნიშნოთ წერტილების რიგი, თითოეულ მათგანზე მოცემული *AB* მსახველის პარალელურად, გავატაროთ დამხმარე მსახველები და დავაგრადუიროთ ისინი. მსახველებზე მიღებული ერთნაირი დონის წერტილები შევაერთოთ ერთმანეთთან მრუდე ხაზებით. ამით ჩვენ მივიღებთ ცილინდრული ზედაპირის იზოჰიფსებს. დავნიშნოთ ტოპოგრაფიული და ცილინდრული ზედაპირების ერთნაირნიშნულიანი იზოჰიფსების გადაკვეთის წერტილები 20, 30, 40, 50,... მიღებული წერტილების მომვლები მრუდი ამოცანის პასუხი იქნება.



მაგალითი № 35. ვთქვათ, ცალ-ცალკე, ერთსა და იმავე მასშტაბში და ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია რელიეფის გეგმა და მის სიღრმეში ჩაწოლილი ნამარხის სახურავი გვერდი (P) თარაზულებით. საჭიროა იზოსიღრმეების გეგმის შედგენა. ამოცანა შესაძლებელია გადაწყდეს რელიეფის იზოჰიფსებზე ფენის სახურავი გვერდის თარაზულების გამოკლებით. ერთი გეგმა, რომელიც უნდა იყოს შესრულებული გამჭვირვალე ქაღალდზე, ისე დავადოთ მეორეს, რომ ერთმანეთს შეუთავსდეს საკოორდინატო ბადეების ერთსახელა და ერთნაირი რიცხვითი მნიშვნელობის ღერძები. დავნიშნოთ რელიეფის იზოჰიფსებისა და ნამარხის სახურავი გვერდის თარაზულების გადაკვეთის ის წერტილები, რომლებსაც ნიშნულების ერთნაირი სხვაობა გააჩნიათ. ამ გზით მიღებული ერთნაირი დონის წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდე ხაზებით. მივიღებთ მოცემული ნამარხის იზოსიღრმეების გეგმას. ეს გეგმა შესაძლებლობას იძლევა რელიეფის ნებისმიერ წერტილში სწრაფად განისაზღვროს ნამარხის ჩაწოლის სიღრმე. მაგალითად, A წერტილში იგი 4,0 მეტრის ტოლია, B-ში კი — 9,5 მეტრისა.

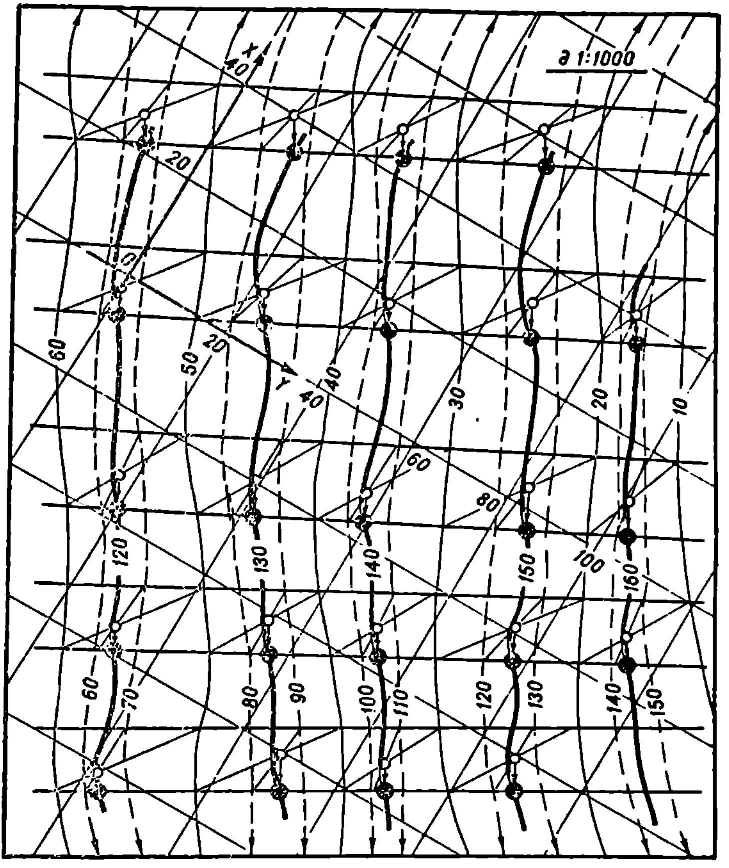


მაგალითი 236. ვთქვათ, ცალ-ცალკე, ერთსა და იმავე მასშტაბში და ერთი და იმავე კვეთის სიმაღლით, მოცემულია ნამარხის სახურავი და საგები გვერდების ჰიფსომეტრული გეგმები. საჭიროა იზოსისქეების გეგმის შედგენა. ამოცანა შესაძლებელია გადაწყდეს ტოპოგრაფიული ზედაპირების გამოკლების გზით, სახელდობრ, ნამარხის სახურავ ზედაპირს (მოცემულია წვრილი მთლიანი ხაზებით) უნდა გამოვაკლოთ საგები ზედაპირი (მოცემულია წყვეტილი ხაზებით). ერთი გეგმა, რომელიც გამჭვირვალე ქაღალდზე უნდა იყოს გამოსახული, ისე დავადოთ მეორეს, რომ ერთმანეთს შეეთავსდეს საკოორდინატო ბადეების ერთსახელა და ერთნაირი რიცხვითი მნიშვნელობის ღერძები. დავნიშნოთ ნამარხის სახურავი და საგები გვერდების იზოჰიფსების გადაკვეთის ის წერტილები, რომლებსაც ნიშნულების ერთნაირი სხვაობა გააჩნიათ. ერთნაირი დონის წერტილები შევაერთოთ მრუდე ხაზებით. მივიღებთ ნამარხის იზოსისქეების გეგმას (იხ. § 18-2, ნახ. 186-II).



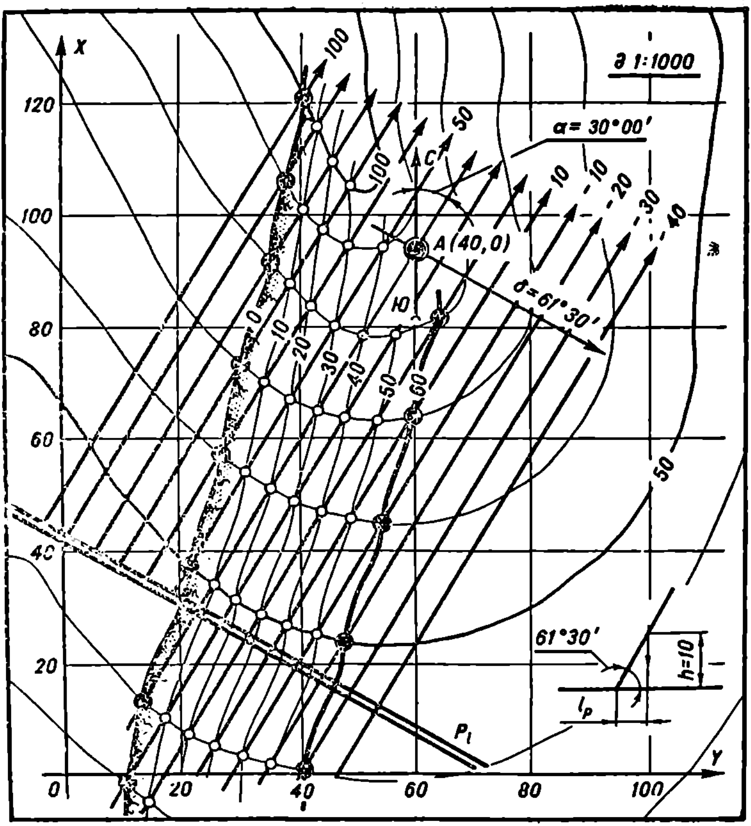
მაგალითი № 37. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდის ჰიფსომეტრული (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და ამავე ფენის იზოსისქეების (წყვეტილი ხაზებით) გეგმები. საჭიროა ავაგოთ მოცემული ფენის საგები გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმა.

ამ მაგალითის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ტოპოგრაფიული ზედაპირების გამოკლებით. სახელდობრ, ფენის სახურავ ზედაპირს გამოვაკლოთ იზოსისქეების წარმოსახვითი ზედაპირი (იხ. § 18-2). მიღებული შედეგი, მოცემული ფენის საგები გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმა, ნახაზზე ნაჩვენებია მსხვილი მთლიანი ხაზებით.

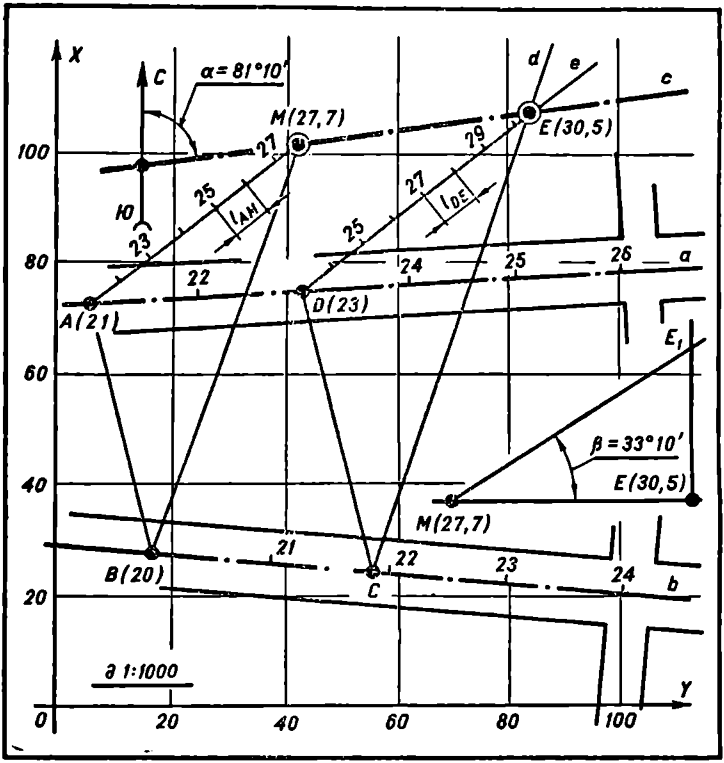


მაგალითი № 36. მოცემულია ფენის საგები გვერდის ჰიფსომეტრული (წვრილი მთლიანი ხაზებით) და იზოსისქეების (წყვეტილი ხაზებით) გეგმები. საჭიროა ავაგოთ მოცემული ფენის სახურავი გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმა.

ამ მაგალითის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ტოპოგრაფიული ზედაპირების მიმატებით (იხ. § 18-3). მიღებული შედეგი, მოცემული ფენის სახურავი გვერდის ჰიფსომეტრული გეგმა, ნახაზზე ნაჩვენებია მსხვილი მთლიანი ხაზებით.



მაგალითი № 39. მოცემულია დღისეული ზედაპირის გეგმა და მის სიღრმეში ჩაწოლილი ფენის A(40) წერტილი, რომელშიც განსაზღვრულია ფენის განვრცობა ($\alpha=30°00'$) და ვარდნილობა ($\delta=61°30'$). არახელსაყრელი სიღრმე უდრის 60 მეტრს. საჭიროა საძიებო სამუშაოების წარმოების საზღვრების მოძებნა. გამოსავალი მონაცემებით ავაგოთ ფენის (მიღებულია P სიბრტყედ) ქანობის მასშტაბი (P_l) და თარაზულები. დავნიშნოთ ზედაპირისა და ფენის ერთნაირნიშნულებიანი იზოჰიფსებისა და თარაზულების გადაკვეთის წერტილები. ეს წერტილები შევაერთოთ მრუდით. მივიღებთ ფენის დღისეულ ზედაპირზე გამოსვლის ხაზს, ანუ საძიებო სამუშაოების წარმოების ზედა საზღვარს. ამის შემდეგ ავაგოთ 10 მეტრი სიღრმის იზოჰიფსი. ამისათვის დავნიშნოთ ზედაპირისა და ფენის ისეთი იზოჰიფსებისა და თარაზულების გადაკვეთის წერტილები, რომელთა ნიშნულების სხვაობა 10 მეტრის ტოლია. ანალოგიურად ავაგებთ 20, 30, 40, 50 და 60 მეტრი სიღრმის იზოჰიფსებს. აგებული ხაზებიდან 60 მ სიღრმის იზოჰიფსი საძიებო სამუშაობის წარმოების ქვედა საზღვარი იქნება.



მაგალითი № 40. მოცემულია წერტილი (M) და ორი გამონამუშევრის ღერძი (a და b). ამ გამონამუშევრებს შემდგომში ექნებათ შეხვედრის წერტილი (N), რომელიც ჯერ გეგმაზე ცნობილი არ არის. საჭიროა განისაზღვროს ისეთი ახალი გამონამუშევრის ღერძი, რომელიც M და N წერტილებზე გაივლის. ვისარგებლოთ დეზარგის თეორემის შედეგით (იხ. Н. Глаголев, Проективная геометрия, 1963, გვ. 47). a და b ღერძებზე აღებული ნებისმიერი ორი წერტილი (A და B) შევაერთოთ M წერტილთან. $C\,(C \supset b)$ და $D\,(D \supset a)$ წერტილებიდან ($CD \parallel AB$) გავატაროთ e და d სხივები ისე, რომ გეგმაზე $e \parallel AM$ და $d \parallel BM$. მივიღებთ $E = d \times e$ წერტილს. ME სწორი ხაზი, ვინაიდან იგი a და b ღერძების გადაკვეთის N წერტილში გაივლის, საძიებელი ღერძი (c) იქნება. რადგან $E \subset MAD$, AM და DE მონაკვეთები სივრცეშიც პარალელური სწორი ხაზები იქნება. ამის მიხედვით დავაგრადუირებთ DE მონაკვეთს (D ცნობილია, $l_{DE} = l_{AM}$) და განვსაზღვრავთ E წერტილის ნიშნულს (30,5). ამის შემდეგ c ღერძი მთლიანად განსაზღვრული იქნება (აღებულ შემთხვევაში: $\alpha = 81°10'$, $\beta = 33°10'$).

შ ი ნ ა ა რ ს ი

1. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი

პირველი თავი

ძირითადი დებულებები

მეორე თავი

პოზიციური ამოცანები

მესამე თავი

მეტრული ამოცანები

მეოთხე თავი

მრავალწახნაგები

მეხუთე თავი

მრუდე ხაზები და მრუდე ზედაპირები

მეექვსე თავი

ტოპოგრაფიული ზედაპირი

II ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენება საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტულ მაგალითებში

Шавгулидзе Анзор Сергеевич

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ТЕХНИЧЕСКОГО ЧЕРЧЕНИЯ

(на грузинском языке)

რედაქტორი ა. გულისაშვილი
გამომცემლობის რედაქტორი ი. მ ე გ რ ე ლ ი შ ვ ი ლ ი
გარეკანის მხატვარი ზ. ხ ა რ ა ბ ა ძ ე
მხატვრული რედაქტორი შ. ნ ი თ რ ა ძ ე
ტექრედაქტორი გ. ჯ ო ხ ა ძ ე
კორექტორი თ. გ ა გ ნ ი ძ ე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25/VII-69 წ. ქაღალდის ზომა 70×108.
ნაბეჭდი თაბახი 13,75. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 17,16.

შეკვეთის № 633 უე 00300 ტირაჟი 1000
ფასი 84 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება," თბილისი, კამოს ქ. № 18.
Издательство „Ганатлеба," Тбилиси, ул. Камо № 18.
1969

სპი-ს სტამბა, თბილისი, ლენინის ქ. 69.
Типография ГПИ, Тбилиси, ул. Ленина 69.