

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია

ი. ვეკუა

**ტენზორული ანალიზისა
და
კოვარიანტთა თეორიის
საფუძვლები**



გამომცემლობა „მეცნიერება“
თბილისი
1982

წიგნში დაწვრილებითაა გადმოცემული ტენზორული ანალიზის საფუძვლები და მათი გამოყენებანი როგორც ზედაპირთა თეორიის წმინდა გეომეტრიული საკითხების, ისე გარსთა მექანიკური თეორიის ამოცანების ამოსახსნელად. ამ ძირითადი ამოცანის განხორციელებამ ჩოთხოვა ალგებრის, კერძოდ წრფივი ალგებრის, საკითხების საკმარისად გაუარყოფელი სახით წარმოდგენა. ავტორის მიზნების შესაბამისად უკანასკნელი საკითხი გაშუქებულია ევკლიდეს სამგანზოცხილებიანი სივრცის შემთხვევისათვის.

ამ წიგნში მკითხველი გაეცნობა ავტორის საკუთარი კვლევის ბევრ შედეგს გეომეტრიიდან და მექანიკიდან. აღსანიშნავია წიგნში მოტანილი, გარსთა ზოგადი თეორიის თვალსაზრისით საინტერესო, მრავალი სპეციალური საკოორდინატო სისტემა და მათემატიკის ახალი აქტუალური მიმართულების — კოვარიანტთა თეორიის თავისებური გაშუქება.

თარგმნა ლ. კ ი კ ნ ა ძ ე მ

რედაქტორი ი. ქ ა რ ც ი ვ ა ძ ე

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

შესავალი

წიგნში გადმოცემულია ტენზორული აღრიცხვის საფუძვლები და მათი ზოგიერთი გამოყენება გეომეტრიული ხასიათის ამოცანებისათვის.

თავიდან იგი ჩაფიქრებული იყო როგორც ავტორის მონოგრაფიის პირველი ნაწილი დრეკადი გარსების ზოგად თეორიაში. ამ გარემოებამ საგრძნობლად იმოქმედა მის აგებულებაზე. წიგნში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა ზედაპირთა თეორიის საკითხებს. გარსთა თეორიის აგებისას ჩვენ გვიხდება გარსის ფორმის განმსაზღვრელ გარკვეულ ზედაპირთან (რომელსაც, ჩვეულებრივ, გარსის შუა ზედაპირი ეწოდება) დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემების სპეციალური კლასის გამოყენება. ამის გამო ზედაპირთა თეორიასთან ერთად წარმოიშობა ტენზორული ანალიზის გამოყენების აუცილებლობაც. ამასთან, გეომეტრიული ამოცანების განხილვის დროს ჩვენ ვახერხებთ ისეთი საფუძვლის შექმნას, რომელიც ტენზორული ანალიზის ფორმალური კონსტრუქციების კონკრეტული და შინაარსობრივი გააზრების საშუალებას გვაძლევს.

ტენზორული ანალიზით სარგებლობის აუცილებლობა წარმოიშობა ყველა ისეთ შემთხვევაში, როცა რაიმე ფიზიკური მოვლენის შესასწავლად, რომლისთვისაც გაგვაჩნია მისი აბსტრაქტული მოდელის შესაქმნელად აუცილებელი არაწინააღმდეგობრივი მონაცემების სრული სისტემა, მოვისურვებთ კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებას. კოორდინატთა მეთოდი საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ მოდულების (გეომეტრიული აგებულების, ლოგიკური სქემების და სხვ.) პარამეტრიზაცია ისეთი კოორდინატთა (პარამეტრთა) სასრული ან უსასრულო სისტემების საშუალებით, რომელთათვისაც შესაძლებელია გამოვიყენოთ ესა თუ ის მათემატიკური ოპერაციები. რაც უფრო მეტი სხვადასხვა ოპერაციის განხორციელება შესაძლებელი მოდელის პარამეტრებზე, მით უფრო მდიდარია და შინაარსობრივი შესაბამისი მათემატიკური თეორია. მაგრამ აშკარაა, რომ მათემატიკური ოპერაციების რაოდენობა და ხასიათი განისაზღვრება იმ საწყისი მონაცემებით, რომელნიც გაგვაჩნია ამოცანის მოდულების განხორციელებისას.

განსახილავი მოდელის განმსაზღვრელ პარამეტრებზე (კოორდინატებზე) განხორციელებული ოპერაციების შედეგად უნდა მივიღოთ ობიექტური შინაარსის დასკვნები, რომლებიც ახასიათებენ შესასწავლი მოვლენის თვისებებს, ჩვენ მიერ გამოყენებული პარამეტრიზაციის ხერხისაგან დამოუკიდებლად.

მოდელის პარამეტრიზაცია, საზოგადოდ, შეიძლება განვახორციელოთ სხვადასხვა საშუალებებით. თუ, მაგალითად, მოდელი განისაზღვრება n სხვადასხვა $x^1, \dots, x^n$ რიცხვთა დასახელებით, ვაწარმოებთ რამათზე რაიმე ურთიერთცალსახა

$$x' = \varphi'(x^1, \dots, x^n) \quad (i' = 1, \dots, n)$$

სახის გარდაქმნას, მივიღებთ მოდელის ახალ პარამეტრიზაციას $x'^1, \dots, x'^n$ რიცხვების საშუალებით, რომელიც პრინციპულად ტოლფასია ადრე განხილულას. მოდელის სხვადასხვა შესაძლებელ პარამეტრიზაციებთან დაკავშირებით ბუნებრივად წარმოიშობა ამოცანა: როგორ გამოვაველინოთ იმ დასკვნების ობიექტური ხასიათი, რომელნიც მიიღებთან მოდელის რაიმე კერძო პარამეტრიზაციის გამოყენების საფუძველზე.

რეალური შინაარსის მქონე საბოლოო დასკვნები უნდა გამოისახებოდეს კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან ინვარიანტული ფორმით. ასეთი მიზნებისათვის უზრდვესია, როცა ეს შესაძლებელია, საკითხის გაშუქება წარმოებდეს ზოგადი, კოორდინატთა სისტემის სპეციალიზაციისაგან დამოუკიდებელი, სახით. მაშინ შედეგები გამოსახული იქნება ისეთი ფორმით, რომელიც გაგვადვილებს ერთი კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლას, ხოლო იმ თანაფარდობებს, რომელნიც გამოსახავენ ობიექტურ კანონზომიერებებს, ცხადია, კოორდინატთა გარდაქმნისაგან ინვარიანტული სახე ექნებათ.

მაგრამ ეს სრულებით არ ნიშნავს იმას, რომ კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას კოორდინატთა სისტემის შერჩევას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს. ხშირად კოორდინატთა სისტემის ხეირიანი შერჩევის წყალობით საგრძნობლად მარტივდება გამოთვლები, თანაფარდობები ღებულობენ მარტივსა და თვალსაჩინო სტრუქტურას. ეს კი გვადვილებს შესასწავლი ობიექტის საძიებელი თვისებების დადგენას. ამასთან დაკავშირებით მნიშვნელოვანია გაგვაჩნდეს კრიტერიუმები, რომელნიც სპეციალურ კოორდინატთა სისტემაში შედგენილია, თუ იმ გამოსახულების ინვარიანტულობის გამოვლინების საშუალებას

მოგვეცემს, რაც ტენზორული ანალიზის ერთ-ერთი მთავარი ამოცანათაგანია.

ტენზორული ანალიზი შეიძლება ავსვით მეტრიკის მქონე რიმანის ზოგადი მრავალსახეობების ბაზაზე. მიუხედავად ამისა, ჩვენ ვამჯობინეთ დავიწყოთ სამგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის ვექტორული ველების სხვადასხვა დიფერენციალური თვისებების შესწავლით. ეს საშუალებას გვაძლევს განვაერთაოთ ტენზორული ანალიზი თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენების გამოყენებით. განზოგადოებანი უფრო ზოგადი სახეს მრავალსახეობათა შემთხვევისათვის ძნელი განსახიროცილებელი არაა. წიგნში განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა ტენზორულ ანალიზს რიმანის ორგანზომილებიანი მრავალსახეობებისათვის, ფაქტიურად, სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ზედაპირებისათვის. ეს გზა იმითაა გამართლებული, რომ ტენზორული ანალიზის დაკავშირება უმარტივეს, მაგრამ არატრივიალურ მრავალსახეობასთან, როგორცაა რიმანის მრავალსახეობა, საშუალებას გვაძლევს გავიზაროთ ზოგადი თეორია გეომეტრიულად თვალსაჩინო წარმოდგენების საფუძველზე.

ტენზორულ ანალიზს მრავალრიცხოვანი გამოყენება აქვს გეომეტრიაში, ფიზიკაში და მექანიკაში (იხ., მაგ., [4], [10], [11]). წიგნში გადმოცემულია ზოგიერთი გამოყენება ზედაპირთა თეორიაში. განხილულ საკითხთა არე არც თუ იმდენად ფართოა, მაგრამ მაინც რამდენადმე სცილდება იგი ტრადიციულ საზღვრებს. მაგალითად, ზედაპირზე იზომეტრული კოორდინატების განხილვასთან დაკავშირებით (დეტალური დასაბუთების გარეშე) ზოგადად მოცემულია ბელტრამის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ჰომეომორფიზმების აგების ახალი მეთოდები. როგორც ცნობილია, ამ პრობლემას კვაზიკონფორმულ ასახვათა თეორიაში ცენტრალური ადგილი უკავია. საზოგადოდ, იზომეტრულ კოორდინატებს წიგნში შედარებით დიდი ადგილი ეთმობა და ეს გაკეთებულია საესებით შეგნებულად. ისინი საშუალებას გვაძლევენ ფართოდ გამოვიყენოთ კომპლექსური ცვლადის დუნქციათა თეორიის აპარატი გეომეტრიასა და უწყვეტი ტანის მექანიკის ამოცანების შესასწავლად. წიგნში განხილულია ზედაპირის კონფორმულად ინვარიანტული ტენზორული ფორმები და აგებულია კოვარიანტების თეორია, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ, კერძოდ, გარსების თეორიაში [26].

ეს წიგნი დაწერილია ავტორის [17] წიგნის საფუძველზე, მაგრამ უკანასკნელმა განიცადა არსებითი გადაზუსტება. დამატებულია თავი კოვარიანტების თეორიის შესახებ. ამას გარდა, მნიშვნელოვნადაა გაფართოებული ზოგიერთი პარაგრაფი. უფრო ზოგადი ფორმით და დაწერილებითაა ვადმოცემული ტენზორული ალგებრის საკითხები, აგრეთვე მოცემულია ტენზორული ანალიზის მკაცრი დასაბუთება რიმანის მრავალსახეობებისათვის. შესამჩნევადია გაფართოებული ზედაპირთა თეორიისადმი მიძღვნილი ზოგიერთი განყოფილება. შესაძლებელია ავტორი იმსახურებს საყვედურს, რომ წიგნში შეტანილია რამდენიმე ისეთი ნაწილი, რომელთაც უშუალო კავშირი არა აქვთ ტენზორულ ანალიზთან, მაგრამ ეს აიხსნება იმით, რომ ამ წიგნის წერის პროცესში ბუნებრივად წარმოიშობოდნენ ხოლმე ისეთი ამოცანები და კითხვები, რომელთა უწყურადღებოდ დატოვება ავტორს არ შეეძლო, მით უფრო, რომ ისინი ავტორის მეცნიერულ ინტერესებს განეკუთვნებიან. მკითხველებს, რომელთაც ეს საკითხები არ აინტერესებთ, წიგნის კითხვის დროს ისინი თავისუფლად შეუძლიათ გამოტოვონ.

ამ წიგნის დასაბეჭდად მომზადების საქმეში ავტორს მნიშვნელოვანი დახმარება აღმოუჩინეს რ. კორძაძემ, თ. მეუნარგიამ, ნ. ქალდანმა, ლ. კიკნაძემ, ი. ქარცივაძემ. მათი მრავალი შენიშვნა და რჩევა იქნა მიღებული მხედველობაში წიგნის საბოლოო რედაქციის დროს. ყველა მათ ავტორი გულწრფელ მადლობას უცხადებს.

1977 წ.

ი. გეგუა

თავი პირველი

ალგებრის ზოგიერთი საკითხი

ამ თავში ჩვენ შემოგვაქვს სხვადასხვა ტიპის მატრიცები და განვმარტავთ მათზე ალგებრულ ოპერაციებს. ამას გარდა შევსწავლით დეტერმინანტების ძირითად თვისებებს და მათ გამოყენებებს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის გამოცვლევაში. უკანასკნელ პარაგრაფში დავამტკიცებთ თეორემას დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანის შესახებ.

§ 1. მატრიცები. შეჯამების წესი. ინდექსთა შეცვლის ოპერაცია. მატრიცების პირდაპირი და შიგა ნამრავლები

1. მატრიცები. ტენზორულ ანალიზში ხშირად განიხილება სიდიდეთა სხვადასხვა სისტემები, რომელთათვისაც მოსახერხებელია მატრიცული აღნიშვნების გამოყენება. მატრიცები აღინიშნება ერთი ან რამდენიმე ინდექსის მქონე ასოებით. მაგალითად, $A_i, a_{ij}, C_{i_1 \dots i_n}$ და ა. შ. მატრიცთა ელემენტების ინდექსები ჩვეულებრივ მთელ რიცხვთა მნიშვნელობებს ღებულობენ 1-დან რაიმე ნატურალურ n რიცხვამდე. თუ i ინდექსი ღებულობს $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს, მაშინ დაწეროთ $i \in [1, n]$.

ინდექსების აღსანიშნავად შემდგომში გამოვიყენებთ ლათინური და ბერძნული ალფაბეტის ნუსხურ ასოებს: i, k, l, m, n, p, q, r და $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \varepsilon, \nu, \mu$. ზოგჯერ მოგვიწდება შტრიხებიანი და მაჩვენებლებიანი ინდექსების განხილვა: $i', \alpha', i_k, \alpha_l$ და ა. შ.

მატრიცაში იმ ასოს, რომელიც აღჭურვილია ზედა და ქვედა ინდექსებით, ფუძისეული ეწოდება; a_{ik}, b^l, A_k, B^k მატრიცებში a, b, A, B ფუძისეული ასოებია. ფუძისეული ასოების აღსანიშნავად, ჩვეულებრივ, ლათინური ალფაბეტის პირველ (ასომთავრულ ან ნუსხურ) ასოებს გამოვიყენებთ: A, B, C ან a, b, c და ა. შ. ზოგჯერ, განსა-

კუთრებით უწყვეტ ტანთა მექანიკის გამოყენებებში, ლათინური ალფაბეტის მუქი შრიფტით, და აგრეთვე გოთური და ბერძნული ალფაბეტის ასოებითაც სარგებლობენ.

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ თუ რაიმე დამოკიდებულებაში (ტოლობა, უტოლობა და სხვ.) ერთი ან რამდენიმე თავისუფალი ინდექსი შედის, ეს ნიშნავს, რომ მოცემული დამოკიდებულება სამართლიანია ამ თავისუფალი ინდექსების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. წინააღმდეგ შემთხვევაში ყოველთვის საგანგებოდ იქნება მითითებული, თუ თავისუფალი ინდექსების რა მნიშვნელობებისათვის არის სამართლიანი მოცემული დამოკიდებულება.

2. ადიციური ჯგუფები. მატრიცების ჯამი. მატრიცებზე წარმოებს სხვადასხვა ალგებრული ოპერაციები. მეტწილად ხდება მათი შეჯამება, როცა ინდექსები მთელირიცხვა მნიშვნელობებს ღებულობს. მაგრამ, როცა სხვადასხვა ჯამებზე ვლაპარაკობთ, იგულისხმება, რომ მათი შესაჯარებების მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ შეჯამების ოპერაცია (ამა თუ იმ აზრით). ამისათვის საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ იმ მატრიცათა ელემენტები, რომლებზედაც შეჯამების ოპერაცია გამოიყენება, წარმოადგენენ რაიმე ადიციური (შეკრების მიმართ აბელის) G ჯგუფის ელემენტებს¹.

გავიხსენოთ, რომ რაიმე $a, b, c, \dots$ ელემენტების G სიმრავლეს აბელის ადიციური ჯგუფი ეწოდება, თუ ამ სიმრავლეში განმარტებულია შეკრების ბინარული ოპერაცია. მას აღვნიშნავთ $+$ სიმბოლოთი. ეს ოპერაცია G სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ a, b წყვილს უთანადებს $a + b$ ელემენტს იმავე სიმრავლიდან. ამასთან სრულდება შემდეგი აქსიომები:

- 1) $a + b = b + a$ (შეკრების კომუტაციურობის კანონი);
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (შეკრების ასოციაციურობის კანონი);
- 3) G -ში არსებობს ელემენტი, რომელსაც ნეიტრალური ელემენტი ანუ ნული ეწოდება და აღვნიშნავთ 0 სიმბოლოთი, ისე რომ

$$a + 0 = 0 + a = a$$

ნებისმიერი a ელემენტისათვის G -დან;

¹ ქვემოთ ხშირად გამოვიყენებთ თანამედროვე ანალიზისა და ალგებრის სხვადასხვა ცნებებსა და თეორემებს. ყველა ასეთ შემთხვევაში ტექსტში ან შენიშვნებში მოვიყვანთ აუცილებელ ასხნა-განმარტებას, მაგრამ იმ მკითხველთათვის, რომლებიც მოისურვებენ მათ შესახებ უფრო დეტალური ცნობების მიღებას, მიუთითებთ [23] წიგნზე.

4) ყოველი $a \in G$ ელემენტისათვის არსებობს $x \in G$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$x + a = 0$$

განტოლებას. ამ ელემენტს ეწოდება a -ს შებრუნებული ელემენტი და აღინიშნება $-a$ სიმბოლოთი.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ადიციურ ჯგუფში არსებობს ერთადერთი ნული და ყოველ ელემენტს გააჩნია ერთადერთი შებრუნებული ელემენტი.

ადიციური ჯგუფის მაგალითებია მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე, რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{R}$ და $\mathbb{C}$ სიმრავლეები ჩვეულებრივი შეკრების მიმართ, სივრცის (ზედაპირის) რაიმე არეში მოცემული ვექტორული ველების სიმრავლე და სხვა. ვექტორული ველებისათვის შეკრების ოპერაცია განიმატება მრავალკუთხედის წესით.

განვიხილოთ (p, q) ტიპის $A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ მატრიცა ანუ მოკლედ (p, q) -მატრიცა, რომლის ელემენტები ადიციურ G ჯგუფს მიეკუთვნება. თუ $p=0$ ან $q=0$, შესაბამისად გვექნება $A^{i_1 \dots i_q}$ ან $A_{i_1 \dots i_p}$ მატრიცა. თუ ინდექსები $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს ღებულობს, მაშინ (p, q) -მატრიცას n^{p+q} ელემენტი გააჩნია. $r=p+q$ რიცხვს (p, q) -მატრიცის რანგი ეწოდება.

ვთქვათ, G_p^g წარმოადგენს (p, q) -მატრიცების სიმრავლეს G -დან. თუ $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}, B_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ (p, q) -მატრიცებია G_p^g -დან, მაშინ ჩამი

$$A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} + B_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \in G_p^g.$$

ცხადია, ყოველი G_p^g სიმრავლე შეიცავს ნულოვან (p, q) -მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი G ჯგუფის ნულს წარმოადგენს. ახლა ადვილი დასადგენია, რომ G_p^g ადიციური ჯგუფია.

ვთქვათ, G და G' ადიციური ჯგუფებია. ვთქვათ, გვაქვს ისეთი $f: G \rightarrow G'$ ასახვა, რომ ნებისმიერი $x, y \in G$ წყვილისათვის $f(x+y) = f(x) + f(y)$. მაშინ f -ს ეწოდება ჰომომორფიზმი G ჯგუფიდან G' ჯგუფში.

ვთქვათ, H წარმოადგენს $G \rightarrow G'$ ჰომომორფიზმების სიმრავლეს. თუ $f, g \in H$, მაშინ $f+g$ ჩამი ისეთ ასახვას ეწოდება, რომ ნებისმიერი $x \in G$ ელემენტისათვის $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. ახლა ადვილად

დავრწმუნდებით, რომ H ადიციურ ჯგუფს წარმოადგენს, თუ მის ნეიტრალურ ელემენტად (ნულად) მივიღებთ $f(x) = 0'$, $\forall x \in G$, ასახვას, სადაც $0'$ წარმოადგენს G' ჯგუფის ნეიტრალურ ელემენტს.

$f: G \rightarrow G'$ ჰომომორფიზმს იზომორფიზმი ეწოდება, თუ იგი ურთიერთკალსახა ასახვაა G ჯგუფიდან G' ჯგუფზე. თუ f იზომორფიზმია G -დან G' -ზე, მაშინ დავწეროთ ხოლმე $f: G \longleftrightarrow G'$.

რიგ საკითხებში ადიციური იზომორფული ჯგუფები შეიძლება არ განვასხვაოთ ერთმანეთისაგან და ამიტომ მათ ხშირად ერთმანეთთან აიგივებენ. საზოგადოდ, ადიციური ჯგუფების იზომორფიზმი ეკვივალენტობის მიმართებაა² ჯგუფთა სიმრავლეში და, ამრიგად, იზომორფული ჯგუფები შეადგენს ეკვივალენტობის კლასს. ამის გამო ადიციური ჯგუფის ქვეშ შეიძლება ვიგულისხმოთ იზომორფულ ჯგუფთა კლასი.

მ. რგოლები და ველები. მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი. ტენზორულ ანალიზში ხშირად გვიხდება მატრიცებზე გამრავლების ოპერაციის გამოყენება. ამისათვის საკმარისი არაა, რომ მატრიცის ელემენტები რაიმე ადიციურ ჯგუფს ეკუთვნოდეს. ადიციური ჯგუფის ელემენტებისათვის, საზოგადოდ, არაა განმარტებული გამრავლების ოპერაცია, ამიტომ გადასამრავლებელი მატრიცების მიმართ იძულებული ვართ დამატებითი შეზღუდვები შემოვიღოთ. შემდგომში ასეთ შემთხვევებში ვიგულისხმებთ, რომ მატრიცის ელემენტები რაიმე A რგოლის ელემენტებს წარმოადგენს (იხ. [23]).

გავიხსენოთ, რომ A რგოლი ეწოდება აბელის ადიციურ ჯგუფს, რომლისთვისაც განმარტებულია მეორე ბინარული ოპერაცია — გამრავლება და ნებისმიერი სამი $a, b, c \in A$ ელემენტისთვის შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- 1) $(ab)c = a(bc)$ (გამრავლების ასოციაციურობის კანონი);
- 2) $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$ (დისტრიბუციურობის კანონი).

² გავიხსენოთ, რომ M სიმრავლეში გვაქვს ეკვივალენტობის მიმართება, რომელსაც $\sim$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, თუ სრულდება შემდეგი პირობები: 1) ნებისმიერი $x \in M$ ელემენტისთვის, $x \sim x$ — რეფლექსურობის თვისება; 2) $x, y \in M$ წყვილისთვის თუ $x \sim y$, მაშინ $y \sim x$ — სიმეტრიულობის თვისება; 3) თუ $x, y, z \in M$ და $x \sim y$, $y \sim z$, მაშინ $x \sim z$ — ტრანზიტიულობის თვისება (იხ. [23]).

მტკიცდება, რომ თუ O შეკრების ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტია, მაშინ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისთვის $aO = Oa = O$.

საზოგადოდ, რგოლში არ სრულდება გამრავლების კომუტაციურობის პირობა, ე. ი. $ab \neq ba$. რგოლს ეწოდება კომუტაციური, თუ რგოლის ნებისმიერი ორი ელემენტისთვის $ab = ba$.

თუ რგოლში არსებობს ისეთი e ელემენტი, რომ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისათვის

$$ae = ea = e, \quad (1.1)$$

მაშინ e -ს ეწოდება რგოლის ერთეული, ხოლო A -ს — რგოლი ერთეულით. რგოლი ერთეულით მუდამ შეიცავს ორ O და e ელემენტს, ამასთან $e \neq O$.

ერთეულით კომუტაციური რგოლის მაგალითებია³ მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე, რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{R}$ და $\mathbb{C}$ სიმრავლეები. ვექტორულ ველთა V სიმრავლე წარმოადგენს არაასოციურ და არაკომუტაციურ რგოლის მაგალითს, თუ გამრავლების ქვეშ ვიგულისხმებთ ვექტორულ ნამრავლს (იხ. II თავი, § 1, მე-3 პუნქტი).

ვთქვათ, A რგოლის ნებისმიერ a ელემენტს აქვს შებრუნებული a^{-1} ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ პირობებს. კომუტაციურ რგოლს, რომლის ყოველ არანულოვან ელემენტს გააჩნია შებრუნებული, ეწოდება ველი. ველის მაგალითებია რაციონალურ, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, და $\mathbb{C}$ სიმრავლეები. თუ a, b რაიმე K ველის ელემენტებია, მაშინ $ax = b$ განტოლებას მუდამ აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x = ba^{-1} = a^{-1}b \in K$ როცა $a \neq 0$.

ვთქვათ $A_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$, $B_{l_1 \dots l_r}^{j_1 \dots j_s}$ წარმოადგენს ადიციური G_p^q და G_r^s ჯგუფის მატრიცებს, რომელთა ელემენტები რაიმე G რგოლს ეკუთვნის. თუ მათ გადავამრავლებთ, მივიღებთ $(p+r, q+s)$ ტიპის მატრიცას

³ ქართულ თარგმანში ქვემოთ შემოტანილი ზოგიერთი აღნიშვნა განსხვავდება წიგნის ორიგინალში საყოველთაოდ გავრცელებული სათანადო აღნიშვნებისაგან, რაც გამოიწვია სტამბაში შექნილი ტექნიკურმა დაბრკოლებებმა (რედაქტორის შენიშვნა).

$$A_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q} B_{l_1 \dots l_r}^{j_1 \dots j_s} = C_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q} l_1 \dots l_r^{j_1 \dots j_s},$$

რომლის ელემენტები იმავე რგოლს ეკუთვნის.

ამ ოპერაციას ვუწოდებთ პირდაპირ მატრიცულ ნამრავლს. ამრიგად, გამრავლების ოპერაცია ანბორციელებს

$$G_p^q \times G_r^s \rightarrow G_{p+r}^{q+s}$$

ასახვას.

4. შეჯამების წესი. შეჯამებისათვის Σ სიმბოლოს გამოყენება ხშირად ართულებს გამოსახულებას, განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როცა ჭერადი ჯამები განიხილება. ამ გარეგნული გართულების თავიდან ასაცილებლად ტენზორულ ანალიზში გამოიყენება შეჯამების მეტად მოხერხებული წესი, რომელიც თავის დროს ა. ეინშტეინმა შემოიღო.

მატრიცის ასოით ინდექსს ყრუ ვუწოდოთ, თუ იგი მატრიცაში (ერთწერში) ორჯერ (და მხოლოდ ორჯერ) ვგვხვდება — ერთხელ როგორც ქვედა, ხოლო მეორედ — როგორც ზედა ინდექსი. მაგალითად, a_i^j და b_{kl}^i მატრიცებში i ინდექსი ყრუა, ხოლო a_{ii} და b_{ii}^i მატრიცებში იგი უკვე აღარ არის ყრუ. ერთ მატრიცაში შეიძლება შეგვხვდეს რამდენიმე ყრუ ინდექსი, რომლებიც, ცხადია, უნდა აღინიშნოს სხვადასხვა ასოებით. მაგალითად, a_{ik}^i მატრიცაში i და k ორივე ყრუ ინდექსია.

ყრუ ინდექსის არსებობა გამოსახულებაში იმას ნიშნავს, რომ ეს გამოსახულება უნდა შეჯამდეს ყრუ ინდექსის ყველა მნიშვნელობისათვის 1-დან n -მდე. ამრიგად, მიღებული შეთანხმებით, ყოველი მატრიცა, რომელიც შეიცავს ყრუ ინდექსებს, უნდა განვიხილოთ როგორც ჯამი ზემოთ აღნიშნული მნიშვნელობით. მაგალითად, ჯამები

$$\sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x^i x^k$$

შეიძლება დავწეროთ Σ ნიშნის გარეშე შემდეგი სახით.

$$a_i x^i, \quad a_{ik} x^i x^k.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ მიღებული შეთანხმება სრულებითაც არ გამორიცხავს აუცილებელ შემთხვევაში Σ სიმბოლოს გამოყენ-

ნებას. შემდგომში ხშირად შევხვდებით ისეთ შემთხვევას, როცა ამ ნიშნის ხმარება მიზანშეწონილია. მაგალითად, ვიხმართ Σ სიმბოლოს, თუ შეჯამების ინდექსები მდებარეობს ერთ ჰორიზონტალზე ან თუ მათ უკავიათ რაიმე სხვა მდებარეობა, რომელსაც არ ითვალისწინებს ყრუ ინდექსის განმარტება. თუ, მაგალითად, გვაქვს $A_{(k)}^{(i)}$ ან $A_i B^{(i)}$ და ა. შ. გამოსახულებანი, მაშინ სპეციალურად უნდა მივუთითოთ შეჯამების წესზე. საზოგადოდ, საექვო შემთხვევაში უმჯობესია ყოველთვის ვიხმაროთ Σ სიმბოლო.

ზოგჯერ იძულებული ვართ არ გამოვიყენოთ შეჯამების წესი ისეთი მატრიცებისთვისაც, რომელთა ინდექსებს ყრუ ინდექსების მდებარეობა აქვს — ერთნი მოთავსებული არიან ქვემოთ, მეორენი კი — ზემოთ. ასეთ შემთხვევაში ერთ-ერთ ამისთანა ინდექსს გავხაზავთ ქვემოდან, რაც ამ ინდექსით შეჯამების აკრძალვას ნიშნავს. მაგალითად, $a_i b^i$ ნიშნავს, რომ განიხილება არა $a_1 b^1 + \dots + a_n b^n$ ჯამი, არამედ მისი ცალკეული შესაკრებები: $a_1 b^1, \dots, a_n b^n$. ასეთ დროს, მეტი სიცხადისათვის, დავწერთ $a_i b^i$, $i \in [1, n]$.

მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ტენზორულ ანალიზში ზედა ინდექსი არ აღნიშნავს ხარისხის მაჩვენებელს, თუ, რა თქმა უნდა, საწინააღმდეგო საგანგებოდ არ არის მითითებული. მაგალითად, x^k არის x ზედა k ინდექსით და არა x ხარისხში k . ამის გამო, გაუგებრობის აცილების მიზნით, ინდექსებიანი გამოსახულების ახარისხების შემთხვევაში ამ გამოსახულებას ფრჩხილებში მოვთავსებთ. მაგალითად, $(a_k^i)^m$ აღნიშნავს a_k^i -ს m ხარისხს.

ასოით ინდექსს, თუ ის ყრუ არ არის, თავისუფალი ან განუსაზღვრელი ინდექსი ეწოდება. მაგალითად, $a_{ik} b^i$ მატრიცაში i ინდექსი ყრუა, ხოლო k — თავისუფალი. თავისუფალი ინდექსი შეიძლება გავუტოლოთ ნებისმიერ რიცხვს $1, 2, \dots, n$ სიმრავლიდან. გეომეტრიაში n , ჩვეულებრივ, სივრცის განზომილებას აღნიშნავს, მექანიკაში — ფაზური სივრცის განზომილებას და ა. შ. შემდეგში n მეტწილად 2-ის ან 3-ის ტოლი იქნება.

შევნიშნოთ, რომ შეჯამების ინდექსისათვის სახელწოდება ყრუ⁴ გარკვეული აზრით იმ ფაქტის სიტყვიერი გამოსახულებაა, რომ ეს ინდექსი აზრს არ იცვლის მისი აღნიშვნის შეცვლის დროს. მაგა-

⁴ ზოგიერთ სახელმძღვანელოში ხმარობენ ტერმინებს „მუხი“, „მიმდინარე“.

ლითად, $a^i x_i$ ჯამში i შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერი სხვა ასოთი. ამით, რა თქმა უნდა, ჯამი არ შეიცვლება, $a^i x_i = a^k x_k$. ყრუ ინდექსის ეს თვისება განსაზღვრულ ინტეგრალში საინტეგრაციო ცვლადის თვისების ანალოგიურია. ყრუ ინდექსის აღნიშნული თვისებით ქვემოთ ხშირად ვისარგებლებთ და საჭიროების შემთხვევაში ასეთი ინდექსების აღნიშვნებს სპეციალური მითითების გარეშე ჩვენ ნებაზე შევცვლით. ამასთან კარგად უნდა გვახსოვდეს, რომ ერთსა და იმავე გამოსახულებაში ორი სხვადასხვა ყრუ ინდექსი არ შეიძლება იყოს აღნიშნული ერთი და იმავე ასოთი, ან ისეთი ასოთი, რომლითაც უკვე აღნიშნულია რომელიმე თავისუფალი ინდექსი.

5. ინდექსთა შეკვეცის ოპერაცია. ვთქვათ G ადიციური ჯგუფია და

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \in G_p^q.$$

ამ მატრიცის ერთ-ერთი ზედა განუსაზღვრელი ინდექსის რომელიმე ქვედა განუსაზღვრელ ინდექსთან გატოლების (მაგალითად, $i_1 = j_1 = k$) ოპერაციას ინდექსების გადაჯაჭვას ვუწოდებთ. ორი ინდექსის გადაჯაჭვის ოპერაციის შედეგად მატრიცაში გაჩნდება ყრუ ინდექსი და, ზემოთ მიღებული შეთანხმების საფუძველზე, უნდა მოვახდინოთ მატრიცის ელემენტთა შეჯამება ამ ინდექსის მიხედვით, როცა იგი გაირბენს $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობას, ამასთან დანარჩენი ინდექსები არ იცვლება. ამ ოპერაციის შედეგად მიიღება $(p-1, q-1)$ ტიპის მატრიცა, რომელშიც ინდექსების რაოდენობა ორი ერთეულით ნაკლებია.

ასე მაგალითად, (1.3)-ში i_1 და j_1 ინდექსების გადაჯაჭვით, ე. ი. დაშვებით $i_1 = j_1 = i$, მივიღებთ $(p-1, q-1)$ ტიპის

$$B_{i_2 \dots i_p}^{j_2 \dots j_q} = A_{i_2 \dots i_p}^{i j_2 \dots j_q} = \sum_{i=1}^n A_{i_2 \dots i_p}^{i j_2 \dots j_q}$$

მატრიცას. ზემოთ განმარტებულ ოპერაციას ინდექსთა შეკვეცა ვუწოდება. იგი შეიძლება შევასრულოთ ერთდროულად რამდენიმე ინდექსის მიმართ. მაგალითად, თუ (1.3) მატრიცაში წყვილ-წყვილ-

ლად შევკვეთ i_1 და k_1 , i_2 და $k_2, \dots$, i_m და k_m ინდექსებს (ცხადია, $m \leq \min(p, q)$). მივიღებთ $(p-m, q-m)$ ტიპის

$$B_{i_{m+1} \dots i_p}^{j_{m+1} \dots j_q} = A_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} I_{m+1} \dots I_p$$

მატრიცას. ამრიგად, შეკვეთის ოპერაციის m -ჯერადი გამოყენება როგორც ზედა, ისე ქვედა ინდექსების რაოდენობას m ერთეულით, ხოლო მატრიცის რანგს $2m$ ერთეულით ამცირებს.

ცხადია, ინდექსების შეკვეთა შეიძლება ვაწარმოოთ ნებისმიერი სხვა მიმდევრობითაც. მაგრამ ინდექსების სხვადასხვა თანამიმდევრობით გადაჯაჭვა, საზოგადოდ, სხვადასხვა შედეგს მოგვცემს.

უნდა გვახსოვდეს, რომ ინდექსების შეკვეთის ოპერაცია გამოიყენება მხოლოდ ისეთ მატრიცებზე, რომელთაც ერთი მაინც ზედა და ერთი მაინც ქვედა თავისუფალი ინდექსი აქვთ.

6. მატრიცების შიგა ნამრავლები. ტენზორულ ანალიზში პირდაპირ მატრიცულ გამრავლებას ხშირად მოსდევს ინდექსთა შეკვეთის ოპერაცია. მაგალითად, $A_i B^i$ წარმოადგენს $A_i B^i$ პირდაპირ ნამრავლში ინდექსთა შეკვეთის ოპერაციის შედეგს. ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი სახის შიგა ნამრავლები $A_{ij} B^{ij}$, $A^{ijh} B_i C_j$ და ა. შ.

7. ვექტორული სივრცეები. მოდულები. დავუშვათ, რომ აბელის ადიციური G ჯგუფისათვის დამატებით განმარტებულია მისი ელემენტების რაიმე K -ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაცია, ე. ი. გვაქვს წესი, რომელიც ნებისმიერ ორ $x \in G$, $a \in K$ ელემენტს უთანადებს G ჯგუფის ელემენტს; მას ax -ით (ან xa -თი) აღვნიშნავთ, რადგან მათ ერთმანეთისაგან არ ვანსხვავებთ. ამასთან სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $a(bx) = (ab)x$, $(b \in K)$.

2) თუ e წარმოადგენს K ველის ერთეულოვან ელემენტს, მაშინ $ex = x$ ნებისმიერი $x \in G$ ელემენტისთვის.

3) $(a+b)x = ax + bx$; $a(x+y) = ax + ay$ ($y \in G$).

ასეთ ადიციურ G ჯგუფს ეწოდება წრფივი სივრცე K ველზე. ამ შემთხვევაში ჯგუფის ელემენტებს ვექტორები ეწოდებათ, ხოლო ველის ელემენტებს — სკალარები.

G და K -ს სტრუქტურული თვისებებიდან და აგრეთვე 1)–3)-დან გამომდინარეობს, რომ

4) $0x = 0$, სადაც 0 წარმოადგენს K -ს ნულოვან ელემენტს, 0 კი — G -ს ნულოვან ელემენტს, $x \in G$ -ს ნებისმიერი ელემენტია.

5) თუ $a \neq 0$, მაშინ $ax=y$ განტოლებას აქვს ერთადერთი $x=x^{-1}y$ ამონახსნი.

განვიხილოთ (p, q) -მატრიცები, რომელთა ელემენტები რაიმე წრფივ X სივრცეს მიეკუთვნება. X_p^q სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ასეთ მატრიცათა სიმრავლე. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ X_p^q სიმრავლე წრფივი (ვექტორული) სივრცეა K ველზე.

ვთქვათ, X და Y ორი წრფივი სივრცეა. $f: X \rightarrow Y$ ასახვას წრფივი ეწოდება, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$1. f(x' + x'') = f(x') + f(x''), \quad \forall x', x'' \in X.$$

$$2. \alpha f(x) = f(\alpha x), \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall x \in X.$$

თუ $Y=K$, მაშინ წრფივ f ასახვას ეწოდება წრფივი ფუნქცია X -ზე.

თუ $X=Y$, მაშინ წრფივ $f: X \rightarrow X$ ასახვას ენდომორფიზმი ჰქვია.

ზოგჯერ მიზანშეწონილია წრფივი სივრცის განხილვა კომპუტაციურ A რგოლზე ერთეულით. მაშინ ზემოთ ჩამოთვლილი ყველა 1)–5) პირობა სრულდება, გარდა $ax=y$ განტოლების ამოხსნადობისა. ასეთ სივრცეს ეწოდება მოდული A რგოლზე. მაგალითად, რაიმე არის წერტილთა კოორდინატების ლებეგის აზრით ზომად ფუნქციათა სიმრავლე კომპუტაციური რგოლია, ვექტორულ ველთა V სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს (მოდულს) სკალარულ ფუნქციათა რგოლზე.

§ 2. კრონეკერის სიმბოლოები. ლევი-ჩივიტას სიმბოლოები

განვიხილოთ სიდიდეები, რომლებიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობების საშუალებით:

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & \text{როცა, } i=k, \\ 0, & \text{როცა, } i \neq k, \end{cases} \quad i, k \in [1, n]. \quad (2.1)$$

ამ სიდიდეებს კრონეკერის სიმბოლოები ეწოდება (მათ აგრეთვე კრონეკერის დელტებს უწოდებენ).

თუ $x^1, x^2, \dots, x^n$ დამოუკიდებელი ცვლადებია, მაშინ, ცხადია,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (2.2)$$

შეჯამების წესის თანახმად, გვექნება

$$\partial_i^n = n, \quad (2.3)$$

ასევე

$$\partial_k^i a^k = a^i, \quad \partial_k^i a_i = a_k. \quad (2.4)$$

(2.4) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ შიგა გამრავლების წესის გამოყენებით ∂_k^i სიმბოლოები შესაძლებლობას გვაძლევს შევასრულოთ ინდექსების ჩასმის ოპერაცია, ე. ი. მოვახდინოთ ერთი ინდექსის მეორით შეცვლა. ასე მაგალითად, a^r გამოსახულებაში თუ გვინდა r ინდექსის i ინდექსით შეცვლა, შიგა გამრავლების შემდეგი ოპერაცია უნდა შევასრულოთ:

$$\partial_i^i a^r = a^r. \quad (2.5)$$

გარდა ∂_i^i სიმბოლოებისა, ზოგჯერ ვისარგებლებთ აგრეთვე

$$\partial^{ij} = \partial_{ij} = \partial_j^i \quad (2.6)$$

სიმბოლოებით. შევნიშნოთ, რომ ეს ტოლობები არ ნიშნავს, რომ ∂_{ik} , ∂^{ik} და ∂_j^i სიმბოლოები ერთნაირია, ხშირად მათ ერთმანეთისაგან განვასხვავებთ.

შემოვიღოთ აგრეთვე კრონეკერის მრავალინდექსიანი

$$\partial_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \quad (2.7)$$

სიმბოლოები, რომლებიც ტოლია $+1$ -ის (-1 -ის) იმ შემთხვევაში, როცა ზედა ინდექსები ერთიმეორისაგან განსხვავდება და, გარდა ამისა, ქვედა ინდექსების მიმდევრობა მიიღება ზედა ინდექსების ლუწი (კენტი) გადანაცვლებით, დანარჩენ შემთხვევაში (2.7) სიმბოლოები ნულის ტოლია. მაგალითად, როცა $n=2$ და $p=2$, გვაქვს:

$$\partial_{ik}^{11} = \partial_{ik}^{22} = \partial_{11}^{1k} = \partial_{22}^{1k} = 0, \quad i, k = 1, 2,$$

$$\partial_{12}^{12} = \partial_{21}^{21} = 1, \quad \partial_{12}^{21} = \partial_{21}^{12} = -1.$$

განვიხილოთ კიდევ ორი სხვა მნიშვნელოვანი

$$\in i_1 i_2 \dots i_n = \partial_{1 2 \dots n}^{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (2.8 \text{ ა})$$

$$\in i_1 i_2 \dots i_n = \partial_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} \quad (2.8 \text{ ბ})$$

სიმბოლო. ისინი ლევი-ჩივიტას მიერ იქნა შემოღებული (იხ., მაგალითად, [15]). ცხადია,

$$\in i_1 \dots i_n = \in i_1 \dots i_n. \quad (2.8 \text{ გ})$$

ამრიგად, ყოველი $\in$ სიმბოლო $+1$ -ის (შესაბამისად -1 -ის) ტოლია, თუ ინდექსთა $i_1, \dots, i_n$ მიმდევრობა მიიღება ნატურალურ რიცხვთა $1, 2, \dots, n$ მიმდევრობის ლუწი (შესაბამისად კენტი) გადანაცვლებით; სხვა შემთხვევაში $\in$ სიმბოლო ნულის ტოლია.

ადგილი მისახვედრია, რომ, თუ $\in$ სიმბოლო ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მისი ნებისმიერი ორი ინდექსის გადანაცვლებისას იგი ნიშანს იცვლის. ე. ი. ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას

$$\in i_1 \dots i_s \dots i_k \dots i_n = - \in i_1 \dots i_k \dots i_s \dots i_n.$$

ამ ტოლობაში ერთმანეთთან გადასმულია მხოლოდ ორი — i_s და i_k ინდექსი. სხვა ინდექსები კი თავის ადგილზეა დატოვებული.

§ 8. დეტერმინანტები

1. დეტერმინანტების განმარტება. დეტერმინანტების მთელი რიგი თვისებების დამტკიცებას მნიშვნელოვნად ამარტივებს 8 და $\in$ სიმბოლოების გამოყენება. ამას გარდა, მათი საშუალებით მოკლედ შეიძლება ჩავწეროთ სხვადასხვა გამოსახულება, რომლებიც დეტერმინანტთა და მატრიცათა თეორიაში გვხვდება.

განვიხილოთ $n \times n$ კვადრატული

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv (a_{ij}) \quad (3.1)$$

მატრიცა, სადაც a_{ij} სიდიდეები რაიმე ველის ელემენტებია, მაგალითად — კომპლექსური რიცხვები. თუ a მატრიცაში გადავანაცვლებთ სტრიქონებსა და სვეტებს, მივიღებთ a_{ij} ელემენტებიან n' მატრიცას, რომელსაც ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება. a მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება სიდიდეს, რომელიც გამოისახება

$$a = \in i_1 \dots i_n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \quad (3.2 \text{ ა})$$

ფორმულით ან, რაც იგივეა (დაამტკიცეთ!),

$$a = \in i_1 \dots i_n a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \quad (3.2 \text{ ბ})$$

ფორმულით. ეს ნიშნავს, რომ a და a' მატრიცების დეტერმინანტები ტოლია, ე. ი. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ სტრიქონებს სვეტებით შევცვლით. n რიცხვს ეწოდება დეტერმინანტის რიგი,

შევნიშნოთ, რომ ამ პარაგრაფში ყველა ინდექსი (ყრუ და განუსაზღვრელი) ღებულობს $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს. მიუხედავად ამისა, ცალკეულ შემთხვევებში ჩვენ მაინც ვიხმართ შეჯამების Σ ნიშანს.

დეტერმინანტის აღსანიშნავად სარგებლობენ რამდენიმე სიმბოლოთი. ქვემოთ გამოვიყენებთ ჩვეულებრივ აღნიშვნას

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ზოგჯერ, როცა ტექსტიდან წინასწარ ცნობილია, თუ რომელი რიგის დეტერმინანტზეა ლაპარაკი, დაეწეროთ $a = \det(a_{ik})$. თუ n -ური რიგის დეტერმინანტის ელემენტებს აღვნიშნავთ a_i^k ან a^{ik} სიმბოლოთი, მაშინ შესაბამისად გვექნება

$$\det(a_i^k) = \epsilon^{i_1 \dots i_n} a_{i_1}^1 \dots a_{i_n}^n = \epsilon_{i_1 \dots i_n} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}, \quad (3.2 \text{ გ})$$

$$\det(a^{ik}) = \epsilon_{i_1 \dots i_n} a^{i_1 1} \dots a^{i_n n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} a^{1 i_1} \dots a^{n i_n}. \quad (3.2 \text{ დ})$$

ვთქვათ,

$$a_i^k = \delta_i^k \equiv \delta_{jk}^i,$$

მაშინ (3.2 გ) ტოლობის ძალით გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^1 & \delta_{i_1}^2 & \dots & \delta_{i_1}^n \\ \delta_{i_2}^1 & \delta_{i_2}^2 & \dots & \delta_{i_2}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_n}^1 & \delta_{i_n}^2 & \dots & \delta_{i_n}^n \end{vmatrix}, \quad (3.3 \text{ ა})$$

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^1 & \delta_{j_1}^2 & \dots & \delta_{j_1}^n \\ \delta_{j_2}^1 & \delta_{j_2}^2 & \dots & \delta_{j_2}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{j_n}^1 & \delta_{j_n}^2 & \dots & \delta_{j_n}^n \end{vmatrix}, \quad (3.3 \text{ ბ})$$

რომლებიც ლევი-ჩივიტას სიმბოლოებს დეტერმინანტებით გამო-
სახავენ.

შეენიშნოთ, რომ დეტერმინანტის განმარტება და მისი თვისე-
ბების შესწავლა ლევი-ჩივიტას სიმბოლოების გამოყენების გარე-
შეც შეიძლება. ასეთ შემთხვევაში (3.3 ა, ბ) ფორმულები ლევი-
ჩივიტას სიმბოლოების განმარტებად უნდა მივიღოთ.

2. დეტერმინანტების ძირითადი თვისებები. აღვნიშნოთ (3.3 ა.
ბ) ფორმულებიდან გამომდინარე ზოგიერთი მარტივი თვისება:

1) დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ რომელიმე სტრიქონის
ან სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

2) დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის, თუ ორ სტრიქონს ან ორ
სვეტს ერთმანეთთან გადავანაცვლებთ.

ამის დასამტკიცებლად უნდა ვისარგებლოთ $\in$ სიმბოლოს
(2.9) თვისებით. 1) და 2)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ,
თუ დეტერმინანტის ორი სტრიქონი ან ორი სვეტი ერთნაირია, მა-
შინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

3) ვთქვათ, x_i ვექტორის $a_{i1}, \dots, a_{in}$ კომპონენტები წარმოადგენს
რაიმე მატრიცის i -ურ სვეტს, ხოლო y_i ვექტორის $a_{1i}, \dots, a_{ni}$ კომპო-
ნენტები — i -ურ სტრიქონს. მაშინ, როგორც (3.2 ა, ბ) ფორმულები-
დან ჩანს, დეტერმინანტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $x_1, \dots, x_n$
ან $y_1, \dots, y_n$ ვექტორების ფუნქცია,

$$a = \in^{i_1 \dots i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \equiv A(x_1, \dots, x_n),$$

$$a = \in^{i_1 \dots i_n} a_{1 i_1} \dots a_{n i_n} \equiv B(y_1, \dots, y_n).$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ n -ური რიგის დეტერმინანტი წარმოად-
გენს n -ური რიგის მრავლადწირფივ ფორმას (n -ფორმას) როგორც $x_1, \dots,$
 $\dots, x_n$, ასევე $y_1, \dots, y_n$ ვექტორების მიმართ.

ეს ნიშნავს, რომ, თუ $x_m = \alpha x'_m + \beta x''_m$, $\alpha, \beta \in K$, მაშინ

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{m-1}, \alpha x'_m + \beta x''_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \\ = \alpha A(x_1, \dots, x_{m-1}, x'_m, x_{m+1}, \dots, x_n) + \\ + \beta A(x_1, \dots, x_{m-1}, x''_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ე. ი. ყოველი არგუმენტის მიმართ $A(x_1, \dots, x_n)$ ადიციური და ერთგ-
ვაროვანია. იგივე შეიძლება ითქვას $B(y_1, \dots, y_n)$ -ის მიმართაც.

4) თუ ვისარგებლებთ $\in$ სიმბოლოს თვისებებით და იმ ფაქტით, რომ ორი სტრიქონის ან ორი სვეტის ურთიერთგადასმა დეტერმინანტს ნიშანს უცვლის, ადვილად დავამტკიცებთ ფორმულებს

$$a \in k_1 \dots k_n = \epsilon^{i_1 \dots i_n} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_n k_n}, \quad (3.4 \text{ ა})$$

$$a \in k_1 \dots k_n = \epsilon^{i_1 \dots i_n} a_{k_1 i_1} \dots a_{k_n i_n}. \quad (3.4 \text{ ბ})$$

5) გამოვიყვანოთ ახლა დეტერმინანტთა გამრავლების ფორმულა. თუ $a = \det(a_{ik})$, $b = \det(b_{ik})$ წარმოადგენს n -ური რიგის დეტერმინანტებს, მაშინ (3.4 ა) ფორმულის ძალით გვექნება

$$ab = a \in i_1 \dots i_n b_{i_1 1} \dots b_{i_n n} = \sum_{i_1 \dots i_n} \epsilon^{k_1 \dots k_n} a_{k_1 i_1} \dots a_{k_n i_n} b_{i_1 1} \dots b_{i_n n}.$$

ამრიგად,

$$ab = c, \quad c = \det(c_{ik}), \quad (3.5)$$

სადაც $\det(c_{ik})$ წარმოადგენს n -ური რიგის დეტერმინანტს, რომლის ელემენტები გამოისახება ფორმულით

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}. \quad (3.5 \text{ ა})$$

თუ a და b დეტერმინანტებში სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით, მაშინ არც დეტერმინანტები და არც მათი ნამრაველი არ შეიცვლება, მაგრამ c დეტერმინანტის ელემენტებისათვის მივიღებთ გარეგნულად სხვა გამოსახულებებს:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{jk}. \quad (3.5 \text{ ბ})$$

ამრიგად, n -ური რიგის დეტერმინანტების გადასამრავლებლად შეგვიძლია ვისარგებლოთ (3.5 ა) ან (3.5 ბ) ფორმულებით.

8. მატრიცის მინორები. დეტერმინანტების დაშლა. რადგან $\epsilon 1 \dots k-1 i k+1 \dots n = \delta_{ik}$, ამიტომ (4.5 ა) ფორმულიდან გვექნება

$$\begin{aligned} a\delta_{ik} &= \epsilon^{i_1 \dots i_k \dots i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_{k-1} k-1} a_{i_k i} a_{i_{k+1} k+1} \dots a_{i_n n} = \\ &= a_{ji} [\epsilon^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_{k-1} k-1} a_{i_{k+1} k+1} \dots a_{i_n n}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

აქ ჩვენ a_{ik} მამრავლი გავიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ, ხოლო შემდეგ ყრუ i_k ინდექსი აღვნიშნეთ j სიმბოლოთი. ცხადია, ფრჩხილების შიგნით მოთავსებული გამოსახულება ნიშნის სიზუსტით ტოლია $a = \det(a_{ik})$ დეტერმინანტის a_{jk} ელემენტის შესაბამისი Δ_{ik} მინორის. Δ_{ik} მინორი წარმოადგენს $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს, რომელსაც მივიღებთ, თუ $a = \det(a_{ik})$ დეტერმინანტში ამოვშლით i -ურ სტრიქონს და k -ურ სვეტს. ϵ სიმბოლოს (2.9) თვისების გათვალისწინებით მარტივი მსჯელობები გვიჩვენებს, რომ ზემოხსენებული გამოსახულება წარმოადგენს a_{jk} ელემენტის ალგებრულ დამატებას, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \Delta_{jk} = (-1)^{j+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1, k-1} & a_{1, k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1, 1} & \dots & a_{j-1, k-1} & a_{j-1, k+1} & \dots & a_{j-1, n} \\ a_{j+1, 1} & \dots & a_{j+1, k-1} & a_{j+1, k+1} & \dots & a_{j+1, n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n, k-1} & a_{n, k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

ამრიგად (3.6) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$a\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_{jk}, \quad i, k \in [1, n]. \quad (3.8 \text{ ა})$$

ანალოგიურად მტკიცდება

$$a\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}, \quad i, k \in [1, n] \quad (3.8 \text{ ბ})$$

ფორმულა. თუ $i=k$, მივიღებთ დეტერმინანტის დაშლის ფორმულას:

$$a = \sum_{j=1}^n a_{jj} A_{jj}, \quad k \in [1, n], \quad (3.9 \text{ ა})$$

$$a = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}, \quad k \in [1, n]. \quad (3.9 \text{ ბ})$$

პირველი (მეორე) ფორმულა წარმოადგენს დეტერმინანტის დაშლას ნებისმიერი k -ური სვეტის (სტრიქონის) ელემენტების მიმართ. როცა $i \neq k$, (3.8 ა, ბ) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ i -ური სვეტის (სტრიქონის) ელემენტების k -ური სვეტის (სტრიქონის) ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

4. შებრუნებული მატრიცის გამოსახულება. დაფუძნებით, რომ $a = \det(a_{ik}) \neq 0$. მაშინ, თუ (3.8 ა, ბ) ტოლობათა ორივე ნაწილს გავყოფთ a -ზე და შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$a^{ik} = \frac{1}{a} A_{ki}, \quad k, i \in [1, n], \quad (3.10)$$

მივიღებთ

$$a^{ki} a_{ij} = a_{ij} a^{ik} = \delta_i^k, \quad i, k \in [1, n]. \quad (3.11)$$

თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტთა გამრავლების წესს, გვექნება

$$\det(a_{ki}) \det(a^{ki}) = \det \delta_i^k = 1. \quad (3.12)$$

მაშასადამე,

$$\det(a^{ki}) = (\det(a_{ki}))^{-1} \neq 0. \quad (3.13)$$

ამრიგად, თუ $\det(a_{ik}) \neq 0$, მაშინ a_{ik} მატრიცისათვის არსებობს ერთადერთი a^{ik} მატრიცა, რომელაც აკმაყოფილებს (3.11) პირობებს.

შეგვიშნოთ, რომ $n \times n$ კვადრატულა a_{ik} მატრიცების A სიმრავლე, როდესაც მატრიცათა ელემენტები რაიმე K ველს მიეკუთვნება, წარმოადგენს რგოლს ერთეულთა. ცხადია, A ადითიური ჯგუფია შეკრების ოპერაციით: თუ $a_{ik}, b_{ik} \in A$, მაშინ $a_{ik} + b_{ik} \in A$. მასში გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად განიმარტება: თუ $a_{ik}, b_{ik} \in A$, მა-

შინ $\sum_{k=1}^n b_{ik} b_{kj} \in A$. რგოლის ერთეულს წარმოადგენს δ_{ik} მატრიცა.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აქ რგოლის ყველა აქსიომა სრულდება. ამასთან, თუ a_{ik} ისეთი კვადრატულა მატრიცაა, რომ $\det(a_{ik}) \neq 0$,

მაშინ მას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა A რგოლში (გამრავლების ოპერაციის მიმართ) და ესაა a^{ih} მატრიცა. ამრიგად (როცა $\det(a_{ih}) \neq 0$), a_{ih} და a^{ih} ურთიერთშებრუნებული მატრიცებია.

§ 4. წრფივ აღგებრულ განტოლებათა სისტემები

1. განტოლებათა მიკავშირებული სისტემები. კრამერის ფორმულები. ახლა დეტერმინანტების წინა პუნქტში დადგენილი თვისებები გამოვიყენოთ შემდეგი სახის მიკავშირებულ წრფივ აღგებრულ განტოლებათა სისტემების

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x^k = b_i, \quad i \in [1, n], \quad (4.1 \text{ ა})$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} y^k = c_i, \quad i \in [1, n] \quad (4.1 \text{ ბ})$$

შესასწავლად.

განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა ამ სისტემების საერთო დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, $a = \det(a_{ih}) \neq 0$. მაშინ, როგორც წინა პუნქტში დავამტკიცეთ, არსებობს a_{ih} ელემენტებიანი მატრიცის შებრუნებული a^{ih} ელემენტებიანი მატრიცა. თუ (4.1 ა, ბ) განტოლებების ორივე ნაწილს შესაბამისად გადავამრავლებთ a^{ij} და a^{ji} მატრიცებზე, ხოლო შემდეგ შევაჯამებთ i ინდექსით, (3.11) ტოლობების მიხედვით მივიღებთ ფორმულებს

$$x^j = a^{ij} b_i = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}, \quad j \in [1, n], \quad (4.2 \text{ ა})$$

$$y^j = a^{ji} c_i = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n c_i A_{ji}, \quad j \in [1, n]. \quad (4.2 \text{ ბ})$$

ამრიგად, თუ $a = \det(a_{ih}) \neq 0$, მაშინ არაერთგვაროვან მიკავშირებულ წრფივ განტოლებათა (4.1 ა, ბ) სისტემებს ნებისმიერი მარჯვენა მხარესათვის აქვს ამონახსნი და ისინი ცალსახად განისაზღვრებიან

(4.2 ა) და (4.2 ბ) ფორმულებით. შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებათა

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x^k = 0, \quad i \in [1, n], \quad (4.3 \text{ ა})$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} y^k = 0, \quad i \in [1, n] \quad (4.3 \text{ ბ})$$

სისტემებს აქვს მხოლოდ ტრივიალური $x^k = 0$ და $y^k = 0$, $k \in [1, n]$ ამონახსნები.

(3.7) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$x^i = a^{ik} b_k = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n b_k A_{ki} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1, i-1} b_1 a_{1, i+1} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{n, i-1} b_n a_{n, i+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

ან, თუ გადავადგილებთ i -ურ სვეტს პირველ ადგილზე, მივიღებთ

$$x^i = - \frac{(-1)^i}{a} \begin{vmatrix} b_1 a_{11} \dots a_{1, i-1} a_{1, i+1} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ b_n a_{n1} \dots a_{n, i-1} a_{n, i+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i \in [1, n] \quad (4.5 \text{ ა})$$

ფორმულას. ანალოგიურად (4.2 ბ) ფორმულა ღებულობს სახეს

$$y^i = - \frac{(-1)^i}{a} \begin{vmatrix} c_1 a_{11} \dots a_{i-1, 1} a_{i+1, 1} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ c_n a_{1n} \dots a_{i-1, n} a_{i+1, n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4.5 \text{ ბ})$$

(4.5 ა, ბ) ტოლობებს კრამერის ფორმულები ეწოდება.

2. განტოლებათა ერთგვაროვანი მიკავშირებული სისტემები. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც (4.1 ა, ბ) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, $a = \det(a_{ik}) = 0$.

ვთქვათ, p არის a_{ik} მატრიცის რანგი. ეს ნიშნავს, რომ $\det(a_{ik})$ დეტერმინანტის ყველა $k > p$ რიგის მინორი ნულის ტოლია, ხოლო p რიგის მინორებს შორის არსებობს ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული⁵. შეგახსენებთ, რომ k რიგის მინორი დეტერმინანტისაგან მიი-

⁵ (a_{ik}) მატრიცის რანგის ეს განმარტება არ ემთხვევა $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\beta_1, \dots, \beta_p}$ მატრიცის რანგის განმარტებას, რომელიც ამ თავის § 1-ში იყო მოყვანილი: $r = p + q$. უკანასკნელს ზოგჯერ $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\beta_1, \dots, \beta_q}$ -ს ვალენტობას უწოდებენ (რედ. შენიშვნა).

ლება $(n-k)$ სვეტის და $(n-k)$ სტრიქონის ამოშლით. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სახელდობრ p რიგის მთავარი მინორი არ უდრის ნულს, ე. ი.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0, \quad p < n. \quad (4.6)$$

საკმარისია სისტემაში შემავალი კოეფიციენტებისა და საძიებელი სიდიდეების ნუმერაციის შეცვლა, რომ ეს შემთხვევა მივიღოთ.

შემდგომში იმ ინდექსებს, რომლებიც ლებულობენ $1, 2, \dots, p$ მნიშვნელობებს, აღვნიშნავთ ბერძნული $\alpha, \beta, \dots$ ასოებით, ხოლო მათ კი, რომლებიც $p+1, \dots, n$ მნიშვნელობებს ლებულობენ — სტრიქონით აღჭურვილი იმავე ბერძნული ასოებით. მაშინ (4.3 ა) სისტემა დაიყოფა ორ ჯგუფად

$$a_{\alpha\beta} x^\beta = -a_{\alpha\beta'} x^{\beta'}, \quad \alpha \in [1, p], \quad (4.7 \text{ ა})$$

$$a_{\alpha'\beta} x^\beta + a_{\alpha'\beta'} x^{\beta'} = 0, \quad \alpha' \in [p+1, n]. \quad (4.7 \text{ ბ})$$

(4.6) პირობის ძალით შესაძლებელია (4.7 ა) სისტემის შებრუნება და (5.4 ბ) ფორმულების თანახმად იგი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} x^\beta &= -a^{\beta\alpha} a_{\alpha\beta'} x^{\beta'} = \\ &= \frac{(-1)^\beta}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{1\beta'} x^{\beta'} & a_{11} & \dots & a_{1,\beta-1} & a_{1,\beta+1} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p\beta'} x^{\beta'} & a_{p1} & \dots & a_{p,\beta-1} & a_{p,\beta+1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

სადაც $a^{\alpha\beta}$ წარმოადგენს $a_{\alpha\beta}$ მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას, $\alpha, \beta \in [1, p]$.

ვინაიდან a დეტერმინანტის p -ზე მეტი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, გვაქვს

$$\begin{vmatrix} a_{1\beta'} & a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p\beta'} & a_{p1} & \dots & a_{pp} \\ a_{\alpha'\beta} & a_{\alpha'1} & \dots & a_{\alpha'p} \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha', \beta' \in [1, n]. \quad (4.9)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $x^{\beta'}$ -ზე და შევაჯამებთ β' ინდექსით, გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{1\beta} \cdot x^{\beta'} & a_{11} \dots a_{1p} \\ a_{p\beta} \cdot x^{\beta'} & a_{p1} \dots a_{pp} \\ a_{\alpha'\beta} \cdot x^{\beta'} & a_{\alpha'1} \dots a_{\alpha'p} \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha' \in [p+1, n]. \quad (4.10)$$

დავშალოთ ეს დეტერმინანტი უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების მიმართ და ვისარგებლოთ (3.9 ბ) და (4.8) ფორმულებით, მივიღებთ

$$a_{\alpha'\beta} \cdot x^{\beta'} + a_{\alpha'\beta} x^{\beta} = 0, \quad \alpha' \in [p+1, n]. \quad (4.10 \text{ ა})$$

ამრიგად, $x^{p+1}, \dots, x^n$ სიდიდეების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის (4.7 ა) სისტემის ამონახსნი აკმაყოფილებს აგრეთვე (4.7 ბ) სისტემასაც.

თუ ამ ტოლობაში შევიტანთ $x^{\beta} = -a^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$, $x^{\beta'}$ გამოსახულებას და გავითვალისწინებთ $x^{\beta'}$ სიდიდეების ნებისმიერობას, მივიღებთ

$$a_{\alpha'\beta} - a_{\alpha'\beta} a^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha', \beta' \in [p+1, n] \quad (4.10 \text{ ბ})$$

ტოლობებს. ერთგვაროვანი მიკავშირებული (4.3 ბ) სისტემისათვის ანალოგიურად ვღებულობთ

$$\begin{aligned} y^{\beta} &= -a^{\alpha\beta} a_{\beta\alpha} y^{\beta'} = \\ &= \frac{(-1)^{\beta}}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{\beta'1} y^{\beta'} & a_{11} \dots a_{\beta-1,1} a_{\beta+1,1} \dots a_{p1} \\ a_{\beta'p} y^{\beta'} & a_{1p} \dots a_{\beta-1,p} a_{\beta+1,p} \dots a_{pp} \end{vmatrix}, \quad \beta \in [1, p]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

ნებისმიერი $y^{p+1}, \dots, y^n$ სიდიდეებისათვის (4.11) გამოსახულება აკმაყოფილებს (4.3 ბ) განტოლებათა სისტემას.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $r = n - p$,

$$x^{i\alpha} = \begin{cases} -\sum_{\gamma=1}^p a^{i\gamma} a_{\gamma,p+\alpha}, & \text{როცა } i \in [1, p], \alpha \in [1, r], \\ \delta^{\beta\alpha}, & \text{როცა } i = p+\beta, \alpha, \beta \in [1, r]. \end{cases} \quad (4.12 \text{ ა})$$

$$y^{i\alpha} = \begin{cases} -\sum_{\gamma=1}^p a^{\gamma i} a_{p+\alpha,\gamma}, & \text{როცა } i \in [1, p], \alpha \in [1, r], \\ \delta^{\beta\alpha}, & \text{როცა } i = p+\beta, \alpha, \beta \in [1, r]. \end{cases} \quad (4.12 \text{ ბ})$$

ცხადია, $x'^{\alpha}, y'^{\alpha}, \alpha \in [1, r]$ შესაბამისად შეადგენს ერთგვაროვანი მიკავშირებული (4.3 ა) და (4.3 ბ) განტოლებათა სისტემების წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ამონახსნებს. ამიტომ ეს ამონახსნები გამოისახება ფორმულებით

$$x' = \sum_{\alpha=1}^r x'^{\alpha} C'_{\alpha} = x'^1 C'_1 + \dots + x'^r C'_r, \quad (4.13 \text{ ა})$$

$$y' = \sum_{\alpha=1}^r y'^{\alpha} C''_{\alpha} = y'^1 C''_1 + \dots + y'^r C''_r, \quad (4.13 \text{ ბ})$$

სადაც C'_{α} და C''_{α} ნებისმიერი მუდმივებია.

ამრიგად, თუ $a = \det(a_{ij}) = 0$, ხოლო მისი რანგია p , $1 \leq p < n$, მაშინ ერთგვაროვან მიკავშირებულ განტოლებათა (4.3 ა) და (4.3 ბ) სისტემებს აქვს თითოეულს $r = n - p$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი შესაბამისად $x'^1, \dots, x'^r$ და $y'^1, \dots, y'^r$, $i \in [1, n]$, ხოლო მათი ზოგადი ამონახსნები გამოისახება (4.13 ა) და (4.13 ბ) ფორმულებით, სადაც C'_{α} და C''_{α} ნებისმიერი მუდმივებია.

8. განტოლებათა არაერთგვაროვანი მიკავშირებული სისტემები. განვიხილოთ ახლა არაერთგვაროვანი მიკავშირებული განტოლებათა (4.1 ა) და (4.1 ბ) სისტემები.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x^k y^i = \sum_{i=1}^n y^i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x^k \right) = \sum_{i=1}^n x^i \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} y^k \right)$$

ცხადი იგივეობიდან გამომდინარეობს, რომ (4.1 ა) და (4.1 ბ) განტოლებათა სისტემების ამოხსნადობისათვის აუცილებელია თითოეულისათვის $r = n - p$ შემდეგი პირობის

$$\sum_{i=1}^n b_i y'^{\alpha} = 0, \quad \alpha \in [1, r], \quad (4.14 \text{ ა})$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x'^{\alpha} = 0, \quad \alpha \in [1, r] \quad (4.14 \text{ ბ})$$

შესრულება. თუ გავითვალისწინებთ (4.12 ა, ბ) აღნიშვნებს, მაშინ (4.1 ა, ბ) ტოლობები მიიღებს სახეს

$$\sum_{\gamma=1}^p \sum_{\beta=1}^p b_{\beta} a^{\beta\gamma} a_{\gamma\alpha'} = b_{\alpha'}, \quad \alpha' \in [p+1, n], \quad p=n-r, \quad (4.15 \text{ ა})$$

$$\sum_{\gamma=1}^p \sum_{\beta=1}^p c_{\beta} a^{\gamma\beta} a_{\alpha'\gamma} = c_{\alpha'}, \quad \alpha' \in [p+1, n], \quad p=n-r. \quad (4.15 \text{ ბ})$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს პირობები საკმარისია არაერთგვაროვანი განტოლებათა (4.1 ა, ბ) სისტემების ამოხსნადობისათვის.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{\beta=1}^p a_{\alpha\beta} x^{\beta} = b_{\alpha}, \quad \alpha \in [1, p], \quad p=n-r. \quad (4.16)$$

მისი ამონახსნი (5.2 ა) ტოლობის ძალით გამოისახება ფორმულით

$$x^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^p a^{\beta\alpha} b_{\alpha}, \quad \beta \in [1, p], \quad p=n-r,$$

სადაც $a^{\alpha\beta}$ მატრიცა $a_{\alpha\beta}$ -ს შებრუნებულია, $\alpha, \beta \in [1, p]$, რომელიც (4.6)-ის ძალით არსებობს. თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ

$$\sum_{\beta=1}^p a_{\alpha'\beta} x^{\beta} = b_{\alpha'}, \quad \alpha' \in [p+1, n]$$

განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ (4.15 ა) ტოლობებს, რომლებიც პირობის თანახმად შესრულებულია.

ამრიგად, თუ შესრულებულია (4.14 ა) პირობები, მაშინ (4.1 ა) არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას გააჩნია შემდეგი კერძო ამონახსნი.

$$x^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^p a^{\beta\alpha} b_{\alpha}, \quad \beta \in [1, p]; \quad x^{\beta'} = 0, \quad \beta' \in [p+1, n]. \quad (4.17 \text{ ა})$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ, თუ შესრულებულია (4.14 ბ) პირობები, მაშინ არაერთგვაროვან განტოლებათა (4.1 ბ) სისტემას გააჩნია შემდეგი სახის კერძო ამონახსნები:

$$y_\beta^p = \sum_{\alpha=1}^p a_{\beta\alpha}^p c_\alpha, \quad \beta \in [1, p]; \quad y_\beta^p = 0, \quad \beta' \in [p+1, n]. \quad (4.17 \text{ ბ})$$

ამრიგად, მივედით შემდეგ დასკვნამდე:

თუ $a = \det(a_{ik}) = 0$, მაშინ არაერთგვაროვანი მიკავშირებული განტოლებათა (4.1 ა, ბ) სისტემების ამოხსნადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი (4.15 ა, ბ) პირობების ეკვივალენტური, თითოეული-სათვის $r = n - p$, (4.14 ა, ბ) პირობის შესრულება, სადაც p წარმოადგენს a_{ij} მატრიცის რანგს. მაშინ (4.1 ა, ბ) არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემებს გააჩნია შესაბამისად (4.17 ა) და (4.17 ბ) სახის კერძო ამონახსნები, ხოლო მათი ზოგადი ამონახსნები გამოისახება ფორმულებით

$$x^i = x_0^i + \sum_{\alpha=1}^r x'^\alpha C'_\alpha, \quad i \in [1, n], \quad (4.18 \text{ ა})$$

$$y^i = y_0^i + \sum_{\alpha=1}^r y'^\alpha C''_\alpha, \quad i \in [1, n], \quad (4.18 \text{ ბ})$$

სადაც C'_α და C''_α ნებისმიერი მუდმივებია, $r = n - p$.

§ 5. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე

1. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა. განვიხილოთ კომპლექსური $x^1, \dots, x^n$ ცვლადების კვადრატული

$$A(x^1, \dots, x^n) = a_{ik} x^i \overline{x^k} \quad (5.1)$$

ფორმა, სადაც a_{ik} კომპლექსური რიცხვებია. აქ და ქვემოთ ამ პარაგრაფში i და k ყოველ ინდექსები ღებულობს $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს. ზაზი რაიმე გამოსახულების ზემოთ აღნიშნავს მის კომპლექსურად შეუღ-

ლებულ მნიშვნელობას. $D(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ (5.1) კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი,

$$D(A) = \det(a_{ik}), \quad i, k \in [1, n]. \quad (5.2)$$

ვთქვათ, $x^1, \dots, x^n$ ცვლადების ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის შესრულებულია პირობა

$$A(x^1, \dots, x^n) \geq 0. \quad (5.3)$$

ამ შემთხვევაში $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატულ ფორმას დადებითი ეწოდება. თუ ამასთან (5.3)-ში ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $x^1 = \dots = x^n = 0$, კვადრატულ ფორმას დადებითად განსაზღვრული ეწოდება.

საზოგადოდ, თუ $A(x^1, \dots, x^n)$ ფორმა $x^1, \dots, x^n$ კომპლექსური ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობს, მაშინ, ცხადია, შესრულებულია

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \quad (5.4)$$

პირობა. მატრიცას, რომელიც ამ პირობას აკმაყოფილებს, ერმიტული მატრიცა ეწოდება. ამრიგად, დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა ერმიტულია.

2. კანონიკურ სახეზე დაყვანა. ვთქვათ $A(x^1, \dots, x^n)$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა, მაშინ, ცხადია, $a_{11} = A(1, 0, \dots, 0) > 0$ და (5.4) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$A(x^1, \dots, x^n) = \widehat{A}_1(x^2, \dots, x^n) + a_{11} \left(x^1 + \frac{\bar{a}_{12}}{a_{11}} x^2 + \dots + \frac{\bar{a}_{1n}}{a_{11}} x^n \right) \left(\bar{x}^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \bar{x}^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \bar{x}^n \right), \quad (5.5)$$

სადაც $\widehat{A}_1(x^2, \dots, x^n)$ წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას $x^2, \dots, x^n$ ცვლადების მიმართ. შემოვიღოთ ახალი

$$\xi^1 = x^1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} x^2 + \dots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} x^n, \quad \xi^2 = x^2, \dots, \xi^n = x^n \quad (5.6)$$

ცვლადები. მაშინ (5.5) ფორმულა მიიღებს

$$A(x^1, \dots, x^n) = E_1 \bar{\xi}^1 \xi^1 + A_1(\xi^2, \dots, \xi^n), \quad E_1 = a_{11} > 0 \quad (5.7)$$

სახეს, სადაც $A_1(\xi^2, \dots, \xi^n)$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა $\xi^2, \dots, \xi^n$ ცვლადების მიმართ. ახლა, თუ A_1 -ს აგრეთვე (5.7) სახით წარმოვიდგენთ, გვექნება

$$A(x^1, \dots, x^n) = E_1 \eta^1 \bar{\eta}^1 + E_2 \eta^2 \bar{\eta}^2 + A_2(\eta^3, \dots, \eta^n), \quad E_2 > 0, \quad (5.8)$$

სადაც $A_2(\eta^3, \dots, \eta^n)$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა $\eta^3, \dots, \eta^n$ ცვლადების მიმართ. $\eta^1, \dots, \eta^n$ ცვლადები $\xi^1, \dots, \xi^n$ ცვლადებთან დაკავშირებულია შემდეგი სახის დამოკიდებულებებით:

$$\eta^1 = \xi^1, \quad \eta^2 = \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots + \alpha_n \xi^n, \quad \eta^3 = \xi^3, \dots, \eta^n = \xi^n.$$

ამრიგად, (5.6) ტოლობების საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} \eta^1 &= x^1 + \alpha_2^1 x^2 + \dots + \alpha_n^1 x^n, & \eta^2 &= x^2 + \alpha_3^2 x^3 + \dots + \alpha_n^2 x^n, \\ \eta^3 &= x^3, \dots, & \eta^n &= x^n. \end{aligned} \quad (5.9)$$

ამ მეთოდის მიმდევრობით გამოყენების შედეგად (n ბიჯის შემდეგ) მივიღებთ $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის შემდეგნაირ წარმოდგენას

$$A(x^1, \dots, x^n) = E_1 y^1 \bar{y}^1 + E_2 y^2 \bar{y}^2 + \dots + E^n y^n \bar{y}^n, \quad (5.10)$$

სადაც $E_1, E_2, \dots, E_n$ დადებითი რიცხვებია. როგორც ამას (5.6) და (5.9) ფორმულები გვიჩვენებს, $y^1, y^2, \dots, y^n$ ცვლადები $x^1, x^2, \dots, x^n$ ცვლადებთან დაკავშირებულია შემდეგი სახის წრფივი დამოკიდებულებებით

$$y^k = x^k + \alpha_{k+1}^k x^{k+1} + \dots + \alpha_n^k x^n, \quad k \in [1, n]. \quad (5.11)$$

ცხადია, გარდაქმნის ფუნქციონალურ დეტერმინანტს (იაკობიანს) აქვს

$$\frac{D(y^1, \dots, y^n)}{D(x^1, \dots, x^n)} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ 0 & 1 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (5.12)$$

სახე.

ამრიგად, დადებითად განსაზღვრული $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმა $x^1, \dots, x^n$ ცვლადების არაგადაგვარებული წრფივი გარდაქმნების საშუალებით დაიყვანება (5.10) სახეზე.

8. კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი. სილვესტრის პირობა. თუ (5.11) გამოსახულებას (5.10) ტოლობაში შევიტანთ, გვექნება

$$a_{ik} x^i \bar{x}^k = E_{pq} \alpha_i^p \bar{\alpha}_k^q x^i \bar{x}^k.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$a_{ik} = E_{pq} \alpha_i^p \bar{\alpha}_k^q, \quad (5.13)$$

სადაც

$$E_{pq} = \begin{cases} E_p, & \text{როცა } q=p, \\ 0, & \text{როცა } q \neq p; \end{cases} \quad (5.14 \text{ ა})$$

$$\alpha_i^p = \begin{cases} 1, & \text{როცა } p=i, \\ 0, & \text{როცა } p>i. \end{cases} \quad (5.14 \text{ ბ})$$

დეტერმინანტების გამრავლების წესის გამოყენებით (5.13) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\det(a_{ik}) = \det(E_{ik}) |\det(\alpha_i^p)|^2. \quad (5.15)$$

მაგრამ (5.14 ბ)-ის ძალით უკანასკნელი ტოლობა ლებულობს სახეს

$$D(A) = \det(a_{ik}) = E_1 E_2 \cdots E_n > 0. \quad (5.16)$$

ამრიგად, დადებითად განსაზღვრული $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის $D(A)$ დისკრიმინანტი დადებითია.

ახლა განვიხილოთ კვადრატული ფორმები

$$\begin{aligned} A_1(x^1) &= A(x^1, 0, \dots, 0), \\ A_2(x^1, x^2) &= A(x^1, x^2, 0, \dots, 0), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} A_{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) &= A(x^1, \dots, x^{n-1}, 0), \\ A_n(x^1, \dots, x^n) &= A(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

ყველა მათგანი, ცხადია, დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა.

თუ დავუშვებთ $x^n=0$, მაშინ (5.11)-დან გამომდინარეობს, რომ $y^n=0$ და (5.10)-ის ძალით გვექნება

$$A_{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) = E_1 y^1 \bar{y}^1 + \cdots + E_{n-1} y^{n-1} \bar{y}^{n-1}.$$

თუ დავუშვებთ $x^n=x^{n-1}=0$, მაშინ (5.11)-დან გამომდინარეობს, რომ $y^n=y^{n-1}=0$. ამგვარად,

$$A_{n-2}(x^1, \dots, x^{n-2}) = E_1 y^1 \bar{y}^1 + \cdots + E_{n-2} y^{n-2} \bar{y}^{n-2}.$$

ახლა ცხადია, რომ გვაქვს ზოგადი

$$A_m(x^1, \dots, x^m) = E_1 y^1 \bar{y}^1 + \cdots + E_m y^m \bar{y}^m, \quad m \in [1, n]. \quad (5.18)$$

ფორმულა და (5.16)-ის თანახმად

$$D(A_m) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ a_{m1} & a_{mm} \end{vmatrix} = E_1 \cdots E_m > 0, \quad m \in [1, n]. \quad (5.19)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$E_1 = a_{11} = D(A_1) > 0, \quad E_2 = \frac{D(A_2)}{D(A_1)} > 0, \dots$$

$$\dots, E_n = \frac{D(A_n)}{D(A_{n-1})} > 0. \quad (5.20)$$

ამრიგად, დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმისთვის აუცილებელია (5.20) უტოლობების ტოლფასი (5.19) პირობების შესრულება.

(5.14 ა, ბ)-ს ძალით (5.13)-დან ვღებულობთ

$$a_{k1} = E_1 \alpha_k^1,$$

$$a_{k2} = E_1 \bar{\alpha}_2^1 \alpha_k^1 + E_2 \alpha_k^2, \quad (5.21)$$

$$a_{k, k-1} = E_1 \bar{\alpha}_{k-1}^1 \alpha_k^1 + E_2 \bar{\alpha}_{k-1}^2 \alpha_k^2 + \dots + E_{k-1} \alpha_k^{k-1}, \quad k \in [1, n].$$

განტოლებათა ამ სისტემიდან $\alpha_2^1, \alpha_3^1, \alpha_3^2, \alpha_4^1, \alpha_4^2, \dots, \alpha_n^{n-1}$ სიდიდეები თანმიმდევრობით ცალსახად განისაზღვრებიან. ისინი გამოისახებიან $A(x_1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების საშუალებით. თუ შევიტანთ ნაბოვნ $\alpha_k^i, k > i$ მნიშვნელობებს (5.11) ტოლობებში, ხოლო შემდეგ მიღებული y^k ცვლადების მნიშვნელობებს — (5.10)-ში, მივიღებთ

$$a_{ik} x^i \bar{x}^k = E_1 y^1 \bar{y}^1 + E_2 y^2 \bar{y}^2 + \dots + E_n y^n \bar{y}^n \quad (5.22)$$

იგივეობას, რომელიც გვიჩვენებს, რომ თუ ყველა $E_i > 0$, მაშინ $a_{ik} x^i \bar{x}^k$ დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს. აქ იგულისხმება, რომ ცვლადთა (5.1) გარდაქმნა (5.12) ტოლობის ძალით არაგადაგვარებულია.

ამრიგად, დავეამტკიცეთ სილვესტრის თეორემა, რომ

$$D(A_m) = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ a_{m1} \cdots a_{mm} \end{vmatrix} > 0, \quad m \in [1, n] \quad (5.19)$$

უტოლობები წარმოადგენენ

$$A(x^1, \dots, x^n) \equiv a_{ih} x^i \bar{x}^h$$

კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

4. კვადრატების ჯამადე დაყვანა. თუ შემოვიღებთ

$$Z^i = \frac{1}{\sqrt{E_i}} y^i, \quad i \in [1, n] \quad (5.23)$$

ცვლადებს, მაშინ $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმა დაიყვანება კანონიურ სახეზე

$$A(x^1, \dots, x^n) = Z^1 \bar{Z}^1 + Z^2 \bar{Z}^2 + \dots + Z^n \bar{Z}^n. \quad (5.24)$$

ვთქვათ, $A(x^1, \dots, x^n)$ დადებითად განსაზღვრული ნამდვილი კვადრატული ფორმაა, ე. ი. a_{ih} ნამდვილი მუდმივებია, ხოლო $x^1, \dots, x^n$ — ნამდვილი ცვლადები. მაშინ a_{ik}^* , $k \geq i$ კოეფიციენტები, რომლებიც (5.21) განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრებიან, ნამდვილ რიცხვებს წარმოადგენენ. მაშასადამე, თუ $x^1, \dots, x^n$ ნამდვილი ცვლადებია, მაშინ $y^1, \dots, y^n$ და $Z^1, \dots, Z^n$ აგრეთვე ნამდვილ ცვლადებს წარმოადგენენ.

ამრიგად, $x^1, \dots, x^n$ ცვლადთა წრფივი ნამდვილი (5.11) და (5.23) გარდაქმნების შედეგად დადებითად განსაზღვრული ნამდვილი $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმა დაიყვანება კანონიურ სახეზე

$$A(x^1, \dots, x^n) = (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \dots + (Z^n)^2. \quad (5.25)$$

ნამდვილი კვადრატული ფორმის ერმიტულობის (5.4) პირობა ლებულობს

$$a_{ih} = a_{hi} \quad (5.26)$$

სახეს, ე. ი. a_{ih} სიმეტრიული ნამდვილი მატრიცაა.

თ ა ვ ი მ ე ო რ ა

ევკლიდეს სამგანწმომილუბიანი სივრცის ვექტორული ალგებრის ელემენტები

§ 1. ვექტორები ევკლიდეს სივრცეში და ზოგიერთი ალგებრული ოპერაცია მათზე

ამ თავში წმინდა გეომეტრიული ხერხების გამოყენებით მკითხველს შევახსენებთ ვექტორული ალგებრის ზოგიერთ ცნებასა და ფორმულას, რომელთა საფუძველზე ბუნებრივად შემოიტანება გეომეტრიული შინაარსის მქონე ზოგიერთი ტენზორი.

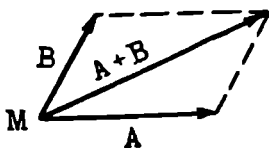
1. ვექტორის ცნება. ვექტორული ანალიზის ელემენტარულ კურსში ვექტორის წარმოსადგენად სარგებლობენ წრფის მოგეზუ-ლი მონაკვეთით. ამრიგად, ვექტორი განისაზღვრება მისი მიმართულებისა და სიგრძის დასახელებით. ვექტორს ორტი ვუწოდოთ, თუ მისი სიგრძე ერთეულის ტოლია. ცხადია, ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება მისი ორტისა და სიგრძის საშუალებით.

ვექტორის ზემოთ მოყვანილი განმარტება არ განსაზღვრავს ვექტორის საწყის წერტილს. ასეთ ვექტორებს თავისუფალი ეწოდებათ. თავისუფალი ვექტორი შეიძლება პარალელურად გადავიტანოთ და მის საწყის წერტილად ჩავთვალოთ სივრცის ნებისმიერი წერტილი. მაგრამ ზშირად საჭირო ხდება ვექტორის ცნების შეზღუდვა მისი მოდების წერტილის (დაბმული ვექტორი) ან ვექტორის იმ წრფის დაფიქსირებით, რომელზედაც მას შეუძლია გადაადგილება (სრიალა ვექტორი).

შემდგომში ძირითადად განვიხილავთ ვექტორებს ფიქსირებული საწყისი წერტილით. თუ ევკლიდეს სივრცის რაიმე O არის (ზედაპირის ან წირის) ყოველ წერტილში მოდებულია რაღაც ვექტორი, მაშინ ვიტყვით, რომ O არეში მოცემულია ვექტორული ველი. O არის ერთი წერტილიდან რაიმე სხვა (მეზობელ) წერტილ-

ზე გადასვლისას ვექტორი, საზოგადოდ, იცვლის როგორც სიგრძეს, ისე მიმართულებას. თუ ველის ვექტორები ინარჩუნებენ როგორც სიგრძეს, ისე მიმართულებას, მაშინ ვიტყვი, რომ გვაქვს მუდმივი ანუ ერთგვაროვანი ვექტორული ველი. ვექტორული ველის მაგალითია სიმძიმის ძალთა ველი. თუ სივრცის მცირე ზომის არეს განვიხილავთ, გრავიტაციული ველი შეიძლება მუდმივად ჩავთვალოთ.

ვექტორული ველის მეორე მაგალითია სითხის ნაწილაკების სიჩქარეთა ველი სითხის სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში.



ნახ. 1

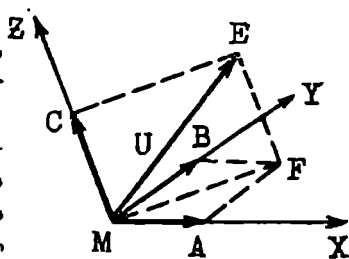


ნახ. 2

ვექტორის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ ლათინური და გოთური ალფაბეტის მუქ ასოებს. ცხადია, ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება მისი საწყისი და ბოლო წერტილების დასახელებით. თუ O და A ვექტორის შესაბამისად საწყისი და ბოლო წერტილებია, მაშინ ვექტორს $\vec{OA}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. თუ A ან $\vec{OA}$ ვექტორებია, მაშინ $|A|$ ან OA აღვნიშნავს მათ სიგრძეს.

2. ვექტორების შეკრება. ვექტორების პარამეტრიზაცია. თუ ვექტორების შეკრების ოპერაციას — პარალელოგრამის წესს (ნახ. 1), და ვექტორის ნამდვილ რიცხვზე გამრავლებას (ნახ. 2) წმინდა გეომეტრიული გზით განვსაზღვრავთ, აღვიღად დავრწმუნდებით, რომ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის რაიმე Ω არის ვექტორულ ველთა V^3 სიმრავლე წრფივი (ვექტორული) სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ველზე.

ახლა წმინდა გეომეტრიული საშუალებებით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ყოველი



ნახ. 3

U ვექტორი გამოისახება სამი არაკომპლანარული X , Y , Z ვექტორის ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი კომბინაციით (ნახ. 3)

$$U = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \alpha X + \beta Y + \gamma Z. \quad (1.1)$$

ვექტორთა ასეთი სამეული შეადგენს დაშლის ბაზისს. გეომეტრიულად ეს დაშლა შეიძლება განვხორციელოთ, მაგალითად, ასე: U ვექტორის ბოლო წერტილიდან (ნახაზზე 3, E წერტილი) გავატაროთ Z ვექტორის პარალელური წრფე X და Y ვექტორებზე გავვალი სიბრტყის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის F წერტილიდან გავავლოთ X და Y ვექტორების პარალელური წრფეები მათი ამ ვექტორების წრფეებთან გადაკვეთის A და B წერტილებამდე. ბოლოს E წერტილიდან გავატაროთ MF -ის პარალელური CE წრფე მისი Z ვექტორის წრფესთან C წერტილში გადაკვეთამდე. ამგვარად მოიძებნება U ვექტორის $\vec{MA} = \alpha X$, $\vec{MB} = \beta Y$, $\vec{MC} = \gamma Z$ მდგენელები.

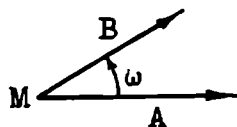
დაშლის α , β , და γ კოეფიციენტებს ვექტორის კომპონენტები ეწოდებათ. ვექტორის ასეთი წესით წარმოდგენას მისი პარამეტრიზაცია შეიძლება ეუწოდოთ. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ვექტორის (1.1) სახით წარმოდგენა ერთადერთია, ე. ი. ვექტორის კოორდინატები ცალსახად განისაზღვრება.

(1.1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ფიქსირებულ წერტილზე მოდებული ვექტორების V^3 სიმრავლე სამგანზომილებიანი წრფივი (ვექტორული) სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველზე. ვექტორთა პარამეტრიზაცია საშუალებას გვაძლევს განვმარტოთ ძირითადი ალგებრული ოპერაციები ვექტორებზე მათივე კომპონენტების საშუალებით, რომლებიც რიცხვებს ან, უფრო ზოგად ვექტორული ველის შემთხვევაში, რაიმე არის წერტილის კოორდინატების ფუნქციებს წარმოადგენენ. კერძოდ, (1.1) ფორმულიდან მარტივად გამომდინარეობს, რომ თუ α , β , γ და α' , β' , γ' შესაბამისად U და U' ვექტორების კომპონენტებია და φ — ნებისმიერი რიცხვი $\mathcal{R}$ -დან, მაშინ $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$ და $\varphi\alpha$, $\varphi\beta$, $\varphi\gamma$ შესაბამისად $U + U'$ და φU ვექტორების კომპონენტებს წარმოადგენს.

ვთქვათ, E^3 არის სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ყველა დალაგებული (α , β , γ) სამეულისა, რომლებსაც სხვანაირად E^3 სიმრავლის წერტილებსაც ეუწოდებთ. თუ $M(\alpha, \beta, \gamma)$ და $M'(\alpha', \beta', \gamma')$ წერტილებია E^3 -დან და φ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მა-

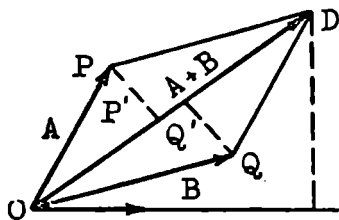
შინ, ცხადია, $M''(\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma')$, $M'''(\varphi\alpha, \varphi\beta, \varphi\gamma)$ წერტილები აგრეთვე E^3 სიმრავლეს ეკუთვნის. ახლა ცხადია, რომ E^3 წრფივი სივრცეა $\mathcal{M}$ ველზე (სამგანზომილებიანი არითმეტიკული სივრცე), რომლისთვისაც ნულს წარმოადგენს $O(0, 0, 0)$ წერტილი. ადვილად დაერწმუნდებით, რომ (1.1) დამოკიდებულება ანხორციელებს $V^3 \longleftrightarrow E^3$ იზომორფიზმს; ეს ვექტორულ ანალიზში ალგებრისა და მათემატიკური ანალიზის მეთოდების ფართო გამოყენების საშუალებას იძლევა.

3. ვექტორების სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლები. ვექტორულ ანალიზში განიხილავენ ვექტორების სკალარულ, ვექტორულ და შერეულ ნამრავლებს, ვექტორების გაწარმოებას სკალარული არგუმენტით და სხვა ოპერაციებს. ქვემოთ იგულისხმება, რომ ყველა განსახილავ ვექტორს მოდების საერთო წერტილი გააჩნია.



ნახ. 4

ვექტორების სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლების აღსანიშნავად ჩვეულებრივ გამოიყენება შესაბამისად



ნახ. 5

$$AB, \quad A \times B, \quad A(B \times C) = ABC \quad (1.1a)$$

სიმბოლოები.

სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით (ნახ. 4):

$$AB = BA = |A||B|\cos \omega, \quad (1.2)$$

სადაც $|A|$ და $|B|$ აღნიშნავს A და B ვექტორების სიგრძეებს, ხო-

ლო ω — ამ ვექტორებს შორის კუთხეს ($0 \leq \omega \leq \pi$). თუ $AB = 0$, მაშინ A და B ვექტორები ორთოგონალურია.

დავამტკიცოთ, რომ AB სკალარული ნამრავლი ორადწრფივი ფორმაა, ე. ი. ნებისმიერი A , B და C ვექტორებისათვის

$$(A + B)C = AC + BC. \quad (1.2a)$$

ეს ტოლობა საკმარისია დავამტკიცოთ, როცა C ორტია, ე. ი. $C = e$, $|e| = 1$. მაშინ $(A + B)e$, Ae და Be სიდიდეები $A + B$, A და B ვექ-

ტორების ორთოგონალური პროექციებია e ორტის მიმართულებაზე. ნახ. 5-დან დავრწმუნდებით, რომ OPP' და $QQ'D$ სამკუთხედები ტოლია, რადგან მათი გვერდები პარალელურია და OP და QD გვერდები ტოლია, მაშასადამე, ახლა, ცხადია, გვაქვს

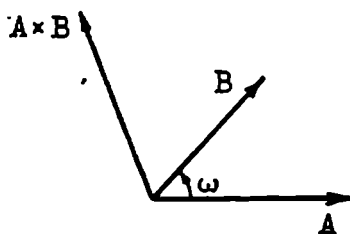
$$\text{გვ } A = \text{გვ } \overrightarrow{OP'} = \text{გვ } \overrightarrow{Q'D}, \quad \text{გვ } B = \text{გვ } \overrightarrow{OQ'},$$

$$\text{გვ } (A + B) = \text{გვ } \overrightarrow{OD} = \text{გვ } \overrightarrow{OQ'} + \text{გვ } \overrightarrow{Q'D} = \text{გვ } A + \text{გვ } B,$$

ე. ი. (1.2 ა) დამტკიცებულია, როცა C ორტია. ამრიგად ნებისმიერი $A, B, C, C \neq 0$ ვექტორებისთვის გვაქვს

$$(A + B) \frac{C}{|C|} = A \frac{C}{|C|} + B \frac{C}{|C|}.$$

აქედან (1.2 ა) ტოლობა ერთბაშად გამომდინარეობს. $C=0$ შემთხვევაში ეს ტოლობა ყოველთვის სრულდება.



ნახ. 6

$A \times B$ ვექტორული ნამრავლი წარმოადგენს ვექტორს, რომელსაც მოდების იგივე წერტილი აქვს რაც A და B ვექტორებს, A და B ვექტორების მართობულია, ამასთან მისი სიგრძე რიცხვობრივად A და B ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის ტოლია. ამას გარდა, სამი A, B და $A \times B$ ვექტორის ერთობლიობა

ბას აქვს მარჯვენა ორიენტაცია, ე. ი. ისინი ბრუნვის მარჯვენა სისტემას შეადგენენ (ნახ. 6).

სამართლიანია ტოლობები:

$$A \times B = -B \times A, \quad |A \times B| = |A| |B| \sin \alpha. \quad (1.3)$$

(1.2) და (1.3) ფორმულების ძალით გვექნება

$$|A \times B| = \sqrt{A^2 B^2 - (AB)^2} \quad (A^2 = AA = |A|^2). \quad (1.4)$$

ეს ფორმულა გამოსახავს A და B ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.

შკითხველს ვანდობთ (გეომეტრიული საშუალებით) დამტკიცოს, რომ $A \times B$ ორადწრფივი ფორმაა, ე. ი. ნებისმიერი A, B, C ვექტორებისთვის გვაქვს ტოლობა

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C. \quad (1.4a)$$

ვთქვათ სამი A, B, C ვექტორი შეადგენს მარჯვენა ორიენტაციის ტრიედრს. მათი $ABC = (A \times B) \cdot C$ შერეული ნამრავლი ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია. აბლა. ცხადია, რომ ABC სამადწრფივი ფორმაა. გვაქვს

$$V = ABC = BCA = CAB = -ACB = -BAC = -CBA. \quad (1.5)$$

ცხადია, $V \neq 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A, B, C ვექტორები არაკომპლანარულნი არიან.

4. ორმაგი ვექტორული ნამრავლი. განვიხილოთ ავრეტვე ორმაგი ვექტორული ნამრავლი $(A \times B) \times C$. ცხადია, იგი წარმოადგენს სამადწრფივ ფორმას. მისთვის სამართლიანია

$$(A \times B) \times C = (CA) \cdot B - (CB) \cdot A \quad (1.6)$$

ფორმულა, რომლის დამტკიცებასაც აქ მოვიყვანთ.

(1.6) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს $A \times B$ და C ვექტორების პერპენდიკულარულ ვექტორს. მაშასადამე, ეს ვექტორი მოთავსებულია A და B ვექტორების სიბრტყეში. ამის გამო იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$(A \times B) \times C = \alpha A + \beta B$$

სახით. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ C -ზე, მივიღებთ

$$0 = \alpha (CA) + \beta (CB).$$

ამ ტოლობის ძალით გვექნება

$$(A \times B) \times C = \gamma [(CA) \cdot B - (CB) \cdot A]. \quad (1.7)$$

რადგან ამ ტოლობის მარცხენა და γ მამრავლის გარეშე აღებული მარჯვენა მხარეები წრფივადაა დამოკიდებული A, B, C ვექტორებზე, ამიტომ, ცხადია, γ ამ ვექტორების შერჩევისაგან დამოუკიდებელი მუდმივი სიდიდეა. ვთქვათ, l, m, n ურთიერთორთოგონა-

ლური ორტეზია, რომლებიც მარჯვენა ორიენტაციის ტრიედის ქმნიან: $I \times m = n$. თუ დავუშვებთ, რომ $A=I$, $B=m$, $C=I$, მაშინ გვექნება $(I \times m) \times I = n \times I = m$, $CA=II=I$, $GB=mI=0$. ამიტომ (1.7) ტოლობა მიიღებს $m=\gamma m$ სახეს. აქედან გვაქვს $\gamma=1$ და, მაშასადამე, (1.6) ფორმულა დამტკიცებულია.

(1.6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორების ვექტორული გამრავლება არ აკმაყოფილებს გამრავლების ასოციაციურობის კანონს. საზოგადოდ,

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C), \quad (1.7 \text{ ა})$$

ამიტომ ვექტორული ველების სიმრავლე არ წარმოადგენს ასოციაციურ რგოლს, რაც უკვე აღნიშნული იყო ზემოთ (გვ. 11).

§ 2. ბაზისები. ინდექსის ატანის და ჩამოტანის ოპერაციები

1. ბიორთოგონალური და ბიორთონორმალური ბაზისები. ვთქვათ, ევკლიდეს სივრცის რაიმე M წერტილში მოდებულია სამი არაკომპლანარული e_1, e_2, e_3 ვექტორი. მაშინ სრულდება

$$v = e_1 e_2 e_3 \neq 0$$

პიოზა, სადაც $|v|$ — e_i ვექტორებზე აგებული პარალელებიპედის მოცულობის ტოლია.

თუ e_1, e_2, e_3 ტრიედის მარჯვენა ან მარცხენა ორიენტაცია აქვს, მაშინ, შესაბამისად, $v > 0$ ან $v < 0$.

თუ e_k ვექტორებს V^3 სივრცის ბაზისად ავიღებთ, მაშინ (1.1) ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$U = U' e_i. \quad (2.1)$$

აქ და ქვემოთ ამ პარაგრაფში ლათინური ყრუ და განუსაზღვრელი ინდექსები ღებულობს 1, 2, 3 მნიშვნელობას.

(2.1) ფორმულაში ვექტორის U' კომპონენტები e_1, e_2, e_3 ბაზისის მიმართ ცალსახად განისაზღვრებიან. ქვემოთ გამოვიყენებთ ფორმულას, რომელიც საშუალებას მოგვცემს U' გამოვსახოთ U -თი. ამ მიზნით ხელსაყრელია V^3 -ში e_1, e_2, e_3 ბაზისთან ერთად შემოვიყენოთ აგრეთვე მისი ბიორთოგონალური e^1, e^2, e^3 ბაზისი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$e_i e^j = \delta_i^j. \quad (2.2)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ბიორთონორმალობის ამ პირობებს აკმაყოფილებს

$$e^1 = \frac{1}{v} e_2 \times e_3, \quad e^2 = \frac{1}{v} e_3 \times e_1, \quad e^3 = \frac{1}{v} e_1 \times e_2 \quad (2.3)$$

ვექტორები. თუ e_1, e_2, e_3 წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ორტებია, მაშინ, ცხადია, $e^1 = e_1, e^2 = e_2, e^3 = e_3$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში e_1, e_2, e_3 და e^1, e^2, e^3 ტრიედრები ერთმანეთს ემთხვევა.

e_i და e^i ტრიედრები ორთონორმალურია და ერთი და იგივე ორიენტაცია აქვთ. აქედან გამომდინარეობს, რომ e^i ვექტორები აგრეთვე არაკომპლანარულია. მაშასადამე, e_i და e^i ბიორთონორმალური ტრიედრები შეიძლება გამოვიყენოთ V^3 სივრცის ბაზისებად. ნებისმიერი A ვექტორისთვის საწყისი M წერტილით, (1.1) ტოლობის თანახმად, შეიძლება დავწეროთ ორი დაშლა

$$A = A^i e_i, \quad A = A_i e^i, \quad (2.4)$$

სადაც (2.4) ტოლობის გამო

$$A^i = A e^i, \quad A_i = A e_i. \quad (2.5)$$

(2.4) და (2.5) ფორმულები ანზორციელებს ვექტორის პარამეტრიზაციას ბიორთონორმალური ბაზისების მიმართ. A^i და A_i კომპონენტები წარმოადგენს ერთგვაროვან ადამიურ ფუნქციებს, ე. ი. A ვექტორის წრფევ ფორმებს და, პირიქით, A ვექტორი თავისი A_i და A^i კომპონენტების წრფივი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ (2.4) ფორმულის შესაკრებები წარმოადგენენ საბაზისო ვექტორების პარალელურ ვექტორებს. ამის გამო მათ ვექტორის მდგენელებს ვუწოდებთ განსახილავი ბაზისის მიმართ.

2. საბაზისო მატრიცები. ბაზისის დისკრიმინანტი. თუ საბაზისო ვექტორების სკალარულ ნამრავლებს განვიხილავთ, მივიღებთ სიმეტრიულ მატრიცებს

$g_{ij} = g_{ji} = e_i e_j, \quad g^{ij} = g^{ji} = e^i e^j, \quad g_i^j = g_j^i = e^i e_j = \delta_j^i, \quad (2.6)$
რომლებსაც საბაზისო მატრიცებს ვუწოდებთ. ეს მატრიცები შემდგომში მნიშვნელოვან როლს შეასრულებენ.

თუ e_1, e_2, e_3 წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ორტებია, მაშინ გვექნება

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g^{ij} = \delta^{ij}, \quad g_j^i = \delta_j^i. \quad (2.6 a)$$

ახლა (2.4) ფორმულების საშუალებით დავწერთ

$$e_i = g_{ij} e^j, \quad e^i = g^{ij} e_j. \quad (2.7)$$

უკანასკნელი ტოლობის e_k -ზე სკალარული გამრავლებით, (2.3) და (2.6)-ის ძალით, მივიღებთ

$$g_{kj} g^{jl} = \delta_k^l = g_k^l. \quad (2.8)$$

მაშასადამე, g_{ij} და g^{ij} ურთიერთშებრუნებული მატრიცებია. (2.8)-დან დეტერმინანტთა გამრავლების წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$\det(g_{ij}) \det(g^{*m}) = 1. \quad (2.9)$$

ამგვარად,

$$g = \det(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.10)$$

$$\det(g^{ij}) = \frac{1}{g} \neq 0. \quad (2.11)$$

g დეტერმინანტს e_1, e_2, e_3 ბაზისის დისკრიმინანტი ჰქვია. ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ $g > 0$ (იხ. გვ. 46).

3. ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები. (2.7) ფორმულები, რომლებიც ამყარებენ კავშირს ბიორთონორმალურ ბაზისებს შორის, განსაზღვრავენ ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციებს. ეს ოპერაციები არსებითად ხორციელდება g_{ij} და g^{ij} მატრიცების, სათანადოდ, e^i და e_j საბაზისო ვექტორებზე პირდაპირი გამრავლებისა და შემდგომ ინდექსთა შეკვეცის საშუალებით, ფორმალურად კი ხდება ქვედა ინდექსის ზემოთ, ხოლო ზედა ინდექსის ქვემოთ გადანაცვლება სათანადო ვერტიკალებზე. ასეთი ფორმალიზაცია მიღწეულია ადრე შემოყვანილ მოხერხებულ აღნიშვნათა მეშვეობით. ეს ოპერაციები უაღრესად სასარგებლოა და მათ ფართო გამოყენება აქვთ ტენზორულ ანალიზში. (2.7) ფორმულების დახმარებით (2.5)-დან მივიღებთ

$$A_i = g_{ij} A^j, \quad A^i = g^{ij} A_j. \quad (2.12)$$

ეს ფორმულები, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ ვექტორის კომპონენტებს ურთიერთშეუღლებული (ბიორთონორმა-

ლური) ბაზისების მიმართ, აგრეთვე. წარმოდგენენ ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების გამოყენების მაგალითს. აქაც აშკარად ჩანს ვექტორთა კომპონენტებისთვის ჩვენ მიერ მიღებული აღნიშვნების უპირატესობა.

შევთანხმდეთ, A_i და A^i -ს ეუწოდოთ A ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები. ამის შესაბამისად e_i და e^i ტრიედრებს კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ ბაზისებს ეუწოდებთ. შევნიშნოთ, რომ ჯერჯერობით ეს ტერმინები შემოღებულია სავსებით ფორმალურად და ძნელია მათი შინაარსის გარკვევა. ქვემოთ, როცა უფრო ღრმად შევისწავლით ტენზორულ ალგებრას, შემოღებული ტერმინოლოგია უფრო ბუნებრივ შინაარსს მიიღებს (იხ. § 4, პუნქტი 4).

§ 3. დისკრიმინანტული მატრიცები და მათი ზოგიერთი გეომეტრიული გამოყენება

1. ვექტორის სიგრძე. თუ V^3 სივრცის A და B ვექტორებს (2.4) ფორმულებით წარმოვადგენთ და გავითვალისწინებთ, რომ AB ნამრავლი ორადწრფივი ფუნქციაა, მაშინ (2.6) და (2.12) ტოლობების თანახმად სკალარული ნამრავლისათვის გვექნება ოთხი ტოლფასი გამოსახულება

$$AB = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_i B_j = A^i B_i = A_i B^i. \quad (3.1)$$

რადგან AB სკალარული ნამრავლი დამოუკიდებელია ბაზისის შერჩევისაგან, ამიტომ ყველა ეს გამოსახულება ინვარიანტულია ბაზისების გარდაქმნის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ (3.1)-დან ყოველი გამოსახულება მიიღება სხვა დანარჩენისაგან (2.12) ფორმულების საშუალებით, ე. ი. ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის წესის გამოყენებით. (3.1) ფორმულები ძალაში რჩება ყრუ ინდექსების შესაბამის ვერტიკალზე ნებისმიერად გადანაცვლებისას. ასე მაგალითად,

$$AB = g_{ij} A^i B^j = g^i_i A^i B_i = A^i B_i.$$

თუ $A=B$, მაშინ (3.1)-დან მივიღებთ

$$|A|^2 = g_{ij} A^i A^j = g^i_i A_i A_i = A^i A_i \quad (3.2)$$

ფორმულებს, რომლებიც A ვექტორის სიგრძის კვადრატს სხვადასხვა ფორმით გამოსახავენ მისი კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების საშუალებით.

მაშასადამე, $g_{ij} A^i A^j$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა, ამის გამო სრულდება უტოლობები

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.2a)$$

ამგვარად, g დეტერმინანტი, რომელიც დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტს წარმოადგენს, დადებითია.

2. კუთხე ორ მიმართულებას შორის. ვთქვათ ω კუთხეა A და B ვექტორებს შორის (ნახ. 4). მაშინ (1.2) და (3.2) ტოლობათა თანახმად (3.1)-დან მივიღებთ

$$\cos \omega = \frac{A_i B^i}{\sqrt{A^j A_j B^k B_k}} \quad (3.3)$$

ფორმულას, რომელიც ორ ვექტორს შორის მოთავსებული კუთხის კოსინუსს მათი კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების საშუალებით გამოსახავს. თუ A და B ორტეხია, მაშინ (3.3) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\cos \omega = A_i B^i. \quad (3.4)$$

თუ A და B ორთოგონალურია, მაშინ $\cos \omega = 0$ და (3.3) ტოლობიდან მივიღებთ ორი ვექტორის ორთოგონალობის პირობას

$$AB = A_i B^i = 0. \quad (3.5)$$

3. დისკრიმინანტული მატრიცები. საბაზისო მატრიცების გამოსახვა დისკრიმინანტული მატრიცებით. განვიხილოთ საბაზისო ვექტორების შერეული ნამრავლები

$$C_{ijk} = e_i e_j e_k, \quad C^{ijk} = e^i e^j e^k, \quad C_{i..}^k = e_i e^j e^k, \dots \quad (3.6)$$

თუ ვისარგებლებთ ლევი-ჩივიტას ϵ^{ijk} სიმბოლოებით, რომლებიც I თა-

ვის $\S 2$ -ში შემოვიყვანეთ, C_{ijk} და C^{ijk} მატრიცები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$C_{ijk} = C_{123} \epsilon_{ijk}, \quad C^{ijk} = C^{123} \epsilon^{ijk}. \quad (3.7).$$

(2.2), (2.3) და (1.6)-ის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} C^{123} &= e^1 e^2 e^3 = \frac{1}{v} ((e_2 \times e_3) \times e^2) e^3 = \\ &= \frac{1}{v} ((e_2 e^2) e_3 - (e_3 e^2) e_2) e^3 = \frac{1}{v} e_3 e^3 = \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

ამგვარად, (3.7) ტოლობები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$C_{ijk} = v \epsilon_{ijk}, \quad C^{ijk} = \frac{1}{v} \epsilon^{ijk}, \quad v = C_{123}. \quad (3.8).$$

მაგრამ (2.7)-ის ძალით

$$v = C_{123} = e_1 e_2 e_3 = e^1 e^2 e^3 g_{11} g_{22} g_{33} = C^{111} g_{11} g_{22} g_{33}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ v -ზე, მაშინ (3.8)-ის მეორე ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$v^2 = \epsilon^{111} g_{11} g_{22} g_{33} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g. \quad (3.9)$$

ამრიგად, e_i ბაზისის დისკრიმინანტი საბაზისო პარალელები-პედის მოცულობის კვადრატის ტოლია და, მაშასადამე, დადებითი რიცხვია.

(3.9)-დან გვაქვს

$$v = C_{123} = \pm \sqrt{g}. \quad (3.10).$$

აქ პლიუსი ან მინუსი ნიშანი უნდა ავიღოთ e_i ბაზისის შესაბამისად მარჯვენა ან მარცხენა ორიენტაციის შემთხვევაში. ამისდა მიხედვით (4.8) ფორმულები ღებულობს სახეს:

$$C_{ijk} = \pm \sqrt{g} \epsilon_{ijk}, \quad C^{ijk} = \frac{\pm 1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk}. \quad (3.11).$$

ამგვარად, C_{ijk} , C^{ijk} მატრიცები გამოისახება e_i ბაზისის დისკრიმინანტის საშუალებით. ამიტომ მათ დისკრიმინანტულ მატრიცებს ვუწოდებთ.

როგორც (3.6) ფორმულებიდან ჩანს, შერეული ტიპის დისკრიმინანტული მატრიცების გამოსახულებები (4.6)-დან ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციებით მიიღება საბაზისო g_{ij} და g^{ij} მატრიცების საშუალებით. მათ გამოსახულებებში g დისკრიმინანტის გარდა შეეა კიდევ ამ დეტერმინანტის ელემენტებიც.

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (2.4) და (2.5) ტოლობებს, შეიძლება დავწეროთ ფორმულები

$$e_i \times e_j = C_{ijk} e^k, \quad e^i \times e^j = C^{ijk} e_k; \quad (3.12)$$

$$e_i = \frac{1}{2} C_{ijk} e^j \times e^k, \quad e^i = \frac{1}{2} C^{ijk} e_j \times e_k. \quad (3.13)$$

ეს ფორმულები სამართლიანი რჩება ყრუ და განუსაზღვრელი ინდექსების სათანადო ვერტიკალებზე ნებისმიერი გადანაცვლებისას.

თუ (3.13)-ის უკანასკნელ ტოლობებს გავამრავლებთ სკალარულად e_m -ზე, მაშინ (2.3) და (3.6)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{1}{2} C^{ijk} C_{jkm} = g_m^i. \quad (3.14)$$

თუ აქ i ინდექსს ქვემოთ ჩამოვიტანთ და m ინდექსს ზემოთ ავიტანთ, გვექნება

$$g_{im} = \frac{1}{2} C_{i..}^{jk} C_{jkm}, \quad g^{im} = \frac{1}{2} C^{ijk} C_{jk..}^m \quad (3.15)$$

ფორმულები, რომლებიც საბაზისო მატრიცებს დისკრიმინანტული მატრიცებით გამოსახვენ.

4. პარალელოგრაფის ფართობი. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა. თუ A და B ვექტორებს წარმოვადგენთ (2.4) ფორმულებით, $A \times B$ ვექტორული ნამრავლის ორადწრიფივობის გამო, (3.12) ფორმულების თანახმად, დავწეროთ

$$A \times B = A_i B_j e^i \times e^j = A_i B_j C^{ijk} e_k. \quad (3.16)$$

თუ აქ ყრუ ინდექსებს სათანადო ვერტიკალებზე გადავადგილებთ, მივიღებთ ყველა სხვა ფორმულას, რომლებიც $A \times B$ ვექტორულ ნამრავლს თანამამრაველთა კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების საშუალებით გამოისახვენ, მაგალითად,

$$A \times B = A^i B^j C_{ijk} e^k. \quad (3.17)$$

(3.11)-ის თანახმად (3.16) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$A \times B = \frac{\pm 1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} A_i B_j e_k = \frac{\pm 1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & e_1 \\ A_2 & B_2 & e_2 \\ A_3 & B_3 & e_3 \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

თუ A და B ვექტორებზე აგებულ პარალელოგრამის ფართობს Σ -თი აღვნიშნავთ, (3.16) ზა (3.17) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\Sigma^2 = (A \times B)^2 = C_{ijk} C^{pqr} A^i B^j A_p B_q. \quad (3.19)$$

მეორე მხრივ, (1.4), (3.1) და (3.2) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\Sigma^2 = |A|^2 |B|^2 - (AB)^2 = A^i A_i B^k B_k - (A^i B_i)^2 \geq 0. \quad (3.20)$$

აქ ტოლობის ნიშანი გვექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა A და B ვექტორები პარალელურია. (3.20)-დან ვღებულობთ

$$(A^i B_i)^2 \leq (A^i A_i) (B^k B_k) \quad (3.21)$$

უტოლობას, რომელიც კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის სახელწოდებითაა ცნობილი. ეს უტოლობა სამართლიანია შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

ვთქვათ i, j, k სამი სხვადასხვა რიცხვია, რომლებიც ღებულობენ 1, 2, 3 მნიშვნელობებს, მაშინ (3.12) ფორმულების თანახმად e_i, e_j და e^i, e^j საბაზისო ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამების ფართობები გამოისახება

$$\Sigma_k = |e_i \times e_j| = \sqrt{g} g^{kk}, \quad \Sigma^k = |e^i \times e^j| \sqrt{\frac{g_{kk}}{g}} \quad (3.22)$$

ფორმულების საშუალებით.

5. პარალელეპიპედის მოცულობა. თუ (3.6) ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლეთ C ვექტორზე, მივიღებთ

$$(A \times B) C = ABC = C^{ijk} A_i B_j C_k = \frac{\pm 1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

ფორმულას, რომელიც A , B , C ვექტორებზე აგებული ქარალელები-
პედის მოცულობას გამოსახავს ამ ვექტორების კოვარიანტული კომ-
პონენტების საშუალებით ნებისმიერად არჩეული ბაზისის მიმართ.

§ 4. ბაზისებისა და მათთან დაკავშირებული მატრიცების გარდაქმნა

ვექტორების პარამეტრიზაცია და მათზე სხვადასხვა ოპერაციები
ხორციელდება ისეთი მატრიცების საშუალებით, რომლებიც ბაზი-
სის არჩევაზე არიან დამოკიდებული. ამის გამო ერთი ბაზისის მეო-
რეთი შეცვლა იწვევს ამ მატრიცების გარდაქმნას გარკვეული ფორ-
მულებით, რომელთა გამოყენებას ახლა შევეუდგებით.

1. ბაზისებისა და საბაზისო მატრიცების გარდაქმნა. ვთქვათ,
 M წერტილში გვაქვს ორი e_i და e_i' ბაზისი. ვთქვათ, e^i და e'^i შესა-
ბამისი ბიორთონორმალური ბაზისებია. (2.4) ფორმულების თანახმად
შეგვიძლია დაწეროთ ბაზისთა გარდაქმნის ფორმულები

$$e_i = e'_i e^i, \quad e^i = e'^i e'_i, \quad (4.1a)$$

$$e_i = e'_i e^i, \quad e^i = e'^i e'_i \quad (4.1b)$$

სახით, სადაც e'_i და e'^i ბაზისთა გარდაქმნის მატრიცებია, რომლე-
ბიც განისაზღვრებიან

$$e'_i = e_i e^i, \quad e'^i = e_i e^i \quad (4.2)$$

ფორმულებით. თუ (4.1 ბ) გამოსახულებებს შევიტანთ (4.1 ა)-ში,
აღვიღად დავრწმუნდებით, რომ

$$e'_i e'^i = \delta^i_i, \quad e'^i e'_i = \delta^i_i. \quad (4.3)$$

აქედან გვაქვს

$$\det(e'_i) \cdot \det(e'^i) = 1. \quad (4.4)$$

ამრიგად, e'_i და e'^i ურთიერთშებრუნებული მატრიცებია. ზემოთ
მიღებულ აღნიშვნებთან დაკავშირებით აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ,
რადგან e'_i და e_i , საზოგადოდ, სხვადასხვა მატრიცებია, გაურკვევლო-
ბის თავიდან ასაცილებლად აუცილებელია შტრიხებით აღვნიშნოთ გან-

საზღვრული ინდექსებიც, მაგალითად e_i, e_i' და ა. შ. საზოგადოდ, $e_i \neq e_i'$.

რადგან

$$\begin{aligned} g_{ik} &= e_i e_k, & g^{ik} &= e^i e^k, & g_i^k &= e^k e_i; \\ g_{i'k'} &= e_{i'} e_{k'}, & g^{i'k'} &= e^{i'} e^{k'} & g_{i'}^{k'} &= e^{k'} e_{i'}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ამიტომ ბაზისის მატრიცებისათვის გვაქვს გარდაქმნის

$$g_{i'k'} = e_{i'} e_{k'}, \quad g^{i'k'} = e^{i'} e^{k'}, \quad g_{i'}^{k'} = e^{k'} e_{i'}, \quad g_i^k = e^k e_i, \quad (4.6)$$

ფორმულები. შებრუნებულ გარდაქმნებს, რომლებიც ადვილად მიიღებიან, აქ არ ამოვწერთ.

2. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების გარდაქმნა. სკალარული ნამრავლის ინვარიანტობა. ვთქვათ, A M წერტილში მოდებული ვექტორია. მაშინ, (2.5) ფორმულების თანახმად, მისი კომპონენტები განსაზღვრული ბაზისის მიმართ შემდეგნაირად გამოისახება:

$$A_i = A e_i, \quad A_{i'} = A e_{i'}, \quad A^i = A e^i, \quad A^{i'} = A e^{i'}. \quad (4.7)$$

თუ აქ შევიტანთ (4.1 ა) და (4.1 ბ) გამოსახულებებს, მივიღებთ ვექტორის კომპონენტების გარდაქმნის ფორმულებს

$$A_{i'} = e_{i'}^i A_i, \quad A^{i'} = e^{i'}_i A^i. \quad (4.8)$$

შებრუნებული გარდაქმნები ანალოგიით შეიძლება დაიწეროს.

თუ შევადარებთ (4.8) და (4.1) ფორმულებს, დავინახავთ, რომ კოვარიანტული (კონტრავარიანტული) ბაზისის ვექტორები და ვექტორის კოვარიანტული (კონტრავარიანტული) კომპონენტები ერთი ბაზისის მეორით შეცვლისას ერთნაირი ფორმულებით გარდაიქმნებიან. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ეს სიდიდეები კოვარიანტულად გარდაიქმნებიან. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების გარდაქმნები არ არის კოვარიანტული, მაგრამ ისინი მჭიდროდ არიან დაკავშირებული ერთი მნიშვნელოვანი თვისებით, რომლის გამოც ბაზისების შეცვლისას ინვარიანტულია

$$AB = A_i B^i = A_{i'} B^{i'} \quad (4.9)$$

ფორმულა, რომელიც A და B ვექტორების სკალარულ ნამრავლს გამოსახავს. ამ გამოსახულების ინვარიანტულობა ზემოთ უკვე აღვნიშ-

ნეთ, მაგრამ მაშინ ვიყენებდით სკალარული ნამრავლის გეომეტრიულ განმარტებას, საიდანაც აშკარაა ბაზისის შერჩევისაგან მისი დამოუკიდებლობა. ახლა კი უშუალოდ დავამტკიცებთ (4.9) გამოსახულების ინვარიანტულობას გარდაქმნის (4.8) ფორმულების დახმარებით. მართლაც, (4.8) და (4.3)-ის ძალით გვაქვს

$$A_i B^i = e'_i A_i, e'_k B^k = e'_i e'_k A_i, B^k = g'_k A_i, B^k = A_i B^i, B^k = A_i B^i,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების ამ თვისების გამო მათი გარდაქმნის ფორმულებს კონტრაგრადიენტულს ეუწოდებთ.

კონტრაგრადიენტული ფორმულებით გარდაიქმნება ვექტორის A_i კოვარიანტული კომპონენტები და შეუღლებული ბაზისის e^i ვექტორების კოვარიანტული კომპონენტები. ამის გამო $A_i e^i$ ჯამი აგრეთვე ინვარიანტულია და გამოსახავს A ვექტორს, რომელიც არაა დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე. ზემოაღნიშნული ფაქტებიდან ცხადი ხდება § 2-ში შემოღებული ტერმინოლოგიის აზრი. პირველ რიგში, ცხადია, რომ აუცილებლად უნდა განვასხვაოთ ვექტორის ქვედა ინდექსებიანი კომპონენტები ზედა ინდექსებიანი კომპონენტებისაგან, რადგან ზოგად შემთხვევაში ისინი ერთმანეთს არ ემთხვევიან. მეორე მხრივ, ქვედა ინდექსებიანი კომპონენტები, როგორც აღრე ვნახეთ, ბაზისის ვექტორების კოგრადიენტულად გარდაიქმნება. ამის გამო, ბუნებრივია, მათ ეუწოდოთ კოვარიანტული, რადგან ისინი ბაზისის მსგავსად გარდაიქმნებიან. მაგრამ მაშინ ვექტორის ზედა ინდექსებიანი კომპონენტებს, რომლებიც ქვედა ინდექსებიანი კომპონენტების მიმართ კონტრაგრადიენტულად გარდაიქმნებიან, ბუნებრივია ეუწოდოთ კონტრავარიანტული. ამის შესაბამისად ბაზისს და შეუღლებულ (ბიორთონორმალურ) ბაზისს კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ბაზისები ეუწოდოთ.

3. ბაზისის დისკრიმინანტის და დისკრიმინანტული მატრიცების გარდაქმნა. ტენზორის ცნება. თუ ახლა მივმართავთ (4.6 ა)-ს პირველ ფორმულას და გამოვიყენებთ დეტერმინანტების გადაზიდვების წესს, მივიღებთ ბაზისის დისკრიმინანტის გარდაქმნის ფორმულას

$$\det(g_{ik}) = \det(g_{ik}) (\det(e'_i))^2, \quad (4.10)$$

რომელსაც მოკლედ შეგდეგი სახით ჩაეწერთ

$$g' = g (\det(e'_i))^2. \quad (4.11)$$

აქედან გვაქვს

$$\det(e'_i) = \pm \sqrt{\frac{g'}{g}}, \quad (4.12)$$

სადაც პლიუსი ნიშანი ბაზისების შეცვლისას მათი ორიენტაციის შენარჩუნებას შეესაბამება, ხოლო მინუსი — ორიენტაციის შეცვლას.

ახლა ადვილი გამოსაყვანია დისკრიმინანტული მატრიცის გარდაქმნის ფორმულები. განვიხილოთ მათგან მხოლოდ სამი:

$$C_{ijk} = e_i e_j e_k, \quad C^{ijk} = e^i e^j e^k, \quad C'_i{}^j{}_k = e_i e^j e_k. \quad (4.13)$$

(4.1 ბ) ფორმულების საშუალებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= e'_i e'_j e'_k C_{i'j'k'}, \\ C^{ijk} &= e'_i e'_j e'_k C^{i'j'k'} \\ C'_i{}^j{}_k &= e'_i e^j e_k C'_i{}^{j'}{}_{k'}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ანალოგიით შეიძლება დაიწეროს შებრუნებული გარდაქმნები.

თუ ახლა ყურადღებით დავაკვირდებით (4.6 ა, ბ), (4.8) და (4.14) ფორმულებს, აღმოვაჩინთ ერთ მნიშვნელოვან კანონზომიერებას. მიუხედავად მათი განსხვავებისა, ამ ფორმულებს საერთო აქვს ის, რომ ყოველი ქვედა და ყოველი ზედა ინდექსის მიმართ მატრიცები e_i და e^i საბაზისო ვექტორების კოგრედიენტულად გარდაიქმნება. ქვედა და ზედაინდექსებიან მატრიცებს, რომლებიც ბაზისის არჩევაზე არიან დამოკიდებული და ბაზისის შეცვლისას აქვთ აღნიშნული თვისება, ტენზორები ეწოდებათ. აქ არ მოვიყვანთ ტენზორის ზოგად განმარტებას. ამას ქვემოთ გავაკეთებთ.

ზოგადი ტენზორული ალგებრის საფუძვლები

წინა თავში განხილული იყო ფიქსირებულ წერტილზე მოდებული ვექტორთა ოჯახების პარამეტრიზაციის საკითხები. ამ თავში გადავდივართ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის რაიმე არეში მოცემულ ვექტორულ ველთა თვისებების გლობალურ შესწავლაზე. ვექტორული ველების თვისებათა შესასწავლად დაგვჭირდება მოძრავი ტრიედრების განხილვა. ისინი არის ყოველ წერტილში ლოკალურ ბაზისად გამოიყენებიან ვექტორული ველის პარამეტრიზაციისათვის. ასეთი ტრიედრები სხვადასხვა წერტილში შემთხვევით არ შეიძლება ავირჩიოთ. მოცემული წერტილიდან მეზობელ წერტილზე გადასვლისას მოძრავ ტრიედრს უნდა გააჩნდეს რეგულარობის გარკვეული თვისებები (უწყვეტობა, დიფერენცირებადობა და სხვა). მოძრავი ტრიედრები შეიძლება ავაგოთ, მაგალითად, e_1 , e_2 , e_3 ტრიედრის ერთი წერტილიდან მეორეში პარალელური გადატანით. მაგრამ ამ გზით ავაგებთ მოძრავ ტრიედრთა კერძო კლასს, რომელიც მართკუთხა (საზოგადოდ, ირიბკუთხა) კოორდინატთა სისტემებს შეესაბამება. მხოლოდ ამ კლასის ტრიედრების განხილვით მეტისმეტად შევზღუდავდით ზოგადობას და ისეთ ტენზორულ აღრიცხვას ავაგებდით, რომელიც შინაარსით ღარიბი და არასრული იქნებოდა. ამ თავში განვიხილავთ ამგვარი ტრიედრების აგების ზოგად ხერხს.

მეორე მხრივ, ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ვექტორული ველების თვისებებისა და სხვა გეომეტრიული საკითხების შესასწავლად მიზანშეწონილია ტენზორული აღრიცხვის აპარატის გამოყენება. ამის გამო ჩვენს აგებებს დავიწყებთ ტენზორული ალგებრის საფუძვლების გადმოცემით (უფრო ზოგადი) n -განზომილებიანი რიცხვითი $\mathcal{A}$. სივრცის ბაზაზე.

§ 1. საკოორდინატო სისტემები $\mathcal{M}^n$ სივრცეში

1. არითმეტიკული სივრცე $\mathcal{M}^n$. ვთქვათ n რაიკე ნატურალური რიცხვია და $\mathcal{M}^n$ — n -განზომილებიანი არითმეტიკული (რიცხვითი) სივრცე, ე. ი. დალაგებული $x^1, \dots, x^n$ რიცხვების ყველა სისტემის (წერტილთა) სიმრავლე; $x^1, \dots, x^n$ რიცხვებს $(x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{M}^n$ წერტილის კოორდინატებს ვუწოდებთ. ზმირად წერტილს $x^1, \dots, x^n$ კოორდინატებით $x(x^1, \dots, x^n)$ -ით, ან, მოკლედ, x -ით აღვნიშნავთ.

ვთქვათ $x_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ რაიმე ფიქსირებული წერტილია $\mathcal{M}^n$ სივრცეიდან, ხოლო ε — დადებითი მუდმივი. მაშინ ისეთ $x(x^1, \dots, x^n)$ წერტილთა $S(x_0, \varepsilon)$ სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს

$$\sum_{i=1}^n |x_i^0 - x^i|^2 < \varepsilon^2$$

უტოლობას, ε -რადიუსიანი ღია სფერო ეწოდება ცენტრით x_0 წერტილში ან x_0 წერტილის ε -მიდამო. ε -მიდამოების საშუალებით შეიძლება შემოვიღოთ $\mathcal{M}^n$ სივრცის სიმრავლის ზღვარი, შიგა, გარე, სასაზღვრო და იზოლარებულ წერტილთა ცნებები, განვმარტოთ აგრეთვე წერტილთა მიმდევრობის ზღვარი, ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები, $x^1, \dots, x^n$ მრავალი ცვლადის ფუნქციათა უწყვეტობა და თანაბარი უწყვეტობა, ფუნქციონალურ მიმდევრობათა და მწკრივთა უბრალო (წერტილობრივი) და თანაბარი კრებადობები. აქ არ მოვიყვანთ ამ ცნებათა ზუსტ განმარტებებს და სათანადო თეორემათა დამტკიცებებს. ისინი შეიძლება ნახოთ მათემატიკური ანალიზის ნებისმიერ სერიოზულ სახელმძღვანელოში. ჩვენ მოვიყვანთ მხოლოდ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეებისა და $\mathcal{M}^n$ სივრცის არის განმარტებას.

$x(x^1, \dots, x^n)$ წერტილების Ω სიმრავლეს $\mathcal{M}^n$ სივრცის n -განზომილებიანი ღია სიმრავლე ეწოდება, თუ მისი ყოველი წერტილი შიგაა, ე. ი. ნებისმიერი $x \in \Omega$ წერტილისთვის არსებობს $S(x, \varepsilon)$ ε -მიდამო, რომელიც მთლიანად Ω სიმრავლეს ეკუთვნის. ყოველ V ღია სიმრავლეს, რომელიც x წერტილს შეიცავს, ამ წერტილის მიდამო ეწოდება. Ω სიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი, თუ იგი შეიცავს ყველა თავის ზღვარით წერტილს. ღია სიმრავლეს ბმული ეწოდება, თუ იგი არ წარმოიშობება ორი არაკარიელი არაგადამკვეთი ღია სიმრავლის გაერთიანებად. ღია ბმულ Ω სიმრავლეს $\mathcal{M}^n$ სივრცის არე ეწოდება. არის მაგალი-

თავ $S(x_0, \varepsilon)$ ღია სფერო. Ω არეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ მოიძებნება ისეთი $S(x_0, \varepsilon_0)$ სფერო, რომელიც Ω არეს მოიცავს. თუ ნებისმიერი n -განზომილებიანი $S(x, \varepsilon)$ სფეროსთვის შესრულებულია $S(x, \varepsilon) \subset \Omega$ პირობა, მაშინ Ω , ცხადია, $\mathcal{H}^n$ -ს ემთხვევა. შემდგომში n -განზომილებიანი $\mathcal{H}^n$ სივრცის არეების განხილვისას მხედველობაში გვქენება შემოსაზღვრული არეები, თუ საწინააღმდეგო აშკარად არ იქნა მითითებული.

2. არის პარამეტრიზაცია. კოორდინატთა გარდაქმნის იაკობიანი. ვთქვათ

$$x' = \varphi_i(x^1, \dots, x^n), \quad i' \in [1, n] \quad (1.1)$$

ან მოკლედ

$$x' = \varphi(x)$$

ტოლობა ანხორციელებს ურთიერთცალსახა $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ ასახვას, სადაც Ω და Ω' $\mathcal{H}^n$ სივრცის n -განზომილებიანი არეებია. ვიტყვი, რომ $x' = \varphi(x)$ ასახვა უწყვეტია $x_0 \in \Omega$ წერტილში, თუ x_0 წერტილის $x' = \varphi(x_0)$ სახის ნებისმიერი V'_0 მიდამო შეიცავს ისეთ V' მიდამოს, რომლის $\varphi^{-1}(V')$ წინა სახე x_0 წერტილის მიდამოა. თუ $x' = \varphi(x)$ ასახვა უწყვეტია ყოველ $x \in \Omega$ წერტილში, მაშინ ვიტყვი, რომ ეს ასახვა უწყვეტია Ω -ში.

ურთიერთცალსახა და ურთიერთუწყვეტ $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ ასახვას ტოპოლოგიური ასახვა ეწოდება. ასეთ ასახვებს Ω არის გომეომორფიზმებს ეუწოდებთ. ვთქვათ $\Gamma(\Omega)$ წარმოადგენს Ω არის φ გომეომორფიზმების ოჯახს. ცხადია, $\Gamma(\Omega)$ -ს ეკუთვნის $x' = x^i, i = i' \in [1, n]$ იგივეური ასახვა. ყოველი $x' = \varphi(x) \in \Gamma(\Omega)$ გომეომორფიზმი ანხორციელებს Ω არის ცალსახა პარამეტრიზაციას. ამიტომ $x' = \varphi(x)$ წერტილის $x^1, \dots, x^n$ კოორდინატები ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც Ω არის წერტილის კოორდინატები. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყოველი $x' = \varphi(x) \in \Gamma(\Omega)$ გომეომორფიზმი განსაზღვრავს რაიმე კოორდინატთა სისტემას Ω -ში, რომელსაც სიმოკლისათვის (x') სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამრიგად, თუ (x') და (x) ორი კოორდინატთა სისტემა Ω -ში, მაშინ არსებობს ისეთი $\varphi \in \Gamma(\Omega)$ გომეომორფიზმი, რომ $x' = \varphi(x)$. (1.1) სახის დამოკიდებულებას ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ როგორც Ω არის წერტილთა კოორდინატების გარდაქმნას.

ტენზორული ანალიზის ასახებად აღუკლებელია რაიმე $k \geq 1$ რიგამდე დაფერენცირებადი გომეომორფიზმების განხილვა. ამის გამო შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ φ_i რაიმე $C_k(\Omega)$ კლასის ეკუთვნის,

რასაც მოკლედ $\varphi \in C_k$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. თუ $\varphi \in C_k$ ნებისმიერი $k \geq 0$ რიცხვისთვის, მაშინ გვექნება C_∞ კლასის გომეომორფიზმი. Ω არის C_k კლასის გომეომორფიზმების ოჯახი აღვნიშნოთ $\Gamma_k(\Omega)$ სიმბოლოთი.

ანალიზის კურსში დამტკიცებულია გომეომორფიზმების არსებობის ლოკალური თეორემა. მოვიყვანოთ მისი ფორმულირება (იხ. მაგალითად, [9]).

თეორემა. ეთქვას შესრულებულია პირობები: 1) $\varphi_i(x^1, \dots, x^n) \in C_k(\Omega)$, სადაც $k \geq 1$ რაიმე ნატურალური რიცხვია ან $k = \infty$, 2) რაიმე ფიქსირებულ $x_0(x_0^1, \dots, x_0^n) \in \Omega$ წერტილში ნული-საგან განსხვავებულია (1.1) გარდაქმნის ფუნქციონალური დეტერმინანტი (იაკობიანი), ე. ი.

$$I(x', x) \equiv \frac{D(x^1, \dots, x'^n)}{D(x^1, \dots, x^n)} \neq 0, \text{ როცა } x = x_0. \quad (1.2)$$

მაშინ (1.1) დამოკიდებულებები ანხორციელებს $V_0 \longleftrightarrow V'_0$ გომეომორფიზმს, სადაც V_0 და V'_0 სათანადოდ x_0 და $x'_0 = \varphi(x_0)$ წერტილების რაიმე მიდამოებია.

მრავალგანზომილებიანი არეებისათვის ლოკალური გომეომორფიზმების არსებობის ეს თეორემა სავსებით საკმარისია ტენზორული ანალიზის ასაგებად ნებისმიერი (სასრული) განზომილების მრავალსახეობებზე.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ (1.2) პირობები შესრულებულია ყველგან Ω არეში. ეს უზრუნველყოფს φ_i ფუნქციების დამოუკიდებლობას, რაც, ცხადია, აუცილებელი პირობაა იმისა, რომ (1.1) დამოკიდებულებები Ω არის გლობალურ გომეომორფიზმს ანხორციელებდეს.

არისათვის (ან, საზოგადოდ, სივრცისათვის) ამა თუ იმ კოორდინატთა სისტემის შერჩევას ამ არის (სივრცის) პარამეტრიზაცია ეწოდება. წერტილის კოორდინატებს ხანდახან მის პარამეტრებსაც ეუწოდებთ.

შემდგომში იმ სიდიდეების როგორც განუსაზღვრელ, ისე განსაზღვრულ ინდექსებს, რომლებიც კოორდინატთა (x') სისტემას ეთანადებიან, შტრიხებით მოვნიშნავთ. მაგალითად, x^i , A_i , და ა. შ. ამის შესაბამისად (x) კოორდინატთა სისტემასთან დაკავშირებული სიდიდეების ინდექსებს ყოველთვის უშტრიხო ასოებით აღვნიშნავთ.

ეს შეთანხმება გაგვიადვილებს ტენზორული ანალიზის აპარატის აგების ფორმალიზაციას.

შევთანხმდეთ, რომ განუსაზღვრელი და ყრუ ინდექსები, შტრიხით თუ უშტრიხით, ლებულობენ $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$D_k' = \frac{\partial x^i}{\partial x^k}, \quad D_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i}, \quad i, k \in [1, n]. \quad (1.2a)$$

მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = D_k^i, \quad D_k^i = \delta_k^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = D_j^i D_k^j = \delta_j^i, \quad (1.2b)$$

ტოლობები. თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტების გაპრავლების ფორმულებს, მივიღებთ

$$\det(D_i^j) \det(D_k^j) = \det(\delta^j_k) = 1. \quad (1.3a)$$

ამრიგად, კოორდინატთა გარდაქმნის ფუნქციონალური დეტერმინანტები (იაკობიანები) აკმაყოფილებენ შემდეგ

$$J(x', x) = \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(x^1, \dots, x^n)} \equiv \det(D_k^j) \neq 0, \quad (1.3b)$$

$$J^{-1}(x', x) = \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(x^1, \dots, x^n)} \equiv \det(D_i^j) \neq 0 \quad (1.3g)$$

პირობებს.

3. საკოორდინატო წირები. ვთქვათ, მაგალითად $n=3$. x^1, x^2, x^3 კოორდინატებიდან რომელიმე ორის დაფიქსირებით, როცა მესამე უწყვეტად იცვლება, შესაბამისი x წერტილი აღწერს წირს, რომელსაც საკოორდინატო წირი ეწოდება. თუ ეს წირი x^i კოორდინატის უწყვეტი ცვლით მიიღება, მაშინ მას (x^i) საკოორდინატო წირს ვუწოდებთ. საკოორდინატო (x^1), (x^2), (x^3) წირების ერთობლიობა სივრცეში წარმოქმნის (x) საკოორდინატო სისტემის წირთა ბადეს. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ განსახილველი არის ყოველ წერტილში სამი საკოორდინატო წირი გადის და ამ წირთა მხებებში მათი გადაკვეთის წერტილში არაკომპლანარულია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ (1.2) პირობების შემთხვევაში ეს მოთხოვნა ყოველთვის სრულდება.

§ 2. *შენიშვნის არის ასახვათა რგოლები და მოდულები.*

შენიშვნის ტენზორები

1. არის ასახვათა რგოლები და მოდულები. ვთქვათ Ω წარმოადგენს *შენიშვნის არის*. აღნიშნოთ $\mathcal{F}(\Omega)$ და $\mathcal{M}(\Omega)$ სიმბოლოებით შესაბამისად $f: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ და $g: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ ასახვათა სიმრავლეები. კოორდინატთა ყოველი (x) სისტემის მიმართ f და g ასახვები გამოისახება Ω არის წერტილთა კოორდინატების სათანადოდ კომპლექსური და ნამდვილი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებით, რომლებსაც ვუწოდოთ f და g ასახვათა კომპონენტები ან წარმომადგენლები (x) კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ასახვათა კომპონენტების სიმრავლე $\mathcal{F}(\Omega)$ და $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან კოორდინატთა (x) სისტემის მიმართ აღნიშნოთ შესაბამისად $\mathcal{F}_x(\Omega)$ და $\mathcal{M}_x(\Omega)$ სიმბოლოებით. ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატთა ყოველი (x) სისტემისთვის $\mathcal{F}_x(\Omega)$ და $\mathcal{M}_x(\Omega)$ სიმრავლეები რგოლებს წარმოადგენენ. ამას ადგილი აქვს, მაგალითად, როცა $\mathcal{F}_x(\Omega)$ და $\mathcal{M}_x(\Omega)$ ლებეგის აზრით ზომად ფუნქციათა სიმრავლეებია Ω არეში. განვმარტოთ ახლა $\mathcal{F}(\Omega)$ და $\mathcal{M}(\Omega)$ -ში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები. თუ $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ (შესაბამისად $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$), მაშინ $f + g$ და $f \cdot g$ აღნიშნავს ელემენტებს $\mathcal{F}(\Omega)$ -დან (შესაბამისად $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან), რომელთა კომპონენტები კოორდინატთა (x) სისტემაში სათანადოდ $f(x) + g(x)$ და $f(x) \cdot g(x)$ -ია. მაშინ ცხადია, რომ $\mathcal{F}(\Omega)$ და $\mathcal{M}(\Omega)$ რგოლებია, ამასთან $\mathcal{M}(\Omega)$ წარმოადგენს $\mathcal{F}(\Omega)$ -ს ქვერგოლს, მსჯელობებს ჩავატარებთ $\mathcal{F}(\Omega)$ რგოლისთვის. ისინი, როგორც წესი, სამართლიანი დარჩებიან $\mathcal{M}(\Omega)$ ქვერგოლისთვისაც. აუცილებელ შემთხვევაში გაგვკეთებთ სათანადო შენიშვნებს.

შემდგომში განვიხილავთ რაიმე $C_k(\Omega)$, $k \geq 1$ კლასის კოორდინატთა სისტემების S_k ოჯახს, სიგლუვის k ხარისხს არ განვსაზღვრავთ, მაგრამ ჩავთვლით, რომ იგი ფიქსირებულია. ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ შესრულებულია შემდეგი მოთხოვნები:

A_1 . თუ $f(x) \in \mathcal{F}_x(\Omega)$, მაშინ კოორდინატთა ნებისმიერი (x') სისტემისთვის S_k -დან $f'(x') = f(x(x')) \in \mathcal{F}_{x'}(\Omega)$.

A_2 . კოორდინატთა ნებისმიერი (x') და (x) სისტემისთვის S_k -დან

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} \in \mathcal{F}_x(\Omega) \quad \text{და} \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \in \mathcal{F}_{x'}(\Omega), \quad i, k \in [1, n].$$

ვთქვათ, $\mathcal{M}$ რაიმე წრფივი სივრცეა $\mathcal{F}(\Omega)$ რგოლზე (სათანადოდ, $\mathcal{M}(\Omega)$ რგოლზე), ე. ი. $\mathcal{M}$ წარმოადგენს $\mathcal{F}(\Omega)$ მოდულს (სათანადოდ,

ში (Ω)-მოდულს). აღნიშნოთ $\mathfrak{M}(\Omega)$ -თი $f: \Omega \rightarrow \mathfrak{M}$ ასახვითა სიმრავლე. ცხადია, $\mathfrak{M}(\Omega)$ აგრეთვე $\mathfrak{F}(\Omega)$ -მოდულია (სათანადოდ, $\mathfrak{F}(\Omega)$ -მოდული).

კოორდინატა ყოველ (x) სისტემაში ნებისმიერი $h \in \mathfrak{M}(\Omega)$ ელემენტი გამოისახება Ω არის წერტილის კოორდინატების $h(x)$ ფუნქციით, რომელსაც h კომპონენტს ვუწოდებთ კოორდინატთა (x) სისტემაში. $h(x)$ ფუნქციების სიმრავლე აღნიშნოთ $\mathfrak{M}_x(\Omega)$ სიმბოლოთი. ცხადია, $\mathfrak{M}_x(\Omega)$ მოდულს წარმოადგენს $\mathfrak{F}_x(\Omega)$ რგოლზე.

2. კოორდინატთა დიფერენციალების გარდაქმნის ფორმულები. 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი. ვთქვათ, x' და x'' წარმოადგენს Ω არის P წერტილის კოორდინატებს (x) და (x') კოორდინატთა სისტემებში. მაშინ P წერტილის უსასრულოდ მახლობელი რაიმე P' წერტილის კოორდინატები (x) და (x') კოორდინატთა სისტემებში შესაბამისად $x' + dx'$ და $x'' + dx''$ იქნება.

რადგან x' წარმოადგენს x'' კოორდინატების ფუნქციებს, ამიტომ (მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე შესაქრების სიზუსტით) გვექნება

$$dx'' = \frac{\partial x''}{\partial x'} dx', \quad \text{ე. ი.} \quad dx'' = D'_x dx'. \quad (2.1)$$

შეგახსენებთ, რომ ინდექსები ღებულობს 1, 2, ..., n მნიშვნელობებს.

კოორდინატთა dx'' დიფერენციალების გარდაქმნის (2.1) ფორმულას ხშირად კონტრავარიანტული გარდაქმნის კანონს უწოდებენ. ახლა ამის საფუძველზე შემოვიღოთ 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორის ცნება.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე წესი, რომელიც კოორდინატთა ყოველ (x) სისტემაში განსაზღვრავს n ელემენტისაგან შედგენილი $(0,1)$ ტიპის ისეთ $A^i(x) \in \mathfrak{M}_x(\Omega)$ მატრიცას, რომელიც დამოკიდებულია არის პარამეტრიზაციაზე და, საზოგადოდ, წერტილის შესაბამის კოორდინატებზე. თუ ერთი კოორდინატთა სისტემიდან მეორეზე გადასვლისას A^i მატრიცის ელემენტები კოორდინატთა dx' დიფერენციალების კოგრადიენტულად, ე. ი. კონტრავარიანტული კანონით, გარდაიქმნება:

$$A^{i'} = A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad \text{ე. ი.} \quad A^{i'} = A^i D^i_{i'}, \quad (2.2)$$

მაშინ A^i მატრიცას ეწოდება 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი $\mathfrak{M}(\Omega)$ მოდულიდან, ხოლო ამ მატრიცის ელემენ-

ტებს — ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები. ქვემოთ ჩვენ 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორის მრავალი მაგალითი შეგვხვდება.

8. სკალარის კერძო წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულები. 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორი. $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{M}$ ასახვას, რომელიც დამოკიდებულია Ω არის წერტილზე, მაგრამ არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, ვუწოდოთ სკალარი $\mathbb{M}$ მოდულიდან. სკალარებს $\mathcal{S}(\Omega)$ -დან უბრალოდ სკალარებს ვუწოდებთ. ამრიგად, სიდიდეს, რომელიც რაიმე არის წერტილის ფუნქციაა, ე. ი. ამ არის ყოველ წერტილში ღებულობს საესებით გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობას კოორდინატთა სისტემის შერჩევისაგან დამოუკიდებლად, სკალარი ეწოდება.

სკალარის მაგალითებია წნევა სითხეში, სხეულის ტემპერატურა სტაციონარული სითბური რეჟიმის დროს, ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები და ა. შ.

თუ სივრცეს კოორდინატთა ორი სხვადასხვა (x) და (x') სისტემა მიეწერება, მაშინ ყოველი h სკალარი ამ სისტემების მიმართ გამოისახება კოორდინატების სათანადოდ $h = \varphi(x)$ და $h = \varphi'(x')$ ფუნქციების საშუალებით. მაგრამ, რადგან განმარტებით h არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე, გვქვნება

$$h = \varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi'(x'(x)). \quad (2.3)$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{\partial h}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial h}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}. \quad (2.4)$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს სკალარის კერძო წარმოებულების გარდაქმნის წესს კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლის შემთხვევაში.

თუ შემოვიღებთ

$$\partial_i h = \frac{\partial h}{\partial x^i}, \quad \partial_{i'} h = \frac{\partial h}{\partial x^{i'}}$$

აღნიშვნებს, (2.4) ფორმულა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\partial_{i'} h = \partial_i h D_{i'}^i. \quad (2.4a)$$

(2.1) ფორმულები ფუნდამენტურ როლს თამაშობს მთელს ტენზორულ ანალიზში. ამის გამო საჭიროა მათი დამახსოვრება.

(2.4) ფორმულას გარდაქმნის კოვარიანტულ წესს ეწოდებთ.

ადვილი საჩვენებელია, რომ (2.1) და (2.2) ფორმულები სტრუქტურულად ერთმანეთისაგან განსხვავდება, მაგრამ ჩვენ მალე დავრწმუნდებით, რომ მათ შორის მკიდრო კავშირი არსებობს.

გარდაქმნის (2.4) ფორმულების გამოყენებით შემოვიღოთ ახლა 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორის ცნება. ვთქვათ გვაქვს რაიმე წესი, რომელიც კოორდინატთა ყოველ სისტემას უთანადებს n ელემენტისაგან შემდგარ $B_i(x)$ $(0,1)$ -მატრიცას $\mathbb{M}(n)$ მოდულიდან. ეს ელემენტები დამოკიდებულია პარამეტრიზაციის შერჩევაზე და, საზოგადოდ, წერტილის არჩევაზე განსაზღვრული არიან. თუ ერთი x^i კოორდინატებიდან მეორე $x^{i'}$ კოორდინატებზე გადასვლისას B_i სიდიდეები h სკალარის $\partial_i h$ კერძო წარმოებულების კოგრადიენტულად გარდაიქმნება, ე.ი. ექვემდებარება გარდაქმნის შემდეგ წესს

$$B_{i'} = B_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \equiv B_i D_{i'}^i, \quad (2.5)$$

მაშინ B_i მატრიცას ეწოდება 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორი $\mathbb{M}(n)$ მოდულიდან, ხოლო ამ მატრიცის ელემენტებს—ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები.

1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორის მაგალითს წარმოადგენს h სკალარის $\partial_i h$ კერძო წარმოებულები. ამ ტენზორს h სკალარის გრადიენტი ეწოდება და $\text{grad } h$ ან ∇h სიმბოლოებით აღინიშნება.

(2.1) და (2.4) გარდაქმნებს შორის ჩვენ მიერ ზემოხსენებული კავშირი შემდეგ მნიშვნელოვან ფაქტში ვლინდება: ვთქვათ A_i და B^i 1-ლი რანგის ნებისმიერი კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორებია $\mathcal{S}(\mathcal{Q})$ მოდულიდან. განვიხილოთ $A_i B^i$ ჯამი და დავამტკიცოთ, რომ იგი ინვარიანტულია, სახელდობრ, x^i კოორდინატებიდან ახალ $x^{i'}$ კოორდინატებზე გადასვლისას ადვილი აქვს ტოლობას

$$A_i B^i = A_{i'} B^{i'}.$$

მართლაც, (2.2), (2.5) და (1.2 ბ) ფორმულების თანახმად დაწერით

$$A_i B^i = A_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} B^{i'} = A_{i'} \delta_{i'}^{i'} B^{i'} = A_{i'} B^{i'},$$

რაც უნდა დავამტკიცებინა.

A, B' სახის გამოსახულების ინვარიანტულობა ავლენს იმ კავშირს (2.1) და (2.4) ფორმულებს შორის, რომელზედაც ზემოთ ითქვა. სწორედ ამ კავშირის გამო მათ კონტრაგრედიენტულ გარდაქმნებს ვუწოდებთ.

კერძოდ, (2.1) და (2.4) ფორმულების კონტრაგრედიენტულობის თანახმად, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, ინვარიანტულია $dh = \partial_i h dx^i$ ფორმა, რომელიც h სკალარის დიფერენციალს გამოსახავს. საზოგადოდ, უნდა ითქვას, რომ ტენზორულ ანალიზში გამოსახულებების (ფორმების, ინტეგრალის და ა. შ.) ინვარიანტობა დიდ როლს თამაშობს. ამის გამო დროულია აქ უფრო გამოკვეთილად ითქვას, თუ რას ვგულისხმობთ ამ "ტერმინის ქვეშ, რომელსაც ქვემოთ ხშირად გამოვიყენებთ. თუ გამოსახულება (ფორმა, ინტეგრალი და სხვა) შედგენილია კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე დამოკიდებულ სიდიდეებისაგან და არ იცვლის თავის მნიშვნელობას და სტრუქტურას ერთი საკოორდინატო სისტემის მეორით შეცვლისას, მაშინ მას ინვარიანტი (ინვარიანტული ფორმა, ინვარიანტული ინტეგრალი და ა. შ.) ეწოდება. მაგალითად, $dh = \partial_i h dx^i$ წარმოადგენს ინვარიანტულ დიფერენციალურ ფორმას. საზოგადოდ, თუ A_i 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორია, მაშინ ინვარიანტულია $A_i dx^i$ დიფერენციალური ფორმა.

4. მაღალი რანგის ტენზორები. ამ პუნქტში ჩვენ მოვიყვანთ მაღალი რანგის ტენზორის განმარტებას. დავიწყეთ მაგალითით.

განვიხილოთ შემდეგი სახის (p, q) -მატრიცა

$$U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = A_{i_1} \dots A_{i_p} B^{j_1} \dots B^{j_q}, \quad (2.6)$$

სადაც A_i და B^i 1-ლი რანგის, შესაბამისად, კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორებია კომპონენტებით $\mathcal{U}(\Omega)$ -დან. მაშინ ერთი x^i კოორდინატების სხვა x'^i კოორდინატებით შეცვლისას, (2.2) და (2.5)-ის თანახმად, $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ მატრიცის ელემენტები შემდეგი ფორმულებით გარდაიქმნება:

$$U_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} = U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_p}^{i_p} D_{j_1}^{j'_1} \dots D_{j_q}^{j'_q}. \quad (2.7)$$

გავიხსენოთ, რომ გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად შტრიხებით უნდა მოვნიშნოთ განსაზღვრული ინდექსებიც. მაგალითად, უნდა დავწეროთ $D_{i'_1}^{i_1}$, $D_{j'_1}^{j_1}$, რადგან, საზოგადოდ, $D_{i'_1}^{i_1} \neq D_{i'_1}^{i'_1}$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სრულდება ტოლობები

$$\delta_{k'}^{i'} = \delta_k^i D_k^{k'} D_{i'}^{i'} \quad (2.8)$$

ამ ფორმულის საშუალებით მარტივად დავამტკიცებთ, რომ

$$\delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_p}^{i_p} = \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_p}^{i_p} D_{k_1}^{k_1} \dots D_{k_p}^{k_p}, D_{i_1}^{i_1} \dots D_{i_p}^{i_p} \quad (2.9)$$

ახლა დავუბრუნდეთ (2.6) ფორმულას და მის საკუთველზე ზოგადად განვმარტოთ n -განზომილებიანი $\mathcal{H}^n$ სივრცის ნებისმიერი ტენზორი.

ეთქვათ გვაქვს რაიმე წესი, რომლის მიხედვით კოორდინატთა ყოველ (x) სისტემას ეთანადება $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(x)$ (p, q)-ტიპის მატრიცა ელემენტებით $\mathcal{M}_x(\Omega)$ მოდულიდან. თუ ამ მატრიცის ელემენტები ერთი კოორდინატებიდან რაიმე სხვა კოორდინატებზე გადასვლისას (2.6) სახის მატრიცის ელემენტების კოვარიანტულად გარდაიქმნება, ე. ი. ექვემდებარება (2.7) სახის გარდაქმნებს, მაშინ $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(p, q)$ -მატრიცას ეწოდება (p, q) ტიპის ტენზორი ელემენტებით $\mathcal{M}(\Omega)$ მოდულიდან ან, მოკლედ, (p, q)-ტენზორი $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან. მატრიცის $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(x)$ ელემენტებს ეწოდება ტენზორის კომპონენტები კოორდინატთა (x) სისტემაში. (p, q)-ტენზორის კომპონენტების რიცხვი ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში ტოლია n^{p+q} -ის. $r = p + q$ რიცხვს ტენზორის რანგი ეწოდება. თუ $q = 0$ ან $p = 0$, მაშინ გვექნება სათანადოდ p ან q რანგის კოვარიანტული ან კონტრავარიანტული ტენზორი. თუ $p \geq 1$, $q \geq 1$, მაშინ გვაქვს შერეული ტიპის ტენზორი. ნულოვანი რანგის ტენზორები ($p = q = 0$) წარმოადგენს სკალარებს $\mathcal{M}(\Omega)$ მოდულიდან. $\mathcal{M}_0(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ (p, q)-ტენზორების სიმრავლე $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან. როცა $p = q = 0$, მაშინ გვექნება $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან სკალარების სიმრავლე, რომელსაც $\mathcal{M}_0(\Omega)$ -თი აღვნიშნავთ.

(2.9) ფორმულებიდან ჩანს, რომ კონტრაქციის დეტალების $\delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_p}^{i_p}$ ნამრავლი შეადგენს $2p$ რანგის შერეული ტიპის ტენზორს ნებისმიერი $\mathcal{H}_p^n(\Omega)$ -დან. ეს ტენზორი შედგომში მნიშვნელოვან როლს შეასრულებს. აქვე აღვნიშნოთ, რომ δ_{ik} და δ^{ik} სიმბოლოები ტენზორებს არ წარმოადგენს.

5. ტენზორების ძირითადი თვისებები. ტენზორის იზომერება. მოვიყვანოთ ტენზორების რამდენიმე ძირითადი თვისება, რომლე-

ბიც უშუალოდ გამომდინარეობენ ზემოთ მოცემული განმარტებიდან:

1) ცხადია, $f: \Omega \rightarrow \Omega$ წარმოადგენს ნებისმიერი რანგის ტენზორს. მისი კომპონენტები ნულის ტოლია კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემის მიმართ და, ამრიგად, (2.7) დამოკიდებულებები სრულდება ნებისმიერი p, q რიცხვებისთვის. ამ ტენზორს ვუწოდოთ ნულოვანი ან ნულ-ტენზორი. მაშასადამე, ნებისმიერი $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ სიმრავლე შეიცავს ნულოვან ტენზორს, რომელსაც O -ით აღვნიშნავთ.

2) (2.7) დამოკიდებულებებიდან მაშინვე გამომდინარეობს, რომ, თუ ტენზორის კომპონენტები ნულია რაიმე ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ ისინი ნულის ტოლი იქნებიან სხვა ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაშიც და, მაშასადამე, ტენზორი ნულის ტოლია. თუ კოორდინატთა ერთ ფიქსირებულ სისტემაში ნებისმიერად ავიღებთ (p, q) -მატრიცას $\mathbb{M}(\Omega)$ -დან, ხოლო კოორდინატთა სხვა სისტემაში მის კომპონენტებს განვსაზღვრავთ (2.7) ფორმულით, მაშინ მივიღებთ (p, q) -ტენზორს $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ -დან. აქედან გამომდინარეობს, რომ ტენზორი ცალსახად განისაზღვრება, თუ მოცემული გვაქვს მისი კომპონენტები ერთ ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში.

3) თუ $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ და $V_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ ტენზორებია $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ -დან, მაშინ

$$U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + V_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \quad (2.10)$$

ჯამი წარმოადგენს ტენზორს $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ -დან.

4) თუ φ სკალარია $\mathbb{F}_0(\Omega)$ -დან, ხოლო $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ — ტენზორი $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ -დან, მაშინ $\varphi U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ ნამრავლი წარმოადგენს ტენზორს $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ -დან.

აქლა, ცხადია, რომ $\mathbb{M}_p^q(\Omega)$ წარმოადგენს მოდულს $\mathbb{F}(\Omega)$ -დან აღებული სკალარების $\mathbb{F}_0(\Omega)$ -ველზე.

5) თუ $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ და $V_{k_1 \dots k_r}^{m_1 \dots m_s}$ (p, q) და (r, s) ტიპის ტენზორებია შესაბამის $\mathbb{F}_p^q(\Omega)$ და $\mathbb{F}_r^s(\Omega)$ -დან, მაშინ მათი პირდაპირი ნამრავლი

$$W_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q m_1 \dots m_s} = U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} V_{k_1 \dots k_r}^{m_1 \dots m_s} \quad (2.11)$$

შეადგენს $(p+r, q+s)$ ტიპის ტენზორს $\mathbb{M}(\Omega)$ -დან.

მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ (2.11) ფორმულაში, საზოგადოდ, თანამამრავლთა გადასმა არ შეიძლება.

6) ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, თუ ნამრაველში მოვახდენთ ინდექსების m -ჯერად შეკვეცას, მაშინ მივიღებთ $(p+r-m, q+s-m)$ ტიპის ტენზორს. თუ ამასთან ერთი თანამამრავლის m ინდექსი იკვეცება მეორე თანამამრავლის m ინდექსთან, ვიტყვი, რომ ზღვება ორი ტენზორის m -ჯერადი ჩახვევა.

ამ ოპერაციას ჩვენ ტენზორების m -ნამრავლსაც ვუწოდებთ.

7) თუ $A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ ტენზორში ნებისმიერად გადავსვამთ განუსაზღვრელ $i_1, \dots, i_p$ და $j_1, \dots, j_q$ ინდექსებს, კვლავ (p, q) -ტენზორს მივიღებთ. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (2.7) ფორმულიდან. ასე მაგალითად, თუ A_{ij} მე-2 რანგის კოვარიანტული ტენზორია, მაშინ A_{ij} აგრეთვე მე-2 რანგის კოვარიანტული ტენზორი იქნება. მაგრამ, საზოგადოდ, A_{ij} და A_{ji} ტენზორები სხვადასხვაა. ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან, როცა $A_{ij} = A_{ji}$, ე. ი. როცა ტენზორი სიმეტრიულია.

ტენზორებს, რომლებიც მოცემული ტენზორიდან განუსაზღვრელი ინდექსების გადასმით მიიღებიან, ამ ტენზორის იზომერები ჰქვიათ. თუ A ტენზორია, მაშინ $P(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მისი იზომერების სიმრავლე. A ტენზორის იზომერების $P(A)$ სიმრავლე მუდამ შეიცავს A ტენზორს. ცხადია, ყოველი (p, q) -ტენზორიდან შეიძლება მივიღოთ $p!q!$ იზომერი, მაგრამ, საზოგადოდ, ყველა მათგანი შეიძლება არ იყოს ერთმანეთისაგან განსხვავებული. თუ ტენზორის იზომერების $P(A)$ სიმრავლე ერთადერთი A ელემენტისაგან შედგება, მაშინ A ტენზორს სიმეტრიული ეწოდება.

8. ტენზორების შიგა r -ნამრავლი. ვთქვათ $A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ და $B_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_r}$ შესაბამისად $p+r$ და $r+q$ რანგის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორებია. მათი პირდაპირი გამრავლების შედეგად მივიღებთ $p+q+2r$ რანგის ტენზორს. თუ მასში მოვახდენთ $k_1, \dots, k_r$ ინდექსების r -ჯერად შეკვეცას $l_1, \dots, l_r$ ინდექსებთან, მივიღებთ $p+q$ რანგის ტენზორს, რომელსაც შემდეგნაირად აღვნიშნავთ:

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} B_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_r} = A \otimes B. \quad (2.12)$$

ამ გამოსახულებას $A = A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ და $B = B_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_r}$ ტენ-

ზორების შიგა r -ნამრაველი ვუწოდოთ. თუ $p = 0$ ან $q = 0$, მაშინ $\otimes$ სიმბოლოს გამოვტოვებთ და უბრალოდ დაწვერთ AB -ს:

$$AB = (AB)^{j_1 \dots j_q} = A_{k_1 \dots k_r} B^{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_q}, \text{ როცა } p = 0; \quad (2.12a)$$

$$AB = (AB)_{i_1 \dots i_p} = A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} B^{k_1 \dots k_r}, \text{ როცა } q = 0. \quad (2.12b)$$

ამ გამოსახულებებს უბრალოდ A და B ტენზორების შიგა ნამრავლებს ვუწოდებთ.

თუ $p = q = 0$, მაშინ შიგა ნამრავლი ინვარიანტული ფორმულით გამოისახება (იხ. პუნქტი 3)

$$AB = A_{k_1 \dots k_r} B^{k_1 \dots k_r} \quad (2.12\gamma)$$

შეენიშნოთ, რომ თუ A და B ტენზორებია $\mathcal{S}(\Omega)$ -დან და AB შიგა ნამრავლი ნულის ტოლია ნებისმიერი B -თვის, მაშინ $A = 0$.

§ 3. ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მოძრავი ბაზისები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეს. ინდექსები (ყრუ და განუსაზღვრელი) მიიღებს 1, 2, 3 მნიშვნელობებს.

1. კოვარიანტული მოძრავი ბაზისი. ვთქვათ R წარმოადგენს P წერტილის რადიუს-ვექტორს, ე. ი. $R = \vec{OP}$, სადაც O სივრცის ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. თუ სივრცეში განვიხილავთ კოორდინატთა ნებისმიერ (x) სისტემას და R ვექტორს P წერტილის x' კოორდინატებით გავაწარმოებთ, მივიღებთ სამ ვექტორს

$$R_i = \partial_i R, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i \in [1, 3]. \quad (3.1)$$

ცხადია, რომ R_i ვექტორი ეხება (x') საკოორდინატო წირს P წერტილში (ნახ. 7). ამიტომ R_1, R_2, R_3 ყოველ წერტილში ქმნის არაკომპლანარულ ვექტორთა სამეულს, რომელსაც კოორდინატთა (x) სისტემის მოძრავი ბაზისი ვუწოდებთ.

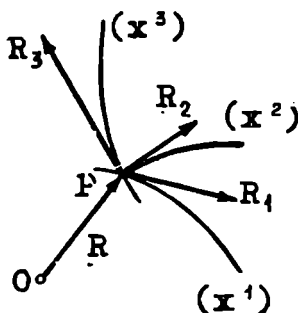
თუ ახლა რაიმე სხვა კოორდინატთა (x') სისტემას განვიხილავთ და (1.2 ა) აღნიშვნებს გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$R_{k'} = R_k D_k^{k'} \quad \left(R_{k'} = \frac{\partial R}{\partial x^{k'}} \right) \quad (3.2)$$

ტოლობებს. თუ ამ ფორმულებს შევადარებთ (2.4)-ს, შევნიშნავთ, რომ ერთი კოორდინატების მეორეთი შეცვლისას R_i ვექტორ-ფუნქციები ფ სკალარის კერძო ∂_i ფ წარმოებულების კოგრადიენტულად, ე. ი. კოვარიანტული წესით გარდაიქმნება. ამიტომ R_1, R_2, R_3 ტრიედრს შესაბამისი კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტულ მოძრავ ბაზისს ეუწოდებთ.

მ არის ყოველ წერტილში, ცხადია, შესრულებულია შემდეგი პირობა

$$v \equiv R_1 R_2 R_3 \neq 0. \quad (3.3)$$



ნახ 7

ცხადია, $|v|$ საბაზისო R_1, R_2, R_3 ვექტორებზე იგებული პარალელებიპედის მოცულობის ტოლია. თუ R_1, R_2, R_3 ტრიედრს მარჯვენა ან მარცხენა ორიენტაცია აქვს, მაშინ შესაბამისად $v > 0$ ან $v < 0$ (მ-ში).

R_1, R_2, R_3 ტრიედრის ორიენტაცია, რომელიც მთელს არეში ერთი და იგივეა, შესაბამისი კოორდინატთა (x) სისტემის ორიენტაციას განსაზღვრავს. რადგან v არ იცვლის ნიშანს Ω -ში, ამიტომ, თუ კოორდინატთა სისტემას მარჯვენა ან მარცხენა ორიენტაცია აქვს რაიმე ფიქსირებულ $x_0 \in \Omega$ წერტილში, ეს ორიენტაცია არ შეიცვლება მთელს Ω არეში.

2. კონტრავარიანტული მოძრავი ბაზისი. განვიხილოთ ახლა ვექტორ-ფუნქციები

$$R^1 = \frac{1}{v} (R_2 \times R_3), \quad R^2 = \frac{1}{v} (R_3 \times R_1), \quad R^3 = \frac{1}{v} (R_1 \times R_2), \quad (3.4)$$

რომლებიც, ცხადია, აკმაყოფილებენ

$$R_i R^j = \delta_i^j \quad (3.5)$$

პირობებს, ე. ი. R_i და R^j ვექტორ-ფუნქციები ბიორთონორმალურია Ω არის ყოველ წერტილში. (3.5) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

R^1, R^2, R^3 ვექტორ-ფუნქციები არაკომპლანარულია არის ყოველ წერტილში. ამის გამო ეს ტრიედრიც შეიძლება მივიჩნიოთ შესაბამისი კოორდინატთა სისტემის მოძრავ ბაზისად.

(3.5) ტოლობების ძალით R_1, R_2, R_3 და R^1, R^2, R^3 ტრიედრები წარმოადგენენ შესაბამისი კოორდინატთა სისტემის ბიორთონორმალურ მოძრავ ბაზისებს.

თუ (3.5) ტოლობებს გავამრავლებთ dx^i -ზე და შემდეგ შევკრებთ, გვქნება

$$R^i dR = dx^i, \quad dR = R_i dx^i. \quad (3.6)$$

რადგან x^i კოორდინატების სხვა x^i კოორდინატებით შეცვლისას $dx^i = D^i_j dx^j$, $dx^j = D^j_i dx^i$, $R^i dx^i = R^j D^j_i dx^i$, ამიტომ (3.6) ტოლობები შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ

$$(R^i - R^j D^j_i) dR = 0.$$

მაგრამ R -ის dR დიფერენციალს აქვს ნებისმიერი ორიენტაცია, ამასთან $dR \neq 0$. ამის გამო წინა ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$R^i = R^j D^j_i, \quad (3.7)$$

ე. ი. ერთი კოორდინატების მეორით შეცვლისას R^i ვექტორ-ფუნქციები კოორდინატების dx^i დიფერენციალთა კოგრადიენტულად ანუ კონტრავარიანტული კანონით შეიცვლება. ამის გამო R^1, R^2, R^3 ტრიედრის შესაბამისი კოორდინატთა სისტემის კონტრავარიანტულ მოძრავ ბაზისს ეუწოდებთ.

3. ვექტორ-ფუნქციების სივრცე. $V(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის Ω არის წერტილთა კოორდინატების ვექტორ-ფუნქციათა სიმრავლე. $V(\Omega)$ -ს ელემენტები, საზოგადოდ, კოორდინატთა სისტემის არჩევაზეა დამოკიდებული. $V(\Omega)$ -დან იმ ელემენტებს, რომლებიც დამოუკიდებელნი არიან კოორდინატთა სისტემის შერჩევისაგან, ეუწოდოთ ვექტორები ან ვექტორული ველები Ω -ზე. ვექტორულ ველთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $V_0(\Omega)$ სიმბოლოთი. ზოგადობისთვის განვიხილავთ კომპლექსური $w = u + iv$ სახის ვექტორ-ფუნქციებს, სადაც u და v ნამდვილი ვექტორ-ფუნქციებია $V(\Omega)$ -დან. თუ u_i და v_i წარმოადგენს u და v ვექტორების დეკარტის კოორდინატებს, მაშინ $u + iv$ ვექტორის დეკარტის კოორდინატები იქნება $u_i + iv_i$ კომპლექსური ფუნქცი-

ები. ორი კომპლექსური $w = u + iv$ და $w' = u' + iv'$ ვექტორ-ფუნქციის ჯამი განისაზღვრება $w + w' = u + u' + i(v + v')$ ფორმულით. მაშასადამე, თუ $w, w' \in V(\Omega)$, მაშინ $w + w' \in V(\Omega)$. თუ $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ კომპლექსური სკალარია $\mathbb{C}_0(\Omega)$ -დან, სადაც φ_1 და φ_2 ნამდვილ სკალარებს წარმოადგენს $\mathcal{H}_0(\Omega)$ -დან, ხოლო $w = u + iv \in V(\Omega)$, მაშინ ნამრაველი $\varphi w = (\varphi_1 u - \varphi_2 v) + i(\varphi_2 u + \varphi_1 v) \in V(\Omega)$. ამრიგად, $V(\Omega)$ წარმოადგენს $\mathcal{H}(\Omega)$ მოდულს. $V(\Omega)$ -ში ნული $w = 0$ ნულ-ვექტორია. $V(\Omega)$ -დან ნამდვილ ვექტორ-ფუნქციათა $\tilde{V}(\Omega)$ სიმრავლე, ცხადია, $\mathcal{H}(\Omega)$ მოდულია და იგი ქვემოდულია $V(\Omega)$ -დან.

ახლა, ცხადია, რომ $R \in \tilde{V}_0(\Omega)$, ხოლო 1-ლი რანგის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული R_i და R^i ტენზორები $\tilde{V}(\Omega)$ -ს ეკუთვნის. ე. ი.

$$R_i \in \tilde{V}_1(\Omega), \quad R^i \in \tilde{V}^1(\Omega).$$

4. ვექტორული ველების წარმოდგენა მოძრავი ბაზისებით. 1-ლი რანგის ეკვივალენტური ტენზორები. ნებისმიერი w ვექტორ-ფუნქციისათვის $V(\Omega)$ -დან არის ყოველ წერტილში შეიძლება დაეწერათ ორი დაშლა:

$$w = w^i R_i \quad \text{და} \quad w = w_i R^i, \quad (3.8)$$

სადაც (1.4) ტოლობების თანახმად

$$w^i = w R^i, \quad w = w_i R^i. \quad (3.9)$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ w ვექტორ-ფუნქციაა $V_0(\Omega)$ -დან, მაშინ w_i და w^i 1-ლი რანგის შესაბამისად კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორებია $\mathcal{H}(\Omega)$ -დან, ე. ი. $w_i \in \mathcal{H}_1(\Omega)$, $w^i \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, რომლებიც w ვექტორის შესაბამისად კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს წარმოადგენენ მოძრავი ბაზისების მიმართ.

თუ (3.8) და (3.9) ფორმულებში w -ს ნაცვალ აიღებთ R_j და R^j ვექტორ-ფუნქციებს, გვექნება

$$R_j = g_{ji} R^i = g_j^i R_i, \quad R^j = g^{ji} R_i = g_i^j R^i, \quad (3.10)$$

სადაც

$$g_{ij} = g_{ji} = R_i R_j, \quad g^{ij} = g^{ji} = R^i R^j, \quad g_j^i = g_i^j = R^i R_j = \delta_j^i. \quad (3.10 \text{ ა})$$

დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში R_i და R^i ორთოგონალური ორტეზა. ამიტომ

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g^{ij} = \delta^{ij}. \quad (3.11)$$

კოორდინატთა სისტემას ორთოგონალური ეუწოდოთ, თუ ყოველ წერტილში მისი ბაზისის R_1, R_2, R_3 ვექტორები ურთიერთ-პერპენდიკულარულია, ე. ი.

$$R_i R_k = g_{ik} = 0, \quad \text{როცა } i \neq k, \quad (3.12)$$

ტოლობები კოორდინატთა სისტემის ორთოგონალურობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს წარმოადგენს. კოორდინატთა ორთოგონალური სისტემისთვის გვაქვს ფორმულები

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}},$$

$$g^{12} = g^{21} = g^{23} = g^{32} = g^{31} = g^{13} = 0.$$

(3.2) და (3.7) ფორმულების საშუალებით ადვილად ვრწმუნდებით, რომ g_{ij} , g^{ij} და g^i_j სიდიდეები მე-2 რანგის სიმეტრიულ ტენზორებს წარმოადგენს $\mathcal{H}(\Omega)$ -დან, ამასთან $g_{ij} \in \mathcal{H}_2(\Omega)$, $g^{ij} \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, $g^i_j \in \mathcal{H}^1_1(\Omega)$. g_{ij} , g^{ij} და g^i_j ტენზორებს Ω არის პარამეტრიზაციის საბაზისო ტენზორები ეუწოდოთ.

ახლა (3.10) ფორმულების დახმარებით (3.9) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$w_i = g_{ij} w^j, \quad w^i = g^{ij} w_j. \quad (3.13)$$

ამრიგად, კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ ბაზისებსა და $V_0(\Omega)$ -დან ვექტორის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შორის კავშირი მყარდება ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციებით, რომლებიც საბაზისო g_{ij} და g^{ij} ტენზორებით ხორციელდება.

ამგვარად, ნებისმიერი w ვექტორი $V_0(\Omega)$ -დან (3.8) ფორმულების მიხედვით Ω არის ყოველ წერტილში საბაზისო R_i და R^i ვექტორების წრფივი კომბინაციით გამოისახება, ამასთან ვექტორის კომპონენტები დაკავშირებულია (3.13) ფორმულებით. ადვილი დასამტკიცებელია შეზღუდებული დებულება: 1-ლი რანგის ყოველ კოვარიანტულ w_i ტენზორს $\mathcal{H}_1(\Omega)$ -დან და 1-ლი რანგის ყოველ კონტრავარიანტულ w^i ტენზორს $\mathcal{H}^1(\Omega)$ -დან (3.8) ფორმულების მიხედვით შეესაბამებათ w და w' ვექტორები $V_0(\Omega)$ -დან, ამასთან $w = w'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა ω_i და ω^i ტენზორები ერთმანეთთან დაკავშირებულია (3.13) ფორმულებით. შევნიშნოთ, რომ ერთ-ერთი ამ დამოკიდებულებათაგან მეორის შედეგს წარმოადგენს.

შემოვიღოთ ახლა განმარტება. პირველი რანგის ω_i და ω^i ტენზორებს ეკვივალენტური ეუწოდოთ, თუ ისინი (3.13) ტოლობებით არიან დაკავშირებულნი. ცხადია, თუ (3.13) დამოკიდებულებებს ადგილი აქვს ერთ ნებისმიერად დაფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ ისინი საპართლიანი იქნებიან სხვა ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაშიც. როგორც ზემოთ ვნახეთ, 1-ლი რანგის ეკვივალენტური ტენზორებს (3.8) ფორმულების თანახმად შეესაბამებათ ერთი და იგივე w ვექტორი $V_0(\Omega)$ -დან. ამის გამო 1-ლი რანგის ეკვივალენტური ტენზორები ბუნებრივია გაგვიზივოთ შესაბამის ვექტორთან $V_0(\Omega)$ -დან. ამრიგად, არ შეიძლება მათი განხილვა სხვადასხვა ტენზორებად, მითუმეტეს, რომ დეკარტის სისტემაში ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან, რადგან $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}$.

$\mathbb{M}(\Omega)$ მოდულიდან 1-ლი რანგის ორი ეკვივალენტური ტენზორის კლასს ეუწოდოთ 1-ლი რანგის ტენზორი $\mathbb{M}(\Omega)$ -დან და ასეთი კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\overline{\mathbb{M}}_1(\Omega)$ -თი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\mathbb{M}_1(\Omega)$ წარმოადგენს წრფივ (ვექტორულ) სივრცეს $\mathcal{F}_0(\Omega)$ რგოლზე, ე. ი. $\overline{\mathbb{M}}_1(\Omega)$ წარმოადგენს $\mathcal{F}_0(\Omega)$ -მოდულს.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (3.8) ფორმულები აზორციელებს $V_0(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{M}}_1(\Omega)$ იზომორფიზმს.

შეტანხმდეთ, რომ ერთი და იგივე ფუქსიული ასოებით აღნიშნული ტენზორები (მაგალითად, A_i და A^i , a_k და a^k და ა. შ.) ყოველთვის განიხილება ეკვივალენტურ ტენზორებად. მათი კოვარიანტული კომპონენტებიდან კონტრავარიანტულზე და პირიქითი გადასვლა ხორციელდება (3.13) ფორმულებით. ფორმალურად ეს გადასვლები დაიწყანება ინდექსების ვერტიკალურ გადაადგილებაზე ქვემოთ ან ზემოთ. არსებითად ისინი წარმოადგენენ ინდექსების ატანას ან ჩამოტანას, რომლებიც მეტრული g_{ij} და g^{ij} ტენზორებით ხორციელდებიან.

ბილებული შეთანხმების შემდეგ, ცხადია, რომ ინვარიანტული $A^i B_i$ და $A_i B^i$ ჯამები ერთმანეთის ტოლია, რადგან A_i და A^i , B_i და B^i შესაბამისად 1-ლი რანგის ეკვივალენტური ტენზორებია.

ქვემოთ განვაზოგადებთ ტენზორთა ეკვივალენტობის ცნებას ნებისმიერი რანგის ტენზორებისთვის და, გარდა ამისა, განვაზოგადებთ (3.8) ფორმულებს.

5. ვექტორის ფიზიკური კომპონენტები. ვექტორული ანალიზის ელემენტარულ კურსებში ვექტორის კომპონენტები ამავე ვექტორის ორთოგონალური გეგმილებაა დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. მათ ვექტორის ფიზიკური კომპონენტები ეწოდებათ. A ვექტორის ფიზიკურ კომპონენტებს კოორდინატთა (x^i) ღერძზე შემდგომში $A_{(i)}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. განმარტების თანახმად იგი A ვექტორის საბაზისო R_i ვექტორზე გეგმილის ტოლია. ამრიგად

$$A_{(i)} = A \frac{R_i}{|R_i|} = \frac{A R_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ik} A^k}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (3.14).$$

(აქ i ინდექსით შეჯამება არ ჭდება). ეს ფორმულები ამყარებს კავშირს ვექტორის ფიზიკურ, კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შორის.

თუ კოორდინატთა (x) სისტემა დეკარტისაა, მაშინ $g_{ik} = \delta_{ik}$ და

$$A_{(i)} = A_i = A^i. \quad (3.15)$$

ამრიგად, დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ვექტორის ფიზიკური, კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები ერთმანეთს ემთხვევა. ამით აიხსნება ის ფაქტი, რომ ელემენტარულ ვექტორულ ანალიზში, სადაც ძირითადად დეკარტის მართკუთხოვანი კოორდინატთა სისტემით სარგებლობენ, ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები არ განიხილება.

(3.14) ფორმულების დახმარებით შეიძლება გამოვიყვანოთ ვექტორის ფიზიკური კომპონენტების გარდაქმნის ფორმულები ერთი კოორდინატთა სისტემის მეორით შეცვლისას. მაგრამ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ფორმულები მეტად დიდი შოცულობისაა და გამოსაყენებლად მოუხერხებელია. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები ძირითადად ამ უხერხულობათა თავიდან ასაცილებლად განიხილება. ისინი ექვემდებარებიან გარდაქმნის შედარებით მარტივ კანონებს, ვიდრე ფიზიკური კომპონენტები.

§ 4. სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის მეტრული კვადრატული ფორმა

1. მეტრული კვადრატული ფორმა. ds -ით აღვნიშნოთ ორ უსასრულოდ მახლობელ $P(x')$ და $P'(x' + dx')$ წერტილებს შორის მანძილი, გვექნება

$$ds^2 = dR dR = (dR)^2, \quad (4.1),$$

სადაც $dR = \vec{PP'}$. რადგან

$$dR = R_i dx^i, \quad R_i = \partial_i R, \quad (4.2)$$

ამიტომ გვექნება

$$ds^2 = R_i R_k dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (4.3)$$

სადაც

$$g_{ik} = g_{ki} = R_i R_k. \quad (4.4)$$

ინდექსები, ცხადია, 1, 2, 3 მნიშვნელობებს ღებულობენ.

(4.3) კვადრატული ფორმა გამოსახავს მანძილს ორ უსასრულოდ მახლობელ წერტილებს შორის. ამიტომ (4.3)-ის მარჯვენა მხარეს ჩვენ მეტრულ კვადრატულ ფორმას ვუწოდებთ. იგი ფუნდამენტურ როლს თამაშობს ტენზორულ ანალიზში. (4.4)-დან (3.2)-ის თანახმად გამოდის ნარეობს, რომ g_{ik} მე-2 რანგის სიმეტრიული ტენზორია. მას მეტრული კოვარიანტული ტენზორი ეწოდება.

თუ ახლა განვიხილავთ სხვა რაიმე კოორდინატთა (x') სისტემას, ცხადია, გვექნება

$$ds^2 = g'_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'}, \quad g'_{i'k'} = R_{i'} R_{k'}. \quad (4.5)$$

(4.3) და (4.5) ტოლობათა მარცხენა მხარეები ერთნაირია. ამიტომ ნებისმიერი ორი კოორდინატთა (x) და (x') სისტემისათვის გვაქვს

$$g_{ik} dx^i dx^k = g'_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'} \quad (4.6)$$

ტოლობა, რომელიც გვიჩვენებს მეტრული კვადრატული ფორმის ინვარიანტობას კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ.

თუ მივიღებთ მხედველობაში $dx^{i'} = D^{i'}_i dx^i$ ტოლობას, (2.6)-დან მივიღებთ

$$g_{ik} = g'_{i'k'} D^{i'}_i D^{k'}_k \quad (4.7)$$

ფორმულას, რომელიც ადასტურებს, რომ მეტრული კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები შეადგენს მე-2 რანგის კოვარიანტულ ტენზორს. ამ დამტკიცებას ის უპირატესობა აქვს, რომ იგი მიიღება (4.3) კვადრატული ფორმის ინვარიანტობიდან და შეიძლება განზოგადოვდეს რიმანის მრავალსახეობებზე.

ვინაიდან $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ, ამის გამო ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემის მიმართ სრულდება პირობები (იხ. თავი 1, § 5, პუნქტი 3):

$$g_{11} > 0, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0, \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.8)$$

(3.10) ფორმულების თანახმად

$$R^i R_j = g^{ik} g_{kj} = g^i_j = \delta^i_j. \quad (4.9)$$

აქედან გვაქვს

$$\det(g_{ik}) \det(g^{ij}) = 1. \quad (4.10)$$

ამრიგად, (4.8)-ის უკანასკნელი უტოლობის ძალით

$$g = \det(g_{ij}) > 0, \quad \det(g^{ij}) = g^{-1} > 0. \quad (4.11)$$

2. დისკრიმინანტის გარდაქმნის ფორმულა. თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტთა გამრავლების წესს (1 თავი, § 3, პუნქტი 2), (4.7)-დან მივიღებთ

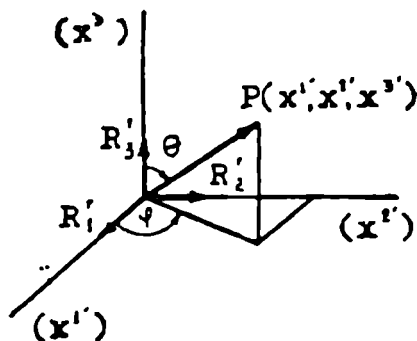
$$g = g' (\det(D'_i))^2 \quad (4.12)$$

ფორმულას, სადაც g და g' მეტრული კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტებია x^i და x'^i კოორდინატების მიმართ:

$$g = \det(g_{ij}), \quad g' = \det(g'_{i'j'}). \quad (4.13)$$

(4.12)-დან გვექნება

$$\det(D'_i) = \pm \sqrt{\frac{g}{g'}}. \quad (4.14)$$



ნახ. 8

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\det(D'_i)$ არეში ნიშანს არ იცვლის. (4.14) ფორმულაში კლუსი ან მინუსი ნიშანი რადიკალის წინ შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა კოორდინატთა ორივე სისტემას შესაბამისად ერთნაირი ან სხვადასხვა ორიენტაცია აქვს.

8. კოორდინატთა სისტემის მაგალითები. მოვიყვანოთ ახლა სივრცის კოორდინატთა სისტემის სამი სხვადასხვა მაგალითი.

1) თუ (x') დეკარტის სისტემაა, მაშინ მისი $R_{i'}$ ბაზისი შედგება ურთიერთორთოგონალური ორთებისაგან. მაშასადამე,

$$g_{i'k'} = R_{i'} R_{k'} = \delta_{i'k'}, \quad (4.15)$$

$$ds^2 = (dx^{1'})^2 + (dx^{2'})^2 + (dx^{3'})^2. \quad (4.16)$$

(4.7) ტოლობას ამ შემთხვევაში აქვს სახე

$$g_{ik} = \sum_{j'=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \quad (4.17)$$

2) ვთქვათ (x) სფერული კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 8), მაშინ, თუ შემოვიღებთ ჩვეულებრივ აღნიშვნებს $x^1=r$, $x^2=\vartheta$, $x^3=\varphi$, გვექნება

$$x^1 = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \vartheta. \quad (4.18)$$

(4.17)-ის თანახმად

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta, \quad g_{ik} = 0, \quad i \neq k. \quad (4.19)$$

მაშასადამე,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (4.20)$$

3) ვთქვათ (x) ცილინდრული კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 9). მაშინ

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi, \quad x^3 = z,$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad (4.21)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (4.22)$$

4. დისკრიმინანტული ტენზორები. ამ პუნქტში კვლავ ევკლი-

დეს სამგანზომილებიან სივრცეს განვიხილავთ. ამრიგად, ინდექსები i მიიღებს 1, 2, 3 მნიშვნელობებს.

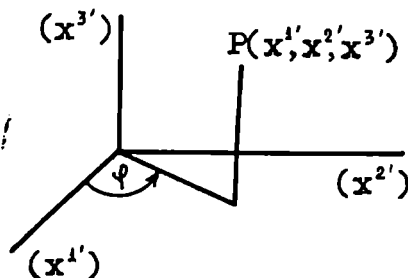
განვიხილოთ საბაზისო ვექტორების შერეული ნამრავლები

$$C_{ijk} = R_i R_j R_k,$$

$$C^{ijk} = R^i R^j R^k,$$

$$C_i{}^{jk} = R_i R^j R^k \text{ და ა. შ. } (4.23)$$

(II,3.23) ფორმულების თანახმად გვაქვს



ნახ. 9

$$C_{123} = R_1 R_2 R_3 = v = \frac{\pm 1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \pm \sqrt{g} \quad (4.24)$$

ტოლობები, რომლებიც ნიშნის სიზუსტით საბაზისო R_1, R_2, R_3 ვექტორებზე აგებული პარალელუბიპედის მოცულობას გამოსახვენ. პლუსი ან მინუსი ნიშანი $\sqrt{g}$ რადიკალის წინ უნდა ავიღოთ შესაბამისად მარჯვენა ან მარცხენა ორიენტაციის კოორდინატთა სისტემისათვის. ლევი-ჩივიტას ϵ_{ijk} სიმბოლოს გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$C_{ijk} = \pm \sqrt{g} \epsilon_{ijk}. \quad (4.25)$$

(II, 3.23) ფორმულების საშუალებით გამოვიყენოთ შემდეგ ტოლობას

$$C^{123} = R^1 R^2 R^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad (4.26)$$

სადაც პლუსი ან მინუსი ნიშანი უნდა ავიღოთ შესაბამისად მარჯვენა ან მარცხენა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში. ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$C^{ilh} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ilh}. \quad (4.27)$$

(4.23) ფორმულიდან უშუალოდ გამოდინარეობს, რომ C_{ijk}, C^{ijk}, C_i^j და ა. შ. მესამე რანგის ტენზორებია. მათ სივრცის დისკრიმინანტული ტენზორები ვუწოდოთ.

ახლა, ცხადია, გვაქვს ტოლობები

$$R_i = \frac{1}{2} C_{ijk} R^j \times R^k, \quad R^i = \frac{1}{2} C^{ilh} R_j \times R_k. \quad (4.28)$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ფორმულები ძალაში რჩება ყრუ ინდექსების მათივე ვერტიკალებზე ნებისმიერი გადაადგილების შემთხვევაშიც.

5. სივრცის მოცულობისა და ზედაპირის ფართის ელემენტები ინვარიანტული ფორმით. (4.24)-ის თანახმად $R_1 dx^1, R_2 dx^2, R_3 dx^3$ ვექტორებზე აგებული ელემენტარული პარალელუბიპედის მოცულობა გამოისახება შემდეგი ფორმულით

$$dv = R_1 R_2 R_3 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.29)$$

ცხადია, ვგულისხმობთ, რომ R_1, R_2, R_3 ტრიედრს აქვს მარჯვენა ორიენტაცია.

ამრიგად, გამოვიყენებთ სივრცის მოცულობის ელემენტის ფორმულა ნებისმიერად აღებულ კოორდინატთა სისტემაში. (4.29) გამოსახულების გეომეტრიული შინაარსის გათვალისწინებით სასურველი იქნება მისი ჩაწერა კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული ფორმით.

ამ მიზნით შემოვიღოთ კოორდინატთა dx^i დიფერენციალების გარე გამრავლების ცნება ზემდგომი წესის მიხედვით⁶

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} = \epsilon^{i_1 i_2 i_3} dx^{i_1} dx^{i_2} dx^{i_3}, \quad (4.30)$$

მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \quad (4.31)$$

გამოსახულება ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ. ეს ერთბაშად გამომდინარეობს იქიდან, რომ C_{ijk} და $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ გამოსახულებები კოორდინატთა შეცვლისას კონტრაგრადიენტულად გარდაიქმნება.

(4.25) და (4.30)-ის ძალით გვაქვს

$$C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \in_{ijk} = 6 \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

აქედან (4.29)-ის თანახმად ვღებულობთ

$$dv = \frac{1}{6} C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \quad (4.32)$$

ფორმულას, რომელიც ეკვლიდეს სივრცის მოცულობის ელემენტს ინვარიანტული ფორმით გამოსახავს. შემდგომში განვაზოგადებთ ამ ფორმულას რიმანის ნებისმიერი განზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში.

R_2 და R_3 , R_3 და R_1 , R_1 და R_2 საბაზისო ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამების ფართობები აღვნიშნოთ შესაბამისად $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ სიმბოლოებით. ცხადია,

⁶ დიფერენციალთა გარე გამრავლებაზე დაშვებული აღრიცხვა, რომელმაც სისტემატური განვითარება და გეომეტრიული გამოყენება მიიღო ე. კარტანის შრომებში [18], თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან შტოს წარმოადგენს.

$$\Sigma_1 = |\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3|, \quad \Sigma_2 = |\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1|, \quad \Sigma_3 = |\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|. \quad (4.33).$$

რადგან

$$\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 = \sqrt{g} \mathbf{R}^1, \quad \mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1 = \sqrt{g} \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = \sqrt{g} \mathbf{R}^3, \quad (4.34)$$

ამიტომ გვაქვს

$$\Sigma_1 = \sqrt{g g^{11}}, \quad \Sigma_2 = \sqrt{g g^{22}}, \quad \Sigma_3 = \sqrt{g g^{33}} \quad (4.35)$$

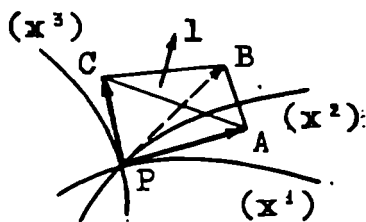
განვიხილოთ ახლა

$$\overrightarrow{PA} = \mathbf{R}_1 dx^1, \quad \overrightarrow{PB} = \mathbf{R}_2 dx^2, \quad \overrightarrow{PC} = \mathbf{R}_3 dx^3$$

ვექტორებზე აგებული ტრიედრი. გარკვეულობისათვის ჯერ დავუშვათ, რომ კოორდინატთა სისტემას მარჯვენა ორიენტაცია აქვს და ყველა $dx^i > 0$. შემდგომში განვთავისუფლებით ამ შეზღუდვისაგან. ეთქვათ $\frac{1}{2} d\Sigma$ აღნიშნავს ტრიედრის ფუძის ფართობს.

ე. ი. P წეროს მოპირდაპირე ABC წახნაგის ფართობს. ეთქვათ, I ამ წახნაგის გარე ნორმალის ორიენტაცია (ნახ. 10). მაშინ (3.4)-ის თანახმად დავწერთ

$$\begin{aligned} Id\Sigma &= \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = (\mathbf{R}_1 dx^1 - \\ &- \mathbf{R}_3 dx^3) \times (\mathbf{R}_2 dx^2 - \mathbf{R}_3 dx^3) = \\ &= \sqrt{g} (\mathbf{R}^1 dx^2 dx^3 + \mathbf{R}^2 dx^3 dx^1 + \\ &+ \mathbf{R}^3 dx^1 dx^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$



ნახ. 10

განვსაზღვროთ dx^1, dx^2, dx^3 დიფერენციალების წყვილ-წყვილი გარე ნამრავლები შემდეგი ფორმულების საშუალებით

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 &= -dx^2 \wedge dx^1 = dx^1 dx^2, \\ dx^2 \wedge dx^3 &= -dx^3 \wedge dx^2 = dx^2 dx^3, \\ dx^1 \wedge dx^3 &= -dx^3 \wedge dx^1 = dx^1 dx^3. \end{aligned} \quad (4.37)$$

მაშინ (4.25)-ის თანახმად (4.36) შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სახითაც

$$Id\Sigma = \frac{1}{2} C_{ijk} \mathbf{R}^i dx^j \wedge dx^k. \quad (4.38)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ 1-ზე, მივიღებთ

$$d\Sigma = \frac{1}{2} C_{ijk} l^i dx^j \wedge dx^k, \quad (4.39)$$

სადაც $l^i = IR^i$ წარმოადგენენ $d\Sigma$ -ს ნორმალის 1 ორტის კონტრავარიანტულ კომპონენტებს. ეს ტოლობა გამოსახავს კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული ფორმით ზედაპირის ისეთი ელემენტის ფართობს, რომლის ორიენტაცია ნორმალის 1 ორტი-თაა მოცემული.

ვთქვათ, $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$, $d\Sigma_3$ იმ პარალელოგრამების ფართობებია, რომლებიც შესაბამისად $\overrightarrow{PB}$ და $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PC}$ და $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PA}$ და $\overrightarrow{PB}$ ვექტორებზეა აგებული. (4.35)-ის თანახმად დავწერთ

$$d\Sigma_1 = \sqrt{g g^{11}} dx^2 dx^3, \quad d\Sigma_2 = \sqrt{g g^{22}} dx^3 dx^1, \\ d\Sigma_3 = \sqrt{g g^{33}} dx^1 dx^2. \quad (4.40)$$

თუ ახლა (4.38) ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავ-ლებთ R_i -ზე, (4.40)-ის თანახმად გვექნება ფორმულები:

$$d\Sigma_1 = \sqrt{g^{11}} l_1 d\Sigma, \quad d\Sigma_2 = \sqrt{g^{22}} l_2 d\Sigma, \quad d\Sigma_3 = \sqrt{g^{33}} l_3 d\Sigma,$$

სადაც l_i წარმოადგენს $d\Sigma$ -ს მიმმართველი 1 ორტის კოვარიანტულ კომპონენტებს.

ეს ფორმულები გამოსახავს P წერტილზე გამავალი საკოორდი-ნატო ზედაპირების ელემენტთა ფართობებს ამავე წერტილზე გამა-ვალი ნებისმიერად ორიენტირებული ელემენტის ფართობის საშუა-ლებით.

§ 5. განაყოფის წესი (თეორემა ტენზორების გაყოფის შესახებ)

დავუბრუნდეთ ახლა ზოგადი $\mathcal{F}^n$ სივრცის შემთხვევას. ამრი-გად, ინდექსები მიიღებს 1, 2, ..., n მნიშვნელობებს.

ზემოთ ვნახეთ, რომ ტენზორების ნამრავლი ისევ ტენზორია. ახლა დავსვათ შებრუნებული ამოცანა, რომელიც გაყოფის ამოცა-ნის ანალოგიურია: თუ ცნობილია, რომ რაიმე მატრიცის ტენზორზე ნამრაველი ყოველთვის ტენზორია, ისმის კითხვა—იქნება თუ არა ეს

მატრიცა ტენზორი? არსებობს ნიშანი, რომელიც საშუალებას იძლევა ამ კითხვას დადებითი პასუხი გაეცეს. ეს ნიშანი, რომელიც განაყოფის წესის სახელწოდებას ატარებს, დიდ როლს თამაშობს ტენზორულ ანალიზსა და მის გამოყენებაში. ჩვენ დავამტკიცებთ ამ წესს ჯერ 1-ლი და მე-2 რანგის ტენზორებისათვის.

ვთქვათ, კოორდინატთა ყოველ სისტემაში მოცემულია რაიმე B_i (1.0)-მატრიცა $\mathfrak{M}(\Omega)$ მოდულიდან. თუ $A^i B_i$ შიგა ნამრავლი ინვარიანტულია 1-ლი რანგის ნებისმიერი კონტრავარიანტული A^i ტენზორისათვის $\mathfrak{M}^1(\Omega)$ -დან, მაშინ B_i 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორი იქნება $\mathfrak{M}_1(\Omega)$ -დან.

მართლაც, პირობის თანახმად, ორი ნებისმიერად ალებული კოორდინატთა (x) და (x') სისტემისათვის გვაქვს

$$A^{i'} B_{i'} = A^i B_i = A^{i'} D_{i'}^i B_i. \quad (5.1)$$

მაშასადამე, $(B_{i'} - B_i D_{i'}^i) A^{i'} = 0$. რადგან პირობის მიხედვით ეს ტოლობა სრულდება ნებისმიერი კონტრავარიანტული A^i ტენზორისათვის $\mathfrak{M}^1(\Omega)$ -დან, ცხადია, წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$B_{i'} = B_i D_{i'}^i,$$

რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

თუ წინასწარ ცნობილია, რომ (5.1) ტოლობაში B_i წარმოადგენს 1-ლი რანგის ნებისმიერი ტენზორის კომპონენტებს $\mathfrak{M}^1(\Omega)$ -დან, მაშინ ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ A^i 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი იქნება $\mathfrak{M}_1^1(\Omega)$ -დან.

ჩამოვყალიბოთ ახლა განაყოფის წესი მე-2 რანგის ტენზორისათვის.

თუ კოორდინატთა ყოველ სისტემაში მოცემულია a_{ik} მატრიცა $\mathfrak{M}(\Omega)$ -დან, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას, რომ $a_{ik} A^i B^k$ შიგა ნამრავლი ინვარიანტია 1-ლი რანგის ნებისმიერი A^i და B^k ტენზორებისათვის $\mathfrak{M}^1(\Omega)$ -დან, მაშინ a_{ik} მატრიცა მე-2 რანგის კოვარიანტული ტენზორი იქნება.

მართლაც, პირობის თანახმად,

$$a_{i'k'} A^{i'} B^{k'} = a_{ik} A^i B^k = a_{ik} D_{i'}^i D_{k'}^k A^{i'} B^{k'}.$$

მაშასადამე,

$$(a_{i'k'} - a_{ik} D_{i'}^i D_{k'}^k) A^{i'} B^{k'} = 0.$$

რადგან აქ A^i და B^k 1-ლი რანგის ნებისმიერი ტენზორებია $\mathcal{T}_1^1(\Omega)$ -დან, ამიტომ წინა ტოლობიდან გვაქვს

$$a_{i,k} = a_{ik} D_i^i, D_k^k,$$

რაც ჩვენს დებულებას ამტკიცებს.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ თუ $a^{ih} A_i B_h$ სახის შიგა ნამრავლი ინვარიანტია 1-ლი რანგის ნებისმიერი A_i და B_h ტენზორებისათვის $\mathcal{T}_1^1(\Omega)$ -დან, მაშინ a^{ih} მატრიცა მე-2 რანგის კონტრაგარიანტული ტენზორი იქნება. ზუსტად ასევე, თუ $a_k^i A_i B^k$ ინვარიანტია 1-ლი რანგის ნებისმიერი კოვარიანტული A_i და კონტრაგარიანტული B^k ტენზორებისთვის, მაშინ a_k^i მატრიცა მე-2 რანგის შერეული ტიპის ტენზორი იქნება.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ სიმეტრიული $a_{ik} = a_{ki}$ მატრიცისათვის ზემოთ მოყვანილი ნიშანი სამართლიანია უფრო შერბილებული ფორმით. თუ $a_{ik} A^i A^k$ ინვარიანტულია 1-ლი რანგის ნებისმიერი კონტრაგარიანტული A^i ტენზორისთვის, მაშინ a_{ik} მატრიცა მე-2 რანგის სიმეტრიული კოვარიანტული ტენზორი იქნება.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $A^i = B^i + C^i$, სადაც B^i და C^i წარმოადგენს 1-ლი რანგის ნებისმიერ კონტრაგარიანტულ ტენზორებს, გვექნება

$$a_{ik} A^i A^k = a_{ik} (B^i + C^i) (B^k + C^k) = a_{ik} B^i B^k + a_{ik} C^i C^k + a_{ik} B^i C^k + a_{ik} B^k C^i.$$

რადგან, პირობის თანახმად $a_{ik} A^i A^k$, $a_{ik} B^i B^k$ და $a_{ik} C^i C^k$ ინვარიანტებს წარმოადგენს, ხოლო a_{ik} -ს სიმეტრიულობის თვისების გამო $a_{ik} B^i C^k = a_{ik} B^k C^i$, ამიტომ წინა ტოლობიდან გვექნება, რომ $a_{ik} B^i C^k$ ინვარიანტია. მაგრამ აქ B^i და C^i 1-ლი რანგის ნებისმიერი კონტრაგარიანტული ტენზორებია. მაშასადამე, ზემოთ დამტკიცებულის ძალით, a_{ik} მატრიცა მე-2 რანგის კოვარიანტულ ტენზორს წარმოადგენს.

ახლა უკვე შეგვიძლია განაყოფის წესი ჩამოვყალიბოთ ზოგადი სახით.

ვთქვათ, კოორდინატთა ყოველ სისტემაში მოცემულია შემდეგი სახის მატრიცა

$$a_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_p}, \quad (5.2)$$

რომლის კომპონენტები რაიმე $\mathcal{M}(\Omega)$ მოდულს ეკუთვნის. ვთქვათ

1-ლი რანგის ნებისმიერი კოვარიანტული $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ და კონტრავარიანტული $B^{k_1}, \dots, B^{k_s}$ ტენზორებისათვის, შესაბამისად $\mathfrak{M}_1(\Omega)$ და $\mathfrak{M}^1(\Omega)$ -დან, სადაც $r \leq p$, $s \leq q$,

$$b_{k_{s+1} \dots k_p}^{i_{r+1} \dots i_q} = a_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} b_{k_{s+1} \dots k_p}^{i_{r+1} \dots i_q} A_{i_1}^{(1)} \dots A_{i_r}^{(r)} B^{k_1}_{(1)} \dots B^{k_s}_{(s)}$$

სახის მატრიცა წარმოადგენს $(p-r, q-s)$ ტიპის ტენზორს. მაშინ (5.2) მატრიცა (p, q) ტიპის ტენზორია $\mathfrak{M}_p^q(\Omega)$ -დან.

დამტკიცება აქ წინას ანალოგიურად შეიძლება ჩავატაროთ.

§ 6. დისკრიმინანტული, შებრუნებადი და ფარდობითი ტენზორები

1. დისკრიმინანტული ტენზორები. ვთქვათ, a_{ik} მე-2 რანგის კოვარიანტული ტენზორია. x^i კოორდინატების სხვა x'^i კოორდინატებით შეცვლისას გვექნება

$$a_{ik} = a_{i'k'} D_{i'}^{i'} D_{k'}^{k'}. \quad (6.1)$$

ინდექსები 1, 2, ..., n მნიშვნელობებს ღებულობს.

დეტერმინანტთა გამრავლების წესს თუ გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$\det(a_{ik}) = (\det(D_{k'}^{k'}))^2 \det(a_{i'k'}). \quad (6.2)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\det(a_{ik})$ ნულის ტოლია (შესაბამისად, ნულისაგან განსხვავდება) ერთ ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ იგი ნულის ტოლია (შესაბამისად, ნულისაგან განსხვავდება) სხვა ნებისმიერი სისტემის მიმართაც. ამრიგად, მე-2 რანგის ტენზორის ეს თვისება წარმოადგენს ინვარიანტულ (კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან დამოუკიდებელ) თვისებას. $a = \det(a_{ik})$ -ს ვუწოდოთ ტენზორის დისკრიმინანტი. ვიტყვი, რომ მე-2 რანგის a_{ik} ტენზორი განსაკუთრებულია (შესაბამისად, არაგანსაკუთრებული) წერტილში ან არეში, თუ $\det(a_{ik}) = 0$ (შესაბამისად, $\det(a_{ik}) \neq 0$) წერტილში ან არეში.

დავამტკიცოთ, რომ მატრიცა

$$C_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{a} \in i_1 \dots i_n, \quad a = \det(a_{ik}) \neq 0, \quad i, k \in [1, n], \quad (6.3)$$

სადაც $\in i_1 \dots i_n$ ლევი-ჩივიტას სიმბოლოა, წარმოადგენს n -ური რანგის კოვარიანტულ ტენზორს. x' კოორდინატების ახალი x'' კოორდინატებით შეცვლისას (6.2) და (6.3)-ის თანახმად გვექნება (ვგულისხმობთ, რომ ორივე სისტემას ერთი და იგივე ორიენტაცია აქვს)

$$C_{i'_1 \dots i'_n} = \sqrt{a'} \in i'_1 \dots i'_n = \sqrt{a} \det(D_{i'_k}^k) \in i'_1 \dots i'_n$$

(I, 3.4 ა) ფორმულების გამოყენებით ეს ტოლობა შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$C_{i'_1 \dots i'_n} = \sqrt{a} \in i_1 \dots i_n D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_n}^{i_n} = C_{i_1 \dots i_n} D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_n}^{i_n}, \quad (6.4)$$

რაც ჩვენს დებულებას ამტკიცებს.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$C^{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \in i_1 \dots i_n, \quad a = \det(a_{ik}) \neq 0, \quad (6.5)$$

მატრიცა n -ური რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს წარმოადგენს. რადგან $C_{i_1 \dots i_n}$ და $C^{i_1 \dots i_n}$ ტენზორები მე-2 რანგის ტენზორის დისკრიმინანტით გამოისახება, ამიტომ მათ დისკრიმინანტული ტენზორები ეწოდებათ. ეს ტენზორები ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული (§ 4, პუნქტი 4) ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის დისკრიმინანტული C_{ijk} და C^{ijk} ტენზორების განზოგადებებია მრავალგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევისათვის. მათ რიჩისა და ლევი-ჩივიტას ფუნდამენტური ტენზორები ეწოდებათ.

2. შებრუნებული ტენზორები. დავუშვათ კვლავ, რომ მე-2 რანგის a_{ik} ტენზორი არაგანსაკუთრებულია, $a = \det(a_{ik}) \neq 0$. განვიხილოთ შებრუნებული a^{ik} მატრიცა, რომელიც, როგორც ზემოთ ვნახეთ (თავი 1, § 3, პუნქტი 4), აკმაყოფილებს ტოლობებს

$$a_{ij} a^{kl} = a_{ij} \delta^{kl} = \delta_{ij}^k. \quad (6.6)$$

რადგან x' კოორდინატების ახალი x'' კოორდინატებით შეცვლისას

$$a_{ij} = a_{i'j'} D_{i'}^{i''} D_{j'}^{j''}, \quad \delta_{ij}^k = \delta_{i'j'}^{k'} D_{i'}^{i''} D_{j'}^{j''},$$

ამიტომ (6.6) განტოლება ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$a_{i'j'} D_{i'}^{i''} D_{j'}^{j''} a^{kl} = \delta_{i'j'}^{k'} D_{i'}^{i''} D_{j'}^{j''}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს $D_k^i D_l^j$ -ზე გავამრავლებთ და მხედველობაში მივიღებთ (1. 2 ბ) ტოლობებს, მივიღებთ

$$a_{j,i}, a^{k',i'} = \delta_{i'}^{k'} \quad (6.7)$$

განტოლებებს, სადაც

$$a^{k',i'} = D_k^i D_l^j a^{k,l}. \quad (6.8)$$

მაგრამ (6.2)-ის თანახმად $\det(a_{j,i}) \neq 0$ და, მაშასადამე, განტოლებათა (6.7) სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. იგი გამოისახება (6.8) ფორმულით, ეს კი ნიშნავს, რომ $a^{k,l}$ მე-2 რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამრიგად, მე-2 რანგის ყოველი არაგანსაკუთრებული $a_{i,k}$ კოვარიანტული ტენზორისთვის არსებობს მე-2 რანგის შებრუნებული კონტრავარიანტული $a^{i,k}$ ტენზორი. ცხადია, სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც. ურთიერთშებრუნებული არაგანსაკუთრებული ტენზორების დეტერმინანტები დაკავშირებულია ტოლობით

$$\det(a_{i,k}) \det(a^{p,q}) = 1. \quad (6.9)$$

3. ფარდობითი ტენზორები. ტენზორულ ანალიზში გვხვდება სიდიდეები, რომლებიც კოორდინატთა გარდაქმნისას მრავალდებიან გარდაქმნის ფუნქციონალური დეტერმინანტის (იაკობიანის) რაიმე ხარისხზე. ასეთ სიდიდეს, როგორც (6.2) ფორმულა გვიჩვენებს, წარმოადგენს, მაგალითად, მე-2 რანგის ნებისმიერი არაგანსაკუთრებული ტენზორის დისკრიმინანტი.

ვამბობთ, რომ $A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ (p, q)-მატრიცა შეადგენს $(p+q)$ რანგის და s რიგის ფარდობით ტენზორს, თუ x^i კოორდინატებიდან $x^{i'}$ კოორდინატებზე გადასვლისას იგი გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულით

$$A_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_q} = (\det(D_{i'}^i))^s A_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_q}^{i_q} D_{j'_1}^{j_1} \dots D_{j'_p}^{j_p}. \quad (6.10)$$

კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ფარდობითი ტენზორების მაგალითებს წარმოადგენს ლევი-ჩივიტას სიმბოლოები. (6.2), (6.4) და (6.5) ფორმულების თანახმად ისინი შემდეგნაირად გარდაიქმნება

$$\begin{aligned} \in i_1' \dots i_n' &= |\det (D_k^i)|^{-1} \in i_1 \dots i_n D_{i_1}^{i_1'} \dots D_{i_n}^{i_n'}, \\ \in i_1' \dots i_n' &= |\det (D_k^i)| \in i_1 \dots i_n D_{i_1}^{i_1'} \dots D_{i_n}^{i_n'}. \end{aligned} \quad (6.10 \text{ ა})$$

ამრიგად, $\in i_1 \dots i_m$ და $\in i_1' \dots i_m'$ წარმოადგენს შესაბამისად $s=-1$ და $s=1$ რიგის ფარდობით ტენზორებს. ამ ტენზორებს ლევი-ჩივიტას სიმკვრივეები ეწოდება.

§ 7. რიმანის სივრცის ტენზორები

ტენზორული ალგებრის აგებისას აქამდე არ გამოგვიყენებია $\mathcal{M}^n$ სივრცის წერტილებს შორის ჩენთვის ჩვეული მანძილის ცნება. $\mathcal{M}^n$ სივრცის წერტილთა x -მიდამოს განმარტებაში ვიყენებდით ევკლიდური მანძილის ცნებას წერტილებს შორის. ასლა განვიხილავთ $\mathcal{M}^n$ სივრცეთა (მრავალსახეობათა) კლასს, რომლებზედაც განმარტებული იქნება სივრცის წერტილებს შორის მანძილის გამომსახველი ინვარიანტული მეტრიკა. ეს, რა თქმა უნდა, საშუალებას მოგვცემს ავაგოთ უფრო შინაარსიანი და ფაქტებით მდიდარი ტენზორული ანალიზი.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ ინდექსები (ყრუ და განუსაზღვრელი) ლებულობს $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობას.

1. ინვარიანტული მეტრიკა $\mathcal{M}^n$ -ში. რიმანის მრავალსახეობები. ქვემოთ ვიხილავთ მრავალსახეობებს ისეთი მეტრიკით, რომელიც ორ მახლობელ x და $x+dx$ წერტილებს შორის მანძილის კვადრატს გამოსახავს კოორდინატთა სისტემის გაარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული, დადებითად განსაზღვრული შემდეგი კვადრატული ფორმით:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad (7.1)$$

სადაც g_{ik} ნამდვილი სიმეტრიული კვადრატული $(n \times n)$ -მატრიცაა,

$$g_{ik} = g_{ki}. \quad (7.2)$$

ამ მატრიცის ელემენტები, საზოგადოდ, წერტილის კოორდინატების ფუნქციებია. განაყოფის წესის თანახმად, სიმეტრიულობის (7.2) პირობიდან და (7.1) ფორმის ინვარიანტობიდან გამომდინა-

რეობს, რომ g_{ik} წარმოადგენს მე-2 რანგის სიმეტრიულ კოვარიანტულ ტენზორს. ამას გარდა, (7.1) კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობა ნიშნავს, რომ მრავალსახეობის ყოველ წერტილში სრულდება (თავი 1, § 5, 3. 3)

$$g_{11} > 0, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{1n} \\ g_{n1} & g_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (7.3)$$

უტოლობები, რომლებიც (7.1) ფორმის დადებითად განსაზღვრულობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს შეადგენენ. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ ეს პირობები შესრულებულია რაიმე ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ მათ ადგილი აქვთ სივრცის ნებისმიერი სხვა პარამეტრიზაციის მიმართაც. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (7.1) კვადრატული ფორმის ინვარიანტობიდან.

მრავალსახეობას, რომელზედაც მეტრიკა განმარტებულია დადებითად განსაზღვრული (7.1) კვადრატული ფორმის სახით, რიმანის მრავალსახეობა ან რიმანის n -განზომილებიანი სივრცე ეწოდება. n ტენზორს რიმანის სივრცის მეტრიკული ტენზორი ეწოდება. ევკლიდეს n -განზომილებიანი სივრცე რიმანის მრავალსახეობის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. მასში არსებობს ისეთი კოორდინატთა სისტემა, რომელშიც მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები მუდმივ მნიშვნელობებს ღებულობს. მაშინ, როგორც ეს ზემოთ დავამტკიცეთ (თავი 1, § 5), (7.1) კვადრატული ფორმა შეიძლება დავიყვანოთ შემდეგ სახეზე

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2. \quad (7.4)$$

კოორდინატთა შესაბამის სისტემას დეკარტული ვუწოდოთ. ამრიგად, ევკლიდეს სივრცეში გლობალურად არსებობს დეკარტის კოორდინატთა სისტემა.

რიმანის მრავალსახეობაზე, საზოგადოდ, არ არსებობს კოორდინატთა გლობალურად დეკარტული სისტემა. მაგრამ მრავალსახეობის ფიქსირებული x_0 წერტილისთვის ყოველთვის შეიძლება აიგოს კოორდინატთა სისტემა, რომლისთვისაც ამ წერტილში მეტრიკული კვადრატული $g_{ik} dx^i dx^k$ ფორმა კანონიკურ (7.4) სახეს ღებულობს. შემდგომში ასეთ სისტემას x_0 წერტილში ლოკალურად დეკარტულს ვუწოდებთ.

მიუხედავად იმისა, რომ რიმანის მრავალსახეობებზე არ გვაქვს გლობალური დეკარტული კოორდინატთა სისტემა, მათზე, (7.1) მეტრული კვადრატული ფორმის გამოყენებით, ბერხდება ევკლიდეს გეომეტრიის მრავალი ფაქტის განზოგადება. რიგ შემთხვევაში ამ განზოგადებებს წმინდა ფორმალური ხასიათი აქვს და ადვილად ხორციელდება ტენზორული ანალიზის მეთოდებით. ზოგიერთ განზოგადებას კი მივყავართ ისეთ ახალ ფაქტებამდე, რომლებიც ამჟღავნებენ ევკლიდესა და რიმანის სივრცეებს შორის განსხვავებას. ეს განსხვავება ხასიათდება მე-4 რანგის გარკვეული ტენზორით, რომელიც მეტრული g_{ik} ტენზორით გამოისახება და, რომელსაც რიმანის ან სიმრუდის ტენზორი ეწოდება. ევკლიდეს სივრცის შემთხვევაში ეს ტენზორი ნულის ტოლია იგივეურად (იხ. ქვემოთ, თავი IV, § 3, პუნქტი 8).

ქვემოთ განსაკუთრებით განიხილება ტენზორული ანალიზი რიმანის ორგანზომილებიანი მრავალსახეობისათვის. ასეთი მრავალსახეობა მიიღება, ყოველ შემთხვევაში, ლოკალურად, ისეთ ზედაპირებზე, რომლებიც ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეშია ჩადგმული. ამ შემთხვევის განხილვა საყურადღებოა ერთი მხრივ იმის გამო, რომ რიმანის მრავალსახეობას ენიჭება მეტისმეტად თვალსაჩინო და რეალური შინაარსი, ხოლო მეორე მხრივ, ორგანზომილებიანი მრავალსახეობისთვის შექმნილი ტენზორული ანალიზის ის აპარატი, რომელიც აიგება თვალსაჩინო გეომეტრიული წარმოდგენების საფუძველზე, ადვილად გადაიტანება მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისათვის.

ახლა კვლავ დავუბრუნდეთ ზოგად — რიმანის n -განზომილებიანი მრავალსახეობის შემთხვევას და ტენზორული ალგებრა შევავსოთ იმ ფაქტებით, რომლებიც ემყარებიან სივრცის მეტრიკის განხილვას.

შემდგომში დაგვკირდება კონტრავარიანტული მეტრული g^{ik} ტენზორის განხილვა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$g_{ik} g^{jl} \equiv \delta_{ij} \delta^{kl} = \delta_i^k \quad (7.5)$$

მაშასადამე, g^{ik} წარმოადგენს g_{ik} ტენზორის შებრუნებულს. რადგან $\det(g_{ik}) \neq 0$, ამიტომ g^{ik} ყოველთვის არსებობს და იგი წარმოადგენს მე-2 რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს (იხ. § 6, პუნქტი 2). ამას

გარდა, g_{ik} ტენზორის სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს g^{ik} ტენზორის სიმეტრიულობა, ე. ი.

$$g^{ik} = g^{ki}. \quad (7.6)$$

ამ ორი ურთიერთშებრუნებული g_{ik} და g^{ik} ტენზორის გამოყენებით ქვემოთ განვაზოგადებთ ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციებს რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობის შემთხვევაში. ამას გარდა, შემოვიყვანთ ტენზორების ეკვივალენტობის ცნებას და ზოგადად განვმარტავთ ნებისმიერი რანგის ტენზორის რიმანის მრავალსახეობაზე.

(6.3) და (6.5)-ის თანახმად რიმანის n -განზომილებიან მრავალსახეობაზე შეიძლება განვმარტოთ დისკრიმინანტული ტენზორები

$$C_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{g} \in i_1 \dots i_n, \quad g = \det (g_{ij}) > 0, \quad (7.7)$$

$$C^{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \in i_1 \dots i_n, \quad (7.8)$$

რომლებსაც, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, რიჩი და ლევი-ჩივიტას ფუნდამენტური ტენზორები ეწოდებათ.

განვაზოგადოთ აგრეთვე § 4-ის მე-5 პუნქტში შემოყვანილი კოორდინატთა dx^i დიფერენციალების გარე გამრავლების ცნება რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობის შემთხვევაში

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \epsilon^{i_1 \dots i_n} dx^1 \dots dx^n \quad (7.9)$$

ფორმულის საშუალებით. მაშინ ინვარიანტული

$$d\Omega = \frac{1}{n!} C_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \quad (7.10)$$

ფორმულით განვმარტავთ მოცულობის ელემენტს რიმანის n -განზომილებიან მრავალსახეობაზე. (7.6) და (7.8)-ის თანახმად ეს ფორმულა ლებულობს სახეს

$$d\Omega = \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n. \quad (7.11)$$

მე-5 სიმრავლის ზომა განვმარტოთ ინვარიანტული ფორმულით

$$\text{mes } \Omega = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n. \quad (7.12)$$

თუ $\text{mes} \Omega = 0$, მაშინ Ω ნული ზომის სიმრავლეა.

2. ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები. როგორც (3.13) ფორმულებიდან ჩანს, ევკლიდეს სივრცეში კოვარიანტული კომპონენტებიდან კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე გადასვლა და პირიქით ფორმალურად ხორციელდება ინდექსების გადაადგილების მეშვეობით სათანადო ვერტიკალებზე ქვემოდან ზემოთ და ზემოდან ქვემოთ. ამ ოპერაციებს ინდექსთა ატანა და ჩამოტანა ეწოდება. ისინი ხორციელდებიან მეტრული g_{ik} და g^{ik} ტენზორების საშუალებით (3.13) ტოლობებში მოცემული წესების მიხედვით. ჩვენ ახლა ამ ოპერაციებს განვაზოგადებთ რიმანის ნებისმიერი განზომილების მრავალსახეობის შემთხვევაში. აღსანიშნავია, რომ ტენზორული ანალიზის ამ მნიშვნელოვანი ოპერაციების მითითებული ფორმალიზაცია 3-ის მე-4 პუნქტში მიღწეულია აღნიშვნათა მოხერხებული არჩევით. სახელდობრ, ჩვენ შევთანხმდით შევინარჩუნოთ ფუძისეული A ასო, რომელიც მიგვითითებს განსახილველ რეალურ ობიექტზე — აღებულ შემთხვევაში ვექტორზე, ზოლო მისი კომპონენტების სხვადასხვა ტიპებს ვანსხვავებთ ინდექსების მდებარეობით — კოვარიანტული კომპონენტების აღსანიშნავად ფუძისეულ ასოს მიეწერება ქვედა ინდექსები, ხოლო კონტრავარიანტულის აღსანიშნავად — ზედა ინდექსები. ამ შეთანხმებას ჩვენ შევინარჩუნებთ რიმანის მრავალსახეობის შემთხვევაშიც. ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების შესასრულებლად, ცხადია, მათ შესაძლებლობა უნდა ჰქონდეთ ფუძისეული ასოს გასწვრივ ვერტიკალზე ქვემოდან ზემოთ ან პირიქით გადაადგილდნენ. 1-ლი რანგის ტენზორის შემთხვევაში ეს პირობა ავტომატურად სრულდება, რადგან მხოლოდ ერთი ქვედა ან ზედა ინდექსი გვაქვს. მაგრამ რამდენიმე ინდექსის შემთხვევაში ეს შესაძლოა ასე არ იყოს; თუ ქვედა და ზედა ინდექსები ერთ ვერტიკალზეა მოთავსებული. ამიტომ ერთზე მაღალი რანგის ტენზორების განხილვის დროს უნდა გამოვიყენოთ ინდექსების განლაგების ისეთი წესი, რომელიც მათი ქვემოდან ზემოთ ან პირიქით ვერტიკალური გადაადგილების საშუალებას მოგვცემს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი ინდექსისათვის უნდა დავაფიქსიროთ შესაბამისი ვერტიკალი. თუ ზემოგანხილული A_i, A^i, g_{ij}, g^{ij} ტენზორების აღნიშვნებს გავიხსენებთ, შევნიშნავთ, რომ ეს პირობები დაცულია; ყოველი ქვედა (კოვარიანტული) და ყოველი ზედა (კონტრავარიან-

ტული) ინდექსის ვერტიკალზე თავისუფალი ადგილია დატოვებული. მოხერხებულია თავისუფალი ადგილები შეივსოს წერტილებით, როცა ქვემოთ და ზემოთ თითო ინდექსი მაინც გვაქვს. სხვა შემთხვევაში, როცა ყველა ინდექსი ქვედაა ან ზედაა, წერტილები შეიძლება არ დავსვათ. ინდექსების განლაგების ეს წესი, რომელსაც ქვემოთაც შევინარჩუნებთ ნებისმიერი რანგის ტენზორებისთვის, შესაძლებლობას გვაძლევს ინდექსები ვერტიკალის გასწვრივ ზემოდან ქვემოთ ან ქვემოდან ზემოთ თავისუფლად გადავადგილოთ სხვა ინდექსების შევიწროების გარეშე. ეს შეთანხმებები არსებითია ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების ფორმალიზაციისათვის. ამასთან შევნიშნოთ, რომ ინდექსთა განლაგების ამ წესის აუცილებელი გამოყენება ყოველთვის სავალდებულო არ არის. ხშირ შემთხვევებში, როცა ლაპარაკია შერეული ტიპის რაიმე ტენზორზე, შესაძლოა ვისარგებლოთ $A \begin{smallmatrix} i_1 \\ i_1 \end{smallmatrix} \dots \begin{smallmatrix} i_n \\ i_p \end{smallmatrix}$ სახის აღნიშვნით. კონტექსტიდან ყოველთვის ცხადი იქნება, როდის არ მივყავართ წესიდან ასეთ გადახვევებს გაუგებრობამდე.

ახლა მოვიყვანთ ზუსტ განმარტებას ინდექსთა ატანის და ჩამოტანის ოპერაციებისა, რომლებიც ფუნდამენტურ როლს თამაშობენ ტენზორულ ანალიზში. ისინი ტენზორის ცნების განზოგადების საშუალებას იძლევიან.

თავდაპირველად განვმარტოთ ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები 1-ლი რანგის ტენზორებისათვის, შემდეგ კი განვაზოგადოთ ისინი ნებისმიერი რანგის ტენზორებისათვის.

ვთქვათ A_i 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორია. თუ A_i ტენზორს გავამრავლებთ კონტრაგარიანტულ მეტრიულ g^{ik} ტენზორზე და ინდექსთა ნებისმიერ წყვილს შევკვეთთ, მივიღებთ 1-ლი რანგის კონტრაგარიანტულ ტენზორს (იხ. § 2, პუნქტი)

$$A^i = g^{ij} A_j. \quad (7.13)$$

ამრიგად, ეს ოპერაცია 1-ლი რანგის კოვარიანტულ A_i ტენზორს გარდაქმნის იმავე რანგის კონტრაგარიანტულ A^i ტენზორად. თუ ამ ოპერაციას ფორმალურად განვიხილავთ, დავინახავთ, რომ მისი გამოყენების შედეგად ხდება ინდექსის ატანა — ქვედა, კოვარიანტული, ინდექსი აღის ზემოთ და, ამრიგად, იქცევა კონტრაგარიანტულ ინდექსად. აღსანიშნავია, რომ ამ დროს ტენზორის რანგი არ იცვლება.

ვთქვათ ახლა გვაქვს 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული A^i ტენზორი. მისი g_{ik} -ზე გამრავლებით და ინდექსების შეკვეცით მივიღებთ 1-ლი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს

$$A_i = g_{ij} A^j. \quad (7.14)$$

ფორმალურად ჩვენ განვახორციელებთ ზედა ინდექსის ჩამოტანა ქვემოთ, ე. ი. კონტრავარიანტული ინდექსიდან გადავედით კოვარიანტულზე. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიაც ტენზორის რანგი არ იცვლება. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ კონტრავარიანტული A^i ტენზორი მიიღება კოვარიანტული A_i ტენზორისაგან ინდექსის ატანის ოპერაციის შედეგად, მაშინ, პირიქით, A_i მიიღება A^i -გან ინდექსის ჩამოტანის ოპერაციით. დასამტკიცებლად უნდა ვისარგებლოთ (7.5) ფორმულით.

ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები ადვილად შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორებზე. საკმარისია ამ მიზნით განვიხილოთ მე-2 რანგის ტენზორი. მაგალითად, თუ გვაქვს მე-2 რანგის კოვარიანტული a_{ik} ტენზორი, მაშინ ინდექსთა ატანის ოპერაციის საშუალებით შეგვიძლია მე-2 რანგის შემდეგი ტენზორების აგება:

$$a^i_k = g^{ij} a_{jk}, \quad a^i_j = g^{ik} a_{kj}, \quad a^{ik} = g^{ij} g^{kl} a_{jl}.$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ ოთხი a^i_k , a^i_j , a^{ik} , a_{ik} ტენზორიდან ერთერთს თუ გამოსავალად ავიღებთ, დანარჩენი ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციით შეიძლება მივიღოთ, მაგალითად,

$$a^i_k = g^{ij} g_{kl} a^l_j \text{ და ა. შ.}$$

კერძოდ, თუ ამ ოპერაციებს მეტრულ g_{ik} და g^{ik} ტენზორებზე გამოვიყენებთ, მივიღებთ შერეული ტიპის მეტრულ ტენზორს, რომელიც δ^i_k -ს ემთხვევა:

$$g^i_k = g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \quad (7.15)$$

უნდა ითქვას, რომ აქ არაა აუცილებელი g^i_k -ს განსხვავება g^i_k -გან, რადგან ისინი ერთმანეთის ტოლია g_{ik} ტენზორის სიმეტრიულობის გამო. იგივე სიტუაცია გვაქვს ნებისმიერი სიმეტრიული $a_{ik} = a_{ki}$ ტენზორის შემთხვევაშიც. მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $a^i_k = a^k_i$ და, მაშასადამე, შეგვიძლია უბრალოდ a^i_k დავწეროთ. ზოგად შემთხვევაში არასიმეტრიული ტენზორისათვის a^i_k და a^k_i , საზოგადოდ, სხვადასხვაა.

8. ტენზორთა ეკვივალენტური კლასები. ტენზორის ზოგადი ცნება. ახლა შევნიშნოთ, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში (7.14) ტოლობები ლებულობს

$$A_i = A^i \quad (7.16)$$

სახეს. ეს გარემება მიგვითითებს, რომ ევკლიდეს სივრცეში კოვარიანტული და კონტრავარიანტული A_i და A^i ტენზორები, რომლებიც (7.14) ტოლობებით არიან დაკავშირებული, არ შეიძლება განვიხილოთ როგორც კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან დამოუკიდებელი, განსხვავებული ობიექტები. მართლაც, ასეთ შემთხვევაში მივიღებდით წინააღმდეგობას, რადგან დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ვერ აღმოვაჩენდით მათ შორის განსხვავებას. საკვებით ანალოგიური სიტუაცია გვაქვს მაღალი რანგის ტენზორებისათვის, რომლებიც ერთმანეთში გადადიან ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების (ერთჯერადი ან მრავალჯერადი) გამოყენების შედეგად. ეს გარემოება მიგვითითებს შემდეგი განმარტების მიზანშეწონილობაზე.

ვამბობთ, რომ n -ური რანგის ორი ტენზორი ეკვივალენტურია, თუ ერთი მიიღება მეორისაგან ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების (ერთჯერადი ან მრავალჯერადი) გამოყენების შედეგად მეტრული g_{ik} და g^{ik} ტენზორების მეშვეობით.

n -ური რანგის ეკვივალენტური ტენზორების კლასს n -ური რანგის ტენზორი ეწოდება.

ამ განმარტების თანახმად, ერთი და იგივე რანგის ტენზორები, რომელთა აღნიშვნებში ერთი და იგივე ფუძისეული ასო მონაწილეობს, შემდგომში განიხილება როგორც ეკვივალენტური ტენზორები, ე. ი. როგორც შესაბამისი რანგის ერთი და იგივე ტენზორის სხვადასხვა ტიპის კომპონენტები.

ეკვივალენტური ტენზორების მიმართ მიღებული ეს შეთანხმება საშუალებას იძლევა ტენზორების შიგა ნამრავლთა გამოსახულებებში ყრუ ინდექსები თავისუფლად გადაადგილდეს შესაბამის ვერტიკალებზე. მაგალითად $A^i B_i = A_i B^i$. $a_{i;k} = a^i_{;k}$.

თუ A და B წარმოადგენს p რანგის ტენზორებს ელემენტებით შესაბამისად $\mathcal{S}$ (Ω) და $\mathcal{M}$ (Ω) მოდულებიდან, მაშინ, როგორც ეს ადვილად გამომდინარეობს (2.12) ფორმულიდან, მათი შიგა ნამრავლი კომუტაციურია:

$$AB = BA. \quad (7.17)$$

მართლაც, რადგან ყრუ ინდექსები შეიძლება გადაადგილდეს შესაბამის ვერტიკალებზე, გვექნება

$$AB = A_{i_1 \dots i_p} B^{i_1 \dots i_p} = B_{i_1 \dots i_p} A^{i_1 \dots i_p} = BA.$$

ვამბობთ, რომ A ტენზორი ელემენტებით $\mathcal{Z}(\Omega)$ -დან იზოტროპულია x წერტილში, თუ ამ წერტილში

$$AA = A^2 = 0. \quad (7.18)$$

ტენზორი იზოტროპულია არეში, თუ იგი ამ არის ყოველ წერტილში იზოტროპულია.

დავამტკიცოთ, რომ ნამდვილი იზოტროპული ტენზორი ნულის ტოლია. მართლაც, თუ რაიმე x წერტილში სრულდება (7.18) პირობა, მაშინ ამ წერტილის მიმართ ლოკალურად დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში (7.16) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$A^2(x) = A_{i_1 \dots i_p}(x) A^{i_1 \dots i_p}(x) = \sum (A_{i_1 \dots i_p}(x))^2.$$

რადგან პირობის თანახმად A ნამდვილი ტენზორია, ამიტომ $A(x) = 0$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამრიგად, არანულოვან იზოტროპულ ტენზორებს კომპლექსურმნიშვნელობებიანი კომპონენტები უნდა ჰქონდეს.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ზემოთ აღნიშნულ შეთანხმებებს, როცა ტენზორებზე ვლაპარაკობთ, საკმარისი იქნება მივუთითოთ მისი ერთი რომელიმე ტიპის კომპონენტებზე. ასე მაგალითად, a_{ik} ტენზორის ქვეშ ვგულისხმობთ მისი ეკვივალენტური მე-2 რანგის ტენზორების კლასს. მაგრამ ზოგჯერ ტენზორის დასახელებისას მიზანშეწონილია არ მივუთითოთ მისი კომპონენტების ერთ რომელიმე სპეციალურ სახეზე. ასეთ შემთხვევებში ტენზორს აღვნიშნავთ შესაბამისი ფუძისეული ასოს მსხვილი შრიფტით და დავასახელებთ მის რანგს. მაგალითად, მე-2 რანგის $\mathfrak{a}$ ტენზორი — ნაცვლად a_{ik} ტენზორისა.

§ 8. ტენზორთა ლოკალურად ჰილბერტული მოდულები

ამ პარაგრაფში შევისწავლით ტენზორული ალგებრის რამდენიმე ზოგად საკითხს თანამედროვე ალგებრისა და ფუნქციონალური ანალიზის ელემენტარული ცნებების გამოყენებით. აქ მოყვა-

ნილი აგებები შეეხება რიმანის ნებისმიერი n -განზომილებიანი სივრცის ტენზორებს, $n \geq 2$.

1. $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდული. $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\mathcal{F}(\Omega)$ -დან p -რანგის ტენზორების სიმრავლე, რომლებიც მოცემულია რიმანის n -განზომილებიანი სივრცის რაიმე Ω არეში. ჩვენ, საზოგადოდ, განვიხილავთ კომპლექსურ ტენზორებს, რომლებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ $w = u + iv$ სახით. სადაც u და v ნამდვილი ტენზორებია. $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს სკალარების $\widehat{\mathcal{F}}_0(\Omega)$ რგოლზე, ე. ი. $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{F}}_0(\Omega)$ მოდულს.

ვთქვათ $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ — p -რანგის ტენზორების სიმრავლეა ელემენტებით $\widehat{\mathcal{M}}(\Omega)$ მოდულიდან სკალარების $\widehat{\mathcal{F}}_0(\Omega)$ რგოლზე. ცხადია, $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ წარმოადგენს მოდულს $\widehat{\mathcal{F}}_0(\Omega)$ რგოლზე. შემდგომში სიმოკლისათვის მათ $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ და $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდულებს ვუწოდებთ, ვიგულისხმებთ რა, რომ ისინი $\widehat{\mathcal{F}}_0(\Omega)$ მოდულებია. p რიცხვს $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ და $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდულების რიგს ვუწოდებთ.

თუ $w = u + iv \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$, მაშინ შეუღლებული ტენზორი $\bar{w} = u - iv \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმებთ, რომ $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის ელემენტები უწყვეტი ტენზორებია Ω არეში. ჩვენ, როგორც ადრე, ვიგულისხმებთ, რომ ერთი კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლა ხორციელდება რაიმე C_k , $k \geq 1$, კლასის გარდაქმნების საშუალებით. ამიტომ, თუ ტენზორი ეკუთვნის C_k კლასს, $0 \leq k' \leq k$, ერთ, ნებისმიერად აღებულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ იგი იმავე კლასს ეკუთვნის ნებისმიერ სხვა კოორდინატთა სისტემაშიც.

მაშასადამე, ის რომ ტენზორი C_k კლასისაა, $k' \leq k$, წარმოადგენს მის ინვარიანტულ თვისებას. თუ $k = \infty$, მაშინ შეიძლება განვიხილოთ C_∞ კლასის ტენზორები.

2. ტენზორების ლოკალური სკალარული ნამრავლი. ტენზორის ლოკალური ნორმა. ორ ტენზორს შორის კუთხე. შემოვიღოთ ახლა. $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ -ში ტენზორთა ლოკალური სკალარული ნამრავლი. თუ $w = u + iv$, $w' = u' + iv' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$, მაშინ

$$(w, w')_x \equiv \bar{w}w' = uu' + vv' + i(vu' - uv') \quad (8.1).$$

გამოსახულებას w და w' ტენზორების ლოკალური სკალარული ნამრავლი ეწოდება Ω არის x წერტილში. აქ uu', vv', vu', uv' აღნიშნავს შესაბამისი ნამდვილი ტენზორების შიგა ნამრავლებს.

მაგალითად,

$$uu' = u_{i_1} \dots i_p u'^{i_1} \dots i_p, \quad (8.2)$$

სადაც ინდექსები $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს ღებულობს.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ აგრეთვე m -ლოკალურ სკალარულ ნამრავლებს. ვთქვათ, $w \in \widehat{\mathcal{F}}_{p+m}(\Omega)$ და $w' \in \widehat{\mathcal{F}}_{q+m}(\Omega)$. მაშინ w და w' ტენზორების m -ლოკალური სკალარული ნამრავლი ეწოდება (p, q) ტიპის

$$(ww')_x^m = w \otimes \overline{w'} = w_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_m} \overline{w'}^{k_1 \dots k_m i_1 \dots i_p} \quad (8.2 \text{ ა})$$

ტენზორს. როცა $p=q=0$, დავწერთ

$$(w, w')_x = w \overline{w'} = w_{k_1 \dots k_m} \overline{w'}^{k_1 \dots k_m}, \quad (8.2 \text{ ბ})$$

რაც ტოლფასია (8.1) ტოლობის.

უნდა აღინიშნოს, რომ (8.2 ა) ფორმულები და, მაშასადამე, (8.2 ბ) ინარჩუნებს აზრს, როცა $w \in \widehat{\mathcal{M}}_{p+m}(\Omega)$ და $w' \in \widehat{\mathcal{F}}_{q+m}(\Omega)$.

$w \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ და $w' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ ტენზორების ლოკალური სკალარული $(w_x, w')_x$ ნამრავლი წარმოადგენს სკალარს — $(w, w')_x \in \widehat{\mathcal{M}}_0(\Omega)$. აღვიღო შესამოწმებელია, რომ არის ყოველ x წერტილში მას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1) (w, w')_x = \overline{(w', w)_x}; \quad \forall w, w' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega).$$

$$2) c(w, w')_x = (cw, w')_x = (w, \overline{cw'})_x; \quad \forall w \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega),$$

$$\forall w' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega), \quad \forall c = \text{const}.$$

$$3) (w + \widetilde{w}, w')_x = (w, w')_x + (\widetilde{w}, w')_x; \quad \forall w, \widetilde{w} \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega),$$

$$\forall w' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega).$$

$$(w, \widetilde{w} + w')_x = (w, \widetilde{w})_x + (w, w')_x; \quad \forall w \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega),$$

$$\forall \widetilde{w}, w' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$$

ე. ი. $(w, w')_x$ ორადწრფივი ფორმაა.

4) თუ $w \in \mathcal{F}_p(\Omega)$, მაშინ $(w, w)_x = uu + vv \geq 0$, ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $w(x) = 0$, $x \in \Omega$. არაუარყოფით ფუნქციას

$$\|w\|_x = \sqrt{(w, w)_x} \equiv (uu + vv)^{1/2} \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{F}_p(\Omega) \quad (8.3)$$

w ტენზორის ლოკალური ნორმა ეწოდოთ. დავამტკიცოთ უტოლობა

$$|(w, w')_x| \leq \|w\|_x \|w'\|_x, \quad \forall w, w' \in \mathcal{F}_p(\Omega). \quad (8.4)$$

ვთქვათ $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, სადაც ρ ნამდვილი მუდმივაა, $\varphi = \arg(w, w')_x$. მაშინ

$$(w, w')_x = |(w, w')_x| e^{i\varphi}, \quad (w', w)_x = \overline{(w, w')_x} = |(w, w')_x| e^{-i\varphi},$$

$$\|w + \lambda w'\|_x^2 = (w + \lambda w')(\overline{w} + \overline{\lambda} \overline{w}') = \|w\|_x^2 + 2\rho |(w, w')_x| + \rho^2 \|w'\|_x^2 \geq 0.$$

ეს უტოლობა სრულდება ნებისმიერი ნამდვილი ρ -თვის. აქედან ერთბაშად გამომდინარეობს (8.4) უტოლობა.

ახლა დავამტკიცოთ სამკუთხედის უტოლობა

$$\|w + w'\|_x \leq \|w\|_x + \|w'\|_x, \quad \forall w, w' \in \mathcal{F}_p(\Omega). \quad (8.5)$$

მართლაც, (8.4)-ის ძალით გვაქვს უტოლობა

$$\begin{aligned} \|w + w'\|_x^2 &= (w, w)_x + (w, w')_x + (w', w)_x + (w', w')_x \leq \\ &\leq \|w\|_x^2 + 2\|w\|_x \|w'\|_x + \|w'\|_x^2 = (\|w\|_x + \|w'\|_x)^2, \end{aligned}$$

რომელიც, ცხადია, ტოლფასია (8.5) უტოლობის.

ამრიგად, $\mathcal{F}_p(\Omega)$ მოდულს Ω არის ყოველ წერტილში გააჩნია პილბერტის სივრცის თვისებები. ამიტომ მას ლოკალურ პილბერტულ სივრცეს ვუწოდებთ.

გითყვი, რომ $w, w' \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ ტენზორები ორთოგონალურია x წერტილში, თუ

$$(w, w')_x \equiv w \overline{w'} = 0. \quad (8.6)$$

ორთოგონალური ტენზორებისთვის ადგილი აქვს პითაგორას თეორემას

$$\|w + w'\|_x^2 = \|w\|_x^2 + \|w'\|_x^2; \quad x \in \Omega, \quad \forall w, w' \in \mathcal{F}_p(\Omega). \quad (8.7)$$

თუ ტენზორი $w \in \mathcal{F}_p(\Omega)$, მაშინ ყველა მისი იზომერი აგრეთვე $\mathcal{F}_p(\Omega)$ -ს ეკუთვნის. თუ w ტენზორის იზომერებს $P(w)$ -თი აღვნიშნავთ, სკალარული ნამრავლის განმარტებიდან ვლეებულობთ, რომ

$$(w, w')_x = (P(w), P(w'))_x; \quad x \in \Omega, \quad \forall w, w' \in \widehat{\mathcal{W}}_p(\Omega). \quad (8.8)$$

აქ იგულისხმება ორივე w და w' ტენზორის ერთი და იმავე ტიპის იზომერები. (8.8)-დან გამომდინარეობს, რომ w ტენზორის ნებისმიერი $P(w)$ იზომერისათვის გვაქვს

$$\|w\|_x = \|P(w)\|_x, \quad x \in \Omega, \quad \forall w \in \widehat{\mathcal{W}}_p. \quad (8.9)$$

განესაზღვროთ ახლა ნამდვილ w და w' ტენზორებს შორის კუთხის კოსინუსი შემდეგი ფორმულით:

$$\cos \omega = \frac{(w, w')_x}{\|w\|_x \|w'\|_x}, \quad x \in \Omega, \quad \forall w, w' \in \widehat{\mathcal{W}}_p(\Omega). \quad (8.10)$$

(8.4) უტოლობის თანახმად ცხადია, რომ

$$|\cos \omega| \leq 1. \quad (8.11)$$

(8.8) და (8.9) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნამდვილი ტენზორების ერთი და იმავე ტიპის იზომეტრული გარდაქმნისას მათ შორის კუთხე არ იცვლება. სხვანაირად, ყოველი ნამდვილი ტენზორული ველის ერთი და იმავე ტიპის გარდაქმნები კონფორმულია არის ყოველ წერტილში.

8. ტენზორების წრფივად დამოუკიდებელი სისტემები. $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდული სასრულგანზომილებიანია. მისი განზომილება n^p -ს ტოლია. მართლაც, $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ -ს ეკუთვნის p რანგის ყოველი ტენზორი, რომელსაც n^p კომპონენტი აქვს $\widehat{\mathcal{M}}(\Omega)$ -დან, რომლებიც ნებისმიერად შეიძლება დავასახელოთ კოორდინატთა ერთ რომელიმე სისტემაში. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\dim \widehat{\mathcal{M}}_p = n^p$.

ვითყვი, რომ მუდმივების $c_1, c_2, \dots, c_k$ მიმდევრობა არატრივიალურია, თუ მათგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. თუ მუდმივების არატრივიალური $c_1, \dots, c_k$ მიმდევრობისათვის $A_1, \dots, A_k$ ტენზორები $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდულიდან აკმაყოფილებენ

$$c_1 A_1(x) + \dots + c_k A_k(x) \neq 0, \quad x \in \Omega, \quad (8.12)$$

პირობას, მაშინ ვითყვი, რომ ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია x წერტილში. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი წრფივად დამოკიდებულია ამ წერტილში.

თუ $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდულიდან ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია Ω არის ყოველ წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ იგი წრფივად დამოუკიდებელია Ω -ში.

თუ $A_1, \dots, A_k \in \widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$, მაშინ ტენზორთა $A_1, \dots, A_k$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია, რომ $k \leq n^p$. განვიხილოთ მატრიცა

$$A_{ij} = A_{ij}(x) = (A_i, A_j)_x, \quad i, j \in [1, k]. \quad (8.13)$$

რადგან $(A_i, A_j)_x = (\overline{A_j}, A_i)_x$, ამიტომ გვაქვს: $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$, ე. ი. A_{ij} ერმიტული მატრიცაა. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ სისტემა, $k \leq n^p$, $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულიდან წრფივად დამოუკიდებელია x წერტილში მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$\det(A_{ij}(x)) \neq 0, \quad x \in \Omega. \quad (8.14)$$

თუ ეს პირობა Ω არეში ყველგან სრულდება, მაშინ ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია Ω -ში.

თუ A_i ტენზორებიდან ერთი მათგანი ნულად იქცევა x წერტილში, მაშინ ტენზორთა $A_1, \dots, A_k$ სისტემა, $k \leq n^p$, წრფივად დამოუკიდებელია ამ წერტილში. მართლაც, მაშინ (8.14) პირობა არ სრულდება, რადგან $\det(A_{ij})$ -ის ერთ-ერთი სტრუქტონი ნულად იქცევა.

4. ტენზორების ორთონორმალური და ბიორთონორმალური სისტემები. ვიტყვით, რომ ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ სისტემა ორთონორმალურია x წერტილში, თუ

$$(A_i, A_j)_x = \delta_{ij}, \quad i, j \in [1, k]. \quad (8.15)$$

ტენზორთა $A_1, \dots, A_k$ სისტემა ორთონორმალურია არეში, თუ იგი ორთონორმალურია არის ყოველ წერტილში.

ტენზორთა ორთონორმალური სისტემა, ცხადია, წრფივად დამოუკიდებელია (წერტილში, არეში), რადგან $\det(A_{ij}) = \det(\delta_{ij}) = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ სივრცის ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ სისტემა ორთონორმალურია, მაშინ აუცილებელია, რომ $k \leq n^p$.

ტენზორების ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელი $A_1, \dots, A_k$ ($k \leq n^p$) სისტემა $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ -დან შეიძლება ორთონორმირებული გავხადოთ შმიდტის ორთოგონალიზაციის მეთოდის გამოყენებით. თუ დავუშვებთ, რომ

$$B_i = \frac{B'_i}{\|B'_i\|_x}, \quad x \in \Omega, \quad (8.16)$$

სადაც

$$B'_1 = A_1, \quad B'_i = A_i - \sum_{j=1}^{i-1} (A_i, B_j) B_j, \quad i \in [2, k], \quad (8.17)$$

ჩვენ გვქნება $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულის ტენზორების ორთონორმალური $B_1, \dots, B_k$ სისტემა, $(B_i, B_j) = \delta_{ij}$.

ცხადია, რომ Ω არის ყოველ ფიქსირებულ x წერტილში

$$B_i = c_{i1} A_1 + \dots + c_{in} A_n, \quad c_{ij} \neq 0, \quad c_{ij} = \text{const.} \quad (8.18)$$

ტენზორთა ორ $A_1, \dots, A_k$ და $A^1, \dots, A^k$ სისტემას $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულიდან ბიორთონორმალური ეწოდება, თუ სრულდება

$$(A_i, A^j)_x = \delta_{ij}^x, \quad i, j \in [1, k] \quad (8.19)$$

პირობები. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ტენზორთა ბიორთონორმალური სისტემები წრფივად დამოუკიდებელია (თათოველი ცალ-ცალკე). მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ

$$c_1 A_1 + \dots + c_k A_k = 0,$$

მაშინ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის A^j -ზე სკალარული გამრავლებით, (8.19)-ის თანახმად, გვქნება $c_j = 0$, $j \in [1, k]$, რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

ახლა ჩვენ დავამტკიცოთ, რომ ტენზორთა ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემისათვის არსებობს ბიორთონორმალური სისტემა.

ვთქვათ, $A_1, \dots, A_k$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულის ტენზორების წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას Ω -არეში. ვთქვათ, $A_{ij}(x) = (A_i, A_j)_x$. მაშინ $\det(A_{ij}(x)) \neq 0$ Ω -ში და, მაშასადამე, არსებობს ერთადერთი A^{ij} მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$A_{im} A^{mj} = \delta_{ij}^x, \quad i, j \in [1, k] \quad (8.20)$$

ტოლობებს. დავამტკიცოთ, რომ A^{ij} ერმიტული მატრიცაა: $A^{ij} = \overline{A^{ji}}$. თუ (8.20)-ში გადავალთ შეუღლებულ ტოლობაზე და გავითვალისწინებთ, რომ $\overline{A_{im}} = A_{mi}$, გვქნება

$$A_{mi} \overline{A^{mj}} = \delta_{ij}^x, \quad i, j \in [1, k]. \quad (8.21)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს A^{II} -ზე გავამრავლებთ და i -ს მიმართ მოვახდენთ შეჯამებას, (8.20)-ის ძალით, მივიღებთ

$$A^{II} = A_{mi} A^{II} \bar{A}^{mI} = \delta_m^I \bar{A}^{mI} = \bar{A}^{II},$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა. ახლა ცხადია, რომ (8.20) ტოლობები, რომლებიც (8.21)-ის ტოლფასია, შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$A_{mi} A^{Im} = \delta_i^j, \quad i, j \in [1, k]. \quad (8.22)$$

აქედან გვაქვს

$$\det(A_{ij}) \det(A^{pq}) = 1. \quad (8.23)$$

ამ ტოლობაში, ცხადია, k რიგის დეტერმინანტები მონაწილეობს. ამრიგად, A_{ij} და A^{II} ურთიერთშებრუნებული ერმიტული მატრიცებია.

განვიხილოთ ახლა ტენზორების

$$A^I = A^{Im} A_m, \quad i \in [1, k], \quad (8.24)$$

სისტემა, ანუ, თუ ამ ტოლობას შევაბრუნებთ,

$$A_i = A_{im} A^m, \quad i \in [1, k]. \quad (8.25)$$

თუ ახლა (8.24) ფორმულით ვისარგებლებთ, დავწერთ

$$(A^I, A_j) = A^{Im} (A_m, A_j) = A^{Im} A_{mj}.$$

მაშასადამე, (8.22)-ის თანახმად გვაქვს

$$(A_i, A^j) = \delta_i^j, \quad i, j \in [1, k], \quad (8.26)$$

ე. ი. ტენზორების $A_1, \dots, A_k$ და $A^1, \dots, A^k$ სისტემები ბიორთონორმალურია.

ამრიგად, ტენზორთა ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი $A_1, \dots, A_k$ სისტემისათვის $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულიდან, $k \leq n^p$, არსებობს ბიორთონორმალური $A^1, \dots, A^k$ სისტემა.

ნ. ბაზისები. ტენზორის დაშლა ბაზისის მიმართ. რადგან $\dim \widehat{\mathcal{F}}_p = n^p$, ამიტომ ცხადია, რომ Ω -არეში ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი ტენზორების $A_1, \dots, A_{n^p}$ სისტემა $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულიდან შეიძლება ავიღოთ ამ სივრცის ბაზისად. მაშინ არსებობს ტენზორების ბიორთონორმალური $A^1, \dots, A^{n^p}$ სისტემა, რომელიც წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისს. როგორც ამას ქვემოთ დავინა ავთ, განსაკუთრებით მოსახერხებელია ამ ორი ბაზისის ერთდროული განხილვა. ამის გამო

შევთანხმდეთ, რომ თუ $A_1, \dots, A_{n^p}$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისს, მაშინ $A^1, \dots, A^{n^p}$ ყოველთვის აღნიშნავს ბიორთონორმალურ ბაზისს. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ $A_1, \dots, A_{n^p}$ ორთონორმალური ბაზისია $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ -თვის, მაშინ $A^i = A_i, i \in [1, n^p]$.

ახლა გამოვყვანოთ სივრცის ბაზისის მიმართ ტენზორის დაშლის ფორმულები. ვთქვათ, $A_1, \dots, A_{n^p}$ და $A^1, \dots, A^{n^p}$ $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის ბიორთონორმალური ბაზისებია.

თუ $w \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$, მაშინ გვაქვს დაშლა

$$w(x) = w^i(x) A_i(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.27)$$

სადაც w^i წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდულის ელემენტებს, რომლებსაც w ტენზორის $A_1, \dots, A_{n^p}$ ბაზისის მიმართ დაშლის კოეფიციენტები ეწოდებათ, ყრუ i ინდექსი ღებულობს $1, 2, \dots, n^p$ მნიშვნელობებს.

თუ (8.27) ტოლობის ორივე ნაწილს სკალარულად გავამრავლებთ A^j ტენზორებზე, მაშინ (8.26) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$w^j(x) = (w, A^j)_x, \quad j \in [1, n^p]. \quad (8.28)$$

მაშასადამე, (8.2) ფორმულას აქვს სახე

$$w(x) = (w, A^i)_x A_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i \in [1, n]. \quad (8.29)$$

ანალოგიურად ვღებულობთ

$$w(x) = w_i(x) A^i(x), \quad x \in \Omega, \quad i \in [1, n^p], \quad (8.30)$$

დაშლას, სადაც

$$w_i(x) = (w, A^i)_x, \quad i \in [1, n^p]. \quad (8.31)$$

მაშასადამე,

$$w(x) = (w, A_i)_x A^i(x), \quad x \in \Omega. \quad (8.32)$$

თუ (8.28) და (8.31)-ში შევიტანთ შესაბამისად (8.30) და (8.27) გამოსახულებებს, მივიღებთ ფორმულებს

$$w_j(x) = w_i(x) A^{ij}(x), \quad j \in [1, n^p], \quad (8.33)$$

$$w_j(x) = w^i(x) A_{ij}(x), \quad j \in [1, n^p], \quad (8.34)$$

რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ $w \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ ტენზორის ბიორთონორმალური ბაზისების მიმართ დაშლის კოეფიციენტებს. w_i -ს w ტენ-

ზორის კოვარიანტული, ხოლო ω' -ს — კონტრავარიანტული კომპონენტები ვუწოდოთ $A_1, \dots, A_n$ ბაზისის მიმართ.

თუ ω, ω' ორი ნებისმიერი ტენზორია შესაბამისად $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ და $\mathfrak{S}_p(\Omega)$ მოდულებიდან, მაშინ ლოკალური სკალარული ნამრავლი გამოისახება ფორმულით

$$(\omega, \omega')_x = \omega_i(x) \omega'^i(x), \quad (8.35)$$

(დამტკიცეთ!).

თუ $A_1, \dots, A_n$ ორთონორმალური ბაზისია $\mathfrak{S}_p(\Omega)$ მოდულიდან. მაშინ გვექნება ფორმულები

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n^p} (\omega, A_i)_x A_i(x), \quad \forall \omega \in \mathfrak{M}_p(\Omega), \quad (8.36)$$

$$(\omega, \omega')_x = \sum_{i=1}^{n^p} \omega_i(x) \omega'_i(x), \quad \forall \omega \in \mathfrak{M}_p(\Omega), \omega' \in \mathfrak{S}_p(\Omega). \quad (8.37)$$

§ 9. მულტიპლიკაციური ტენზორები, $\mathfrak{S}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისების აგება

1. მულტიპლიკაციური ტენზორები და მათი ძირითადი თვისებები. ისეთი $a_1, \dots, a_k$ ტენზორების პირდაპირი ნამრავლი, რომელთა კომპონენტები $\mathfrak{S}(\Omega)$ -ს ეკუთვნის, აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$a = a_1 \otimes a_2 \dots \otimes a_k. \quad (9.1)$$

ასეთი სახის ტენზორებს მულტიპლიკაციურს ვუწოდებთ, $a_1, \dots, a_k$ ტენზორები მულტიპლიკაციური a ტენზორის თანამამრავლებს წარმოადგენს. მულტიპლიკაციური ტენზორის კომპონენტები (მაგალითად, კოვარიანტული) მისი თანამამრაველთა კომპონენტების ნამრავლის ტოლია მათი თანამიმდევრობის რიგის დაცვით. მაგალითად, თუ $a_1, \dots, a_k$ ტენზორებია $\mathfrak{S}_1(\Omega)$ -დან, მაშინ გვექნება

$$a_{i_1 \dots i_k} = a_{1, i_1} a_{2, i_2} \dots a_{k, i_k}. \quad (9.2)$$

შევნიშნოთ, რომ ტენზორთა პირდაპირ ნამრავლს აქვს ასოციაციურობის თვისება. მაგალითად, თუ $1 < i < k$, მაშინ გვაქვს

$$a = (a_1 \dots \otimes a_{i-1}) \otimes (a_i \dots \otimes a_k). \quad (9.3)$$

თუ $a_1, \dots, a_k$ ტენზორებია შესაბამისად $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1}(\Omega), \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{p_k}(\Omega)$ მოდულებიდან, მაშინ (9.1) სახის მულტიპლიკაციურ ტენზორს, რომელიც, ცხადია, $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1 + \dots + p_k}(\Omega)$ მოდულს ეკუთვნის, $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ კლასის ტენზორს ვუწოდებთ.

მულტიპლიკაციური w ტენზორის თანამამრავლების გადასმით მივიღებთ მის რაიმე $P(w)$ იზომერს. საზოგადოდ, $P(w) \neq w$.

აღილი შესაძრწნეეია აგრეთვე, რომ $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ კლასის მულტიპლიკაციური ტენზორები k -წრფივ ფორმებს წარმოადგენს. თუ φ და ψ ნებისმიერი სკალარებია, ხოლო a'_i და $a''_i = p_i$ რანგის ტენზორები, მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned} a_1 \dots \otimes a_{i-1} \otimes (\varphi_i a'_i + \psi a''_i) \otimes a_{i+1} \dots \otimes a_k = \\ = \varphi (a_1 \dots \otimes a_{i-1} \otimes a'_i \otimes a_{i+1} \dots \otimes a_k) + \\ + \psi (a_1 \dots \otimes a_{i-1} \otimes a''_i \otimes a_{i+1} \dots \otimes a_k). \end{aligned} \quad (9.4)$$

მოვიყვანოთ ახლა მულტიპლიკაციური ტენზორების ზოგიერთი სხვა თვისება, რომელთა დამტკიცებაც განსაკუთრებულ სირთულეს არ წარმოადგენს.

მულტიპლიკაციური ტენზორები არ ქმნის წრფივ მრავალსახეობას, მაგრამ აქვს რიგი მნიშვნელოვანი თვისებებისა, რომელთა გამო ისინი მეტად სასარგებლო არიან $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ სივრცის ბაზისების ასაგებად. თუ $a \in \widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ და φ სკალარია $\widehat{\mathcal{F}}_0(\Omega)$ -დან, მაშინ, ცხადია, $\varphi a \in \widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$, ამასთან φa ნამრავლი ნიშნავს ტენზორის ერთი (ნებისმიერი) თანამამრავლის გამრავლებას φ სკალარზე.

მულტიპლიკაციური ტენზორის a_i და a_j თანამამრავლებს მსგავსს ვუწოდებთ, თუ $a_i = \varphi a_j$, სადაც φ სკალარია.

მსგავსი თანამამრავლების გადასმით მულტიპლიკაციური ტენზორი, ცხადია, არ იცვლება.

თუ $a = a_1 \dots \otimes a_k$ და $b = b_1 \dots \otimes b_k$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ კლასის ტენზორებს, მაშინ მათი შიგა და ლოკალური სკალარული ნამრავლები შესაბამისად

$$a \cdot b = (a_1 \cdot b_1) \dots (a_k \cdot b_k), \quad (9.5)$$

$$(a, b)_x = (a_1, b_1)_x \dots (a_k, b_k)_x, \quad x \in \Omega, \quad (9.6)$$

ფორმულებით გამოისახება.

ამრიგად, $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ კლასის მულტიპლიკაციური a და b ტენზორების შიგა (სათანადოდ, ლოკალური სკალარული) ნამრავლი შესაბამისი თანამამრავლების შიგა (სათანადოდ, ლოკალური სკალარული) ნამრავლების ტოლია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\widehat{\mathcal{F}}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ კლასის ორი მულტიპლიკაციური ტენზორი ორთოგონალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისი თანამამრავლებიდან ერთი წყვილი მაინცაა ორთოგონალური. ამას გარდა, მულტიპლიკაციური ტენზორი იზოტროპულია, თუ იზოტროპულია მისი ერთ-ერთი თანამამრავლი.

თუ $w \in \widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$, $w' \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$, ხოლო A და A' ნებისმიერი ტენზორებია კომპონენტებით შესაბამისად $\mathcal{F}(\Omega)$ და $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან, მაშინ მულტიპლიკაციური $A \otimes w$ და $w' \otimes A'$ ტენზორების შიგა p -ნამრავლები და p -ლოკალური სკალარული ნამრავლები შესაბამისად

$$(A \otimes w)^p \otimes (w' \otimes A') = (ww') A \otimes A', \quad (9.7a)$$

$$(A \otimes w, w \otimes A')^{(p)} = (w, w') A \otimes \bar{A}' \quad (9.7b)$$

ფორმულებით გამოისახება. კერძოდ,

$$w (w' \otimes A') = (w w') A', \quad (9.8a)$$

$$(A \otimes w) w' = (w w') A, \quad (9.8b)$$

$$(w, w' \otimes A')^{(p)} = (w, w') A', \quad (9.8c)$$

$$(A \otimes w, w')^{(p)} = (w, w') A. \quad (9.8d)$$

2. მოდულის ბაზისების აგება. ახლა მულტიპლიკაციური ტენზორების თვისებების გამოყენებით ავაგებთ ნებისმიერი p რანგის ტენზორთა $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულების ბაზისებს უფრო დაბალი განზომილების სივრცეების ბაზისების საშუალებით.

დავამტკიცებთ, რომ თუ $A_1, \dots, A_{np}$ და $B_1, \dots, B_{np}$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ და $\widehat{\mathcal{F}}_q(\Omega)$ მოდულების ბაზისებს, მაშინ მულტიპლიკაციური

$$C_{ik} = A_i \otimes B_k, \quad i \in [1, np], \quad k \in [1, np], \quad (9.9)$$

ტენზორები $\widehat{\mathcal{T}}_{p+q}(\Omega)$ მოდულის ბაზისს შეადგენს. აქ m წარმოადგენს i , k წყვილების მიმდევრობის ნომერს, როცა i და k შესაბამისად $1, \dots, n^p$; $1, \dots, n^q$ მნიშვნელობებს ღებულობს. მაშასადამე, m ღებულობს $1, \dots, n^{p+q}$ მნიშვნელობებს. თუ ტენზორების

$$C^m = A' \otimes B^k, \quad i \in [1, n^p], \quad k \in [1, n^q], \quad m \in [1, n^{p+q}] \quad (9.10)$$

სისტემას განვიხილავთ, სადაც A' და B^k შესაბამისად A_i და B_k -ს ბიორთონორმალური ბაზისებია $\widehat{\mathcal{T}}_p(\Omega)$ და $\widehat{\mathcal{T}}_q(\Omega)$ მოდულებიდან, (9.6) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$(C_m, C') = (A_i, A') (B_k, B') = \delta'_i \delta'_k = \delta'_{m'}, \quad (9.11)$$

სადაც m და l შესაბამისად i, k და s, r რიცხვითი მიმდევრობების ნომრებია. ამიტომ C_i და C^k ტენზორების სისტემები ბიორთონორმალურია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ისინი $\widehat{\mathcal{T}}_{p+q}(\Omega)$ მოდულის ბაზისებს წარმოადგენენ, რაც უნდა დაგვეტყვიცებინა.

ამ ღებულებას გააჩნია შემდეგი ცხადი განზოგადება:

თუ $A_{i_1}, A'_{i_1}, \dots, A_{i_k}, A'_{i_k}$ შესაბამისად $\widehat{\mathcal{T}}_{p_1}(\Omega), \dots, \widehat{\mathcal{T}}_{p_k}(\Omega)$ მოდულების ბაზისებია, სადაც $i_1, \dots, i_k$ ინდექსები სათანადოდ $i_1 \in [1, n^{p_1}], \dots, i_k \in [1, n^{p_k}]$ მნიშვნელობებს ღებულობენ, მაშინ მულტილიკაციური ტენზორების

$$A'_i = A_{i_1} \dots \otimes A_{i_k}, \quad A' = A'_{i_1} \dots \otimes A'_{i_k} \quad (9.12)$$

სისტემები, სადაც $i = N_{\Sigma}(i_1, \dots, i_k)$, $\widehat{\mathcal{T}}_{p_1 + \dots + p_k}(\Omega)$ მოდულის ბიორთონორმალური ბაზისები იქნება.

ვთქვათ, $a_1, \dots, a_n$ და $a^1, \dots, a^n$ — $\widehat{\mathcal{T}}_1(\Omega)$ მოდულის ბიორთონორმალური ბაზისებია. მაშინ p -ვექტორების

$$A_i = a_{i_1} \dots \otimes a_{i_p}, \quad A' = a'^{i_1} \dots \otimes a'^{i_p} \quad (9.13)$$

სისტემები $\widehat{\mathcal{T}}_p(\Omega)$ მოდულის ბიორთონორმალურ ბაზისებს წარმოადგენენ. ინდექსები ღებულობს $i_1, \dots, i_p$ მნიშვნელობებს, ხოლო i აღნიშნავს რიცხვითი $i_1, \dots, i_p$ მიმდევრობების სიმრავლის ელემენტის ნომერს, ამ ელემენტების რიცხვი ტოლია n^p -სი. ამრიგად i ღებულობს $1, \dots, n^p$ მნიშვნელობებს.

თუ $a_1, \dots, a_p$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{T}}_1(\Omega)$ სივრცის ორთოგონალურ ბაზისს, მაშინ, ცხადია, p -ვექტორების (9.13) სისტემა $\widehat{\mathcal{T}}_p(\Omega)$ სივრცის ორთოგონალური ბაზისი იქნება.

ამ პუნქტის დასასრულს შევნიშნოთ, რომ რიცხვითი $i_1, \dots, i_p$ შიმდეგობების სიმრავლის ელემენტთა გადანომვრა შეიძლება განვახორციელოთ შემდეგი ფორმულის მიხედვით: თუ $i = N_2(i_1, \dots, i_p)$, მაშინ

$$i = i_1 + n(i_2 - 1) + \dots + n^{p-1}(i_p - 1) = 1 + \sum_{k=1}^p n^{k-1}(i_k - 1). \quad (9.14)$$

8. ტენზორთა ბაზისები ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში. ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის კოორდინატთა სისტემის R_i და R^i საბაზისო ვექტორები, რომლებიც ვექტორ-ფუნქციებს წარმოადგენენ. მათი საშუალებით ახლა შეიძლება აიგოს ბაზისები ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი რანგის ტენზორების წარმოსადგენად.

განვიხილოთ მულტიპლიკაციური ტენზორები

$$e_{i_1 \dots i_p} = R_{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes \dots \otimes R_{i_p} \quad (9.15)$$

კოვარიანტული კომპონენტებით

$$g_{i_1 j_1}, g_{i_2 j_2}, \dots, g_{i_p j_p}. \quad (9.16)$$

მაშასადამე, $e_{i_1 \dots i_p}$ წარმოადგენს $2p$ რანგის ტენზორს $\widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ -დან.

ეთქვან, $U^{i_1 \dots i_p}$ წარმოადგენს $\mathcal{U}_p(\Omega)$ -დან p რანგის U ტენზორის კონტრავარიანტულ კომპონენტებს. მაშინ დავამტკიცებთ, რომ U ტენზორი

$$U = U^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p} \quad (9.17)$$

სახით წარმოდგება. მართლაც, (9.17) ფაქტიურად იგივეობას წარმოადგენს, რადგან ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მონაწილეობს ტენზორი, რომლის კოვარიანტული კომპონენტებია

$$U^{i_1 \dots i_p} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} = U_{j_1 \dots j_p},$$

რაც ჩვენს დებულებას ამტკიცებს.

(9.17) ფორმულა სამართლიანია ყოველი ინდექსების ნებისმიერი ვერტიკალური გადაადგილების შემთხვევაში. ასე მაგალითად, (9.17) ფორმულა შეიძლება

$$U = U_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p}, \quad (9.18)$$

სახით ჩავწეროთ, სადაც

$$e^{i_1 \dots i_p} = R^{i_1 \dots i_p} \otimes R^{i_p} \quad (9.19)$$

თუ განვიხილავთ U ტენზორის რაიმე $P(U)$ იზომერს, მის წარმოსადგენად შეიძლება ვისარგებლოთ

$$P(U) = U^{i_1 \dots i_p} P(e_{i_1 \dots i_p}) \quad (9.20)$$

ფორმულით. ზართლაც, თუ $P(U) = U^{i_1 \dots i_p}$ წარმოადგენს $U^{i_1 \dots i_p}$ ტენზორის იზომერს, მაშინ ყოველი j_k ინდექსი რაიმე i_m ინდექსის ტოლია. (9.17) ფორმულის დახმარებით დავწეროთ

$$P(U) = U^{j_1 \dots j_p} e_{j_1 \dots j_p} \quad (9.20a)$$

მაგრამ, ცხადია, რომ $e_{j_1 \dots j_p}$ წარმოადგენს $e_{i_1 \dots i_p}$ ტენზორის იზომერს. ამასთან $e_{j_1 \dots j_p} = P(e_{i_1 \dots i_p})$. ამის გამო (9.20 a) ფორმულა (9.20) სახით შეგვიძლია ჩავწეროთ, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

(9.17) და (9.19) ფორმულები, ცხადია, ვექტორული ველების (II, 2.4) ფორმულებს აზოგადებს ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი ტენზორისათვის $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ მოდულიდან.

4. (9.17) ფორმულის განზოგადება რიმანის სივრცის შემთხვევაში. ახლა განვიხილავთ ისეთ ტენზორებს, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისებად რიმანის ნებისმიერი n -განზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში.

ვთქვათ $a_1, \dots, a_n$ და $a^1, \dots, a^n$ ბიორთონორმალური ბაზისებია $\widehat{\mathcal{E}}_1(\Omega)$ მოდულიდან. აღვნიშნოთ

$$e_i = a_k \bar{a}_i^k, \quad i \in [1, n]. \quad (9.21a)$$

ამ ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტებია

$$e_{jk} = a_k \cdot a_j^k, \quad k \in [1, n]. \quad (9.22)$$

თუ v სივრცის $\widehat{\mathfrak{M}}_1(\Omega)$ მოდულიდან, მაშინ გვაქვს

$$w^i e_i = a_k \bar{a}_i^k w^i = (w, a^k) a_k, \quad (9.23)$$

სადაც $w_i = w$ ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტებია. მაგრამ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე, ცხადია, ინვარიანტულია და $\widehat{M}_1(2)$ მოდულის ტენზორს გამოსახავს. თუ ახლა (8.29) ფორმულას მიემართავთ, დავინახავთ, რომ (9.23)-ის მარჯვენა მხარე w ტენზორის ტოლია. მაშასადამე, გვაქვს

$$w = w^i e_i \quad (9.24a)$$

ფორმულა, რომელიც ნებისმიერ ტენზორს $\widehat{M}_1(2)$ მოდულიდან გამოსახავს e_i , $i \in [1, n]$ ტენზორების საშუალებით. ამ ფორმულაში შეიძლება გადავადგილოთ ყრუ ინდექსები ზემოდან ქვემოთ და ქვემოთ ზემოთ შესაბამის ვერტიკალებზე. მაშინ მივიღებთ ეკვივალენტურ

$$w = w_i e^i \quad (9.24b)$$

ფორმულას, სადაც w_i წარმოადგენს w ტენზორის კოვარიანტულ კომპონენტებს,

$$e^i = a_k^i \bar{a}^k \cdot e, \quad (9.24b)$$

e_i და e^i ტენზორები წარმოადგენს ევკლიდეს სივრცის საბაზისო R_i და R^i ვექტორების ანალოგს.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ e_i ტენზორები ემთხვევა რიმანის სივრცის მეტრიულ ტენზორებს.

(9.24 a) და (9.23) ტოლობების თანახმად გვაქვს

$$w = a_k \bar{a}^k \cdot w^i. \quad (9.25)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$w^i = a_k^i \bar{a}^k \cdot w^j, \quad i \in [1, n]. \quad (9.26)$$

რადგან ეს ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი w ტენზორისთვის, ამიტომ, ცხადია, გვაქვს

$$g_j^i = a_k^i \bar{a}^k \cdot j. \quad (9.27)$$

ეს ფორმულა (9.21 a) ტოლობებიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს.

ამრიგად, e_i ტენზორის შერეული კომპონენტები სივრცის მეტრიული ტენზორის შერეული კომპონენტების ტოლია. მაშასადამე, ეკვივალენტური e_i და e^i ტენზორები რიმანის განსახილველი მრავალსახეობის

მეტრულ ტენზორს წარმოადგენს. ამიტომ e_i და e^i ტენზორების შიგა-
ნამრავლისთვის გვაქვს ფორმულა

$$e_i e^j = g^j_i \quad g^j_i = g^j_i. \quad (9.28a)$$

ინდექსების ატანითა და ჩამოტანით (9.27) და (9.28 ა)-დან მივი-
ღებთ კიდევ ორ ეკვივალენტურ ფორმულას

$$e_i e_j = g_{ij} = a_{k,i} \bar{a}^k_j. \quad (9.28b)$$

$$e^i e^j = g^{ij} = a^k_i \bar{a}^j_k. \quad (9.28g)$$

(9.28) ფორმულები ნათლად გვიჩვენებს, რომ e_i და e^i ტენზო-
ბი რიმანის მრავალსახეობის შემთხვევისათვის განაზოგადებს ევკ-
ლიდეს სივრცის საბაზისო R_i და R^i ვექტორებს

(9.28) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ რიმანის სივრცის
მეტრული ტენზორი გამოისახება

$$E = a_k \otimes \bar{a}^k = \bar{a}^i \otimes a^i \quad (9.29)$$

ფორმულით. უნდა აღვნიშნოთ, რომ $\widehat{\mathcal{E}}_1(\Omega)$ მოდულის ნებისმიერი
 $a_1, \dots, a_n$ ბაზისისათვის ეს ფორმულა რიმანის მრავალსახეობის ერთი
და იმავე მეტრულ ტენზორს გვაძლევს.

ახლა (9.24) ფორმულები განვაზოგადოთ რიმანის ნებისმიერ გან-
ზომილებიანი სივრცის ყოველი p რიგის $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ მოდულების შემთხვე-
ვაში.

განვიხილოთ მულტიპლიკაციური ტენზორი

$$e_{i_1 \dots i_p} = e_{i_1} \dots \otimes e_{i_p} = (a_{k_1} \dots \otimes a_{k_p}) a^{k_1}_{i_1} \dots a^{k_p}_{i_p} \quad (9.30a)$$

ამ ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტებია

$$g_{j_1 i_1} g_{j_2 i_2} \dots g_{j_p i_p}.$$

ახლა ადვილი შესაძრევია, რომ ნებისმიერი w ტენზორისათვის
 $\widehat{\mathcal{M}}_p(\Omega)$ -დან გვაქვს

$$w = w^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p} \quad (9.31a)$$

წარმოდგენა. თუ აქ ყრუ ინდექსებს შესაბამის ვერტიკალებზე გა-
დავადგილებთ, მივიღებთ ეკვივალენტურ ფორმულას. მაგა-
ლითად,

$$w = w_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p}. \quad (9.21b)$$

თუ $P(w)w$ ტენზორის რაიმე იზომერია, მაშინ გვაქვს

$$P(w) = w^{i_1 \dots i_p} P(e_{i_1 \dots i_p}) \quad (9.31a)$$

ფორმულა. (9.13) აღნიშვნების გამოყენებით (9.30 ა) შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$e_{i_1 \dots i_p} = e_{i_1} \dots \otimes e_{i_p} = A_k A^{k'}_{i_1 \dots i_p} \quad (9.30b)$$

სახითაც. აქედან ჩანს, რომ $e_{i_1 \dots i_p}$ ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები გამოისახება ფორმულით

$$\begin{aligned} e_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} &= g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} = \\ &= \sum_{k=1}^{np} A_{k, j_1 \dots j_p} A^{k'}_{i_1 \dots i_p}. \end{aligned} \quad (9.30g)$$

აქ ინდექსების ზემოთ ატანით ეკვივალენტურ ფორმულებს მივიღებთ.

ამ პუნქტის დასასრულს ამოვწეროთ შემდეგი სასარგებლო ფორმულები, რომლებიც $e_{i_1 \dots i_p}$ და $e^{i_1 \dots i_p}$ ტენზორების შიგა ნამრავლებს გამოსახვენ

$$e_{i_1 \dots i_p} e^{j_1 \dots j_p} = g^{j_1}_{i_1} \dots g^{j_p}_{i_p}. \quad (9.32)$$

§ 10. ლუწი რიგის ტენზორული მოდულები

1. ტენზორთა გამრავლება ლუწი რიგის მოდულებიდან. $\widehat{\mathcal{E}}_{2,p}(\Omega)$ რგოლი ერთეულით. ლუწი რიგის $\widehat{\mathcal{E}}_{2,p}(\Omega)$ მოდულებისათვის შეიძლება განიხილოს მეორე ბინარული ოპერაცია — გამრავლება, რომელიც მათ გარდაქმნის რგოლებად ერთეულით.

თუ w და $w' \in \widehat{\mathcal{E}}_{2,p}(\Omega)$, მაშინ $w \otimes w'$ გამრავლება განვმარტოთ როგორც $w \overset{p}{\otimes} w'$ შიგა p -ნამრავლი. მაშასადამე;

$$(w \otimes w')_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = w_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_p} w'^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_p}. \quad (10.1)$$

ამრიგად, თუ $w, w' \in \widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$, მაშინ $w \otimes w' \in \widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $w, w', \widehat{w} \in \widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$, მაშინ სრულდება ტოლობები

$$w \otimes (w' \otimes \widehat{w}') = (w \otimes w') \otimes \widehat{w}, \quad (10.2)$$

$$(w + w') \otimes \widehat{w} = w \otimes \widehat{w} + w' \otimes \widehat{w}, \quad (10.3a)$$

$$w \otimes (w' + \widehat{w}) = w \otimes w' + w \otimes \widehat{w}. \quad (10.3b)$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებს, რომ $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ წარმოადგენს რგოლს. ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ რგოლს გააჩნია ერთეული. ვთქვათ $A_1, \dots, A_{np} \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის რაიმე ბაზისია.

დავამტკიცოთ, რომ $2p$ რანგის

$$E = A_k \otimes \bar{A}^k, \quad k \in [1, np], \quad (10.4)$$

ტენზორი წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ რგოლის ერთეულს.

ამ ტენზორის (p, p) ტიპის კომპონენტებს, ცხადია, აქვთ სახე —

$$E_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = A_{k, j_1 \dots j_p} \bar{A}^k_{i_1 \dots i_p}. \quad (10.5)$$

ვთქვათ, w ტენზორია $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულიდან. (8.29) ფორმულის თანახმად იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$w = (w, A^k) A_k = A_k \bar{A}^k_{i_1 \dots i_p} w_{i_1 \dots i_p}. \quad (10.6)$$

სახით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები აკმაყოფილებენ ტოლობებს

$$w_{j_1 \dots j_p} = A_{k, j_1 \dots j_p} \bar{A}^k_{i_1 \dots i_p} w_{i_1 \dots i_p}. \quad (10.7)$$

რადგან ამ ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი w ტენზორისათვის, ამიტომ მისგან (10.5)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$E_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = A_{k, j_1 \dots j_p} \bar{A}^k_{i_1 \dots i_p} = g_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \quad (10.8a)$$

(10.8 a) ტოლობებში ინდექსების ატანით და ჩამოტანით მივიღებთ კიდევ ორ ეკვივალენტურ ფორმულას

$$E_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = A_{k, j_1 \dots j_p} \bar{A}^k_{i_1 \dots i_p} = g_{j_1 i_1} \dots g_{j_p i_p}, \quad (10.8b)$$

$$E^{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_p} = A_{k_1}^{j_1 \dots j_p} \bar{A}^{k_1 i_1 \dots i_p} = g^{j_1 i_1} \dots g^{j_p i_p}. \quad (10.8\text{გ})$$

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $\widehat{E}^{(p)}$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ რგოლის ერთეულს. ამისათვის უნდა დავადგინოთ, რომ, თუ $w \in \widehat{\mathcal{M}}_{2p}(\Omega)$, მაშინ სრულდება

$$w \otimes \widehat{E}^{(p)} = \widehat{E}^{(p)} \otimes w = w \quad (10.9)$$

ტოლობები.

მართლაც, (10.1) და (10.8 ა)-ს თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} (w \otimes \widehat{E}^{(p)})_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} &= w_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_p} g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p} = \\ &= w_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}, \\ (\widehat{E}^{(p)} \otimes w)_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} &= g^{k_1 i_1} \dots g^{k_p i_p} w_{k_1 \dots k_p j_1 \dots j_p} = \\ &= w_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}. \end{aligned}$$

ეს ტოლობები, ცხადია, ამტკიცებს (10.9) ფორმულას.

ამრიგად, $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულის ნებისმიერი $A_1, \dots, A_{np}$ ბაზისისათვის (10.4) ფორმულა განოსახავს $\widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ რგოლის ერთეულს. ახლა დავამტკიცებთ, რომ $\widehat{E}^{(p)}$ ტენზორი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\widehat{E}^{(p)} = e_{k_1} \dots e_{k_p} \otimes e_{k_1} \dots e_{k_p} \quad (10.10)$$

სახით, სადაც $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ და $e^{i_1} \dots e^{i_p}$ მულტიპლიკაციური ტენზორებია, რომლებიც (9.30ბ) ფორმულებით გამოისახებიან $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულის ნებისმიერი $A_1, \dots, A^{np}$ ბაზისის საშუალებით.

$e_{i_1} \dots e_{i_p} \otimes e^{i_1} \dots e^{i_p}$ ჯამი, ცხადია, ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ და, მაშასადამე, იგი გამოსახავს $2p$ რანგის ტენზორს. ახლა დასამტკიცებელი დავგერჩა, რომ ეს ტენზორი $\widehat{E}^{(p)}$ -ს ტოლია.

როგორც ეს მე-9 პარაგრაფის მე-4 პუნქტში იყო დამტკიცებული, მულტიპლიკაციური $e_{k_1} \dots e_{k_p}$ და $e^{k_1} \dots e^{k_p}$ ტენზორების კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები შესაბამისად

8. ი. ვაჟა

$$g_{k_1 i_1} \dots g_{k_p i_p} \text{ და } g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p}$$

ნამრავლების ტოლია. მაშასადამე, ინვარიანტული $e_{k_1 \dots k_p} \otimes e^{k_1 \dots k_p}$ ჯამის კომპონენტები შემდეგნაირად გამოისახება

$$g_{k_1 i_1} \dots g_{k_p i_p} g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p} = g_{i_1}^{j_1} \dots g_{i_p}^{j_p},$$

ეს კი (10.8 ა)-ს საფუძველზე ამტკიცებს (10.10) ტოლობის სამართლიანობას.

2. $\widehat{\mathcal{S}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრა. ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ $\widehat{\mathcal{S}}_{2p}(\Omega)$ რგოლი ბანახის ალგებრას წარმოადგენს. უნდა დამტკიცდეს, რომ ორი ნებისმიერი w და w' ტენზორისთვის $\widehat{\mathcal{S}}_{2p}(\Omega)$ მოდულიდან სრულდება უტოლობა

$$\|w \otimes w'\|_x \leq \|w\|_x \|w'\|_x, \quad x \in \Omega. \quad (10.11)$$

ჩვენ დავამტკიცებთ უფრო ზოგად თეორემას, რომლიდანაც (10.11) უტოლობა მიიღება როგორც კერძო შემთხვევა.

ვთქვათ A და B შესაბამისად $\widehat{\mathcal{S}}_{p+r}(\Omega)$ და $\widehat{\mathcal{S}}_{q+r}(\Omega)$ სივრცის ტენზორებია. განვიხილოთ მათი r -ნამრავლი

$$(A \otimes B)_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} = A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} B^{k_1 \dots k_r}_{j_1 \dots j_q}. \quad (10.12)$$

დავამტკიცოთ, რომ სრულდება უტოლობა

$$\|A \otimes B\|_x \leq \|A\|_x \|B\|_x, \quad x \in \Omega. \quad (10.13)$$

ამ უტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეებში მონაწილეობს ინვარიანტული გამოსახულებები. ამიტომ საკმარისია დამტკიცდეს, რომ უტოლობას ადგილი აქვს მრავალსახეობის ყოველ წერტილში ლოკალურად დეკარტულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ვთქვათ x მრავალსახეობის ფიქსირებული წერტილია. განვიხილოთ ლოკალურად დეკარტული კოორდინატთა სისტემა, რომლის მიმართაც შესრულებულია პირობები

$$(g_{ij})_x = \delta_{ij}, \quad (10.13a)$$

მაშინ $(g^{ij})_x = g^{ij}$ და, მაშასადამე, ნებისმიერი ტენზორის ყველა ტიპის კომპონენტები x წერტილში ერთი და იგივეა. ამიტომ (10.12) ფორმულა x წერტილში მიიღებს

$$(A \otimes B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj}$$

სახეს, სადაც $i = N^0(i_1, \dots, i_p)$, $j = N^0(j_1, \dots, j_q)$ ამრიგად, $i \in [1, n^p]$, $j \in [1, n^q]$. ამის გამო გვაქვს

$$\|A \otimes B\|_x^2 = \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{j=1}^{n^q} \left| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj} \right|^2 \quad (10.14)$$

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით (იხ. II თავი, § 3, მე-4 პუნქტი) დავწერთ

$$\left| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n^r} |B_{kj}|^2$$

ამ უტოლობის თანახმად (10.14)-დან ვღებულობთ

$$\|A \otimes B\|_x^2 \leq \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|^2 \sum_{j=1}^{n^q} \sum_{k=1}^{n^r} |B_{kj}|^2. \quad (10.15)$$

მაგრამ ლოკალურად დეკარტული კოორდინატთა სისტემის მიმართ ნებისმიერი $A \in \widehat{\mathcal{F}}_{p+q}(\Omega)$ ტენზორისთვის გვაქვს

$$\|A\|_x^2 A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} A^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} = \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|^2.$$

ამის გამო (10.15) უტოლობა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაეწეროს

$$\|A \otimes B\|_x^2 \leq \|A\|_x^2 \|B\|_x^2.$$

აქედან მაშინვე გამომდინარეობს (10.13) უტოლობა. ამრიგად, ადგილი აქვს (10.11) უტოლობასაც. მაშასადამე, დადგინდა, რომ $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრას წარმოადგენს.

8. მულტიპლიკაციური $M_{2,p}$ ჩგუფი. ეთქვას $w \in \mathcal{W}_{2,p}(\Omega)$. აღვნიშნოთ

$$w_i^k = w_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p},$$

სადაც $i = N^0(i_1, \dots, i_p)$, $k = N^0(k_1, \dots, k_p)$. ცხადია, $i, k \in [1, n^p]$. დავამტკიცოთ, რომ n^p რიგის

$$\det(w_i^k) = d(w) \quad (10.17)$$

დეტერმინანტი სკალარს წარმოადგენს.

მართლაც, ერთი კოორდინატების მეორით შეცვლისას, გვაქვს

$$w_i^k = w_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} = w_{i'_1 \dots i'_p}^{k'_1 \dots k'_p} D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_p}^{i_p} D_{k_1}^{k'_1} \dots D_{k_p}^{k'_p}. \quad (10.18)$$

ეს ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ

$$w_i^k = w_{i'}^{k'} \tilde{D}_i^{i'} \tilde{D}_k^k. \quad (10.18a)$$

სახით, სადაც

$$\tilde{D}_i^{i'} = D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_p}^{i_p}, \quad \tilde{D}_k^k = D_{k_1}^{k'_1} \dots D_{k_p}^{k'_p}. \quad (10.18b)$$

მაშასადამე, i, i' და k, k' ლებულობს $1, \dots, n^p$ მნიშვნელობებს.

თუ ახლა დეტერმინანტების გამრავლების წესს გამოვიყენებთ, დავწეროთ

$$\det(w_i^k) = \det(w_{i'}^{k'}) \det(\tilde{D}_i^{i'}) \det(\tilde{D}_k^k). \quad (10.19)$$

მაგრამ, ცხადია,

$$\tilde{D}_i^{i'} \tilde{D}_k^k = D_{i'_1}^{i_1} D_{k_1}^{k'_1} \dots D_{i'_p}^{i_p} D_{k_p}^{k'_p} = \delta_{i_1}^{i'_1} \dots \delta_{i_p}^{i'_p} = \delta_i^{i'}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\det(\tilde{D}_i^{i'}) \det(\tilde{D}_k^k) = \det(\tilde{D}_i^{i'} \tilde{D}_k^k) = \det(\delta_i^{i'}) = 1.$$

ამიტომ (10.19) ფორმულა ლებულობს

$$d(w) = \det(w_i^k) = \det(w_{i'}^{k'}) \quad (10.19a)$$

სახეს, რაც უნდა დავკვემტკიცებინა.

ამრიგად, $d(w)$ წარმოადგენს $\widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის w ტენზორის ინვარიანტულ მახასიათებელს.

ახლა დავამტკიცოთ ფორმულა

$$d(w \otimes w') = d(w) d(w'), \quad w, w' \in \widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega). \quad (10.20)$$

პარტლაც,

$$w \otimes w' = w_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} w_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_p} \equiv w_i^k w'_k{}^j.$$

აქედან დეტერმინანტთა გამრავლების წესის გამოყენებით მაშინვე ვღებულობთ (10.20) ფორმულას.

ვთქვათ $d(w) \neq 0$. დავამტკიცოთ, რომ არსებობს შებრუნებული $w^{-1} \in \widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ ტენზორი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$w \otimes w^{-1} = w^{-1} \otimes w = E^{(p)}. \quad (10.21)$$

განვიხილოთ განტოლებათა

$$w_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} w_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_p} = g_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \quad (10.22a)$$

სისტემა, რომელიც შეიძლება ჩავწეროთ

$$w_i^k w'_k{}^j = g_i^j \quad (10.22b)$$

სახით, სადაც $i = N^0(i_1, \dots, i_p)$, $j = N^0(j_1, \dots, j_p)$, ხოლო k ყრუ ინდექსი ღებულობს $1, \dots, np$ მნიშვნელობებს. ჩადგან $\det(w_i^k) = d(w) \neq 0$, ამიტომ განტოლებათა (10.22b) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. დავამტკიცოთ, რომ w_k^j წარმოადგენს $2p$ რანგის ტენზორს. ამაში დავრწმუნდებით, თუ შევნიშნავთ, რომ ერთი კოორდინატების მეორით შეცვლისას განტოლებათა (10.22b) სისტემა გადადის შემდეგი სახის ახალ

$$w_i^{k'} w'_k{}^{j'} = g_i^{j'} \quad (10.23)$$

სისტემაში, სადაც

$$w_k^{j'} = w_k^j \widetilde{D}_k^{k'} \widetilde{D}_j^{j'}. \quad (10.24)$$

მაგრამ (10.19)-ის თანახმად $\det(w_i^{k'}) = d(w) \neq 0$ და განტოლებათა

(10.23) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. რა თქმა უნდა, ესაა (10.24) გამოსახულება. მაგრამ (10.24) შეიძლება (10.18)-ის სახით ჩაეწეროს. ეს გვიჩვენებს, რომ განტოლებათა (10.22a) სისტემის $w_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_p}$ ამონახსნი წარმოადგენს (p, p) -ტიპის ტენზორს.

(10.22 ა) გამოსახულება ახლა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაეწეროს

$$w \otimes w^0 = E^{(p)}.$$

თუ ამ ტოლობას მარჯვნიდან გავამრავლებთ $(\widehat{\mathcal{M}}_{2p}(\Omega))$ ალგებრის აზრით) w -ზე, (10.2) და (10.9)-ის თანახმად დავწერთ

$$(w \otimes w^0) \otimes w = w \otimes (w^0 \otimes w) = E^{(p)} \otimes w = w \otimes E^{(p)}.$$

აქედან გვაქვს

$$w \otimes (w^0 \otimes w - E^{(p)}) = 0.$$

რადგან $d(w) \neq 0$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან

$$w^0 \otimes w = E^{(p)}.$$

ამრიგად, w^0 ტენზორი აკმაყოფილებს (10.21) პირობებს. მაშასადამე, თუ $dw \neq 0$, მაშინ w ტენზორს გააჩნია შებრუნებული $w^{-1} = w^0$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

$w \in \widehat{\mathcal{M}}_{2p}(\Omega)$ ტენზორს არაგანსაკუთრებული ეუწოდოთ x წერტილში, თუ $d(w) \neq 0$ ამ წერტილში. თუ ეს პირობა მთელს Ω არეში სრულდება, მაშინ ტენზორს Ω არეში არაგანსაკუთრებული ეწოდება.

თუ $d(w) \neq 0$, მაშინ (10.21)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$d(w) d(w^{-1}) = 1. \quad (10.25)$$

ვთქვათ M_{2p} არაგანსაკუთრებული ტენზორების სიმრავლეა $\widehat{\mathcal{M}}_{2p}(\Omega)$ -დან. მათთვის სრულდება პირობა

$$d(w) \neq 0. \quad (10.26)$$

თუ w და $w' \in M_{2p}$, მაშინ $w \otimes w' \in M_{2p}$, რადგან (10.20) ფორმულის თანახმად

$$d(w \otimes w') = d(w) d(w') \neq 0.$$

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ M_{2p} მულტიპლიკაციურ ჯგუფს წარმოადგენს. მისი ერთეული, ცხადია, $\overset{p}{E}$ ტენზორია.

M_{2p} ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება გამოვიყენოთ რიმანის n -ვანზომილებიანი სივრცის $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ მოდულის ტენზორების წარმოსადგენად.

ვთქვათ $X \in M_{2p}$. მაშინ ნებისმიერი w ტენზორისათვის $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ -დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$w = \widehat{w} \overset{p}{\otimes} X \equiv wX \quad (10.27a)$$

ფორმულა, სადაც

$$\widehat{w} = wX^{-1} \equiv w \overset{p}{\otimes} X^{-1} \quad (10.27b)$$

ან

$$w = X\widetilde{w} \equiv X \overset{p}{\otimes} \widetilde{w}, \quad (10.27c)$$

სადაც

$$\widetilde{w} = X^{-1} \overset{p}{\otimes} w = X^{-1}w. \quad (10.27d)$$

საზოგადოდ, Xw ან wX სახის ნამრავლები, სადაც $X \in \widetilde{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$, ზოლო $w \in \mathfrak{M}_p(\Omega)$, ახორციელებს $\mathfrak{M}_p(\Omega) \rightarrow \mathfrak{M}_p(\Omega)$ ასახვებს. მაშასადამე, ისინი $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ მოდულის ენდომორფიზმებს წარმოადგენენ. თუ $X \in M_{2p}$, მაშინ ეს ასახვები ავტომორფიზმებია.

4. $2p$ რანგის ტენზორის საკუთრივი მნიშვნელობა. ახლა დავსვათ შემდეგი ამოცანა:

ვთქვათ A რაიმე ტენზორია $\mathcal{E}_{2p}(\Omega)$ ალგებრიდან. ვიპოვოთ $\mathcal{E}_p(\Omega)$ მოდულიდან ყველა w ტენზორი, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$Aw = \lambda w \quad (10.28)$$

სახის განტოლებას, სადაც λ სკალარია.

(10.28) ამოცანას ყოველთვის აქვს ტრივიალური $w=0$ ამონახსნი. შემდგომში (10.28) ამოცანის ამონახსნის ქვეშ მხედველობაში გვექნება მხოლოდ არატრივიალური $w \neq 0$ ამონახსნები. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ (10.28) ამოცანის არატრივიალურ ამონახსნთა არსებობის პირობები და ვუჩვენოთ მათი აგების ხერხები.

ვთქვათ რაიმე λ სკალარისთვის (10.28) ამოცანას აქვს $w \in \mathcal{E}_p(\Omega)$ ამონახსნი. მაშინ λ -ს ეწოდება A ტენზორის საკუთრივი

მნიშვნელობა, ხოლო w -ს — λ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ტენზორი.

თუ w (10.28) განტოლების ამონახსნია რაიმე λ სკალარისთვის, მაშინ φw , სადაც φ ნებისმიერი სკალარია, აგრეთვე მისი ამონახსნი იქნება. ყოველთვის შეიძლება φ სკალარის ისე შერჩევა, რომ სრულდებოდეს

$$\|\varphi w\|_x = 1, \quad \forall x \in \Omega$$

პირობა. ამისათვის საკმარისია დავუშვათ, რომ

$$\varphi = (\|w\|_x)^{-1}. \quad (10.29)$$

ამრიგად, (10.28) განტოლების ამონახსნის ნორმირება

$$\|w\|_x = 1, \quad x \in \Omega \quad (10.29a)$$

პირობით ყოველთვისაა შესაძლებელი. შემდგომში მხედველობაში გვქენება (10.28) ამოცანის, სახელდობრ, ნორმირებულ ამონახსნები.

თუ λ საკუთრივი მნიშვნელობისთვის (10.28) ამოცანას წრფივად დამოუკიდებელი $w_1, \dots, w_h$ ამონახსნები აქვს, მაშინ ბათი $\varphi_1 w_1 + \dots + \varphi_h w_h$ წრფივი კომბინაცია, სადაც $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ ნებისმიერი სკალარებია, აგრეთვე ამონახსნს წარმოადგენს. შესაძლებელია ამ ამონახსნთა ორთონორმირება და, მაშასადამე, ჩავთვალოთ, რომ სრულდება

$$(w_i, w_j) = \delta_{ij} \quad (10.30)$$

პირობები.

ვთქვათ w (10.28) ამოცანის ამონახსნია რაიმე λ საკუთრივი მნიშვნელობისთვის. თუ (10.28) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ⁷ შეუღლებულ w ტენზორზე და მხედველობაში მივიღებთ (10.29 a) პირობას, გვექნება

$$\lambda = \overline{w} A w = \overline{w}^{i_1 \dots i_p} A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_p} w^{k_1 \dots k_p} \quad (10.31)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე, ცხადია, ინვარიანტია ეოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ. მაშასადამე, $A \in \mathcal{S}_{2p}(\Omega)$ ტენზორის ყოველი საკუთრივი მნიშვნელობა, თუ ასეთი არსებობს, სკალარს წარმოადგენს.

⁷ გახსენებთ, რომ გამრავლების ქვეშ ვგულისხმობთ ზეგა p -ნამრავლს.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $w = E^{(p)} \otimes w \equiv E w$, (10.28)
განტოლება შეიძლება ჩაეწეროს

$$(A - \lambda E^{(p)})w = 0 \quad (10.32)$$

სახით. ეს ტოლობა

$$(A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} - \lambda E_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p}) w_{k_1 \dots k_p} = 0 \quad (10.32a)$$

აქ

$$\sum_{k=1}^{n^p} (A_{i,k} - \lambda \delta_{i,k}^p) w_k = 0, \quad i \in [1, n^p] \quad (10.32b)$$

სახით შეიძლება ჩაეწეროს. აქედან გამომდინარეობს, რომ უკანასკნელ განტოლებას არატრივიალური ამონახსნი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება

$$d(A - \lambda E^{(p)}) = 0 \quad (10.33)$$

პირობა. როგორც ზემოთ დავამტკიცეთ, ეს ტოლობა კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტულია. ცხადია,

$$d(A - \lambda E^{(p)}) \equiv \det(A_{i,k} - \lambda \delta_{i,k}^p)$$

წარმოადგენს n^p რიგის დეტერმინანტს. ამიტომ, თუ (10.33) ტოლობა გაშლილი სახით ჩაეწეროს, მივიღებთ n^p ხარისხის ალგებრულ

$$\lambda^{n^p} + a_1 \lambda^{n^p-1} + \dots + a_{n^p} = 0 \quad (10.34)$$

განტოლებას, სადაც $a_1, \dots, a_{n^p}$ სკალარებია, ამასთან

$$a_{n^p} = \det(A_{i,k}) = d(A), \quad i, k \in [1, n^p]. \quad (10.35)$$

თუ $d(A) \neq 0$, მაშინ (10.34) განტოლებას ნულის ტოლი ფესვები არ გააჩნია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ $A \in M_{2^p}$, მაშინ მისი ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა ნულისგან განსხვავებულია. თუკი $d(A) = 0$, მაშინ (10.34) განტოლებას ნულის ტოლი ერთი ფესვი მაინც აქვს. მაგრამ, უნდა აღვნიშნოთ, რადგან A ტენზორი იგივე ნული არ არის, ამიტომ (10.34) განტოლებას მუდამ აქვს არა-

ნულოვანი ფესვები, ე. ი. A ტენზორის ყოველთვის გააჩნია არანულოვანი საკუთრივი მნიშვნელობები.

ვთქვათ $d(A) \neq 0$ და $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (10.34) განტოლების ფესვებია. ცხადია, ყველა $\lambda_i \neq 0$. მათ შორის ზოგიერთი (ან ყველა) შეიძლება იყოს ჯერადი. მაგრამ, ჩვეულებრივ, ალგებრული განტოლების ყოველი ფესვი იმდენჯერ მეორდება, რასაც მისი ჯერადობა უდრის. საზოგადოდ, (10.34) განტოლების ფესვები კომპლექსურ მნიშვნელობებს ღებულობს. თუ λ (10.34) განტოლების k ჯერადობის ფესვაა, $k \leq n$, მაშინ ერთგვაროვან განტოლებათა (10.32ბ) სისტემას k წრფივად დამოუკიდებელი $w_1, \dots, w_k$ ამონახსნი გააჩნია, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ისინი $\mathcal{E}_p(\Omega)$ სივრცის ტენზორებს წარმოადგენენ. ეს ადვილად გამომდინარეობს (10.32) განტოლების ინვარიანტულობიდან კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ. რადგან λ ინვარიანტია და (10.34) განტოლების k ჯერადი ფესვი, ამიტომ განტოლებათა (10.32) სისტემას ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემის მიმართ ზუსტად k წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი აქვს. თუ $w_1, i_1 \dots i_p, \dots, w_k, i_1 \dots i_p$ განტოლებათა (10.32ა) სისტემის ამონახსნებია x' კოორდინატების მიმართ, მაშინ რაიმე სხვა x'' კოორდინატებში გარდაქმნილი სისტემის ამონახსნები იქნება

$$w_i, i_1 \dots i_p' = w_i, i_1 \dots i_p D_{i_1}^{j_1} \dots D_{i_p}^{j_p}, i \in [1, k] \quad (10.36)$$

ტენზორები. რადგან $w_i, i_1 \dots i_p$ პირობის თანახმად წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ (10.36)-დან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $w_k, i_1' \dots i_p', \dots, w_k, i_1' \dots i_p'$ აგრეთვე წრფივად დამოუკიდებელი იქნება. მაშასადამე, ეს ტენზორები (10.32) სისტემის k წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს წარმოადგენს კოორდინატთა ახალ სისტემაში.

ამრიგად, დადგინდა, რომ ერთგვაროვან (10.32) განტოლებას k ჯერადობის ყოველი λ საკუთრივი მნიშვნელობისთვის აქვს k წრფივად დამოუკიდებელი $w_1, \dots, w_k$ ამონახსნი და ყველა ისინი $\mathcal{E}_p(\Omega)$ სივრცის ტენზორებს წარმოადგენს. ამონახსნთა ეს სისტემა, როგორც ზემოთ ითქვა, ორთონორმირებულად შეიძლება ჩავთვალოთ.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ თუ λ და λ' (10.28) ამოცანის ორი განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობაა, მაშინ მათი შესაბამისი ორი ნებისმიერი w და w' ტენზორი წრფივად დამოუკიდებელია.

წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ გვექნებოდა $w = \varphi w'$, სადაც φ სკალარია. მაშინ მივიღებდით

$$\lambda w = Aw = \varphi Aw' = \varphi \lambda' w' = \lambda' w.$$

რადგან $w \neq 0$, აქედან გვექნება $\lambda = \lambda'$, ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას. ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ამრიგად (10.34) განტოლების $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^p}$ ფესვება (და მხოლოდ ისინი) წარმოადგენს A ტენზორის საკუთრივ მნიშვნელობებს. მათ შესაბამეობა n^p საკუთრივი ტენზორები — $w_1, \dots, w_{n^p}$, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელნი და ნორმირებულნი არიან. ტენზორთა ეს სისტემა, საზოგადოდ, ორთოგონალური არაა, მაგრამ მისი ყოველი ქვესისტემა, რომელიც შედგება რომელიმე ჯერადი საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ტენზორებისაგან, ორთონორმალურია.

5. 2p რანგის ტენზორის დაყვანა მთავარ ღერძებზე. $A \in \widehat{\mathcal{T}}_{2p}(\Omega)$ ტენზორის საკუთრადი ტენზორების $w_1, \dots, w_{n^p}$ სისტემა, ცხადია, $\widehat{\mathcal{T}}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისს შეადგენს. ამიტომ

$$w_i \otimes w_k, \quad i, k \in [1, n^p] \quad (10.37)$$

სახის მულტიპლიკაციური ტენზორები შეადგენს $\widehat{\mathcal{T}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის ბაზისს. ამის გამო ყოველი A ტენზორი $\widehat{\mathcal{T}}_p(\Omega)$ -დან შეიძლება წარმოდგენილი

$$A = A_{i,k}^j w_i \otimes \bar{w}_k, \quad i, k \in [1, n^p] \quad (10.38)$$

სახით. თუ A -ს ამ გამოსახულებას

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \quad j \in [1, n^p],$$

განტოლებაში შევიტანთ, გვექნება

$$A_{i,k}^j (w_i \otimes \bar{w}_k) w_j = \lambda_j w_j, \quad j \in [1, n^p]. \quad (10.39)$$

შაგრამ (9.8) და (8.26) ფორმულების თანახმად

$$(w_i \otimes \bar{w}_k) w_j = w_i (w_j, w^k) = w_i \delta_j^k.$$

შევიტანოთ ეს გამოსახულებები (10.39)-ში, მივიღებთ

$$A_{i,j}^j w_i = \lambda_j w_j, \quad j \in [1, n^p].$$

აქედან, w_j ტენზორების წრფივად დამოუკიდებლობიდან, გვექნება

$$A_{i,j}^j = \lambda_j \delta_j^i, \quad i, j \in [1, n^p].$$

მაშასადამე, (10.38) ფორმულები მიიღებს სახეს

$$A = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k w_k \otimes \bar{w}^k. \quad (10.40)$$

A ტენზორის კომპონენტები, ცხადია, გამოისახება

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k w_{k, i_1 \dots i_p} \bar{w}^k_{j_1 \dots j_p} \quad (10.41)$$

ფორმულით.

ეს მნიშვნელოვანი ფორმულა ცხადად გამოავლენს $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ ალგებრის ყოველი A ტენზორის სტრუქტურას, გამოსახავს რა მას ინვარიანტული მახასიათებლებით — λ_k საკუთრივი რიცხვებითა და მათი შესაბამისი საკუთრივი ტენზორებით. ამ ტოლობას $2p$ რანგის ტენზორის მთავარ ღერძებზე დაყვანის ფორმულა ეუწოდოთ. მას პრაქტიკულად გამოყენება აქვს ალგებრის, გეომეტრიის და მექანიკის სხვადასხვა საკითხებში.

ახლა დავუშვათ, რომ $A \in \widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ ტენზორის რანგშივე საკუთრივი რიცხვი ნულის ტოლია. ტენზორის ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა არ შეიძლება ნული იყოს, რადგან მაშინ გვექნებოდა ტრივიალური $A=0$ შემთხვევა.

(10.35)-დან ჩანს, რომ

$$\lambda_1 \dots \lambda_{n^p} = d(A). \quad (10.42)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ზოგიერთი საკუთრივი მნიშვნელობა ნულის ტოლია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $d(A)=0$. ვთქვათ, r $d(A)$ დისკრიმინანტის რანგია. მაშასადამე, r წარმოადგენს A ტენზორის სკალარულ მახასიათებელს. მაშინ განტოლებათა ერთგვაროვან

$$A_i^k w_k = 0, \quad i \in [1, n^p], \quad (10.43)$$

სისტემას გააჩნია r წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც ტენზორების ორთონორმალურ $w_1, \dots, w_r$ სისტემას წარმოადგენენ $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულიდან. მაშასადამე, $\lambda=0$ საკუთრივი მნიშვნელობის ჩერადობა $d(A)$ დისკრიმინანტის r რანგის ტოლია. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\lambda_{np} = \dots = \lambda_{np-r+1} = 0, \quad (10.44 \text{ ა})$$

$$\lambda_k \neq 0, \text{ როცა } k \in [1, np-r]. \quad (10.44\text{ბ})$$

ამ შემთხვევაში (10.40) ფორმულა ლებულობს სახეს

$$A = \sum_{k=1}^{np-r} \lambda_k w_k \otimes \bar{w}^k. \quad (10.45)$$

საკუთრივი w_k ტენზორები, $k \in [1, np-r]$, რომლებიც არანულოვან საკუთრივ მნიშვნელობებს შეესაბამებან, ცხადია, $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ სივრცის ბაზისის არ შეადგენენ. მათ უნდა დაემატოს r ჩაოდენობა $w'_1, \dots, w'_r$ ტენზორი, რომლებიც ერთგვაროვან $Aw=0$ განტოლებას აკმაყოფილებენ, რომ მივიღოთ $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის სრული ბაზისი. მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიც $A \in \widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ ტენზორის საკუთრივი ტენზორების სრული ერთობლიობა $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ სივრცის ბაზისის შეადგენს.

ამრიგად, ყოველი A ტენზორი $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრიდან შეიძლება მივიჩნიოთ როგორც $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულისა და $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის ბაზისად იმ აზრით, რომ მისი საკუთრივი ტენზორები წარმოქმნის $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისს, ხოლო მათი წყველ-წყველად აღებული პირდაპირი ნამრავლები $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის ბაზისს შეადგენენ. ახლა ცხადია, რომ, თუ განვიხილავთ მულტიპლუკაციური ტენზორების

$$w_{i_1} \otimes w_{i_2} \dots \otimes w_{i_k}, \quad i_1, \dots, i_k \in [1, np] \quad (10.46)$$

სახის სრულ ერთობლიობას, მივაღებთ $\widehat{\mathcal{F}}_{kp}(\Omega)$ მოდულის ბაზისს.

აქამდე განვიხილავდით ზოგადი $\widehat{\mathcal{F}}_{2p}(\Omega)$ სივრცის ნებისმიერი A ტენზორის შემთხვევას. მაშინ λ_i საკუთრივი მნიშვნელობები და w_i საკუთრივი ტენზორები ლებულობდნენ, საზოგადოდ, კომპლექსურ მნიშვნელობებს. ამას გარდა, საკუთრივი ტენზორები, საზოგადოდ, ორთოგონალური არ იყო. განვიხილოთ ახლა ერთი მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როცა A ტენზორი აკმაყოფილებს

$$A_{i_1 \dots i_p, k_1 \dots k_p} = \bar{A}_{k_1 \dots k_p, i_1 \dots i_p} \quad (10.47)$$

პირობას. მაშინ ორი ნებისმიერი $w, w' \in \widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ ტენზორისთვის გვექმნება

$$\begin{aligned}\overline{w'} A w &= \overline{w'}^{i_1 \dots i_p} A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_p} w^{k_1 \dots k_p} = \\ &= w^{k_1 \dots k_p} \overline{A}_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_p} \overline{w'}^{i_1 \dots i_p} = w A \overline{w'}\end{aligned}$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\overline{w'} A w = w \overline{A} \overline{w'} \quad (10.48)$$

ტოლობა, რომელიც (10.47) პირობის შედეგს წარმოადგენს და ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ. აქედან გამომდინარეობს, რომ (10.47) პირობა გამოსახავს $\widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის ტენზორის ინვარიანტობის თვისებას. $\widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის ტენზორებს, რომელთაც ეს თვისება გააჩნიათ, ერმიტულს ვუწოდებთ. ნამდვილი ტენზორის შემთხვევაში ერმიტულობა ნიშნავს შემდეგი სახის სიმეტრიულობას

$$A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_p} = A_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_p} \quad (10.49)$$

ვთქვათ $A \in \widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ ალგებრის ტენზორია. ვთქვათ აგრეთვე, რომ λ მისი საკუთრივი მნიშვნელობაა და w — შესაბამისი საკუთრივი ტენზორი. მაშინ, ცხადია, გვაქვს

$$A w = \lambda w, \quad \overline{A} \overline{w} = \overline{\lambda} \overline{w} \quad (10.50)$$

თუ პირველ განტოლებას გავამრავლებთ $\overline{w}$ -ზე, მეორეს — w -ზე, ხოლო შემდეგ მათ ერთმანეთს გამოვაკლებთ, მაშინ (10.29 ა) და (10.48) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$(\lambda - \overline{\lambda}) w \overline{w} = (\lambda - \overline{\lambda}) \overline{w} A w - w \overline{A} \overline{w} = 0,$$

ე. ი. $\lambda = \overline{\lambda}$.

ამრიგად, ერმიტული ტენზორის საკუთრივი მნიშვნელობები ნამდვილია.

ვთქვათ λ და λ' წარმოადგენს ერმიტული $A \in \widehat{\mathcal{E}}_{2p}(\Omega)$ ტენზორის ორ განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობას, ხოლო w და w' — შესაბამისი საკუთრივ ტენზორებს. მაშინ გვექნება

$$A w = \lambda w, \quad \overline{A} \overline{w} = \lambda' \overline{w'}$$

განტოლებები. თუ პირველ მათგანს $\bar{w}'$ -ზე გავამრავლებთ, მეორეს — w -ზე, ხოლო შემდეგ ერთს გამოვაკლებთ მეორეს, მაშინ (10.48)-ის თანახმად მივიღებთ

$$(\lambda - \lambda') w \bar{w}' = \bar{w}' A w - w \bar{A} \bar{w}' = 0.$$

რადგან პირობის მიხედვით $\lambda \neq \lambda'$, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ $w \bar{w} = 0$, ე. ი. w და w' ორთოგონალურია.

ამგვარად, თუ $A \in \widehat{\mathcal{S}}_{2p}(\Omega)$ ალკებრის ერმიტული ტენზორია, მაშინ მისი $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^p}$ საკუთრივი მნიშვნელობები ნამდვილია, ხოლო საკუთრივი ტენზორები ორთონორმირებულ სისტემას შეადგენს. მაშინ $w_i = w'_i$ და (10.40) ფორმულა ღებულობს

$$A = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k w_k \otimes \bar{w}_k \quad (10.51).$$

სახეს. A ტენზორის კომპონენტებისათვის გვაქვს

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k w_{k, i_1 \dots i_p} \bar{w}_{k, j_1 \dots j_p} \quad (10.51a)$$

ფორმულა. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ A ნამდვილი ერმიტული ტენზორია, მაშინ მისი საკუთრივი ტენზორები აგრეთვე ნამდვილი იქნება. მაშასადამე, ნამდვილი ერმიტული ტენზორისათვის (10.51) ფორმულა ღებულობს

$$A = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k w_k \otimes w_k \quad (10.52).$$

სახეს, ხოლო მისი კომპონენტებისათვის გვაქვს

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k w_{k, i_1 \dots i_p} w_{k, j_1 \dots j_p} \quad (10.53)$$

ფორმულა.

§ 11. ერმითული კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე
მოვიყვანოთ ზემოთ მიღებული შედეგების ერთი გამოყენება.
განვიხილოთ

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i \bar{x}^j \quad (11.1)$$

კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანის საკითხი. აქ a_{ij} ერ-
მითული მატრიცაა

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}. \quad (11.2)$$

ეს საკითხი ჩვენ I თავის § 5-ში შევისწავლეთ დადებითად გან-
საზღვრული ფორმებისთვის. ახლა შეგვიძლია განვიხილოთ ზოგა-
დი შემთხვევა.

(10.51 ა) ფორმულის თანახმად a_{ij} ტენზორს წარმოვადგენთ

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_{k,i} \bar{w}_{k,j}, \quad i, j \in [1, n], \quad (11.3)$$

სახით, სადაც λ_k a_{ij} მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობებია, ხოლო
 $w_{k,i}$ — λ_k -ს შესაბამისი w_k საკუთრივი ტენზორების კომპონენტები. λ_k
საკუთრივი მნიშვნელობები სკალარებია და ნამდვილ მნიშვნელობებს
ღებულობს, ხოლო w_k შეადგენს ორთონორმალურ სისტემას

$$(w_k, w_m) = w_{k,i} \bar{w}_{m,i} = \delta_k^m, \quad k, m \in [1, n]. \quad (11.4)$$

აქედან გასომდინარეობს, რომ

$$\det(w_{k,i}) \det(w^{h,i}) = 1, \quad k, i \in [1, n]. \quad (11.5)$$

მაშასადამე, $\det(w_{k,i}) \neq 0$. განვიხილოთ ცვლადთა წრფივი

$$\xi_k = w_{k,i} x^i, \quad k \in [1, n] \quad (11.6)$$

გარდაქმნა. იგი არაგადაცვარებულია, რადგან გარდაქმნის იაკობიანი
 $\det(w_{k,i}) \neq 0$. თუ (11.3) გამოსახულებებს (11.1)-ში შევიტანთ,
(11.6)-ის თანახმად მივიღებთ

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_{k,i} x^i \bar{w}_{k,j} \bar{x}^j = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \bar{\xi}_k.$$

ამრიგად, $x^1, \dots, x^n$ ცვლადების არაგადაგვარებული წრფივი გარდაქმნის საშუალებით ნებისმიერი ერმიტული (11.1) კვადრატული ფორმა დაიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \bar{\xi}_k. \quad (11.7)$$

დაეუშვათ, რომ $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, $\det(a_{ij}) \neq 0$, $i, j \in [1, n]$. მაშინ (10.42)-ის თანახმად ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა $\lambda_k \neq 0$. ვთქვათ p დადებითი, ხოლო $q = n - p$ უარყოფითი საკუთრივი მნიშვნელობების რაოდენობათა გამომსახველი რიცხვებია. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\lambda_k > 0$, როცა $k \in [1, p]$ და $\lambda_k < 0$, როცა $k \in [p+1, n]$.

შემოვიღოთ ახალი ცვლადები

$$\begin{aligned} \eta_k &= \sqrt{\lambda_k} \xi_k, & \text{როცა } k \in [1, p], \\ \eta_k &= \sqrt{-\lambda_k} \xi_k, & \text{როცა } k \in [p+1, n]. \end{aligned} \quad (11.8)$$

(11.7) ტოლობა ზიილებს სახეს

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^p |\eta_k|^2 - \sum_{k=p+1}^n |\eta_k|^2. \quad (11.9)$$

რადგან a_{ij} ტენზორის λ_k საკუთრივი მნიშვნელობები სკალარებია, ამიტომ p რიცხვი, ცხადია, არაა დამოკიდებული კოორდინატების არჩევაზე. ამის გამო იგი წარმოადგენს $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის ინვარიანტულ მახასიათებელს. თუ $p = n$, მაშინ გვქვია

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^2, \quad (11.10)$$

ე. ი. ასეთ (და მხოლოდ ასეთ) შემთხვევაში $A(x^1, \dots, x^n)$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა. ამისათვის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს შემდეგი უტოლობების შესრულება (იხ. I თავი, § 5, პუნქტი 3)

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (11.11)$$

ამ შემთხვევაში

$$A(x^1, \dots, x^n) = 1 \quad (11.12)$$

განტოლება გამოსახავს n -განზომილებიან სივრცეში მე-2 რიგის ზედაპირს, რომელიც ერთეულოვანი სფეროს ჰომეომორფულია.

თუ $p = 0$, მაშინ გვაქვს

$$A(x^1, \dots, x^n) = - \sum_{k=1}^n |\eta_k|^2 \quad (11.13)$$

ასეთ (და მხოლოდ ასეთ) შემთხვევაში $A(x^1, \dots, x^n)$ წარმოადგენს უარყოფითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას. ამრიგად, $-A(x^1, \dots, x^n)$ წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას.

თუ $0 < p < n$, მაშინ $A(x^1, \dots, x^n)$ განუსაზღვრელი ნიშნის კვადრატული ფორმაა.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ნულის ტოლია, $\det(a_{ij}) = 0$.

ვთქვათ r წარმოადგენს a_{ij} მატრიცის რანგს. როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, r a_{ij} მატრიცის სკალარული მახასიათებელია. მაშინ $\lambda = 0$ წარმოადგენს a_{ij} მატრიცის r ჯერადობის საკუთრივ მნიშვნელობას. ამის გამო შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\begin{aligned} \lambda_k &\neq 0, \text{ როცა } k \in [1, n-r], \\ \lambda_k &= 0, \text{ როცა } k \in [n-r, n]. \end{aligned} \quad (11.14)$$

ვთქვათ p და $q = n - r - p$ გამოსახავს a_{ij} მატრიცის დადებითი და უარყოფითი საკუთრივი მნიშვნელობების რიცხვებს. მაშინ $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმა დაიყვანება

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^p |\eta_k|^2 - \sum_{k=p+1}^{n-r-p} |\eta_k|^2 \quad (11.15)$$

სახეზე. როგორც აღრე, p რიცხვი წარმოადგენს $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმის ინვარიანტულ მახასიათებელს. თუ $p = n - r$, მაშინ გვაქვს

$$A(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^{n-r} |\eta_k|^2 \quad (11.16)$$

ფორმულა. ამიტომ $A(x^1, \dots, x^n)$ დადებითად (მაგრამ არაუარყოფითად) განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში სრულდება

$$A(x^1, \dots, x^n) = 0 \quad (11.17)$$

განტოლება, როცა $x^1, \dots, x^n$ ცვლადები აკმაყოფილებს განტოლებათა

$$w_{k,i} x^i = w_{k,1} x^1 + \dots + w_{k,n} x^n = 0, \quad k \in [1, n-r] \quad (11.18)$$

სისტემას. $n-r$ ცვლადიან განტოლებათა ამ სისტემის საშუალებით $x^1, \dots, x^{n-r}$ ცვლადი წრფივად გამოისახება დანარჩენი $x^{n-r+1}, \dots, x^n$ ცვლადის მიხედვით. ეს ნიშნავს, რომ (11.17) განტოლება გამოსახავს r -განზომილებიან ჰიპერსიბრტყეს n -განზომილებიან სივრცეში.

თუ $p=0$, მაშინ გვაქვს

$$A(x^1, \dots, x^n) = - \sum_{k=1}^{n-r} |\eta_k|^2. \quad (11.19)$$

ამ შემთხვევაშიც (11.17) განტოლება, ცხადია, გამოსახავს r -განზომილებიან ჰიპერსიბრტყეს n -განზომილებიან სივრცეში.

როცა $1 < p < n-r$, მაშინ $A(x^1, \dots, x^n)$ კვადრატული ფორმა განუსაზღვრელი ნიშნისაა. ამ შემთხვევაში (11.17) გამოსახავს $n-r$ განზომილებიან მე-2 რიგის ზედაპირს n -განზომილებიან სივრცეში.

§ 12. ჰილბერტის $H_p(\Omega)$ სივრცე. ბანახის $\tilde{C}_p(\Omega)$ სივრცე

1. ჰილბერტის $H_p(\Omega)$ სივრცე. განვიხილოთ $\tilde{\mathcal{W}}_p(\Omega)$ სივრცის ისეთი ტენზორების $H_p(\Omega)$ სიმრავლე, რომელთა $\|w\|_x$ ლოკალური ნორმები, რომლებიც სკალარებს წარმოადგენენ, ინტეგრებადია თავისი კვადრატებით, ე. ი. არსებობს

$$\int_{\Omega} \|w\|_x^2 d\Omega < \infty, \quad \text{როცა } w \in H_p(\Omega), \quad (12.1)$$

ინტეგრალები, სადაც $d\Omega$ რიმანის n -განზომილებიანი მრავალსახეობის მოცულობის ელემენტი, რომელიც (7.10)-ის თანახმად ინვარიანტული

$$= \frac{1}{n!} C_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

ფორმულით გამოისახება. თუ $w, w' \in H_p(\Omega)$, მაშინ

$$|(w, w')_x| \leq \|w\|_x \|w'\|_x, \quad x \in \Omega, \quad (12.2)$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $H_p(\Omega)$ სიმრავლის ტენზორთა ლოკალური სკალარული ნამრავლები აგრეთვე ინტეგრებადია თავისი კვადრატებით. ამის გამო $H_p(\Omega)$ -ში

$$(w, w') = \int_{\Omega} (w, w')_x d\Omega, \quad w, w' \in H_p(\Omega) \quad (12.3)$$

ფორმულით შეგვიძლია განვმარტოთ სკალარული ნამრავლი, რომელსაც ლოკალური სკალარული ნამრავლისაგან განსხვავებით გლობალური ვუწოდოთ. თუ ტენზორების ლოკალური სკალარული ნამრავლის თვისებებს გამოვიყენებთ (§ 8, პუნქტი 2), ადვილად დავამტკიცებთ, რომ (12.3) გამოსახულებებს გააჩნია სკალარული ნამრავლის ყველა თვისება კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{C}$ ველზე. აქ არ ჩამოვთვლით ამ თვისებებს.

შემოვიყვანოთ ახლა ტენზორის გლობალური ნორმის ცნება შემდეგი ფორმულით

$$\|w\| = \sqrt{(w, w)} = \left(\int_{\Omega} \|w\|_x^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (12.4)$$

ცხადია, $\|w\| \geq 0$, ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\|w\|_x = 0$ თითქმის ყველგან Ω -ში. ცხადია, ჩვენ უნდა გავიგოთ w და $w' \in H_p(\Omega)$ ტენზორები, როცა $\|w - w'\|_x = 0$ თითქმის ყველგან Ω -ში.

ახლა, (12.2) უტოლობისა და ბუნიაკოვსკი — შვარცის

$$\int_{\Omega} |fg| d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g|^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (12.5)$$

უტოლობის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$|(w, w')| \leq \|w\| \|w'\|. \quad (12.6)$$

თუ გამოვიყენებთ

$$\|w + w'\|_x \leq \|w\|_x + \|w'\|_x, \quad x \in \Omega, \quad (12.7)$$

უტოლობას, ადვილად დავამტკიცებთ $H_p(\Omega)$ სიმრავლის ელემენტებისთვის

$$\|w + w'\| \leq \|w\| + \|w'\| \quad (12.8)$$

სამკუთხედის უტოლობას.

ამრიგად, $H_p(\Omega)$ წარმოადგენს ჰილბერტის სივრცეს. ეს სივრცე სასრულგანზომილებიანია და მისი განზომილება, ცხადია, n^p -ს ტოლია. ამის გამო მასში არსებობს n^p წრფივად დამოუკიდებელი ტენზორისაგან შედგენილი ბაზისი.

$H_p(\Omega)$ სივრცის ტენზორების $w_1, \dots, w_k$ სისტემას გლობალურად წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ მუდმივების ნებისმიერი არატრივიალური $c_1, \dots, c_k$ მიმდევრობისთვის სრულდება

$$c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \neq 0 \quad (\text{თითქმის ყველგან } \Omega\text{-ში}) \quad (12.9)$$

უტოლობა. წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $H_p(\Omega)$ სივრცის $w_1, \dots, w_k$ ტენზორების წრფივად დამოუკიდებლობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს

$$\det(w_i, w_j) \neq 0, \quad i, j \in [1, k] \quad (12.10)$$

პირობა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ $w_1, \dots, w_k$ ტენზორების ლოკალურად წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა $\mathcal{E}_p(\Omega)$ მოდულიდან Ω არეში, მაშინ იგი აგრეთვე გლობალურად წრფივად დამოუკიდებელიც იქნება.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ

$$c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = 0 \quad (\Omega\text{-ში}),$$

სადაც $c_1, \dots, c_k$ მუდმივებია, მაშინ ამ ტოლობის გამრავლებით (გლობალური გამრავლების აზრით) ლოკალურად ბიორთონორმალური $w_1, \dots, w_k$ სისტემის ტენზორებზე, მივიღებთ, რომ ყველა $c_j = 0$, ეს კი ჩვენს დებულებას ამტკიცებს.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, არასწორია. თუ $w_1, \dots, w_k \in H_p(\Omega)$ გლობალურად წრფივად დამოუკიდებელი ტენზორებია, მაშინ ისინი, საზოგადოდ, არ არიან ლოკალურად წრფივად დამოუკიდებელნი Ω არეში.

ორი $w, w' \in H_p(\Omega)$ ტენზორი ორთოგონალურია, თუ მათი გლობალური სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია

$$(w, w') = 0. \quad (12.11)$$

(12.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ w და w' ტენზორები ლოკალურად ორთოგონალურია არეში, მაშინ ისინი აგრეთვე გლობალურად ორთოგონალურიც იქნებიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ $w_1, \dots, w_k$ და $w^1, \dots, w^k$ ტენზორების ლოკალურად ბიორთოგონალური სისტემებია $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულიდან Ω არეში, მაშინ ისინი აგრეთვე გლობალურად ბიორთოგონალურიც არიან.

თუ $w_1, \dots, w_k$ და $w^1, \dots, w^k$ ტენზორების ლოკალურად ბიორთონორმალური სისტემებია $\widetilde{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულიდან Ω არეში, მაშინ,

$$w'_i = \frac{w_i}{\sqrt{|\Omega|}}, \quad w'^i = \frac{w^i}{\sqrt{|\Omega|}}, \quad i \in [1, k], \quad (12.12)$$

ტენზორები შეადგენს ტენზორთა. გლობალურად ბიორთონორმალურ სისტემას $H_p(\Omega)$ სივრცეში, სადაც $|\Omega|$ აღნიშნავს Ω არის მოცულობას:

$$\text{mes } \Omega = |\Omega| = \int_{\Omega} d\Omega < \infty. \quad (12.13)$$

ეს წინადადება ძალაში რჩება ტენზორების ლოკალურად ორთონორმალური სისტემის შემთხვევაშიც $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ მოდულიდან.

თუ $w_1, \dots, w_{np}$ და $w^1, \dots, w^{np}$ ლოკალურად ბიორთონორმალური ბაზისებია $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ -დან, მაშინ (12.12) ფორმულების თანახმად მათგან შეიძლება $H_p(\Omega)$ სივრცის ბიორთონორმალური ბაზისის მიღება.

ამრიგად $H_p(\Omega)$ სივრცის ბაზისები შეიძლება აიგოს, კერძოდ, მულტიპლიკაციური ტენზორების საშუალებით.

2. ბანახის $\widetilde{C}_p(\Omega)$ სივრცე. განვიხილოთ ისეთი ტენზორების $\widetilde{C}_p(\Omega)$ სიმრავლე $\widehat{\mathcal{E}}_p(\Omega)$ -დან, რომელთა ლოკალური ნორმები უწყვეტია Ω არეში. $w \in \widetilde{C}_p(\Omega)$ ტენზორის ნორმა ვუწოდოთ არაუარყოფით

$$\|w\|_c = \sup_{x \in \Omega} \|w\|_x \quad (12.14)$$

რიცხვს, თუ იგი სასრულია. ცხადია, $\|w\|_c \geq 0$, ამასთან ტოლობის ნიშანი მიიღწევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $w=0$ ყველგან Ω -ში. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (12.1) გამოსახულებას გააჩნია მეტ-

რული სივრცის ყველა თვისება. ეს მარტივად გამომდინარეობს $\|w\|_x$ ლოკალური ნორმის თვისებებიდან. ჩამოვთვალოთ ეს თვისებები.

1) თუ $\alpha \in \mathbb{R}$ და $w \in \tilde{C}_p(\Omega)$, მაშინ $\|\alpha w\|_c = |\alpha| \|w\|_c$.

2) თუ $w, w' \in \tilde{C}_p(\Omega)$, მაშინ $\|w + w'\|_c \leq \|w\|_c + \|w'\|_c$.

ამრიგად, $\tilde{C}_p(\Omega)$ წარმოადგენს ბანახის წრფივ სივრცეს კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{C}$ ველზე.

ვთქვათ Ω კომპაქტური სიმრავლეა $\mathbb{R}^n$ -ში. მაშინ, ცხადია,

$$\|w\| = \sup_{x \in \Omega} \|w\|_x = \max_{x \in \Omega} \|w\|_x = \|w\|_{\hat{x}}, \quad (12.15)$$

სადაც $\hat{x}$ წარმოადგენს Ω აჩის რაიმე წერტილს.

ტენზორული ანალიზის საფუძვლები

აქამდე ვიხილავდით ტენზორული ალგებრის საკითხებს. ამ თავში შევუდგებით ტენზორული ანალიზის საფუძვლების გადმოცემას. ტენზორებზე დიფერენციალური ოპერაციების შესწავლა, რომელიც ტენზორული ანალიზის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს, მოითხოვს ფუნქციის წარმოებულისა და დიფერენციალისათვის მიღებული ცნებების არსებით განზოგადებას. აქ, რა თქმა უნდა, იგულისხმება ამ ოპერაციათა ისეთი განზოგადებები, რომელთა გამოყენება ტენზორებზე მათ ტენზორულ ბუნებას ინახავს. ასეთი დიფერენციალური აღრიცხვის ასაგებად დაგვჭირდება სპეციალური სიდიდეები, რომლებიც მეტრული ტენზორით გამოისახებიან და რომელთაც ქრისტოფელის სიმბოლოები ეწოდებათ. რამდენადაც უცნაურია, თუმცა ისინი ტენზორებს არ წარმოადგენენ, მაგრამ მათი საშუალებით ისეთი დიფერენციალური ოპერატორები შედგება, რომელთა გამოყენება ტენზორებზე ისევ ტენზორებს გვაძლევს.

ეს მნიშვნელოვანი სიმბოლოები რომ ბუნებრივად შემოვიყვახოთ, კვლავ მივმართავთ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ვექტორულ ველებს. ეს საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ ამ სიმბოლოების ზოგადი გამოსახულებები და შევისწავლოთ მათი ძირითადი თვისებები, რომლებიც შემდეგში ადვილად განზოგადდებიან რიმანის ნებისმიერი n -განზომილებიანი მრავალსახეობის შემთხვევისათვის.

§ 1. ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოები. სადერივაციო ფორმულები

1. ქრისტოფელის სიმბოლოები ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში. სადერივაციო ფორმულები. კოორდინატთა სისტემის

საბაზისო R_i ვექტორების გაწარმოებით x^h კოორდინატის მიმართ მივიღებთ

$$\partial_h R_i \equiv \frac{\partial^2 R}{\partial x^i \partial x^h} = R_{ih}, \quad \partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}, \quad (1.1)$$

ვექტორ-ფუნქციებს. თუ მათ დავშლით მდგენელებად R_i და R^i ბაზისის მიმართ, მივიღებთ

$$R_{ih} = R_{hi} = G_{ih}, \quad R^i{}_h = R_{hi} = G_{ih}{}^i R_i \quad (1.2)$$

სახის ტოლობებს. ამ ტოლობათა R_i და R^i ვექტორებზე სკალარული გამრავლების შედეგად გვექნება

$$G_{ih}, j = R_{ih} R_j, \quad G_{ik}{}^j = R_{ih} R^j \quad (1.3)$$

ფორმულები. ეს გამოსახულებები ქრისტოფელის შესაბამისად 1-ლი და მე-2 გზების სიმბოლოებს წარმოადგენს, ხოლო (1.2) ტოლობებს კოვარიანტული საბაზისო ვექტორების სადერივაციო ფორმულები ეწოდება. ამ პარაგრაფში ყველგან, თუ საწინააღმდეგო არ იქნა აღნიშნული, ინდექსები 1, 2, 3 მნიშვნელობებს ღებულობს.

$$R_j = R^h g_{hj}, \quad R^i = R_h g^{hi}, \quad R_{ih} = R_{hi} \quad (1.4)$$

ტოლობების თანახმად (1.3)-დან გვაქვს

$$G_{ih}, j = G_{ik}{}^j g_{ij}, \quad G_{ik}{}^j = G_{ih}, j g^{ij}; \quad (1.5 \text{ ა})$$

$$G_{ih}, j = G_{hi}, j, \quad G_{ik}{}^j = G_{hi}{}^j. \quad (1.5 \text{ ბ})$$

თუ გავაწარმოებთ $R_i R_h = g_{ih}$ ტოლობის ორივე მხარეს x^i კოორდინატით და გავითვალისწინებთ (1.3) ტოლობებს, მივიღებთ

$$R_i R_{jh} + R_{ij} R_h = G_{jh}, i + G_{hi}, j = \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}. \quad (1.6 \text{ ა})$$

ამ ტოლობაში i, j, k ინდექსების წრიული გადასმით მიიღება კიდევ ორი ტოლობა:

$$G_{ih}, j + G_{jh}, i = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}, \quad (1.6 \text{ ბ})$$

$$G_{ij}, h + G_{hi}, j = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}. \quad (1.6 \text{ გ})$$

თუ ამ ტოლობათა ჯამს გამოვაკლებთ (1.6 ა) ტოლობას, მაშინ (1.5 ა)-ის თანახმად გვექნება

$$G_{ik,i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right). \quad (1.7 \text{ ა})$$

თუ ახლა (1.7 ა) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ g^{il} -ზე და j ინდექსით შევაჯამებთ, მივიღებთ

$$G_{ik}{}^l = G_{ik,i} g^{il} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) g^{il}. \quad (1.7 \text{ ბ})$$

ამრიგად, ქრისტოფელის $G_{ik,i}$ და $G_{ik}{}^l$ სიმბოლოები გამოისახება მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებითა და მათი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებით.

(1.3)-ის მე-2 ფორმულა შეიძლება ასეც ჩავეწეროთ

$$G_{ik}{}^j = \frac{\partial}{\partial x^k} (R_i R^j) - R_i \frac{\partial R^j}{\partial x^k} \equiv -R_i \partial_k R^j. \quad (1.8 \text{ ა})$$

აქ მხედველობაშია მიღებული

$$R_i R^j = \delta_i^j \quad (1.8 \text{ ბ})$$

ტოლობა. (1.8 ა)-ს თანახმად დავეწეროთ

$$\frac{\partial R^j}{\partial x^k} = -G_{ik}{}^j R^i \quad (1.8 \text{ გ})$$

ტოლობას, რომელსაც განსახილავ კოორდინატთა სისტემის კონტრავარიანტული ბაზისის ექვტორთა სადერივაციო ფორმულა ეწოდება.

2. სადერივაციო ფორმულები მულტიპლიკაციური საბაზისო ტენზორებისათვის. ახლა აღვიღოთ მივიღებთ სადერივაციო ფორმულებს მულტიპლიკაციური ტენზორებისათვის

$$e_{i_1 \dots i_p} = R_{i_1} \dots \otimes R_{i_p}, \quad e^{i_1 \dots i_p} = R^{i_1} \dots \otimes R^{i_p}. \quad (1.9)$$

ამ უკანასკნელთა x^k კოორდინატებით გაწარმოების შედეგად შეგვიძლია დავეწეროთ

$$\partial_k e_{i_1 \dots i_p} = \partial_k R_{i_1} \otimes R_{i_2} \dots \otimes R_{i_p} + \dots + R_{i_1} \dots \otimes R_{i_{p-1}} \otimes \partial_k R_{i_p}. \quad (1.10)$$

აქ მულტიპლიკაციურ ტენზორებზე გამოვიყენეთ ფუნქციათა ჩვეულებრივი ნამრავლის გაწარმოების წესი, რაც მკაცრად შეიძლება

დავასაბუთოთ, მაგრამ ამაზე არ შევჩერდებით. სადერივაციო (1.2) ფორმულების თანახმად (1.10) ტოლობა მივიღებთ სახეს

$$\partial_k e_{i_1} \dots i_p = G_{k i_1}^{j_1} e_{j_1 i_2 \dots i_p} + \dots + G_{k i_p}^{j_p} e_{i_1 \dots i_{p-1} j_p}. \quad (1.11 \text{ ა})$$

(1.8 გ) ფორმულების გამოყენებით ანალოგიურად მივიღებთ სადერივაციო ფორმულებს

$$\partial_k e^{i_1 \dots i_p} = -G_{k j_1}^{i_1} e^{j_1 i_2 \dots i_p} - \dots - G_{k j_p}^{i_p} e^{i_1 \dots i_{p-1} j_p}. \quad (1.11 \text{ ბ})$$

3. კრისტოფელის სიმბოლოების ძირითადი თვისებები. ამ პუნქტში შევისწავლით კრისტოფელის სიმბოლოების ზოგიერთ ძირითად თვისებას.

1) კრისტოფელის სიმბოლოები ნულის ტოლი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მეტრული ტენზორის ყველა კომპონენტი მუდმივ მნიშვნელობას ღებულობს მთელს არეში. ამ ღებულების საპართლიანობა გამომდინარეობს (1.7 ა) და (1.7 ბ) ფორმულებიდან. კერძოდ, კრისტოფელის სიმბოლოები ნულის ტოლია დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში.

2) ვთქვათ R_1, R_2, R_3 მარჯვენა ორიენტაციის ტრიედრია. თუ

$$R_1 R_2 R_3 = \sqrt{g} \quad (1.12)$$

ტოლობას გაეწარმოებთ x^h კოორდინატით, მივიღებთ

$$R_{1k} R_2 R_3 + R_1 R_{2k} R_3 + R_1 R_2 R_{3k} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}. \quad (1.13)$$

თუ R_{1k}, R_{2k}, R_{3k} სიდიდეებს გამოვსახავთ (1.2) ფორმულებით და მხედველობაში მივიღებთ $R_i R_j R_k = 0$ ტოლობებს, როცა i, j, k ინდექსებიდან ორი მათგანი ერთმანეთის ტოლია, (1.12) და (1.13)-ის ძალით მივიღებთ

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} = \sqrt{g} (G_{1k}^1 + G_{2k}^2 + G_{3k}^3) = \sqrt{g} G_{/k}^1,$$

ე. ი.

$$G_{kl}^l = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^k}. \quad (1.14)$$

ახლა აღვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფორმულები სამართლიანია კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი ორიენტაციის შემთხვევაში. G_{kl}^l სიდიდეებს ვუწოდოთ კრისტოფელის შეკვეცილი სიმბოლოები.

შემდგომში სისტემატურად ვისარგებლებთ ზემოთ მიღებული აღნიშვნებით

$$D_i' = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad D_k^h = \frac{\partial x^h}{\partial x^{k'}} \quad (1.15)$$

და, აგრეთვე,

$$D_i' D_j' = \delta_i^j = g_i^j, \quad D_i' D_j' = \delta_i^{j'} = g_{j'}^{i'}; \quad (1.16)$$

$$\delta_i' = \delta_i^{j'}, \quad D_i' D_j', \quad \delta_{i'}^{j'} = \delta_i^j D_i' D_j'. \quad (1.17)$$

ფორმულებით.

3) თუ განვიხილავთ ორ ნებისმიერ კოორდინატთა (x) და (x') სისტემას და გამოვიყენებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს, დავწერთ

$$\begin{aligned} R_{ih} &= \frac{\partial}{\partial x^h} (R_i) = \frac{\partial}{\partial x^h} (R_i' D_i') = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{k'}} (R_{i'}) D_k^{h'} D_i' + R_{i'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^h}. \end{aligned}$$

მაშასადამე, (1.1)-ის თანახმად, $R_{i'k'} = \frac{\partial R_{i'}}{\partial x^{k'}}$ აღნიშვნის საფუძველზე, გვექნება

$$R_{ih} = R_{i'k'} D_i' D_k^{h'} + R_{i'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^h}. \quad (1.18)$$

თუ გავამრავლებთ ამ ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად

$$R_j = R_{j'} D_j', \quad R^j = R^{j'} D_j', \quad (1.19)$$

ექვტორებზე, (1.3) და $R^{j'} R_{j'} = \delta_j^{j'}$, ტოლობების ძალით მივიღებთ ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოების გარდაქმნის შემდეგ ფორმულებს:

$$G_{ih,j} = G_{i'k',j'} D_i' D_k^{h'} D_j' + g_{i'j'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^h} D_j', \quad (1.20a)$$

$$G_{ih}^j = G_{i'k'}^{j'} D_i' D_k^{h'} D_j' + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^h} D_j'. \quad (1.20b)$$

თუ გავაყრუებთ i ინდექსს j -თან და მივიღებთ მხედველობაში (1.16) ტოლობებს, (1.14)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^h} = \frac{\partial \ln \sqrt{g'}}{\partial x^{h'}} D_k' + \frac{\partial^2 x'}{\partial x^i \partial x^h} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (1.21)$$

ფორმულას. (1.20) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ ქრისტოფელის სიმბოლოები ტენზორებს არ წარმოადგენს. წინააღმდეგ შემთხვევაში კოორდინატების მეორე რიგის წარმოებულების შემცველი შესაყრებები (1.20)-ის მარჯვენა ნაწილში არ შევიდოდა. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ეს შესაყრებები ნულის ტოლი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება ტოლობები

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^i \partial x^h} = 0, \quad i, h, i' \in [1, 3]. \quad (1.22 \text{ ბ})$$

მაგრამ მათ ადგილი აქვთ კოორდინატთა მხოლოდ აფინური გარდაქმნის შემთხვევაში

$$x' = a_i' x^i + b_i', \quad i' \in [1, 3], \quad (1.22 \text{ ბ})$$

სადაც a_i', b_i' მუდმივებია.

ამრიგად, ქრისტოფელის სიმბოლოები ტენზორულ ბუნებას ავლენს კოორდინატების მხოლოდ აფინურ გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

4) თუ (1.20 ბ) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $D_i^{j'}$ -ზე და შევაჯამებთ j ინდექსით, (1.16) ტოლობის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^i \partial x^h} = G_{ik}^j D_j^i - G_{i'k}^{j'} D_{j'}^{i'} D_k^j \quad (1.23 \text{ ა})$$

ფორმულას. როცა კოორდინატთა (x') სისტემა დეკარტისაა, მაშინ $G_{i'k}^{j'} = 0$ და (1.23 ა) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^i \partial x^h} = G_{ik}^j D_j^i, \quad \text{ე. ი.} \quad G_{ik}^j = \frac{\partial^2 x'}{\partial x^i \partial x^h}. \quad (1.23 \text{ ბ})$$

4. ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოები რიმანის n -განზომილებიან სივრცეში. ახლა წინა ფორმულებს განვაზოგადებთ რიმანის n -განზომილებიანი მრავალსახეობის შემთხვევისათვის (იხ., აგრეთვე, [15]). აქამდე ქრისტოფელის სიმბოლოების შემოყვანისა და მათი ძირითადი თვისებების დამტკიცებისას ესარგებლობდით სივრცის ევკლიდურობით. ქრისტოფელის სიმბოლოები ბუნებრივად მიიღებოდა კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტულა

და კონტრავარიანტული ბაზისის ვექტორების გაწარმოებით. ეს გზა, ცხადია, არ გამოდგება რიმანის ზოგადი მრავალსახეობის შემთხვევაში. ამის გამო მოვიქცევით შემდეგნაირად. რიმანის n -განზომილებიანი მრავალსახეობისთვის ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოებს განვმარტავთ (1.7 ა) და (1.7 ბ) ფორმულების გამოყენებით მეტრული ტენზორის g_{ij} და g^{ij} კომპონენტების საშუალებით. ინდექსები ახლა მიიღებენ $1, 2, \dots, n$ მნიშვნელობებს. მაშინ, ცხადია, შესრულდება სიმეტრიულობის (1.5 ბ) პირობები და, ამას გარდა, მეტრული ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების წარმოებულები შემდეგნაირად გამოისახებიან:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = G_{ki, j} + G_{kj, i}, \quad i, j, k \in [1, n]. \quad (1.24)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მეტრული ტენზორის კომპონენტები მუდმივ მნიშვნელობებს ღებულობს მხოლოდ მაშინ, როცა ქრისტოფელის 1-ლი გვარის ყველა სიმბოლო ნულის ტოლია და პირიქით.

რადგან

$$G_{ki, j} = G_{ki}^l g_{lj}, \quad G_{kj, i} = G_{kj}^l g_{li},$$

ამიტომ (1.24) ფორმულა შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - G_{ki}^l g_{lj} - G_{kj}^l g_{li} = 0. \quad (1.24 \text{ ა})$$

თუ გავაწარმოებთ $g_{ip} g^{pj} = \delta_i^j$ ტოლობას; გვექნება

$$\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k} g^{pj} + g_{ip} \frac{\partial g^{pj}}{\partial x^k} = 0.$$

აქედან ორივე მხარის g^{mi} -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$\frac{\partial g^{mi}}{\partial x^k} + g^{mi} g^{pj} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k} = 0.$$

თუ შევიტანთ აქ (1.24) გამოსახულებებს და ვისარგებლებთ

$$g^{pj} G_{ki, p} = G_{ki}^l g^{pj}, \quad g^{mi} G_{kp, i} = G_{kp}^m$$

ფორმულებით, მივიღებთ

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + G_{kp}^i g^{pj} + G_{kp}^j g^{ip} = 0. \quad (1.24 \text{ ბ})$$

$G_{kl}^j = G_{ik}^j$ სიმეტრიულობის გამო გვექნება აგრეთვე

$$\frac{\partial g_i^j}{\partial x^k} + G_{kp}^j g_p^i - G_{ki}^p g_p^j = 0 \quad (g_i^j = g_j^i). \quad (1.24 \text{ გ})$$

რამდენადმე უფრო რთულად მტკიცდება (1.14) ფორმულა. (I, 3.4 ა) ფორმულის გამოყენებით კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტისთვის გვექნება

$$g \in k_1 \dots k_p = \epsilon^{i_1 \dots i_n} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_n k_n} \quad (1.25)$$

ტოლობები. თუ ამ ტოლობათა ორივე მხარეს გავაწარმოებთ x^k კოორდინატით, შემდეგ კი g_{ik} -ს წარმოებულებს შევცვლით (1.24) გამოსახულებებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^k} \in k_1 \dots k_n &= \epsilon^{i_1 \dots i_n} (G_{k i_1, k_1} + G_{k k_1, i_1}) g_{i_2 k_2} \dots g_{i_n k_n} + \\ &+ \dots + \epsilon^{i_1 \dots i_n} (G_{k i_n, k_n} + G_{k k_n, i_n}) g_{i_1 k_1} \dots g_{i_{n-1} k_{n-1}} \end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $g^{k_1 l} \dots g^{k_n n}$ -ზე და მხედველობაში მივიღებთ

$$\epsilon_{k_1 \dots k_n} g^{k_1 l} g^{k_n n} = \det(g^{ik}) = \frac{1}{g}, \quad g^{kl} g_{lk} = \delta_l^k$$

ფორმულებს, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k} &= g^{k_1 l} G_{kl, k_1} + g^{k_1 l} G_{kk_1, l} + \dots + g^{k_n n} G_{kn, k_n} + \\ &+ g^{k_n n} G_{kk_n, k} = 2 G_{kl}^l. \end{aligned}$$

აქედან ერთბაშად ვღებულობთ

$$G_{kl}^j = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^k}, \quad k \in [1, n] \quad (1.26)$$

ფორმულას.

ახლა საჭიროა კიდევ გარდაქმნათა (1.20) ფორმულების განზოგადება. x^i კოორდინატების შეცვლისას x'^i კოორდინატებით $g_{ij} = g_{i'j'}, D_i' D_j'$ და (1.24)-ის თანახმად დავწერთ

$$G_{k i, j} + G_{k i, i} = \frac{\partial g_{i j}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{i' j'} D_i' D_j') D_k^* =$$

$$= (G_{k i', j'} + G_{k j', i'}) D_i' D_j' D_k^* + g_{i' j'} \frac{\partial D_i'}{\partial x^k} D_j' + g_{i' j'} D_i' \frac{\partial D_j'}{\partial x^k}.$$

ახლა თუ ამ ტოლობებში i, j, k და i', j', k' ინდექსებს წრიულად გადავანაცვლებთ, შემდეგ კი მიღებული ტოლობებიდან ავიღებთ ორი მათგანის ჯამს და მას გამოვაცლებთ მესამეს, მაშინ მივიღებთ ფორმულას, რომელიც ზუსტად დავმთხვევა (1.20 ა)-ს. ამ უკანასკნელისაგან ერთბაშად მიიღება ფორმულა, რომელიც (1.20 ბ)-ს ანზოგადებს, მისგან კი ვღებულობთ (1.23 ა) ფორმულას რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობისთვის.

ამრიგად, თუ რიმანის მრავალსახეობისათვის ქრისტოფელის სიმბოლოებს (1.7 ა) და (1.7 ბ) ფორმულების საშუალებით განვმარტავთ, მაშინ მათი ძირითადი თვისებები და, აგრეთვე, გარდაქმნათა (1.20 ა) (1.20 ბ), (1.21) და (1.23 ა) ფორმულები განზოგადდება რიმანის ნებისმიერი განზომილებიანი მრავალსახეობებისათვის. ამას გარდა, რიმანის მრავალსახეობის მეტრული ტენზორის კომპონენტთა კერძო წარმოებულებისათვის ადგილი აქვს (1.24 ა, ბ, გ) ფორმულებს.

§ 2. ტენზორების გაწარმოება

1. 1-ლი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ალგებრული ოპერაციები ტენზორებზე კვლავ ტენზორებს გვაძლევს. გაწარმოების ოპერაციის მიმართ სურათი რამდენადმე განსხვავებულია. ფ სკალარის კერძო წარმოებულები შეადგენს ∂_μ კომპონენტებიან კოვარიანტულ ვექტორს. ამ ვექტორს სკალარის გრადიენტი ეწოდება და grad ან Δ -ით აღინიშნება. მაგრამ არანულოვანი რანგის ტენზორის კომპონენტების კერძო წარმოებულები არ ქმნის ტენზორს. მაგალითად, თუ A_i წარმოადგენს 1-ლი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს $\mathcal{F}_1(\Omega)$ -დან, მაშინ კოორდინატთა x' სისტემიდან სხვა x'' სისტემაზე გადასვლისას ვაქვს $A_i = A_{i'}, D_i'$. მაშასადამე, უკანასკნელ ტოლობის გაწარმოებით დავწერთ

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (A_{i'} D_i') = \frac{\partial A_{i'}}{\partial x^k} D_i' D_k^* + A_{i'} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^h} \quad (2.1)$$

აქედან ჩანს, რომ 1-ლი რანგის ტენზორის კომპონენტების $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ კერძო წარმოებულები ტენზორს არ შეადგენს. ისინი ტენზორს შეადგენენ კოორდინატების მხოლოდ აფინური გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ, რადგან მაშინ და მხოლოდ მაშინ

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = 0.$$

ამით აიხსნება, რომ ელემენტარულ ტენზორულ ანალიზში, სადაც ჩვეულებრივ იყენებენ მხოლოდ სწორხაზოვან კოორდინატთა სისტემას, ვექტორის კომპონენტების კერძო წარმოებულები ტენზორს წარმოადგენს.

ზოგად ტენზორულ ანალიზში ჩვეულებრივი კერძო წარმოებულების ნაცვლად გვიხდება ეგრეთ წოდებული კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულების განხილვა. ამ ოპერაციებს ის უპირატესობა აქვს, რომ ტენზორებზე მათი მოქმედების შედეგად კვლავ ტენზორებს ვღებულობთ.

თუ (2.1)-ში $x^{i'}$ -ის მეორე რიგის წარმოებულებს მათი (1.23 ა) გამოსახულებებით შევცვალოთ და მხედველობაში მივიღებთ $A_{i'}, D_{i'}' = A_i$ ფორმულას, მაშინ (2.1) ტოლობები შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - G_{ik}{}^j A_j = \left(\frac{\partial A_{i'}}{\partial x^{k'}} - G_{i'k'}{}^{j'} A_{j'} \right) D_i' D_k'^j. \quad (2.2)$$

ამგვარად, 1-ლი რანგის ნებისმიერი კოვარიანტული A_i ტენზორისათვის

$$\nabla_k A_i \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - G_{ik}{}^j A_j \quad (2.3 \text{ ა})$$

გამოსახულებანი შეადგენენ მე-2 რანგის კოვარიანტულ ტენზორს. ამ ტენზორის $\nabla_k A_i$ კომპონენტებს, რომლებიც (2.3 ა) ტოლობებითაა განსაზღვრული, 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორის A_i კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ეწოდებათ.

1-ლი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულის ზემოთ შემოყვანილი განმარტება ზოგადია და სამართლიანია რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობის შემთხვევაში. ჩვენ ვისარგებლეთ 1-ლი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების გარდაქმნის ფორმულით და აგრეთვე (1.23 ა) ტოლობებით, რომელთაც ადგილი აქვთ რიმანის ნებისმიერი

სასრულგანზომილებიანი სივრცისთვის. n -განზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში (2.3 ა) ფორმულაში ინდექსები 1, 2, ..., n მნიშვნელობებს ღებულობენ.

2. 1-ლი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლები. ახლა შემოვიღოთ კოვარიანტული წარმომადგენლის ცნება 1-ლი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული A^i კომპონენტებისათვის $\mathcal{G}^1(\Omega)$ -დან. რადგან $A_i = g_{ij} A^j$, ამიტომ (2.3)-ის თანახმად გვაქვს

$$\nabla_h A_i = \partial_h (g_{ij} A^j) - G_{hi}{}^j A_j = g_{ij} \partial_h A^j + A^j \partial_h g_{ij} - G_{hi}{}^j A_j.$$

თუ აქ შევეტანთ $\partial_h g_{ij}$ -ის გამოსახულებას (1.24)-დან, გვექნება

$$\nabla_h A_i = g_{ij} \partial_h A^j + G_{hi}{}^j A^j.$$

ან, როგორც ეს (1.5 ა)-ს პირველი ფორმულის თანახმად შეიძლება დავწეროთ,

$$\nabla_h A_i = g_{ij} (\partial_h A^j + G_{hi}{}^j A^j) = g_{ij} \nabla_h A^j, \quad (2.4)$$

სადაც მივიღეთ

$$\nabla_h A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^h} + G_{hi}{}^j A^j \quad (2.3 \text{ ბ})$$

აღნიშვნები. თუ (2.4) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ g^{im} -ზე და მხელველობაში მივიღებთ, რომ $g^{mi} g_{ij} = \delta^m_j$, გვექნება

$$\nabla_h A^i = \nabla_h (g^{ij} A_j) = g^{ij} \nabla_h A_j. \quad (2.5)$$

რადგან g^{ij} და $\nabla_h A_i$ —მე-2 რანგის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული ტენზორებია, ამიტომ მათი (2.5) შიგა ნამრავლი, ცხადია, მე-2 რანგის შერეული ტენზორი იქნება.

ამრიგად, (2.3 ბ) გამოსახულებები შეადგენს მე-2 რანგის შერეულ ტენზორს. მის $\nabla_h A^i$ კომპონენტებს, რომლებიც განსაზღვრულია (2.3 ბ) ფორმულით, 1-ლი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული A^i კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლები ეწოდებათ.

თუ კოორდინატთა სისტემა დეკარტისაა, მაშინ $G_{hi}{}^j = 0$, $A_i = A^i$ და (2.3 ა, ბ) ფორმულები ღებულობს

$$\nabla_h A_i = \nabla_h A^i = \frac{\partial A_i}{\partial x^h} \quad (2.6)$$

სახეს. ამრიგად, 1-ლი რანგის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლები დეკარტის კოორდინატთა სისტემის შემთხ-

ვევაში ტოლია მათივე კერძო წარმოებულებისა ჩვეულებრივი აზრით. მაგრამ ნებისმიერ (მრულწირულ) კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში, როგორც (2.3 ა) და (2.3 ბ) ფორმულებიდან ჩანს, 1-ლი რანგის ტენზორის კოვარიანტული A_i კომპონენტის (კონტრავარიანტული A^i კომპონენტის) კოვარიანტული წარმოებულის გამოსახულებაში, გარდა ამ კომპონენტის კერძო წარმოებულებისა, შესაკრებად შედის აგრეთვე ტენზორის ყველა კომპონენტის წრფივი კომბინაცია.

შ. ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულები. ტენზორის პირდაპირი კოვარიანტული წარმოებული. ახლა გამოვიყვანოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულების გამომსახველ ფორმულებს.

განვიხილოთ ჯერ მე-2 რანგის კოვარიანტული $a_{ik} \in \mathcal{S}_2(\Omega)$ ტენზორი. ეთქვათ, A^i, B^i, C^i 1-ლი რანგის ნებისმიერი კონტრავარიანტული ტენზორებია $\mathcal{S}^1(\Omega)$ -დან. რადგან $\varphi = a_{ik} A^i B^k$ ინვარიანტია, ანტიომ $C^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ინვარიანტი იქნება. ცხადია, გვაქვს

$$C^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = C^i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^i} A^i B^k + C^i a_{ik} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} B^k + C^i a_{ik} A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i}.$$

მაგრამ (2.5)-ის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \nabla_i A^i - G_{jk}^i A^k, \quad \frac{\partial B^k}{\partial x^i} = \nabla_i B^k - G_{il}^k B^l. \quad (2.7)$$

ამის გამო წევრების ცხადი გადასმის შედეგად გვექნება

$$C^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = C^i \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^i} - G_{jk}^i a_{il} - G_{il}^k a_{ik} \right) A^i B^k + \\ + C^i a_{ik} B^k \nabla_i A^i + C^i a_{ik} A^i \nabla_i B^k.$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი და მარჯვენას მე-2 და მე-3 შესაკრებები ინვარიანტებია. ამის გამო ინვარიანტია მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრებიც. აქედან, განაყოფის წესის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ

$$\nabla_i a_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^i} - G_{jk}^i a_{il} - G_{il}^k a_{ik} \quad (2.8 ა)$$

სახის გამოსახულება შეადგენს მე-3 რანგის კოვარიანტულ ტენზორს. ამ გამოსახულებებს მე-2 რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ეწოდება. უნდა გვახსოვდეს, რომ (2.8 ა) ფორმულაში ყველა ინდექსი $1, \dots, n$ მნიშვნელობებს ღებულობს.

თუ ახლა (1.24 ა) ფორმულებს მივმართავთ, გვექნება

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (2.9)$$

ე. ი. რიმანის სივრცის მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები იგივეურად ნულის ტოლია.

გამოვიყვანოთ ახლა მე-2 რანგის შერეული ტიპის ტენზორის a_i^k კომპონენტებისათვის კოვარიანტული წარმოებულის ფორმულა.

რადგან $a_{ik} = g_{kp} a_i^p$, ამიტომ, (1.5 ა) და (1.24) ფორმულების გამოყენებით, დავწერთ

$$\begin{aligned} \partial_j a_{ik} &= g_{kp} \partial_j a_i^p + \partial_j g_{kp} a_i^p = g_{kp} \partial_j a_i^p + (G_{jk, p} + G_{jp, k}) a_i^p = \\ &= g_{kp} (\partial_j a_i^p + G_{ji}^p a_i^p) + G_{jk}^i a_{ii}. \end{aligned}$$

თუ ამ გამოსახულებას შევითავსებთ (2.8 ა) ფორმულის მარჯვენა მხარეში, მივიღებთ

$$\nabla_j a_{ik} = g_{kp} \nabla_j a_i^p \quad (2.9 ა)$$

ტოლობებს, სადაც

$$\nabla_j a_i^k = \frac{\partial a_i^k}{\partial x^j} - G_{ji}^k a_i^k + G_{ji}^k a_i^k. \quad (2.8 ბ)$$

წინა ტოლობებიდან გვაქვს

$$\nabla_j a_i^k = g^{kp} \nabla_j a_{ip}. \quad (2.9 ბ)$$

მაშასადამე, $\nabla_j a_i^k$ მატრიცა g^{kp} და $\nabla_j a_{ip}$ ტენზორების შიგა ნამრავლის შედეგად მიიღება. ამიტომ იგი წარმოადგენს მე-3 რანგის (2.1) ტიპის ტენზორს.

ამ ტენზორის $\nabla_j a_i^k$ კომპონენტებს, რომლებიც (2.8 ბ) ტოლობებით გამოისახებიან, მე-2 რანგის შერეული ტიპის ტენზორის a_i^k კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ეწოდებათ.

მე-2 რანგის შერეული ტიპის a_i^k ტენზორისათვის გვაქვს აგრეთვე

$$\Delta_k a_i^j = \partial_k a_i^j - G_{ki}^p a_i^p + G_{kp}^j a_i^p \quad (2.9 გ)$$

ფორმულები. თუ ახლა (1.24 გ) ფორმულას მივმართავთ, გვექნება

$$\nabla_k g_l^k = 0, \quad (2.9 \text{ დ})$$

ე. ი. რიმანის სივრცის მეტრიკული ტენზორის შერეული ტიპის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები იგივეურად ნულის ტოლია.

თუ ახლა ვისარგებლებთ $a_i^k = g_{ip} a^{pk}$ ფორმულით, შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობები:

$$\partial_i a_i^k = g_{ip} (\partial_i a^{pk} + G_{il}^p a^{lk}) + G_{il}^i a_i^k.$$

რომლებიც ადვილად მიიღებიან (1.24) და (1.5 ა) ფორმულების საშუალებით. თუ ამ გამოსახულებებს (2.8 ა) ტოლობათა მარჯვენა ნაწილში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\nabla_i a_i^k = g_{ip} \nabla_i a^{pk},$$

სადაც

$$\nabla_i a^{ik} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^i} + G_{il}^i a^{lk} + G_{il}^k a^{il}. \quad (2.9 \text{ გ})$$

წინა ტოლობებიდან გვაქვს

$$\nabla_i a^{ik} = g^{ip} \nabla_i a_{p,k}. \quad (2.9 \text{ დ})$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\nabla_i a^{ik}$ მატრიცა წარმოადგენს მე-3 რანგის (1,2) ტიპის ტენზორს. ამ ტენზორის კომპონენტებს, რომლებიც (2.8 გ) ფორმულებით განისაზღვრებიან, მე-2 რანგის ტენზორის კონტრაგარიანტული a^{ik} კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ეწოდებათ.

თუ ახლა (1.24 ბ) ფორმულას მივმართავთ, დავრწმუნდებით, რომ

$$\nabla_k g_{il} = 0, \quad (2.9 \text{ ე})$$

ე. ი. რიმანის სივრცის მეტრიკული ტენზორის კონტრაგარიანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები იგივეურად ნულის ტოლია.

(2.8) ფორმულების სტრუქტურის მიხედვით ახლა ადვილი დასადგენია ნებისმიერი (p, q) ტიპის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულების შედგენის ზოგადი კანონი. მაგრამ ამ განზოგადებისთვის მიზანშეწონილია ჯერ ვისარგებლოთ ევკლი-

დური სივრცის p რანგის ტენზორის შემდეგნაირი წარმოდგენით (იხ. III თავი, § 9, პუნქტი 3)

$$a = a^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p}, \quad a = a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p}, \quad (2.10).$$

სადაც

$$e_{i_1 \dots i_p} = R_{i_1} \dots \otimes R_{i_p}, \quad e^{i_1 \dots i_p} = R^{i_1} \dots \otimes R^{i_p}. \quad (2.10 \text{ ა})$$

თუ ამ ტოლობათაგან პირველს გაკაწარმოებთ x^k კოორდინატით და ვისარგებლებთ სადერევაციო (1.10) ფორმულით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \partial_k a &= (\partial_k a^{i_1 \dots i_p}) e_{i_1 \dots i_p} + a^{i_1 \dots i_p} \partial_k e_{i_1 \dots i_p} = \\ &= \nabla_k a^{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p}, \end{aligned} \quad (2.10 \text{ ბ})$$

სადაც

$$\begin{aligned} \nabla_k a^{i_1 \dots i_p} &= \partial_k a^{i_1 \dots i_p} + G_{k i_1}^{j_1} a^{j_1 i_2 \dots i_p} + \dots + \\ &+ G_{k i_p}^{j_p} a^{i_1 \dots i_{p-1} j_p}. \end{aligned} \quad (2.11 \text{ ა})$$

(2.10 ბ) ტოლობა გეჩვენებს, რომ a ტენზორის $\partial_k a$ კერძო წარმოებულები ერთი რანგით მაღალ ტენზორს წარმოადგენს. ამ წარმოებულებს $\nabla_k a$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ და a ტენზორის პირდაპირ კონტრაქციანტულ წარმოებულებს ვეწოდებთ.

ახლა (2.10)-ის მეორე ტოლობიდან (1.11 ბ) დერევაციული ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ აგრეთვე, რომ

$$\begin{aligned} \nabla_k a &= \partial_k a = \partial_k a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p} + a_{i_1 \dots i_p} \partial_k e^{i_1 \dots i_p} = \\ &= \nabla_k a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p}, \end{aligned} \quad (2.10 \text{ გ})$$

სადაც

$$\nabla_k a_{i_1 \dots i_p} = \partial_k a_{i_1 \dots i_p} - G_{k i_1}^{j_1} a_{j_1 i_2 \dots i_p} - \dots - G_{k i_p}^{j_p} a_{i_1 \dots i_{p-1} j_p}. \quad (2.11 \text{ ბ})$$

(2.11 ა) და (2.11 ბ) ფორმულები გამოსახავს p რანგის ტენზორის შესაბამისად კონტრაქციანტული და კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს. ისინი სავსებით ეთანხმებიან (2.3 ა, ბ) და (2.8 ა, გ) ფორმულებს, რჩებიან რა სამართლიანი ნებისმიერი n -განზომილებიანი რიმანის სივრცის p რანგის

ტენზორებისთვის. რა თქმა უნდა, მაშინ ინდექსები $1, \dots, n$ მნიშვნელობებს ღებულობს.

ანალოგიურად მიიღება ტენზორის შერეული კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლების ფორმულა. ვთქვათ, a წარმოადგენს $p+q$ რანგის ტენზორს. მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ (p, q) ტიპის კომპონენტების საშუალებით შემდეგი სახით:

$$a = a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1 \dots i_p} \otimes e_{j_1 \dots j_q}.$$

თუ ამ ტოლობას x^k კოორდინატით გავაწარმოებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \partial_k a &= (\partial_k a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) e^{i_1 \dots i_p} \otimes e_{j_1 \dots j_q} + \\ &+ a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (\partial_k e^{i_1 \dots i_p}) \otimes e_{j_1 \dots j_q} + \\ &+ a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1 \dots i_p} \otimes (\partial_k e_{j_1 \dots j_q}). \end{aligned}$$

ახლა სადერივაციო (1.11 ა, ბ) ფორმულების გამოყენებით ადვილად გამოვიყვანოთ

$$\partial_k a = \nabla_k a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1 \dots i_p} \otimes e_{j_1 \dots j_q} \quad (2.10 \text{ დ})$$

ფორმულას, სადაც

$$\begin{aligned} \nabla_k a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= \partial_k a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - G_{ki_1}^{l_1} a_{l_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \\ &- \dots - G_{ki_p}^{l_p} a_{i_1 \dots l_p}^{j_1 \dots j_q} + G_{k l_1}^{j_1} a_{i_1 \dots i_p}^{l_1 \dots j_q} + \\ &+ \dots + G_{k l_p}^{j_p} a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots l_p} \end{aligned} \quad (2.11 \text{ გ})$$

ეს ფორმულა გამოსახავს შერეული (p, q) ტიპის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტულ წარმომადგენლებს. იგი ეთანხმება (2.8 ბ)-ს. წარმოადგენს რა მის ბუნებრივ განზოგადებას, და სამართლიანია რიმანის ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი სივრცეათვის. აქ არ შევჩერდებით ამ განზოგადებათა დასაბუთებაზე: ისინი (2.3) და (2.8) ფორმულების ისეთი ბუნებრივი განზოგადებებია, რომ მათი დასაბუთება არც თუ აუცილებელია.

როგორც (2.11 გ) ფორმულიდან ჩანს, (p, q) ტიპის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლები $(p+1, q)$ ტიპის ტენზორს წარმოადგენს. ამრიგად, კოვარიანტული გაწარმოება ტენ-

ზორის რანგს ერთი ერთეულით აღიღებს კოვარიანტული ინდექსების რიცხვის გადიდების არჯზე.

4. ტენზორის დიფერენციალი. ტენზორთა ჯამისა და ნამრავლის გაწარმოების წესი. (2.10 ბ, გ, დ) ტოლობები გამოსახავს წერტილის კოორდინატებით ტენზორის პირდაპირი გაწარმოების ფორმულებს. კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული

$$da = \partial_i a \, dx^i = \nabla_i a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p} dx^i \quad (2.12)$$

ტოლობის საშუალებით შესაძლებელია განვმარტოთ a ტენზორის დიფერენციალი. ამ ტოლობაში, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თავისუფალი $i_1, \dots, i_p$ ინდექსები თავისი ვერტიკალის გასწვრივ თავისუფლად შეიძლება ვამოძრაოთ. უნდა შევნიშნოთ, რომ (2.10) და (2.12) ფორმულების მკაცრი დასაბუთება ზემოთ პოცემულია მხოლოდ ევკლიდური სივრცისათვის, მაგრამ ახლა შესაძლებელია მათი განზოგადება რიმანის ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი

მრავალსახეობის შემთხვევაშიაც. თუ $e^{i_1 \dots i_p}$ წარმოადგენს ზემოთ, III თავის მე-9 პარაგრაფის მე-4 პუნქტში შემოღებულ საბაზისო ტენზორებს, ინვარიანტული (2.12) ფორმულა შეგვიძლია მივიღოთ ტენზორის დიფერენციალის განმარტებად რიმანის ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი მრავალსახეობისათვის. მაშინ (2.10) ფორმულები გამოსახავს ტენზორის პირდაპირ წარმოებულს წერტილის კოორდინატების მიმართ. ამ ფორმულათა საფუძველზე რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობის ტენზორებისთვის შესაძლებელია განვზოგადოთ ჯამისა და ნამრავლის გაწარმოების წესები.

თუ a და b წარმოადგენს p რანგის ტენზორებს, $a, b \in \widehat{\mathcal{T}}_p(\Omega)$, მაშინ

$$\partial_i (a + b) = \partial_i a + \partial_i b, \quad i \in [1, n], \quad (2.13 \text{ ა})$$

$$d(a + b) = da + db. \quad (2.13 \text{ ბ})$$

თუ a, b ტენზორები შესაბამისად $p+r$ და $r+q$ რანგისაა, $a \in \widehat{\mathcal{T}}_{p+r}(\Omega)$, $b \in \widehat{\mathcal{T}}_{r+q}(\Omega)$, მაშინ

$$\partial_i (a \otimes b) = \partial_i a \otimes b + a \otimes \partial_i b, \quad i \in [1, n], \quad (2.14 \text{ ა})$$

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + a \otimes db. \quad (2.14 \text{ ბ})$$

(2.13) ფორმულათა სამართლიანობა ცხადია. საკმარისია დამტკიცოთ (2.14 ა) ფორმულები. დამტკიცება მოვიყვანოთ იმ შემთხვევაში, როცა $a, b \in \widehat{\mathcal{S}}_p(\Omega)$. განზოგადება არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს. გვაქვს

$$\begin{aligned} \partial_i (a b) &= \partial_i (a_{i_1 \dots i_p} b^{i_1 \dots i_p}) = \partial_i a_{i_1 \dots i_p} b^{i_1 \dots i_p} + \\ &+ a_{i_1 \dots i_p} \partial_i b^{i_1 \dots i_p}, \end{aligned} \quad (2.15 \text{ ა})$$

მაგრამ (2.11 ა, ბ)-ს თანახმად

$$\partial_i a_{i_1 \dots i_p} = \nabla_i a_{i_1 \dots i_p} + G_{i i_1}^{\quad i} a_{i_2 \dots i_p} + \dots + G_{i i_p}^{\quad i} a_{i_1 \dots i_{p-1}}, \quad (2.15 \text{ ბ})$$

$$\begin{aligned} \partial_i b^{i_1 \dots i_p} &= \nabla_i b^{i_1 \dots i_p} - G_{i i_1}^{\quad i_1} b^{i_2 \dots i_p} - \dots - G_{i i_p}^{\quad i_p} b^{i_1 \dots i_{p-1}}. \end{aligned} \quad (2.15 \text{ გ})$$

თუ ამ გამოსახულებებს (2.15 ა)-ში შევიტანთ, (1.5 ა) ფორმულების გამოყენებით მარტივი და ცხადი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ

$$\partial_i (a, b) = \nabla_i (a_{i_1 \dots i_p} b^{i_1 \dots i_p}) + a_{i_1 \dots i_p} \nabla_i b^{i_1 \dots i_p}. \quad (2.15 \text{ დ})$$

მეორე მხრივ, თუ გამოვიყენებთ (2.10 ბ, გ) და (III, 9.31 ა, ბ) ფორმულებს, ვაჩვენებთ, რომ

$$\begin{aligned} \partial_i a b + a \partial_i b &= \nabla_i a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p} b^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p} + \\ &+ a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1 \dots i_p} \nabla_i b^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p} = \\ &= \nabla_i a_{i_1 \dots i_p} b^{i_1 \dots i_p} + a_{i_1 \dots i_p} \nabla_i b^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned} \quad (2.15 \text{ ე})$$

რადგან (2.15 დ, ე) ფორმულების მარჯვენა მხარეები ტოლია, ამიტომ ტოლი იქნება მარცხენა მხარეებიც. მაშასადამე, (2.14 ა) ფორმულები დამტკიცებულია იმ შემთხვევაში, როცა $a, b \in \widehat{\mathcal{S}}_p(\Omega)$.

(2.13) და (2.14) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს გაწარმოების ოპერაციები უშუალოდ გამოვიყენოთ ისეთი გამოსახულებებისათვის, რომლებიც ტენზორთა ჯამებსა და ნამრავლებს შეიცავენ, ისე, რომ არ გადავიდეთ მათ კომპონენტებზე. რიგ შემთხ-

ვევაში ეს მნიშვნელოვნად ამოკლებს სხვადასხვაგვარ გამოთვლებს.

ამ პუნქტის დასასრულს აღვნიშნოთ, რომ ტენზორთა ჯამის, სხვაობის და ნამრავლის კოვარიანტული გაწარმოების წესები ზუსტად ისეთივეა, როგორც ფუნქციებისათვის მსგავს გამოსახულებათა გაწარმოების წესები.

ჩაეწეროთ ეს წესები შემოკლებული ფორმით:

$$\nabla_j(a \pm b) = \nabla_j a \pm \nabla_j b, \quad j \in [1, n], \quad (2.16)$$

სადაც a და b აღნიშნავს p რანგის a და b ტენზორების ერთი და იმავე ტიპის კომპონენტებს; მაგალითად, $a = a_{i_1} \dots i_p$, $b = b_{i_1} \dots i_p$;

$$\Delta_j(ab) = (\Delta_j a) b + a \Delta_j b. \quad (2.17)$$

აქ a და b სათანადოდ აღნიშნავს რაიმე a და b ტენზორების ნებისმიერ კომპონენტებს.

5. დისკრიმინანტული ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები. ზემოთ დამტკიცებული იყო, რომ რიმანის სივრცის მეტრიული ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\Delta_j g_{ik} = 0, \quad \Delta_i g^{ik} = 0, \quad \Delta_j g^i_i = 0. \quad (2.18)$$

(3.18) და (2.11) ფორმულების გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ეკვივალენტური ტენზორების კოვარიანტული გაწარმოების შედეგად კვლავ ეკვივალენტურ ტენზორებს მივიღებთ. 1-ლი და მე-2 რანგის ტენზორებისთვის ეს გამომდინარეობს (2.4) და (2.9) ფორმულებიდან. აქედან, კერძოდ, გვაქვს: თუ ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ნულის ტოლია, მაშინ ყველა მისი ეკვივალენტური ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულებიც აგრეთვე ნულის ტოლი იქნება.

დავამტკიცოთ აგრეთვე, რომ დისკრიმინანტული ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ნულის ტოლია. კოვარიანტული დისკრიმინანტული ტენზორი მოცემულია ტოლობებით

$$C_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{g} \in i_1 \dots i_n, \quad i_1, \dots, i_n \in [1, n], \quad (2.19)$$

სადაც n რიმანის მრავალსახეობის განზომილებაა, g — მეტრული კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\nabla_i C_{i_1 \dots i_n} = 0, \quad i, i_1, \dots, i_n \in [1, n]. \quad (2.20)$$

(2.11 ბ) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} \nabla_i C_{i_1 \dots i_n} &= \epsilon_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} - \\ &- \sqrt{g} (\epsilon_{i i_2 \dots i_n} G_{j i_1} + \dots + \epsilon_{i_1 \dots i_{n-1} i} G_{j i_n}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

თუ $\epsilon_{i_1 \dots i_n} \neq 0$, მაშინ ცხადია, რომ წინა ტოლობა მიიღებს

$$\nabla_i C_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} - \sqrt{g} (G_{j i_1} + \dots + G_{j i_n}) \right)$$

სახეს. აქ ინდექსის ქვემოთ ხაზი აღნიშნავს შეჯამების აკრძალვას. ამის გამო (1.26) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\nabla_i C_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} - \sqrt{g} G_{j i} \right) = 0.$$

გარეხილთ შემთხვევა, როცა $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$. თუ აქ ერთნაირია სამი ან მეტი ინდექსი, მაშინ (2.21) ტოლობის მარჯვენა მხარე, ცხადია, ნულად იქცევა. თუ კი $i_1, \dots, i_n$ ინდექსებს შორის მხოლოდ ორია ერთნაირი, მაშინ (2.21)-ის მარჯვენა მხარეში მხოლოდ ორი შესაძლებელი იქნება ნულისაგან განსხვავებული. მაგალითად, თუ $i_1 = i_2 = i$, მაშინ გვექნება

$$\nabla_i C_{i i_2 \dots i_n} = -\sqrt{g} (\epsilon_{i i i_2 \dots i_n} G_{j i_1} + \epsilon_{i i i_2 \dots i_n} G_{j i_n}).$$

მაგრამ $\epsilon_{i i i_2 \dots i_n} = -\epsilon_{i i i_2 \dots i_n}$. ამის გამო წინა ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია. ამგვარად, დავადგინეთ, რომ (2.20) ტოლობას ადგილი აქვს $i_1, \dots, i_n$ ინდექსების ყველა მნიშვნელობისათვის, რაც უნდა დავამტკიცებინა.

გარდა ამისა, ცხადია, რომ დისკრიმინანტული ტენზორის ყველა ეკვივალენტური კომპონენტის კოვარიანტული წარმოებულებიც აგრეთვე ნულის ტოლია.

(2.18) და (2.17)-ის თანახმად ვღებულობთ, რომ ის მამრავლები, რომლებიც წარმოადგენენ მეტრული და დისკრიმინანტული

ტენზორების კომპონენტებს, შეიძლება შევიტანოთ ან გამოვიტანოთ კოვარიანტული გაწარმოების ნიშნის გარეთ, ე. ი. კოვარიანტული გაწარმოებისას ისინი ზუსტად იგივე წესს ექვემდებარებიან, როგორსაც მუდმივი მამრავლები ფუნქციათა ჩვეულებრივი აზრით გაწარმოების შემთხვევაში.

6. ტენზორის კომპონენტების კონტრავარიანტული წარმოებულები. ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული.

$$\Delta_l a_{k_1}^{i_1} \dots i_p$$

ტენზორის ეკვივალენტურ ტენზორებს შორის გვაქვს $(q, p+1)$ ტიპის შემდეგი სახის ტენზორიც

$$\Delta^l a_{k_1}^{i_1} \dots i_p = g^{ls} \nabla_s a_{k_1}^{i_1} \dots i_p. \quad (2.22)$$

ეს ფორმულები განსაზღვრავს $a_{k_1}^{i_1} \dots i_p$ ტენზორის კომპონენტების ე. წ. კონტრავარიანტულ წარმოებულებს.

ამრიგად, m -ური რანგის A ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულები შეადგენს $m+1$ რანგის ეკვივალენტური ტენზორების კლასს. ამ უკანასკნელ ტენზორს A ტენზორის აბსოლუტურ წარმოებულს ვუწოდებთ და აღვნიშნავთ ∇A ან $\text{grad } A$ სიმბოლოთი. A ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულის წარმოსადგენად შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულით (იხ. III თავი, § 9, პუნქტი 4)

$$\nabla A \equiv \text{grad } A = \partial_i A \otimes e^i \equiv \nabla_i A_{i_1} \dots i_p e^{i_1} \dots i_p. \quad (2.23)$$

7. საბაზისო ვექტორების კოვარიანტული წარმოებულები. კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციები შესაძლებელია გამოვიყენოთ აგრეთვე საბაზისო $e^{i_1} \dots i_p$ და $e_{i_1} \dots i_p$ ტენზორებისათვისაც. ქვემოთ გავარკვევთ, რომ მათი გაწარმოების შედეგად მიიღება ნულის ტოლი ტენზორი. განვიხილოთ ჯერ ევკლიდური სივრცის შემთხვევა. თუ მივმართავთ (1.2) და (1.8 გ) ფორმულებს, მათი ჩაწერა შესაძლებელია შემდეგი სახით:

$$\nabla_i R_k \equiv \partial_i R_k - G_{ik}^j R_j = 0, \quad \Delta_i R^k \equiv \partial_i R^k + G_{ij}^k R^j = 0. \quad (2.24 \text{ ა})$$

ამგვარად, საბაზისო R_i და R^i ვექტორების კოვარიანტული წარმოებულები ნულის ტოლია.

ახლა ეს დებულება ადვილად განზოგადდება ევკლიდეს სივრცის საბაზისო $e_{i_1} \dots i_p$ და $e^{i_1} \dots i_p$ ტენზორებზე. მართლაც (2.23)-ის თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} \nabla_i e_{i_1 \dots i_p} &= (\nabla_i R_{i_1}) \otimes R_{i_2} \dots \otimes R_{i_p} + \dots + R_{i_1} \dots \otimes \\ &\otimes R_{i_{p-1}} \otimes \nabla_i R_{i_p} = 0, \end{aligned} \quad (2.24 \text{ ბ})$$

$$\begin{aligned} \nabla_i e^{i_1 \dots i_p} &= (\nabla_i R^{i_1}) \otimes R^{i_2} \dots \otimes R^{i_p} + \dots + R^{i_1} \dots \otimes \\ &\otimes R^{i_{p-1}} \otimes \nabla_i R^{i_p} = 0. \end{aligned} \quad (2.24 \text{ გ})$$

გვაქვს აგრეთვე

$$\begin{aligned} \nabla_i (e_{i_1 \dots i_p} \otimes e^{i_1 \dots i_p}) &= \\ &= (\nabla_i e_{i_1 \dots i_p}) \otimes e^{i_1 \dots i_p} + e_{i_1 \dots i_p} \otimes \nabla_i e^{i_1 \dots i_p} = 0. \end{aligned} \quad (2.24 \text{ დ})$$

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (2.24 გ, დ) ტოლობები სამართლიანია რიმანის ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი მრავალსახეობისათვის. ეს ცხადია, რადგან $e_{i_1 \dots i_p}$ ტენზორის კოვარიანტული $E_{i_1 i_1} \dots E_{i_p i_p}$ კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები ნულის ტოლია.

8. განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებულები. რიმან—ქრისტოფელის ტენზორი. III-ური რანგის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებზე თუ კვლავ გამოვიყენებთ კოვარიანტულ გაწარმოებათა ოპერაციებს, მივიღებთ $(m+2)$ რანგის ტენზორს, რომლის კომპონენტებს აქვს სახე

$$\nabla_k \nabla_i a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}, \quad p+q=m. \quad (2.25)$$

თუ ახლა განვიხილავთ ამ ტენზორის იზომერს, რომელიც მისგან მიიღება j და k ინდექსების გადანაცვლებით, ყველა სხვა ინდექსის ადგილების შეუცვლელად, მაშინ, ცხადია, მივიღებთ აგრეთვე $(m+2)$ რანგის ტენზორს, მაგრამ, საზოგადოდ, იგი არ დაემთხვევა (2.25)-ს. ეს გარემოება რიმანის მრავალსახეობის დამახასიათებელ თვისებას წარმოადგენს. ევკლიდეს სივრცის შემთხვევაში ეს ორი ტენზორი ყოველთვის ერთნაირი იქნება. მართლაც დეკარტის

კოორდინატთა სისტემაში $G_{ij}^h = 0$ და გვაქვს (სიმარტივისათვის $i_1, \dots, i_p$ და $j_1, \dots, j_q$ ინდექსებს არ ამოვწერთ)

$$\nabla_h \nabla_i a_{\dots}^{\dots} = \frac{\partial^2 a_{\dots}^{\dots}}{\partial x^h \partial x^i} = - \frac{\partial^2 a_{\dots}^{\dots}}{\partial y^i \partial x^h} = \nabla_i \nabla_h a_{\dots}^{\dots} \quad (2.26)$$

მაგრამ $\nabla_h \nabla_i a_{\dots}^{\dots}$ და $\Delta_i \nabla_h a_{\dots}^{\dots}$ წარმოადგენს $(m+2)$ რანგის ტენზორებს. რადგან მათი კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში, ამიტომ ისინი ტოლი იქნებიან კოორდინატთა ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც, რაც უნდა დავემტკიცებინა.

თუ რიმანის მრავალსახეობის ზოგად შეშებენიან დაფუძნდებით, ვიპოვებთ $\nabla_h \nabla_i a_{\dots}^{\dots} - \nabla_i \nabla_h a_{\dots}^{\dots}$ სხვაობის ცხად გამოსახულებას, რომელიც, აშკარაა, $(m+2)$ რანგის ტენზორს წარმოადგენს. ვნახავთ, რომ ეს ტენზორი გამოსახება მე-3 რანგის რაღაც ტენზორის საშუალებით, რომელსაც სიმრუდის ტენზორი ან რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი ეწოდება. ეს ტენზორი, რომელიც მეტრული ტენზორის კომპონენტებით განისაზღვრება, წარმოადგენს რიმანის მრავალსახეობის ძირითად მახასიათებელს. ევკლიდეს სივრცისათვის, როგორც ქვემოთ დავრწმუნდებით, სიმრუდის ტენზორი ნულად იქცევა.

გამოთვლათა გამარტივების მიზნით განვიხილოთ ჯერ 1-ლი რანგის ტენზორები. 1-ლი რანგის კოვარიანტული a_i ტენზორისათვის გვაქვს

$$\nabla_i a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^i} - G_{ij}^i a_j \quad (2.27)$$

აქედან

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \Delta_i a_i + G_{ij}^i a_j \quad (2.28)$$

თუ განვიხილავთ განმეორებით კოვარიანტულ $\nabla_h \nabla_i a_i$ წარმოებულებს, (2.8 ა)-ს თანახმად დავწერთ

$$\nabla_h \nabla_i a_i = \frac{\partial \nabla_i a_i}{\partial x^h} - G_{jh}^p \nabla_p a_i = G_{ih}^p \nabla_i a_p$$

თუ აქ (2.27) გამოსახულებებს შევიტანთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \nabla_h \nabla_i a_i &= \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial G_{ij}^i}{\partial x^h} a_i - G_{ij}^p \frac{\partial a_p}{\partial x^h} - \\ &- G_{jh}^p \nabla_p a_i - G_{ih}^p \nabla_i a_p \end{aligned}$$

აქ $\frac{\partial a_p}{\partial x^k}$ -ს ნაცვლად შესაბამისი გაზოსახულებების შეტანით (2.28)-დან გვექნება

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l a_l &= \frac{\partial^2 a_l}{\partial x^l \partial x^k} - G_{il}{}^p \nabla_k a_p - G_{jk}{}^p \nabla_p a_l - \\ &- G_{ik}{}^p \nabla_l a_p - \left(\frac{\partial G_{ik}{}^l}{\partial x^k} + G_{il}{}^p G_{kp}{}^l \right) a_l. \end{aligned}$$

ამ ტოლობაში თუ k და j ინდექსებს ადგილებს შევუცვლით, შევღებოთ ერთ ტოლობას მეორეს გამოვყავებთ და $G_{ij}{}^k$ სიმბოლოების ქვედა ინდექსების მიმართ სიმეტრიულობას გავითვალისწინებთ, ეპოულობთ

$$\nabla_j \nabla_k a_l - \nabla_k \nabla_j a_l = R^l{}_{ijk} a_l, \quad (2.29)$$

სადაც

$$R^l{}_{ijk} = \frac{\partial G_{ij}{}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{ik}{}^l}{\partial x^j} + G_{ij}{}^p G_{kp}{}^l - G_{ik}{}^p G_{jp}{}^l. \quad (2.30)$$

(4.5) ტოლობის მარცხენა და, მაშასადამე, მარჯვენა მხარეები მე-3 რანგის ტენზორებს წარმოადგენს ნებისმიერი 1-ლი რანგის კოვარიანტული a_i ტენზორისათვის. აქედან, გახაყოფის წესის თანახმად, გამოვღინარეობს, რომ $R^l{}_{ijk}$ (3.1) ტიპის მე-4 რანგის ტენზორია. ამ ტენზორს სიმრუდის ტენზორი ან რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი ეწოდება.

ეკვილიბრი სივრცისათვის სიმრუდის $R^l{}_{ijk}$ ტენზორი იგივერად ნულია. ეს ერთბაშად გამოვღინარეობს (2.30) ფორმულიდან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ დეკარტის კოორდინატებში $G_{ij}{}^k = 0$ და, მაშასადამე, $R^l{}_{ijk} = 0$ ამ კოორდინატებში. მაგრამ აქედან გამოვღინარეობს, რომ $R^l{}_{ijk}$ ტენზორი ნულის ტოლია ნებისმიერ სხვა კოორდინატთა სისტემაშიც.

განვიხილოთ ახლა 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი. მისთვის გვაქვს

$$\nabla_l a^l = \frac{\partial a^l}{\partial x^l} + G_{pl}{}^l a^p. \quad (2.31)$$

აქედან

$$\frac{\partial a^l}{\partial x^l} = \nabla_l a^l - G_{pl}{}^l a^p. \quad (2.32)$$

ახლა განვიხილოთ განმეორებითი კოვარიანტული $\nabla_h \nabla_l a^i$ წარმოებუ-
ლი, (2.8 ბ)-ს მიხედვით გვექნება

$$\begin{aligned}\nabla_h \nabla_l a^i &= \frac{\partial \nabla_l a^i}{\partial x^h} - G_{lh}^p \nabla_p a^i + G_{hp}^i \nabla_l a^p = \\ &= \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^h \partial x^l} + \frac{\partial G_{li}^i}{\partial x^h} a^i + G_{pi}^i \frac{\partial a^p}{\partial x^h} - G_{lh}^p \nabla_p a^i + G_{hp}^i \nabla_l a^p.\end{aligned}$$

თუ აქ $\frac{\partial a^p}{\partial x^h}$ -ს გამოსახულებებს (2.32)-დან შევიტანთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned}\nabla_h \nabla_l a^i &= \frac{\partial^2 a^i}{\partial x^h \partial x^l} + G_{pi}^i \nabla_h a^p - G_{lh}^p \nabla_p a^i + \\ &+ G_{hp}^i \nabla_l a^p + \left(\frac{\partial G_{pi}^i}{\partial x^h} - G_{lr}^i G_{hp}^r \right) a^p.\end{aligned}$$

თუ შევუცვლით h და j ინდექსებს ადგილებს, შემდეგ კი ერთ-ერთ ტოლობას გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ

$$\nabla_h \nabla_l a^i - \nabla_l \nabla_h a^i = R_{l|h}^i a^l. \quad (2.33)$$

ახლა ეს ფორმულები შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორებისთვის. დამტკიცების დეტალებზე ჩვენ არ შევჩერდებით. ამოვიწერთ ზოგად ფორმულას, რომელსაც (p, q) ტიპის ტენზორისთვის აქვს სახე

$$\begin{aligned}\nabla_h \nabla_l a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \nabla_l \nabla_h a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= \\ &= R_{l|h}^{j_1 j_2 \dots j_q} a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \dots + R_{l|h}^{j_1 j_2 \dots j_q} a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \\ &- R_{l|h}^{i_1 i_2 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \dots - R_{l|h}^{i_1 i_2 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}.\end{aligned} \quad (2.34)$$

სიმრუდის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები გამოსახება ფორმულით

$$R_{l|h} = g_{lp} R_{ijk}^p. \quad (2.35)$$

თუ ახლა (1.5 ა) და (1.24) ფორმულებს გამოვიყენებთ, დავწერთ

$$\begin{aligned}g_{lp} \frac{\partial G_{ij}^p}{\partial x^h} &= \frac{\partial g_{lp} G_{ij}^p}{\partial x^h} - G_{ij}^p \frac{\partial g_{lp}}{\partial x^h} = \\ &= \frac{\partial G_{ijl}}{\partial x^h} - G_{ij}^p G_{hlp} - G_{ij}^p G_{hpl}.\end{aligned} \quad (2.36)$$

შევიტანოთ (2.35)-ში R_{ijk}^p გამოსახულებები (2.30)-დან და შემდეგ გამოვიყენოთ (1.5 ა) და (4.12) ფორმულები, გვექნება

$$R_{ijk} = \frac{\partial G_{ij,l}}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{ik,l}}{\partial x^j} + G_{ik}^p G_{jl,p} - G_{ij}^p G_{kl,p}. \quad (2.37)$$

სიმრუდის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები აკმაყოფილებს შემდეგ დამოკიდებულებებს

$$R_{ijk} = R_{jki} = -R_{ikj} = -R_{ikj}, \quad (2.38)$$

$$R_{ijk} + R_{ikj} + R_{kji} = 0. \quad (2.39)$$

უკანასკნელ დამოკიდებულებებს *რიჩის იგივეობები* ეწოდება ტენზორული აღრიცხვის ერთ-ერთი ფუნდამენტალური Ricci-Curbastro-ს სახელის მიხედვით⁶.

(2.38) ტოლობების საშუალებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ სიმრუდის ტენზორს აქვს $\frac{m^2(m^2-1)}{12}$ არსებითი კომპონენტი. დანარჩენი

ჩენი (ნულისაგან განსხვავებული) კომპონენტები მათი საშუალებით გამოისახებიან. ორგანოზომილებიანი მრავალსახეობის შემთხვევაში, რომელსაც უფრო დაწვრილებით ქვემოთ განვიხილავთ (V თავი), სიმრუდის ტენზორს მხოლოდ ერთი არსებითი კომპონენტი აქვს. დანარჩენი 16 კომპონენტი მისი საშუალებით გამოისახება (ზოგიერთი მათგანი ნულის ტოლია).

აღვლი აქვს აგრეთვე ტოლობას [10]

$$\nabla_p R_{ijk} + \nabla_j R_{ikp} + \nabla_k R_{ijp} = 0, \quad (2.40)$$

რომელსაც *ბიანკის იგივეობა* ეწოდება. (2.38), (2.39) და (2.40) ტოლობებს რიმანის ორგანოზომილებიანი მრავალსახეობისათვის ქვემოთ დამტკიცებთ (V თავი, § 10, პუნქტი 2).

სიმრუდის R_{ijk}^l ტენზორის l და k ინდექსებს თუ შევკვეცთ, მივიღებთ მე-2 რანგის სიმეტრიულ

$$R_{ij} = R_{ji} = R_{ij}^k{}_{k} \quad (2.41)$$

⁶ დასავლეთის მათემატიკურ ლიტერატურაში ტენზორულ აღრიცხვას დღემდე უწოდებენ Ricci-Calculus (იხ. მაგალითად, [10]).

ტენზორს, რომელსაც რიჩის ტენზორი ეწოდება. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ რიჩის ტენზორი გამოისახება

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^p} G_{ij}^p - G_{ij}^p \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^p} + G_{ip}^q G_{jq}^p \quad (2.42)$$

ფორმულით. სკალარს, რომელიც მიიღება რიჩის შერეული ტიპის R_i^i ტენზორის ინდექსების შეკვეცით,

$$R = R_i^i = g^{ij} R_{ij}, \quad (2.43)$$

რიმანის სივრცის სიმრუდე ეწოდება. ორგანოზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში, რომელიც სამგანზომილებიან სივრცეში ზედაპირის სახითაა წარმოდგენილი, იგი ზედაპირის გაუსის (მთავარ) სიმრუდეს ემთხვევა (იხ. V თავი, § 10, პუნქტი 2).

ფარდობითობის თეორიაში გამოიყენება მე-2 რანგის

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad (2.44)$$

ტენზორი, რომელიც აინშტაინმა შემოიყვანა და მის სახელს ატარებს (იხ. [10]).

აინშტაინის ტენზორის დამახასიათებელი თვისება ისაა, რომ მისი დივერგენცია ნულის ტოლია

$$\nabla_i G_i^j = 0, \quad j \in [1, n]. \quad (2.45)$$

ქვემოთ ჩვენ დავინახავთ (V თავი), რომ აინშტაინის ტენზორი ორგანოზომილებიანი მრავალსახეობის შემთხვევაში იგივეურად ნულის ტოლია.

§ 3. ვექტორის დივერგენცია. გაუს—ოსტროგრადსკისა და გრიინის ფორმულები. ლაპლასის ოპერატორი მრუდწირულ კოორდინატებში

ანალიზის მრავალი მნიშვნელოვანი ფორმულა, რომელსაც ფართო გამოყენება აქვს გეომეტრიასა და ფიზიკაში, კოვარიანტული და კონტრავარიანტული გაწარმოების ოპერაციათა საშუალებით კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს.

1. ვექტორის დივერგენცია. ვთქვათ, A' წარმოადგენს $A \in V_0(\Omega)$ ვექტორის კოვარიანტულ კომპონენტებს. მაშინ, თუ $\nabla_i A'$ ტენზორში ინდექსებს შევკვეთთ, მივიღებთ $\nabla_i A'$ ინვარიანტს, რომელსაც A ვექტორის დივერგენცია ეწოდება და აღინიშნება $\operatorname{div} A$ სიმბოლოთი.

(2.3 ბ) და (1.14)-ის თანახმად გვაქვს

$$\nabla_i A' = \frac{\partial A'}{\partial x^i} + G_{ii}' A' = \frac{\partial A'}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} A',$$

გ. ო.

$$\operatorname{div} A \equiv \nabla_i A' = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} A'. \quad (3.1)$$

ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში დეკარტის x, y, z კოორდინატების მიმართ გვექნება ელემენტარული ვექტორული ანალიზის ჩვეულებრივი ფორმულა

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A'}{\partial x^i} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}. \quad (3.2)$$

2. გაუს—ოსტროგრადსკისა და გრიის ფორმულები. ვთქვათ, Ω ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის არეა, ხოლო S — მისი საზღვარი, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობა შეკრული მარტივი უბან-უბან გლუვი ზედაპირისაგან.

ვთქვათ, $A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z)$ წარმოადგენს Ω არის წერტილის დეკარტის კოორდინატების ფუნქციებს, რომლებიც უწყვეტია ჩაკეტილ $\Omega + S$ არეში, ხოლო Ω არის შიგნით გააჩნიათ უწყვეტი კერძო წარმოებულები x, y, z კოორდინატებით. ანალიზის კურსში მტკიცდება

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_S (A_1 \cos(\mathbf{n}, x) + A_2 \cos(\mathbf{n}, y) + A_3 \cos(\mathbf{n}, z)) dS \end{aligned} \quad (3.3)$$

ფორმულა, რომელიც გაუს—ოსტროგრადსკის ფორმულის სახელწოდებითაა ცნობილი. აქ $\mathbf{n}$ წარმოადგენს S ზედაპირის გარე ნორმალს. (3.2) ფორმულის გამოყენებით ეს ტოლობა შემდეგი სახით შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} A \, d\Omega = \iint_S A_{(n)} \, dS, \quad (3.4)$$

სადაც $A_{(n)}$ წარმოადგენს A ვექტორის გეგმილს S ზედაპირის ერთეულოვან გარე n ნორმალზე, ე. ი. $A_{(n)} = An = A^i n_i$. აქ n_i n ნორმალის ორტის კოვარიანტული კომპონენტებია. რადგან (3.4) ტოლობის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, ხოლო $\operatorname{div} A$ სკალარია, ამიტომ ეს ტოლობა სამართლიანი იქნება კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემისათვის. (3.1)-ის თანახმად (3.4) ფორმულა შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგნაირად:

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{Vg} \frac{\partial \sqrt{g} A^i}{\partial x^i} d\Omega \equiv \iiint_{\Omega} \nabla_i A^i d\Omega = \iint_S A^i n_i dS. \quad (3.5)$$

ვთქვათ $A = \operatorname{grad} u$, სადაც u სკალარია. მაშინ

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad A^i = g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k} = g^{ik} \nabla_k u = \nabla^i u \quad (3.6)$$

და (3.1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla_i \nabla^i u = \frac{1}{Vg} \frac{\partial \sqrt{g} \nabla^i u}{\partial x^i}. \quad (3.7)$$

დეკარტის x, y, z კოორდინატებში ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე ლაპლასის ოპერატორს წარმოადგენს

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u. \quad (3.8)$$

ამგვარად, ლაპლასის ოპერატორი სკალარისაგან სკალარია, რომელიც ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში გამოისახება (3.7) ფორმულით. მას ჩვენ ასეთი სახითაც ჩაეწერთ

$$\widehat{\Delta} u \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{Vg} \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k}}{\partial x^i}, \quad (3.9)$$

სადაც $\widehat{\Delta}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ლაპლასის ოპერატორს ნებისმიერად აღებულ კოორდინატთა სისტემაში, ვინარჩუნებთ რა Δ

სიმბოლოს (3.8) გამოსახულების აღსანიშნავად, ე. ი. ლაპლასის ოპერატორის აღსანიშნავად დეკარტის კოორდინატა სისტემაში.

თუ $A = \text{grad } u$, მაშინ (3.5)-დან მივიღებთ

$$\iiint_{\Omega} \widehat{\Delta} u d\Omega = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (3.10)$$

ტოლობას, რომელსაც ჩვეულებრივ გრინის ფორმულა ეწოდება. აქ, ამ ფორმით ჩაწერილი, იგი სამართლიანია ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატა სისტემაში.

8. ლაპლასის ოპერატორი მრუდწირულ კოორდინატებში. ორთოგონალურ კოორდინატა სისტემაში ($g_{ik}=0$, როცა $i \neq k$) (3.7) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\widehat{\Delta} u = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{\frac{g_{22} g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{g_{33} g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\sqrt{\frac{g_{11} g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial u}{\partial x^3} \right) \right]. \quad (3.11)$$

შევნიშნოთ, რომ ზემოთყვანილი ფორმულები სამართლიანია რიმანის ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში.

სფერულ კოორდინატა სისტემაში (III, 4.19) ტოლობის თანხმად გვაქვს

$$\widehat{\Delta} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (3.12)$$

ცილინდრულ კოორდინატა სისტემისთვის (III, 4.21)-ის ძალით გვაქვს

$$\widehat{\Delta} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.13)$$

4. გაუს—ოსტროგრადსკისა და გრინის ფორმულები ტენზორ-ბიხათვის. სასარგებლოა (3.5) და (3.10) ფორმულების განზოგადე-

ბა იმ შემთხვევისათვის, როცა ინტეგრალქვეშა გამოსახულებები ვექტორებს წარმოადგენს.

უპირველეს ყოვლისა ადვილად განზოგადდება (3.10) ფორმულა. ვთქვათ გვაქვს ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ვექტორული U ველი. თუ ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში U ვექტორის ლაპლასის ოპერატორს განვმარტავთ

$$\widehat{\Delta} U = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial U}{\partial x^k}}{\partial x^i} \equiv \nabla^i \nabla_i U \quad (3.14)$$

ფორმულით, სადაც $\nabla_i U = \partial_i U$ 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია $\widehat{V}_1(\Omega)$ -დან, ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ

$$\iiint_{\Omega} \widehat{\Delta} U d\Omega = \iint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS \quad (3.15)$$

ფორმულა. მართლაც, დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში უკანასკნელი ტოლობის სამართლიანობას ადვილად დავამტკიცებთ, თუ U ვექტორის ყოველ კომპონენტზე სათითაოდ გამოვიყენებთ (3.10) ფორმულას. შემდეგ, (3.14) გამოსახულებებისა და (3.15)-ის მარჯვენა მხარის ინვარიანტობის გათვალისწინებით, ცხადია, ამ ფორმულას ადგილი ექნება ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3.15) ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი რანგის ყოველი U ტენზორისთვის ევკლიდეს სივრცეში.

მოვიყვანოთ (3.5) ფორმულის კიდევ ერთი განზოგადება, რომელიც გამოიყენება უწყვეტ ტანთა წონასწორობის განტოლებების მიღებისას.

ვთქვათ, P^{ik} მე-2 რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია $\mathcal{E}^2(\Omega)$ -დან. მაშინ

$$P^i = P^{ik} R_k \equiv P^i_k R^k \quad (3.16)$$

სიდიდეები 1-ლი რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს წარმოადგენს $V^1(\Omega)$ -დან. თუ განვიხილავთ კოვარიანტულ წარმოებულებს

$$\nabla_k P^i = \partial_k P^i + G_{ki}^j P^j, \quad (3.17)$$

ხოლო შემდეგ ინდექსებს შევკვეთთ, მივიღებთ

$$\nabla_i P^i = \nabla_i P^{i*} R_k \quad (3.18)$$

ინვარიანტს, რომელიც 1-ლი რანგის ტენზორის გამოსახავს. (3.1)-ის ანალოგიურად გვექნება

$$\nabla_i P^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} P^i}{\partial x^i} \quad (3.19)$$

ფორმულა. შეიძლება უშუალოდ დავამტკიცოთ ამ გამოსახულების ინვარიანტულობა.

x^i კოორდინატების ახალ $x^{i'}$ კოორდინატებით შეცვლისას გვექნება

$$P^i = P^{i'} D_{i'}^i, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^i} &= \frac{\partial \ln \sqrt{g'}}{\partial x^{i'}} D_{i'}^i + \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^{i'}} D_{k'}^i = \\ &= \frac{\partial \ln \sqrt{g'}}{\partial x^{i'}} D_{i'}^i + D_{k'}^i \frac{\partial}{\partial x^k} D_{i'}^k \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.20) და (3.21) ფორმულების თანახმად დავწერთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} P^i}{\partial x^i} &= \frac{\partial P^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^i} P^i = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{k'}} (P^{i'} D_{i'}^i) D_{i'}^k + \left[\frac{\partial \ln \sqrt{g'}}{\partial x^{i'}} D_{i'}^i + \frac{\partial}{\partial x^{m'}} D_{i'}^{m'} \right] P^{i'} D_{i'}^i = \\ &= \frac{\partial P^{i'}}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \ln \sqrt{g'}}{\partial x^{i'}} P^{i'} + P^{i'} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} D_{i'}^i + \left(\frac{\partial}{\partial x^{m'}} D_{i'}^{m'} \right) D_{i'}^i \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^{m'}} D_{i'}^{m'} \right) D_{i'}^i &= \frac{\partial}{\partial x^{m'}} (D_{i'}^{m'} D_{i'}^i) - D_{i'}^{m'} \frac{\partial}{\partial x^{m'}} D_{i'}^i = \\ &= \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} - \frac{\partial}{\partial x^i} D_{i'}^i = - \frac{\partial}{\partial x^i} D_{i'}^i. \end{aligned}$$

ამის გამო

$$\frac{\partial}{\partial x^i} D_{i'}^i + \left(\frac{\partial}{\partial x^{m'}} D_{i'}^{m'} \right) D_{i'}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} D_{i'}^i - \frac{\partial}{\partial x^i} D_{i'}^i = 0$$

და (5.22) ტოლობა დებულობს სახეს

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} P^i}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial \sqrt{g'} P^{i'}}{\partial x^{i'}}, \quad (3.23)$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა. მოყვანილი დამტკიცება სამართლიანია რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობის შემთხვევაში.

ახლა ადვილად დავამტკიცებთ

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} P^i}{\partial x^i} d\Omega = \iint_S P^i n_i dS \quad (3.24)$$

ფორმულას. მართლაც, დეკარტის კოორდინატთა სისტემისთვის იგი გამომდინარეობს გაუს—ოტროგრადსკის ფორმულიდან. მაგრამ (3.24) ტოლობის ორივე მხარის ინვარიანტობის გამო ცხადია, რომ იგი სამართლიანი იქნება ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაშიც.

ამ პუნქტის დასასრულს შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ინვარიანტული გამოსახულებები და ინტეგრალური ფორმულები განზოგადდება რიმანის ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი მრავალსახეობისთვის. კერძოდ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ისინი სამართლიანია ზედაპირებისთვისაც. აუცილებელია გვახსოვდეს, რომ ლაპლასის ოპერატორი (3.8) სახით შეიძლება ჩავწეროთ ისეთი მრავალსახეობებისთვის, რომლებზედაც არსებობს დეკარტის კოორდინატთა სისტემები.

და ბოლოს შევნიშნოთ, რომ დივერგენციის ცნება შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორებზე. ადვილად დავაწმუენდებით, რომ ვექტორისთვის გვაქვს ფორმულა

$$\operatorname{div} A = R^i \partial_i A. \quad (3.25)$$

მართლაც,

$$R^i \partial_i A = R^i (\nabla_i A^j R_j) = \nabla_i A^j R^i R_j = \nabla_i A^j \delta^i_j = \nabla_i A^i = \operatorname{div} A.$$

ახლა (3.25) ფორმულის საშუალებით ჩვენ განვმარტავთ ნებისმიერი რანგის A ტენზორის დივერგენციას. თუ A წარმოადგენს p რანგის ტენზორს, მაშინ

$$\partial_i A = \nabla_i A^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \dots e_{i_p}. \quad (3.26)$$

ამ შემთხვევაში (3.25) ფორმულა შემდეგი სახით შეიძლება ჩაწეროს

$$\operatorname{div} A = \nabla_i A^{i_1 \dots i_p} R^{i_1}_{i_1} e_{i_1 \dots i_p} = \nabla_i A^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p}. \quad (3.27)$$

ამგვარად, $\operatorname{div} A$ არის $p-1$ რანგის ტენზორი $\nabla_i A^{i_1 \dots i_{p-1}}$ კონტრაქციონტული კომპონენტებით.

ზედაპირის ტენზორები. ზედაპირთა თეორიის ელემენტები

ამ თავში და მომდევნო თავებში დაწვრილებით გავაშუქებთ ტენზორული ანალიზის საფუძვლებს რიმანის ისეთი ორგანზომილებიანი მრავალსახეობების შემთხვევაში, რომელთა რეალიზაცია შესაძლებელია ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ზედაპირების სახით. ჩვენს აგებებში ფართოდ გამოვიყენებთ გეომეტრიულ თვალსაჩინოებას და ტენზორული აღრიცხვის გამოყენებით პარალელურად გადმოცემთ ზედაპირთა თეორიის ელემენტებს (იხ. აგრეთვე [5], [6], [8], [13]). გვეცნობით ზოგიერთ ცნებასა და განმარტებას, რომლებიც ზედაპირის შიგა გეომეტრიას ახასიათებენ.

შემდგომში ბევრი დამტკიცება გამოტოვებულია ამის გამო, რომ ისინი ხორციელდებიან წინა პარაგრაფებიდან ჩვენთვის კარგად ცნობილი მსჯელობების გამეორებით.

§ 1. ზედაპირის პარამეტრული განტოლება.

კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტული და
კონტრავარიანტული ბაზისები

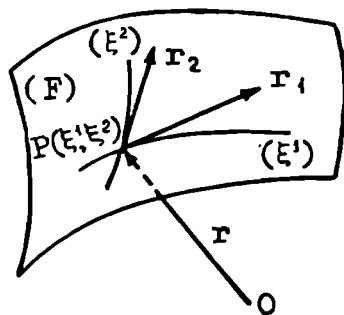
1. ზედაპირის პარამეტრული განტოლება. საკოორდინატო წერები. როგორც ცნობილია, ზედაპირის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს პარამეტრული ფორმით

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2), \quad i \in [1, 3], \quad (1.1)$$

სადაც x^1, x^2, x^3 ზედაპირის წერტილის კოორდინატებია სივრცეში აღებული რაიმე კოორდინატთა სისტემის მიმართ, ხოლო ξ^1, ξ^2 — დამოუკიდებელი ცვლადებია, რომელთაც გაუხსნის პარამეტრები ან ზედაპირის შიგა კოორდინატები ეწოდებათ.

როგორც ზემოთ უკვე აღინიშნა, ჩვენი აგებები ლოკალურ ხასიათს ატარებს. ე. ი. ზედაპირის თვისებებს იყენებს განსახილავი წერტილის ნებისმიერად მცირე მიდამოში. ამის გამო ზედაპირის განტოლების ჩაწერა (1.1) სახით საკმარისია განვახორციელოთ მხოლოდ ლოკალურად.

თუ (1.1)-ში ξ^2 ცვლადს დავაფიქსირებთ და ξ^1 -ს უწყვეტად ვცვლით, ზედაპირზე მივიღებთ წირს, რომელსაც საკოორდინატო (ξ^1) წირს ეუწოდებთ. ანალოგიურად, ξ^1 -ის დაფიქსირებით და ξ^2 -ის ცვლით, მივიღებთ საკოორდინატო (ξ^2) წირს. ვიგულისხმებთ, რომ ზედაპირის ყოველ წერტილში გადის თითო საკოორდინატო წირი და აკუთხე ამ წირებს შორის მათი გადაკვეთის წერტილში აკმაყოფილებს $0 < \omega < \pi$ უტოლობას.



ნახ. 11

საკოორდინატო (ξ^1) და (ξ^2) წირთა ბადეს ზოგჯერ შემოკლებით (ξ) ან S_ξ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

2. კოვარიანტული მოძრავი ბაზისი. ვთქვათ r წარმოადგენს F

ზედაპირის წერტილის რადიუს-ვექტორს, $r = \vec{OP}$, სადაც O სივრცის რაიმე ფიქსირებული წერტილია, ხოლო P — ზედაპირის ცვლადი წერტილი. ცხადია, r წარმოადგენს P წერტილის ξ^1, ξ^2 კოორდინატების ფუნქციას,

$$r = r(P) = r(\xi^1, \xi^2). \quad (1.2)$$

თუ ამ ტოლობას ξ^1, ξ^2 კოორდინატებით გავაწარმოებთ, მივიღებთ ორ ვექტორ-ფუნქციას

$$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.3)$$

რომლებიც, ცხადია, სათანადო საკოორდინატო წირებს ეხებიან P წერტილში (ნახ. 10). მაშასადამე, ისინი მოთავსებულია შესაბამის მხებ სიბრტყეში და არაკოლინეარული არიან. ეს ვექტორ-ფუნქციები შეადგენს კოორდინატთა (ξ) სისტემის მოძრავ ბაზისს.

ზედაპირის ξ^a კოორდინატებიდან სხვა რაიმე $\xi^{a'}$ კოორდინატებზე გადასვლა შემდეგი სახის არაგანსაკუთრებული

$$\xi^{B'} = \psi^{B'}(\xi^1, \xi^2) \quad (1.4)$$

გარდაქმნებით ხორციელდება, სადაც $\psi^{B'}$ თავისი არგუმენტების ცალსახა უწყვეტი ფუნქციებია. შემდგომში ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ამ ფუნქციებს გააჩნია საჭირო რიცხვი უწყვეტი კერძო წარმოებულებისა, ე. ი. განვიხილავთ რაიმე C_k , $k \geq 1$ კლასის გარდაქმნებს. ამასთან არ გამოვირიცხავთ C_∞ კლასის გარდაქმნებს. ამას გარდა ვუშვებთ, რომ გარდაქმნის ფუნქციონალური დეტერმინანტი (იაკობიანი) არსად არ ხდება ნულის ტოლი,

$$J(\xi', \xi) = \frac{D(\xi^1', \xi^2')}{D(\xi^1, \xi^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^1'}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \xi^1'}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \xi^2'}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \xi^2'}{\partial \xi^2} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.5)$$

ვიგულისხმობთ აგრეთვე, რომ ზედაპირი საკმარისად გლუვია. გარკვეულობისთვის დაეუშვათ, რომ განსახილავი ზედაპირი ეკუთვნის C_m , $m \geq 1$ კლასს. ასეთ ზედაპირებს რეგულარული ვეწოდოთ. მაშინ r რადიუს-ვექტორი და მისი წარმოებულები გაუსის კოორდინატების მიმართ m რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი იქნება.

შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ α , β , α' , β' , α_1 , γ_k და ა. შ. სახის ბერძნული ინდექსები ღებულობს 1, 2 მნიშვნელობებს. ამას გარდა, ჩვენ სისტემატურად ვისარგებლებთ უკვე ჩვეული

$$D_{\alpha'}^{\alpha} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha'}}, \quad D_{\alpha}^{\alpha'} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha'}}{\partial \xi^{\alpha}} \quad (1.6)$$

აღნიშვნებითა და შემდეგი აშკარა ტოლობებით:

$$D_{\alpha'}^{\alpha} D_{\alpha}^{\beta'} = \delta_{\alpha'}^{\beta'}, \quad D_{\alpha}^{\alpha'} D_{\alpha'}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad (1.7)$$

$$\delta_{\alpha}^{\alpha} = \delta_{\alpha'}^{\alpha'} = D_{\alpha'}^{\alpha} D_{\alpha}^{\alpha'}. \quad (1.8)$$

ხშირად ვისარგებლებთ აგრეთვე

$$\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}}, \quad \partial_{\alpha'} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha'}} \quad (1.9)$$

აღნიშვნებით. თუ (1.4) ტოლობას გავადიფერენციალებთ, მივიღებთ ფორმულებს

$$d\xi^a = D_a^a d\xi^a, \quad (1.10)$$

რომლის მიხედვითაც გარდაიქმნება კოორდინატთა დიფერენციალები გაუსის კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლისას. მაშასადამე, $d\xi^a$ გარდაიქმნება კონტრავარიანტული კანონით. φ სკალარის კერძო წარმოებულები კოვარიანტული კანონით გარდაიქმნება

$$d_a \varphi = D_a^a \varphi. \quad (1.11)$$

(1.3) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ გაუსის ერთი პარამეტრებიდან მეორეზე გადასვლისას აგრეთვე კოვარიანტული კანონით გარდაიქმნება ზედაპირის კოორდინატთა სისტემის ბაზისის შემადგენელი r_a ვექტორ-ფუნქციები,

$$r_a \equiv d_a r = D_a^a r, \quad r_a \equiv d_a r. \quad (1.12)$$

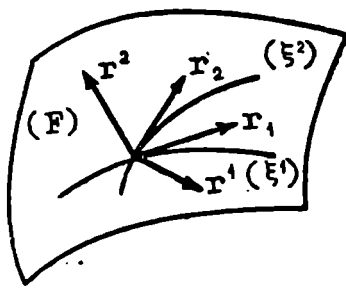
ამის გამო ვიტყვი, რომ r_1 და r_2 ვექტორ-ფუნქციები ზედაპირის შესაბამისი კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტულ ბაზისს შეადგენს.

3. კონტრავარიანტული მოძრავი ბაზისი. ავაგოთ ბიორთონორმალური შეუღლებული r^1, r^2 ბაზისი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$r_a r^b = \delta_a^b, \quad n r^b = 0 \quad (1.13)$$

პირობებს, სადაც n წარმოადგენს F ზედაპირის ნორმალის ორტს საბაზისო r_a და r^a ვექტორ-ფუნქციების მოდების წერტილში. თუ ამ ტოლობათაგან პირველის ორივე მხარეს $d\xi^a$ -ზე გავამრავლებთ და გავთვალისწინებთ, რომ $dr = r_a d\xi^a$, მივიღებთ

$$r^b dr = d\xi^b \quad (1.14)$$



ნახ. 12

ტოლობას. გაუსის ახალი ξ^a პარამეტრებისათვის ანალოგიურად მივიღებთ $r^a dr = d\xi^a$ ან (1.10) და (1.14) ფორმულების თანახმად $r^a dr = D_a^a d\xi^a = D_a^a r^a dr$. აქედან გვაქვს

$$(r^a - D_a^a r^a) dr = 0.$$

რადგან dr წარმოადგენს F ზედაპირის ნებისმიერი მიმართულების მხებ ვექტორს, ხოლო $r^{\alpha'} = D_{\alpha'}^{\alpha} r^{\alpha}$ ვექტორ-ფუნქციებია, რომლებიც F -ის მხებ სიბრტყეში მდებარეობენ, ე. ი. F ზედაპირს ეკუთვნიან, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r^{\alpha'} = D_{\alpha'}^{\alpha} r^{\alpha}. \quad (1.15)$$

ამრიგად, გაუსის კოორდინატების შეცვლისას კოორდინატთა სისტემის ბიორთონორმალური ბაზისის r^{α} ვექტორ-ფუნქციები $d\xi^{\alpha}$ დიფერენციალების კოგრედინტულად, ე. ი. კონტრავარიანტული კანონით გარდაიქმნება, ამის გამო r^1, r^2 -ს კოორდინატთა სისტემის კონტრავარიანტულ მოძრავ ბაზისსაც ვუწოდებთ.

ახლა, ცხადია, გვაქვს ტოლობები

$$r_{\alpha} = a_{\alpha\beta} r^{\beta}, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = r_{\alpha} r_{\beta}, \quad (1.16)$$

$$r^{\alpha} = a^{\alpha\beta} r_{\beta}, \quad a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha} = r^{\alpha} r^{\beta}. \quad (1.17)$$

(1.12) და (1.15) ფორმულების გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $a_{\alpha\beta}$ და $a^{\alpha\beta}$ მე-2 რანგის სიმეტრიული შესაბამისად კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორებია. (1.16) და (1.17) გამოსახულებების შეტანით (1.13)-ში მივიღებთ

$$a_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (1.18)$$

(1.18) განტოლებებიდან ვღებულობთ

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad (1.19)$$

სადაც

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (1.20)$$

მართლაც,

$$a_{11} = (r_1)^2 > 0, \quad a_{22} = (r_2)^2 > 0,$$

$$a = (r_1)^2 (r_2)^2 - (r_1 r_2)^2 = |r_1|^2 |r_2|^2 \sin^2 \omega > 0. \quad (1.21)$$

§ 2. ზედაპირის პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა.

ზედაპირის დისკრიმინანტული ტენზორები

1. პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა. ზედაპირის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორები. F ზედაპირზე

რკალის სიგრძის ელემენტი ვუწოდოთ მის ორ უსასრულოდ მახლობელ $P(\xi^1, \xi^2)$ და $P'(\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$ წერტილებს შორის მანძილს. თუ ამ მანძილს ds -ით აღვნიშნავთ, ხოლო $\vec{PP'}$ ვექტორს — dr -ით, მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეთა სიხუსტით გვეჩვენება (ნახ. 13)

$$ds^2 = dr dr = r_a r_b d\xi^a d\xi^b, \quad (2.1)$$

ე. ი.

$$ds^2 = a_{ab} d\xi^a d\xi^b, \quad (2.2)$$

$$a_{ab} = a_{ba} = r_a r_b.$$

(2.1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ (2.2) ფორმა ინვარიანტულია და დადებითად განსაზღვრული. ამიტომ იგი შეიძლება გამოვიყენოთ ზედაპირზე რკალის სიგრძის გასაზომად. მას ზედაპირის პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა

ანუ მეტრული ფორმა ეწოდება. შემოკლებით მას I ფორმასაც უწოდებენ. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ აგრეთვე ზედაპირის მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმასაც, რომელსაც II ფორმა ეწოდება.

მე-2 რანგის სიმეტრიულ კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ a_{ab} და a^{ab} ტენზორებს ზედაპირის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ მეტრულ ტენზორებს ვუწოდებთ. დადებით a სიდიდეს (2.2) კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ეწოდება.

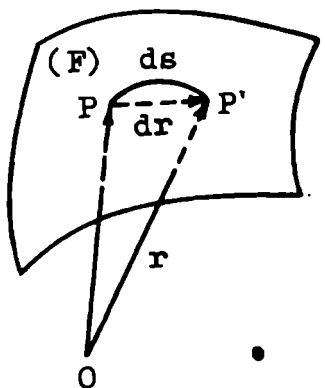
ზედაპირის მეტრული ფორმის $a = \det(a_{ab})$ დისკრიმინანტი გაუ-სის ერთი კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლისას

$$a' = \left[\frac{D(\xi^1, \xi^2)}{D(\xi'^1, \xi'^2)} \right]^2 a = J^2(\xi, \xi') a \quad (2.3)$$

ფორმულით გარდაიქმნება. აქედან გვაქვს

$$\sqrt{a'} = \sqrt{a} \left| \frac{D(\xi^1, \xi^2)}{D(\xi'^1, \xi'^2)} \right| = |J(\xi, \xi')| \sqrt{a} \quad (2.4)$$

კოორდინატთა (ξ) სისტემას ორთოგონალური ეწოდება, თუ ბაზისის ვექტორ-ფუნქციები ურთიერთმართობულია ზედაპირის



ნახ. 13

ყოველ წერტილში. ცხადია, ზედაპირის კოორდინატთა სისტემის ორთოგონალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა

$$a_{12} = 0 \quad (2.5)$$

ტოლობის შესრულება. ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემა-სათვის (1.19) ფორმულები ლებულობს სახეს

$$a^{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad a^{22} = \frac{1}{a_{22}}, \quad a^{12} = a^{21} = 0. \quad (2.6)$$

2. ზედაპირის ფართის ელემენტი. ზედაპირის დისკრიმინანტუ-ლი ტენზორები. $r_1 d\xi^1$ და $r_2 d\xi^2$ ვექტორებზე აგებული პარალელო-გრამის ფართობს ეწოდება ზედაპირის ფართის ელემენტი (ξ) კოორდინატთა სისტემაში. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $d\xi^1 > 0$, $d\xi^2 > 0$, გვექნება $d\Sigma = \Sigma d\xi^1 d\xi^2$, სადაც Σ აღნიშნავს ბაზისის r_1 და r_2 ვექ-ტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს. გვაქვს

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &= |r_1 \times r_2|^2 = |r_1|^2 |r_2|^2 \sin^2 \omega = |r_1|^2 |r_2|^2 - (r_1 r_2)^2 = \\ &= a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 = a > 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ამგვარად, ზედაპირის ფართის ელემენტი გამოისახება შემდე-გი ფორმულით

$$d\Sigma = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2. \quad (2.8)$$

თუ ვისარგებლებთ კოორდინატების $d\xi^\alpha$ დიფერენციალთა გა-რე გამრავლების კანონით, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში გამოისა-ხება

$$d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.9)$$

ფორმულით, სადაც

$$\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0, \quad \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1. \quad (2.10)$$

(2.9) ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ ინვარიანტული ფორმით

$$d\Sigma = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta, \quad (2.11)$$

სადაც

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{a} \epsilon_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

ე. ი.

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a} \quad (2.13)$$

დავამტკიცოთ, რომ $c_{\alpha\beta}$ მე-2 რანგის კოვარიანტული ტენზორია. დავუშვათ, რომ n ნორმალის მიმართულება და კოორდინატთა (ξ) სისტემა არჩეულია ისე, რომ n, r_1, r_2 ტრიედრი მარჯვენა ორიენტაციისაა. მაშინ (2.7) ტოლობების თანახმად გვექნება

$$r_1 \times r_2 = \sqrt{a} n, \quad \text{ე. ი.} \\ \sqrt{a} = nr_1 r_2. \quad (2.14)$$

ახლა, (2.13) ტოლობების დახმარებით, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$c_{\alpha\beta} = nr_\alpha r_\beta. \quad (2.15)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $c_{\alpha\beta}$ მე-2 რიგის ირიბსიმეტრიული ტენზორია. მას ეწოდება ზედაპირის დისკრიმინანტული კოვარიანტული ტენზორი.

განვიხილოთ მატრიცები

$$c^{\alpha\beta} = nr^\alpha r^\beta, \quad c_\alpha^\beta = nr_\alpha r^\beta, \quad c_\beta^\alpha = nr^\alpha r_\beta. \quad (2.16)$$

(1.12) და (1.15) ფორმულების გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ $c^{\alpha\beta}$ მე-2 რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია, ხოლო c_α^β და c_β^α — მე-2 რანგის შერეული ტიპის ტენზორები.

ცხადია,

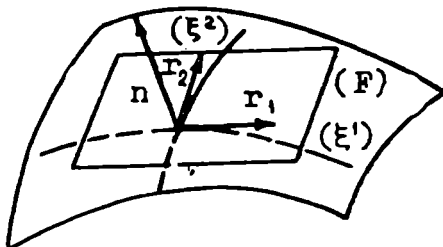
$$c^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\gamma} c_{\lambda\gamma}, \quad c_\alpha^\beta = a^{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}, \quad c_\beta^\alpha = a^{\beta\gamma} c_{\gamma\alpha}. \quad (2.17)$$

პირველი ფორმულიდან გვაქვს

$$c^{11} = c^{22} = 0, \quad c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (2.18)$$

$c^{\alpha\beta}, c_\alpha^\beta, c_\beta^\alpha$ ტენზორებსაც აგრეთვე ზედაპირის დისკრიმინანტული ტენზორები ეწოდება.

12. ი. ვეჟა



ნახ. 14

(2.15), (2.16) და (2.17) ფორმულების საშუალებით ადვილად მივიღებთ

$$n \times r_a^\alpha = c_{\alpha\beta} r^\beta = c_{\alpha}^\beta r_\beta, \quad n \times r^\alpha = c^{\alpha\beta} r_\beta = c^{\alpha}_\beta r^\beta \quad (2.19)$$

მნიშვნელოვან ტოლობებს.

8. კუთხე ორ მხეზ მიმართულებას შორის. მეტრული ტენზორის საშუალებით შეიძლება გამოვსახოთ ზედაპირის ორ მხეზ მიმართულებას შორის კუთხე.

ვთქვათ, l და s ორი ისეთი ორთოგონალური მხეზი მიმართულების ორტეზია, რომლებიც ზედაპირის რაიმე P წერტილში იკვეთებიან. ისინი გამოისახებიან

$$l = l^\alpha r_\alpha = l_\alpha r^\alpha, \quad s = s^\beta r_\beta = s_\beta r^\beta \quad (2.20)$$

ფორმულებით, სადაც

$$l^\alpha = l r^\alpha, \quad l_\alpha = l r_\alpha, \quad s^\beta = s r^\beta, \quad s_\beta = s r_\beta. \quad (2.21)$$

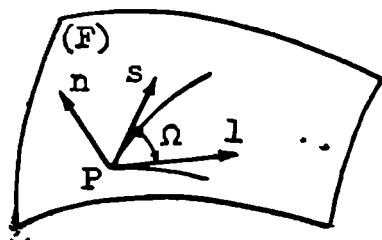
გვაქვს შემდეგი ცხადი დამოკიდებულებები:

$$l_\alpha = a_{\alpha\beta} l^\beta, \quad l^\alpha = a^{\alpha\beta} l_\beta, \quad s_\alpha = a_{\alpha\beta} s^\beta, \quad s^\alpha = a^{\alpha\beta} s_\beta. \quad (2.22)$$

ამას გარდა, თუ მხედველობაში მივიღებთ

$$n \times l = s, \quad l \times s = n, \quad s \times n = l \quad (2.23)$$

ტოლობებს, (2.15) და (2.16)-ის თანახმად დავწერთ



ნახ. 15

$$s = n \times l = n \times l^\alpha r_\alpha = l^\alpha c_{\alpha\beta} r^\beta = l_\alpha c^{\alpha\beta} r_\beta,$$

$$l = s_j^\beta \times n = s^\alpha r_\alpha \times n = -s^\alpha c_{\alpha\beta} r^\beta = -s_\alpha c^{\alpha\beta} r_\beta.$$

აქედან ვღებულობთ

$$s_\beta = c_{\alpha\beta} l^\alpha, \quad s^\beta = c^{\alpha\beta} l_\alpha, \quad (2.24)$$

$$l_\beta = c_{\beta\alpha} s^\alpha, \quad l^\beta = c^{\beta\alpha} s_\alpha \quad (2.25)$$

ფორმულებს.

ვთქვათ, Ω ნებისმიერად არჩეულ ორ მხეზ l და s ორტებს შორის კუთხეა (ნახ. 15). მაშინ (2.20)—(2.22) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\cos \Omega = ls = a_{\alpha\beta} l^\alpha s^\beta \quad (2.26)$$

ფორმულას, რომელიც, (2.22) ტოლობებისა და მეტრული ტენზორის თვისებების გამოყენებით, შეიძლება კიდევ სამი ეკვივალენტური ფორმით ჩავწეროთ

$$\cos \Omega = a^{\alpha\beta} l_\alpha s_\beta = l_\alpha s^\alpha = l^\alpha s_\alpha. \quad (2.26a)$$

თუ ξ^α კოორდინატების ნაზრდებს l და s -ის გასწვრივ შესაბამისად $d\xi^\alpha$ და $d\xi^\alpha$ -თი აღვნიშნავთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$s^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \quad l^\beta = \frac{d\xi^\beta}{dl}, \quad (2.27)$$

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad dl^2 = a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.28)$$

მაშინ (2.26) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\cos \Omega = \frac{a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{\sqrt{a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta} \sqrt{a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}}. \quad (2.29)$$

კერძოდ, თუ ω საკოორდინატო წირებს შორის კუთხეა, მაშინ

$$\cos \omega = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}. \quad (2.30)$$

აქედან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ a_{12} -ის ნულთან ტოლობა წარმოადგენს ზედაპირზე კოორდინატთა სისტემის ორთოგონალობის აუცილებელ და საკმარის პირობას.

დისკრიმინანტული $c_{\alpha\beta}$, c_α^β , c_β^α , $c^{\alpha\beta}$ ტენზორების საშუალებით ახლა შეგვიძლია გამოვსახოთ ორ მხებ მიმართულებას შორის კუთხის სინუსი. (2.20) და (2.15)-ის თანახმად დავწეროთ

$$\sin \Omega = |sn| = l^\alpha s^\beta r_\alpha r_\beta n = c_{\alpha\beta} l^\alpha s^\beta \quad (2.31)$$

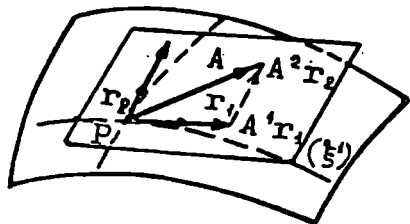
ფორმულას, რომელიც შეგვიძლია აგრეთვე სამი ინვარიანტული ფორმით ჩავწეროთ

$$\sin \Omega = c^{\alpha\beta} l_\alpha s_\beta = c_\alpha^\beta l_\alpha s^\beta = c_\beta^\alpha l^\alpha s_\beta. \quad (2.32)$$

§ 8. ზედაპირის ტენზორები

1. 1-ლი რანგის ტენზორები. შემდგომში განვიხილავთ $f: F \rightarrow \mathcal{F}$ და $F \rightarrow \mathcal{F}$ ასახვათა შესაბამის $\mathcal{F}(F)$ და $\mathcal{F}(F)$ რგოლებს, აგრეთვე (F) კოორდინატთა სისტემაში მათი $f(F)$ კომპონენტების $\mathcal{F}_F(F)$ და

$\mathcal{H}_\xi(F)$ რგოლებს. ჩვენ განვიხილავთ აგრეთვე სხვადასხვა $\mathcal{M}(F)$ და $\mathcal{M}_\xi(F)$ მოდულებს შესაბამისად $\mathcal{S}(F)$ და $\mathcal{S}_\xi(F)$ რგოლებზე. $\mathcal{S}(F)$ -მოდულის მაგალითია $w = u + iv$ სახის ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე, სადა u და v ზედაპირის ξ^a გაუსის კოორდინატების ნამდვილი ვექტორ-



ნახ. 16

შესაბამის მხებ სიბრტყეში. ეს ნიშნავს, რომ F ზედაპირის ყოველ წერტილში შესრულებულია

$$nw = 0, \quad \text{ე. ი.} \quad un = 0, \quad vn = 0 \quad (3.1)$$

პირობა, სადა n -შესაბამის წერტილში F ზედაპირის ნორმალის ორ-ტია. F ზედაპირის ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ $V(F)$ -ით, ცხადია, $V(F) \subset \widehat{V}(F)$. კერძოდ, იმ ვექტორულ ველთა სიმრავლეს, რომლებიც ზედაპირს ეკუთვნიან, $V^0(F)$ -ით აღვნიშნავთ. ცხადია, რომ $V(F)$ და $V_\xi(F)$ შესაბამისად $\mathcal{S}(F)$ და $\mathcal{S}_\xi(F)$ მოდულებია, ხოლო $V^0(F)$ წარმოადგენს მოდულს სკალარების $\widehat{\mathcal{S}}(F)$ რგოლებზე.

თუ ზედაპირის A ვექტორს $V^0(F)$ -დან დავშლით მდგენელებად (ξ) კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტული r_1, r_2 ბაზისის მიზართ, გვექნება (ნახ. 16)

$$A = A^a r_a, \quad A^a = A r^a. \quad (3.2)$$

ξ^a კოორდინატების სხვა $\xi^{a'}$ კოორდინატებით შეცვლისას ანალოგიურად მივიღებთ

$$A = A^{a'} r_{a'}, \quad A^{a'} = A r^{a'}. \quad (3.2a)$$

ახლა (1.15) ფორმულის გამოყენებით დავწერთ

$$A^{a'} = A^b D_{b'}^a \quad (3.3)$$

თუ ამ ფორმულებს შევადარებთ (1.10)-ს, დავინახავთ, რომ A^a სიდიდეები კოორდინატების დიფერენციალთა კოგრადიენტულად გარდაიქმ-

ნება, ე. ი. კონტრავარიანტული კანონით. ამრიგად, A^α მატრიცა 1-ლი რანგის ტენზორის წარმოდგენს $\mathcal{H}(F)$ -დან, ე. ი. $A^\alpha \in \mathcal{H}^1(F)$. ამიტომ A^α -ს A ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები ეწოდება.

თუ A ვექტორის დავშლით მდგენელებად (5) კოორდინატთა სისტემის კონტრავარიანტული r^α ბაზისის მიმართ, მივიღებთ

$$A = A_\alpha r^\alpha, \quad A_\alpha = A r_\alpha. \quad (3.4)$$

ანალოგიური ტოლობების ჩაწერით (5') სისტემის მიმართ,

$$A = A_{\alpha'} r^{\alpha'}, \quad A_{\alpha'} = A r_{\alpha'}, \quad (3.4a)$$

ხოლო შემდეგ (1.12) ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$A_{\alpha'} = A_\beta D_{\alpha'}^\beta. \quad (3.5)$$

თუ შევადარებთ ამ ფორმულებს (1.11)-ს, შევამჩნევთ, რომ A_α სიდიდეები Φ სკალარის კერძო წარმოებულების კოვარიანტულად, ე. ი. კოვარიანტული კანონით გარდაიქმნება.

ამრიგად, A_α მატრიცა წარმოდგენს 1-ლი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს $\mathcal{H}(F)$ -დან, ე. ი. $A_\alpha \in \mathcal{H}_1(F)$. ამის გამო A_α -ს A ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები ეწოდება.

თუ A_α და A^α რაიმე A ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტებია $V^0(F)$ -დან, მაშინ მათთვის სამართლიანია

$$A_\alpha = a_{\alpha\beta} A^\beta, \quad A^\alpha = a^{\alpha\beta} A_\beta \quad (3.6)$$

დამოკიდებულებანი, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ ზედაპირის ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტებიდან მის კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე გადასვლა და პირიქით ხორციელდება შესაბამისად ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების საშუალებით, რაც ზედაპირის მეტრული $a^{\alpha\beta}$ და $a_{\alpha\beta}$ ტენზორებით ხორციელდება- ამ ოპერაციებს მიეყავართ მნიშვნელოვან ფორმალისაყიამდე: ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტებიდან მის კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე გადასვლა და პირიქით ხორციელდება ვერტიკალის გასწვრივ ინდექსების გადაადგილებით შესაბამისად ქვემოლან ზემოთ და ზემოლან ქვემოთ.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ 1-ლი რანგის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორების ზოგადი ცნება.

ვთქვათ $\mathcal{M}(F)$ რაიმე $\mathcal{F}(F)$ მოდულია. ვთქვათ, F ზედაპირის კოორდინატთა ყოველ (ξ) სისტემაში მოცემულია A^α მატრიცა $\mathcal{M}_\xi(F)$ -დან, რომელიც გაუსის ერთი კოორდინატების მეორით შეცვლისას (1.2) ფორმულებით გარდაიქმნება. ასეთ A^α მატრიცას 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი ეწოდება $\mathcal{M}(F)$ მოდულიდან.

(3.2) ფორმულებით ყოველ კონტრავარიანტულ A^α ტენზორს $\mathcal{F}(F)$ -დან შეგვიძლია შევუსაბამოთ $A^\alpha \Gamma_\alpha$ ვექტორული ველი, რომელიც ზედაპირის ეკუთვნის და არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

გარდაქმნის (3.5) ფორმულების საშუალებით შეგვიძლია შემოვიღოთ $\mathcal{M}(F)$ მოდულის 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორის ცნება.

1-ლი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს $\mathcal{F}(F)$ -დან (3.4) ფორმულებით შეესაბამება ზედაპირის ვექტორული ველი.

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი განმარტება: $\mathcal{M}(F)$ მოდულის 1-ლი რანგის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ A_α და A^β ტენზორებს ეკვივალენტური ვუწოდოთ, თუ ისინი ერთმანეთთან დაკავშირებულია (3.6) დამოკიდებულებებით. 1-ლი რანგის ეკვივალენტური ტენზორების კლასს $\mathcal{M}(F)$ მოდულიდან 1-ლი რანგის ტენზორს ვუწოდებთ $\mathcal{M}(F)$ -დან, მათ სიმრავლეს $\mathcal{M}_1(F)$ -ით აღვნიშნავთ. ამრიგად, 1-ლი რანგის ყოველი ტენზორი $\mathcal{F}(F)$ -დან შეიძლება განვმარტოთ როგორც ვექტორული ველი $V^0(F)$ -დან და პირიქით, ყოველი ასეთი ვექტორი ცალსახად გამოისახება 1-ლი რანგის შესაბამისი ტენზორის საშუალებით. ამრიგად, ზედაპირის ვექტორი შეიძლება გავაიგივოთ 1-ლი რანგის შესაბამის ტენზორთან.

2. ნებისმიერი რანგის ტენზორები. 1-ლი რანგის ტენზორის ცნების განზოგადებით ახლა განვმარტოთ ზედაპირის ნებისმიერი რანგის ტენზორი.

ვთქვათ, F ზედაპირის ყოველ (ξ) კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია (p, q) ტიპის რაიმე $a_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots a_{\beta_q}^{\alpha_q}$ (ξ) მატრიცა $\mathcal{M}(F)$ -დან, $p+q=n$. თუ გაუსის ერთი კოორდინატების მეორით შეცვლისას მატრიცის ელემენტები გარდაიქმნება

$$a_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots a_{\beta_q}^{\alpha_q} = a_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots a_{\beta_q}^{\alpha_q} D_{\beta_1}^{\gamma_1} \dots D_{\beta_q}^{\gamma_q} D_{\alpha_1}^{\gamma_1} \dots D_{\alpha_q}^{\gamma_q} \quad (3.7)$$

ფორმულებით, მაშინ $a_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots a_{\beta_q}^{\alpha_q}$ მატრიცას n -ური რანგის (p, q) ტიპის ტენზორს ან მოკლედ (p, q) -ტენზორს ვუწოდებთ $\mathcal{M}(F)$ -დან.

$a_{\beta_1}^{a_1} \dots a_{\beta_p}^{a_p} (F)$ მატრიცის ელემენტებს ტენზორის კომპონენტები ეწოდება კოორდინატთა განსაზღვრავი (ჯ) სისტემის მიმართ.

ზემომოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი და იმავე ტიპის ტენზორების ჯამი და სხვაობა, აგრეთვე პირდაპირი გამრავლებისა და ინდექსთა შეკვეცის ოპერაციები, რომლებიც ტენზორებზე წარმოებს, ისევე ტენზორებს გვაძლევენ.

თუ $M_p(F)$ -ით აღვნიშნავთ (p, q) ტიპის ტენზორებს $M(F)$ -დან, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $M_p(F)$ წარმოადგენს მოდულს სკალარების $\widehat{\mathcal{F}}(F)$ რგოლზე.

თუ $M(F)$ -დან აღებული ორი ტენზორიდან ერთი მიიღება მეორისაგან ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციების შედეგად, რომლებიც $a_{\alpha\beta}$ და $a^{\alpha\beta}$ ტენზორების საშუალებით სრულდება, მაშინ ამ ტენზორებს ეკვივალენტური ეწოდებათ. n -ური რანგის ეკვივალენტური ტენზორების კლასს $M(F)$ -დან n -ური რანგის ტენზორს ეუწოდებთ $M(F)$ -დან. ასეთი კლასი შეიცავს 2^n ეკვივალენტურ ტენზორს.

თუ $M_n(F)$ -ით აღვნიშნავთ $M(F)$ -დან n -ური რანგის ტენზორების სიმრავლეს, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $M_n(F)$ წარმოადგენს მოდულს სკალარების $\widehat{\mathcal{F}}(F)$ რგოლზე.

$a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ და $a_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ ტენზორები, ცხადია, ეკვივალენტურია. ისინი განსაზღვრავენ ზედაპირის მეტრიკულ ტენზორს, რომელიც სიმეტრიულია. ამ ტენზორს ხშირად g -თი აღვნიშნავთ.

ზედაპირის მე-2 რანგის ტენზორის მნიშვნელოვანი მახასიათებელია დისკრიმინანტული ტენზორი, რომელიც $c_{\alpha\beta}$ ტენზორის ეკვივალენტური ტენზორების კლასს წარმოადგენს. დისკრიმინანტული ტენზორი ირიბ-სიმეტრიულია, რადგან $c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha}$. ადვილად შემოწმდება

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &= c^{\alpha\lambda} c^{\beta\gamma} a_{\lambda\gamma} = c_{\lambda\gamma}^{\alpha} c^{\beta\gamma} = c^{\alpha\lambda} c_{\lambda\gamma}^{\beta}, \\ a_{\alpha\beta} &= c_{\alpha\lambda} c_{\beta\gamma} a^{\lambda\gamma} = c_{\alpha\gamma}^{\lambda} c_{\beta\gamma} = c_{\alpha\lambda} c_{\beta\gamma}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ფორმულები, რომლებიც მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებს დისკრიმინანტული ტენზორის კომპონენტებით გამოსახავენ.

ტენზორებისთვის მესამე თავის § 2-ში ზოგად შემთხვევაში დამტკიცებული თვისებები, ცხადია, სამართლიანია $M(F)$ -დან აღებული ტენზორებისთვისაც. ჩვენ შევინარჩუნებთ აგრეთვე ზედაპირის ტენზორების აღნიშვნებისათვის იმ შეთანხმებებს, რომლებიც მესამე თავის § 2-ში მივიღეთ.

§ 4. გაუსისა და ვეინგარტენის სადერივაციო ფორმულები. ქრისტოფელის სიმბოლოები ზედაპირზე

(5) კოორდინატთა სისტემის საბაზისო r_a ვექტორების ξ^B კოორდინატებით გაწარმოების შედეგად მივიღებთ

$$r_{a\beta} = \frac{\partial r_a}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^a \partial \xi^\beta} \quad (4.1)$$

ვექტორებს, რომლებიც, საზოგადოდ, ზედაპირს არ ეკუთვნიან. მაშასადამე ისინი წარმოდგებიან შემდეგი სახით:

$$r_{a\beta} = \Gamma_{a\beta}^\gamma r_\gamma + b_{a\beta} n. \quad (4.2)$$

ამ ფორმულებს გაუსის სადერივაციო ფორმულები ეწოდება კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტული ბაზისისთვის.

თუ (4.2) ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ n -ზე და გავითვალისწინებთ, რომ $r_\lambda n = 0$, გვექნება

$$b_{a\beta} = b_{\beta a} = n r_{a\beta} = -n_\alpha r_\beta, \quad n_\alpha \equiv \frac{\partial n}{\partial \xi^\alpha} \quad (4.3)$$

ამ ფორმულებიდან ადვილად გამოდინარეობს, რომ ξ^a კოორდინატების $\xi^{a'}$ კოორდინატებით შეცვლისას $b_{a\beta}$ მატრიცა გარდაიქმნება

$$b_{a\beta} = b_{a'\beta'} D_a^{a'} D_\beta^{\beta'}$$

ფორმულების მიხედვით. მაშასადამე, $b_{a\beta}$ ზედაპირის სიმეტრიული კოვარიანტული ტენზორია.

თუ (4.2)-ის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ r^λ -ზე და გავითვალისწინებთ $n r^\lambda = 0$ ტოლობას, მაშინ მივიღებთ

$$\Gamma_{a\beta}^\lambda = r^\lambda r_{a\beta} \quad (4.4)$$

$a_{a\beta} = r_a r_\beta$ ტოლობის გაწარმოებით გვექნება

$$\frac{\partial a_{a\beta}}{\partial \xi^\lambda} = \Gamma_{\lambda\beta, a} + \Gamma_{\lambda a, \beta} \quad (4.5)$$

სადაც

$$\Gamma_{a\beta, \lambda} = r_{a\beta} r_\lambda \quad (4.6)$$

(4.4) და (4.6) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\Gamma_{a\beta, \lambda} = \Gamma_{\beta a, \lambda} = \Gamma_{a\beta}^\gamma a_{\gamma\lambda}, \quad \Gamma_{\beta a}^\gamma = \Gamma_{a\beta}^\gamma = \Gamma_{a\beta, \lambda} a^{\gamma\lambda} \quad (4.7)$$

დამოკიდებულებებს. ახლა (4.5)-დან ადვილად გამოვიყვანოთ

$$\Gamma_{\alpha\beta, \nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\nu\alpha}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial a_{\nu\beta}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\nu} \right) \quad (4.8)$$

ტოლობას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $r^\alpha r_\beta = \delta^\alpha_\beta$, (4.4) ტოლობები შეიძლება შემდეგი სახით ჩაეწეროს:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} (r^\lambda r_\alpha) - r_\alpha \frac{\partial r^\lambda}{\partial \xi^\beta} = -r_\alpha \frac{\partial r^\lambda}{\partial \xi^\beta}. \quad (4.9)$$

$b_{\alpha\beta}$ ტენზორის სიმეტრიულობის გამო მისი შერეული b^α_β და b^α_α კომპონენტები ერთნაირია, და, მაშასადამე, შეგვიძლია უბრალოდ ვწეროთ b^α_α . გვაქვს

$$b^\alpha_\beta = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} = -a^{\alpha\lambda} (r_\lambda n_\beta) = -r^\alpha n_\beta. \quad (4.10)$$

ეს ტოლობა ასეც შეგვიძლია ჩაეწეროს

$$b^\alpha_\beta = -\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} (r^\alpha n) + \frac{\partial r^\alpha}{\partial \xi^\beta} n = \frac{\partial r^\alpha}{\partial \xi^\beta} n. \quad (4.11)$$

აქ გავითვალისწინებთ, რომ $n r^\alpha = 0$. (4.9) და (4.11)-ის თანახმად გვაქვს

$$\frac{\partial r^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda r^\beta + b^\lambda_\alpha n. \quad (4.12)$$

ეს ტოლობები გაუსის სადერივაციო ფორმულებს გამოსახავს კოორდინატთა სისტემის კონტრავარიანტული ბაზისისათვის.

$\Gamma_{\alpha\beta, \lambda}$ და $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda$ სიდიდეებს შესაბამისად ზედაპირის 1-ლი და მე-2 გვარის ქრისტოფელის სიმბოლოები ეწოდება. (4.7) და (4.8) ფორმულების საშუალებით ისინი მხოლოდ ზედაპირის მეტრიული კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით გამოისახებიან.

თუ გავითვალისწინებთ $r_\beta n = 0$ და $n n_\beta = 0$ ტოლობებს, (4.10)-ის თანახმად მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულებს

$$n_\beta = -b^\alpha_\beta r_\alpha = -b_{\beta\alpha} r^\alpha, \quad n_\beta = \frac{\partial n}{\partial \xi^\beta}, \quad (4.13)$$

რომელთაც კეინგარტენის სადერივაციო ფორმულები ეწოდებათ.

თუ სიტყვა-სიტყვით გავიმეორებთ IV თავის § 1-ში მოყვანილ მსჯელობებს, დავამტკიცებთ ქრისტოფელის სიმბოლოების შემდეგ ძირითად თვისებებს:

I. ქრისტოფელის $\Gamma_{\alpha\beta, \nu}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ სიმბოლოები ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მეტრული $a_{\alpha\beta}$ ტენზორის ყველა კომპონენტი მუდმივ მნიშვნელობას ღებულობს.

ქვემოთ დავინახავთ, რომ ამ შემთხვევას ადგილი აქვს ისეთი ზედაპირებისათვის, რომლებიც სიბრტყეზე განიფინებიან.

II.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{\partial \ln \sqrt{a}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^\beta}. \quad (4.14)$$

III. კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას ქრისტოფელის მე-2 გვარის სიმბოლოები შემდეგი ფორმულებით გარდაიქმნება:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\lambda'} D_{\alpha'}^{\alpha'} D_{\beta'}^{\beta'} D_{\lambda'}^{\lambda} + \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} D_{\nu'}^{\lambda}. \quad (4.15)$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებს, რომ $\Gamma_{\alpha\beta, \lambda}$ და $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ ტენზორებს არ წარმოადგენს.

(4.15) ფორმულიდან ვღებულობთ

$$\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda D_{\lambda'}^{\nu'} - \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\nu'} D_{\alpha'}^{\alpha'} D_{\beta'}^{\beta'} D_{\nu'}^{\lambda} \quad (4.16)$$

§ 5. ზედაპირის გეოდეზიური წირები. კოორდინატთა პოლარული (ნახევრადგეოდეზიური) სისტემა

1. გეოდეზიური წირების განტოლებები. ზედაპირზე ავიღოთ რაიმე L წირი. თუ r რადიუს-ვექტორს გავაწარმოებთ ამ წირის რკალით, მივიღებთ L -ის მხებ ერთეულოვან s ვექტორს,

$$s = \frac{dr}{ds} = s^\alpha r_\alpha, \quad s^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (5.1)$$

ამ ტოლობას თუ კიდევ გავაწარმოებთ s რკალის მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{ds}{ds} = r_\alpha \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + r_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta. \quad (5.2)$$

გაუსის სადერივაციო (4.2) ფორმულების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \left(\frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda s^\alpha s^\beta \right) \mathbf{r}_\lambda + b_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta \mathbf{n}. \quad (5.3)$$

ეს ვექტორი L წირის ნორმალის გასწვრივია მიმართული მისი ჩაზნექილობის მხარეს. მას L წირის მთავარი ნორმალი ეწოდება. თუ მის ორტს $\mathbf{m}$ -ით აღვნიშნავთ, გვექნება

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{ds}{ds} = k \mathbf{m}, \quad k \geq 0. \quad (5.4)$$

არაუარყოფით k სიდიდეს L წირის სიმრუდე ეწოდება, ხოლო მისი შებრუნებული $\rho = \frac{1}{k}$ სიდიდე L წირის სიმრუდის რადიუსის სახელწოდებას ატარებს.

განვიხილოთ ახლა ზედაპირზე წირები, რომელთათვისაც ზედაპირის ნორმალი და მთავარი ნორმალი წირის ყოველ წერტილში კოლინეარულია. როგორც (5.3) და (5.4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, ეს პირობა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულდება

$$d^2 \xi^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda d\xi^\alpha d\xi^\beta = 0 \quad (\lambda = 1, 2) \quad (5.5)$$

ტოლობები.

ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამ სისტემის ინტეგრალურ წირებს ზედაპირის გეოდეზიური წირები ეწოდება.

მე-2 რიგის განტოლებათა (5.5) სისტემა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ზედაპირის სავსებით გარკვეული გეოდეზიური წირი, თუ ზედაპირზე წინასწარ დავაფიქსირებთ საძიებელი წირის რაიმე წერტილს და ამ წერტილში წირის მხების მიმართულებას, ამოვხსნით რა (5.5) სისტემისთვის კოშის შესაბამის ამოცანას. მაშასადამე, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილი თეორემის ძალით, ზედაპირის ყოველ წერტილზე მოცემული მიმართულებით ერთადერთი გეოდეზიური წირი გაივლის.

2. ვარიაციული ამოცანა, რომელსაც მიყვავართ გეოდეზიური წირების განტოლებებზე. გეოდეზიური წირის განტოლება შეიძლება მივიღოთ აგრეთვე შემდეგი ვარიაციული ამოცანის განხილვით.

ვთქვათ, P_0 და P_1 ზედაპირის ორი საკმარისად მახლობელი წერტილია. შევედრთოდ ისინი რაიმე L წირით, რომელიც ზედაპირზე მდებარეობს; წირის განტოლება ჩავწეროთ პარამეტრული ფორმით

$$\xi^a = \xi^a(t) \quad (a = 1, 2; \quad t_0 \leq t \leq t_1). \quad (5.6)$$

მაშინ წირის სიგრძე გამოისახება ინტეგრალით

$$\int_L ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a_{ab} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b} dt \quad \left(\dot{\xi}^a = \frac{d\xi^a}{dt} \right) \quad (5.7)$$

დავსვათ ახლა ამოცანა: იმ გლუვ წირებს შორის, რომლებიც ზედაპირზე მდებარეობენ და P_0 და P_1 წერტილებს აერთებენ, ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც (5.7) ინტეგრალს უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს.

თუ ამ პარამეტრული ვარიაციული ამოცანისათვის ეილერ—ლაგრანჟის განტოლებას შევადგენთ, გვექნება (იხ., მაგალითად, [9], IV ტ., II თავი, პუნქტი 72)

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}^\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2), \quad (5.8)$$

სადაც

$$F = \sqrt{a_{ab} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b} \quad (5.9)$$

(5.8) განტოლებები შეიძლება გადავწეროთ ასე

$$\frac{\partial F^2}{\partial \xi^\gamma} + \frac{1}{2} F^{-2} \frac{dF^2}{dt} \frac{\partial F^2}{\partial \dot{\xi}^\gamma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^2}{\partial \dot{\xi}^\gamma} = 0. \quad (5.10)$$

თუ ახლა t პარამეტრად საძიებელი წირის რეალის s სიგრძეს ავიღებთ, მაშინ ამ წირის გასწვრივ გვექნება ტოლობა

$$F^2 = a_{ab} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b = a_{ab} \frac{d\xi^a}{ds} \frac{d\xi^b}{ds} = \frac{a_{ab} d\xi^a d\xi^b}{ds^2} = 1. \quad (5.11)$$

მაშასადამე,

$$\frac{dF^2}{ds} = 0 \quad (5.12)$$

და (5.10) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial F^2}{\partial \xi^\gamma} - \frac{d}{ds} \frac{\partial F^2}{\partial \dot{\xi}^\gamma} = 0, \quad (5.13)$$

ან

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta - 2 \frac{d}{ds} a_{\gamma\beta} \dot{\xi}^\beta = \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} - 2 \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\alpha} \right) \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta - 2 a_{\alpha\beta} \ddot{\xi}^\beta = 0, \quad (5.14)$$

სადაც ახლა

$$\dot{\xi}^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \quad \ddot{\xi}^\alpha = \frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2}. \quad (5.15)$$

თუ (5.14) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ $-\frac{1}{2} a^{\lambda\gamma} \cdot$ ზე, მივიღებთ

$$\dot{\xi}^\lambda + a^{\lambda\gamma} \left(\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} \right) \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (5.16)$$

ეს განტოლებები (5.5)-ს ემთხვევა. ამრიგად, ზედაპირის გეოდეზიური წირები ვარიაციული (5.7) ამოცანის სტაციონარულ წირებს წარმოადგენს. შეიძლება დაემატიკოთ, რომ თუ P_0 და P_1 საკმარისად მახლობელი წერტილებია, მაშინ მათზე გაივლის ერთადერთი გეოდეზიური წირი, რომელიც (5.7) ინტეგრალს მინიმუმს ანიჭებს. ეს ნიშნავს, რომ გეოდეზიური წირის რკალი ზედაპირის მახლობელ P_0 და P_1 წერტილებს შორის უმოკლესი მანძილია (იხ., მაგალითად, [3], I ნაწ., X თავი, § 47, პუნქტი 6).

შე ე ნ ი შ ვ ნ ა. გეოდეზიური წირების განტოლებები შეიძლება განვიხილოთ აგრეთვე რიმანის ნებისმიერ მრავალსახეობაზე, რადგან მათ შესადგენად გამოიყენება მხოლოდ ქრისტოფელის სიმბოლოები, რომლებიც მეტრული კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით გამოისახებიან. ამას გარდა, ამოცანის ზემოთ ნაჩვენები ვარიაციული მიდგომა, რომელიც ჩვენ ზედაპირის გეოდეზიური წირის განტოლების ახალი გამოყვანის საშუალებას გვაძლევს, უშუალოდ გადაიტანება რიმანის ნებისმიერ მრავალსახეობებზე.

შ. გეოდეზიური წირების ინვარიანტობა ზედაპირის ლუნვის მიმართ. ზედაპირის უწყვეტ დეფორმაციებს, რომლებიც მის მეტრიკას არ ცვლიან, ლუნვები ეწოდება. რადგან ზედაპირის გეოდეზიური წირები მხოლოდ ზედაპირის მეტრიკაზეა დამოკიდებული, ამიტომ,

ცხადია, რომ ზელაპირის ღუნვისას გეოდეზიური წირები გარდაქმნილი ზელაპირის გეოდეზიურ წირებში გადადის. ეს გამომდინარეობს აგრეთვე იქიდანაც, რომ ზელაპირის ღუნვების შემთხვევაში წერტილებს შორის მანძილი არ იცვლება. მაშასადამე, უმოკლესი წირები ისევ უმოკლეს წირებში გადადის.

მაგალითად, სიბრტყისათვის დეკარტია სისტემაში გეოდეზიური წირების (5.16) განტოლებები ლებულობს სახეს

$$\xi^\lambda = 0 \quad (\lambda = 1, 2), \quad (5.17)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\xi^\lambda = a^\lambda s + b^\lambda. \quad (5.18)$$

ეს გვიჩვენებს იმ აშკარა ფაქტს, რომ სიბრტყეზე გეოდეზიურ წირებს წრეები წარმოადგენს. მაშასადამე, ზელაპირებზე, რომლებიც სიბრტყის ღუნვით მიიღებიან, გეოდეზიური წირები წარმოადგენენ წრეების სახეებს.

4. პოლარული (ნახევრადგეოდეზიური) კოორდინატთა სისტემა. ზელაპირთა თეორიის რიგი საკითხების შესწავლისას მიზანშეწონილია საკოორდინატო წირებად გეოდეზიური წირები გამოვიყენოთ.

ზელაპირზე რაიმე ფიქსირებული P_0 წერტილის მიდამოში საკოორდინატო (ξ^1) წირებად მივიღოთ P_0 წერტილიდან გამოსული გეოდეზიური წირები, ხოლო მათი ორთოგონალური წირები კი — (ξ^2) საკოორდინატო წირებად. ამას გარდა, ξ^1 პარამეტრად ავიღოთ გეოდეზიური ϱ მანძილი, ე. ი. შესაბამისი გეოდეზიური წირის $P_0 P$ რკალის სიგრძე. $\varrho = \text{const}$ წირს გეოდეზიური წრეწირი ეწოდება ცენტრით P_0 წერტილში.

აგების თანახმად კოორდინატთა ეს სისტემა ორთოგონალურია და, მაშასადამე, მეტრულ ფორმას აქვს სახე

$$ds^2 = a_{11} (d\xi^1)^2 + a_{22} (d\xi^2)^2. \quad (5.19)$$

რადგან $\xi^2 = \text{const}$ გეოდეზიური წირია, ხოლო ξ^1 მისი რკალის სიგრძე, ამიტომ გეოდეზიური წირის (5.16) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (5.20)$$

ე. ი. a_{11} მუდმივი სიდიდეა. რადგან ξ^1 გეოდეზიური წირის რკალის სიგრძეა, ამიტომ (5.19)-დან მივიღებთ, რომ $a_{11} = 1$. თუ ახლა

$$\xi^1 = x, \quad \xi^2 = y, \quad a_{22} = \beta^2 \quad (5.21).$$

აღნიშვნებს შემოვიღებთ, გვექნება

$$ds^2 = dx^2 + \beta^2 dy^2. \quad (5.22).$$

ცხადია, β დამოკიდებულია x და y -ზე. ზედაპირზე აქ შემოყვანილ კოორდინატთა სისტემას პოლარული ან ნახევრადგეოდეზიური ეწოდება.

§ 6. მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმა.

ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე

(5.3) ტოლობის ორივე მხარეს თუ სკალარულად n -ზე გავამრავლებთ, (5.4)-ის თანახმად მივიღებთ

$$k m n = k \cdot \cos \theta = b_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta = k_s, \quad (6.1).$$

სადაც θ წარმოადგენს L რკალის m მთავარ ნორმალსა და n ზედაპირის ნორმალს შორის კუთხეს, $\cos \theta = m n$.

როგორც (6.1)-დან ჩანს, k_s სიდიდე არაა დამოკიდებული ზედაპირზე კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე; ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ზედაპირის ნორმალთა მიმართულებების ველი წინასწარაა დაფიქსირებული. მაშასადამე k_s დამოკიდებულია მხოლოდ წირის მიმართულებაზე ზედაპირის განსახილავ წერტილში. ე. ი. ყველა წარისათვის, რომლებიც ზედაპირზე მდებარეობენ და რომლებსაც ალებულ წერტილში საერთო მხები გააჩნიათ, k_s სიდიდე ერთი და იმავე მნიშვნელობას ინარჩუნებს. ამ სიდიდეს ეწოდება ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე s მიმართულებით. როგორც (6.1)-დან ჩანს ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე L წირის მხების გასწვრივ მის რაიმე წერტილში ამ წირის მთავარი ნორმალის იმავე წერტილში ზედაპირის ნორმალზე გეგმილის ტოლია (მენიეს თეორემა).

კერძოდ, ნორმალური კვეთისთვის, რომელსაც L წირთან საერთო მხები აქვს, კუთხე $\theta = 0$ ან π -ს და (6.1) ფორმულა დებულობს სახეს

$$k_s = b_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta = \pm k, \quad (6.2),$$

ე. ი. ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე s მიმართულებით ნიშნის, სიზუსტით ტოლია შესაბამისი ნორმალური კვეთის სიმრუდის.

როგორც (6.1)-დან ჩანს, ნორმალური k , სიმრუდის ნიშანი დამოკიდებულია ზედაპირის n ნორმალის მიმართულების არჩევაზე, რადგან მთავარი ნორმალი ყოველთვის მიმართულია L წირის ჩაზნექილობისკენ. ამრიგად, ზედაპირის n ნორმალის მიმართულების შეცვლა საწინააღმდეგო მიმართულებით ნორმალურ სიმრუდეს ნიშანს უცვლის. ეს გამომდინარეობს აგრეთვე $b_{\alpha\beta} = n r_{\alpha\beta}$ ფორმულიდან.

ნორმალურ სიმრუდეს აქვს დადებითი მნიშვნელობა, თუ ზედაპირის ნორმალი მიმართულია შესაბამისი ნორმალური კვეთის ჩაზნექილობის მხარეს და უარყოფითი მნიშვნელობა — წინააღმდეგ შემთხვევაში. თუ ზედაპირი განსახილავი წერტილის მიდამოში ამოზნექილია, მაშინ ნორმალური სიმრუდე ნებისმიერი მიმართულებით ერთი და იგივე ნიშნის იქნება. იგი ლეზულობს დადებით მნიშვნელობას, თუ ნორმალი მიმართულია ზედაპირის ჩაზნექილობის მხარეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში — უარყოფით მნიშვნელობას.

$b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ ინვარიანტულ ფორმას ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმა ეწოდება ან მოკლედ II ფორმა. (5.1)-ის თანახმად

$$II = b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = k_s ds^2. \quad (6.3)$$

$b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ კვადრატული ფორმა, საზოგადოდ, არ გამოისახება მეტრიკული კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით. იგი დამოკიდებულია ზედაპირის არა მხოლოდ მეტრიკაზე, არამედ რიმანის მრავალსახეობის ევკლიდურ სივრცეში ლოკალურად ჩადგმის ხერხზედაც და გამოსახავს ზედაპირის ისეთ თვისებებს, რომლებიც არ შეიძლება დახასიათდნენ მხოლოდ ზედაპირის მეტრიკით. ამის გამო $b_{\alpha\beta}$ ტენზორი უშუალოდ არ ზოგადდება რიმანის მრავალგანზომილებიან მრავალსახეობებზე. ასეთი განზოგადება შესაძლებელია მხოლოდ მრავალსახეობის ევკლიდურ სივრცეში ლოკალურად ჩადგმის გათვალისწინებით.

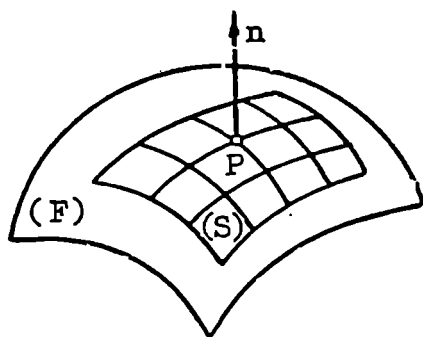
§ 7. როდრიგის ვექტორი. გეოდეზიური გრეხა და გეოდეზიური სიმრუდე

1. ზედაპირის მესამე კვადრატული ფორმა. როდრიგის ვექტორი. $b_{\alpha\beta}$ ტენზორი შეიძლება დავაკავშიროთ ზედაპირის ე. წ. სფერული გამოსახულების მეტრიკასთან. ასეთი დასახელება აქვს

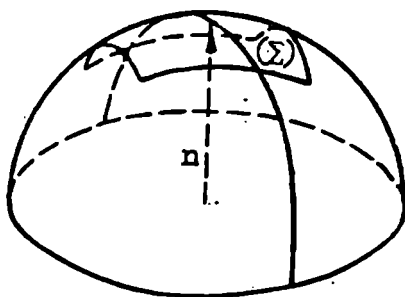
ერთეულოვანი სფერული ზედაპირის იმ ნაწილს, რომლის რადიუს-ვექტორი ტოლია ზედაპირის n ნორმალის ორტისა სათანადო წერტილში (ნახ. 17, 18). ვეინგარტენის (4.13) ფორმულის თანახმად, სფერული გამოსახულების მეტრიკა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$d\sigma^2 = dn dn = e_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad e_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta = b_{\alpha\gamma} b^\gamma_\beta. \quad (7.1)$$

ეს ფორმა, რომელიც ზედაპირის მეტრიკის დიფერენციალურ ფორმის სახელწოდებას ატარებს, აგრეთვე არსებით როლს თამაშობს ზედაპირთა თეორიაში.



ნახ. 17



ნახ. 18

სიბრტყის სფერული გამოსახულება, ცხადია, წერტილია. წრიული ცილინდრის სფერული გამოსახულება ერთეულოვანი სფეროს დიდ წრეწირს წარმოადგენს, მაგრამ, თუ რაიმე წერტილის მიდამოში ზედაპირი ყველა მხეზი მიმართულებით გამრუდებულია (მაგალითად, სფერული ზედაპირის მსგავსად), მაშინ სფერული გამოსახულება აგრეთვე იქნება სფერული ზედაპირის რაიმე წერტილის მიდამო (ნახ. 17, 18). ამის გამო ბუნებრივია ველოდოთ, რომ სფერული გამოსახულების თვისებათა შესწავლა საშუალებას მოგვცემს აღმოვაჩინოთ ზედაპირის ის თვისებები, რომლებიც მის გამრუდების ხარისხს, ე. ი. სიბრტყისაგან გადახრას ახასიათებენ.

ამ მიზნით მნიშვნელოვანია ეგრეთ წოდებული როდრიგის ვექტორის განხილვა. ასე ჰქვია $\frac{dn}{ds}$ ვექტორს, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ,

თუ ზედაპირის ნორმალის n ორტს ზედაპირის რაიმე ერთეულოვანი s მხები ვექტორის მიმართულებით გავაწარმოებთ. $\frac{dn}{ds}$ ვექტორი, რომელიც ზედაპირის ნორმალის ორტის ცვლილების სიჩქარეს ახასიათებს s მიმართულებით, ცხადია, მოგვექმნება გარკვეულ წარმოდგენას ამ მიმართულებით ზედაპირის გამრუდების ხარისხის შესახებ. ეს ვექტორი, ცხადია, n -ის მართობულია და, მაშასადამე, ზედაპირს მიეკუთვნება. ამიტომ იგი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\frac{dn}{ds} = As + Bl, \quad (7.2)$$

სადაც l ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც s და n ვექტორების მართობულია, ამასთან ვგულისხმობთ, რომ

$$l \times s = n. \quad (7.3)$$

(7.2) ტოლობის ორივე მხარეს თუ რიგრიგობით სკალარულად გავამრავლებთ s და l -ზე, შემდეგ კი გამოვიყენებთ ვეინგარტენის (4.13) ფორმულებს, მივიღებთ

$$A = s \frac{dn}{ds} = s \frac{dn}{d\xi^a} \frac{d\xi^a}{ds} = -s r^{\beta} b_{\beta a} s^a = -b_{a\beta} s^a s^{\beta} = -k_s,$$

$$B = l \frac{dn}{ds} = -l r^a b_{a\beta} s^{\beta} = -b_{a\beta} l^a s^{\beta} = \tau_s,$$

სადაც $l^a = l r^a$ l ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტებია.

ამრიგად, როდრიგის ვექტორი წარმოიდგინება

$$\frac{dn}{ds} = -k_s s + \tau_s l \quad (7.4)$$

ფორმულით, სადაც

$$k_s = b_{a\beta} s^a s^{\beta}, \quad \tau_s = -b_{a\beta} l^a s^{\beta}, \quad (7.5)$$

k_s ნორმალური სიმრუდეა, ხოლო τ_s — ზედაპირის გეოდეზიური გრესა s მიმართულებით.

2. გეოდეზიური გრესა. τ_s გეოდეზიური გრესა ზედაპირის მოცემულ წერტილში s მიმართულებით დამოკიდებულია მხოლოდ შესაბამის

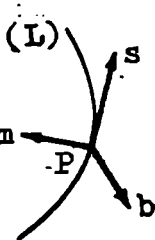
მის ნორმალურ კვეთაზე, ამასთან მისი ნიშანი l, s, n ტრიედრის ორიენტაციით განისაზღვრება. ეს ერთბაშად გამომდინარეობს

$$\tau_s = - (n r_{\alpha\beta}) (l r^\alpha) (s r^\beta) \quad (7.6)$$

ფორმულიდან, რომელიც (7.5)-ის სათანადო ფორმულის სხვაგვარად ჩაწერას წარმოადგენს. გარდა ამისა, (7.6) ფორმულიდან ჩანს, რომ ზედაპირის გეოდეზიური გრესები, რომლებიც ორ ურთიერთმართებულ ნორმალურ კვეთას შეესაბამებიან, მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან, ე. ი.

$$\tau_s = - \tau_l. \quad (7.7)$$

საჭიროა აიხსნას τ_s გეოდეზიური გრესის სახელწოდების წარმოშობა. განვიხილოთ სივრცეში რაიმე გლუვი L წირი. ვაქვით, s, m, b სათანადოდ წირის მგების, მთავარი ნორმალის და ბინორმალის ორტეზია მის რაიმე წერტილში (ნახ. 19), $b = s \times m$. ადგილი აქვს სერე — ფრენეს ფორმულებს



ნახ. 19

$$\frac{ds}{ds} = km, \quad \frac{dm}{ds} = -ks + xb, \quad \frac{db}{ds} = -xm, \quad (7.8)$$

სადაც k წირის სიმრუდეა, ხოლო x — წირის გრესა. ამ ფორმულებიდან პირველი ჩვენ ზემოთ უკვე გვქონდა (ფორმულა (5.4)). მეორე ერთბაშად გამომდინარეობს პირველიდან, თუ ვავითვალისწინებთ, რომ $s dm = -m ds$. მესამე ფორმულა შემდეგნაირად მტკიცდება:

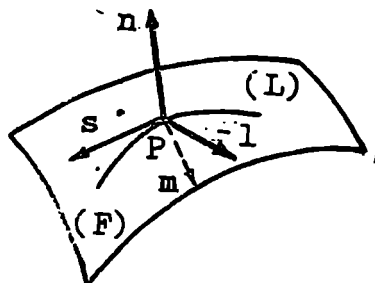
$$\frac{db}{ds} = \frac{d}{ds} (s \times m) = km \times m + s \times (-ks + xb) = xs \times b = -xm. \quad (7.9)$$

განვიხილოთ ახლა L წირად გეოდეზიური წირი, რომელიც განსახილავ ფიქსირებულ P წერტილში გადის s მიმართულებით. გეოდეზიური წირის გასწვრივ მისი m მთავარი ნორმალი და ზედაპირის n ნორმალი კოლინეარულია. დავუშვათ, რომ $n = m$. მაშინ, ცხადია, $b = l$ და (6.1) ფორმულის თანახმად, $k_s = k$, ამიტომ

როდრიგის ვექტორს, სერე—ფრენეს ფორმულის თანახმად, ექნება სახე

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dm}{ds} = -ks + \tau b, \quad (7.10)$$

სადაც τ განსახილავი გეოდეზიური წირის გრესაა. თუ შევადარებთ (7.10)-ს (7.4)-თან, მივიღებთ, რომ $\tau_s = \tau$. იგივე შედეგს მივიღებთ იმ შემთხვევაში, როცა $n = -m$, რადგან მაშინ $b = -l$.



ნახ. 20

მაშასადამე, რაიმე P წერტილში ზედაპირის გეოდეზიური გრესა s მიმართულებით ემთხვევა ზედაპირის გეოდეზიური წირის გრესას, როცა ეს წირი იმავე წერტილში გადის და ეხება s მიმართულებას.

3. გეოდეზიური სიმრუდე. განვიხილოთ ისევ რაიმე გლუვი L წირი, რომელიც ზედაპირს ეკუთვნის. ვთქვათ s და l წარმოადგენს L წირის მხებისა და ტანგენციალურა ნორმალის ორტებს მის რაიმე P

წერტილში (ნახ. 20). თუ s და l ვექტორებს გავაწარმოებთ L წირის რკალის მიმართ, მივიღებთ ადვილად დასამტკიცებელ შემდეგ ფორმულებს:

$$\frac{ds}{ds} = -k_g l + k_s n, \quad \frac{dl}{ds} = k_g s - \tau_s n, \quad (7.11)$$

სადაც k_g ზედაპირის ნორმალური სიმრუდეა s მიმართულებით, ხოლო k_g —წირის ეგრეთ წოდებული გეოდეზიური სიმრუდე, რომელიც (7.11)-ის ძალით გამოისახება ფორმულით

$$-k_g = l \frac{ds}{ds} = -s \frac{dl}{ds} = l_\lambda g^\lambda, \quad g^\lambda = \frac{ds^\lambda}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda s^\alpha s^\beta, \quad (7.12)$$

ამასთან $s^\alpha = \frac{d\tilde{s}^\alpha}{ds}$. როგორც (7.11) და (7.4)-დან ჩანს,

$$-k_g = kml = k \sin \theta, \quad (7.13)$$

სადაც θ L წირის m მთავარ ნორმალსა და ზედაპირის n ნორმალს შორის კუთხეა. გეოდეზიური წირისათვის მთავარი ნორმა-

ლი და ზედაპირის ნორმალ კოლინეარულია, ე. ი. $\sin \theta = 0$ და, მაშასადამე, გეოდეზიური წირის გეოდეზიური სიმრუდე ნულის ტოლია. საზოგადოდ, გეოდეზიური სიმრუდე დამოკიდებულია როგორც წირზე, ასევე იმ ზედაპირზე, რომელზედაც წირი მდებარეობს. ეს კარგად მოჩანს $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ ფორმულიდან; k დამოკიდებულია მხოლოდ წირზე, ხოლო k_x — ზედაპირზე.

§ 8. ზედაპირის მთავარი მიმართულებები.

მთავარი სიმრუდეები. გაუსის (მთავარი) და საშუალო სიმრუდეები

1. ზედაპირის მთავარი მიმართულებები. ზედაპირის საშუალო და გაუსის სიმრუდეები. ეილერის სხვაობა. ვეინგარტენის (4.13) ფორმულებით თუ ვისარგებლებთ, როდრიგის ვექტორი ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{dn}{ds} = -b_{\alpha\beta} s^\alpha r^\beta = b_\beta^\beta s_\alpha r^\beta, \quad (8.1)$$

სადაც s_α წარმოადგენს s ვექტორის კოვარიანტულ კომპონენტებს. მაგრამ ზემოთ უკვე ვნახეთ, რომ როდრიგის ვექტორი ტოლია $-k_s s + \tau_s I$ გამოსახულების. აქედან ჩანს, რომ როდრიგის ვექტორი s მიმართულების კოლინეარულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ზედაპირის შესაბამისი τ_s გეოდეზიური გრება ნულის ტოლია. მიმართულებებს, რომელთათვისაც ეს პირობა შესრულებულია, ზედაპირის მთავარი მიმართულებები ეწოდება. ამრიგად, ყოველი მთავარი მიმართულების გასწვრივ უნდა შესრულდეს პირობა

$$\frac{dn}{ds} = -k_s s, \quad \text{ე. ი.} \quad \tau_s = 0. \quad (8.2)$$

(8.1)-ის თანახმად ეს პირობა შეიძლება გადავწეროთ

$$b_\beta^\beta s_\alpha r^\beta = k_s s_\beta r^\beta = k_s s_\alpha a_\beta^\beta r^\beta$$

სახით. აქედან გვაქვს

$$(b_\beta^\beta - k_s a_\beta^\beta) s_\alpha = 0. \quad (8.3)$$

ამრიგად, ჩვენ აქ გვაქვს მე-2 რანგის b_β^β ტენზორისთვის ამოცანა საკუთრივ მნიშვნელობებზე, რომელიც ზოგადი სახით ზემოთ (III

თავი, პუნქტი 4) შევისწავლეთ. (8.3) ტოლობებს შეიძლება ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნი მხოლოდ

$$\begin{vmatrix} b_1^1 - k_s & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 - k_s \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4)$$

პირობის შესრულების შემთხვევაში. მაშასადამე, k_s ნორმალური სიმრუდე ზედაპირის მთავარი მიმართულებით აკმაყოფილებს კვადრატულ განტოლებას

$$k_s^2 - 2Hk_s + K = 0, \quad (8.5)$$

სადაც

$$2H = b_{\alpha}^{\alpha}, \quad K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2. \quad (8.6)$$

ცხადია, H ინვარიანტია. დავამტკიცოთ, რომ K აგრეთვე ინვარიანტის წარმოადგენს. ეს გამომდინარეობს (8.6)-ის მეორე ტოლობიდან, თუ მას ჩავწერთ

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta} c^{\lambda\gamma} b_{\lambda}^{\alpha} b_{\gamma}^{\beta} \quad (8.7)$$

ან

$$K = \frac{1}{2} c^{\alpha\beta} c^{\lambda\gamma} b_{\alpha\lambda} b_{\beta\gamma} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \quad (8.7a)$$

სახით, სადაც $c_{\alpha\beta}$ და $c^{\alpha\beta}$ ზედაპირის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული დასკრიმინანტული ტენზორებია.

H სიდიდეს ზედაპირის საშუალო სიმრუდეს უწოდებენ, ხოლო K -ს — ზედაპირის მთავარ ან გაუსის სიმრუდეს.

(8.5)-დან ნორმალური სიმრუდისათვის მთავარი მიმართულებით გვაქვს

$$k_s = H \pm \sqrt{H^2 - K} = H \pm \sqrt{E}, \quad (8.8)$$

სადაც $E = H^2 - K$. ცხადია, E სკალარია, რომელსაც ზედაპირის ეილერის სხვაობა ეწოდება. დავამტკიცოთ, რომ $E \geq 0$. რადგან E სკალარს წარმოადგენს, ამიტომ ჩვენი დებულება საკმარისია დავამტკიცოთ რაიმე სპეციალურად არჩეულ კოორდინატთა სისტემაში. ვთქვათ, P ზედაპირის ნებისმიერად დაფიქსირებული წერტილია. ავიღოთ P წერტილში ზედაპირის ლოკალურად დეკარტული კოორდინატთა სისტემა. მაშინ P წერტილში $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ და (8.6)-ის თანახმად გვაქვს

$$E = \frac{(b_1^2 + b_2^2)^2}{4} - b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2 = \frac{1}{4} (b_1^2 - b_2^2)^2 + (b_{12})^2 \geq 0. \quad (8.9)$$

ეს უტოლობა სრულდება ზედაპირის ფიქსირებულ P წერტილში. მაგრამ ასეთად მის როლში შეიძლება ავიღოთ ზედაპირია ნებისმიერი წერტილი. მაშასადამე, (8.9) უტოლობას ადგილი აქვს ზედაპირზე ყველგან და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ზედაპირის წერტილს, სადაც $E = 0$, *ომბილური* ანუ *მომრგვალების წერტილი* ეწოდება. ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ზედაპირი, რომლის ყველა წერტილი ომბილურია, სფერულ ზედაპირს (კერძოდ, სიბრტყეს) წარმოადგენს.

2) ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები. სიმრუდის წიხები. როგორც (8.8)-დან ჩანს, ყოველ არაომბილურ წერტილში არსებობს ორი (და მხოლოდ ორი) s' და s'' მთავარი მიმართულება, ამასთან ზედაპირის შესაბამისი k_1 და k_2 ნორმალური სიმრუდეები გამოისახება ფორმულებით

$$k_1 = H + \sqrt{E}, \quad k_2 = H - \sqrt{E} \quad (8.10)$$

დავამტკიცოთ, რომ მთავარი მიმართულებები ურთიერთმართობულია.

(8.3)-ის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$b^{\alpha\beta} s'_\alpha r_\beta = -k_1 s', \quad b^{\alpha\beta} s''_\alpha r_\beta = -k_2 s''. \quad (8.11)$$

თუ ამ ტოლობებიდან პირველს სკალარულად გავამრავლებთ s'' -ზე, ხოლო მეორეს — s' -ზე, შემდეგ კი ერთ-ერთს გამოვაკლებთ მეორეს და მხედველობაში მივიღებთ $b^{\alpha\beta}$ ტენზორის სიმეტრიულობას, მივიღებთ

$$(k_2 - k_1) s' s'' = 0.$$

რადგან $k_1 \neq k_2$ ($E > 0$), ამიტომ $s' s'' = 0$, რაც უნდა დავკმაყოფირობოთ.

მთავარი მიმართულებები ყოველ წერტილში ჩვენ ისე უნდა ავარჩიოთ, რომ s' , s'' , n ტრიედრი მარჯვენა ორიენტაციის იყოს,

$$s' \times s'' = n. \quad (8.12)$$

(8.10)-დან მივიღებთ

$$2H = k_1 + k_2, \quad 2\sqrt{E} = k_1 - k_2, \quad K = k_1 \cdot k_2. \quad (8.13)$$

ანგვარად, (8.12) პირობის შესრულების შემთხვევაში ადგილი აქვს $k_1 \geq k_2$ უტოლობას. k_1 და k_2 სიდიდეებს ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები ეწოდება. მათ შებრუნებულ

$$R_1 = \frac{1}{k_1}, \quad R_2 = \frac{1}{k_2} \quad (8.14)$$

სიდიდეებს ზედაპირის სიმრუდის მთავარი რადიუსები ეწოდებათ.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზედაპირის k_1 და k_2 მთავარი სიმრუდეების და ასევე H საშუალო სიმრუდის ნიშნები დამოკიდებულია ზედაპირის ნორმალის მიმართულების არჩევაზე. ეს ჩანს

$$k_1 = -s' \frac{dn}{ds'}, \quad k_2 = -s'' \frac{dn}{ds''} \quad (8.15)$$

ფორმულებიდან. ნორმალის მიმართულების საწინააღმდეგოთი შეცვლისას k_1 და k_2 -ის, ასევე H სიდიდეების ნიშნები იცვლება. მაგრამ იმისათვის, რომ შევინარჩუნოთ s', s'', n ტრიედრის ორიენტაცია, აუცილებელია შევცვალოთ s' და s'' , ასევე k_1 და k_2 აღნიშვნები. ამიტომ k_1 და k_2 , ასევე H სიდიდეები წარმოადგენს ზედაპირის ფარდობით სკალარებს, რომლებიც დამოკიდებულია n ნორმალთა ველის მიმართულების არჩევაზე. რაც შეეხება E და K სიდიდეებს, ისინი არ არიან დამოკიდებული ზედაპირის ნორმალთა ველის მიმართულების არჩევაზე. მაშასადამე, K და E ზედაპირის აბსოლუტურ სკალარებს წარმოადგენს.

ზედაპირზე წირს, რომლის მიმართულება ყოველ წერტილში ემთხვევა ერთ-ერთ მთავარ მიმართულებას ადებულ წერტილში, ზედაპირის სიმრუდის წირი ეწოდება. ყოველ არაომბილურ წერტილში გადის ორი სიმრუდის წირი, ამასთან ისინი მართი კუთხით იკვეთებიან. ეს პირობა შეიძლება შევინარჩუნოთ ომბილურ წერტილშიაც, თუ მთავარ მიმართულებებად ავიღებთ ორ ურთიერთმართობულ მიმართულებას ისე, რომ შევინარჩუნოთ სიმრუდის წირის სიგლუვე ომბილურ წერტილებში.

8. ეილერის ფორმულები. განვიხილოთ ზედაპირის რაიმე P წერტილში s' მთავარი მიმართულება და რაიმე s მხები მიმართულება. ეთქვას φ კუთხეა s და s' მიმართულებებს შორის. თუ გამოვიყენებთ მიმართულებით გაწარმოების ფორმულას, დავწერთ

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{ds'} \cos(s, s') + \frac{dn}{ds''} \sin(s, s''). \quad (8.16)$$

აქედან (8.2)-ის ძალით გვაქვს

$$\frac{dn}{ds} = -k_1 s' \cos \varphi - k_2 s'' \sin \varphi. \quad (8.17)$$

თუ გავაშრავლებთ ამ ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად s -ზე და გავითვალისწინებთ, რომ $k_s = -s \frac{dn}{ds}$, მივიღებთ

$$k_s = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \quad (8.18)$$

ტოლობას, რომელიც ეილერის ფორმულის სახელწოდებითაა ცნობილი. იგი შეიძლება ასეც ჩაეწეროს

$$k_s = H + \sqrt{E} \cos 2\varphi. \quad (8.19)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ საშუალო სიმრუდე ზედაპირის ნორმალური სიმრუდის ტოლია მთავარ მიმართულებათა შორის კუთხის ბისექტრისის გასწვრივ $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. როგორც (7.4)-დან ჩანს, გეოდეზიური გრესა გამოსახება

$$\tau_s = 1 \frac{dn}{ds} \quad (8.20)$$

ფორმულით, მაგრამ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $1s' = \sin \varphi$, $1s'' = -\cos \varphi$, (8.17)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\tau_s = -\frac{1}{2} (k_1 - k_2) \sin 2\varphi = -\sqrt{E} \sin 2\varphi \quad (8.21)$$

ფორმულას, რომელიც ნებისმიერი მიმართულებისათვის ზედაპირის გეოდეზიურ გრესას გამოსახავს ეილერის სხვაობის საშუალებით. ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ, როცა $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ და $\frac{\pi}{4}$, τ_s გეოდეზიური

გრესა სათანადოდ მაქსიმალურ და მინიმალურ $\tau_s = \pm \sqrt{E}$ მნიშვნელობებს აღწევს. (8.21)-დან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ $\tau_s = 0$ ზედაპირის ომბილურ წერტილში. მაშასადამე, ომბილურ წერტილში ნებისმიერი მხები მიმართულება მთავარ მიმართულებას წარმოადგენს.

§ 9. ზედაპირის ტენზორთა გაწარმოება

1. ზედაპირის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულები. ზედაპირის ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულები. ზედაპირის შემთხვევაში კოვარიანტული წარმოებულები, რომლებსაც ჩვენ ∇_α სიმბოლოებით აღვნიშნავთ, ჩვენ მიერ § 4-ში განხილული ქრისტოფელის მე-2 გვარის $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ სიმბოლოების საშუალებით აიგება. ბერძნული ინდექსები, რომლებიც 1, 2 მნიშვნელობებს ღებულობენ, მიგვითითებენ, რომ კოვარიანტული წარმოებულების ∇_α ოპერატორები ზედაპირისათვის განიხილებიან.

ფ სკალარის კოვარიანტული წარმოებულები ემთხვევა ჩვეულებრივ წარმოებულებს

$$\nabla_\alpha \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (9.1)$$

მაშასადამე, სკალარის კოვარიანტული წარმოებულები შეადგენს კოვარიანტულ ვექტორს, რომელსაც სკალარის გრადიენტს უწოდებენ და $\text{grad } \varphi$ სიმბოლოთი აღვნიშნავენ.

1-ლი რანგის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული A_α და A^α ტენზორების კოვარიანტული წარმოებულები შესაბამისად

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda A_\lambda, \quad (9.2a)$$

$$\nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha A^\lambda \quad (9.2b)$$

ფორმულებით გამოისახება. ზედაპირის მე-2 რანგის ტენზორთა კოვარიანტული წარმოებულები გამოისახება ფორმულებით:

$$\nabla_\gamma f_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\lambda f_{\lambda\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda f_{\alpha\lambda}, \quad (9.3a)$$

$$\nabla_\gamma f^{\alpha\beta} = \frac{\partial f^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha f^{\lambda\beta} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\beta f^{\alpha\lambda}, \quad (9.3b)$$

$$\nabla_\gamma f^\alpha_\beta = \frac{\partial f^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha f^\lambda_\beta - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda f^\alpha_\lambda. \quad (9.3g)$$

ამ ფორმულების საშუალებით, თუ გავითვალისწინებთ (4.5) და (1.18) ტოლობებს, ადვილად დავადგენთ, რომ ზედაპირის მეტრული ტენზორის კოვარიანტული წარმომადგენლები ნულის ტოლია:

$$\nabla_\gamma a_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\gamma a^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\gamma a^\alpha_\beta = 0. \quad (9.4)$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ დისკრიმინანტული ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლები აგრეთვე ნულის ტოლია

$$\nabla_\gamma c_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\gamma c^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\gamma c^\alpha_\beta = 0, \quad \nabla_\gamma c^\gamma_\beta = 0. \quad (9.5)$$

ამიტომ მეტრული და დისკრიმინანტული ტენზორების კომპონენტები კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციათა მიმართ ისევე იქცევა, როგორც მუდმივი მამრავლები მუდმივისა და ფუნქციის ნამრავლის ჩვეულებრივი გაწარმოების დროს. მაგალითად,

$$\nabla_\gamma (a_{\alpha\beta} A^\lambda) = a_{\alpha\beta} \nabla_\gamma A^\lambda, \quad \nabla_\gamma (c^{\alpha\beta} A^\lambda) = c^{\alpha\beta} \Delta_\gamma A^\lambda. \quad (9.6)$$

(9.2)—(9.3) ფორმულებიდან ადვილად მიიღება ზედაპირის ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული გაწარმოების შემდეგი ზოგადი წესი:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda a^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p} &= \frac{\partial a^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p}}{\partial \xi^\lambda} + \sum_{s=1}^p a^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} \gamma \alpha_{s+1} \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p} \Gamma_{\lambda \gamma}^{\alpha_s} - \\ &- \sum_{s=1}^p a^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} \gamma \alpha_{s+1} \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \gamma \beta_{s+1} \dots \beta_p} \Gamma_{\lambda \beta_s}^\gamma \end{aligned} \quad (9.7)$$

$\nabla_\lambda a^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p}$ მატრიცა $(n+1)$ რანგის $(p+1, p)$ ტიპის ტენზორის წარმომადგენს. (9.7) ეკვივალენტურია შემდეგი ტენზორის:

$$\nabla^\lambda a^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p} = a^{\lambda \alpha} \nabla_\alpha a^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p} \quad (9.8)$$

მის კომპონენტებს $a^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_p}$ ტენზორის კომპონენტების კონტრაქციანტული წარმომადგენლები ეწოდება.

ზედაპირის n -ური რანგის A ტენზორის ყველა კომპონენტის კოვარიანტული და კონტრაქციანტული წარმომადგენლები $(n+1)$ რანგის ეკვივალენტურ ტენზორთა კლასს. ამ ტენზორს ვუ-

წოდოთ A ტენზორის აბსოლუტური წარმომადგენელი და აღვნიშნოთ ∇A ან $\text{grad } A$ სიმბოლოთი.

(9.7) და (9.8) ფორმულების საშუალებით ადვილად მტკიცდება, რომ ტენზორთა ჯამის, სხვაობის და ნამრავლის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმომადგენლები ექვემდებარება ფუნქციითა შესაბამისად ჯამის, სხვაობისა და ნამრავლის გაწარმოების ჩვეულებრივ წესებს.

2. ზედაპირის ვექტორის დივერგენცია. გაუს—ოსტროგრადსკის ფორმულის ანალოგი (სტოქსის ფორმულა). α და β ინდექსების შეკვეცით (9.2 ბ) ფორმულებიდან მივიღებთ

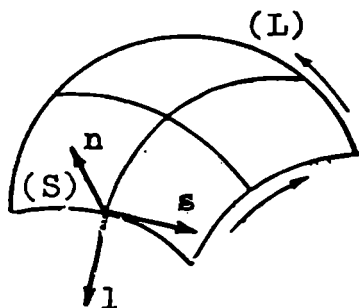
$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha A^\beta = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} A^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \quad (9.9)$$

ინვარიანტს, რომელსაც A ვექტორის დივერგენცია ჰქვია და აღვნიშნება $\text{div } A$ სიმბოლოთი.

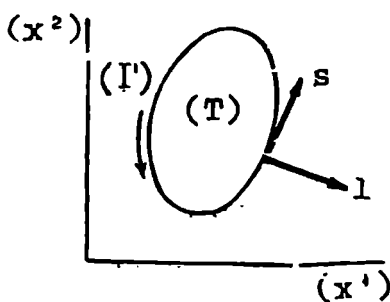
დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი

$$\iint_S \text{div } A \, dS = \int_L A_{(1)} \, ds \quad (9.10)$$

ფორმულის სამართლიანობა, სადაც S ზედაპირია, ხოლო L —მისი საზღვარი; $A_{(1)}$ წარმოადგენს A ვექტორის გეგმილს L წირის 1 ტანგენციალურ ნორმალზე, $A_{(1)} = A^\alpha l_\alpha$ (ნახ. 21).



ნახ. 21



ნახ. 22

დავუშვათ, რომ L სასრული რაოდენობა უბან-უბან გლუვი ჭორბანის წირების ერთობლიობაა. A ვექტორის მიმართ ვგულისხმობთ, რომ იგი S ზედაპირს ეკუთვნის, უწყვეტია $S + L$ -ში და

აქვს უწყვეტი წარმოებულები S -ში. L წირზე შემოვლის მიმართულებას ვარჩევთ ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს $I = \mathbf{s} \times \mathbf{n}$ ტოლობას, სადა $\mathbf{s}$ წარმოადგენს L წირის მხედის ორტს.

დავუშვათ თავდაპირველად, რომ S ზედაპირი საზღვართან ერთად ტოპოლოგიურად (ე. ი. ურთიერთცალსახად და უწყვეტად) აისახება ξ^1, ξ^2 სიბრტყის ჩაქეტილ T არეზე, ამასთან S ზედაპირის L საზღვარი ტოპოლოგიურად აისახება T არის Γ საზღვარზე (ნახ. 21, 22).

ჩვენ, ამას გარდა, ვგულისხმობთ, რომ მეტრული კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს გააჩნია პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები და Γ შედგება სასრული რაოდენობა უბან-უბან გლუვი ჟორდანის წირებისაგან.

თუ ფართის ელემენტს $dS = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$ ფორმულით გამოვსახეთ, (9.9)-ის თანახმად დავწერთ

$$\iint_S \operatorname{div} \mathbf{A} dS = \iint_T \left(\frac{\partial \sqrt{a} A^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \sqrt{a} A^2}{\partial \xi^2} \right) d\xi^1 d\xi^2. \quad (9.11)$$

თუ ახლა ორჯერად ინტეგრალს ინტეგრალური აღრიცხვის ცნობილი ფორმულის თანახმად კონტურულ ინტეგრალად გარდავქმნით, (2.25)-ის ძალით გვექნება

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{div} \mathbf{A} dS &= \int_L \sqrt{a} (A^1 d\xi^2 - A^2 d\xi^1) = \\ &= \int_L \sqrt{a} (A^1 s^2 - A^2 s^1) ds = \int_L A^\alpha c_{\alpha\beta} s^\beta ds = \\ &= \int_L A^\alpha l_\alpha ds = \int A_{(1)} ds, \end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს (9.10) ტოლობას. ეს ფორმულა წარმოადგენს სამჯერადი ინტეგრალისთვის გაუს—ოსტროგრადსკის ფორმულის ანალოგს.

ძნელი არაა ახლა (9.10) ფორმულის განზოგადება იმ შემთხვევაში, რომ S ზედაპირი შეიძლება დაიყოს სასრულ რაოდენობა ისეთ $S_1, \dots, S_n$ ქვეარეებად, რომლებიც ტოპოლოგიურად აისახე-

ბიან ბრტყელ არეებზე. ამ დებულების დამტკიცების დასრულებას მკითხველს მივანდობთ.

თუ (9.10) ფორმულას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} A^a}{\partial \xi^a} dS = \int_L A^a l_a ds, \quad (9.12)$$

იგი ადვილად განზოგადდება იმ შემთხვევისთვის, როცა A^a 1-ლი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია $V(F)$ -დან. ამისათვის საკმარისია ვისარგებლოთ ინტეგრალქვეშ გამოსახულების

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} A^a}{\partial \xi^a} = \frac{1}{\sqrt{a'}} \frac{\partial \sqrt{a'} A^{a'}}{\partial \xi^{a'}}$$

ინვარიანტულობით, რაც ჩვენ მიერ ზემოთ იყო დამტკიცებული (იხ. ფორმულა (IV, 3.23)).

3. ლაპლასის ოპერატორი ზედაპირზე. გრინის ფორმულები. ვთქვათ, φ ზედაპირის სკალარია. განვიხილოთ $\nabla^a V_a \varphi$ ინვარიანტი, რომელიც (9.9)-ის ძალით ტოლია

$$\nabla^a \nabla_a \varphi = \nabla_a \nabla^a \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi. \quad (9.13)$$

ამ ინვარიანტს ეწოდება ლაპლასის ოპერატორი ზედაპირზე. აღვნიშნოთ იგი $\Delta \varphi$ სიმბოლოთი, ამით შევინარჩუნებთ $\Delta \varphi$ სიმბოლოს ლაპლასის ჩვეულებრივი

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

ოპერატორისათვის. (9.9) ფორმულის თანახმად

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} \Delta^a \varphi}{\partial \xi^a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a} a^{a\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}}{\partial \xi^a}. \quad (9.14)$$

ეს ფორმულა სამართლიანია ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი კოორდინატთა სისტემისთვის.

ვთქვათ გვაქვს კოორდინატთა ორთოგონალური სისტემა, მაშინ

$$a_{12} = a^{12} = 0, \quad a^{11} = \frac{1}{a^{11}}, \quad a^{22} = \frac{1}{a^{22}}$$

და (9.14) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\tilde{\Delta}\varphi = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2} \right) \right]. \quad (9.15)$$

თუ (9.10) ფორმულაში A ვექტორად $\text{grad } \varphi$ -ის ავიღებთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$A_{(l)} = l \text{ grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

მაშინ მივიღებთ გრინის ფორმულას ზედაპირისათვის

$$\iint_S \tilde{\Delta} \varphi \, dS = \int_L \frac{d\varphi}{dl} \, ds. \quad (9.16)$$

§ 10. კავშირი ზედაპირის პირველ და მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმებს შორის. განმეორებითი კოვარიანტული წარმომადგენლები

ზედაპირის ტენზორების კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციებს, ევკლიდური სივრცის შემთხვევისაგან განსხვავებით, არ გააჩნიათ კომუტაციურობის თვისება, ე. ი. თუ ზედაპირის ტენზორებისათვის $\nabla_\alpha \nabla_\beta$ და $\nabla_\beta \nabla_\alpha$ ($\alpha \neq \beta$) ოპერაციებს გამოვიყენებთ, საზოგადოდ, სხვადასხვა შედეგს მივიღებთ. ეს ჩვენ მიერ ზემოთ იქნა დამტკიცებული (IV თავი, § 2, პუნქტი 8). მაგრამ აქ, თუ ვისარგებლებთ იმ ფაქტით, რომ რიმანის მრავალსახეობა ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში ჩადგმული ზედაპირის სახითაა მოცემული, გამოვიყვანოთ შესაბამისი ფორმულებს და რიმანის ტენზორის გამოსახულებას ზედაპირის ქრისტოფელის $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ სიმბოლოების საშუალებით.

წინასწარ ჩვენ გამოვიყვანოთ ფორმულებს, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ ზედაპირის პირველი და მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმების კოეფიციენტებს. ზედაპირთა თეორიის ამ ფუნდამენტური ფორმულების გამოყვანისას ზედაპირისთვის ბუნებრივი გზით შემოდის რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი, რომლის გარეგნული აგებულება (IV, 2.30) ფორმულას ემთხვევა.

1. გაუსისა და პეტერსონ—კოდაცის განტოლებებზე. რიზან—ქრისტოფელის ტენზორი. გაუსის სადერივაციო ფორმულების ორივე მხარეს თუ გავაწარმოებთ ξ^γ -ს მიმართ

$$r_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda r_\lambda + b_{\alpha\beta} n \quad (10.1)$$

და შემდეგ ამავე ფორმულებსა და, აგრეთვე, ვეინგარტენის $n_\gamma = -b_\gamma^\lambda r_\lambda$ ფორმულას გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial^3 r}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial \xi^\gamma} r_\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda r_{\lambda\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} n + b_{\alpha\beta} n_\gamma = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial \xi^\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\gamma \right) r_\gamma + \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda b_{\lambda\gamma} \right) n. \end{aligned} \quad (10.2)$$

ამ ფორმულაში β და γ ინდექსების გადასმით გვექნება

$$r_{\alpha\gamma\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\gamma \right) r_\gamma + \left(\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda b_{\lambda\beta} \right) n. \quad (10.3)$$

თუ (10.3)-ს გამოვაკლებთ (10.2)-ს და გავითვალისწინებთ, რომ $r_{\alpha\beta\gamma} = r_{\alpha\gamma\beta}$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma + b_{\alpha\gamma} b_\beta^\gamma - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\gamma \right) r_\gamma + \\ &+ \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda b_{\lambda\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda b_{\lambda\beta} \right) n = 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

r_1, r_2, n ვექტორების არაკომპლანარობის გამო გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma = b_{\alpha\beta} b_\gamma^\gamma - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\gamma, \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda b_{\lambda\beta} = \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial \xi^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda b_{\lambda\gamma}. \quad (10.6)$$

(10.5) და (10.6) განტოლებები, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ ზედაპირის პირველი და მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმების კოეფიციენტებს, ფუნდამენტურ როლს თამაშობენ ზედა-

პირთა თეორიაში. მათ შესაბამისად გაუხისა და პეტერსონ—კოდაცის განტოლებები ეწოდებათ.

როგორც ჩანს, (10.5) ტოლობების მარჯვენა მხარეები ზედაპირის მე-4 რანგის (3.1) ტიპის ტენზორებია. ამიტომ ამ ტოლობათა მარცხენა მხარეებიც ტენზორს წარმოადგენს. აღვნიშნოთ იგი $R^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ -ით,

$$R^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial \xi^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}}{\partial \xi^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}. \quad (10.7)$$

იგი წარმოადგენს სიმრუდის ანუ რიჟან—ქრისტოფელის ტენზორს ზედაპირისათვის.

თუ (10.7) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $a_{\mu\nu}$ -ზე და ინდექსებს შევკვეთ, (4.7) ფორმულების თანახმად გაუხის განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია დავიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

$$\begin{aligned} R_{\nu\alpha\beta\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta,\mu}}{\partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma,\mu}}{\partial \xi^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\gamma,\mu} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\beta\lambda,\mu} = \\ &= b_{\alpha\beta} b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\mu}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$b_{\alpha\beta} b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\mu} = K c_{\alpha\mu} c_{\beta\gamma}. \quad (10.9)$$

სადაც K ზედაპირის მთავარი სიმრუდეა, ხოლო $c_{\alpha\beta}$ — დისკრიმინანტული ტენზორი, რომელიც (2.12) ტოლობებითაა მოცემული. მართლაც, (4.3)-ის თანახმად

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\mu} &= [(n_{\alpha} r_{\beta}) r_{\gamma} - (n_{\alpha} r_{\gamma}) r_{\beta}] n_{\mu} = \\ &= [n_{\alpha} \times (r_{\gamma} \times r_{\beta})] n_{\mu} = c_{\gamma\beta} (n_{\alpha} \times n) n_{\mu} = \\ &= c_{\gamma\beta} b_{\alpha}^{\nu} b_{\mu}^{\lambda} (r_{\nu} \times n) r_{\lambda} = \\ &= c_{\gamma\beta} b_{\alpha}^{\nu} b_{\mu}^{\lambda} c_{\lambda\nu} = K c_{\gamma\beta} c_{\mu\alpha} = K c_{\alpha\mu} c_{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

რაც უნდა დავამტკიცებინა. ამ ტოლობათა უკანასკნელი ნაწილის მისაღებად ჩვენ ვისარგებლეთ

$$b_{\mu}^{\lambda} b_{\alpha}^{\nu} c_{\lambda\nu} = (b_{\mu}^{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} - b_{\mu}^{\alpha} b_{\alpha}^{\lambda}) \sqrt{a} = K c_{\mu\alpha} \quad (10.11)$$

ფორმულებით, რომლებიც ადვილად მოწმდება (8.7) ფორმულების დახმარებით.

ამრიგად გაუსის განტოლებები შეიძლება ჩაეწეროს

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta,\mu}}{\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma,\mu}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma,\mu} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta,\mu} = K c_{\alpha\mu} c_{\beta\gamma} \quad (10.12)$$

სახით. ახლა ადვილი შესამჩნევია, რომ განტოლებათა (10.12) სისტემა ეკვივალენტურია ერთი განტოლების

$$R_{2112} = \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}{}^\lambda \Gamma_{\lambda 2,2} - \Gamma_{12}{}^\lambda \Gamma_{\lambda 1,2} = K a, \quad (10.13)$$

სადაც a ზედაპირის პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტია.

თუ (10.6) განტოლების ორივე მხარეს $\Gamma_{\beta}{}^\lambda b_{\alpha\lambda}$ ჯამს გამოვაკლებთ, (9.3ა) ფორმულების თანახმად მივიღებთ პეტერსონ — კოდაცის განტოლებებს ტენზორული ფორმით:

$$\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0. \quad (10.14)$$

$b_{\alpha\beta}$ ტენზორის სიმეტრიულობის გამო ეს სისტემა ეკვივალენტურია განტოლებათა სისტემისა

$$\nabla_1 b_{22} - \nabla_2 b_{12} = 0, \quad \nabla_2 b_{11} - \nabla_1 b_{12} = 0. \quad (10.15)$$

გაუსის (10.13) განტოლება და პეტერსონ — კოდაცის განტოლებათა (10.15) სისტემა, როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, ზედაპირთა თეორიის საფუძველს შეადგენს. შეიძლება დამტკიცდეს შებრუნებული დებულებაც: თუ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული $a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ და $b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ ფორმების კოეფიციენტები (10.12) და (10.14) დამოკიდებულებებით არის შებმული, მაშინ არსებობს მოძრაობის სიზუსტით განსაზღვრული ზედაპირი, რომლის მეტრიკა კვადრატული $a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ ფორმით გამოისახება და რომლისათვისაც $b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს. აქ იგულისხმება, რომ $a_{\alpha\beta}$ და $b_{\alpha\beta}$ ტენზორები სიმეტრიულია. ჩვეულებრივ, ეს თეორემა მტკიცდება ამოცანის ლოკალურად დასმის შემთხვევისათვის (იხ., მაგალითად, [3]).

2. განვიხილოთ კოვარიანტული წარმომადგენლები. რიჩის ტენზორი. (9.3) და (10.7) ფორმულებს თუ გამოვიყენებთ, გამოთვლების შედეგად მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta A^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma A^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\gamma}{}^\delta A^\delta, \quad (10.16)$$

რომლებიც ზოგადი შემთხვევისთვის უკვე მიღებული გვექონდა (იხ. (IV, 2.33) ფორმულა). აქ A^a ზედაპირის კონტრავარიანტული ვექტორია, ხოლო $R^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu}$ — რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი, რომელიც ჩვენ ზემოთ უკვე შეგვხვდა.

(10.9) და (10.5)-ის თანახმად

$$R^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu} = b_{\alpha\beta} b^{\gamma}_{\nu} - b_{\alpha\nu} b^{\gamma}_{\beta} = K c^{\alpha}_{\nu} c_{\beta\gamma}. \quad (10.17)$$

ამ დამოკიდებულებებიდან ჩანს, რომ რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა გაუსის სიმრუდე $K = 0$. მაშასადამე, გაუსის ნულოვანი სიმრუდის მქონე ნებისმიერ ზედაპირზე (და მხოლოდ მასზე) რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი იგივევრად ნულია.

ამრიგად, გაუსის ნულოვანი სიმრუდის ($K=0$) ზედაპირებისთვის (და მხოლოდ მათთვის) კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციებს ახასიათებს კომუტაციურობის თვისება.

თუ (10.17)-ში ν ინდექსს ქვემოთ ჩამოვიტანთ, ისევ (10.12) გამოსახულებას მივიღებთ რიმან — ქრისტოფელის კოვარიანტული ტენზორისთვის

$$R_{\alpha\beta\gamma} = K c_{\alpha\nu} c_{\beta\gamma}. \quad (10.18)$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები:

$$R_{\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\gamma\beta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\gamma\beta}, \quad (10.19a)$$

$$R_{\alpha\gamma\beta} = R_{\alpha\beta\gamma}, \quad R_{\beta\gamma\alpha} = R_{\alpha\beta\gamma}. \quad (10.19b)$$

ამრიგად, $R_{\alpha\beta\gamma}$ ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, გარდა შემდეგი ოთხისა: R_{1212} , R_{2112} , R_{2121} , R_{1221} , ამასთან (10.18)-ის თანახმად

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221} = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 = K a. \quad (10.20)$$

(10.18) ფორმულებიდან, (9.5)-ის თანახმად, მივიღებთ

$$\nabla_{\lambda} R_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\nu} c_{\beta\gamma} \partial_{\lambda} K. \quad (10.21)$$

აქედან კი ადვილად მივიღებთ ბიანკის იგივეობებს

$$\nabla_{\lambda} R_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_{\beta} R_{\alpha\gamma\lambda} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\lambda\beta} = 0. \quad (10.22)$$

(10.18)-ის თანახმად (10.16) ფორმულები ლებულობს სახეს

$$\nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} A_{\alpha} - \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} A_{\alpha} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\alpha} A^{\alpha} = K c_{\beta\gamma} c_{\alpha\nu} A^{\alpha}. \quad (10.23)$$

ნებისმიერი $a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ ტენზორისთვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - \nabla_\beta \nabla_\gamma a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = K c_{\beta\gamma} \tilde{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}, \quad (10.24)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} &= a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} c_{\lambda \dots}^{\beta} + \dots + a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_{q-1} \lambda} c_{\lambda \dots}^{\beta_q} - \\ &- a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}^{\beta_q} c_{\alpha_1}^{\lambda} - \dots - a_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \lambda}^{\beta_q} c_{\alpha_p}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (10.24 \text{ ა})$$

კერძოდ, როცა φ სკალარია, გვექნება

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta \varphi - \nabla_\beta \nabla_\gamma \varphi = 0. \quad (10.25)$$

(2.24ა) ფორმულები სხვანაირად შეიძლება ჩაიწეროს, თუ ზედაპირზე შემოვიყვანთ სპეციალურ ოპერაციას, რომელიც მხეხ სიბრტყეში მოთავსებულ ვექტორს $\frac{\pi}{2}$ კუთხით შემობრუნებს. ვაქვით, A^α ზედაპირის ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტებია. განვიხილოთ A^* ვექტორი კოვარიანტული

$$A_{\beta*} = c_{\alpha\beta} A^\alpha \quad \bullet \quad (10.26)$$

კომპონენტებით. აქ β^* უნდა განვიხილოთ როგორც β ინდექსი, ხოლო ვარსკვლავი აღნიშნავს, რომ ეს ინდექსი მიღებულია ინდექსის დაწვევის ოპერაციის გამოყენებით დისკრიმინანტული $c_{\alpha\beta}$ ტენზორის საშუალებით (10.26) ფორმულის თანახმად. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $A^* = A_{\beta*} r^\beta$ და $A = A^\alpha r_\alpha$ ვექტორები ურთიერთმართობულია და, ამას გარდა, ტოლი სიგრძეები აქვთ. მართლაც

$$A^* A = A_{\beta*} A^\beta = c_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = \sqrt{a} (A^1 A^2 - A^2 A^1) = 0, \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} \|A^*\|^2 &= A_{\beta*} A^{\beta*} = c_{\alpha\beta} A^\alpha c^{\gamma\beta} A_\gamma = c_{\alpha\beta} c^{\gamma\beta} A^\alpha A_\gamma = \\ &= \delta_\alpha^\gamma A^\alpha A_\gamma = A^\alpha A_\alpha = \|A\|^2. \end{aligned} \quad (10.28)$$

ამრიგად, (10.26) ვარაქმნა ანზორციელებს ვექტორის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნებას მხეხ სიბრტყეში. ამიტომ (10.26) ფორმულით განსაზღვრულ ოპერაციას ორთოგონალური ბრუნვა ეუწოდოთ.

ცხადია, ეს ბრუნვა ისე ხორციელდება, რომ A , A^* და n შეადგენს მარჯვენა ორიენტაციის ტრიედრს:

$$\begin{aligned} A \times A^* &= A_\alpha A_\beta \cdot r^\alpha \times r^\beta = c^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \cdot n = \\ &= c^{\alpha\beta} c_{\gamma\beta} A_\alpha A^\gamma n = \delta^\alpha_\gamma A_\alpha A^\gamma n = A^\alpha A_\alpha n, \end{aligned}$$

ე. ი.

$$A \times A^* = |A|^2 n. \quad (10.29)$$

ორთოგონალური მობრუნების ოპერაცია შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი ტენზორისთვის, თუ მის ინდექსებს ავითანთ ან ჩამოვიტანთ $c_{\alpha\beta}$ და $c^{\alpha\beta}$ ტენზორების საშუალებით, ამასთან, შესაბამის ინდექსებს * მაჩვენებლით აღვნიშნავთ. მაგალითად,

$$a_{\alpha\beta} = c_{\gamma\alpha} a^\gamma_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = c^{\gamma\alpha} a_{\gamma\beta}.$$

თუ ამ წესს გამოვიყენებთ, (10.23) ფორმულა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma A_\alpha = K c_{\beta\gamma} A_\alpha. \quad (10.30)$$

ზოგადი (10.24) ფორმულა ახლა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta a^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} - \nabla_\beta \nabla_\alpha a^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \\ = K c_{\beta\gamma} \left(a^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \dots + a^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} - \right. \\ \left. - a^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} - \dots - a^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_{p-1} \alpha_p} \right) \end{aligned} \quad (10.31)$$

თუ (10.17)-ში γ და γ ინდექსებს შევკვეცთ, მივიღებთ რიჩის კოვარიანტულ ტენზორს

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta} b^\gamma_\gamma - b_{\alpha\gamma} b^\gamma_\beta = K a_{\alpha\beta}. \quad (10.32)$$

განვიხილოთ რიჩის შერეული ტენზორი

$$R^\beta_\alpha = R^\gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta = K a^\beta_\alpha. \quad (10.33)$$

ინდექსების შეკვეცით მივიღებთ

$$R = R^\alpha_\alpha = R^\gamma_{\gamma}{}^\alpha = 2K. \quad (10.34)$$

ამრიგად, ზედპირის გაორკეცებული გაუსის სიმრუდე წარმოადგენს შეკვეცილ რიჩის ტენზორს ან, რაც იგივეა, ორჯერ შეკვეცილ რიჩან — ქრისტოფელის ტენზორს. (10.34) ფორმულით განსაზღვრუ-

ლი მთავარი სიმრუდე შეიძლება განვაზოგადოთ რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობისთვის.

აინშტაინის $G_{\alpha\beta}$ ტენზორი, რომელიც ზემოთ (IV თავი, § 2, პუნქტი 8) განვიხილეთ ორგანზომილებიანი მრავალსახეობისთვის, იგივეურად ნულად იქცევა. მართლაც, (10.32) და (10.34)-ის თანახმად, გვაქვს

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R a_{\alpha\beta} = K a_{\alpha\beta} - K a_{\alpha\beta} = 0 . \quad (10.35)$$

კოორდინატთა სპეციალური სისტემები და მათი ზოგიერთი გამოყენება ზედაპირთა თეორიაში

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ კოორდინატთა ზოგიერთ სპეციალურ სისტემას, რომელთაც მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვთ დიფერენციალური გეომეტრიისა და მექანიკის საკითხებში.

§ 1. კოორდინატთა სისტემები სიმრუდის წირებში

1. ზედაპირის პირველი და მეორე ძირითადი ფორმების გამოხატულებები. თუ ზედაპირზე კოორდინატთა სისტემად სიმრუდის წირთა ბადეს განვიხილავთ, გვექნება

$$a_{12}=0, \quad b_{12}=0. \quad (1.1)$$

პირველი ტოლობა შედეგია მთავარ მიმართულებათა ორთოგონალობის, რაც ჩვენ ზემოთ უკვე დავამტკიცეთ (V თავი, § 8, პუნქტი 2), ხოლო მეორეს, ამ ფაქტის გამოყენებით, მარტივად დავამტკიცებთ:

$$b_{12} = -n_1 r_2 = k_1 r_1 r_2 = k_2 a_{12} = 0. \quad (1.2)$$

აქ ვისარგებლეთ იმ გარემოებით, რომ მთავარი მიმართულებისათვის

$$\frac{dn}{ds'} = k_1 s' = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} n_1, \quad \text{ე. ი.} \quad n_1 = \sqrt{a_{11}} k_1 s' = -k_1 r_1.$$

თუ შემოვიღებთ

$$a_{11} = A^2, \quad a_{22} = B^2 \quad (a_{12} = a_{21} = 0) \quad (1.3)$$

აღნიშვნებს, რომლებითაც ჩვეულებრივ სარგებლობენ დიფერენციალური გეომეტრიაში, როცა კოორდინატთა სისტემად სიმრუდის წირებია აღებული, გვექნება

$$a = A^2 B^2, \quad a^{11} = \frac{1}{A^2}, \quad a^{22} = \frac{1}{B^2}, \quad a^{12} = a^{21} = 0, \quad (1.4)$$

$$b^{11} = k_1 A^2, \quad b^{22} = k_2 B^2, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad (1.5)$$

სადაც k_1 და k_2 ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები.

თუ განსახილავ შემთხვევაში გაუსის ξ^1 და ξ^2 კოორდინატებს შე-
საბამისად ξ და η -თი აღვნიშნავთ, ზედაპირის პირველი და მეორე
კვადრატული ფორმებისათვის მივიღებთ გამოსახულებებს

$$I = ds^2 = A^2 d\xi^2 + B^2 d\eta^2, \quad (1.6)$$

$$II = k_1 ds = k_1 A^2 d\xi^2 + k_2 B^2 d\eta^2. \quad (1.7)$$

2. ქრისტოფელის სიმბოლოები. გაუსისა და პეტერსონ-კოდაცის
განტოლებები. ლაპლასის ოპერატორი. (V, 4.7), (V, 4.8), (1.1) და
(1.3) ფორმულებიდან ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოე-
ბისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\Gamma_{11,1} = A \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad \Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = A \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad \Gamma_{22,1} = -B \frac{\partial B}{\partial \xi},$$

$$\Gamma_{11,2} = -A \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = B \frac{\partial B}{\partial \xi}, \quad \Gamma_{22,2} = B \frac{\partial B}{\partial \eta}, \quad (1.8 \text{ ა})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{B}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \xi},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{A}{B^2} \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \eta}. \quad (1.8 \text{ ბ})$$

თუ ახლა (V, 9.3), (V, 10.13), (V, 10.15), (1.8) და (1.5) ფორ-
მულებით ვისარგებლებთ, გაუსის განტოლება და პეტერსონ-კოდაცის
განტოლებათა სისტემა სათანადოდ მიიღებს სახეს

$$K = -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \right], \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial k_1 A}{\partial \eta} = k_2 \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial k_2 B}{\partial \xi} = k_1 \frac{\partial B}{\partial \xi}. \quad (1.10)$$

თუ u და v -თი აღვნიშნავთ ზედაპირის A ვექტორის ფიზიკურ
კომპონენტებს კოორდინატთა სისტემის მიმართ სიმრუდის წირებში,
გვექმება

$$A = \frac{u}{A} r_1 + \frac{v}{B} r_2 \quad (r_1 = r_\xi, r_2 = r_\eta). \quad (1.11)$$

აქედან ჩანს, რომ

$$A_1 = Ar' = \frac{u}{A}, \quad A^2 = Ar^2 = \frac{v}{B} \quad (1.12)$$

და (V, 9.9)-ის თანახმად გვაქვს

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial Bu}{\partial \xi} + \frac{\partial Av}{\partial \eta} \right). \quad (1.13)$$

(9.15) და (1.3)-ის თანახმად ლაპლასის ოპერატორისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$\Delta \varphi = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right]. \quad (1.14)$$

8. სფერული ზედაპირის ერთი დამახასიათებელი თვისების შესახებ. პეტერსონ—კოდაცის (1.10) განტოლებების დახმარებით ადვილად დავემტკიცებთ სფერული ზედაპირის დამახასიათებელ შემდეგ თვისებას:

ზედაპირი, რომლის ყოველი წერტილი ომბილურია, სფერულ ზედაპირს წარმოადგენს.

რადგან $k_1 = k_2 = k$, ამიტომ (1.10)-ის ძალით

$$\frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{\partial k}{\partial \eta} = 0, \quad \text{ე. ი.} \quad k = \text{const.} \quad (1.15)$$

(V, 4.3)-ის თანახმად (1.5) ტოლობები ახლა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\begin{aligned} (n_1 + kr_1) r_1 &= 0, & (n_1 + kr_1) r_2 &= 0, \\ (n_2 + kr_2) r_1 &= 0, & (n_2 + kr_2) r_2 &= 0. \end{aligned}$$

ცხადია, გვაქვს აგრეთვე ტოლობები

$$(n_1 + kr_1) n = 0, \quad (n_2 + kr_2) n = 0.$$

ამგვარად, $n_\alpha + kr_\alpha$ ვექტორები სამი არაკომპლანარული r_1, r_2, n ვექტორის მართობულია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $n_1 + kr_1 = 0$, $n_2 + kr_2 = 0$, ე. ი.

$$n + kr = kr_0, \quad (1.16)$$

სადაც r_0 მუდმივი ვექტორია. რადგან $nn=1$, ამიტომ (1.16)-დან გვაქვს

$$(r - r_0)^2 = \frac{1}{k^2}. \quad (1.17)$$

ეს კი, ცხადია, სფერული ზედაპირის განტოლებაა, რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

ამრიგად, ეილერის E სხვაობა იგივეურად ნულად იქცევა მხოლოდ სფერული ზედაპირისათვის; ცხადია, აგრეთვე, სიბრტყისათვისაც ($k_1=k_2=0$).

4. ნულოვანი მთავარი სიმრუდის ზედაპირები. ტორსები. დავუშვათ, რომ ზედაპირის მთავარი სიმრუდე იგივეურად ნულის ტოლია, ე. ი. $K=k_1 \cdot k_2=0$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ $k_1=0$, $k_2 \neq 0$. მაშინ (1.10) განტოლებიდან გვაქვს

$$A=\varphi(\xi), \quad k_2 B=\psi(\eta), \quad (1.18)$$

სადაც φ და ψ შესაბამისად მხოლოდ ξ და η ცვლადების ფუნქციებია. მაგრამ მაშინ, თუ შემოვიღებთ ახალ

$$x = \int \varphi(\xi) d\xi, \quad y = \int \psi(\eta) d\eta \quad (1.19)$$

კოორდინატებს, პირველი და მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმები მიიღებს სახეს

$$ds^2 = dx^2 + \frac{1}{k_2^2} dy^2, \quad k_2 ds^2 = \frac{1}{k_2} dy^2, \quad (1.20)$$

ე. ი. საკოორდინატო $x=\text{const}$ და $y=\text{const}$ წირები ამავე დროს სიმრუდის წირებსაც წარმოადგენს: $A=1$, $B=1/k_2^2$.

თუ ახლა (1.8 ბ) ფორმულებს მივმართავთ, დავინახავთ, რომ x და y კოორდინატებისათვის

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0. \quad (1.21)$$

ამის გამო, გაუსის სადერივაციო ფორმულებისა და $b_{11}=k_1=0$ ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{d^2 r}{dx^2} = \Gamma_{11}^1 r_1 + b_{11} n = 0, \quad \text{ე. ი.} \quad r = x T(y) + r_0(y), \quad (1.22)$$

სადაც T და r_0 ვექტორები მხოლოდ y კოორდინატზეა დამოკიდებული. $A^2=(r)^2=1$ და $r_1 r_2=0$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|T(y)|=1 \quad \text{და} \quad T(y) r'_0(y)=0. \quad (1.23)$$

აქ და ქვემოთ შტრიხი აღნიშნავს წარმოებულს y -ის მიმართ.

ამგვარად, ნულოვანი გაუსის სიმრუდის მქონე ზედაპირები მიეკუთვნება ხაზოვან ზედაპირთა კლასს. მაგრამ არა ყოველ ხაზოვან ზედაპირს აქვს ნულის ტოლი გაუსის სიმრუდე (მაგალითი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდა).

როგორც (1.20)-ის მეორე ფორმულიდან ჩანს, x და y კოორდინატებში ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმის b_{11} და b_{12} კოეფიციენტები ნულად იქცევა:

$$b_{11} = nr_{11} = 0, \quad b_{12} = nr_{12} = 0. \quad (1.24)$$

ამ ტოლობათაგან პირველი (1.22)-ის შედეგია. ხოლო მეორე ცხადი პირობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$[T \times (xT' + r'_0)] T' = 0 \quad \text{ან} \quad Tr'_0 T' = 0. \quad (1.25)$$

ხაზოვან ზედაპირებს, რომელთათვისაც სრულდება $Tr'_0 T' = 0$ ტოლობა, ტორსები ეწოდება.

ამრიგად, ნულოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირები ტორსებს წარმოადგენს. ტორსებს მიეკუთვნება ცილინდრული ($T = \text{const}$) და კონუსური ($r_0 = \text{const}$) ზედაპირები. თუ მათ ჯერჯერობით მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ $Tr'_0 T' = 0$ და $Tr'_0 = 0$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ T' და r'_0 ვექტორები კოლინეარულია, ე. ი.

$$T' = a(y) r'_0, \quad (1.26)$$

სადაც $a(y)$ წარმოადგენს y -ის ფუნქციას.

(1.22), (1.23) და (1.26) ტოლობების თანახმად ზედაპირის რკალის ელემენტის კვადრატისათვის გვაქვს გამოსახულება

$$ds^2 = dr dr = dx^2 + (ax + 1)^2 b^2 dy^2, \quad (1.27)$$

სადაც $b^2 = r_0'^2$. თუ შევადარებთ (1.27)-ს (1.20)-ის პირველ ფორმულას, გვექნება

$$\frac{1}{b_2^2} = (ax + 1)^2 b^2. \quad (1.28)$$

თუ ახლა შემოვიღებთ ახალ ცვლადებს

$$u = x \cos c - \int b \sin c dy, \quad v = x \sin c + \int b \cos c dy \quad (1.29)$$

ფორმულებით, სადაც

$$c = \int a b dy = \int (T' r'_0) r_0'^2 dy, \quad (1.30)$$

ადვილად მივიღებთ, რომ

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \quad (1.31)$$

ამრიგად, ნულოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირზე არსებობს კოორდინატთა დეკარტული u, v სისტემა. მაშასადამე, ასეთი ზედაპირები განიფინება სიბრტყეზე.

ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ არ არსებობს არანულოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირი, რომელიც სიბრტყეზე განიფინება. მართლაც, ასეთი ზედაპირი რომ არსებობდეს, მაშინ მასზე იარსებებდა დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, რომლის მიმართაც პირველ კვადრატულ ფორმას ექნებოდა (1.31) სახე, მაგრამ მაშინ ამ სისტემის მიმართ ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოები ნულის ტოლი იქნებოდა, ეს კი (V, 10.13) ფორმულების თანახმად მოგვცემდა $K=0$, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება.

ამრიგად, ტორსები (და მხოლოდ ისინი) შეადგენს ისეთ ზედაპირთა კლასს, რომელთა გაუსის სიმრუდე იგივეურად ნულია. ზედაპირთა ეს კლასი მოიცავს სიბრტყეებს, ცილინდრულ ($T=\text{const}$) და კონუსურ ($r_0=\text{const}$) ზედაპირებს, აგრეთვე ისეთ ზედაპირებს, რომლებიც სივრცითი წირის მხეხვებით წარმოიქმნებიან. ასეთი წირები წარმოადგენს (1.22) განტოლებებით მოცემული $y=\text{const}$ წრფეთა ოჯახის მომვლებებს. თუ x ცვლადს გამოვრიცხავთ

$$r - x T(y) - r_0(y) = 0, \quad x T'(y) + r'_0(y) = 0 \quad (T' \neq 0)$$

განტოლებებიდან, მივიღებთ მომვლების შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\rho(y) = - \frac{(T'(y) r'_0(y))}{|T'(y)|^2} T(y) + r_0(y) \quad (1.32)$$

ან, (1.26)-ის თანახმად,

$$\rho(y) = - \frac{1}{a(y)} T(y) + r_0(y) \quad (1.33)$$

განტოლებას.

§ 2. კოორდინატთა სისტემა ასიმპტოტურ წირებში

განვიხილოთ ახლა უარყოფითი $K = k_1 k_2 < 0$ სიმრუდის ზედაპირი. რადგან $\sqrt{E} = \sqrt{H^2 - K} > H$, ამიტომ ეილერის

$$k_s = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = H + \sqrt{E} \cos 2 \varphi \quad (2.1)$$

ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ზედაპირის ყოველ წერტილში გადის ორი მიმართულება, რომელთა გასწვრივ ზედაპირის შესაბამისი ნორმალური სიმრუდე ნულის ტოლია. ამ ორ მხეზე მიმართულებას ასიმპტოტური მიმართულებები ან ზედაპირის ასიმპტოტები ეწოდება. მათ შორის კუთხე განისაზღვრება

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{-K}}{H} \quad (2.2)$$

ტოლობიდან. აქედან ჩანს, რომ $\operatorname{tg} \omega \neq 0$ და, მაშასადამე, ასიმპტოტური მიმართულებები არსად არაა კოლინეარული, ამასთან ისინი ორთოგონალურია იმ წერტილებში, სადაც H საშუალო სიმრუდე ნულის ტოლია.

ზედაპირის წირს, რომლის მხეზე მის ყოველ წერტილში ამ წერტილზე გამავალი ერთ-ერთი ასიმპტოტური მიმართულებაც, ზედაპირის ასიმპტოტური წირი ეწოდება. უარყოფითი სიმრუდის ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის ორი ასიმპტოტური წირი, ამასთან კუთხე მათ შორის განისაზღვრება (2.2) ფორმულით და აკმაყოფილებს $0 < \omega < \pi$ პირობას. ამიტომ უარყოფითი სიმრუდის ზედაპირებზე საკოორდინატო წირებად შეიძლება ავიღოთ ასიმპტოტური წირები. დავამტკიცოთ, რომ კოორდინატთა ამ სისტემისათვის ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები აკმაყოფილებს

$$b_{11}=0, \quad b_{22}=0, \quad b_{12} \neq 0 \quad (2.3)$$

პირობებს. განმარტების თანახმად, ასიმპტოტური მიმართულებისათვის სათანადო ნორმალური სიმრუდე ნულად იქცევა, ე. ი.

$$k_s = b_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta = 0 \quad (s = s^1, r_1). \quad (2.4)$$

მაგრამ, თუ ასიმპტოტური წირი ემთხვევა საკოორდინატო $\xi^2 = \text{const}$ წირს, მაშინ $s^1 \neq 0$, $s^2 = 0$ და, მაშასადამე, როგორც (2.4)-დან ჩანს, $b_{11}=0$. თუ მეორე საკოორდინატო $\xi^1 = \text{const}$ წირი ემთხვევა მეორე ასიმპტოტურ წირს, მაშინ $s^1=0$, $s^2 \neq 0$ და, მაშასადამე, $b_{22}=0$. ამრიგად, კოორდინატთა სისტემისათვის ასიმპტოტურ წირებში ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე ნებისმიერი მხეზე მიმართულებით გამოისახება

$$k_s = b_{12} s^1 s^2 \quad (2.5)$$

ფორმულით. აქედან ჩანს, რომ $b_{12} \neq 0$, რადგან k_* ნულის ტოლია. მხოლოდ ორი მხეზი (ასიმპტოტური) მიმართულებისათვის. (აქ გამო-რიცხულია საბრტყის შემთხვევა, რომლისთვისაც, ცხადია, $b_{12} = 0$).

(2.5) ფორმულის თანახმად ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმა ლებულობს სახეს

$$II = k_* ds^2 = b_{12} d\xi d\eta. \quad (2.6)$$

ძნელი დასამტკიცებელი არაა შებრუნებული ლებულება, თუ მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმას აქვს (2.6) სახე, მაშინ საკოორდინატო $\xi = \text{const}$ და $\eta = \text{const}$ წირები ზედაპირის ასიმპტოტურ წირებს წარმოადგენს.

(2.3)-ის ძალით (V, 10.9)-დან გვაქვს

$$b_{12} = \pm \sqrt{-aK}. \quad (2.7)$$

რადიკალის წინ ნიშნის შერჩევა დამოკიდებულია r_1 , r_2 და Π ტრიედრის ორიენტაციაზე. ეს ჩანს

$$b_{12} = \Pi r_{12}$$

ფორმულიდან. ახლა ადვილი გამოსარკვევია, თუ როგორ უნდა ავარჩიოთ რადიკალის წინ ნიშანი (2.7) ფორმულაში.

უარყოფითი სიმრუდიანი ($K < 0$) ზედაპირის წერტილის ნებისმიერ მიდამოს უნაგირისებური ფორმა აქვს და ასიმპტოტური მიმართულებებით იგი იყოფა 4 ნაწილად, ამასთან ორი მათგანი ჩაზნექილია და ორი კი — ამოზნექილი. ვთქვათ, ზედაპირის ჩაზნექილი ნაწილი მოთავსებულია საკოორდინატო წირების დადებით მიმართულებათა შორის. თუ ზედაპირის Π ნორმალის მიმართულია ამ ნაწილის ჩაზნექილობის მხარეს, მაშინ $b_{12} > 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $b_{12} < 0$. ეს დასკვნა ადვილად გამომდინარეობს (2.5) ფორმულიდან და მენიეს თეორემის საფუძველზე.

§ 3. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემა ზედაპირზე. ბელტრამის განტოლებათა სისტემა და მისი ჰომეომორფიზმები

1. ბელტრამის განტოლებათა სისტემა. ბელტრამის განტოლებების ჰომეომორფიზმები. ყოველ რეგულარულ ზედაპირზე არსებობს კოორდინატთა ე. წ. იზომეტრული სისტემა, რომლის მიმართაც პირველ ძირითად კვადრატულ ფორმას აქვს სახე

$$ds^2 = \Lambda (du^2 + dv^2), \quad \Lambda > 0. \quad (3.1)$$

ზემოთ ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ კოორდინატთა ასეთი სისტემა არსებობს ტორსებზე, ე. ი. სიბრტყეზე განფენად ზედაპირებზე ($K=0$). მაშინ შეიძლება დავუშვათ, რომ $\Lambda=1$. ასეთი ზედაპირების მაგალითებია ცილინდრული და კონუსური ზედაპირები.

ნებისმიერ ზედაპირზე კოორდინატთა იზომეტრული სისტემების არსებობა ნათელი არაა და სპეციალურ დამტკიცებას მოითხოვს. ქვემოთ ჩვენ მივუთითებთ ამ თეორემის დამტკიცების ერთ მეთოდს, რომლის ჩკატრი დასაბუთებაც შეიძლება მოინახოს ავტორის წიგნში ([1], თავი 2).

პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \\ = \frac{1}{a_{11}} [a_{11} dx + (a_{12} + i\sqrt{a}) dy] [a_{11} dx + (a_{12} - i\sqrt{a}) dy]. \quad (3.2)$$

ჩვენ აქ მივიღეთ $\xi' = x$, $\xi^2 = y$ აღნიშვნები. დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი $\mu = \varphi + i\psi$ ფუნქცია, რომ $\mu [a_{11} dx + (a_{12} + i\sqrt{a}) dy]$ ნამრავლი წარმოადგენს რაიმე კომპლექსური $w = u(x, y) + iv(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ე. ი.

$$\mu (a_{11} dx + (a_{12} + i\sqrt{a}) dy) = dw. \quad (3.3)$$

ეს ტოლფასია

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mu a_{11}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \mu (a_{12} + i\sqrt{a})$$

ტოლობების. აქედან გამომდინარეობს, რომ w ფუნქცია აკმაყოფილებს

$$(a_{12} + i\sqrt{a}) \frac{\partial w}{\partial x} - a_{11} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

განტოლებას, რომელიც შეიძლება ასეთი ფორმითაც გადავწერათ

$$\frac{\partial w}{\partial z} - q(x, y) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (3.5)$$

სადაც

$$q(x, y) = \frac{a_{11} - \sqrt{a} + i a_{12}}{a_{11} + \sqrt{a} - i a_{12}}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.7)$$

ადვილი დასანახია, რომ w ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი u და v ნაწილები აკმაყოფილებს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებიან (ნამდვილ) განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - a_{11} \frac{\partial u}{\partial y} - \sqrt{a} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

$$a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} - a_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + \sqrt{a} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

მას ეწოდება ბელტრამის განტოლებათა სისტემა. (3.5) ტოლობა წარმოადგენს ბელტრამის განტოლებათა სისტემის კომპლექსური ფორმით ჩანაწერს.

თუ $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$, მაშინ გვექნება კოში — რიმანის განტოლებათა სისტემა

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.9)$$

რომელიც კომპლექსური ფორმით ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad w = u + iv. \quad (3.10)$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ სრულდება $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ პირობები, მაშინ (3.2) კვადრატულ ფორმას აქვს (3.1) სახე.

როგორც ცნობილია, კოში — რიმანის განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი გამოისახება

$$w = \Phi(z), \quad z = x + iy, \quad (3.11)$$

ფორმულით, სადაც Φ წარმოადგენს z ცვლადის ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას. ეს თვისება შეიძლება განზოგადდეს (3.8) განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისთვის შემდეგი ფორმით.

ვთქვათ, $\zeta(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ (3.5) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნია $z = x + iy$ სიბრტყის D არეში. მაშინ

$$w(x, y) = \Phi(\zeta(x, y)) \quad (3.12)$$

სახის ყოველი ფუნქცია, სადაც $\Phi(\zeta)$ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციაა $\zeta(D)$ არეში, აგრეთვე ბელტრამის (3.5) განტოლების ამონახსნი იქნება D არეში. ვთქვათ, (3.5) განტოლების კომპლექსური $\zeta(x, y)$

ამონახსნი ფიქსირებული (x_0, y_0) წერტილის მიდამოს ტოპოლოგიურად (ურთიერთცალსახად და უწყვეტად) ასახავს (ξ_0, η_0) წერტილის მიდამოზე. ბელტრამის განტოლების ყოველ ასეთ ამონახსნს მისი ლოკალური ჰომეომორფიზმი ეუწოდოთ (x_0, y_0) წერტილის მიმართ. მაშინ (3.5) განტოლების ყველა ისეთი ამონახსნი, რომელიც რეგულარულია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში, გამოისახება $\zeta(x, y)$ ლოკალური ჰომეომორფიზმით (3.12) ფორმულის საშუალებით, სადაც $\Phi(\zeta)$ ζ -ს ნებისმიერი რეგულარული ანალიზური ფუნქციაა $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ წერტილის მიდამოში.

ბელტრამის (3.5) განტოლების $w(x, y)$ ამონახსნს ეწოდება ჰომეომორფიზმი D არეში, თუ იგი D არეს ტოპოლოგიურად ასახავს $w(D)$ არეზე.

ამრიგად, ბელტრამის (3.5) განტოლების ზოგადი ამონახსნის აგება მიიყვანება მისი რომელიმე ჰომეომორფიზმის აგებაზე, რომელიც ტოპოლოგიურ ასახავს ახორციელებს. ბელტრამის განტოლების ჰომეომორფიზმის აგება, საზოგადოდ, საკმარისად რთული ამოცანაა და მოითხოვს თანამედროვე ანალიზის რთული აპარატის, კერძოდ, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებას. ამ პრობლემამ მრავალი მათემატიკოსის ყურადღება მიიქცია (კორჩი, ლიხტენშტეინი, ლაფრენტიევი, ალფორსი და სხვა), უმთავრესად კვაზიკონფორმულ ასახვებთან დაკავშირებით, რაც გაზების დინამიკის პრობლემებთან მჭიდროდაა დაკავშირებული (იხ. [25]). ქვემოთ, დამტკიცების დეტალების გარეშე, მოვიყვანთ ბელტრამის განტოლების ჰომეომორფიზმების აგების ერთი ხერხის ზოგად აღწერას. მის მკაცრ დასაბუთებას შეგვიძლია გავეცნოთ ავტორის წიგნში [1], თავი 2.

2. ბელტრამის განტოლებათა სისტემა ანალიზური კოეფიციენტებით. ზოგადად დასმული ამოცანის შესწავლამდე წინასწარ განვიხილოთ ერთი კერძო შემთხვევა. ვთქვათ, $q(x, y)$ ნაბღვილი x, y ცვლადების ანალიზური ფუნქციაა $z_0 = x_0 + iy_0$ წერტილის მიდამოში. $q(x, y)$ ფუნქცია z_0 წერტილის მიდამოში წარმოვადგინოთ ტეილორის მწკრივით

$$q(x, y) = \sum_{k, m=0}^{\infty} q_{k, m}(z_0) (z - z_0)^k (\bar{z} - \bar{z}_0)^m, \quad (3.13 \text{ ა})$$

სადაც

$$q_{k,m}(z_0) = \left(\frac{\partial^k + m_q}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad (3.13 \text{ ბ})$$

თუ (3.13 ა) ტოლობის მარჯვენა მხარეში z და $\bar{z}$ -ს შევცვლით დამოუკიდებელი კომპლექსური z და $\bar{z}$ ცვლადებით, მაშინ მივიღებთ ორი კომპლექსური არგუმენტის ანალიზურ $q(z, \bar{z})$ ფუნქციას, რომელიც $q(x, y)$ ფუნქციის საძიებელ ანალიზურ გაგრძელებას წარმოადგენს ოთხგანზომილებიან რაიმე $|z - z_0|^2 + |\bar{z} - \bar{z}_0|^2 < \varepsilon$ არეში, რომელსაც $S_\varepsilon(z_0)$ -ით აღვნიშნავთ. განვიხილოთ ახლა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -q(z, \bar{z}), \quad \bar{z}, z \in S_\varepsilon(z_0). \quad (3.13 \text{ გ})$$

ვოქვათ, $\varphi(z, \bar{z})$ ან განტოლების რაიმე ზოგად ინტეგრალს წარმოადგენს $S_\varepsilon(z_0)$ -ში. თუ $\Phi(\bar{z})$ $\bar{z}$ ცვლადის ანალიზური ფუნქციაა $\varphi(z, \bar{z})$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეში, მაშინ

$$w(x, y) = \Phi[\varphi(z, \bar{z})] \quad (3.13 \text{ დ})$$

ფორმულა გამოსახავს ბელტრამის (3.5) განტოლების ზოგად ამონახსნს z_0 წერტილის მიდამოში. ახლა ყოველთვის შეიძლება ანალიზური Φ ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ (3.13 დ) ფორმულა წარმოადგენდეს (3.5) განტოლების რაიმე ლოკალურ ჰომეომორფიზმს z_0 წერტილის მიმართ.

ბელტრამის განტოლების ჰომეომორფიზმების აგების ზემონაჩვენები ხერხით ამოცანა დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე. მაგრამ ეს ხერხი შეეხება, ჯერ ერთი, კერძო შემთხვევას, როცა განტოლების კოეფიციენტი არგუმენტების ანალიზური ფუნქციაა და, მეორეც, საზოგადოდ, მხოლოდ ლოკალური ჰომეომორფიზმების აგების საშუალებას იძლევა. ქვემოთ ვუჩვენებთ გლობალურად დასმული ამოცანის ამოხსნის ზოგად ხერხს.

8. ბელტრამის განტოლების ძირითადი ჰომეომორფიზმის აგება. დავუშვათ, რომ გაუსის $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$ პარამეტრების საშუალებით ზედაპირი ურთიერთცალსახად და უწყვეტად აისახება $z = x + iy$ სიბრტყის შემოსაზღვრულ G არეში. შემდგომისათვის საკმარისია დავუშვათ, რომ პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმის $a_{\alpha\beta}$ კოეფიციენტები

უწყვეტია და აქვთ უწყვეტი წარმოებულები დახურულ $\bar{G}$ არეში. აბს გარდა, შესრულებულია

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \geq a_0 > 0 \quad (G\text{-ში}) \quad (3.14)$$

პირობები, სადაც a_0 მუდმივა. მაშინ ადგილი დასაწახია, რომ (3.6) ფორმულით მოცემული $q(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|q(x, y)| \leq q_0 < 1, \quad q_0 < \text{const} \quad (G\text{-ში}). \quad (3.15)$$

ვიგულისხმობთ, რომ G -ს გარეთ $q(x, y)$ ფუნქცია ნულის ტოლია. ეს ნიშნავს, რომ G -ს გარეთ ბელტრამის სისტემა კოში—რიმანის სისტემად გადაქცევა და (3.15) უტოლობა შესრულებდა $z = x + iy$ კომპლექსური ცელადის მთელს E სიბრტყეზე.

ავაგოთ (3.5) განტოლების შემდეგი სახის

$$\zeta(x, y) = z + T(\rho) \quad (3.16)$$

ამონახსნი, სადაც

$$T(\rho) = - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho(t_1, t_2)}{t - z} dt_1 dt_2, \quad t = t_1 + it_2. \quad (3.17)$$

აქ $\rho(t_1, t_2)$ საძიებელი ფუნქციაა, რომელიც იგულისხმება, რომ ჯამბაღია E -ზე. $T(\rho)$ ოპერატორი ხასიათდება შემდეგი თვისებით (იხ. [1], თავი 1):

$$\frac{\partial T(\rho)}{\partial \bar{z}} = \rho, \quad \frac{\partial T(\rho)}{\partial z} = - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho(t_1, t_2)}{(t - z)^2} dt_1 dt_2 \equiv \Pi \rho. \quad (3.18)$$

აქ $\partial_{\bar{z}} T(\rho)$ და $\partial_z T(\rho)$ კერძო წარმოებულები გაიგება, საზოგადოდ, განზოგადებული აზრით და ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ ითიქმის ყველგან, ამასთან ინტეგრალი უნდა გვესმოდეს კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით. თუ ρ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობებს, მაშინ $\partial_{\bar{z}} T(\rho)$ და $\partial_z T(\rho)$ კერძო წარმოებულები არსებობს კლასიკური აზრით და (3.18) ტოლობებს ადგილი აქვს არეში ყველგან.

თუ (3.17) გამოსახულებას შევიტანთ (3.5) განტოლებაში, (3.18) ფორმულის თანახმად მივიღებთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$\rho(x, y) + \frac{q(x, y)}{\pi} \iint_E \frac{\rho(t_1, t_2)}{(t - z)^2} dt_1 dt_2 = q(x, y), \quad (3.19)$$

რომელსაც მოკლედ ასე ჩავეწერთ

$$\rho - q\Pi\rho = q, \quad (3.20)$$

სადაც

$$\Pi\rho \equiv -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho(t_1, t_2)}{(t-z)^2} dt_1 dt_2. \quad (3.20 \text{ ა})$$

(5.20) განტოლება მოსახერხებელია ჯერ განვიხილოთ ჰილბერტის $L_2(E)$ სივრცეში. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\Pi\rho$ ოპერატორს გააჩნია თვისება — $(\Pi\rho, \Pi\rho) = \|\rho\|^2$, თუ $\rho \in L_2(E)$. მაშასადამე, Π ოპერატორის ნორმა L_2 -ში ტოლია 1-ისა. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს შეკუმშული ასახვების პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ (3.20) განტოლებას ყოველთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი L_2 სივრცეში. ამასთან ამონახსნი შეიძლება აიგოს მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით (იხ. [1], თავი 2).

ვთქვათ

$$\rho_0 = q(x, y), \quad \rho_n = q(x, y) \left[1 - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho_{n-1}(t_1, t_2)}{(t-z)^2} dt_1 dt_2 \right] \quad (3.21)$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

ეს ფუნქციები აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას, თუ $q(x, y)$ ჰელდერის აზრით უწყვეტია მთელს E სიბრტყეზე.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$\zeta_n(x, y) = z - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\rho_n(t_1, t_2)}{t-z} dt_1 dt_2 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.22)$$

მიმდევრობა თანაბრად იკრიბება ყოველი შემოსაზღვრული არის წიგნით $\zeta(x, y)$ ფუნქციისაკენ, რომელიც უწყვეტია მთელს $z = x + iy$ სიბრტყეზე, აკმაყოფილებს ბელტრამის (3.5) განტოლებას და ახორციელებს E სიბრტყის ტოპოლოგიურ (ურთიერთცალსახა და უწყვეტ) ასახვას თავის თავზე, ამასთან უსასრულოდ დაშორებული წერტილი უძრავი რჩება. მაშასადამე, ზღვრული $\zeta(x, y)$ ფუნქცია ბელტრამის განტოლების ერთ-ერთი ჰომომორფიზმია, რომელსაც ძირითად ჰომომორფიზმს ვუწოდებთ [1].

ადვილი აქვს აგრეთვე შემდეგ დებულებას: რაიმე დადებით n_0 ნომრიდან დაწყებული ყველა $\zeta_n(x, y)$, $n \geq n_0$, ფუნქციაც ახორციე-

ლებს მთელი სიბრტყის ტოპოლოგიურ ასახვას თავის თავზე, ამასთან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს უძრავად ტოვებს.

ამრიგად, ზემოთ მოცემული ხერხი ბელტრამის განტოლების ძირითადი პომეომორფიზმების მიახლოებათა აგების საშუალებას იძლევა ნებისმიერი წინასწარ მოცემული სიზუსტით.

სასარგებლოა აღვნიშნოთ, რომ თუ G არე წრეა, ხოლო $q(x, y)$ ფუნქცია x და y ცვლადების პოლინომია, მაშინ ყველა მიახლოება აგრეთვე პოლინომი იქნება, ამასთან ისინი შეიძლება აიგოს ცხადი სახით.

თუ ρ წარმოადგენს x და y ცვლადების n -ური რიგის პოლინომს, მაშინ შეგვიძლია იგი ჩავწეროთ

$$\rho = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k a_{kl} z^k \bar{z}^{n-l}. \quad (3.23)$$

სახით. თუ G ერთეულოვანი წრეა, $|z| \leq 1$, მაშინ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$\begin{aligned} T(\rho) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \frac{a_{kl}}{k-l+1} z^k \bar{z}^{n-l+1} - \\ &- \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{l > \frac{k+1}{2}}} \frac{a_{kl}}{k-l+1} z^{2l-k+1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ამრიგად, $T(\rho)$ და, მაშასადამე, მისი z -ით წარმოებული პოლინომებს წარმოადგენს. ამის გამო, თუ $q(x, y)$ პოლინომია, ხოლო G —ერთეულოვანი წრე, მაშინ (3.21) და (3.22) ფორმულებით აგებული ყველა ρ_n და ζ_n ფუნქცია იქნება პოლინომი, რომლებიც შეიძლება მიმდევრობით ამოვწეროთ და გამოვსახოთ მოცემული $q(x, y)$ პოლინომის კოეფიციენტების საშუალებით. თუ n -ს საკმარისად დიდს ავიღებთ, მაშინ მივიღებთ საძიებელი ძირითადი პომეომორფიზმის მიახლოებებს პოლინომების სახით.

თუ $q(x, y)$ ფუნქცია პოლინომი არაა, მაშინ მისი პოლინომებით მიახლოება საშუალებას მოგვცემს ამავე გზით ავაგოთ ძირითადი პომეომორფიზმის მიახლოებები ზოგად შემთხვევაშიც.

ნებისმიერი არის შემთხვევა აგრეთვე შეიძლება დავიყვანოთ წინა შემთხვევაზე. თუ ამ არეს წინასწარ კონფორმულად ავსახავთ წრეზე.

4. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემა ჩაკეტილ სფერულ ზედაპირზე. ზემოთ ჩვენ დავეუწვით, რომ ზედაპირი ტოპოლოგიურად აისახება სიბრტყის რაიმე შემოსაზღვრულ არეზე. ეს შეზღუდვა შეიძლება მოეხსნათ და მიღებული შედეგი განვაზოგადოთ იმ შემთხვევისათვის, როცა ზედაპირი ტოპოლოგიურად აისახება მთელს სიბრტყეზე. მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ამ ამოცანაზე მიიყვანება მეტრული კვადრატული ფორმის (3.1) სახეზე დაყვანის გლობალური ამოცანა ჩაკეტილი ამოზნექილი (რეგულარული) ზედაპირებისათვის, რომელთაც ოვადიდეზი ეწოდებათ. ოვადიდეზთა კლასს მიეკუთვნება, მაგალითად, ელიფსოიდი, კერძოდ, ჩაკეტილი სფერული ზედაპირი.

თუ R რადიუსიანი სფერული ზედაპირის განტოლებას შემდეგი სახით ჩაეწერთ:

$$X = R \cos \varphi \sin \theta, \quad Y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad Z = R \cos \theta, \quad (3.25)$$

სადაც X, Y, Z სფერული ზედაპირის წერტილის დეკარტის კოორდინატებია, θ, φ — გეოგრაფიული კოორდინატები, მაშინ პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმისათვის მივიღებთ

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.26)$$

გამოსახულებას. ახალი

$$u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \cos \varphi, \quad v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \sin \varphi \quad (3.27)$$

ცვლადების შემოღებით გვექნება

$$ds^2 = \Lambda (du^2 + dv^2), \quad (3.28)$$

სადაც

$$\Lambda = \frac{4 R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}. \quad (3.29)$$

ამრიგად, ჩაკეტილ სფერულ ზედაპირზე არსებობს კოორდინატთა იზომეტრული სისტემა, რომელიც ახდენს ამ ზედაპირის ტოპოლოგიურ ასახვას მთელს სიბრტყეზე. ეს ასახვა წარმოადგენს სფერული ზედაპირის სტერეოგრაფიულ პროექციას ჩრდილო პოლუსიდან ($\theta = \pi$) ეკვატორიალურ სიბრტყეზე. $w = u + iv$ სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს შეესაბამება ჩრდილო პოლუსი $\theta = \pi$, რომლის მახლობლადაც, როგორც (3.29)-დან გამომდინარეობს, გვაქვს შეფასება

$$\Lambda = 0 (|w|^{-4}), \quad |w| = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (3.30)$$

მეტრული კვადრატული ფორმის გლობალურად დაყვანა (3.26) სახეზე შესაძლებელია მხოლოდ ოვალოიდისათვის. ამასთან მნიშვნელოვანია, რომ Λ -თვის შენარჩუნებულია (3.30) შეფასება უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლად (იხ. [1], თავი 2, § 6).

როგორც უკვე ზემოთ აღვნიშნეთ, ზედაპირის ერთი იზომეტრული კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლა ხორციელდება 1-ლი და მე-2 გვარის კონფორმულ ასახვათა საშუალებით. ოვალოიდებისათვის ეს ხორციელდება კონპლექსური სიბრტყის თავის თავზე კონფორმული ასახვებით, რომლებიც წილადწრფივია

$$z' = w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{ანუ} \quad z' = \overline{w(z)} \quad (3.31 \text{ ა})$$

ფუნქციებით ხორციელდება, სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ მჯდმივებია, რომლებიც

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (3.31 \text{ ბ})$$

პირობას აკმაყოფილებენ.

5. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემის ინვარიანტობა კონფორმულ გარდაქმნათა მიმართ. თუ $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ბელტრამის (3.5) განტოლების რაიმე ჰომეომორფიზმია, მაშინ ცვლადთა გარდაქმნის შედეგად კვადრატული $a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ფორმა მიიღებს (3.1) სახეს. (V, 2.4) ფორმულის თანახმად (3.1) კვადრატული ფორმის Λ კოფიციენტი შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\Lambda = \frac{\sqrt{a}}{|J|}, \quad |J| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right| > 0. \quad (3.31)$$

რადგან $w = u + iv$ აკმაყოფილებს (3.5) განტოლებას, გვექნება

$$J = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 (1 - |q(x, y)|^2) > 0. \quad (3.32)$$

იზომეტრულ კოორდინატებს ზედაპირზე აქვს შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისებები:

1-ლი და მე-2 გვარის კონფორმული გარდაქმნების შემთხვევაში იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემის ოჯახი ინვარიანტულია, ე. ი. საკოორდინატო წირების იზომეტრული ბადე ისევ იზომეტრულ წირთა ბადეში გადადის.

მართლაც, თუ

$$w(z) = u + iv = \varphi(w') \quad \text{ან} \quad w(z) = u + iv = \overline{\varphi(w')} \quad (3.33)$$

სადაც φ წარმოადგენს $w' = u' + iv'$ არგუმენტის ანალიზულ ფუნქციას, გვექნება

$$ds^2 = \Lambda |\varphi'(w)|^2 |dw'|^2 = \Lambda' (du'^2 + dv'^2), \quad (3.34)$$

სადაც

$$\Lambda' = \Lambda |\varphi'(w')|^2. \quad (3.35)$$

ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს იზომეტრული კოორდინატების ცვლილების არეღ ავირჩიოთ სპეციალური კანონიკური არეები შესაბამისი პმულებით. მაგალითად, თუ განვიხილავთ მარტივადმზულ ზედაპირს, რომელიც ტოპოლოგიურად აისახება ბრტყელ არეზე, ამასთან უკანასკნელის საზღვარი ორ წერტილს მაინც შეიცავს, მაშინ კანონიკურ არეღ გაუსის იზომეტრული კოორდინატებისათვის შეიძლება ავიღოთ ერთეულოვანი წრე [7]. ოვალოიდებისათვის კომპლექსური $w = u + iv$ ცვლადის ცვლილების არე მთელ სიბრტყეს ფარავს.

8. ქრისტოფელის სიმბოლოები კოორდინატთა იზომეტრულ სისტემაში. გაუსისა და ვეინგარტენის სადერივაციო ფორმულებისა და გაუსისა და პეტერსონ—კოდაცის განტოლებების კომპლექსური ჩაწერა. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემის შემთხვევაში მეტრული ტენზორის კომპონენტები გამოისახება ფორმულებით

$$a_{11} = a_{22} = \Lambda, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a = \Lambda^2; \quad (3.36)$$

$$a^{11} = a^{22} = \frac{1}{\Lambda}, \quad a^{12} = a^{21} = 0. \quad (3.37)$$

ამ ფორმულების თანახმად ტენზორის კოვარიანტული (ქვედა) ინდექსებიდან კონტრავარიანტულ (ზედა) ინდექსებზე გადასვლა და პირიქით სრულდება შესაბამისად Λ^{-1} და Λ -ზე უბრალო გამრავლებით. მაგალითად, თუ $e_{\alpha\beta}$ ზედაპირის მე-2 რანგის ტენზორია, მაშინ მისი სხვა კომპონენტები გამოისახება შემდეგი

$$e_{\alpha}^{\beta} = e_{\gamma}^{\beta} = \frac{1}{\Lambda} e_{\alpha\beta}, \quad e^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Lambda^2} e_{\alpha\beta} \quad (3.38)$$

ფორმულებით. უნდა აღინიშნოს, რომ იზომეტრულ კოორდინატებში მე-2 რანგის შერეული ტენზორის კომპონენტები შესაბამის ფიზიკურ კომპონენტებს ემთხვევა:

$$e_{(\alpha\beta)} = e_{\alpha}^{\beta} = e_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.39)$$

(3.36) და (3.37) ფორმულების თანახმად ქრისტოფელის სიმბოლოებისათვის მივიღებთ გამოსახულებებს:

$$\Gamma_{11,1} = -\Gamma_{22,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad \Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad (3.40 \text{ ა})$$

$$\Gamma_{22,2} = -\Gamma_{11,2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x};$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad (3.40 \text{ ბ})$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x}.$$

(V, 9.15) ფორმულის საფუძველზე ადვილი შესაძრწევია, რომ ლაპლასის ოპერატორი ზედაპირზე კოორდინატთა იზომეტრიულ სისტემაში გამოისახება

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta} \varphi &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\Lambda} \Delta \varphi = \frac{4}{\Lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (3.41),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \equiv \partial_z = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) \right)$$

ფორმულით.

(3.40) ფორმულების საშუალებით გაუსის სადერივაციო (V, 4.2) და (V, 4.12) ფორმულებით შეგვიძლია ახლა კომპლექსური ფორმით ჩავეწეროთ:

$$\widetilde{\Delta} r - 2 H n = 0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{2}{\Lambda} \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial \bar{z}} - H n = 0, \quad (3.42 \text{ ა})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial r}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} Q n = 0, \quad (3.42 \text{ ბ})$$

სადაც

$$H = \frac{1}{2} b_a^a, \quad Q = \frac{1}{2} (b_1^1 - b_2^2 - 2 i b_3^3). \quad (3.42 \text{ გ})$$

თუ შევთანხმდებით

$$s = t^1, \quad \bar{z} = t^2, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial t^a}. \quad (3.42 \text{ დ})$$

აღნიშვნებში, მაშინ (3.42 ა, ბ) შეგვიძლია

$$\partial_a \partial_\beta r = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} r_{,\lambda} + \tilde{b}_{\alpha\beta} n \quad (3.42 \text{ ე})$$

სახით ჩავწერთ, სადაც

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} = \tilde{b}_\alpha^{\lambda} \tilde{b}_\beta^a \partial_a \ln \Lambda, \quad (3.42 \text{ ვ})$$

$$\tilde{b}_{11} = \tilde{b}_{22} = \frac{1}{2} \Lambda Q, \quad \tilde{b}_{12} = \tilde{b}_{21} = \frac{1}{2} \Lambda H. \quad (3.42 \text{ ზ})$$

(3.42 ვ) დამოკიდებულებები შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\tilde{\Gamma}_{12}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \tilde{\Gamma}_{22}^1 = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{22}^2 = \partial_z \ln \Lambda \quad (3.42 \text{ თ})$$

სახით.

$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda}$ -ს ქრისტოფელის მე-2 გვარის კომპლექსური სიმბოლოები ვუწოდოთ ზედაპირის იზომეტრული პარამეტრიზაციის მიმართ. ქრისტოფელის 1-ლი გვარის შესაბამისი სიმბოლოები

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\lambda} = \tilde{b}_{\alpha\lambda} \tilde{b}_{\alpha\beta} \partial_a \Lambda \quad (3.42 \text{ ი})$$

ფორმულით გამოისახება, ე. ი.

$$\tilde{\Gamma}_{12,\lambda} = \tilde{\Gamma}_{11,2} = \tilde{\Gamma}_{22,1} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{11,1} = \tilde{\Gamma}_{22,2} = \partial_z \Lambda. \quad (3.42 \text{ კ})$$

(3.42 ა, ბ)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$H = -\frac{2}{\Lambda} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \bar{z}} = -\frac{2}{\Lambda} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (3.43)$$

$$Q = -\frac{2}{\Lambda} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial z}.$$

თუ ახლა მხედველობაში მივიღებთ (3.43) და

$$\frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \Lambda$$

ტოლობებს, ვეინგარტენის სადერივაციო (V, 4.13) ფორმულები შეგვიძლია კომპლექსური ფორმით ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -H \frac{\partial r}{\partial z} - Q \frac{\partial r}{\partial z} \quad (3.44)$$

გაუსის განტოლება შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$K = -\frac{1}{2\Lambda} \left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial y^2} \right] = -\frac{1}{2\Lambda} \Delta \ln \Lambda, \quad (3.45)$$

ხოლო პეტერსონ-კოდაცის განტოლებათა სისტემას აქვს

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial x} - \frac{\partial b_{21}}{\partial y} - H \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial y} - \frac{\partial b_{12}}{\partial x} - H \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0$$

სახე. განტოლებათა ეს სისტემა შეგვიძლია კომპლექსური ფორმით ასე ჩავწეროთ

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda Q}{\partial z} = 0. \quad (3.47)$$

გვაქვს

$$|Q|^2 = \frac{1}{4} (b_1^1 + b_2^2)^2 - (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) = H^2 - K = E. \quad (3.48)$$

მაშასადამე, $Q=0$ ზედაპირის მხოლოდ ომბილურ წერტილებში. ამრიგად, Q იგივეურად ნულს უტოლდება მხოლოდ სფერული ზედაპირისა და სიბრტყისათვის. Q სიდიდეს ზედაპირის ეილერის კომპლექსური სხვაობა ეუწოდოთ.

(3.48)-ის თანახმად

$$Q = \frac{1}{2} (b_1^1 - b_2^2 + 2ib_1^2) = \sqrt{E} e^{i\psi}. \quad (3.49)$$

(V, 7.5), (V, 7.12) და (3.42) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ

$$k_s - i\tau_s = H + \overline{Q} \frac{dz}{dz} = H + \sqrt{E} e^{i(2\psi - \Psi)}, \quad (3.50)$$

$$k_s = \frac{1}{2} \frac{d \ln \Lambda}{dl} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{d}{ds} \ln \frac{dz}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d \ln \Lambda}{dl} + \frac{d\psi}{ds} \quad (3.51)$$

ფორმულებს, სადაც Φ წარმოადგენს L წირის მხების დახრის კუთხეს საკოორდინატო $y = \text{const}$ წირის მიმართ; $\Lambda^{1/2} dz = e^{i\Phi} ds$. ადვილი დასანახია, რომ $2\Phi - \psi = 2\varphi$, სადაც φ წარმოადგენს L -ის მხების დახრის კუთხეს შეხების წერტილში გამავალ მთავარ მიმართულებასთან. ვთქვათ s მიმართულება ემთხვევა მთავარ s' მიმართულებას. რადგან $\tau_{s'} = 0$, ამიტომ (3.50)-დან მივიღებთ, რომ $\psi = 2\Phi$. ამრიგად,

$$Q = \sqrt{E} e^{2i\Phi}, \quad \text{ე. ი. } \arg Q = \psi = 2\Phi, \quad (3.52)$$

სადაც Φ მთავარი s' მიმართულების დახრის კუთხეა საკოორდინატო $y = \text{const}$ წირის მიმართ.

7. ო. ბონეს ფორმულა. ვთქვათ, S წარმოადგენს F ზედაპირის არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია მარტივი შეკრული უბან-უბან გლუვი L წირით. თუ (3.51) ტოლობის ორივე მხარეს L კონტურის გასწვრივ ვაინტეგრებთ და გრინის (V, 9.16) ფორმულას გამოვიყენებთ, გაუსის (3.45) განტოლების თანახმად მივიღებთ ო. ბონეს ფორმულას

$$\iint_S K dS + \int_L k_g ds = \text{Im} \left\{ \ln \frac{dz}{dz} \right\}_L. \quad (3.53)$$

ადვილად გამოითვლება, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე $\sum -(m-2)\pi$ -ის ტოლია, სადაც $\sum$ არის L კონტურის შიგა კუთხეების ჯამი, ხოლო m —მისი კუთხური წერტილების რიცხვი. $\sum -(m-2)\pi$ სიდიდეს L წირით შემოსაზღვრული ზედაპირის კუთხური სიჭარბე ეწოდება.

თუ L წირი შედგება ზედაპირის გეოდეზიური წირის მონაკვეთებისაგან, ე. ი. S გეოდეზიური მრავალკუთხედი, მაშინ $k_g = 0$ L -ზე და (3.53) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\iint_S K dS = \sum -(m-2)\pi. \quad (3.54)$$

თუ $K = 0$, მაშინ $\sum = (m-2)\pi$, ე. ი. ნულოვანი სიმრუდის მქონე ზედაპირის გეოდეზიური მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი ტოლია $(m-2)\pi$ -ის, სადაც m მრავალკუთხედის კუთხეების რიცხვია ($m > 2$). კერძოდ, როცა $m = 3$, მივიღებთ პლანიმეტრიიდან ცნობილ თეორემას სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის შესახებ. ამრიგად, ნუ-

ლოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირისათვის პლანიმეტრიის ეს თეორემა ძალაში რჩება.

თუ S არე შემოსაზღვრულია მარტივი ჩაკეტილი გლუვი F ზედაპირის გეოდეზიური წირით, მაშინ $\sum=0$, $m=0$ და (3.54) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\iint_S K dF = 2\pi. \quad (3.54 \text{ ა})$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს რიგა მნიშვნელოვანი შედეგებისა.

ვთქვათ, F ზედაპირის გაუსის სიმრუდე ნულის ტოლია, $K=0$. მაშინ (3.54 ა) ფორმულა, ცხადია, სამართლიანი არაა. ეს ნიშნავს, რომ ნულოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირზე არ არსებობს ისეთი მარტივი გლუვი შეკრული გეოდეზიური წირი, რომელიც ამ ზედაპირის მარტივადებული (შემოსაზღვრული) არის საზღვარია (ამ დებულების დამტკიცება კიდევ შეიძლება იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ ნულოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირები სიბრტყეზე განიფინება). გლუვ ამოწნეწილ ზედაპირზე ($K > 0$) არ არსებობს ორი შეკრული გლუვი არაგადამკვეთი გეოდეზიური წირი (დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ).

8. გეოდეზიური წირების განტოლებები კოორდინატთა იზომეტრულ სისტემაში. შევნიშნოთ, რომ გეოდეზიური წირების (V, 5.5) განტოლებები (3.40)-ის თანახმად დებულობს სახეს

$$z'' + \partial_z \ln \Lambda z'^2 = 0, \quad (3.55)$$

სადაც z' და z'' აღნიშნავს $z=x+iy$ -ის 1-ლი და მე-2 რიგის წარმოებულებს წირის პარამეტრის მიმართ. კერძოდ, ამ პარამეტრად შეიძლება ავიღოთ z სიბრტყეზე იმ წირის რკალის სიგრძე, რომელიც გეოდეზიური წირის სახეს წარმოადგენს. მაშინ, (3.55) განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{z'} \right) - \partial_z \ln \Lambda = 0, \quad z' = \frac{dz}{ds}. \quad (3.56)$$

რადგან $z' \bar{z}' = 1$, ამიტომ გვაქვს

$$\frac{d^2 \bar{z}}{ds^2} - \partial_{\bar{z}} \ln \Lambda = 0. \quad (3.57)$$

ასეთი სახით შეიძლება ჩაიწეროს გეოდეზიური წირების განტოლება იზომეტრულ კოორდინატებში.

9. სიბრტყეზე იზომეტრული ასახვის კონფორმულობა. აღნიშნოთ ახლა კოორდინატთა იზომეტრული სისტემის ერთი დამახასიათებელი თვისება. სახელდობრ, ზედაპირის $z = x + iy$ სიბრტყეზე იზომეტრული x და y კოორდინატებით ასახვისას კუთხეები შეინახება.

პარტლაც, ზედაპირის ორ მხებ l და s მიმართულებათა შორის კუთხე განისაზღვრება (V. 2.29) ტოლობით, რომელსაც კოორდინატთა იზომეტრულ სისტემაში აქვს სახე:

$$\cos \Omega = \frac{dx \delta x + dy \delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \quad (3.58)$$

ამ ტოლობის პარაგენა მხარე, ცხადია, $z = x + iy$ სიბრტყეზე (dx, dy) და $(\delta x, \delta y)$ მიმართულებათა შორის მოთავსებული კუთხის კოსინუსის ტოლია. მაგრამ ეს მიმართულებები l და s მიმართულებათა სახეებია ზედაპირის იზომეტრული ასახვისას სიბრტყეზე.

ამრიგად, ზედაპირის იზომეტრული ასახვა სიბრტყეზე კონფორმულია.

ამის გამო იზომეტრულ კოორდინატებს მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს გეოგრაფიული რუკების აგების საკითხებში. რუკაზე აღგიღმდებარეობის რელიეფის გადატანისას კუთხეები არ იცვლება, ხოლო მანძილები $ds = \sqrt{A} d\sigma$ კანონით იცვლება, სადაც $d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ევკლიდური მანძილია რუკაზე.

§ 4. მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირის ერთი თვისების შესახებ. მინიმალური ზედაპირები

1. მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირები. განვიხილოთ მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირები, $H = \text{const}$. მაშინ (3.47)-დან გამოძდინარეობს, რომ

$$\Delta \bar{Q} = f(z), \quad (4.1)$$

სადაც $f(z)$ წარმოადგენს $z = x + iy$ ცვლადის ანალიზურ ფუნქციას. (3.49)-ის თანახმად

$$\Delta \sqrt{E} = |f(z)|. \quad (4.2)$$

სფეროს შემთხვევაში $E = 0$ ყველგან. მაშასადამე, სფეროსათვის $f(z)$ ფუნქცია იგივეურად ნულად იქცევა. სფერული ზედაპირისაგან განსხვავებული, მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირისათვის E და, მა-

შასადამე, $f(z)$ იგივეურად ნულად არ იქცევა. ასეთი ზედაპირის ომბილური წერტილები ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის ნულებს წარმოადგენს. ანალიზური ფუნქციის ნულების იზოლირებულობის ცნობილი თეორემის თანახმად გვაქვს, რომ მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირებზე, თუ ისინი სფერული ზედაპირებისა და სიბრტყისაგან განსხვავდებიან, ომბილური წერტილები იზოლირებულია.

ამრიგად, სფერული ზედაპირისაგან განსხვავებული მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირი ყოველთვის შეიცავს მარტივად S_0 ნაწილს, რომელსაც არ გააჩნია ომბილური წერტილები. მაშასადამე, $f(z) \neq 0$ ყველგან მარტივად G არეში, რომელიც S_0 ზედაპირის სახეს წარმოადგენს $z = x + iy$ სიბრტყეზე. (3.50) და (4.1)-ის თანახმად გვაქვს

$$II = k_s ds^2 = H ds^2 + \operatorname{Re} [f(z) dz^2]. \quad (4.3)$$

რადგან $f(z) \neq 0$ G -ში, ამიტომ შეგვიძლია შემოვიყვანოთ ახალი იზომეტრული კოორდინატები

$$\zeta = \xi + i\eta = \int \sqrt{f(z)} dz \quad (4.4)$$

ფორმულის მიხედვით. მაშინ (3.49) და (4.2)-ის თანახმად გვექნება

$$d\zeta d\bar{\zeta} = |f(z)| dz d\bar{z} = |Q| \wedge dz d\bar{z} = \sqrt{E} ds^2 \quad (4.5)$$

და, მაშასადამე, სფერული ზედაპირისაგან განსხვავებული მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირის პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა შეიძლება შემდეგი ფორმულით გამოვსახოთ:

$$I = ds^2 = \frac{1}{\sqrt{E}} (d\xi^2 + d\eta^2). \quad (4.6)$$

ახლა (4.3)-ის ძალით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმას აქვს სახე

$$II = k_s ds^2 = \frac{1}{\sqrt{E}} (k_1 d\xi^2 + k_2 d\eta^2). \quad (4.7)$$

ამრიგად, ომბილური წერტილების არაშემცველი მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირზე სიმრუდის წირთა ბადე შეადგენს ერთ-ერთ იზომეტრულ წირთა ბადეს. (ეს წინადადება, რა თქმა უნდა, სამართლიანია აგრეთვე სფერული ზედაპირისა და სიბრტყის შემთხვევაშიც, მაგრამ (4.6) და (4.7) ფორმულები აზრს კარგავს, რადგან

$E=0$). კოორდინატთა ამ სისტემაში მუდმივი საშუალო სიძრუდის ზედაპირისათვის (სფერული ზედაპირის გამორიცხვით) გაუსის (3.45) ფორმულა ლებულობს

$$K=H^2-E=\frac{V\overline{E}}{2} \tilde{\Delta} \ln V\overline{E} \quad (4.8)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\Delta \ln V\overline{E} = 2 \left(\frac{H^2}{V\overline{E}} - V\overline{E} \right) \quad (4.9)$$

სახეს.

ვთქვათ, $H \neq 0$. H -ის ნიშანი დამოკიდებულია ნორმალის მიმართულების არჩევაზე. ვთქვათ $H > 0$. თუ შემოვიღებთ

$$V\overline{E} = He^{-u} \quad (4.10)$$

აღნიშვნას, გვექნება

$$k_1 = H(1+e^{-u}), \quad k_2 = H(1-e^{-u}). \quad (4.11)$$

მაშასადამე, (4.6) და (4.7) ფორმულები ლებულობს სახეს

$$I = ds^2 = \frac{e^u}{H} (d\xi^2 + d\eta^2), \quad II = (e^u + 1) d\xi^2 + (e^u - 1) d\eta^2. \quad (4.12)$$

შევიტანოთ რა (4.10)-ს (4.9)-ში, u ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\Delta u + 2H(e^u - e^{-u}) = 0 \quad (4.13)$$

განტოლებას. ადვილი შესამოწმებელია, რომ პეტერსონ-კოდაცის განტოლებები აქ ავტომატურად სრულდება, ხოლო (4.13) ტოლობა წარმოადგენს გაუსის განტოლებას.

თუ $H < 0$, მაშინ მივიღებთ

$$V\overline{E} = -He^{-u} \quad (4.10 \text{ ა})$$

და გვექნება

$$k_1 = H(1-e^{-u}), \quad k_2 = H(1+e^{-u}). \quad (4.11 \text{ ა})$$

ამიტომ (4.6) და (4.7) ფორმულები მიიღებს სახეს

$$I = ds^2 = -\frac{e^u}{H} (d\xi^2 + d\eta^2), \quad II = (1-e^u) d\xi^2 + (1+e^u) d\eta^2. \quad (4.12 \text{ ა})$$

თუ (4.10 ა) გამოსახულებებს (4.9)-ში შევიტანოთ, u -თვის მივიღებთ

$$\Delta u - 2H(e^u - e^{-u}) = 0 \quad (4.13 \text{ ა})$$

განტოლებას.

2. მინიმალური ზედაპირები. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $H=0$. ასეთ ზედაპირებს მინიმალური ეწოდება. მაშინ $k_1 = -k_2 = k \geq 0$. $\sqrt{E} = k$ და (4.9) განტოლება, (4.6) და (4.7) ფორმულები ლებულობს სახეს

$$\frac{\partial^2 \ln k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \ln k}{\partial \eta^2} = -2k, \quad (4.14)$$

$$I = ds^2 = \frac{1}{k} (d\xi^2 + d\eta^2), \quad II = k_* ds^2 = d\xi^2 - d\eta^2. \quad (4.15)$$

(4.14) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი ფორმულით (იხ. [2]):

$$k = 4 |\Phi'(\zeta)|^2 (1 + |\Phi(\zeta)|^2)^{-2}, \quad (4.16)$$

სადაც $\Phi(\zeta)$ წარმოადგენს $\zeta = \xi + i\eta$ ცვლადის ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას. მინიმალური ზედაპირის წერტილის დეკარტის კოორდინატები შემდეგნაირად გამოისახება (ეს გამომდინარეობს (3.42 ა) განტოლებიდან):

$$x_i = f_i(\zeta) + \overline{f_i(\zeta)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.17)$$

სადაც f_i წარმოადგენს ζ ცვლადის ანალიზურ ფუნქციებს. თუ გამოვითვლით (4.17) ზედაპირის 1-ლი და მე-2 ძირითად კვადრატულ ფორმათა კოეფიციენტებს და მათ გავუტოლებთ (4.16)-ის სათანადო კოეფიციენტებს, (4.16)-ის თანახმად მივიღებთ

$$f'_1(\zeta) = \frac{1 - \Phi^2(\zeta)}{4\Phi'(\zeta)}, \quad f'_2(\zeta) = \frac{1 + \Phi^2(\zeta)}{4i\Phi'(\zeta)}, \quad f'_3(\zeta) = \frac{\Phi(\zeta)}{2\Phi'(\zeta)}. \quad (4.18)$$

ეს ფორმულები პირველად, როგორც ჩანს, მიღებული იყო კ. ვეიერშტრასის მიერ [14].

ამ ფორმულების საშუალებით ყოველ ანალიზურ Φ ფუნქციას შეესაბამება მინიმალური ზედაპირი, რომელიც პარალელური გადატანის სიზუსტით განისაზღვრება. პირიქით, ყოველი მინიმალური ზედაპირი განსაზღვრავს ანალიზურ Φ ფუნქციას, ამასთან ამ ზედაპირის ბრუნვებს შეესაბამება შემდეგი სახის გარდაქმნები (იხ. [2]):

$$\Phi_1 = e^{\lambda} \frac{\Phi(\zeta) - a}{1 + \bar{a}\Phi(\zeta)}, \quad (4.19)$$

სადაც a — კომპლექსური, ხოლო λ ნამდვილი მუდმივია. ასეთი სახის ჩასმების შემთხვევაში (4.16) ტოლობის მარჯვენა მხარე არ იცვლება. რაც უშუალოდ მოწმდება.

(4.16) ფორმულის ეს თვისება $\Phi(\zeta)$ ფუნქციის ნორმირების საშუალებას იძლევა შემდეგი სახის პირობებით:

$$\Phi(\zeta_0) = 0, \quad \Phi'(\zeta_0) > 0, \quad (4.20)$$

სადაც ζ_0 წარმოადგენს ζ სიბრტყის ფიქსირებულ წერტილს, რომელიც მინიმალური ზედაპირის რეგულარულ წერტილს შეესაბამება.

ვთქვათ, $\{S\}$ ყველა მინიმალური ზედაპირის სიმრავლეა, ამასთან ორ S_1 და S_2 ზედაპირს არ განევსხვავებთ, როცა ერთი მათგანი მოძრაობის საშუალებით მეორეზე მიიყვანება. ვთქვათ, $\{\Phi\}$ ყველა ანალიზური ფუნქციითაა სიმრავლეა ნორმირების (4.20) პირობებით. მაშინ $\{S\}$ და $\{\Phi\}$ სიმრავლეებს შორის იარსებებს ურთიერთცალსახა თანადობა. თუ შემოვიღებთ ახალ

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta) \quad (4.21)$$

ცვლადებს, მაშინ (4.15) ფორმულები მიიღებს სახეს

$$I = \frac{1}{k} (dx^2 + dy^2), \quad II = k, ds^2 = 2 dx dy. \quad (4.22)$$

ეს ნიშნავს, რომ ორთოგონალური საკოორდინატო $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ წირები მინიმალურ ზედაპირზე ასიმპტოტურ წირებს წარმოადგენს.

(4.17) და (4.18) ტოლობებიდან ადვილად გამოვიყვანთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\Phi \bar{\Phi} = \frac{1 - n_3}{1 + n_3}, \quad \Phi(\zeta) = - \frac{n_1 - i n_2}{1 + n_3}, \quad (4.23)$$

სადაც n_1 , n_2 , n_3 მინიმალური ზედაპირის ნორმალის მიმმართველი კოსინუსებია. მაშასადამე, გლუვი მინიმალური ზედაპირისათვის ანალიზური $\Phi(\zeta)$ ფუნქცია ცალსახა და უწყვეტია ყველგან გარდა წერტილებისა, სადაც $n_3 = -1$. ზედაპირის ამ წერტილებში $\Phi(\zeta) \rightarrow \infty$ და, მაშასადამე, ζ ცვლადის ცვლილების არის შესაბამისი წერტილები ანალიზური $\Phi(\zeta)$ ფუნქციის პოლუსებს წარმოადგენს. ეს შეიძლება

შემდეგნაირადაც დავამტკიცოთ. თუ განვიხილავთ შებრუნებულ $\Phi_1 = \Phi^{-1}$ ფუნქციას, მაშინ (4.16) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$k = \frac{4 \Phi'_1 \overline{\Phi'_1}}{(1 + \Phi_1 \Phi_1)^2}.$$

მაგრამ იმ წერტილებში, სადაც Φ უსასრულო ხდება, $\Phi_1 = 0$. მაშასადამე, k -ს უწყვეტობის გამო ანალიზურ Φ_1 ფუნქციას ამ წერტილებში შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ სასრული რიგის ნული.

განვიხილოთ ახლა მინიმალური ზედაპირის ის ნაწილი, რომელიც ცალსახად გეგმილდება Ox_1x_2 სიბრტყეზე. ნორმალური მიემართოთ Ox_3 ღერძის დადებითი მიმართულების მხარეს. მაშინ, ცხადია, $0 \leq n_3 \leq 1$. ამიტომ ასეთი ზედაპირისათვის (4.23)-ის პირველი ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$|\Phi(\zeta)| \leq 1. \quad (4.24)$$

ვთქვათ, მინიმალური ზედაპირი ცალსახად გეგმილდება მთელს Ox_1x_2 სიბრტყეზე. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მაშინ ანალიზური $\Phi(\zeta)$ ფუნქციის ζ არგუმენტის ცვლილების არე მთელი $\zeta = \xi + i\eta$ სიბრტყეა (იხ. [12], [16], [24]). ამ შემთხვევაში ლიუვილის თეორემის თანახმად (4.24) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi(\zeta) = \text{const}$, მაშასადამე, (4.16) ფორმულის თანახმად მთავარი სიმრუდე $K = 0$. ამგვარად, განსახილავ შემთხვევაში მინიმალური ზედაპირი სიბრტყეს წარმოადგენს.

მინიმალურ ზედაპირებსა და ანალიზურ ფუნქციათა შორის ზემოთ დადგენილი კავშირი ერთი კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის გამოყენების ფართო შესაძლებლობას იძლევა მინიმალურ ზედაპირთა თეორიის დასამუშავებლად. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამ კლასიკური პრობლემატიკის მიმართ ინტერესი დღემდე არ შენელებულა. დაინტერესებულ მკითხველს მიუეთითებთ მნიშვნელოვან მიმოხილვით ხასიათის მონოგრაფიას [24], იხ., აგრეთვე, [7], რომელშიაც ბევრა საინტერესო და ჯერ ამოუხსნელი ამოცანის ფორმულირება მოცემული. იქვეა მდიდარი ბიბლიოგრაფია.

§ 5. მუდმივი გაუსის სიმრუდის ზედაპირები

1. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის არსებობა ნულოვან გაუსის სიმრუდის ზედაპირზე. (4.4) განტოლებებამდე მივყავართ აგრეთვე გაუსის მუდმივი სიმრუდის, $K = \text{const}$, მქონე ზედაპირებს. აქ შეიძ-

ლება განვიხილოთ საში განსხვავებული შემთხვევა: 1) $K > 0$, 2) $K < 0$ და 3) $K = 0$.

პირველ შემთხვევაში, თუ შემოვიღებთ $\xi = \sqrt{K} x$, $\eta = \sqrt{K} y$ ცვლადებს, გაუსის (3.45) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial \eta^2} = -2\Lambda. \quad (5.1)$$

მაშასადამე, (4.16) ფორმულის თანახმად

$$\Lambda = \frac{4 |\Phi'(\zeta)|^2}{(1 + |\Phi(\zeta)|^2)^2}, \quad (5.2)$$

სადაც $\Phi(\zeta)$ წარმოადგენს $\zeta = \xi + i\eta = \sqrt{K}(x + iy)$ არგუმენტის ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას.

როცა $K < 0$, შემოგვაქვს $\xi = \sqrt{-K} x$, $\eta = \sqrt{-K} y$ ცვლადები. მაშინ გაუსის (3.45) განტოლება ლებულობს სახეს

$$\frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial \eta^2} = 2\Lambda. \quad (5.3)$$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი გამოსახება ფორმულით (იხ. [2])

$$\Lambda = \frac{4 |\Phi'(\zeta)|^2}{(1 - |\Phi(\zeta)|^2)^2}, \quad (5.4)$$

სადაც Φ წარმოადგენს $\zeta = \xi + i\eta = \sqrt{-K}(x + iy)$ ცვლადის ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას, ამასთან, ცხადია, რომ ან $|\Phi(\zeta)| < 1$, ან $|\Phi(\zeta)| > 1$.

$K = 0$ შემთხვევაში გაუსის განტოლება ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial y^2} = 0. \quad (5.5)$$

მაშასადამე, $\ln \Lambda$ ჰარმონიული ფუნქციაა და შეგვიძლია მისი წარმოდგენა შეპდეგი სახით:

$$\ln \Lambda = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}, \quad (5.6)$$

სადაც $\Phi(z)$ წარმოადგენს $z = x + iy$ არგუმენტის ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას.

გვაქვს

$$\Lambda = e^{\Phi(z)} e^{\overline{\Phi(z)}}. \quad (5.7)$$

ამის გამო

$$ds^2 = \Lambda (dx^2 + dy^2) = e^{\Phi(z)} e^{\overline{\Phi(z)}} dz d\bar{z} \quad (5.8)$$

ანუ

$$ds^2 = dw d\bar{w} = du^2 + dv^2, \quad (5.9)$$

სადაც

$$dw = e^{\Phi(z)} dz, \quad \text{ე. ი.} \quad w = \int e^{\Phi(z)} dz. \quad (5.10)$$

ამრიგად, ჩვენ ახალი გზით ხელახლა მივიღეთ შედეგი, რომელიც ზემოთ უკვე გვქონდა (§ 1, პუნქტი 4). სახელდობრ, ნულოვანი გაუსის სიმრუდის მქონე ყოველ ზედაპირზე არსებობს კოორდინატთა დეკარტის სისტემა.

2. მუდმივი დადებითი (უარყოფითი) გაუსის სიმრუდის ზედაპირის ლოკალური განფენადობა სფეროზე (ფსევდოსფეროზე). დაუბრუნდეთ ახლა $K = \text{const} > 0$ და $K = \text{const} < 0$ შენთხევეების განხილვას. თუ (5.2) და (5.4) ფორმულებში ახალ კომპლექსურ ცვლადს შემოვიღებთ $dz = d\Phi$ (5) ფორმულის მიხედვით, მაშინ დადებითი ($K > 0$) და უარყოფითი ($K < 0$) სიმრუდის მქონე ზედაპირების მეტრიული კვადრატული ფორმები შესაბამისად ლეზულობს

$$ds^2 = \frac{4}{K} (1 + z\bar{z})^{-2} dz d\bar{z}, \quad (5.11)$$

$$ds^2 = -\frac{4}{K} (1 - z\bar{z})^{-2} dz d\bar{z}. \quad (5.12)$$

სახეს. პირველი მათგანი $R = 1/\sqrt{K}$ რადიუსის მქონე სფერული ზედაპირის (იხ. (3.28) ფორმულა), ხოლო მეორე — ფსევდოსფერული ზედაპირის იზომეტრულ მეტრიკას გამოსახავს.

ფსევდოსფერო ეწოდება ზედაპირს, რომელიც მიიღება ტრაქტრისის ბრუნვის შედეგად თავისი ასიმპტოტის გაღშეშო. თუ ტრაქტრისის განტოლებას ჩავეწერთ

$$X = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sin t, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} t + \cos t \right) \quad (5.13)$$

$$(0 \leq t \leq \pi, K < 0)$$

სახით, მაშინ ფსევდოსფეროს განტოლებას ექნება

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{\sqrt{1-K}} \sin t \cos \varphi, & Y &= \frac{1}{\sqrt{1-K}} \sin t \sin \varphi, \\
 Z &= \frac{1}{\sqrt{1-K}} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} t + \cos t \right), & 0 < \varphi &\leq 2\pi
 \end{aligned}
 \quad (5.14)$$

სახე. ახლა მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$ds^2 = \frac{1}{-Ku^2} (du^2 + dv^2), \quad u = \frac{1}{\sin t}, \quad v = \varphi. \quad (5.15)$$

თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადებს

$$w = \frac{1-z}{1+z}, \quad w = u + iv \quad (5.16)$$

ფორმულის მიხედვით, მაშინ (5.15)-დან მივიღებთ (5.12) ფორმულას. $R = 1/\sqrt{1-K}$ სიდიდეს ფსევდოსფეროს რადიუსი ეწოდება.

(5.11) (შესაბამისად (5.12)) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ გაუსის მუდმივი დადებითი (უარყოფითი) სიმრუდის ყოველი ზედაპირი ლოკალურად განიფინება სფეროზე (შესაბამისად ფსევდოსფეროზე) რადიუსით $R = 1/\sqrt{K}$ (შესაბამისად $R = 1/\sqrt{-K}$). ზედაპირის ლუნვისას K გაუსის სიმრუდე არ იცვლება, რადგან იგი მხოლოდ მეტრული კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით გამოისახება.

ამგვარად, ერთი ზედაპირი ლუნვების საშუალებით შეიძლება მივიღოთ მეორისაგან მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მათ გაუსის ერთნაირი სიმრუდეები გააჩნიათ. ამ პირობის აუცილებლობა აშკარაა. საკმარისობის დამტკიცებას კი ზოგად შემთხვევაში მივყავართ კერძო წარმოებულთან დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივ ამოცანამდე. კერძოდ, ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ, რომ მხოლოდ ნულოვანი გაუსის სიმრუდის ზედაპირები გადაილუნება (განიფინება) სიბრტყეზე.

§ 6. კავშირი მუდმივი საშუალო და მუდმივი მთავარი სიმრუდის ზედაპირებს შორის. $\Delta u + 2H(e^u - e^{-u}) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

ვთქვათ, F რაიმე ორმხრივი ზედაპირია. განვიხილოთ ეკვიდისტანციური ზედაპირების შემდეგი სახის $\bar{F}$ ოჯახი:

$$\bar{r} = r + Rn, \quad R = \text{const.} \quad (6.1)$$

სადაც r წარმოადგენს F ზედაპირის წერტილის რადიუს-ვექტორს, n — F ზედაპირის ნორმალის ორტს. ვთქვათ, F -ზე საკოორდინატო წირები ემთხვევა სიმრუდის წირებს. მაშინ გვაქვს

$$\bar{r}_1 = (1 - k_1 R) r_1, \quad \bar{r}_2 = (1 - k_2 R) r_2, \quad (6.2)$$

$$\bar{a}_{11} = (1 - k_1 R)^2 A^2, \quad \bar{a}_{22} = (1 - k_2 R)^2 B^2, \quad \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = 0, \quad (6.3)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{11} \bar{a}_{12} = (1 - k_1 R)^2 (1 - k_2 R)^2 A^2 B^2. \quad (6.4)$$

$\bar{F}$ ზედაპირის ნორმალის ორტი გამოისახება ფორმულით

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{\sqrt{\bar{a}}} = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{a}}.$$

მაშასადამე, $\bar{F}$ და F ზედაპირების სათანადო წერტილებში $\bar{n} = n$. ამის გამო $\bar{F}$ ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისათვის გვაქვს გამოსახულებები

$$\bar{b}_{11} = k_1 (1 - k_1 R) A^2, \quad \bar{b}_{22} = k_2 (1 - k_2 R) B^2, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad (6.5)$$

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1}{1 - k_1 R}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2}{1 - k_2 R} \quad (6.6)$$

$$\bar{H} = \frac{H - KR}{1 - 2HR + KR^2}, \quad \bar{K} = \frac{K}{1 - 2HR + KR^2},$$

$$\bar{E} = \frac{E}{(1 - 2HR + KR^2)^2}. \quad (6.7)$$

ამ ფორმულებს ადგილი აქვს R -ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$1 - k_1 R > 0, \quad 1 - k_2 R > 0. \quad (6.8)$$

(6.5) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ F ზედაპირის სიმრუდის წირები გადადის ეკვიდისტანციური $\bar{F}$ ზედაპირის სიმრუდის წირებში.

(6.7) ფორმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი აშკარა შედეგები:

1) თუ F ზედაპირს აქვს მუდმივი $H = 1/2 R$ საშუალო სიმრუდე, მაშინ ეკვიდისტანციურ $\bar{F}$ ზედაპირს გააჩნია დადებითი მუდმივი $\bar{K} = 1/R^2$ გაუსის სიმრუდე.

2) თუ F ზედაპირის გაუსის სიმრუდე დადებითი მუდმივია, $K=1/R^2$, მაშინ ეკვიდისტანციურ ზედაპირს აქვს მუდმივი საშუალო სიმრუდე $\bar{H} = -1/2 R$.

3) უკანასკნელ შემთხვევაში ეკვიდისტანციური ზედაპირის ეილერის სხვაობას აქვს სახე

$$\bar{E} = |\bar{H}|^2 \frac{RH+1}{RH-1} = \frac{1}{4R^2} \frac{RH+1}{RH-1}. \quad (6.9)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ $RH-1$ და $RH+1$ გამოსახულებები ერთი და იმავე ნიშნისაა, რადგან განსახილავ შემთხვევაში

$$E = H^2 - K = H^2 - 1/R^2 = 1/R^2 (HR+1)(HR-1) > 0.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $R > 0$. ვთქვათ, F სფერული ზედაპირისაგან განსხვავებული მუდმივი დადებითი სიმრუდიანი ზედაპირია. როგორც ეს (6.7)-ის უკანასკნელი ფორმულიდან ჩანს, F ზედაპირის ომბილურ წერტილებს შეესაბამება ეკვიდისტანციური $\bar{F}$ ზედაპირის ომბილური წერტილები. მაშასადამე, $\bar{F}$ ზედაპირის არაომბილურ წერტილებში სრულდება უტოლობა

$$\bar{E} = \bar{H}^2 \frac{RH+1}{RH-1} = \frac{1}{4R^2} \frac{RH+1}{RH-1} > 0. \quad (6.10)$$

თუ ამ გამოსახულებას (4.9) განტოლებაში შევატანთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{RH-1}{RH+1} \quad (6.11)$$

ფუნქცია წარმოადგენს

$$\Delta u + \frac{1}{R} (e^u - e^{-u}) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (6.12)$$

განტოლების ამონახსნს, სადაც ξ და η კოორდინატებია F ზედაპირის სიმრუდის წარებში.

ამრიგად, თუ H მუდმივი დადებითი $K=1/R^2$ მთავარი სიმრუდის მქონე F ზედაპირის საშუალო სიმრუდეა, მაშინ F ზედაპირის არაომბილურ წერტილებში (6.10) ტოლობა და (6.11) ფუნქცია გვაძლევს (6.12) განტოლების ამონახსნს.

ახლა შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ u (6.12) განტოლების ამონახსნია, მაშინ

$$H = \frac{1}{R} \frac{e^{2u} + 1}{e^{2u} - 1} = \frac{1}{R} \operatorname{cth} u \quad (6.13)$$

ფუნქცია წარმოადგენს იმ ზედაპირის საშუალო სიმრუდეს, რომლის გაუსის სიმრუდე $K = 1/R^2$ დადებითი მუდმივია. ამ ზედაპირის ელფრის სხვაობა და მთავარი სიმრუდეები გამოისახება ფორმულებით

$$\sqrt{E} = \frac{1}{R \operatorname{sh} u}, \quad k_1 = \frac{1}{R} \operatorname{cth} \frac{1}{2} u, \quad k_2 = \frac{1}{R} \operatorname{th} \frac{1}{2} u. \quad (6.14)$$

ზედაპირის პირველი და მეორე ძირითადი ფორმები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$I = R \operatorname{sh} u (d\xi^2 + d\eta^2), \quad (6.15)$$

$$II = 2 \left(\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} u d\eta^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} u d\xi^2 \right). \quad (6.16)$$

ამრიგად, (6.11) ფორმულა გამოსახავს (6.12) განტოლების ზოგად ამონახსნს F ზედაპირის საშუალო სიმრუდის საშუალებით, როცა ამ ზედაპირის დადებითი მუდმივი $K = 1/R^2$ მთავარი სიმრუდე გააჩნია, თუ იგი განსხვავდება სფეროსაგან.

§ 7. ამოწმებული ზედაპირების შეუღლებულად-იზომეტრული პარამეტრიზაცია

დადებითი გაუსის სიმრუდიან ($K > 0$) ზედაპირზე არსებობს კოორდინატთა სისტემა, რომლის მიმართაც მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმას აქვს სახე (იხ. [1], თავი 2, § 6)

$$II = k_1 ds^2 = \Lambda_* (d\xi^2 + d\eta^2), \quad \Lambda_* \neq 0. \quad (7.1)$$

კოორდინატთა ასეთ სისტემებს შეუღლებულად-იზომეტრული ეწოდება. რადგან კოორდინატთა ამ სისტემაში $b_{11} = b_{22} = \Lambda_*$, $b_{12} = b_{21} = 0$, ამიტომ (V, 8.7 ა) ფორმულის მიხედვით გვაქვს

$$K = \frac{\Lambda_*^2}{a}, \quad \text{ე. ი. } \Lambda_* = \pm \sqrt{Ka}, \quad (7.2)$$

სადაც a პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტია. რადიკალის წინ უნდა ავიღოთ პლუსი ნიშანი, თუ ზედაპირის ნორ-

მალი ჩაზნეილობის მხარესაა მიმართული, წინააღმდეგ შემთხვევაში ავილებთ მინუს ნიშანს. ეს წესი $k_z = k \cos \theta$ მენიეს თეორემის უშუალო შედეგია. მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ k_z ნორმალურ სიმრუდეს და Λ_z კოფიციენტს (7.1) ფორმულაში ერთი და იგივე ნიშანი აქვს.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმებთ, რომ ამოზნეილი ზედაპირის შემთხვევაში ნორმალის მისი ჩაზნეილობის მხარესაა მიმართული, მაშინ (7.2) ტოლობაში რადიკალის წინ უნდა ავიღოთ პლიუსი ნიშანი, ე. ი.

$$\Lambda_z = \sqrt{K a}. \quad (7.3)$$

შეუღლებულად-იზომეტრული პარამეტრიზაციის არსებობის დამტკიცება დაიწყანება ისეთ მათემატიკურ ამოცანამდე, რომლის მსგავსი ჩვენ ზემოთ (§ 3) შეგვხვდა კოორდინატთა იზომეტრული სისტემის არსებობის დამტკიცებისას (იხ. [1], თავი 2, § 6).

შეენიშნოთ, რომ 1-ლი და მე-2 გვარის კონფორმული გარდაქმნისას ზედაპირზე წირთა შეუღლებულად-იზომეტრული ბადე ასეთივე წირთა ბადეში გადადის, ამასთან, ცხადია, გვაქვს

$$\Lambda_z dz d\bar{z} = \Lambda'_z dz' d\bar{z}'. \quad (7.4)$$

რადგან K სკალარია, (7.3)-ის თანახმად წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$\sqrt{a} dz d\bar{z} = \sqrt{a'} dz' d\bar{z}', \quad (7.5)$$

ე. ი. $\sqrt{a} dz d\bar{z}$ კონფორმულად ინვარიანტული კვადრატული ფორმაა. მაგრამ იგი, საზოგადოდ, არ ემთხვევა ზედაპირის მეტრულ კვადრატულ ფორმას შეუღლებულად-იზომეტრულ კოორდინატებში.

კოვარიანტების თეორია

ზედაპირის ტენზორული ველების შესწავლისას სასარგებლოა შე-
მოვიღოთ გაუსის კომპლექსურ კოორდინატთა (პარამეტრთა) სისტემე-
ბი. ისინი საშუალებას გვაძლევენ განვახორციელოთ ზედაპირის შიგა
პარამეტრების სისტემათა სიმრავლის დაშლა გაუსის კომპლექსურ
კოორდინატთა ეკვივალენტური სისტემების არაგადამკვეთ კლასებად.
ასეთი კლასები, რომლებიც კოორდინატთა სისტემების საკმარისად
ფართო ოჯახებს წარმოადგენენ, კომპლექსურ კოორდინატების კონ-
ფორმულ გარდაქმნათა მიმართ გარკვეული ინვარიანტული თვისებებით
აღჭურვილ, სხვადასხვა ობიექტების განხილვის საშუალებას გვაძლე-
ვენ. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ზოგიერთ კლასს ისეთი ობიექტებისას,
რომელთაც კოვარიანტებს ვუწოდებთ. შესწავლილი იქნება მათი ალ-
გებრული და დიფერენციალური თვისებები და აღმოჩენილი იქნება
კავშირი კოვარიანტების თეორიასა და ზედაპირზე ტენზორულ ანა-
ლიზს შორის. დავადგენთ, რომ ტენზორული ანალიზი ზედაპირზე კონ-
ფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების კლასში სინამ-
დვილში დაიყვანება კოვარიანტების თეორიამდე. ტენზორის კომპლექ-
სურ კოორდინატებს გააჩნია გარკვეული ინდივიდუალური ინვარიან-
ტული თვისებები გაუსის კომპლექსური კოორდინატების კონფორმულ
გარდაქმნათა მიმართ, რაც საშუალებას იძლევა ისინი განვიხილოთ,
როგორც იმავე ტენზორის სხვა კომპონენტებისაგან დამოუკიდებელი
ობიექტები. ტენზორის კომპონენტებს გაუსის ნამდვილი პარამეტრების
სისტემათა მიმართ, როგორც ცნობილია, არ ახასიათებს ინვარიანტო-
ბის ამგვარი ინდივიდუალური თვისებები, გარდა სკალარების შემთხ-
ვევისა, რომლებიც ნულოვანი რანგის ტენზორებს წარმოადგენენ.

კოვარიანტების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი უპირატესობა ისაა,
რომ მათ მიმართ გამოიყენება ოთხივე ალგებრული მოქმედება კოვა-
რიანტობის თვისების შენარჩუნებით. ამას გარდა შესაძლებელია შემო-

ვიყვანოთ კოვარიანტების გადიფერენციალების სპეციალური ოპერაციები და მათი საშუალებით ავაგოთ კოვარიანტული ანალიზი, რომელიც ძალიან მოგვაგონებს კომპლექსურ ანალიზს სიბრტყეზე.

§ 1. გაუსის კომპლექსური კოორდინატები ზედაპირზე. ბელტრამის განტოლება კოორდინატთა სისტემების მახასიათებელი ფუნქციისთვის

1. გაუსის კომპლექსური კოორდინატები ზედაპირზე. გაუსის ნამდვილ პარამეტრთა (კოორდინატთა) ყოველ x^1, x^2 სისტემას F ზედაპირზე ცალსახად შეიძლება შევუსაბამოთ გაუსის ურთიერთშეუღლებული

$$z^1 = x^1 + ix^2, \quad z^2 = x^1 - ix^2 \quad (1.1)$$

კომპლექსური კოორდინატები (პარამეტრები). რადგან $z^2 = \bar{z}^1$, ამიტომ z^1 და z^2 -ის ნაცვლად ხშირად დაეწერთ შესაბამისად z და $\bar{z}$ -ს. სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა F -ზე არსებობს გლობალური პარამეტრიზაცია.

გაუსის ნამდვილი x^1, x^2 პარამეტრების ყოველი სისტემა ახორციელებს F ზედაპირის ტოპოლოგიურ (ურთიერთცალსახა და უწყვეტ) ასახვას კომპლექსური $z = x^1 + ix^2$ ცვლადის სიბრტყის რაიმე F_z არეზე. საზოგადოდ, F_z არე შეიძლება არ იყოს ცალფერცლა. იგი შეიძლება ეკუთვნოდეს კომპლექსური $z = x^1 + ix^2$ ცვლადის სიბრტყეზე განფენილ რიმანის რაიმე ზედაპირს. მაგრამ გარკვეულობისათვის შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ F_z -ი კომპლექსური $z = x^1 + ix^2$ ცვლადის E სიბრტყის ცალფერცლა არეა. კერძოდ, შესაძლებელია F_z ემთხვეოდეს E სიბრტყეს. ასეთი შემთხვევა წარმოგვიდგება ოვალოიდებისათვის. მაგალითად, სრული სფერული ზედაპირი სტერეოგრაფიული დაგეგმილებით ტოპოლოგიურად აისახება მთელ სიბრტყეზე. ნებისმიერი ოვალოიდი ტოპოლოგიურად აისახება სრულ სფერულ ზედაპირზე—მისი სფერული გამოსახულებით. მაშასადამე, ორი ტოპოლოგიური ასახვის კომპოზიციით ნებისმიერი ოვალოიდი შეიძლება ტოპოლოგიურად ავსახოთ მთელ სიბრტყეზე.

ამრიგად, თუ ზედაპირი ოვალოიდს ეკუთვნის, მაშინ მასზე ყოველთვის არსებობს გლობალური პარამეტრიზაცია, რომელიც მას ტოპოლოგიურად ასახავს $z = x^1 + ix^2$ სიბრტყის რაიმე F_z არეზე. კერძოდ,

ეს პარამეტრიზაცია იზომეტრული კოორდინატებით შეიძლება განხორციელდეს.

შემდგომში გაუსის კომპლექსურ z^{α} კოორდინატებს (პარამეტრებს) შემოკლებით z -ით აღვნიშნავთ, გავითვალისწინებთ რა, რომ $z = z^1 = \bar{z}^2$. ამის გარდა, ზედაპირის კოორდინატთა შესაბამის სისტემას S_z -ით აღვნიშნავთ.

ერთი კომპლექსური z^{α} კოორდინატების სხვა $\bar{z}^{\alpha}$ -ით შეველა სრულდება შემდეგი სახის არაგანსაკუთრებული გარდაქმნით:

$$z^{\alpha} = \bar{z}^{\alpha}(z^1, z^2) \quad \text{ანუ} \quad z^{\alpha} = z^{\alpha}(\bar{z}^1, \bar{z}^2), \quad (1.2 \text{ ა})$$

რომელთაც მოკლედ ასე ჩავწერთ

$$\bar{z} = \bar{z}(z) \quad \text{ანუ} \quad z = z(\bar{z}). \quad (1.2 \text{ ბ})$$

ცხადია, ეს გარდაქმნები F_z არეს ტოპოლოგიურად ასახავს $F_{\bar{z}}$ არეზე, რასაც სიმბოლურად ასე ჩავწერთ: $F_z \iff F_{\bar{z}}$. კოორდინატთა S_z სისტემების ოჯახი F ზედაპირზე აღვნიშნოთ S_F -ით.

შემდგომში ჩვენ მოგვიხდება კოორდინატთა სისტემების ოჯახის რამდენადმე შევიწროება, თუ მათ გარდაქმნებს, რომლებიც $\bar{z}(z)$ ფუნქციებით ხორციელდება, სხვადასხვა ხარისხის სიგლუვის ფუნქციათა კლასებს მივაკუთვნებთ. ვთქვათ, მაგალითად, $\bar{z}(z) \in C_m(F_z)$, სადაც m რაიმე არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. F ზედაპირის კოორდინატთა სისტემების შესაბამის კლასს S_m -ით აღვნიშნავთ. კოორდინატების გარდაქმნათა ოჯახის სიგლუვის ხარისხის დამახასიათებელ m რიცხვს ჩვენ წინასწარ არ განვსაზღვრავთ. საჭიროების შემთხვევაში მას დავასახელებთ განსახილავი ამოცანის მოთხოვნათა შესაბამისად.

თუ (1.2 ბ) სახის გარდაქმნა 1-ლი და მე-2 გვარის კონფორმული ასახვაა, მაშინ კოორდინატთა z^1 და $\bar{z}^2$ (ანუ z და $\bar{z}$) სისტემებს კონფორმულად ეკვივალენტურს ეუწოდებთ, რასაც სიმბოლურად ასე ჩავწერთ: $z^{\alpha} \sim \bar{z}^{\alpha}$ ან $z \sim \bar{z}$.

ამრიგად, თუ $z \sim \bar{z}$, მაშინ $\bar{z}(z)$ წარმოადგენს z -ის ანალიზურ ან ანტიანალიზურ ფუნქციას F_z არეში. შემდგომში გარკვეულობისთვის ჩვენ შევიზღუდებით მხოლოდ 1-ლი გვარის კონფორმული გარდაქმნების განხილვით, ე. ი. როცა $z \sim \bar{z}$ აღნიშნავს, რომ $\bar{z}(z)$ წარმოადგენს z -ის ანალიზურ ფუნქციას F_z არეში. ეს დაშვება არ ზღუდავს ჩვენს აგებათა ზოგადობას, რადგან მე-2 გვარის კონფორმული გარდაქმნები

1-ლი გვარის გარდაქმნებისაგან კოორდინატთა სისტემის მხოლოდ ორიენტაციის შეცვლით მიიღება.

თუ $z \sim \bar{z}$, მაშინ დავწერთ $S_z \sim S_{\bar{z}}$. ამ შემთხვევაში კოორდინატთა S_z და $S_{\bar{z}}$ სისტემებს კონფორმულად ეკვივალენტურს ვუწოდებთ. ამ შეთანხმებას გავავრცელებთ აგრეთვე შესაბამის ნამდვილ კოორდინატებზეც, ე. ი. თუ $z = x^1 + ix^2 \sim \bar{z} = \bar{x}^1 + i\bar{x}^2$, მაშინ დავწერთ $x^\alpha \sim \bar{x}^\alpha$ და $S_x \sim S_{\bar{x}}$.

აღვილად დავრწმუნდებით, რომ $z \sim \bar{z}$ ან $S_z \sim S_{\bar{z}}$ მიმართება ეკვივალენტობის მიმართებაა S_F ოჯახში. მაშასადამე, S_F ოჯახი იშლება კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების არაგადამკვეთ კლასებად. ამ კლასების სიმრავლე $\bar{S}_F$ -ით აღვნიშნოთ. ცხადია, $\bar{S}_F$ წარმოადგენს S_F სიმრავლის ფაქტორ-სიმრავლეს. ყოველი $\bar{S}_z$ ელემენტი $\bar{S}_F$ -დან კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემების ოჯახია, ე. ი. $S_z, S_{\bar{z}} \in \bar{S}_z$, თუ $S_z \sim S_{\bar{z}}$. ყოველი $\bar{S}_z$ კლასი ცალსახად განისაზღვრება მისი ერთი (ნებისმიერი) წარმომადგენლის დასახელებით. მაშასადამე, $\bar{S}_z = \bar{S}_{\bar{z}}$, როცა $z \sim \bar{z}$ და $\bar{S}_z \neq \bar{S}_{\bar{z}}$. თუ $\bar{z}(z)$ არაა z -ის ანალიზური ფუნქცია.

თუ $z \sim \bar{z}$, მაშინ z და $\bar{z}$ კოორდინატები დაკავშირებულია

$$\bar{z} = w(z), \quad z \in F_z, \quad (1.3)$$

სახის დამოკიდებულებით, სადაც $w(z)$ წარმოადგენს z -ის ცალფურცულ ანალიზურ ფუნქციას F_z არეში. მაშასადამე, $w'(z) \neq 0$, როცა $z \in F_z$. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $w(z)$ განსაზღვრულია F_z კომპაქტზე და ახორციელებს ტოპოლოგიურ $F_z \iff F_{\bar{z}}$ ასახვას. ამრიგად, $w(z)$ ახორციელებს F_z -ის კონფორმულ ასახვას $F_{\bar{z}}$ -ში და $\partial F_z \iff \partial F_{\bar{z}}$ ტოპოლოგიურ ასახვას. აღვნიშნოთ $A_0(F_z)$ -ით F_z არეში ცალფურცულ ანალიზური ფუნქციების სიმრავლე. ცხადია, რომ ყოველ ანალიზურ $w(z)$ ფუნქციას $A_0(F_z)$ -დან შეესაბამება კოორდინატთა S_w სისტემა $\bar{S}_z$ კლასიდან და, პირიქით, ყოველი ორი კოორდინატთა სისტემა $\bar{S}_z$ კლასიდან დაკავშირებულია (1.3) სახის დამოკიდებულებით. აქ საჭიროა გავიხსენოთ, რომ თუ $\bar{z} = w(z)$ ცალფურცულ ანალიზური ფუნქციაა F_z -ში და $\bar{z} = \bar{w}(\bar{z})$ ცალფურცულ ანალიზური ფუნქციაა

F_z -ში, მაშინ $\widehat{z} = \bar{\omega}[z]$ ცალფერცლა ანალიზურ ფუნქციას წარმოადგენს F_z -ში.

ვთქვათ, $A(F_z)$ კომპლექსური $z = x^1 + ix^2$ ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა სიმრავლეა F_z არეში. თუ $f(z) \in A(F_z)$ და $z \sim \bar{z}$, მაშინ $\widehat{f}(\bar{z}) = f(z)$ წარმოადგენს $\bar{z}$ -ის ანალიზურ ფუნქციას F_z -ში და, მაშასადამე, ეკუთვნის $A(F_z)$ -ს. ამრიგად, კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა კლასი ინვარიანტულია არგუმენტის კონფორმული გარდაქმნების მიმართ. ამიტომ, შემდგომში ზოგჯერ F ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების კლასს A -ოჯახს ვუწოდებთ. კოორდინატთა სისტემების ყოველი A -ოჯახი, ცხადია, $\widehat{F}$ -ის ელემენტს წარმოადგენს და შებრუნებით.

ვთქვათ, F_z ემთხვევა z კომპლექსური ცვლადის სიბრტყეს. ეს შემთხვევა ხორციელდება, თუ F ოვალოიდა (იხ. VI თავი, § 3, პუნქტი 4). მაშინ $A_0(F_z)$ კლასი წარმოადგენს

$$\omega(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (1.4)$$

წილად-წრფივი ფუნქციების ოჯახს, სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ კომპლექსური მუდმივებია, რომლებიც

$$\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0 \quad (1.5)$$

პირობას აკმაყოფილებენ. მაშასადამე,

$$\omega'(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \neq 0, \quad \text{თუ } z \neq \infty, \text{ როცა } \gamma \neq 0. \quad (1.6)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. მაშინ გვექნება ნორმირებული წილად-წრფივი გარდაქმნები.

შეცთანხმდეთ ახლა ზოგიერთ აღნიშვნებზე, რომლებსაც სპეციალური მითითების გარეშე გამოვიყენებთ.

ზედაპირის კომპლექსურ (შესაბამისად ნამდვილ) პარამეტრიზაციასთან დაკავშირებულ ინდექსებს ბერძნული ალფაბეტის პატარა უშტრიხო (შესაბამისად, დამტრიხული) ასოებით აღვნიშნავთ. მაგალითად, $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ და ა. შ. (შესაბამისად $\alpha', \beta', \alpha'_1, \beta'_1$ და ა. შ.). აუცილებელ შემთხვევაში შტრიხებით აღვნიშნავთ აგრეთვე იმ სიდიდეების ინდექსებსაც, რომლებიც ზედაპირის ნამდვილ პარამეტრიზაციას შეესა-

ბამებიან. მაგალითად, ნაცვლად x^1 , x^2 -სა დაწერით x^1 , x^2 , ამასთან ალებულ შემთხვევაში $1'$ და $2'$ წარმოადგენს სიმბოლოებს, რომლებიც მიგვითითებენ, რომ x^1 და x^2 გაუსის ნამდვილი პარამეტრებია, ამასთან რიცხობრივად $1'=1$, $2'=2$. შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი შეთანხმება განუსაზღვრელ ინდექსებზე არ ვრცელდება, ე. ი. $\alpha' \neq \alpha$, $\beta' \neq \beta$ და ა. შ., თუ საწინააღმდეგო საგანგებოდ არ იქნება ნათქვამი.

შევთანხმდეთ, რომ ბერძნული ინდექსები (შტრიხით ან უშტრიხით) ლებულობს 1, 2 მნიშვნელობებს, ცხადია, თუ საწინააღმდეგო არ იქნა ნათქვამი. როცა კი ჩვენ იძულებული ვიქნებით ვისარგებლოთ ლათინური ინდექსებით, ჩავთვლით, რომ ისინი ლებულობენ 1, 2, 3 მნიშვნელობებს, თუ ასეთ შემთხვევაში არ იქნება მიღებული სპეციალური წინადადება, რომელიც გააუქმებს ამ შეთანხმებას.

ქვემოთ სისტემატურად ვისარგებლებთ შეჯამების აინშტაინის წესით.

2. კომპლექსური გაწარმოების ოპერაცია. ზემოაღნიშნული შეთანხმების გამოყენებით (1.1) თანათარლობანი და მათი

$$x^{1'} = \frac{1}{2} (z^1 + z^2), \quad x^{2'} = \frac{1}{2i} (z^1 - z^2) \quad (1.7)$$

შებრუნებულები შეგვიძლია ჩავწეროთ ზოგადი ფორმით

$$z^\alpha = D_\alpha^a x^{a'}, \quad x^{a'} = D_a^\alpha z^\alpha, \quad (1.8)$$

სადაც

$$D_\alpha^a = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^{a'}} = \delta_\alpha^1, -i(-1)^\alpha \delta_\alpha^2, \quad (1.9)$$

$$D_a^\alpha = \frac{\partial x^{a'}}{\partial z^\alpha} = \frac{i^{1-a'}}{2} (\delta_\alpha^1 - (-1)^{a'} \delta_\alpha^2). \quad (1.10)$$

შევნიშნოთ, რომ D_α^a და D_a^α -თვის განსაზღვრული ინდექსები (შტრიხით და უშტრიხით) სიმბოლოებს წარმოადგენს. მაშასადამე, $1'$, $2'$ არ შეიძლება შევცვალოთ შესაბამისად 1, 2-ით და პირიქით. რადგან

$$\delta_{\beta'}^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial z^\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^{\beta'}}, \quad \delta_\beta^a = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^\beta} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^{a'}}{\partial z^\beta}, \quad (1.11)$$

ამიტომ გვაქვს ტოლობები

$$D_\alpha^{a'} D_\beta^a = \delta_{\beta'}^a, \quad D_a^\alpha D_\beta^{a'} = \delta_\beta^\alpha. \quad (1.12)$$

ადვილად დამტკიცდება

$$\det (D_{\alpha}^{\alpha'}) = -2i, \quad \det (D_{\alpha}^{\alpha'}) = \frac{i}{2} \quad (1.13)$$

ფორმულები. თუ ვისარგებლებთ

$$\partial_{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}, \quad \partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \quad (1.14)$$

აღნიშვნებით, ცხადია, გვექნება

$$\partial_{\alpha} = \partial_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha}} \equiv D_{\alpha}^{\alpha'} \partial_{\alpha'}, \quad \partial_{\alpha'} = \partial_{\alpha} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \equiv D_{\alpha'}^{\alpha} \partial_{\alpha}. \quad (1.15)$$

ეს ფორმულები კომპლექსური გაწარმოების ∂_{α} ოპერატორს გამოსახავს ნამდვილი $x^{\alpha'}$ კოორდინატებით გაწარმოების $\partial_{\alpha'}$ ოპერატორებით და პირიქით.

თუ აღვნიშნავთ x^1 და x^2 -ს შესაბამისად x და y -ით, ამ ოპერატორებს ასეც ჩავწერთ

$$\partial_1 \equiv \partial_x = \frac{1}{2} (\partial x - i \partial y), \quad \partial_2 \equiv \partial_z = \frac{1}{2} (\partial x + i \partial y). \quad (1.16)$$

აქედან გვაქვს ფორმულები

$$\partial_1 \equiv \partial_x = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial_2 \equiv \partial_y = i (\partial_z - \partial_{\bar{z}}), \quad (1.17)$$

რომლებიც ზოგადი ფორმით ასე ჩაიწერება

$$\partial_{\alpha'} = i^{\alpha'-1} (\delta_1^{\alpha'} - (-1)^{\alpha'} \delta_2^{\alpha'}) \partial_{\alpha}. \quad (1.18)$$

∂_{α} ოპერატორების განმეორებითი გამოყენებისას სრულდება კომუტაციურობისა და ასოციურობის თვისებები:

$$\partial_{\alpha} \partial_{\beta} = \partial_{\beta} \partial_{\alpha}, \quad \partial_{\alpha} (\partial_{\beta} \partial_{\gamma}) = (\partial_{\alpha} \partial_{\beta}) \partial_{\gamma} = \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \partial_{\gamma}. \quad (1.19)$$

8. გაუსის კომპლექსური პარამეტრების დიფერენციალთა გარდაქმნის წესი. ზედაპირზე გაუსის ნამდვილი და კომპლექსური $x^{\alpha'}$ და z^{α} კოორდინატების შეცვლისას რაიმე სხვა $\widehat{x}^{\alpha'}$ და $\widehat{z}^{\alpha}$ -ით მათი დიფერენციალები გარდაიქმნება

$$\partial \widehat{x}^{\alpha'} = \frac{\partial \widehat{x}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} dx^{\beta'}, \quad d\widehat{z}^{\alpha} = \frac{\partial \widehat{z}^{\alpha}}{\partial z^{\beta}} dz^{\beta} \quad (1.20)$$

ფორმულებით.

ვთქვათ $z^{\alpha} \sim \bar{z}^{\alpha}$, ე. ი. S_z და $S_{\bar{z}}$ კოორდინატთა სისტემები რაიმე A ოჯახს ეკუთვნის. მაშინ გვექნება

$$\frac{\partial \bar{z}^{\alpha}}{\partial z^{\beta}} = \begin{cases} \frac{d\bar{z}^{\alpha}}{dz^{\alpha}}, & \text{როცა } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{როცა } \beta \neq \alpha, \end{cases} \quad (1.21)$$

ან რაც იგივეა

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{d\bar{z}}{dz} = \bar{z}'(z), \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \bar{z} = 0. \quad (1.22)$$

შეენიშნოთ, რომ (1.21) ფორმულაში ინდექსის გახაზვა ქვემოდან მოასწავებს ამ ინდექსის მიმართ შეჯამების აკრძალვას. ამ შეთანხმებით ჩვენ ქვემოთაც ვისარგებლეთ სპეციალური მითითების გარეშე.

თუ $z^{\alpha} \sim \bar{z}^{\alpha}$, მაშინ (1.22) ფორმულის თანახმად (1.20) ტოლობები მიიღებს

$$d\bar{z}^{\alpha} = \frac{d\bar{z}^{\alpha}}{dz^{\alpha}} dz^{\alpha} \quad (1.23)$$

სახეს. ეს ტოლობები გამოსახავს ზედაპირის გაუსის კომპლექსური კოორდინატების დიფერენციალთა გარდაქმნის წესებს გაუსის კონფორმულად ეკვივალენტურ პარამეტრების კლასში.

ზედაპირის გაუსის ნამდვილი კოორდინატების შემთხვევაში

$$dx^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{dx^{\alpha}} \widehat{dx}^{\alpha}, \quad \widehat{dx}^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{dx^{\alpha}} dx^{\alpha} \quad (1.24)$$

სახის გარდაქმნები სამართლიანია კოორდინატთა გარდაქმნების მხოლოდ საკმაოდ კერძო სახის კლასისათვის, სახელობრ, მაშინ, როცა

$$\widehat{x}^{1'} = \widehat{x}^{1'}(x^{1'}), \quad \widehat{x}^{2'} = \widehat{x}^{2'}(x^{2'}). \quad (1.25)$$

ასეთი სახის გარდაქმნებს ფაქტიურად ტრივიალური შეიძლება ვუწოდოთ, რადგან ამ შემთხვევაში სისტემის საკოორდინატო წირები არ იცვლება, იცვლება მხოლოდ გაუსის ნამდვილი პარამეტრების გაზომვის მასშტაბები.

4. ზედაპირის სკალარის კერძო წარმოებულების გარდაქმნის წესი. $\mathcal{F}(F)$ კლასის ფ სკალარის განმარტების თანახმად, გაუსის კომპლექსური z^{α} კოორდინატების რაიმე სხვა $\bar{z}^{\alpha}$ -ით შეცვლისას შესაბამისი ფ(z) და $\widehat{f}(\bar{z})$ კომპონენტები დაკავშირებულია ტოლობებით

$$\widehat{\varphi}(z) = \varphi(z(\bar{z})) \quad \text{ანუ} \quad \varphi(z) = \widehat{\varphi}(\bar{z}(z)). \quad (1.26)$$

ვთქვათ, φ დიფერენცირებადი სკალარია. ეს ნიშნავს, რომ მისი კომპონენტები ნებისმიერი S_z კოორდინატთა სისტემის მიმართ დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ცხადია, ამისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ $\varphi(z)$ -ის რომელიმე ერთი კომპონენტის დიფერენცირებადობა; მაშინ (1.26) ფორმულის თანახმად $\widehat{\varphi}$ სკალარის ყველა სხვა კომპონენტი დიფერენცირებადი იქნება. რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულის გამოყენებით (1.26) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\widehat{\partial_\alpha \varphi} = \partial_{\bar{\alpha}} \varphi \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial z^\alpha} \quad \left(\widehat{\partial_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, \quad \partial_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) \quad (1.27)$$

ტოლობას, რომელიც გამოსახავს φ სკალარის კომპლექსური $\partial_\alpha \varphi$ წარმოებულის გარდაქმნის წესს გაუსის ერთი კომპლექსური z^α კოორდინატის მეორე $\bar{z}^\alpha$ -თი შეცვლისას.

თუ $z^\alpha \sim \bar{z}^\alpha$, მაშინ (1.21) ფორმულის თანახმად (1.27) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\partial_\alpha \varphi = \widehat{\partial_\alpha} \varphi \frac{d\bar{z}}{dz^\alpha}. \quad (1.28)$$

აქედან გამოვღიწარმოებ

$$\partial_\alpha \varphi dz^\alpha = \widehat{\partial_\alpha} \varphi d\bar{z}^\alpha. \quad (1.29)$$

ამრიგად, თუ φ — F ზედაპირის დიფერენცირებადი სკალარია, მაშინ ერთგვაროვანი $\partial_\alpha \varphi dz^\alpha$ სახის დიფერენციალური ერთწევრები ინვარიანტულია F ზედაპირის კომპლექსური z^α კოორდინატების კონფორმულ გარდაქმნათა მიმართ. $\partial_\alpha \varphi dz^\alpha$ გამოსახულებებს კიდევ კონფორმულად ინვარიანტული მონოფორმები ვუწოდოთ. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ უფრო ზოგადი სახის, საზოგადოდ, არაწრფივ, მონოფორმებს და მათი საშუალებით შემოვიყვანთ ზედაპირის კოვარიანტის ცნებას.

5. ბელტრამის განტოლება. კოორდინატთა სისტემების მახახავთებელი ფუნქციაა. ვთქვათ, $\varphi \in \widehat{\mathcal{S}}(F)$ სკალარის $\varphi(\zeta)$ კომპონენტი კოორდინატთა S_ζ სისტემაში S_F -დან წარმოადგენს ζ -ს ანალიზურ ფუნქციას F_ζ არეში, ე. ი. $\varphi(\zeta) \in A(F_\zeta)$. თუ $S_\zeta \sim S_{\bar{\zeta}}$, მაშინ $\widehat{\varphi}(\bar{\zeta}) = \varphi(\zeta(\bar{\zeta}))$ კომპონენტი $\bar{\zeta}$ -ს ანალიზური ფუნქციაა $F_{\bar{\zeta}}$ არეში, ე. ი. $\widehat{\varphi}(\bar{\zeta}) \in A(F_{\bar{\zeta}})$.

A -თი აღნიშნოთ S_z -ს კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემების ოჯახი, ე. ი. $A = \widehat{S_z}$, მაშინ, ცხადია, რომ

$$\partial_z \varphi = 0, \quad \forall S_z \in A. \quad (1.30)$$

φ სკალარებს $\widehat{\mathcal{F}}(F)$ -დან, რომლებიც ამ პირობას აკმაყოფილებენ, ვუწოდოთ ანალიზური სკალარები S_F -დან აღებული კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების A ოჯახის მიმართ. φ სკალარების სიმრავლე $\widehat{\mathcal{F}}(F)$ -დან, რომლებიც ანალიზურია A -ოჯახის მიმართ, აღნიშნოთ $\widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ -თი.

ცხადია, $\widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ კომპუტაციური რგოლია ერთეულით. ყოველი $\widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ რგოლის ნულს და ერთეულს წარმოადგენს შესაბამისად $F \rightarrow 0$ და $F \rightarrow 1$ ასახვები.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $\widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ წარმოადგენს მთელობის არეს. ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ არ შეიცავს ნულის გამყოფებს, ე. ი. თუ $\varphi, \psi \in \widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ და $\varphi\psi = 0$, მაშინ ან $\varphi = 0$, ან $\psi = 0$, ან $\varphi = \psi = 0$.

მართლაც, თუ $\varphi\psi = 0$, მაშინ, ცხადია,

$$\varphi(z)\psi(z) = 0, \quad \forall S_z \in A.$$

მაგრამ $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ — z -ის ცალსახა ფუნქციებია F_z არეში და, მაშასადამე, უკანასკნელი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ან $\varphi(z) \equiv 0$, ან $\psi(z) \equiv 0$, ან $\varphi(z) = \psi(z) = 0$, რაც ჩვენ ღებულებას ამტკიცებს.

ვთქვათ, S_z კოორდინატთა სისტემაა $S(F)$ -დან, რომელიც არ ეკუთვნის A -ოჯახს. თუ $S_z \in A$, მაშინ $\varphi \in \widehat{\mathcal{F}}(F, A)$ სკალარის $\varphi(z)$ და $\varphi(\zeta)$ კომპონენტებისათვის გვაქვს

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta(z)), \quad \forall S_z \in S_F, \quad (1.31)$$

ტოლობა. ამ ტოლობის ორივე მხარის გაწარმოებით, თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.30)-ს, გვექნება

$$\partial_z \varphi = \varphi'(\zeta) \partial_z \zeta, \quad \partial_{\bar{z}} \varphi = \varphi'(\zeta) \partial_{\bar{z}} \zeta.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi = \varphi(z)$ აკმაყოფილებს

$$\partial_{\bar{z}} \varphi - q(\zeta, z) \partial_z \varphi = 0 \quad (1.32)$$

განტოლებას, სადაც

$$q(\zeta, z) = \frac{\partial_z \zeta}{\partial_z \bar{\zeta}}. \quad (1.33)$$

$q(\zeta, z)$ ფუნქციას, რომელიც მხოლოდ S_z და $S_{\bar{z}}$ კოორდინატთა სისტემებზეა დამოკიდებული, კოორდინატთა ამ სისტემების მახასიათებელი ფუნქცია ან უბრალოდ მახასიათებელი ეწოდება. თუ $z \sim \zeta$, მაშინ $\partial_z \zeta = 0$ და, მაშასადამე, $q(\zeta, z) = 0$.

ამრიგად, S_F -დან კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემის მახასიათებელი ფუნქცია ნულის ტოლია. მაშინ (და მხოლოდ მაშინ) (1.32) განტოლება გადადის კოში—რიმანის (1.30) განტოლებაში. (1.32) განტოლებას ბელტრამის განტოლება ეწოდება (იხ. თავი IV, § 3).

თუ $z \sim \bar{z}$ და $\zeta \sim \bar{\zeta}$, მაშინ (1.33)-დან ადვილად გამომდინარეობს

$$q(\bar{\zeta}, \bar{z}) = q(\zeta, z) \frac{d\bar{z}}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta} \quad (1.34)$$

ფორმულა. კერძოდ,

$$\bar{q}(\bar{\zeta}, \bar{z}) = q(\zeta, z). \quad (1.35)$$

აქედან ჩანს, რომ ერთი მხრივ $q(\zeta, z)$ დამოკიდებულია არა S_z კოორდინატთა სისტემაზე, არამედ $A = \bar{S}_z$ კლასზე, ხოლო მეორე მხრივ,

$$|q(\bar{\zeta}, \bar{z})| = |q(\zeta, z)|, \quad \forall S_z \sim S_{\bar{z}}, \quad S_z \sim S_{\bar{z}}, \quad (1.36)$$

ე. ი. $|q(\zeta, z)|$ დამოკიდებულია მხოლოდ S_F -დან აღებულ კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების $\bar{S}_z$ და $\bar{S}_{\bar{z}}$ კლასებზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $q(\zeta, z)$ კონფორმულად ინვარიანტულია პირველი ζ არგუმენტის მიმართ, ხოლო $|q(\zeta, z)|$ კონფორმულად ინვარიანტულია ორივე— z და ζ არგუმენტის მიმართ.

ამრიგად, $\mathcal{F}(F, A)$ -დან ანალიზური ფ სკალარის ფ(z) კომპონენტი ნებისმიერ კოორდინატთა S_z სისტემაში აკმაყოფილებს ბელტრამის (1.32) განტოლებას. ამ განტოლების $q(\zeta, z)$ კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ განსახილავ კოორდინატთა S_z სისტემაზე და კოორდინატთა სისტემების A ოჯახზე და საესეებით დამოუკიდებელია ანალიზური ფ $\in \mathcal{F}(F, A)$ სკალარის არჩევისაგან.

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $\varphi_0(z)$ ბელტრამის (1.32) განტოლების ამონახსნია F_z არეში, მაშინ მისი ამონახსნი იქნება აგრეთვე

$$\varphi(z) = \Phi(\varphi_0(z)) \quad (.37)$$

სახის ფუნქციაც, სადაც $\Phi(\zeta)$ წარმოადგენს ζ -ს ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას $\varphi_0(F_z)$ არეში.

ქვემოთ ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით ბელტრამის (1.32) განტოლებას და შევისწავლით მის ზოგიერთ სხვა თვისებას, აგრეთვე კოორდინატთა S_z და $S_{\bar{z}}$ სისტემების მახასიათებელი $q(\zeta, z)$ ფუნქციის თვისებებსაც.

6. ზედაპირის გაუსის კომპლექსური კოორდინატების გარდაქმნათა ფუნქციონალური დეტერმინანტები (იაკობიანები). შემდგომში ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ განიხილება S_F -დან აღებული კოორდინატთა სისტემების რაღაც S_m ოჯახი, სადაც m ფიქსირებული რიცხვია, $m \geq 1$. მაშასადამე, S_m ოჯახიდან კოორდინატთა ნებისმიერი ორი S_z და $S_{\bar{z}}$ სისტემისათვის $\hat{z}(z)$ და $z(\hat{z})$ ფუნქციები ეკუთვნის სათანადოდ $C_m(F_z)$ და $C_m(F_{\bar{z}})$ -ს.

ცხადია, გვაქვს ტოლობები

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial \hat{z}^{\alpha}}{\partial \hat{z}^{\beta}} = \frac{\partial \hat{z}^{\alpha}}{\partial z^{\beta}} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial \hat{z}^{\beta}} \quad (1.38)$$

თუ ვისარგებლებთ

$$\alpha^* = \frac{1}{2} (3 - (-1)^{\alpha}), \quad \text{ე. ი. } 1^* = 2, \quad 2^* = 1 \quad (1.39)$$

აღნიშვნებით, (1.38) განტოლებათა სისტემიდან გამოვიყვანთ

$$\frac{\partial \hat{z}^{\alpha}}{\partial z^{\gamma}} = (-1)^{\alpha+\gamma} J(\hat{z}, z) \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial \hat{z}^{\alpha}} = (-1)^{\alpha+\gamma} J(\hat{z}, z) \frac{\partial \bar{z}^{\gamma}}{\partial \bar{z}^{\alpha}}, \quad (1.40)$$

$$z \in F_z, \quad \hat{z} \in F_{\bar{z}},$$

ფორმულებს, სადაც $J(\hat{z}, z)$ კოორდინატთა

$$\hat{z} = \hat{z}(z) \quad (1.41)$$

გარდაქმნის ფუნქციონალური დეტერმინანტია (იაკობიანია). ადვილად ვღებულობთ

$$J(\bar{z}, z) = \det \left(\frac{\partial \bar{z}^a}{\partial z^b} \right) = \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} \right|^2, \quad \forall S_z, S_{\bar{z}} \in S_m, \quad (1.42)$$

ფორმულას. იგივეური $\bar{z} = z$ გარდაქმნისათვის, ცხადია, გვაქვს

$$J(z, z) = 1. \quad (1.43)$$

(1.40) ფორმულა ჩაეწეროს კიდევ

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = J(\bar{z}, z) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = -J(\bar{z}, z) \frac{\partial z}{\partial \bar{z}}, \quad \forall S_z, S_{\bar{z}}, \quad (1.44)$$

სახით.

თუ დეტერმინანტების გამრავლების ფორმულას გამოვიყენებთ, (1.42)-დან მივიღებთ

$$J(\bar{z}, z) = J(\bar{z}, \bar{\bar{z}}) J(\bar{\bar{z}}, z), \quad \forall S_z, S_{\bar{z}}, S_{\bar{\bar{z}}}. \quad (1.45)$$

რადგან $J(z, z) = 1$, ამიტომ (1.45) ფორმულიდან გვექნება

$$J(\bar{z}, z) J(z, \bar{z}) = 1, \quad \forall S_z, S_{\bar{z}}. \quad (1.46)$$

ე. ი.

$$J(\bar{z}, z) = \frac{1}{J(z, \bar{z})} \neq 0, \quad \forall S_z, S_{\bar{z}}. \quad (1.47)$$

(1.46) და (1.47) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ან

$$1) \quad J(\bar{z}, z) > 0, \quad (1.48 \text{ ა})$$

ან

$$2) \quad J(\bar{z}, z) < 0, \quad z \in F_z. \quad (1.48 \text{ ბ})$$

პირველ შემთხვევაში კოორდინატების $z \rightarrow \bar{z}$ გარდაქმნისას კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია ინახება, მეორე შემთხვევაში, პირიქით, კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია იცვლება. შემდგომში ჩვენ შემოვიანგლოზრებთ კოორდინატთა სისტემების გარდაქმნათა ისეთი ოჯახის განხილვით, რომლებიც ორიენტაციას ინახავენ. ეს გარდაქმნები შეადგენს მულტიპლიკატიურ ჯგუფს, რომლის ნეიტრალურ ელემენტს (ერთეულს) იგივეური გარდაქმნა წარმოადგენს. მაშასადამე, განვიხილავთ კოორდინატთა ისეთ გარდაქმნებს, რომელთათვისაც შესრულებულია

$$J(\bar{z}, z) > 0, \quad \forall S_z, S_{\bar{z}} \quad (1.49)$$

პირობა.

თუ $\hat{z} \sim z$, მაშინ (1.38) ფორმულის თანახმად (1.42) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$J(\hat{z}, z) = \frac{d\hat{z}^1}{dz^1} \frac{d\hat{z}^2}{dz^2} = \left| \frac{d\hat{z}}{dz} \right|^2 > 0, \quad \forall S_z, S_{\hat{z}}. \quad (1.50)$$

ეთქვათ $z \sim \hat{z}$ და $\zeta \sim \hat{\zeta}$. მაშინ (1.45) ფორმულის საშუალებით გვექნება

$$J(\hat{\zeta}, \hat{z}) = J(\zeta, z) \left| \frac{d\hat{\zeta}}{d\zeta} \right|^2 \left| \frac{d\hat{z}}{dz} \right|^2, \quad \forall S_z \sim S_{\hat{z}}, S_{\zeta} \sim S_{\hat{\zeta}}. \quad (1.51)$$

აქედან ვღებულობთ

$$J(\hat{\zeta}, \hat{z}) |d\hat{\zeta}|^2 |d\hat{z}|^2 = J(\zeta, z) |d\zeta|^2 |dz|^2, \quad (1.51 \text{ ა})$$

$$\forall S_z \sim S_{\hat{z}}, S_{\zeta} \sim S_{\hat{\zeta}},$$

ტოლობას, რომელიც აღნიშნავს

$$J(\zeta, z) |d\zeta|^2 |dz|^2 \quad (1.52)$$

დიფერენციალური ფორმის ინვარიანტობას კომპლექსური z და ζ კოორდინატების კონფორმულ გარდაქმნათა მიმართ.

ამრიგად, (1.52) დიფერენციალური ფორმა, რომელიც განსაზღვრულია კოორდინატთა ნებისმიერი S_z და S_{ζ} სისტემებისათვის, წარმოადგენს ორივე z და ζ არგუმენტის კონფორმულ ინვარიანტს.

7. კოორდინატთა სისტემების მახასიათებელი ფუნქციის თვისებები. (1.49) დაშვების თანახმად (1.42) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$\left| \frac{d\hat{\zeta}}{d\zeta} \right| < \left| \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \right|, \quad z \in F_z, \zeta \in F_{\zeta}, \quad \forall S_z, S_{\zeta}. \quad (1.53)$$

უტოლობა. აქედან გვაქვს

$$\left| \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \right| > 0, \quad \text{ე. ი.} \quad \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \neq 0, \quad z \in F_z, \zeta \in F_{\zeta}, \quad \forall S_z, S_{\zeta}. \quad (1.54)$$

(1.44) ფორმულის თანახმად მახასიათებელი

$$q(\zeta, z) = \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \bigg/ \frac{\partial \hat{z}}{\partial z}, \quad \forall S_z, S_{\zeta}, \quad (1.55)$$

ფუნქცია შეგვიძლია კიდევ ჩავწეროთ

$$q(\zeta, z) = - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \bigg| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \forall S_z, S_{\bar{\zeta}}, \quad (1.56)$$

სახით.

(1.55) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\zeta = \zeta(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ბელტრამის განტოლებას

$$\partial_{\bar{z}} \zeta - q(\zeta, z) \partial_z \zeta = 0. \quad (1.57)$$

(1.56)-დან გვაქვს, რომ შებრუნებული $z = z(\zeta)$ ფუნქცია წარმოადგენს

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + q(\zeta, z) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = 0 \quad (1.58)$$

განტოლების ამონახსნს. (1.53) განტოლების თანახმად, ცხადია, სრულდება

$$|q(\zeta, z)| < 1, \quad z \in F_z, \quad \zeta \in F_{\bar{\zeta}}, \quad \forall S_z, S_{\bar{\zeta}}, \quad (1.59)$$

პირობა, (1.34)-დან გვაქვს

$$q(\widehat{\zeta}, \widehat{z}) (\widehat{d\bar{z}} (d\bar{z})^{-1}) = q(\zeta, z) d\bar{z} (dz)^{-1}, \quad \forall S_z \sim S_{\bar{z}}, \quad S_{\bar{\zeta}} \sim S_{\widehat{\zeta}}, \quad (1.60)$$

ტოლობა, რომელიც $q(\zeta, z) d\bar{z} (dz)^{-1}$ დიფერენციალურა ფორმის ინვარიანტულობას აღნიშნავს ორივე არგუმენტის მიმართ. (1.60) ტოლობიდან და (1.59) უტოლობიდან გვაქვს

$$|q(\widehat{\zeta}, \widehat{z})| = |q(\zeta, z)| < 1, \quad \forall S_z \sim S_{\bar{z}}, \quad S_{\bar{\zeta}} \sim S_{\widehat{\zeta}} \quad (1.61)$$

რადგან z და ζ კოორდინატები დაკავშირებულია $\zeta = \zeta(z)$ (ანუ $z = z(\zeta)$) სახის ფუნქციონალური დამოკიდებულებით, ამიტომ მახასიათებელი $q(\zeta, z)$ ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთ-ერთი z ან ζ არგუმენტის ფუნქცია. როგორც ჩვენ უკვე ზემოთ შევთანხმდით, განსახილავი კოორდინატთა სისტემები ეკუთვნის რაიმე S_m , $m \geq 1$ ოჯახს. მაშასადამე, თუ S_z სისტემა დაფიქსირებულია, მაშინ კოორდინატთა სხვა ნებისმიერ $S_{\bar{\zeta}}$ სისტემაში $\zeta(z) \in C_m(F_z)$ და, მაშასადამე, $q(\zeta, z)$ მახასიათებელი წარმოადგენს z -ის $q(z)$ ფუნქციას F_z არეში, რომელიც $C_{m-1}(F_z)$ კლასს ეკუთვნის. (1.60) და (1.61)-ის თანახმად სრულდება

$$q(z) dz^{-1} d\bar{z} = \widehat{q}(\widehat{z}) d\widehat{z}^{-1} d\widehat{\bar{z}}, \quad \forall S_{\bar{\zeta}}, \quad S_z \sim S_{\bar{z}}, \quad (1.62)$$

$$|q(z)| = |\widehat{q}(\widehat{z})| < 1, \quad \forall S_{\bar{\zeta}}, \quad S_z \sim S_{\bar{z}}. \quad (1.63)$$

პირობები. რადგან $q(z)$ უწყვეტია F_z -ში და $|q(z)| < 1$, როცა $z \in F_z$, ამიტომ ყოველ ჩაკეტილ F_z^0 ქვესიმრავლეზე F_z -დან $|q(z)|$ აღწევს თავის მაქსიმუმს რაიმე z_0 წერტილში F_z^0 -დან, ე. ი.

$$\max_{F_z^0} |q(z)| = |q(z_0)| = q_0, \quad z_0 \in F_z^0. \quad (1.64)$$

მაშასადამე, (1.59) უტოლობის თანახმად

$$|q(\zeta, z)| = |q(z)| \leq q_0 < 1, \quad z \in F_z^0, \quad \forall S_z, S_\zeta. \quad (1.65)$$

ცხადია, q_0 დამოკიდებულია, საზოგადოდ, კოორდინატთა S_z და S_ζ სისტემების არჩევაზე: $q_0 = q_0(S_z, S_\zeta)$, მაგრამ

$$q_0(S_z, S_\zeta) < 1, \quad \forall S_z, S_\zeta. \quad (1.66)$$

უტოლობა ყოველთვის სრულდება.

კოორდინატთა S_ζ და S_z სისტემების მახასიათებელი $q(\zeta, z)$ ფუნქციის თვისება, რომელიც გამოსახულია (1.63) და (1.65) უტოლობებით, არსებითად გამოიყენება კოორდინატთა სპეციალური სისტემების აგებისას F -ზე. სახელდობრ, ამ თვისების ძალით არსებობს ბელტრამის (1.57) განტოლების ჰომოგენური წევრები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს მოცემული მახასიათებლით ავაგოთ F ზედაპირის კოორდინატთა შესაბამისი სისტემა.

§ 2. ზედაპირის კოვარიანტები და მათი თვისებები

ამ პარაგრაფში ჩვენ შემოვიყვანთ ზედაპირის კოვარიანტის ცნებას და ვუჩვენებთ მის კავშირს ზედაპირის ტენზორებთან.

1. ზედაპირის კოვარიანტები. თუ $a_{\alpha'_1 \dots \alpha'_p}^{\beta'_1 \dots \beta'_q}(x)$ რაიმე $\mathfrak{M}(F)$ მოდულიდან აღებული (p, q) ტენზორის კომპონენტებია გაუსის ნამდვილ x^a კოორდინატებში, მაშინ ამ ტენზორის კომპონენტები გაუსის კომპლექსური $z' = x^{1'} + ix^{2'}$, $z^2 = x^{1'} - ix^{2'}$ პარამეტრების მიმართ გამოსახება

$$a_{\alpha'_1 \dots \alpha'_p}^{\beta'_1 \dots \beta'_q} = a_{\alpha'_1 \dots \alpha'_p}^{\beta'_1 \dots \beta'_q} D_{\alpha'_1}^{\alpha_1} \dots D_{\alpha'_p}^{\alpha_p} D_{\beta'_1}^{\beta_1} \dots D_{\beta'_q}^{\beta_q} \quad (2.1)$$

ფორმულების საშუალებით. კომპლექსური z^a კოორდინატების ახალი z^a კოორდინატებით შეცვლისას გვეჩვენა გარდაქმნის ფორმულები

$$\widetilde{a}_{\alpha'_1 \dots \alpha'_p}^{\beta'_1 \dots \beta'_q} = a_{\gamma_1 \dots \gamma_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_q} \frac{\partial z^{\gamma_1}}{\partial z^{\alpha'_1}} \dots \frac{\partial z^{\gamma_p}}{\partial z^{\alpha'_p}} \frac{\partial z^{\beta_1}}{\partial z^{\beta'_1}} \dots \frac{\partial z^{\beta_q}}{\partial z^{\beta'_q}}. \quad (2.2)$$

ვთქვათ, A კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემების რაიმე ოჯახია F -ზე, რომელსაც სიმოკლისათვის A ოჯახს ვუწოდებთ.

თუ $S_z, S_{\bar{z}} \in A$, მაშინ (1.21) ფორმულის თანახმად (2.2) დამოკიდებულებები მიიღებს სახეს

$$\widehat{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} \frac{dz^{\alpha_1}}{d\bar{z}^{\alpha_1}} \dots \frac{dz^{\alpha_p}}{d\bar{z}^{\alpha_p}} \frac{d\bar{z}^{\beta_1}}{dz^{\beta_1}} \dots \frac{d\bar{z}^{\beta_q}}{dz^{\beta_q}}. \quad (2.3)$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} & \widehat{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} d\bar{z}^{\alpha_1} \dots d\bar{z}^{\alpha_p} (d\bar{z}^{\beta_1} \dots d\bar{z}^{\beta_q})^{-1} = \\ & = a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} dz^{\alpha_1} \dots dz^{\alpha_p} (dz^{\beta_1} \dots dz^{\beta_q})^{-1}, \quad \forall S_z \sim S_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ამრიგად, თუ $a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}(z)$ (p, q)-ტენზორის კომპონენტებია $\mathfrak{M}(F)$ -დან კოორდინატთა S_z სისტემაში, მაშინ დიფერენციალური

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}(z) dz^{\alpha_1} \dots dz^{\alpha_p} (dz^{\beta_1} \dots dz^{\beta_q})^{-1} \quad (2.5)$$

ფორმა კონფორმულად ინვარიანტულია.

ვთქვათ m'_1 და m'_2 (შესაბამისად m''_1 და m''_2) ერთიანების და ორიანების რიცხვებია $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ (შესაბამისად $\beta_1, \dots, \beta_q$) ინდექსებს შორის. ცხადია,

$$m'_\alpha = \delta_\alpha^{\alpha_1} + \dots + \delta_\alpha^{\alpha_p}, \quad m''_\alpha = \delta_\alpha^{\beta_1} + \dots + \delta_\alpha^{\beta_q} \quad (2.6)$$

რადგან $dz^1 = dz, dz^2 = d\bar{z}$, ამიტომ, თუ შემოვიტანთ

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}(z) = f(z), \quad \widehat{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}(\bar{z}) = \widehat{f}(\bar{z}), \quad (2.7)$$

აღნიშვნებს, (2.4) ტოლობა მიიღებს

$$f(\bar{z}) d\bar{z}^m d\bar{z}^n = f(z) dz^m dz^n, \quad \forall S_z \sim S_{\bar{z}} \quad (2.8)$$

სახეს, სადაც

$$\begin{aligned} m &= m'_1 - m''_1 = \delta_1^{\alpha_1} + \dots + \delta_1^{\alpha_p} - \delta_1^{\beta_1} - \dots - \delta_1^{\beta_q}, \\ n &= m'_2 - m''_2 = \delta_2^{\alpha_1} + \dots + \delta_2^{\alpha_p} - \delta_2^{\beta_1} - \dots - \delta_2^{\beta_q}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

აქ უნდა აღინიშნოს, რომ მთელი m და n რიცხვები არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე რაიმე A -ოჯახიდან.

ამრიგად, თუ $f(z)$ ტოლია $\mathfrak{M}(F)$ -დან აღებული რაიმე (p, q) -ტენზორის რომელიმე $\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q(z)$ კომპონენტისა კოორდინატთა S_z სისტემაში, ხოლო m და n მთელი რიცხვებია, რომლებიც (2.9) ფორმულებით განისაზღვრებიან და, მაშასადამე, დამოუკიდებელნი არიან კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან, მაშინ $f(z) dz^m d\bar{z}^n$ დიფერენციალური ფორმა კონფორმულად ინვარიანტულია. (2.7) ფორმულით განსაზღვრული z ცვლადის $f(z)$ ფუნქციის ეს თვისება კოვარიანტის ცნების ზოგადი განსაზღვრის საშუალებას იძლევა. შევთანხმდეთ, შემდგომში $f(z) dz^m d\bar{z}^n$ სახის დიფერენციალურ ფორმას შემოკლებით (m, n) -მონოფორმა ვუწოდოთ.

დაეფიქსიროთ F ზედაპირის კონფორმულად ინვარიანტული კოორდინატთა სისტემების რაიმე A ოჯახი (მოკლედ A -ოჯახი) და m, n მთელი რიცხვები. $\mathfrak{M}(F, A)$ -თი აღვნიშნოთ $\mathfrak{M}(F_z)$ სიმრავლეთა გაერთიანება $S_z \in A$ -თვის. ვთქვათ არსებობს რაიმე წესი, რომელიც კოორდინატთა ყოველი S_z სისტემისათვის A -დან რაიმე ისეთი $f(z)$ ფუნქციის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა $\mathfrak{M}(F_z)$ -დან, რომლისთვისაც $f(z) dz^m d\bar{z}^n$ მონოფორმა კონფორმულად ინვარიანტულია, ე. ი. სრულდება პირობა

$$f(z) dz^m d\bar{z}^n = \widehat{f}(\hat{z}) d\hat{z}^m d\bar{\hat{z}}^n, \quad \forall S_z, S_{\hat{z}} \in A. \quad (2.10)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ტოლობა ეკვივალენტობის მიმართებას წარმოადგენს. მაშასადამე, $\mathfrak{M}(F, A)$ იყოფა ეკვივალენტობის არაგადამკვეთ კლასებად. ვთქვათ, $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ ამ კლასების სიმრავლეა. ყოველ ელემენტს $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ -დან ვუწოდებთ A კლასის (m, n) -ტიპის კოვარიანტს $\mathfrak{M}(F)$ -დან ანუ, მოკლედ, (m, n) კოვარიანტს $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან. $f(z)$ ფუნქციას კოვარიანტის კომპონენტს ვუწოდებთ კოორდინატთა $S_z \in A$ სისტემაში. თუ f კოვარიანტია, მაშინ $f(z)$ აღნიშნავს მის კომპონენტს კოორდინატთა S_z სისტემაში. ცხადია, f კოვარიანტი $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ -დან ცალსახადაა განსაზღვრული, თუ მოცემულია მისი $f(z)$ კომპონენტი ერთი ნებისმიერად დაფიქსირებული კოორდინატთა S_z სისტემის მიმართ A -დან. მაშინ მისი $\widehat{f}(\hat{z})$ კომპონენტი სხვა ნებისმიერი კოორდინატთა $S_{\hat{z}} \in A$ სისტემისათვის ცალსახად გამოისახება (2.10) ტოლობის საშუალებით, ე. ი.

$$\widehat{f}(\bar{z}) = f(z) \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^m \left(\frac{d\bar{z}}{dz} \right)^n \quad (2.11)$$

ამის გამო, როცა ლაპარაკია $f(z)$ კოვარიანტზე $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან, იგულისხმება A კლასის f კოვარიანტი $\mathfrak{M}(F)$ -დან, რომლის კომპონენტი $S_z \in A$ -ის მიმართ $f(z)$ -ის ტოლია.

თუ $S_z \in A$, მაშინ $f: F_z \rightarrow 0$ ასახვა ეკუთვნის ნებისმიერ $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ -ს. მართლაც, მისი $f(z)$ კომპონენტი კოორდინატთა ნებისმიერ $S_z \in A$ სისტემაში იგივერად ნული ხდება და, მაშასადამე, (2.10) პირობა ყოველთვის სრულდება. მას ნულოვან კოვარიანტსაც ვუწოდებთ.

(2.11) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ f კოვარიანტი $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ -დან ნულოვანი იქნება, თუ მისი $f(z)$ კომპონენტი კოორდინატთა ერთ $S_z \in A$ სისტემაში იგივერად ნულის ტოლია.

თუ f ნულოვანი კოვარიანტია, მაშინ დაეწეროთ $f=0$. როდესაც $f \in \mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$, მაშინ შევთანხმდეთ აგრეთვე დაეწეროთ $f \neq 0$ (შესაბამისად, $f \equiv 0$), თუ $f(z)$ კომპონენტი კოორდინატთა ნებისმიერ $S_z \in A$ სისტემაში არსად (შესაბამისად, იგივერად) არ ხდება ნული F_z -ში.

m და n რიცხვებს (m, n) -კოორდინატის ინდექსებს, ხოლო $|m| + |n|$ ჯამს კოვარიანტის რანგს ვუწოდებთ. ნულოვანი რანგის კოვარიანტს სკალარს ვუწოდებთ $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან. სკალარების სიმრავლეს $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან $\mathfrak{M}_0(F, A)$ -თი აღვნიშნავთ. თუ φ სკალარია $\mathfrak{M}_0(F, A)$ -დან, მაშინ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებს

$$\varphi(z) = \widehat{\varphi}(\bar{z}) \equiv \widehat{\varphi}(\bar{z}(z)), \quad \forall S_z, S_{\bar{z}} \in A, \quad (2.12)$$

პირობას. კერძოდ, $\mathfrak{M}_0(F, A)$, ცხადია, კომპუტაციურ რგოლს წარმოადგენს ერთეულით.

როგორც (1.51 ა) ფორმულიდან ჩანს, კოვარიანტის მაგალითს წარმოადგენს $J(\zeta, z)$ იაკობიანი. თუ კოორდინატთა S_z სისტემას ნებისმიერად დავაფიქსირებთ, მაშინ (1.51 ა)-ს თანახმად გვაქვს

$$J(\bar{\zeta}, z) d\bar{\zeta} d\bar{z} = J(\zeta, z) d\zeta dz, \quad \forall S_{\bar{\zeta}} \sim S_{\zeta}.$$

მაშასადამე, ფიქსირებული კოორდინატთა S_z სისტემისათვის $J(\zeta, z)$ წარმოადგენს კოვარიანტს $\mathfrak{M}_{1,1}(F)$ -დან $S_{\bar{\zeta}}$ კოორდინატთა სისტემაში. ზუსტად ასევე მივიღებთ, თუ დავაფიქსირებთ $S_{\bar{\zeta}}$ კოორდინატთა

სისტემას, მაშინ $J(\zeta, z)$ წარმოადგენს კოვარიანტს $\mathcal{M}_{-1, -1}(F)$ -დან კოორდინატთა S_z სისტემაში.

კოვარიანტის სხვა მაგალითს წარმოადგენს კოორდინატთა S_z და S_z სისტემების $q(\zeta, z)$ მახასიათებელი ფუნქცია. (1.60) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ კოორდინატთა ფიქსირებული S_z სისტემისათვის $q(\zeta, z)$ მახასიათებელი ζ -ს მიმართ სკალარს წარმოადგენს $\mathcal{S}_0(F)$ -დან, ხოლო კოორდინატთა ფიქსირებული S_z სისტემისათვის იგი კოვარიანტს წარმოადგენს $\mathcal{S}_{-1, -1}(F)$ -დან კოორდინატთა S_z სისტემაში.

2. ზედაპირის კოვარიანტების თვისებები. ქვემოთ ჩვენ ჩამოვთვლით კოვარიანტების ზოგიერთ ძირითად თვისებას, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობენ ზემოთ მოცემული განმარტებიდან.

1) თუ $f, g \in \mathcal{M}_{m, n}(F, A)$, მაშინ $f+g$ ჯამი აღნიშნავს კოვარიანტს, რომლის კომპონენტები კოორდინატთა ნებისმიერ S_z სისტემის მიმართ A -დან ტოლია $f(z) + g(z)$ -ის. ცხადია, $f+g \in \mathcal{M}_{m, n}(F, A)$.

2) თუ $\varphi \in \mathcal{S}_0(F, A)$ და $f \in \mathcal{M}_{m, n}(F, A)$, მაშინ φf ნამრავლის ქვეშ ვიგულისხმებთ კოვარიანტს, რომლის კომპონენტები კოორდინატთა ნებისმიერი S_z სისტემის მიმართ A -დან ტოლია $\varphi(z)f(z)$ -ის. ცხადია, $\varphi f \in \mathcal{M}_{m, n}(F)$.

1) და 2) თვისებების თანახმად ადვილად ვრწმუნდებით, რომ $\mathcal{M}_{m, n}(F, A)$ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს სკალარების $\mathcal{S}_0(F, A)$ რგოლზე, ე. ი. $\mathcal{M}_{m, n}(F, A)$ წარმოადგენს $\mathcal{S}_0(F, A)$ მოდულს.

3) თუ $f \in \mathcal{S}_{p, q}(F, A)$ და $g \in \mathcal{M}_{m, n}(F, A)$, მაშინ fg ნამრავლი, რომლის კომპონენტი კოორდინატთა ნებისმიერი S_z სისტემის მიმართ A -დან $f(z)g(z)$ -ის ტოლია, წარმოადგენს $(p+m, q+n)$ -კოვარიანტს $\mathcal{M}(F, A)$ -დან, ე. ი. $fg \in \mathcal{M}_{p+m, q+n}(F, A)$.

4) თუ $f \in \mathcal{S}_{m, n}(F, A)$, მაშინ $\bar{f}$ -ის ქვეშ ვიგულისხმებთ კოვარიანტს, რომლის კომპონენტი კოორდინატთა ნებისმიერი S_z სისტემის მიმართ A -დან $\overline{f(z)}$ -ის ტოლია. ცხადია, $\bar{f} \in \mathcal{S}_{n, m}(F, A)$.

5) თუ $f \in \mathcal{S}_{m, n}(F, A)$ და $f \neq 0$, მაშინ f^{-1} -ის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ კოვარიანტს, რომლის კომპონენტი კოორდინატთა ნებისმიერი S_z სისტემის მიმართ A -დან $1/f(z)$ -ის ტოლია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $f^{-1} \in \mathcal{S}_{-m, -n}(F, A)$.

(m, n) -კოვარიანტებს ნებისმიერი მოდულიდან კოგრადიენტულს ეუწოდებთ, ხოლო (m, n) და $(-m, -n)$ -კოვარიანტებს—კონტრაგრადიენტულს. თუ f კოვარიანტია და არსებობს f^{-1} , მაშინ f და f^{-1} კონტრაგრადიენტული კოვარიანტებია.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ნებისმიერი A კლასის კოვარიანტებზე $\mathcal{F}(F)$ -დან შეიძლება გამოვიყენოთ ოთხი ალგებრული ოპერაცია: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. კოვარიანტების ეს მნიშვნელოვანი თვისება კოვარიანტების თეორიას აახლოებს სიბრტყეზე კომპლექსურ ანალიზთან.

6) თუ A და B F ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემების ორი განსხვავებული კლასია, მაშინ $\mathcal{M}_{m,n}(F, A)$ და $\mathcal{M}_{m,n}(F, B)$ სიმრავლეები განსხვავებულია. შეიქმნება აიგოს შესაბამისი მაგალითი.

ვთქვათ, φ დიფერენცირებადი სკალარია $\widehat{\mathcal{F}}(F)$ -დან, კოორდინატთა ყოველი S_z სისტემისათვის განვმარტოთ

$$f(z) = 1 + \frac{\partial_z \varphi}{\partial_z \varphi} \quad (2.13)$$

ფუნქცია. ვთქვათ, $\partial_z \varphi = 0$ $S_z \in A$ -თვის. მაშინ $\partial_z \varphi = 0$ ნებისმიერი $S_z \in A$ -თვის და, მაშასადამე,

$$f(z) = 1, \quad \forall S_z \in A. \quad (2.13 \text{ ა})$$

რადგან $\varphi(z)$ წარმოადგენს F_z -ში z -ის ანალიზურ ფუნქციას ნებისმიერი $S_z \in A$ -თვის, ამიტომ კოორდინატთა ყოველი S_z სისტემისათვის B ოჯახიდან გვაქვს: $\partial_z \varphi = \varphi'(z) \partial_z z$, $\partial_{\bar{z}} \varphi = \varphi'(z) \partial_{\bar{z}} z$. მაშასადამე,

$$f(\zeta) = 1 + \frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\partial_{\bar{z}} \varphi} = 1 + \frac{\partial_{\bar{z}} z}{\partial_{\bar{z}} z} \equiv 1 + q(z, \zeta), \quad S_z \in B, \quad (2.13 \text{ ბ})$$

სადაც $q(z, \zeta)$ კოორდინატთა S_z და $S_{\bar{z}}$ სისტემების მახასიათებელი ფუნქციაა. რადგან $q(z, \zeta) d\bar{z} d\bar{z}^{-1}$ კონფორმული ინვარიანტია, ამიტომ $f(\zeta) - 1 \in \mathcal{F}_{-1,1}(F, B)$. მაშასადამე, f წარმოადგენს A კლასის სკალარს, მაგრამ იგი B კლასის სკალარი არ არის. საზოგადოდ, აღვიღოთ დავრწმუნდებით, რომ f არ წარმოადგენს B კლასის კოვარიანტს.

7) არსებობს (m, n) -კოვარიანტები $\mathcal{M}(F, A)$ -დან, რომლებიც $\mathcal{M}_{m,n}(F, A)$ -ს ეკუთვნის F ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემების ნებისმიერი A -ოჯახისათვის. ამგვარი კოვარიანტების სიმრავლე $\mathcal{M}_{m,n}(F)$ -ით აღვნიშნოთ. კოვარიანტებს $\mathcal{M}_{m,n}(F)$ -დან უნივერსალური კოვარიანტები ვუწოდოთ $\mathcal{M}(F)$ მოდულიდან. უნივერსალური კოვარიანტების მაგალითებს $\mathcal{M}(F)$ -დან წარ-

მოადგენს $M(F)$ -დან აღებული ტენზორის კომპლექსური კომპონენტები. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (2.7) და (2.8) დამოკიდებულებებიდან.

ვთქვათ, r არის F ზედაპირის წერტილის რადიუს-ვექტორი. მაშინ კომპლექსური $r_a = \partial_a r$ ვექტორ-ფუნქციები, რომლებიც კოორდინატთა S_x სისტემის ბაზისის შეადგენენ, წარმოადგენენ უნივერსალურ კოვარიანტებს $V_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}(F)$ -დან. r^a ვექტორ-ფუნქციები, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის ბიორთონორმალურ ბაზისის შეადგენენ და, მაშასადამე, აკმაყოფილებენ

$$r_a r^b = \delta_a^b \quad (2.14)$$

პირობებს, წარმოადგენენ უნივერსალურ კოვარიანტებს $V_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = \delta_1^1 - \delta_2^2(F)$ -დან. ეს ადვილად გამომდინარეობს

$$r^b dr = dz^b \quad (2.14 \text{ ა})$$

ფორმულიდან, რომელიც (2.14) ტოლობიდან უშუალოდ მიიღება. უნივერსალური კოვარიანტების მაგალითებს $\mathcal{F}(F)$ -დან წარმოადგენს კომპლექსური მეტრიული ტენზორები

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} = r_a r_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} = r^a r^\beta, \quad a_\alpha^\beta = a_\beta^\alpha = r_a r^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad (2.15)$$

ასევე კომპლექსური დისკრიმინანტული ტენზორები

$$c_{\alpha\beta} = \pi r_a r_\beta, \quad c^{\alpha\beta} = \pi r^a r^\beta, \quad c_\alpha^\beta = \pi r_a r^\beta, \quad c_\beta^\alpha = \pi r^a r_\beta. \quad (2.16)$$

რადგან

$$r_a = \partial_a r = \frac{1}{2} (r_{1'} + i(-1)^a r_{1'}), \quad r^a = r^{1'} - i(-1)^a r^{1'}, \quad (2.17)$$

ამიტომ გვაქვს

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} [a_{1'1'} - (-1)^{a+\beta} a_{2'2'} + i((-1)^a + (-1)^\beta) a_{1'2'}], \quad (2.18 \text{ ა})$$

$$a^{\alpha\beta} = a^{1'1'} - (-1)^{a+\beta} a^{2'2'} - i((-1)^a + (-1)^\beta) a^{1'2'}, \quad (2.18 \text{ ბ})$$

$$c_{\alpha\beta} = \frac{i((-1)^\beta - (-1)^a)}{4} \sqrt{a}, \quad c^{\alpha\beta} = \frac{1}{4i}((-1)^\beta - (-1)^a) \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (2.19)$$

ტოლობები, სადაც a ზედაპირის მეტრიული კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტია. გვაქვს

$$a = a_{1,1}, a_{2,2}, -a_{1,2}^2 = 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 4(a_{12}^2 - a_{11}\bar{a}_{11}) > 0$$

$$(a_{11} = \bar{a}_{22}, a_{12} = \bar{a}_{21} > 0). \quad (2.20)$$

ახლა ცხადია, რომ

$$a_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta} \in \mathcal{H}_{\delta_1^\alpha + \delta_1^\beta, \delta_2^\alpha + \delta_2^\beta}(F), \quad (2.21)$$

$$a^{\alpha\beta}, c^{\alpha\beta} \in \mathcal{H}_{-\delta_1^\alpha - \delta_1^\beta, -\delta_2^\alpha - \delta_2^\beta}(F),$$

$$a \in \mathcal{H}_{2,2}(F), \text{ ე. ი. } \sqrt{a} \in \mathcal{H}_{1,1}(F). \quad (2.22)$$

ამის გარდა, (2.19) ტოლობიდან გვაქვს

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \frac{i}{2} \sqrt{a}, \quad (2.23 \text{ ა})$$

$$c^{11} = c^{22} = 0, \quad c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{2i\sqrt{a}}. \quad (2.23 \text{ ბ})$$

უნივერსალური ტენზორების მაგალითებს წარმოადგენს მულტიპლიკაციური ტენზორები

$$e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = r_{\alpha_1} \dots \otimes r_{\alpha_p}, \quad e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = r^{\alpha_1} \dots \otimes r^{\alpha_p}, \quad (2.24)$$

$$e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \beta_1 \dots \beta_q = e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \otimes e^{\beta_1 \dots \beta_q}.$$

აღსანიშნავია, რომ უნივერსალური კოვარიანტი $\mathcal{H}_{m,n}(F)$ -და ცალსახად არ განისაზღვრება მისი კომპონენტების დასახელებით რაიმე ერთ ფიქსირებულ კოორდინატთა S_x სისტემაში. ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ

$$f(z) = \partial_z \varphi \quad \text{და} \quad g(z) = (\partial_z \varphi)^2, \quad (2.25)$$

სადაც φ დიფერენცირებადი სკალარია $\mathcal{H}_0(F)$ -დან. ცხადია, f და g ეკუთვნის შესაბამისად $\mathcal{H}_{0,1}(F)$ და $\mathcal{H}_{0,2}(F)$ -ს. თუ φ z -ის ანალიზური ფუნქციაა $S_x \in A$ -თვის, მაშინ $f = g = 0$ კოორდინატთა სისტემების მიმართ A -დან, მაგრამ კოორდინატთა სხვა სისტემებში f და g ერთმანეთს არ ემთხვევა.

ვთქვათ, p რაიმე ნატურალური რიცხვია და $A_1, \dots, A_p \in F$ ზედაპირზე კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების

განსხვავებული კლასები. A° -ით აღენიშნოთ $A_1 \cup \dots \cup A_p$ გაერთიანება. ახლა ადვილად ავაგებთ $\mathcal{F}(F)$ -დან ისეთი კოვარიანტების მაგალითებს, რომელთა კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევიან კოორდინატთა სისტემების მიმართ A° -დან, მაგრამ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან კოორდინატთა სისტემების მიმართ ნებისმიერი B ოჯახიდან, $B \neq A_k$, $k \in [1, p]$. ასეთი კოვარიანტების მაგალითებია

$$q_k(z_1 \dots z_p, \zeta) = (q(z_1, \zeta) \dots q(z_p, \zeta))^k, \quad k \in [1, p], \quad (2.26)$$

სადაც $q(z_i, \zeta)$ კოორდინატთა S_{z_i} და S_ζ სისტემების მახასიათებელი ფუნქციაა, ამასთან S_{z_i} კოორდინატთა რაიმე ფიქსირებული სისტემაა A_i -დან. ცხადია, $q_k = 0$, თუ $S_\zeta \in A^\circ$, ხოლო $q_k \in \mathcal{F}_{-k, k}(F, B)$, $q_k \neq 0$, $S_\zeta \in B$ -თვის, თუ $B \neq A_i$, $i \in [1, p]$.

მოყვანილი მაგალითებიდან ცხადია, რომ უნივერსალური კოვარიანტის განსასაზღვრავად $\mathcal{M}_{m, n}(F)$ -დან აუცილებელია დავასახელოთ იგი ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემების ნებისმიერი ოჯახის მიმართ, ე. ი. დავასახელოთ მისი კომპონენტი კოორდინატთა ერთი ფიქსირებული სისტემის მიმართ ყოველი A -ოჯახიდან.

8) განვიხილოთ, კერძოდ, ნულოვანი რანგის უნივერსალური კოვარიანტები $\mathcal{M}(F)$ -დან. ცხადია, ნულოვანი რანგის ყოველი ტენზორი $\mathcal{M}(F)$ -დან, ე. ი. სკალარი $\mathcal{M}_0(F)$ -დან წარმოადგენს აგრეთვე ნულოვანი რანგის უნივერსალურ კოვარიანტს $\mathcal{M}(F)$ -დან, ე. ი. $\mathcal{M}_0(F) \subset \mathcal{M}_{0,0}(F)$. ჩვენ ახლა დავრწმუნდებით, რომ ნულოვანი რანგის კოვარიანტების $\mathcal{M}_{0,0}(F)$ სიმრავლე სინამდვილეში $\mathcal{M}_0(F)$ სიმრავლეზე უფრო ფართოა.

ვთქვათ, $a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_p}$ რაიმე ტენზორის კომპონენტებია $\mathcal{M}_{p,p}(F)$ -დან. თუ ინდექსების $\beta_1, \dots, \beta_p$ მიმდევრობა წარმოადგენს ინდექსების $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ მიმდევრობის რაიმე გადანაცვლებას, მაშინ (2.9) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$m = \delta_1^{\alpha_1} + \dots + \delta_1^{\alpha_p} - (\delta_1^{\beta_1} + \dots + \delta_1^{\beta_p}) = 0, \quad (2.27)$$

$$n = \delta_2^{\alpha_1} + \dots + \delta_2^{\alpha_p} - (\delta_2^{\beta_1} + \dots + \delta_2^{\beta_p}) = 0.$$

მაშასადამე,

$$f(z) = a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_p}(z)$$

ფუნქცია წარმოადგენს ნულოვანი რანგის კოვარიანტს $\mathfrak{M}_{0,0}(F)$ -დან, მაგრამ, ცხადია, $f(z)$ არ არის სკალარი (ნულოვანი რანგის ტენზორი) $\mathfrak{M}_0(F)$ -დან, თუ $p \geq 1$.

9) ისევე, როგორც ზემოთ, A -თი აღენიშნავთ F ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების ოჯახს. შევთანხმდეთ, სიმბოლურად ჩაეწეროს $f \in \mathfrak{M}_{m,n}$, თუ f ეკუთვნის ან რაიმე $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ -ს, ან $\mathfrak{M}_{m,n}(F)$ -ს. როცა ერთდროულად განვიხილავთ ორ $\mathfrak{M}_{m,n}$ და $\mathfrak{M}_{m,n}$ სივრცეს, ყოველთვის ვივლისებმეთ, რომ ან $\mathfrak{M}_{m,n} = \mathfrak{M}_{m,n}(F)$ და $\mathfrak{M}_{m,n} = \mathfrak{M}_{m,n}(F)$, ან $\mathfrak{M}_{m,n} = \mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ და $\mathfrak{M}_{m,n} = \mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$.

ვთქვათ $\Omega_{m,n} \in \mathfrak{M}_{m,n}$ და $\Omega_{m,n} \neq 0$. მაშინ არსებობს შებრუნებული $\Omega_{m,n}^{-1}$ კოვარიანტი, რომელიც $\mathfrak{M}_{-m,-n}$ -ს ეკუთვნის. თუ $f \in \mathfrak{M}_{m,n}$, მაშინ ცხადია, რომ $\Omega_{m,n}^{-1} f = f_0 \in \mathfrak{M}_{0,0}$. აქედან გამომდინარეობს

$$f = f_0 \Omega_{m,n} \quad \forall f \in \mathfrak{M}_{m,n} \quad (2.28)$$

ფორმულა, რომელსაც $\mathfrak{M}_{m,n}$ -დან აღებული f კოვარიანტის ფაქტორიზაციას ვუწოდებთ. $\Omega_{m,n}$ კოვარიანტს $\mathfrak{M}_{m,n}$ -დან, რომელიც აკმაყოფილებს $\Omega_{m,n} \neq 0$ პირობას, $\mathfrak{M}_{m,n}$ კლასის დივიზორს ვუწოდებთ, ხოლო f_0 სკალარს $\mathfrak{M}_{0,0}$ -დან — $f \in \mathfrak{M}_{m,n}$ კოვარიანტის პროექციას $\Omega_{m,n}$ დივიზორის მიმართ.

ჩვეულებრივ, $\Omega_{m,n}$ დივიზორად მიზანშეწონილია $\mathfrak{M}_{m,n}(F)$ კლასის უნივერსალური კოვარიანტის აღება. მას $\mathfrak{M}_{m,n}$ კლასის ნორმალურ დივიზორს ვუწოდებთ. ასეთ შემთხვევაში (2.28) ტოლობას $\mathfrak{M}_{m,n}$ -დან აღებული კოვარიანტების ფაქტორიზაციის ნორმალურ ფორმას ვუწოდებთ, ხოლო f_0 -ს — $f \in \mathfrak{M}_{m,n}$ კოვარიანტის ნორმალურ პროექციას.

თუ დავაფიქსირებთ $\Omega_{m,n}$ დივიზორს, მაშინ (2.28) ფორმულა ახორციელებს $\mathfrak{M}_{m,n} \rightarrow \mathfrak{M}_{0,0}$ იზომორფიზმს. უბრუნებლეს ყოველისა ეს ასახვა ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას $\mathfrak{M}_{m,n}$ და $\mathfrak{M}_{0,0}$ სიმრავლეებს შორის, ამასთან ნეიტრალურ ელემენტს $\mathfrak{M}_{m,n}$ -დან შეესაბამება ნეიტრალური ელემენტი $\mathfrak{M}_{0,0}$ -დან. მეორე მხრივ, თუ $f, g \in \mathfrak{M}_{m,n}$ და f_0, g_0 სათანადო პროექციებია $\mathfrak{M}_{0,0}$ -ზე, მაშინ, ცხადია, კოვარიანტების ჯამის პროექცია ტოლია მათი პროექციათა ჯამის.

ჩვენ შეგვიძლია დავასახელოთ $\mathfrak{M}(F)$ -დან აღებული ნორმალური დივიზორების აგების მრავალი ხერხი. აქ მხოლოდ ერთი ასეთი დივიზორის მაგალითს მოვიყვანთ.

ვთქვათ, Ω_F წარმოადგენს F ზედაპირის კოორდინატთა რაიმე

ფიქსირებულ სისტემას. მაშინ ზედაპირის კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემისათვის სრულდება

$$\omega(z) = \frac{\partial z^0}{\partial z} \neq 0, \quad \overline{\omega(z)} = \frac{\partial \bar{z}^0}{\partial \bar{z}} \neq 0, \quad z \in F_z \quad (2.29)$$

პირობები (იხ. § 1, პუნქტი 7). ამას გარდა, ცხადია, რომ $\omega(z)$ და $\overline{\omega(z)}$ წარმოადგენს უნივერსალურ კოვარიანტებს შესაბამისად $\mathcal{S}_{1,0}(F)$ და $\mathcal{S}_{0,1}(F)$ კლასებიდან. მაშინ

$$\omega_{m,n}(z) = \left(\frac{\partial z^0}{\partial z} \right)^m \left(\frac{\partial \bar{z}^0}{\partial \bar{z}} \right)^n \equiv \omega^n(z) \cdot \overline{\omega^n(z)}, \quad z \in F_z, \quad (2.29 \text{ ა})$$

წარმოადგენს უნივერსალურ კოვარიანტს $\mathcal{S}_{m,n}(F)$ -დან. მაშასადამე, $\mathcal{S}_{m,n}$ კლასის ნორმალურ დივიზორად შეგვიძლია ავიღოთ $\omega_{m,n}(m,n)$ -კოვარიანტი. მაშინ $\mathfrak{M}_{m,n}$ -დან f კოვარიანტის ფაქტორიზაციის ფორმულა მიიღებს

$$f = f_0 \omega_{m,n}, \quad f_0 \in \mathfrak{M}_{0,0}, \quad (2.30)$$

სახეს.

10) თუ $f \in \mathcal{S}_{m,n}$, მაშინ გვაქვს

$$\tilde{f} = \left(\frac{1}{2} V \overline{a} \right)^{-(m+n)} \bar{f} \in \mathcal{S}_{-m, -n}. \quad (2.31)$$

$\tilde{f}$ კოვარიანტს f კოვარიანტის კონტრავარიანტი ეუწოდოთ. ცხადია, $f\tilde{f}$ სკალარს წარმოადგენს $\mathcal{S}_{0,0}$ -დან:

$$f\tilde{f} = \left(\frac{1}{2} V \overline{a} \right)^{-(m+n)} |f|^2 \in \mathcal{S}_{0,0}. \quad (2.32)$$

ადვილი დასადგენია, რომ $\tilde{\tilde{f}} = f$, ე. ი. f წარმოადგენს კონტრავარიანტს $\tilde{f}$ -ის მიმართ.

თუ $f, g \in \mathcal{S}_{m,n}$, მაშინ $f\tilde{g} \in \mathcal{S}_{0,0}(F)$. $f\tilde{g}$ -ს ეუწოდოთ $\mathcal{S}_{m,n}$ -ის f და g კოვარიანტების ლოკალური სკალარული ნამრავლი. ვისარგებლებთ აღნიშვნით

$$(f, g)_M = f\tilde{g} = \left(\frac{1}{2} V \overline{a} \right)^{-(m+n)} \bar{f} \bar{g}, \quad M \in F. \quad (2.33)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $(f, g)_M$ -ს გააჩნია სკალარული ნამრავლის ყველა თვისება. კერძოდ, $(f, f)_M \geq 0$, ამასთან ტოლობას ადვილი აქვს მხოლოდ იმ წერტილებში, სადაც $f = 0$.

$\mathcal{W}_{m,n}$ -დან არაუარყოფით

$$\|f\|_M = \sqrt{(f, f)_M} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{a}\right)^{(m+n)/2} \|f\| \geq 0 \quad (2.34)$$

სკალარს f კოვარიანტის ლოკალურ ნორმას ეწოდება. ადვილად დამტკიცდება შემდეგი ფორმულები:

თუ $f, g \in \mathcal{W}_{m,n}$, მაშინ

$$a) \quad \|f+g\|_M \leq \|f\|_M + \|g\|_M, \quad M \in F \quad (2.35)$$

(სამკუთხედის უტოლობა).

$$b) \quad |(f, g)_M| \leq \|f\|_M \|g\|_M, \quad M \in F. \quad (2.36)$$

ამრიგად, $\mathcal{W}_{m,n}$ კლასის კოვარიანტები ლოკალურად ჰილბერტის სივრცეს ქმნის სკალარითა $\mathcal{W}_{0,0}$ ველზე.

ლოკალურად ჰილბერტული $\mathcal{W}_{m,n}(F, A)$ სივრცე ჰილბერტულ სივრცედ გადაიქცევა კომპლექსურ რიცხვთა $\mathcal{F}$ რგოლზე, თუ მასში ორი კოვარიანტული ვექტორის გლობალურ სკალარულ ნამრავლს

$$(f, g) = \int_F (f, g)_M dF, \quad f, g \in \mathcal{W}_{m,n}(F, A), \quad (2.37)$$

ფორმულით განვსაზღვრავთ. ცხადია, იგულისხმება, რომ ეს ინტეგრალი კრებადია. ამისათვის საკმარისია, რომ $\|f\|_M$ და $\|g\|_M$ ლოკალური ნორმები წარმოადგენდეს კვადრატში ინტეგრებად ფუნქციებს.

კოვარიანტის გლობალური ნორმა განსაზღვრულია

$$\|f\|_A = \sqrt{(f, f)_A}, \quad f \in \mathcal{W}_{m,n}(F, A) \quad (2.38)$$

ფორმულით. ადვილად მტკიცდება

$$\|f+g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A, \quad f, g \in \mathcal{W}_{m,n}(F, A), \quad (2.39)$$

$$|(f, g)_A| \leq \|f\|_A \cdot \|g\|_A, \quad f, g \in \mathcal{W}_{m,n}(F, A), \quad (2.40)$$

უტოლობები (2.35) ფორმულისა და კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობების დახმარებით.

ამრიგად, თუ სკალარული ნამრავლი (2.37) ფორმულების საშუალებით არის განსაზღვრული, კოვარიანტები $\mathcal{W}_{m,n}(F, A)$ -დან შეადგენს ჰილბერტულ სივრცეს, რომელსაც $H_{m,n}(F, A)$ -თი აღვნიშნავთ.

11) ვთქვათ $f \in \mathcal{S}_{m,n}(F, A)$ კოვარიანტის $\|f\|_M$ ლოკალური ნორმა უწყვეტია F -ზე. დავუშვათ, რომ F კომპაქტური ზედაპირია. მაშინ f კოვარიანტის C ნორმას განვსაზღვრავთ

$$\|f\|_{C,A} = \max_{M \in F} \|f\|_M, \quad f \in \mathcal{S}_{m,n}(F, A) \quad (2.41)$$

ფორმულის საშუალებით. (2.35) უტოლობების დახმარებით ადვილი დასამტკიცებელია, რომ სრულდება სამკუთხედის უტოლობა

$$\|f+g\|_{C,A} \leq \|f\|_{C,A} + \|g\|_{C,A}, \quad f, g \in \mathcal{S}_{m,n}(F, A). \quad (2.42)$$

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\|f\|_{C,A}$ ნორმას გააჩნია მეტრული-სივრცის ნორმის ყველა თვისება. ამის გამო $\mathcal{S}_{m,n}(F, A)$ კლასის კოვარიანტები შეადგენს ბანახის სივრცეს, რომელსაც $\mathcal{S}_{m,n}(F)$ -ით აღვნიშნავთ. როცა $n=m=0$, კომპაქტურ ზედაპირზე გვექნება უწყვეტი სკალარების სივრცე $\mathcal{S}_{0,0}(F, A)$ -დან, რომელსაც $\mathcal{S}_0(F, A)$ -თი აღვნიშნავთ.

თუ F კომპაქტური ზედაპირია, მაშინ ყოველი $f \in \mathcal{S}_{m,n}(F, A)$ კოვარიანტისათვის არსებობს ისეთი $M_f \in F$ წერტილი, რომ

$$\|f\|_{C,A} = \|f(M_f)\|.$$

12) ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ ტენზორის კომპლექსური კომპონენტები უნივერსალურ კოვარიანტებს წარმოადგენს, ახლა კი პირიქით, ჩვენ ვაჩვენებთ, თუ როგორ შეიძლება კოვარიანტების დახმარებით ტენზორის აგება. ვთქვათ განიხილება F ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების რაიმე A -ოჯახი. p რანგის ყოველი f ტენზორი რაიმე $\mathcal{M}(F)$ მოდულიდან შეიძლება წარმოვიდგინოთ A -დან აღებული კოორდინატთა S_x სისტემის მიმართ

$$f = f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (2.43)$$

სახით, სადაც $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ ტენზორის კომპლექსური კოვარიანტული კომპონენტებია, ხოლო $e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ — მულტიპლიკაციური ტენზორი

$$e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = r^{\alpha_1} \dots \otimes r^{\alpha_p}. \quad (2.44)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს $e_{\beta_1} \dots e_{\beta_p}$ ტენზორზე გავამრავლებთ და გავითვალისწინებთ

$$e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\beta_1 \dots \beta_p} = (r^{\alpha_1} r_{\beta_1}) \dots (r^{\alpha_p} r_{\beta_p}) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots \delta_{\beta_p}^{\alpha_p} \quad (2.44 \text{ ა})$$

ფორმულებს, გვექნება

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = f e_{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (2.44 \text{ ბ})$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში მონაწილეობს f და $e_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ ტენზორების შიგა ნამრავლი.

(2.43) ტოლობის მარჯვენა მხარე შეიცავს 2^p კონფორმულად ინვარიანტულ

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (2.45)$$

შესაკრებს. ვთქვათ

$$m = \delta_1^{\alpha_1} + \dots + \delta_1^{\alpha_p}, \quad n = \delta_2^{\alpha_1} + \dots + \delta_2^{\alpha_p}. \quad (2.46)$$

მაშინ, ცხადია, რომ $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ წარმოადგენს (m, n) -კოვარიანტს $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან, ე. ი.

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathfrak{M}_{m,n}(F, A). \quad (2.47)$$

m და n -ის დაფიქსირებით (ცხადია, $m+n=p$) ადვილად დავრწმუნდებით, რომ p რანგის ყოველ ტენზორს შეესაბამება $\frac{(m+n)!}{m! n!}$ კო-

ვარიანტი $\mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ -დან. მაგალითად, 1-ლი რანგის ტენზორს $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან შეესაბამება ორი— f_1 და f_2 კოვარიანტი, თითო-თითო $\mathfrak{M}_{1,0}$ და $\mathfrak{M}_{0,1}$ -დან. მე-2 რანგის f ტენზორს $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან შეესაბამება თითო კოვარიანტი $f_{11} \in \mathfrak{M}_{2,0}$ და $f_{22} \in \mathfrak{M}_{0,2}$, და აგრეთვე ორი f_{12} , f_{21} კოვარიანტი $\mathfrak{M}_{1,1}$ -დან.

ახლა დავსვათ შეპტუნებული ამოცანა. ვთქვათ გვაქვს $f \in \mathfrak{M}_{m,n}(F, A)$ ($m \geq 0$, $n \geq 0$) კოვარიანტი. ავაგოთ შესაბამისი $p=m+n$ რანგის ტენზორები. დავუშვათ, რომ m და n (2.46) ფორმულებითაა გამოსახული. m და n რიცხვების $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ ინდექსების საშუალებით ასეთი წარმოდგენა არსებობს $\frac{(m+n)!}{m! n!}$ ცალი. მაშასადამე,

$$f e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \quad f \in \mathfrak{M}_{m,n} \quad (2.48)$$

გამოსახულებები კონფორმულად ინვარიანტულია, თუ $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ ინდექსების მნიშვნელობები (2.46) დამოკიდებულებებს აკმაყოფილებს. (2.48) გამოსახულების კონფორმულად ინვარიანტულობა ცხადია, რად-

გან f და $e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ კონტრაგრედიენტული კოვარიანტებია. ეს გამოსახულებები შეადგენს $p = m + n$ რანგის წრფივად დამოუკიდებელ ტენზორებს. ეს ტენზორები ჩვენ ჯერჯერობით განვმარტეთ კოორდინატა სისტემებისათვის A -ოჯახიდან. მაგრამ ისინი (ე. ი. მათი კომპონენტები) ცალსახად განისაზღვრებიან, თუ მოვითხოვთ (2.48) გამოსახულებას ინვარიანტულობას კოორდინატთა ნებისმიერი გარდაქმნების მიმართ.

$$f e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (2.49)$$

ფორმულის საშუალებით $f \in \mathfrak{M}_{-m, -n}(F, A)$ ($m \geq 0, n \geq 0$) კოვარიანტისთვის ანალოგიურად ვაგებთ $p = m + n$ რანგის $\frac{(m+n)!}{m! n!}$ სხვადასხვა ტენზორს $\mathfrak{M}(F)$ -დან. თუ $f \in \mathfrak{M}_{-m, n}(F, A)$ ($m \geq 0, n \geq 0$) ან $f \in \mathfrak{M}_{m, -n}(F, A)$ ($m \geq 0, n \geq 0$), მაშინ შესაბამის ტენზორებს ვაგებთ

$$f e^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \beta_1 \dots \beta_n, \quad f e_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \beta_1 \dots \beta_n \quad (2.50)$$

ფორმულებით. დავაფიქსიროთ ახლა $p = m + n$ რიცხვი და ვცვალოთ m და n , $m \geq 0, n \geq 0$. ავირჩიოთ საცესებით ნებისმიერად $\frac{(m+n)!}{m! n!}$

კოვარიანტი ყოველგვარი $\mathfrak{M}_{m, n}(F, A)$ კლასიდან. ეს კოვარიანტები აღენიშნოთ $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ -თი, სადაც $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ აკმაყოფილებს (2.46) დამოკიდებულებებს. თუ განვიხილავთ m და n -ის, $m + n = p$, ყოველნაირ მნიშვნელობას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთი კოვარიანტების რიცხვი 2^p -ს ტოლია. მაშინ

$$f = f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (2.51)$$

ფორმულით ჩვენ ავაგებთ p რანგის ტენზორს $\mathfrak{M}(F)$ -დან.

ვთქვათ რაიმე A -ოჯახისათვის მოცემულია 2^p კოვარიანტის ერთობლიობა $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან, ამასთან ფიქსირებული m და n რიცხვებისათვის, $m + n = p$, მათ შორის ჩვენ გვაქვს $\frac{(m+n)!}{m! n!}$ სხვადასხვა კო-

ვარიანტი $\mathfrak{M}_{m, n}(F, A)$ -დან. 2^p კოვარიანტის ასეთ კრებულს ვუწოდოთ კოვარიანტების p -ასოციაცია $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან.

(2.51) ფორმულის თანახმად კოვარიანტების ყოველ p -ასოციაციას $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან შეესაბამება p რანგის ტენზორი $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან,

რომლის კომპონენტები კოორდინატთა ნებისმიერი $S_z \in A$ სისტემის მიმართ მოცემული p -ასოციაციის კოვარიანტების ტოლია.

ამრიგად, $\mathfrak{M}(F)$ -დან აღებული p რანგის ტენზორების სიმრავლესა და $\mathfrak{M}(F, A)$ -დან აღებული კოვარიანტების p -ასოციაციებს შორის, სადაც A ზედაპირის კონფორმულად ინვარიანტულ კოორდინატთა სისტემების რაიმე ოჯახია, შესაძლოა დამყარდეს ურთიერთცალსახა თანადობა (2.51) ფორმულის საშუალებით.

13) დაეუშვათ A ზედაპირის იზომეტრულ კოორდინატთა ოჯახია. მაშინ (იხ. VI თავი, § 3)

$$a_{1'1'} = a_{2'2'} \equiv \Lambda > 0, \quad a_{1'2'} = a_{2'1'} = 0. \quad (2.52)$$

მაშასადამე, (2.18 ა, ბ) ფორმულების თანახმად

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \Lambda, \quad (2.53)$$

$$a^{11} = a^{22} = 0, \quad a^{12} = a^{21} = \frac{2}{\Lambda}, \quad (2.54)$$

$$a = \Lambda^2, \quad \sqrt{a} = \Lambda > 0. \quad (2.55)$$

ამის გამო გვაქვს

$$r^1 = 2\Lambda^{-1} r_2 = 2\Lambda^{-1} \bar{r}_1, \quad r^2 = 2\Lambda^{-1} r_1 = 2\Lambda^{-1} \bar{r}_2, \quad (2.56 \text{ ა})$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \Lambda r^2 = \frac{1}{2} \Lambda \bar{r}^1, \quad r_2 = \frac{1}{2} \Lambda r^1 = 2\Lambda^{-1} \bar{r}^2 \quad (2.56 \text{ ბ})$$

დამოკიდებულებები, რომლებიც ზოგადი სახით შემდეგნაირად შეიძლება ჩავეწეროთ:

$$r^a = 2\Lambda^{-1} r_{a*} = 2\Lambda^{-1} \bar{r}_a, \quad r_a = \frac{1}{2} \Lambda r^{a*} = \frac{1}{2} \Lambda \bar{r}^a, \quad (2.56).$$

$$a^* = \frac{1}{2} (3 - (-1)^a).$$

ახლა, ცხადია, რომ გვაქვს

$$e^{a_1 \dots a_p} = 2^p \Lambda^{-p} e_{a_1^* \dots a_p^*} = 2^p \Lambda^{-p} \bar{e}_{a_1 \dots a_p}, \quad (2.57 \text{ ა})$$

$$e_{a_1 \dots a_p} = 2^{-p} \Lambda^p e^{a_1^* \dots a_p^*} = 2^{-p} \Lambda^p \bar{e}^{a_1 \dots a_p} \quad (2.57 \text{ ბ})$$

ფორმულები. აგრეთვე

$$r_a r_a = (r_a)^2 = 0, \quad r^a r^a = (r^a)^2 = 0, \quad (2.58)$$

ე. ი. ზედაპირის ყოველი იზომეტრული კოორდინატთა სისტემის სა-
ბაზისო ვექტორ-ფუნქციები იზოტროპულ ვექტორებს წარმოადგენს.
მულტიპლიკაციური ტენზორების გამრავლების წესის გამოყენებით,
(2.57) ფორმულების თანახმად, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\beta_1 \dots \beta_p} &= (r_{\alpha_1} r_{\beta_1}) \dots (r_{\alpha_p} r_{\beta_p}) = \\ &= 2^{-p} \Lambda^p \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{\beta_p}, \end{aligned} \quad (2.59 \text{ ა})$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e^{\beta_1 \dots \beta_p} &= (r^{\alpha_1} r^{\beta_1}) \dots (r^{\alpha_p} r^{\beta_p}) = \\ &= 2^p \Lambda^{-p} \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots \delta_{\beta_p}^{\alpha_p}, \end{aligned} \quad (2.59 \text{ ბ})$$

$$e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} e^{\beta_1 \dots \beta_p} = (r_{\alpha_1} r^{\beta_1}) \dots (r_{\alpha_p} r^{\beta_p}) = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{\beta_p}. \quad (2.59 \text{ გ})$$

თუ ვისარგებლებთ (2.57 ა) ფორმულით, (2.51) ტენზორი, როცა
 $f \in \mathcal{F}_{m,n}(F, A)$, $m+n=p$, შეგვიძლია

$$f e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \tilde{f} e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (2.60)$$

სახითაც ჩავწერთ, სადაც $\tilde{f}$ წარმოადგენს $f \in \mathcal{F}_{m,n}$ კოვარიანტის
შესაბამის კონტრავარიანტს.

§ 8. კოვარიანტების გაწარმოება

ვითყვი, რომ f კოვარიანტი $\mathcal{F}_{m,n}$ -დან ეკუთვნის C_k , $k \geq 0$,
კლასს, თუ კოორდინატთა ყოველი S_z სისტემისათვის განსახილავი
ოჯახიდან მისი კომპონენტი $f(z) \in C_k(F_z)$. სიმბოლურად ამას ჩავწერთ
ასე $f \in \mathcal{F}_{m,n}^{(k)}$.

(2.11) ფორმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ f კოვა-
რიანტი $\mathcal{F}_{m,n}^{(k)}$ -ს ეკუთვნის, თუ მისი კომპონენტი $f(z) \in C_k(F_z)$ კოორ-
დინატთა ერთი ნებისმიერი ფიქსირებული S_z სისტემისათვის კონფორ-
მულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების ყოველი კლასიდან. თუ
 $f \in \mathcal{F}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$, მაშინ $\partial_z f$ -ით აღვნიშნავთ ისეთ $\mathcal{F}(F_z) \rightarrow \mathcal{F}(F_z)$

ასახვას, რომელიც კოორდინატთა S_z სისტემაში $\partial_z f(z)$ კერძო წარმოებულთა გამოისახება. შეგახსენებთ, რომ $f \in \mathcal{W}_{m,n}^{(k)}$ ჩანაწერი ნიშნავს, რომ f კოვარიანტი ან რაიმე $\mathcal{W}_{m,n}^{(k)}(F, A)$ კლასის ეკუთვნის, ან უნივერსალურ კოვარიანტს წარმოადგენს $\mathcal{W}_{m,n}^{(k)}(F)$ -დან.

1. კოვარიანტების კოვარიანტული წარმოებულები. ეთქვას, $f \in \mathcal{W}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$. მაშინ (2.11) ფორმულის თანახმად კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა S_z და $S_{\bar{z}}$ სისტემებისათვის გვაქვს

$$\widehat{f}(\bar{z}) = f(z) \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^n. \quad (3.1)$$

რადგან $\bar{z}(z)$ z -ის ანალიზური ფუნქციაა, ამიტომ (3.1)-ის ორივე მხარის გაწარმოებით $\bar{z}$ -ის მიმართ, გვექნება

$$\partial_{\bar{z}} \widehat{f}(\bar{z}) = \partial_z f(z) \frac{dz}{d\bar{z}} \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^n \quad \forall S_z \sim S_{\bar{z}}. \quad (3.1 \text{ ა})$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ, თუ $f \in \mathcal{W}_{m,n}^{(k)}$, მაშინ $\partial_z f$ კერძო წარმოებული კოვარიანტს წარმოადგენს $\mathcal{W}_{1,n-1}^{(k-1)}$ -დან. ეს კოვარიანტი აღენიშნოთ $\nabla_1 f$ სიმბოლოთი და მას f კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებული ეუწოდოთ $z = z^1$ კოორდინატის მიმართ. ანალოგიურად, თუ $f \in \mathcal{W}_{m,0}^{(k)}$, მაშინ $\partial_z f$ წარმოადგენს კოვარიანტს $\mathcal{W}_{m,-1}^{(k-1)}$ -დან, რომელსაც $\nabla_2 f$ -ით აღენიშნავთ და f -ის კოვარიანტულ წარმოებულს ეუწოდებთ $\bar{z} = z^2$ -ის მიმართ. ამრიგად, ზემოთ განხილულ შემთხვევებში კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებულები ემთხვევა კერძო წარმოებულებს, რომლებიც აგრეთვე კოვარიანტებს წარმოადგენენ. ქვემოთ ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ კერძო წარმოებულების ეს თვისება ზოგად შემთხვევაში სამართლიანი არ არის.

მართლაც, თუ $f \in \mathcal{W}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$, მაშინ, როცა $m > 0$, $n \geq 0$ (შესაბამისად $m \geq 0$, $n > 0$) $\partial_z f$ (შესაბამისად $\partial_{\bar{z}} f$) კერძო წარმოებული კოვარიანტს არ წარმოადგენს. ეს ადვილად გამომდინარეობს (2.11) ფორმულებიდან. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავაწარმოებთ $\bar{z}$ და $\bar{z}$ -ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\partial_{\bar{z}} \widehat{f} = \partial_z f \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^{m+1} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} \right)^n + m f \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^{m-1} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} \right)^n \frac{d^2 z}{d\bar{z}^2},$$

$$\partial_{\bar{z}} \widehat{f} = \partial_{\bar{z}} f \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^m \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} \right)^{n+1} + n f \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right)^m \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}} \right)^{n-1} \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{z}^2}.$$

ამ ტოლობებიდან, შესაბამისად $m > 0$ და $n > 0$ შემთხვევებში, უშუალოდ გამოდინარეობს ჩვენი დებულების სამართლიანობა, ე. ი. $\partial_z f$ და $\partial_{\bar{z}} f$ კოვარიანტებს არ წარმოადგენს.

ზემოთ ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ მეტრული კვადრატული ფორმის a დისკრიმინანტი უნივერსალურ კოვარიანტს წარმოადგენს $\mathcal{H}_{2,2}(F)$ -დან. მაშასადამე, $\sqrt{a} \in \mathcal{H}_{1,1}(F)$, ამასთან $\sqrt{a} > 0$ კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემისათვის.

გვქვიათ, $f \in \mathcal{H}_{m,n}^{(k)}$. რადგან $(\sqrt{a})^{-m} \in \mathcal{H}_{-m, -m}(F)$, ამიტომ გვაქვს

$$(\sqrt{a})^{-m} f \in \mathcal{H}_{0,n-m}^{(k)}.$$

მაშასადამე, (3.1 ა) ფორმულის თანახმად $\partial_z [(\sqrt{a})^{-m} f] \in \mathcal{H}_{1,n-m}^{(k-1)}$. რადგან $(\sqrt{a})^m \in \mathcal{H}_{m,m}(F)$, ამიტომ

$$(\sqrt{a})^m \partial_z [(\sqrt{a})^{-m} f] \in \mathcal{H}_{m+1,n}^{(k-1)}. \quad (3.2 \text{ ა})$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ თუ $f \in \mathcal{H}_{m,n}^{(k)}$, მაშინ

$$(\sqrt{a})^n \partial_{\bar{z}} [(\sqrt{a})^{-n} f] \in \mathcal{H}_{m,n+1}^{(k-1)}. \quad (3.2 \text{ ბ})$$

აღვნიშნოთ $m = m_1$, $n = m_2$. მაშინ (3.2 ა, ბ)-ს თანახმად გვაქვს: თუ $f \in \mathcal{H}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$, მაშინ

$$\nabla_a f \equiv (\sqrt{a})^{m_a} \partial_a [(\sqrt{a})^{-m_a} f] \in \mathcal{H}_{m_1+\delta_1^a, m_2+\delta_2^a}^{(k-1)}. \quad (3.3)$$

ცხადია,

$$\nabla_a f = \partial_a f - m_a f \partial_a \ln \sqrt{a} \quad (3.3 \text{ ა})$$

$\nabla_a f$ -ს ვუწოდოთ $\mathcal{H}_{m,n}^{(k)}$ -დან f კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებული z^a კოორდინატის მიმართ.

ხშირად $\nabla_1 f$ და $\nabla_2 f$ -ს აღვნიშნავთ შესაბამისად $\nabla_z f$ და $\nabla_{\bar{z}} f$ -ით. მაშასადამე, თუ $f \in \mathcal{H}_{m,n}(F)$, მაშინ

$$\nabla_z f = \partial_z f - m f \partial_z \ln \sqrt{a}, \quad (3.3 \text{ ბ})$$

$$\nabla_{\bar{z}} f = \partial_{\bar{z}} f - n f \partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a} \quad (3.3 \text{ გ})$$

ამრიგად, კოვარიანტებზე კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციები ახორციელებს

$$\nabla_a f : \mathcal{H}_{m,n}^{(k)} \rightarrow \mathcal{H}_{m+\delta_1^a, n+\delta_2^a}^{(k-1)} \quad (3.4)$$

ახახებს.

(3.3 ა) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ f კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებული მხოლოდ f -ით გამოისახება. კოვარიანტის ეს თვისება არსებითად განსხვავდება ტენზორის კომპონენტების თვისებებისაგან ნამდვილი კოორდინატების მიმართ. ნულზე მაღალი რანგის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები მისი ყველა კომპონენტით გამოისახება.

კოვარიანტების აღნიშნული თვისება ავლენს კიდევ ერთ მნიშვნელოვან მახასიათებელს, რომელიც გვიჩვენებს, რომ კოვარიანტებს (მაშასადამე, ტენზორის კომპლექსურ კომპონენტებს) გააჩნია ინდივიდუალობა, რაც გვაძლევს საშუალებას განვიზილოთ ისინი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად როგორც ალგებრული ოპერაციების, ასევე კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციების გამოყენებისას.

2. კოვარიანტების კოვარიანტულ წარმოებულთა თვისებები. ახლა აღვნიშნოთ კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებულების რამდენიმე ადვილად დასამტკიცებელი თვისება.

1) თუ $f \in \mathcal{S}_{0,0}$, მაშინ

$$\nabla_a f = \partial_a f. \quad (3.5)$$

2) თუ f და $g \in \mathcal{S}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$, მაშინ

$$\nabla_a (f+g) = \nabla_a f + \nabla_a g. \quad (3.6)$$

3) თუ f და $g \in C_k$ კლასის ნებისმიერი კოვარიანტებია $\mathcal{S}(F)$ -დან, მაშინ

$$\nabla_a (fg) = f \nabla_a g + g \nabla_a f. \quad (3.7)$$

4) თუ m ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მაშინ

$$\nabla_a (V^a)^m = 0. \quad (3.8)$$

მაშასადამე, ნებისმიერი f კოვარიანტისათვის

$$\nabla_a ((V^a)^m f) = (V^a)^m \nabla_a f. \quad (3.9)$$

5) თუ F გაუსის ნულოვანი სიმრუდის ზედაპირია, რომელსაც ტორსს უწოდებენ, მაშინ მასზე არსებობს კოორდინატთა დეკარტის სისტემა, რომლის მიმართაც $a=1$. მაშასადამე, ტორსებზე დეკარტის კოორდინატების მიმართ ნებისმიერი f კოვარიანტისათვის

$$\nabla_a f = \partial_a f. \quad (3.10)$$

აქ უნდა აღინიშნოს, რომ (3.10) ფორმულას ადგილი აქვს მხოლოდ ტორსებისათვის, რადგან მხოლოდ მათზე არსებობს დეკარტის კოორდინატთა სისტემა (იხ. VI თავი, § 5).

6) თუ $f \in \mathcal{G}_{m,n}$, მაშინ $f \in \mathcal{G}_{n,m}$ ამიტომ

$$\overline{\nabla_1 f} = (\sqrt{a})^m \partial_{\bar{z}} [(\sqrt{a})^{-m} \bar{f}] = \nabla_{\bar{z}} \bar{f}, \quad (3.11 \text{ ა})$$

$$\overline{\nabla_z f} = (\sqrt{a})^n \partial_{\bar{z}} [(\sqrt{a})^{-n} \bar{f}] = \nabla_{\bar{z}} \bar{f}. \quad (3.11 \text{ ბ})$$

მაშასადამე

$$\overline{\nabla_a f} = \nabla_a \bar{f}, \quad a^* = \frac{1}{2} (3 - (-1)^a). \quad (3.11)$$

3. კოვარიანტის კონტრავარიანტული წარმომადგენლები. ლაპლასის ოპერატორი კოვარიანტებისათვის. განვმარტოთ კოვარიანტის კონტრავარიანტული წარმომადგენლები

$$\nabla^a f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \nabla_a \cdot f, \quad a^* = \frac{1}{2} (3 - (-1)^a), \quad (3.12)$$

ფორმულებით. ამრიგად,

$$\nabla^1 f \equiv \nabla^{\bar{z}} f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \nabla_{\bar{z}} f, \quad \nabla^2 f \equiv \nabla^z f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \nabla_z f. \quad (3.12 \text{ ა})$$

თუ $f \in \mathcal{G}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$, მაშინ გვაქვს

$$\nabla^a f \in \mathcal{G}_{m-\delta_a^1, n-\delta_a^2}^{(k-1)}, \quad (3.12 \text{ ბ})$$

თუ $f \in \mathcal{G}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 2$, მაშინ (3.3) და (3.12 ბ) ფორმულების საშუალებით აღვიღოთ დავამტკიცებთ, რომ

$$\nabla^a \nabla_a f \in \mathcal{G}_{m,n}^{(k-2)} \quad (a = 1, 2). \quad (3.13)$$

შემოვიყვანოთ ლაპლასის ოპერატორი კოვარიანტებისათვის შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\nabla^2 f = \nabla^a \nabla_a f = 2 (\sqrt{a})^{-1} (\nabla_z \nabla_{\bar{z}} f + \nabla_{\bar{z}} \nabla_z f). \quad (3.14)$$

(3.13)-ის თანახმად გვაქვს

$$\nabla^2 f = \nabla^a \nabla_a f \in \mathcal{G}_{m,n}^{(k-2)}, \quad \forall f \in \mathcal{G}_{m,n}^{(k)}. \quad (3.14 \text{ ა})$$

ამრიგად, ლაპლასის ოპერატორი $\nabla^2 f$ ახორციელებს $\mathcal{G}_{m,n} \rightarrow \mathcal{G}_{m,n}$ ასახვას.

ვთქვათ $f \in \mathcal{G}_{0,0}^{(k)}$, $k \geq 1$. მაშინ (3.3)-ის თანახმად

$$\nabla_a f = \partial_a f \in \mathcal{G}_{0,0}^{(k-1)}. \quad (3.15)$$

ახლა, (3.15) და (3.12 ა)-ს ძალით, გვაქვს

$$\nabla^1 \nabla_1 f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \nabla_2 \nabla_1 f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \in \mathcal{G}_{0,0}^{(k-2)}, \quad (3.16 \text{ ა})$$

$$\nabla^2 \nabla_2 f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \nabla_2 \nabla_1 f = 2 (\sqrt{a})^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \in \mathcal{G}_{0,0}^{(k-2)}. \quad (3.16 \text{ ბ})$$

ამის გამო $\mathcal{G}_{0,0}^{(k)}$ -დან, $k \geq 2$, f სკალარის ლაპლასის ოპერატორი გამოისახება

$$\nabla^2 f = \nabla^a \nabla_a f = 4 (\sqrt{a})^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Delta f \quad (3.17)$$

ფორმულით, სადაც Δ ლაპლასის ოპერატორია დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (3.17 \text{ ა})$$

თუ $f \in \mathcal{G}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 2$, მაშინ (3.3 ბ, გ) და (3.12 ა) ფორმულების საშუალებით გამოვიყენებ

$$\begin{aligned} \Delta_1 \nabla_2 f &\equiv \nabla_z \nabla_{\bar{z}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - n (\partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}) \partial_z f - \\ &- m (\partial_z \ln \sqrt{a}) \partial_{\bar{z}} f + (mn |\partial_z \ln \sqrt{a}|^2 - n \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}) f, \\ \nabla_2 \nabla_1 &\equiv \nabla_{\bar{z}} \nabla_z = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - m (\partial_z \ln \sqrt{a}) \partial_{\bar{z}} f - \\ &- n (\partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}) \partial_z f + (mn |\partial_z \ln \sqrt{a}|^2 - m \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}) f \end{aligned}$$

ტოლობებს. თუ პირველ მათგანს გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 f - \nabla_2 \nabla_1 f &\equiv \nabla_z \nabla_{\bar{z}} f - \nabla_{\bar{z}} \nabla_z f = \\ &= (m-n) f \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ამრიგად, საზოგადოდ,

$$\nabla_1 \nabla_2 f \neq \nabla_2 \nabla_1 f.$$

ტოლობა

$$\nabla_1 \nabla_2 f = \nabla_2 \nabla_1 f \quad (3.19)$$

სრულდება მხოლოდ ორ შემთხვევაში: 1) გაუსის ნულოვანი სიმრუდის ზედაპირებზე, ე. ი. ტორსებზე ნებისმიერი კოვარიანტისათვის დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ და 2) ნებისმიერ ზედაპირზე მხოლოდ

$$f \in \mathcal{F}_{m,n}^{(k)}, \quad k \geq 2$$

სახის კოვარიანტებისათვის. ახლა აღვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი $f \in \mathcal{F}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 2$ კოვარიანტის ლაპლასის ოპერატორი გამოი-სახება

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla^a \nabla_a f = (\sqrt{a})^{-1} \{ \Delta f - 4m (\partial_z \ln \sqrt{a}) \partial_z f - \\ &- 4n (\partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}) \partial_{\bar{z}} f + (4mn |\partial_z \ln \sqrt{a}|^2 - \\ &- 2(m+n) \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \sqrt{a}) f \} \end{aligned} \quad (3.20)$$

ფორმულით.

ტორსებზე დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ (3.20) ფორმულა ლებულობს

$$\nabla^2 f \equiv \nabla^a \nabla_a f = \Delta f. \quad (3.21)$$

სახეს.

$f \in \mathcal{F}_{m,n}(F)$ სახის კოვარიანტებისათვის (3.20) ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\nabla^2 f \equiv \nabla^a \nabla_a f = (\sqrt{a})^{m-1} \Delta [(\sqrt{a})^{-m} f] \quad (3.22)$$

სახით.

თუ A წარმოადგენს ზედაპირის იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემების ოჯახს, მაშინ ყოველი $S_i \in A$ -თვის გაუსის განტოლებას აქვს

$$\frac{2}{\Lambda} \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial z \partial \bar{z}} = -K, \quad \Lambda = \sqrt{a}, \quad (3.23)$$

სახე (იხ. VI თავი, § 3, პუნქტი 7), სადაც K ზედაპირის გაუსის სიმრუდეა. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (3.18) და (3.20) ფორმულები

$$\nabla_z \nabla_{\bar{z}} f - \nabla_{\bar{z}} \nabla_z f = \frac{1}{2} (n-m) \Lambda K, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \Lambda^{-1} \{ \Delta f - 4m \partial_z \ln \Lambda \partial_{\bar{z}} f - 4n \partial_{\bar{z}} \ln \Lambda \partial_z f + \\ &+ (4mn |\partial_z \ln \Lambda|^2 + (m+n) \Lambda K) f \} \end{aligned} \quad (3.25)$$

სახეს ლებულობს.

4. კავშირი კოვარიანტების კოვარიანტულ წარმოებულებსა და ტენზორის კომპლექსური კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს შორის. ახლა საინტერესოა გამოვარკვიოთ რა კავშირში იმყოფება კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებულები და ტენზორის კომპლექსური კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები გაუსის კომპლექსური კოორდინატების მიმართ.

ზოგად შემთხვევაში, როცა A ზედაპირის კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა სისტემებია ნებისმიერი ოქახია, კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებული არ ემთხვევა ტენზორის შესაბამისი კომპონენტის კოვარიანტულ წარმოებულს, მაგრამ ჩვენ ქვემოთ დავრწმუნდებით. რომ იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემების მიმართ კოვარიანტის კოვარიანტული წარმოებულები ემთხვევა ზედაპირის შესაბამისი ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს.

შენოვილოთ ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის კომპლექსური სიმბოლოები

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma} = \Gamma_{\gamma}^{\alpha} \partial_{\alpha} \Gamma_{\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta, \gamma}^{\lambda} = \Gamma_{\gamma}^{\lambda} \partial_{\alpha} \Gamma_{\beta}. \quad (3.26)$$

ცხადია,

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma} = a_{\gamma\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = a^{\lambda\gamma} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma}. \quad (3.26 \text{ ა})$$

ახლა ქრისტოფელის კომპლექსური $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ სიმბოლოები გამოვსახოთ ნამდვილი $\Gamma_{\alpha, \beta, \lambda}^{\lambda'}$ სიმბოლოებით. გვაქვს

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} &= r^{\lambda'} D_{\lambda'}^{\lambda} D_{\alpha}^{\alpha'} \partial_{\alpha'} (r_{\beta}, D_{\beta}^{\beta'}) = \Gamma_{\alpha, \beta, \lambda'}^{\alpha'} D_{\alpha}^{\alpha'} D_{\beta}^{\beta'} D_{\lambda'}^{\lambda} + \\ &+ \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial z^{\alpha} \partial z^{\beta}} D_{\beta}^{\lambda'}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

განვმარტოთ ∇ (F)-დან აღებული 1-ლი რანგის f_{β} კოვარიანტული ტენზორის კომპლექსური კოვარიანტული $\Delta_{\alpha} f_{\beta}$ წარმოებული ნამდვილი კოვარიანტული $\nabla_{\alpha} f_{\beta}$ წარმოებულებით

$$\nabla_{\alpha} f_{\beta} = \nabla_{\alpha'} f_{\beta}, D_{\alpha}^{\alpha'} D_{\beta}^{\beta'} \left(D_{\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha}}, D_{\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \right) \quad (3.28)$$

ფორმულის მიხედვით. რადგან $\nabla_{\alpha'} f_{\beta} = \partial_{\alpha'} f_{\beta} - \Gamma_{\alpha', \beta, \lambda'}^{\lambda} f_{\lambda}$, ამატომ გვაქვს

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} f_{\beta} &= (\partial_{\alpha'} f_{\beta} - \Gamma_{\alpha', \beta, \lambda'}^{\lambda} f_{\lambda}) D_{\alpha}^{\alpha'} D_{\beta}^{\beta'} = D_{\alpha}^{\alpha'} \partial_{\alpha'} (f_{\beta}, D_{\beta}^{\beta'}) - \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial z^{\alpha} \partial z^{\beta}} f_{\beta} - \\ &- \Gamma_{\alpha, \beta, \lambda'}^{\alpha'} D_{\alpha}^{\alpha'} D_{\beta}^{\beta'} f_{\lambda} = \partial_{\alpha} f_{\beta} - \left[\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial z^{\alpha} \partial z^{\beta}} D_{\beta}^{\lambda'} + \Gamma_{\alpha, \beta, \lambda'}^{\alpha'} D_{\alpha}^{\alpha'} D_{\beta}^{\beta'} D_{\lambda'}^{\lambda} \right] f_{\lambda} \end{aligned}$$

ტოლობა, რომელსაც (3.27)-ის თანახმად ჩაეწეროთ

$$\nabla_a f_\beta = \partial_a f_\beta - \Gamma_{a\beta}^\lambda f_\lambda \quad (3.29)$$

სახით. ეს ფორმულა გამოსახავს $\mathcal{F}(F)$ -დან აღებული 1-ლი რანგის ტენზორის კომპლექსური კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს გაუსის კომპლექსური z^α პარამეტრების მიმართ. ქვემოთ ამ ფორმულას ჩვენ განვაზოგადებთ ნებისმიერი რანგის ტენზორებისათვის. ჯერ დაეწეროთ

$$\nabla_a f^\beta = \partial_a f^\beta + \Gamma_{a\lambda}^\beta f^\lambda \quad (3.30)$$

ფორმულა, რომელიც $\mathcal{F}(F)$ -დან აღებული 1-ლი რანგის ტენზორის კომპლექსური კონტრავარიანტული კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს გამოსახავს გაუსის კომპლექსური პარამეტრების მიმართ.

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\mathcal{F}(F)$ -დან აღებული ნებისმიერი (p, q) -ტენზორის კომპლექსური კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულების ზოგად ფორმულას გაუსის კომპლექსური z^α პარამეტრების მიმართ აქვს სახე

$$\begin{aligned} \nabla_a f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = & \partial_a f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - \Gamma_{a\alpha_1}^\lambda f_{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - \dots - \\ & - \Gamma_{a\alpha_p}^\lambda f_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}^{\beta_1 \dots \beta_q} + \Gamma_{a\lambda}^{\beta_1} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\lambda \beta_2 \dots \beta_q} + \dots + \Gamma_{a\lambda}^{\beta_q} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_{q-1} \lambda}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

ცხადია, $\nabla_a f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ წარმოადგენს $(p+1, q)$ ტენზორს $\mathcal{F}(F)$ -დან. ვთქვათ, A არის F ზედაპირის კოორდინატთა იზომეტრული სისტემების ოჯახი. თუ კოორდინატთა სისტემა $S_z \in A$, მაშინ (VI, 3.42 ვ) ფორმულის თანახმად ქრისტოფელის მე-2 გვარის კომპლექსური სიმბოლოები გამოისახება

$$\Gamma_{a\beta}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\alpha \partial_a \ln \Lambda \quad (3.32)$$

ფორმულებით. თუ ამ გამოსახულებებს (3.31) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შევიტანთ, გექვნება

$$\begin{aligned} \nabla_a f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = & \partial_a f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - (\delta_{\alpha_2}^\alpha f_{\alpha_2 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} + \dots + \delta_{\alpha_p}^\alpha f_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}^{\beta_1 \dots \beta_q} - \\ & - \delta_{\alpha_1}^\alpha f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_2 \dots \beta_q} - \dots - \delta_{\alpha_p}^\alpha f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_{q-1} \alpha}) \partial_a \ln \Lambda. \end{aligned} \quad (3.33)$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში ფრჩხილებს შიგნით მხოლოდ ის წევრებია ნულისაგან განსხვავებული, რომელთა $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ ინდექსები α -ს ტოლია. ამიტომ (3.33) ტოლობა შეიძლება

$$\nabla_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \partial_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - [\delta_{\alpha_1}^{\alpha} + \dots + \delta_{\alpha_p}^{\alpha} - (\delta_{\alpha}^{\beta_1} + \dots + \delta_{\alpha}^{\beta_q})] f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} \partial_{\alpha} \ln \Lambda$$

ან

$$\nabla_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \partial_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - m_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} \partial_{\alpha} \ln \Lambda \quad (3.34)$$

სახით ჩაწეროთ, სადაც

$$m_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\alpha_1} + \dots + \delta_{\alpha}^{\alpha_p} - (\delta_{\alpha}^{\beta_1} + \dots + \delta_{\alpha}^{\beta_q}), \quad (3.35)$$

(3.34) ფორმულა ჩაწეროთ

$$\nabla_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \Lambda^{-m_{\alpha}} \partial_{\alpha} (\Lambda^{m_{\alpha}} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}) \quad (3.36)$$

საბოლოო. ეს ფორმულები გამოსახავს ტენზორის კომპლექსური კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს ზედაპირის ნებისმიერ იზო-მეტრულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

მაგრამ $f_{\alpha_2 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ წარმოადგენს კოვარიანტს $\mathcal{F}_{m_1 m_2}(F)$ -დან. თუ მას f -ით აღვნიშნავთ, (3.36) ფორმულა ჩაიწერება

$$\nabla_{\alpha} f = \Lambda^{m_{\alpha}} \partial_{\alpha} (\Lambda^{-m_{\alpha}} f). \quad (3.37)$$

სახით. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ტენზორის კომპლექსური კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები იზომეტრული კოორდინატების მიმართ ემთხვევა ზედაპირის შესაბამისი კოვარიანტის კოვარიანტულ წარმოებულებს.

ამრიგად, ტენზორის კომპლექსურ კომპონენტებს ზედაპირის იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემაში, განსხვავებით ნამდვილი კომპონენტებისაგან, გააჩნია მეტად მნიშვნელოვანი თვისებები: უპირველეს ყოვლისა, ტენზორის ასეთი კომპონენტი შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც დამოუკიდებელი ობიექტი კოვარიანტული გაწარმოების მიმართ; მასზე კოვარიანტული წარმოებულის (3.36)-ით გამოსახული ოპერაციის გამოყენებით ვლტებულობთ ერთი რანგით მაღალი ტენზორის კომპლექსურ კომპონენტს. ამას გარდა, ტენზორის კომპლექსური კომპონენტე-

ბის კოვარიანტული წარმოებულები კომპლექსური იზომეტრული კოორდინატების მიმართ ეძთხვევა შესაბამისი კოვარიანტის კოვარიანტულ წარმოებულებს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ეს თვისებები სამართლიანი არ არის ზედაპირის სხვა კოორდინატთა სისტემების მიმართ, ამიტომ იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემებს აქვს რიგი უპირატესობებისა სხვა კოორდინატთა სისტემებთან შედარებით.

§ 4. კოში—რიმანის განტოლებები კოვარიანტებისათვის.
ანალიზური და განზოგადებული ანალიზური კოვარიანტები.
კოვარიანტების ფაქტორიზაცია

1. კოში — რიმანის განტოლების ანალოგი კოვარიანტებისათვის. ანალიზური კოვარიანტები. $f \in \mathcal{E}_{m,n}^{(k)}$, $k \geq 1$, კოვარიანტებისათვის კოში—რიმანის განტოლების ანალოგს წარმოადგენს

$$\nabla_{\bar{z}} f = (\sqrt{a})^n \partial_{\bar{z}} [(\sqrt{a})^{-n} f] = 0 \quad (4.1)$$

განტოლება. თუ f სკალარია $\mathcal{E}_{0,0}^{(k)}$ -დან, $k \geq 1$, მაშინ კოში—რიმანის განტოლებას კომპლექსური ფორმით ექნება

$$\partial_{\bar{z}} f = 0 \quad (4.2)$$

სახე. მაშასადამე, f ანალიზური ფუნქციაა z -ისა. z -ის შეცვლისას ახალი კონფორმულად ეკვივალენტური $\tilde{z}$ კოორდინატით, (4.2) განტოლება გადავა

$$\partial_{\bar{z}} \tilde{f} = 0, \quad \tilde{f}(\tilde{z}) = f(z(\tilde{z})), \quad (4.2 \text{ ა})$$

განტოლებაში. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია, რომელიც კოში—რიმანის განტოლებას აკმაყოფილებს ერთი რომელიმე ფიქსირებული კოორდინატთა S_z სისტემის მიმართ, იმავე განტოლებას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი სხვა კონფორმულად ეკვივალენტური კოორდინატთა $S_{\tilde{z}}$ სისტემის მიმართაც.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, სკალარი $\mathcal{E}_{0,0}$ -დან, რომელიც ანალიზური ფუნქციას წარმოადგენს რაიმე კომპლექსური z პარამეტრის მიმართ, ანალიზური იქნება სხვა ნებისმიერი კონფორმულად ეკვივალენტური $\tilde{z}$ პარამეტრის მიმართაც. ასეთ ფუნქციებს ზედაპირზე კონფორმულად ეკვივალენტური სისტემების A კლასის შესაბამის ანალიზური ფუნქციებს ვუწოდებთ.

A კლასის ანალიზურ ფუნქციათა სიმრავლე F ზედაპირზე აღენიშნოთ $A_0(F, A)$ -თი.

(4.1) განტოლებიდან გამოდინარეობს, რომ

$$(\sqrt{a})^{-n} f = \Phi(z), \quad (4.3)$$

სადაც Φ წარმოადგენს z -ის ანალიზურ ფუნქციას F_z -ში კონფორმულად ეკვივალენტურ კოორდინატთა სისტემების განსახილავი ოჯახიდან აღებული S_z სისტემის მიმართ. მაშასადამე, კოვარიანტს $\mathcal{F}_{m:n}(F, A)$ -დან, რომელიც აქმაყოფილებს კოში-რიმანის (4.1) განტოლებას ზედაპირზე, აქვს

$$f = (\sqrt{a})^n \Phi(z), \quad \Phi \in A(F), \quad (4.3 \text{ ა})$$

სახე. რადგან $f \in \mathcal{F}_{m:n}$ და $(\sqrt{a})^n \in \mathcal{F}_{n:n}$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამოდინარეობს, რომ $\Phi \in \mathcal{F}_{m-n,0}(F, A)$. ამის გამო z -ის შეცვლისას კონფორმულად ეკვივალენტური ახალი $\tilde{z}$ პარამეტრით, გვექნება

$$\widehat{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi(z) \left(\frac{dz}{d\tilde{z}} \right)^{m-n} \quad (4.4)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს $\tilde{z}$ -ით გავწარმოებთ და გავითვალისწინებთ $\partial_{\tilde{z}} \Phi = 0$ ტოლობას, მივიღებთ $\partial_{\tilde{z}} \widehat{\Phi} = 0$.

ამრიგად, Φ კოვარიანტი ნებისმიერი კოორდინატთა S_z სისტემისთვის A ოჯახიდან წარმოადგენს შესაბამისი კომპლექსური პარამეტრის ანალიზურ ფუნქციას. ასეთ კოვარიანტებს ანალიზურს ვუწოდებთ. $\mathcal{F}_{m:n}(F, A)$ კლასის ანალიზურ კოვარიანტთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $A_m(F, A)$ -თი ან უბრალოდ A_m -ით.

ნებისმიერი $A_m(F, A)$ კლასის ანალიზური კოვარიანტის მაგალითები აღვიღად აიგება. ვთქვათ $\Phi(z)$ z -ის ანალიზური ფუნქციაა F_z არეში კოორდინატთა $S_z \in A$ სისტემის მიმართ, მაშინ

$$\frac{d\Phi}{dz} = \Phi'(z)$$

წარმოებული $\mathcal{F}_{1,0}$ კლასის კოვარიანტს წარმოადგენს. მართლაც, z -ის $z^* \sim z$ -ით შეცვლისას გვექნება

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{dz^*} \frac{dz^*}{dz},$$

რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებას. ახლა, ცხადია, რომ $(\Phi'(z))^m$ წარმოადგენს $A_m(F, A)$ კლასის ანალიზურ კოვარიანტს.

3. ანალიზური კოვარიანტების ფაქტორიზაცია. განზოგადებული ანალიზური და ანტიანალიზური კოვარიანტები. 1-ლი და მე-2 გვარის კოვარიანტული დივიზორები. ეთქვათ, $\omega_0(z)$ რაიმე ცალფერცლა ანალიზური ფუნქციაა F_z არეში. ეს ნიშნავს, რომ $\omega_0(z)$ ახდენს F_z არის კონფორმულ ასახვას კომპლექსური სიბრტყის არეზე. მაშასადამე,

$$\omega'_0(z) \neq 0 \quad \left(\omega'_0 = \frac{d\omega_0}{dz} \right) \quad \text{და} \quad \omega'_0 \in A_1(F, A). \quad (4.5)$$

თუ $\Psi \in A_m(F, A)$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Psi(z) = (\omega'_0(z))^m \Psi_0(z). \quad (4.6)$$

რადგან $(\omega'_0(z))^m \in A_m(F, A)$, ამიტომ წინა ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ Ψ_0 ანალიზური ფუნქციაა $A_0(F, A)$ -დან. (4.6) ფორმულას ეუწოდოთ Ψ ანალიზური კოვარიანტის ფაქტორიზაცია ω_0^m ანალიზური დივიზორის საშუალებით.

დავუბრუნდეთ ახლა (4.3) ფორმულას. რადგან $\Phi \in A_{m-n}(F, A)$, ამიტომ ფაქტორიზაციის (4.6) ფორმულის თანახმად დავწერთ

$$\Phi(z) = (\omega'_0(z))^{m-n} \Phi_0(z), \quad (4.7)$$

სადაც $\Phi_0(z)$ ანალიზური ფუნქციაა $A_0(F, A)$ -დან. თუ (4.7) გამოსახულებას (4.3 ა)-ში შევიტანთ, გვექნება

$$f(z) = \Phi_{m,n}(z) \Phi_0(z), \quad (4.8)$$

სადაც

$$P_{m,n}(z) = (\sqrt{a})^m (\omega'_0(z))^{m-n}. \quad (4.9)$$

თუ განვიხილავთ

$$\chi(x) = \frac{\sqrt{a(z)}}{\omega'_0(z) \overline{\omega'_0(z)}} \neq 0 \quad (4.10)$$

სკალარს $\mathcal{H}_{0,0}(F, A)$ -დან, (4.9) ფორმულა შეგვიძლია

$$\Phi_{m,n}(z) = \chi^n(z) (\omega'_0(z) \overline{\omega'_0(z)})^m (\overline{\omega'_0(z)})^n. \quad (4.11)$$

სახით ჩავწეროთ. რადგან $\chi \neq 0$ და $\omega'(z) \neq 0$, მაშინ, ცხადია,

$$\Phi_{m,n}(z) \neq 0, \quad z \in F_z. \quad (4.12)$$

თუ (4.8) გამოსახულებას (4.1) განტოლებაში შევიტანთ და მხედველობაში მივიღებთ $\partial_z \Phi_0 = 0$ ტოლობას, დავრწმუნდებით, რომ $\Phi_{n,m}$ აკმაყოფილებს

$$\nabla_z \Phi_{n,m} = (\nabla \bar{a})^n \partial_z (\nabla \bar{a})^{-n} \Phi_{n,m} = 0. \quad (4.13)$$

განტოლებას.

$$\nabla_z g = (\nabla \bar{a})^m \partial_z (\nabla \bar{a})^{-m} g = 0, \quad g \in \mathcal{F}_{n,m}, \quad (4.14)$$

განტოლების განხილვით ანალოგიურად მივიღებთ

$$g = \overline{\Phi_{n,m}(z)} \overline{\Psi_0(z)} \quad (4.15)$$

ფორმულას, სადაც Ψ_0 ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციაა $A_0(F, A)$ -დან.

(4.8) და (4.15) ფორმულები გამოსახავს შესაბამისად $\nabla_z f = 0$ და $\nabla_z g = 0$ განტოლებების ყველა ამონახსნს $\mathcal{F}_{n,m}$ კლასის კოვარიანტებისათვის. (4.8) და (4.15) სახის კოვარიანტებს შესაბამისად განზოგადებული ანალიზური (როცა $n \neq 0$) და ანტიანალიზური (როცა $m \neq 0$) $\mathcal{F}_{n,m}(F)$ კლასის კოვარიანტები ეუწოდოთ. განზოგადებული ანალიზური და ანტიანალიზური კოვარიანტების სიმრავლე $\mathcal{F}_{n,m}(F, A)$ -დან აღენიშნოთ შესაბამისად $A_{n,m}(F, A)$ და $\bar{A}_{n,m}(F, A)$ -თი. როცა $n=0$ ან $m=0$ შესაბამისად გვექნება ანალიზური ან ანტიანალიზური კოვარიანტები, ამასთან შევთანხმდეთ $A_{m,0}$ და $\bar{A}_{0,n}$ -ის ნაცვლად ვწეროთ შესაბამისად A_m და $\bar{A}_n$.

$\Phi_{n,m}$ კოვარიანტს, რომელიც $\mathcal{F}_{n,m}(F, A)$ კლასს ეკუთვნის და (4.11) ფორმულით გამოისახება, გააჩნია ის მნიშვნელოვანი თვისება, რომ იგი უწყვეტია და არსად ნულის ტოლი არ ხდება ზედაპირზე. მას $\mathcal{F}_{n,m}(F, A)$ კლასის 1-ლი გვარის კოვარიანტული დივიზორი ეუწოდოთ. $\bar{\Phi}_{n,m}$ კოვარიანტი აგრეთვე $\mathcal{F}_{n,m}(F, A)$ კლასს ეკუთვნის. მას $\mathcal{F}_{n,m}(F, A)$ კლასის მე-2 გვარის კოვარიანტული დივიზორი ეუწოდოთ. ამ დივიზორებს აქვს მნიშვნელოვანი თვისება, თუ $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ კლასის კოვარიანტია, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$f = \Phi_{n,m} f_0, \quad f_0 \in \mathcal{F}_{0,0}(F, A) \quad (4.16 \text{ ა})$$

ან

$$f = \bar{\Phi}_{n,m} g_0, \quad g_0 \in \mathcal{F}_{0,0}(F, A) \quad (4.16 \text{ ბ})$$

სახით. რადგან $\nabla_z \Phi_{n,m} = 0$ და $\nabla_z \bar{\Phi}_{n,m} = 0$, ამიტომ გვექნება

$$\nabla_z f = \Phi_{n,m} \partial_z f_0, \quad (4.17 \text{ ა})$$

$$\nabla_z f = \bar{\Phi}_{n,m} \partial_z g_0. \quad (4.17 \text{ ბ})$$

(4.16 ა) და (4.16 ბ) ტოლობებს $\mathcal{E}_{m,n}$ კლასის კოვარიანტების შესაბამისად 1-ლი და მე-2 გვარის ფაქტორიზაციები ეწოდოთ. ფაქტორიზაციის (4.16 ა, ბ) ფორმულები მნიშვნელოვან როლს თამაშობს განზოგადებული ანალიზური კოვარიანტების თეორიაში. მათი საშუალებით ანალიზურ ფუნქციათა მრავალი ანალიზური და ტოპოლოგიური თვისება ზოგადდება განზოგადებული ანალიზური კოვარიანტებისათვის. მაგალითად, სიტყვა-სიტყვით ზოგადდება ერთადერთობის თეორემები, ნულებისა და პოლუსების თვისებები, არგუმენტის პრინციპი, ვეიერშტრასის თეორემები არსებითად განსაკუთრებული წერტილების მიღამოში ფუნქციათა ყოფაქცევის შესახებ და სხვა.

8. კოში — რიმანის არაერთგვაროვანი განტოლება. ვთქვათ, $g \in \mathcal{E}_{m, n+1}$. განვიხილოთ კოში—რიმანის განზოგადებული არაერთგვაროვანი

$$\nabla_{\bar{z}} f \equiv (\sqrt{a})^n \partial_{\bar{z}} (\sqrt{a})^{-n} f = g \quad (4.18)$$

განტოლება. ჩვენი მიზანია გამოვიყენოთ ფორმულა ამ განტოლების კერძო ამონახსნის ასაგებად. (4.17 ა)-ს საშუალებით (4.18) განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\partial_{\bar{z}} f_0 = \Phi_{m,n}^{-1} g \in \mathcal{E}_{0,1} \quad (4.19)$$

სახით. ამ განტოლების კერძო ამონახსნი გამოისახება

$$f_0(z) \equiv T(g) = -\frac{1}{\pi} \iint_{F_z} \frac{\Phi_{m,n}^{-1}(\zeta) g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta \quad (4.20)$$

ფორმულით (იხ. [1], თავი I), სადაც F_z კომპლექსური z ცვლადის ცვლილების არეა. ეს ინტეგრალი გამოსახავს სკალარს $\mathcal{E}_{0,0}(F, A)$ -დან. ამიტომ ნებისმიერი სხვა კოორდინატთა $S_{\bar{z}}$ სისტემის მიმართ A -დან გვექნება

$$\widehat{f}_0(\bar{z}) = f_0(z(\bar{z})). \quad (4.21)$$

თუ (4.20) გამოსახულებას (4.16 ა)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\widehat{f} = \Phi_{m,n}(z) T(g). \quad (4.22)$$

(4.22) ფორმულა გამოსახავს არაერთგვაროვანი $\nabla_{\bar{z}} f = g$ განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც $\mathcal{E}_{m,n}$ კლასს ეკუთვნის.

საზოგადოდ, $\widehat{f}$ აკმაყოფილებს $\nabla_{\bar{z}} \widehat{f} = g$ განტოლებას განზოგადებული აზრით (იხ. [1], თავი I). თუ g კოვარიანტი ჰელდერის აზრით

უწყვეტია, მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\int \nabla_z f = g$ განტოლების ამონახსნს კლასიკური აზრით.

4. კოში-რიმანის განტოლებები ოვალოიდებზე. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა F ოვალიდია, ე. ი. შეკრული ამოზნექილი ზედაპირია დადებითი ზთავარი (გაუსის) სიმრუდით. A -ოჯახად განვიხილავთ იზომეტრულ კოორდინატთა ოჯახს (იხ. VI თავი, § 3). როგორც ცნობილია, არსებობს ოვალიდის იზომეტრული პარამეტრიზაცია, რომელიც ახორციელებს მის ტოპოლოგიურ ასახვას კომპლექსური ცვლადის სიბრტყეზე (იხ. [1], თავი 2). ამის გამო ოვალიდზე ყველა ცალფერცლა ანალიზურ ფუნქციას აქვს

$$\bar{z} = \omega_0(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (4.23)$$

სახე, სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ მუდმივებია, ამასთან $\Delta_0 = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება მივიღოთ, რომ $\Delta_0 = 1$. მაშინ ω_0 -ის წარმოებული შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\bar{z}'(z) = \omega'_0(z) = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}. \quad (4.24)$$

ამრიგად, $\omega'_0(z) \neq 0$, მაგრამ $z = -\delta\gamma^{-1}$ წერტილში მას აქვს მე-2 რიგის პოლუსი. მაშასადამე, ყველა რეგულარულ ცალფერცლა ფუნქციას სიბრტყეზე აქვს

$$\bar{z} = \omega_0(z) = \alpha z + \beta \quad (4.25)$$

სახე. სათანადო ნორმირების შემდეგ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$\bar{z} = \omega_0(z) = z. \quad (4.26)$$

ოვალიდის შესაბამის იზომეტრულ პარამეტრიზაციას კანონიკური ეუწოდოთ. ამის გამო (4.24)-დან მივიღებთ, რომ 1-ლი გვარის კოვარიანტული დივიზორი $\mathcal{O}_{m,n}$ კლასიდან ოვალიდზე კანონიკური იზომეტრული პარამეტრიზაციის მიმართ გამოისახება

$$\Phi_{m,n} = \Lambda^n \quad (4.27)$$

ფორმულით, სადაც $\Lambda = \sqrt{a}$ შეგახსენებთ, რომ იზომეტრული კოორდინატების მიმართ მეტრულ კვადრატულ ფორმას აქვს

$$I = ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2) = \Lambda dz d\bar{z} \quad (4.28)$$

სახე. მაშასადამე,

$$a = \Lambda^2, \quad \text{ე. ი.} \quad \sqrt{a} = \Lambda > 0. \quad (4.29)$$

ამრიგად, განსახილავ შემთხვევაში (4.20) ფორმულა ოვალოიდის კანონიკური იზომეტრული პარამეტრიზაციის მიმართ ლებულობს

$$T(g) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \Lambda^{-n}(\zeta) g(\zeta) \frac{d\bar{\zeta} d\eta}{\zeta - z} \quad (4.30)$$

სახეს, სადაც ინტეგრება კომპლექსური z ცვლადის E სიბრტყეზე ხორციელდება. ახლა ჩვენ გავარკვევთ იმ ინტეგრალის კრებადობის პირობებს.

დავამტკიცოთ, რომ თუ f უწყვეტი $\mathcal{W}_{m,n}$ კლასის კოვარიანტია ოვალოიდზე, მაშინ უსასრულობის მახლობლად ადგილი აქვს

$$f(z) = O(|z|^{-2(m+n)}) \quad (4.31)$$

შეფასებას. მართლაც, ოვალოიდზე ერთი იზომეტრული z პარამეტრის სხვა $\bar{z}$ -ით შეცვლა ხორციელდება (4.23) სახის გარდაქმნებით. ამის გამო (4.24) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$f(z) = \widehat{f}(\bar{z}) (\gamma z + \delta)^{-2m} (\bar{\gamma} \bar{z} + \bar{\delta})^{-2n}. \quad (4.32)$$

აქედან უშუალოდ გამოდინარეობს (4.31) ფორმულა.

რადგან $\Lambda \in \mathcal{W}_{11}$, ამიტომ (4.31)-ის თანახმად უსასრულობის მახლობლად Λ -სათვის გვაქვს

$$\Lambda = O(|z|^{-4}) \quad (4.33)$$

შეფასება.

შენიშნოთ, რომ, (4.31) და (4.33)-ის თანახმად, ოვალოიდზე უწყვეტი $f \in \mathcal{W}_{m,n}^{(0)}(F)$ კოვარიანტის ლოკალური ნორმა, რომელიც

$$\|f\|_M = \Lambda^{-(m+n)/2} |f(z)|, \quad M \in F \quad (4.34)$$

ფორმულით გამოისახება, შემოსაზღვრულია მთელს ოვალოიდზე,

$$\|f\|_M = O(1). \quad (4.34 \text{ ა})$$

მაშასადამე, არსებობს C -ნორმა

$$\|f\|_C = \text{Max} \|f(z)\|_M. \quad (4.35)$$

პირობის თანახმად $g \in \mathcal{W}_{m,n+1}$. ამიტომ (4.31) და (4.34)-ის თანახმად გვაქვს

$$\Lambda^{-n} g = O(|z|^{2(n-m-1)}) \quad (4.36)$$

შეფასება.

ამის გამო (4.30) ინტეგრალის კრებადობისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ $n \leq m$ პირობის შესრულება. მაშინ $T(g)$ ოპერატორი გამოსახავს ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია სიბრტყეზე და ნულად იქცევა უსასრულობაში (იხ. [1], თავი I).

ამრიგად, როცა $n \leq m$, არსებობს $\nabla_z f = g$ განტოლების $\widehat{f} = \Lambda^n T(g)$ სახის კერძო ამონახსნი, რომელიც $\mathcal{S}_{m,n}$ კლასის ეკუთვნის, უწყვეტია ოვალოიდზე და უსასრულობაში აქვს

$$\widehat{f} = O(|z|^{-4r}) \quad (4.37)$$

შეფასება. თუ $n < 0$, მაშინ $\widehat{f}$ -ს შეიძლება ჰქონდეს წყვეტა ოვალოიდის წერტილში, რომელიც z სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს შეესაბამება. ეს განსაკუთრებულობა გამოწვეულია Λ^n მაზრალის არსებობით $\widehat{f} = \Lambda^n T(g)$ გამოსახულებაში.

შევისწავლოთ ახლა $\nabla_z f = g$ განტოლების $\mathcal{S}_{m,n}$ კლასის კერძო ამონახსნის აგების საკითხი, როცა $n > m$, $g \in \mathcal{S}_{m+1,n}$. ამ შემთხვევაში (4.30) ინტეგრალი განშლადია და, მაშასადამე, $\nabla_z f = g$ განტოლების კერძო ამონახსნის ასაგებად იგი არ გამოდგება. ამიტომ აუცილებელია შესაბამისი ფორმულის კონსტრუქციის ერთგვარი სახეცვლილება.

განვიხილოთ z სიბრტყეზე უბან-უბან ჰოლომორფული

$$\theta(z) = \begin{cases} z^k, & \text{როცა } |z| > 1, \\ 1, & \text{როცა } |z| \leq 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

ფუნქცია, სადაც k რაიმე მთელი რიცხვია, რომელსაც ქვემოთ განვსაზღვრავთ. თუ $\Delta_z f = g$ განტოლების ორივე მხარეს $\theta(z)$ -ზე გავამრავლებთ, გვექნება

$$\nabla_z f_1 \equiv \Lambda^n \partial_z (\Lambda^{-n} f_1) = g_1, \quad (4.39)$$

სადაც

$$f_1 = \theta(z) f, \quad g_1 = \theta(z) g. \quad (4.40)$$

(4.31) და (4.34)-ის თანახმად უსასრულობის მახლობლად გვექნება

$$\Lambda^{-n} g_1 = O(|z|^{k+2n-2m-2}) \quad (4.41)$$

შეფასება. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$T(g_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \Lambda^{-n} g_1(\zeta) \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \quad (4.42)$$

ინტეგრალის კრებადობისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ $k + 2(n-m) < 1$ უტოლობის შესრულება. ამისთვის კი საკმარისია ავიღოთ $k = -2(n-m)$. მაშინ (4.39) განტოლების კერძო ამონახსნი შეიძლება ავაგოთ

$$\widehat{f}_1 = \Lambda^n \Phi_1 + \Lambda^n T(\theta g) \quad (4.43)$$

ფორმულის საშუალებით, სადაც $\Phi_1(z)$ წარმოადგენს სიბრტყეზე რაიმე უბან-უბან პოლომორფულ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია $|z|=1$ წრეწირის შიგნით და გარეთ. გამოსავალი $\nabla_{\bar{z}} f = g$ განტოლების კერძო ამონახსნი გამოისახება

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{\theta(z)} \widehat{f}_1 = \Lambda^n \Phi(z) + \theta^{-1} \Lambda^n T(\theta g) \quad (4.44)$$

ფორმულით, სადაც $\Phi(z)$ — უბან-უბან პოლომორფული ფუნქციაა, რომელიც უწყვეტია $|z|=1$ წრეწირის შიგნით და გარეთ. მოვითხოვოთ ახლა, რომ საძიებელი $\widehat{f}$ კოვარიანტი უწყვეტი იყოს მთელ სიბრტყეზე. ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია

$$\widehat{f}^+(t) - \widehat{f}^-(t) = 0, \quad \text{როცა } |t|=1, \quad (4.45)$$

პირობის შესრულება. რადგან $\Lambda(z)$ და $T(\theta g)$ უწყვეტია სიბრტყეზე, ამიტომ (4.38) და (4.44)-ის თანახმად (4.45) პირობა ლებულობს

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = (t^{-h} - 1) T(\theta g), \quad |t|=1, \quad (4.46)$$

სახეს. ჰილბერტის ამ ამოცანის კერძო ამონახსნი კოშის ტიპის

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t^{-h} - 1) T(\theta g)}{t - z} dt \quad (4.47)$$

ინტეგრალით გამოისახება (იხ. [22]), სადაც Γ წარმოადგენს $|z|=1$ წრეწირს. თუ (4.47)-ს შევიტანთ (4.44)-ში, მივიღებთ $\nabla_{\bar{z}} f = g$ განტოლების საძიებელ კერძო ამონახსნს

$$\widehat{f}(z) = \Lambda^n T_0(g) \quad (4.48)$$

სახით, სადაც

$$T_0(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t^{-h} - 1) T(\theta g)}{t - z} dt + \theta^{-1}(z) T(\theta g). \quad (4.49)$$

ამრიგად, $n > m$ შემთხვევაშიაც, ნებისმიერი უწყვეტი $g \in \mathcal{E}_{m,n+1}$ კოვარიანტისათვის ლელოილზე არსებობს არაერთგვაროვანი $\nabla_{\bar{z}} f = g$

განტოლების $\widehat{f}$ კერძო ამონახსნი, რომელიც (4.48) ფორმულით გამოისახება. რადგან $\Phi(z)$ და $T(\theta, g)$ უსასრულობაში ნული ხდება, ამიტომ, თუ მივიღებთ, რომ $k = -2(n-m)$, (4.34) და (4.38) ფორმულების თანახმად, უსასრულობის მახლობლად ვვექნება

$$\widehat{f} = \Lambda^n T_0(g) = O(|z|^{-2(n+m)}). \quad (4.50)$$

მაგრამ პირობის თანახმად $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{m,n}$ და ეს შეფასება სავსებით ეთანხმება (4.31) ფორმულას. მაშასადამე, $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{m,n}^{(0)}(F)$.

$\nabla_{\bar{z}} = g$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ცხადია, გამოისახება

$$f = \Lambda^n \Phi(z) + \widehat{f} \quad (4.51)$$

ფორმულით, სადაც Φ წარმოადგენს z -ის ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას სიბრტყეზე.

5. თეორემა ოვალოიდებზე კოში-რიმანის ერთგვაროვანი განტოლების უწყვეტი ამონახსნების არსებობის შესახებ. შევისწავლოთ ახლა F ოვალოიდზე ერთგვაროვანი $\nabla_{\bar{z}} f = 0$ განტოლების $\mathcal{E}_{m,n}^{(0)}$ კლასის ამონახსნთა არსებობის საკითხი. ამ განტოლების $\mathcal{E}_{m,n}^{(0)}$ კლასის ზოგად ამონახსნს, ცხადია, აქვს

$$f = \Lambda^n \Phi(z) \quad (4.52)$$

სახე, სადაც Φ — პოლომორფული ფუნქციაა სიბრტყეზე. ამას გარდა, (4.31) და (4.38)-ის თანახმად უსასრულობაში უნდა გვქონდეს

$$\Phi(z) = O(|z|^{-2(n-m)}) \quad (4.53)$$

შეფასება. როცა $n < m$, მაშინ $\Phi \equiv 0$, ე. ი. $\nabla_{\bar{z}} f = 0$ განტოლებას არ აქვს $\mathcal{E}_{m,n}^{(0)}(F)$ კლასის ამონახსნები, გარდა ტრივიალურისა $f \equiv 0$.

თუ $n \geq m$, მაშინ (4.53)-დან გამომდინარეობს, რომ Φ წარმოადგენს $2(n-m)$ ხარისხის პოლინომს. ამრიგად, $n \geq m$ შემთხვევაში $\nabla_{\bar{z}} f = 0$ განტოლებას $2(n-m)$ წრფივად დამოუკიდებელი $\mathcal{E}_{m,n}^{(0)}(F)$ კლასის ამონახსნი აქვს.

ზემოთ მიღებული შედეგები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა. თუ g წარმოადგენს $\mathcal{E}_{m,n+1}^{(0)}$ კლასის უწყვეტ კოვარიანტს ოვალოიდზე, მაშინ $\nabla_{\bar{z}} f = g$ არაერთგვაროვან განტოლებას ყოველთვის აქვს $\mathcal{E}_{m,n}^{(0)}(F)$ კლასის კერძო ამონახსნი. $n \leq m$ შემთხ-

ვევაში ეს ამონახსნი $\widehat{f} = \Lambda^n T(g)$ ფორმულით გამოისახება, სადაც $T(g)$ (4.30) ფორმულით მოცემული ოპერატორია. როცა $n \geq m+1$, მაშინ $\nabla_{\bar{z}} f = g$ განტოლების კერძო ამონახსნი $\widehat{f} = \Lambda^n T_0(g)$ ფორმულით გამოისახება, სადაც $T_0(g)$ (4.49) ფორმულით მოცემული ოპერატორია. $n < m$ შემთხვევაში ერთგვაროვან $\nabla_{\bar{z}} f = 0$ განტოლებას ოვალოიდზე უწყვეტი ნულისაგან განსხვავებული $\mathcal{S}_{m,n}^{(0)}$ კლასის ამონახსნი არ გააჩნია. როცა $n \geq 0$, მაშინ $\nabla_{\bar{z}} f = 0$ განტოლებას ოვალოიდზე უწყვეტი $2(n-m)+1$ წრფივად დამოუკიდებელი $\mathcal{S}_{m,n}^{(0)}$ კლასის ამონახსნი აქვს. ეს ამონახსნები $f = \Lambda^n \Phi$ ფორმულით გამოისახება, სადაც Φ წარმოადგენს $2(n-m)$ რიგის ნებისმიერ პოლინომს.

$A_{m,n}^{(0)}(F)$ -ით აღენიშნოთ F ოვალოიდზე $\Delta_{\bar{z}} f = 0$ განტოლების $A_{m,n}(F)$ კლასის უწყვეტ ამონახსნთა სიმრავლე. რადგან, $n < m$ შემთხვევაში $A_{m,n}^{(0)}$ ცარიელი სიმრავლეა, ამიტომ განვიხილავთ მხოლოდ $n \geq m$ შემთხვევას. მაშინ კოვარიანტები $A_{m,n}^{(0)}$ -დან გამოისახება

$$f = \Lambda^n \Phi(z), \quad (4.54)$$

ფორმულით, სადაც Φ $2(n-m)$ რიგის ნებისმიერი პოლინომია.

(2.41) ფორმულის თანახმად ზედაპირის ტენზორებს, რომლებიც გამოისახებიან კოვარიანტებით $A_{m,n}^{(0)}$ -დან, აქვთ

$$A = \Lambda^n \Phi(z) e^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \quad (4.55)$$

სახე, სადაც $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ წარმოადგენს m ერთიანისა და n ორიანის ნებისმიერ მიმდევრობას, ე. ი.

$$m = \delta_1^{\alpha_1} + \cdots + \delta_1^{\alpha_p}, \quad n = \delta_2^{\alpha_1} + \cdots + \delta_2^{\alpha_p}. \quad (4.56)$$

ყოველი Φ პოლინომისთვის (4.55) სახის განსხვავებული ტენზორების რიცხვი $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ -ის ტოლია. რადგან Φ $2(n-m)$ ხარისხის ნებისმიერი პოლინომია, ამიტომ (4.55) სახის წრფივად დამოუკიდებელი ტენზორების რიცხვია

$$N_{n,m} = (2(n-m)+1) \frac{(m+n)!}{m!n!}. \quad (4.57)$$

(4.55) ფორმულის თანახმად A ტენზორის ლოკალური ნორმა გამოისახება

$$|A|_M = \Lambda^{(n-m)/2} |\Phi(z)|, \quad M \in F \quad (4.58)$$

ფორმულით. აქედან გამოდინარეობს, რომ A ტენზორის ლოკალური ნორმა უწყვეტია ყველგან და უსასრულობაში აკმაყოფილებს

$$\|A\|_M = 0 \quad (1) \quad (4.59)$$

პირობას. მაშასადამე, (4.55) სახის ტენზორებს სასრული $\|A\|_C$ C -ნორმა აქვს.

თუ $p = m + n$ რიცხვს დავაფიქსირებთ და m და n -ს ისე შევკვლით, რომ შესრულდეს $n \leq m$ პირობა, მაშინ (4.55) ფორმულებიდან მივიღებთ p რანგის ყველა წრფივად დამოუკიდებელ ტენზორს $A_{m,p-m}^{(n)}$ -დან, სადაც $m \leq \frac{1}{2} p$. მათი რიცხვია

$$N_p = \sum_{m=0}^{\left[\frac{1}{2} p\right]} (2p - 4m + 1) \frac{p!}{m! (p-m)!}. \quad (4.60)$$

როგორც ზემოთ უკვე ვნახეთ, ყველა ამ ტენზორს უწყვეტი ლოკალური ნორმა აქვს, მაგრამ ზოგიერთ მათგანს სასრული რიგის წყვეტა შეიძლება ჰქონდეს. სახელდობრ, $\Phi = \text{const}$ და $\Phi = cz^{2(n-m)}$ ($c = \text{const}$) ფუნქციების შესაბამის ტენზორებს სასრული რიგის წყვეტა აქვს შესაბამისად $z=0$ და $z=\infty$ წერტილებში.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მთელ ოვალიდზე უწყვეტია მხოლოდ (4.55) სახის ტენზორები, რომლებიც ნულის ტოლი ხდებიან $z=0$ და $z=\infty$ წერტილებში. ეს პირობები შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\Phi = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{2(n-m)-1} z^{2(n-m)-1} \quad (4.61)$$

სახის პოლინომია. მაშასადამე, ყოველი ფიქსირებული $p \geq 1$ -თვის (4.55) სახის წრფივად დამოუკიდებელ ოვალიდზე უწყვეტი ტენზორების რიცხვია

$$N_p^0 = \sum_{m=0}^{\left[\frac{1}{2} p\right]} (2p - 4m - 1) \frac{p!}{m! (p-m)!}. \quad (4.62)$$

მაგალითად, როცა $p=1$ ($m=0$, $n=1$) გვაქვს ერთადერთი ასეთი ტენზორი, რომელიც შეიძლება

$$A = z r_1 = z \partial_z r \quad (4.63)$$

სახით ჩაეწეროს. თუ $p=2$, მაშინ გვაქვს მე-2 რანგის სამი ტენზორი, რომლებსაც აქვთ

$$\overset{(k)}{A} = z^k r_1 \otimes r_2 \quad (k=1, 2, 3) \quad (4.64)$$

სახე. $p=3$ შემთხვევაში გვაქვს რვა მე-3 რანგის

$$\overset{(k)}{A} = z^k r_1 \otimes r_1 \otimes r_1, \quad (k=1, \dots, 5)$$

$$\overset{(6)}{A} = z\Lambda^{-1} r_2 \otimes r_1 \otimes r_1, \quad \overset{(7)}{A} = z\Lambda^{-1} r_1 \otimes r_2 \otimes r_1, \quad (4.65)$$

$$\overset{(8)}{A} = z\Lambda^{-1} r_1 \otimes r_1 \otimes r_2$$

ტენზორი.

ზემოთ მოყვანილი შედეგების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შეკრული სფერული ზედაპირის მაგალითი. ასეთ შემთხვევაში (იხ. VI თავი, § 3, პუნქტი 4)

$$\Lambda = \frac{4R^2}{(1+z\bar{z})^2}, \quad (4.66)$$

სადაც R სფეროს რადიუსია,

$$z = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\psi}. \quad (4.67)$$

თუ სფერული ზედაპირის რადიუს-ვექტორს

$$r = \frac{R}{1-z\bar{z}}(z + \bar{z}; i(\bar{z} - z); 1 - z\bar{z}) \quad (4.68)$$

სახით ჩაეწეროს, გვექნება

$$r_1 = r_2 = \frac{R}{1+z\bar{z}}(1 - \bar{z}^2; -i(1 + \bar{z}^2); -2\bar{z}), \quad (4.69)$$

$$r_3 = \bar{r}_1.$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ r^a ვექტორ-ფუნქციები უსასრულო ზღვრა, როცა $z=\infty$ და აქვს სასრული რიგის წყვეტა კოორდინატთა სისტემის სათავეში ($z=0$). სახელდობრ, უსასრულობის მახლობლად

$$r^a = \frac{(1+z\bar{z})^2}{4R^2} r_a = O(|z|^2). \quad (4.70)$$

ამ ფორმულების საშუალებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (4.65) სახის ტენზორის უწყვეტობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ Φ პოლინომს ჰქონდეს (4.61) სახე.

§ 5. კოვარიანტული დიფერენციალი. მუდმივის ტიპის კოვარიანტები

1. კოვარიანტული დიფერენციალი. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ზედაპირის იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემების ოჯახს.

ახლა შემოვიღოთ კოვარიანტული დიფერენციალის ცნება ნებისმიერი f კოვარიანტისათვის შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$\nabla f = \nabla_z f dz + \nabla_{\bar{z}} f d\bar{z} = \nabla_\alpha f dz^\alpha. \quad (5.1)$$

თუ $f \in \mathcal{S}_{m,n}$, მაშინ $\nabla f dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ წარმოადგენს კონფორმულად ინვარიანტულ ფორმას. მაშასადამე, ∇f ობერატორი ახორციელებს $\mathcal{S}_{m,n} \rightarrow \mathcal{S}_{m,n}$ ასახვას.

(3.3 ა) ფორმულების მიხედვით

$$\nabla f = df - (m\partial_z \ln \Lambda dz + n\partial_{\bar{z}} \ln \Lambda d\bar{z}) f. \quad (5.2)$$

აქედან უშუალოდ განომდინარეობს

$$\overline{\nabla f} = \nabla \bar{f} \quad (5.3)$$

ფორმულა.

როცა f ფუნქციაა, მაშინ $\nabla f = df$. როდესაც ზედაპირი ტორსია ($K=0$), მაშინ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში

$$\nabla f = df. \quad (5.4)ა$$

თუ $f, g \in \mathcal{S}_{m,n}$, გვაქვს

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g. \quad (5.5)$$

ნებისმიერი f და g კოვარიანტებისათვის $\mathcal{S}(F)$ -დან

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \quad (5.6)$$

$$\nabla f^{-1} = -f^{-2}\nabla f, \quad f \neq 0. \quad (5.7)$$

ნებისმიერი f კოვარიანტისათვის

$$\nabla(\Lambda^p f) = \Lambda^p \nabla f, \quad (5.8)$$

სადაც p ნებისმიერ მთელ რიცხვს აღნიშნავს.

2. მუდმივის ტიპის კოვარიანტი. ცხადია, $\nabla f = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f მუდმივია.

ლოდ მაშინ, როცა $\Delta_z f = 0$ და $\nabla_z f = 0$. კოვარიანტს ეწოდოთ მუდმივის ტიპის, თუ იგი აკმაყოფილებს $\nabla f = 0$ განტოლებას.

თუ f კოვარიანტი $\mathcal{F}_{m,n}$ -დან მუდმივის ტიპისაა, მაშინ (3.24) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$0 = \nabla^z \nabla_z f - \nabla^z \nabla_z f = \frac{1}{2} (m-n) K f. \quad (5.9)$$

თუ $m \neq n$ და $K \neq 0$, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ $f = 0$. ამრიგად, თუ F ზედაპირის K მთავარი სიმრუდე ნულისაგან განსხვავებულია და $m \neq n$, მაშინ ზედაპირზე არ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული მუდმივის ტიპის $\mathcal{F}_{m,n}$ კლასის კოვარიანტი.

როცა $m = n$, მაშინ $\nabla_z f = 0$ და $\nabla_z g = 0$ განტოლებათა $\mathcal{F}_{m,m}$ კლასის ამონახსნებს აქვს

$$f = \Lambda^m \Phi \quad \text{და} \quad g = \Lambda^m \bar{\Psi}$$

სახე, სადაც Φ და Ψ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია. მაგრამ $f = g$ ტოლობას, ცხადია, ადგილი აქვს $\Phi = \bar{\Psi} = c = \text{const}$ შემთხვევაში.

ამრიგად, ნებისმიერ ზედაპირზე არსებობს მუდმივის ტიპის $\mathcal{F}_{m,m}$ კლასის კოვარიანტები და მათ აქვთ სახე

$$f = c \Lambda^m \quad (c = \text{const}). \quad (5.10)$$

ტორებზე (და მხოლოდ მათზე) არსებობს მუდმივის ტიპის ნებისმიერი $\mathcal{F}_{m,n}$ კლასის კოვარიანტები და მათ აქვთ

$$f = c [\omega'_0(z)]^m (\overline{\omega'_0(z)})^n \quad (5.11)$$

სახე, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო ω_0 — ნებისმიერი ცალფურცლა ანალიზური ფუნქცია, $\omega'_0 \neq 0$.

(3.10) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ მუდმივის ტიპის კოვარიანტი ნულად იქცევა ერთ (რეგულარულ) წერტილში, მაშინ იგი იგივეურად ნულის ტოლია.

§ 6. წრფივი დიფერენციალური ფორმები.

ფორმათა გარე გაწარმოება. ინტეგრალური ფორმულები

1. წრფივი დიფერენციალური ფორმები. $\nabla f = \nabla_a f dz^a$ კოვარიანტული დიფერენციალი წარმოადგენს ზოგადი წრფივი დიფერენციალური ფორმის $\varphi = \varphi_a dz^a$.

$$(6.1)$$

ფორმის კერძო შემთხვევას. ვიტყვი, რომ φ ფორმა ეკუთვნის $\mathcal{F}_{m,n}$ კლასს, თუ $\varphi dz^m \bar{dz}^n$ გამოსახულება კონფორმულად ინვარიანტულია. ერთი და იმავე კლასის ფორმებს კოგრედიენტულს ვუწოდებთ, ხოლო $\mathcal{F}_{m,n}$ და $\mathcal{F}_{-m,-n}$ კლასის ფორმებს—კონტრაგრედიენტულს.

თუ $\varphi = \varphi_a dz^a \in \mathcal{F}_{m,n}$, მაშინ, ცხადია,

$$\varphi_a \in \mathcal{F}_{m+\delta_a^1, n+\delta_a^2} \quad (6.2)$$

თუ φ და $\psi \in \mathcal{F}_{m,n}$ კლასის ფორმებია, მაშინ $\varphi + \psi$ ჯამი აგრეთვე $\mathcal{F}_{m,n}$ კლასს ეკუთვნის. თუ f სკალარია $\mathcal{F}_{0,0}$ -დან, ხოლო $\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$ კლასის ფორმა, მაშინ $f\varphi$ ნამრავლი $\mathcal{F}_{m,n}$ კლასის ფორმას წარმოადგენს. შემდგომში სკალარებს $\mathcal{F}_{0,0}(F, A)$ კლასიდან ფუნქციებს ვუწოდებთ, აქ A აღნიშნავს ზედაპირის იზომეტრულ კოორდინატთა სისტემების ოჯახს.

ამრიგად, $\mathcal{F}_{m,n}$ კლასის ფორმები შეადგენს წრფივ სივრცეს ზედაპირის $\mathcal{F}_{0,0}(F, A)$ სკალარების რგოლზე, ე. ი. მოდულს ფუნქციათა რგოლზე.

2. დიფერენციალური ფორმების გარე ნამრავლი. ახლა განესაზღვროთ ორი ფორმის გარე ნამრავლი. გავიხსენოთ ნამდვილი x^a პარამეტრების dx^a დიფერენციალების გარე გამრავლების წესები. ისინი შეიძლება ჩაეწეროს

$$dx^a \wedge dx^b = -dx^b \wedge dx^a = \epsilon^{a'b'} dx^1 dx^2 = c^{a'b'} dF \quad (6.3)$$

სახით, სადაც $c^{a'b'}$ ნამდვილი კონტრავარიანტული დისკრიმინანტული ტენზორია, dF — ზედაპირის ფართის ელემენტი. ნამდვილი იზომეტრული პარამეტრიზაციის მიმართ იგი გამოსახება

$$dF = \Lambda dx dy \quad (6.4)$$

სახით.

ახლა ადვილად გამოვიყვანოთ dz^a კომპლექსური დიფერენციალების გარე გამრავლების ფორმულას.

რადგან $dz^a = D_a^\alpha dx^\alpha$, ამიტომ $dz^a \wedge dz^b = D_a^\alpha D_b^\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta$. აქედან (6.3)-ის თანახმად მივიღებთ

$$dz^a \wedge dz^b = c^{ab} dF, \quad (6.5)$$

სადაც c^{ab} დისკრიმინანტული ტენზორის კომპლექსური კოვარიანტული კომპონენტებია,

$$c^{ab} = D_a^\alpha D_b^\beta, \quad c^{a'b'} = n r^a r^b. \quad (6.5 \text{ ა})$$

აქედან გვაქვს

$$c^{11}=c^{22}=0, \quad c^{12}=c^{21}=2 \, i \, \Lambda^{-1}. \quad (6.6 \, \text{ა})$$

(6.5)-დან მივიღებთ

$$dF = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta, \quad c_{\alpha\beta} = n r_\alpha r_\beta, \quad (6.7)$$

სადაც

$$c_{11}=c_{22}=0, \quad c_{12}=-c_{21}=\frac{1}{2} \, i \, \Lambda. \quad (6.6 \, \text{ბ})$$

(6.7) ფორმულა კიდევ შეიძლება

$$dF = \frac{1}{2} \, i \, \Lambda d\bar{z} \wedge dz = -\frac{1}{2} \, i \, \Lambda dz \wedge d\bar{z} \quad (6.8)$$

სახით ჩაეწეროს.

ახლა ორი ნებისმიერი $\varphi = \varphi_\alpha dz^\alpha$ და $\psi = \psi_\beta dz^\beta$ ფორმის გარე გამრავლება ბუნებრივია

$$\varphi \wedge \psi = \varphi_\alpha \psi_\beta dz^\alpha \wedge dz^\beta = c^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \psi_\beta dF = \frac{2}{6} (\varphi_1 \psi_1 - \varphi_2 \psi_2) dx dy \quad (6.9)$$

ტოლობით განემარტოთ. თუ $\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$, $\psi \in \mathcal{F}_{p,q}$, მაშინ, ცხადია, $\varphi \wedge \psi \in \mathcal{F}_{m+p, n+q}$. მაშასადამე, როცა $\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$, $\psi \in \mathcal{F}_{-m, -n}$, მაშინ $\varphi \wedge \psi$ გარე ნამრავლი $\mathcal{F}_{0,0}$ -ს ეკუთვნის.

(6.9) ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ f ფუნქციაა, მაშინ

$$f(\varphi \wedge \psi) = (f\varphi) \wedge \psi = \varphi \wedge (f\psi). \quad (6.10)$$

3. მოცემული დიფერენციალური ფორმის კოფორმა და შეუღლებული ფორმა. წრფივ დიფერენციალურ ფორმათა ბილბერტის სივრცეები. განემარტოთ ახლა $\varphi = \varphi_\alpha dz^\alpha$ ფორმისათვის კოფორმა

$$\bullet \varphi = \frac{1}{i} (\varphi_1 dz^1 - \varphi_2 dz^2) = C_{\alpha\beta}^{\varphi} \varphi_\alpha dz^\beta \quad (6.11)$$

ტოლობით. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$, მაშინ $\bullet\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$ ამასთან

$$\bullet(\bullet\varphi) = -\varphi. \quad (6.12)$$

აღვილად დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ორი φ და ψ ფორმისათვის აღვილი აქვს

$$\bullet \varphi \wedge \psi = -\varphi \wedge \bullet\psi \quad (6.13)$$

ტოლობას. თუ f ფუნქციაა, ხოლო φ — ფორმა, მაშინ

$$\bullet (f\varphi) = f(\bullet\varphi). \quad (6.14)$$

შემოვიღოთ ახლა $\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$ ფორმისათვის კონტრავარიანტული ფორმა, რომელსაც, (2.31) ფორმულის თანახმად, განვსაზღვრავთ

$$\widetilde{\varphi} = (2\Lambda^{-1})^{m+n} \varphi \quad (6.15)$$

ტოლობით. შემოვიღოთ შეუღლებული ფორმის ცნება შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$\widehat{\varphi} = \bullet \widetilde{\varphi} = (2\Lambda^{-1})^{m+n} \bullet \widetilde{\varphi} = (2\Lambda^{-1})^{m+n} c_a^b \cdot \widetilde{\varphi}_b dz^a. \quad (6.16)$$

რადგან $\varphi \in \mathcal{F}_{m,n}$, ამიტომ $\widetilde{\varphi}$ და, მაშასადამე, $\widehat{\varphi}$ ეკუთვნის $\mathcal{F}_{-m, -n}$ კლასს. ამრიგად, φ და $\widehat{\varphi}$ კონტრაგრადიენტული ფორმებია.

თუ φ და ψ კოგრადიენტული ფორმებია, მაშინ φ და $\widehat{\psi}$ კონტრაგრადიენტულია, მაშასადამე, მათი $\varphi \wedge \widehat{\psi}$ გარე ნამრავლი ინვარიანტს წარმოადგენს.

შემოვიღოთ ახლა ორი კოგრადიენტული ფორმისათვის ლოკალური სკალარული ნამრავლის ცნება, რომელსაც

$$(\varphi, \psi)_M = \varphi \wedge \widehat{\psi} = \varphi \wedge \bullet \widetilde{\psi} \quad (6.17)$$

ტოლობით განვსაზღვრავთ, (6.11) და (6.15)-ის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\varphi, \psi)_M = -\bullet \varphi \wedge \widetilde{\psi} = (2\Lambda^{-1})^{m+n} \varphi \wedge \bullet \widetilde{\psi} = h dF, \quad (6.18)$$

სადაც h სკალარია, რომელიც გამოისახება

$$h = (2\Lambda^{-1})^{m+n} c_a^b \cdot c^a \varphi_b \widetilde{\psi}_b = (2\Lambda^{-1})^{m+n} (\varphi_1 \widetilde{\psi}_1 + \varphi_2 \widetilde{\psi}_2) \quad (6.19)$$

ფორმულით.

ბუნებრივია ახლა, φ ფორმის ლოკალური ნორმა განვმარტოთ

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)_M}, \quad M \in F, \quad (6.20)$$

ტოლობით.

შემოვიტანოთ კოგრადიენტული ფორმების გლობალური სკალარული ნამრავლი და ფორმის გლობალური ნორმა

$$(\varphi, \psi) = \int_F (\varphi, \psi)_M = \int_F \varphi \widehat{\psi}, \quad (6.21)$$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \left(\int_F \|\varphi\|_M^2 \right)^{1/2} \quad (6.22)$$

ფორმულებით. ადგილი დასამტკიცებელია

$$|(\varphi, \psi)_M| \leq \|\varphi\|_M \|\psi\|_M, \quad \|\varphi + \psi\|_M \leq \|\varphi\|_M + \|\psi\|_M; \quad M \in F. \quad (6.23)$$

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|, \quad \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \quad (6.24)$$

უტოლობები.

ამრიგად, კოვარიანტული წრფივი დიფერენციალური ფორმები შეადგენს ლოკალურ და გლობალურ კილბერტულ სივრცეებს.

4. კოვარიანტული კოდიფერენციალი. კონტრავარიანტული და შეუღლებული კოვარიანტული დიფერენციალები. ინტეგრალური ფორმულები. ახლა კოვარიანტული დიფერენციალის $\nabla = \nabla_a dz^a$ ოპერატორთან ერთად შემოვიღოთ აგრეთვე კოვარიანტული კოდიფერენციალი, რომელსაც განვმარტავთ

$$\star \nabla = \frac{1}{i} (\nabla_1 dz^1 - \nabla_2 dz^2) = c_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\alpha} dz^{\beta} \quad (6.25)$$

ფორმულით. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი f კოვარიანტისთვის ადგილი აქვს

$$\nabla \wedge \star \nabla f = - \star \nabla \wedge \nabla f = \nabla^2 f dF \quad (6.26)$$

ტოლობას, სადაც $\nabla^2 f$ ლაპლასის ოპერატორია f -დან,

$$\nabla^2 f = \nabla^a \nabla_a f.$$

ახლა $f \in \mathcal{F}_{m,n}$ კოვარიანტისათვის შემოვიტანოთ კონტრავარიანტული დიფერენციალი, რომელსაც (6.15) ფორმულასთან შეთანხმებით

$$\widetilde{\nabla} f = (2 \wedge^{-1})^{m+n} \nabla f \equiv (2 \wedge^{-1})^{m+n} \nabla f \equiv \nabla \widetilde{f} \quad (6.27)$$

ტოლობით განვმარტავთ. შემოვიღოთ აგრეთვე შეუღლებული კოვარიანტული დიფერენციალის ცნება შემდეგი

$$\widehat{\nabla} f = \star \nabla \widetilde{f} \quad (6.28)$$

ფორმულით.

ვთქვათ, f და $g \in \mathcal{F}_{m,n}$. მაშინ (6.17)-ის თანახმად გვაქვს

$$(\nabla f, \nabla g)_M = \nabla f \wedge \widehat{\nabla} g = \nabla f \wedge \star \widetilde{\nabla} g, \quad M \in F. \quad (6.29)$$

მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$(\nabla f, \nabla g)_M = \nabla_a f \nabla^a \bar{g} dF, \quad M \in F. \quad (6.30)$$

თუ ამ ინვარიანტულ ტოლობას ვინტეგრირებთ F ზედაპირზე, მივიღებთ

$$(\nabla f, \nabla g) = \int_F (\nabla f, \nabla g)_M = \int_F \nabla_a f \nabla^a \bar{g} dF \quad (6.31)$$

ფორმულას, რომელიც ღირის ლეს ინტეგრალს ანზოვადებს ზედაპირის კოვარიანტებისათვის.

ჩოდესაც f და g ფუნქციებია, მაშინ $\nabla f = df$, $\nabla g = dg$, $\bar{g} = \overline{g}$ და (6.30) და (6.31) ტოლობები მიიღებს სახეს

$$(df, dg)_M = \nabla_a f \nabla^a \bar{g} = \frac{1}{\Lambda} (\partial_1 f \partial_1 \bar{g} + \partial_2 f \partial_2 \bar{g}), \quad (6.32)$$

$$(df, dg) = \int_F \nabla_a f \nabla^a \bar{g} dF. \quad (6.33)$$

ეთქვან, F ზედაპირი იზომეტრიული პარამეტრიზაციის საშუალებით ტოპოლოგიურად აისახება $z = x + iy$ სიბრტყის სასრულ მარტივად ბმულ F_z არეზე. ვიგულისხმობთ აგრეთვე, რომ მათი ∂F და ∂F_z საზღვრები წარმოადგენს უბან-უბან გლუვ მარტივ შეკრულ წირებს, რომელთა შორის გვაქვს ურთიერთცალსახა და უწყვეტი თანადობა.

ეთქვან, $f_a \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}$, $\bar{g}_a$ უწყვეტია ჩაკეტილ $F \cup \partial F$ ზედაპირზე და F -ის შიგნით აქვს 1-ლი რიგის უწყვეტი წარმოებულები. მაშინ ადვილი აქვს

$$\int_F \nabla^a f_a dF = \int_{\partial F} f_a dz^a \equiv \int_{\partial F} c^a_{\bar{b}} f_a dz^{\bar{b}} \quad (6.34)$$

ფორმულას. ჩადგან $f_1 \in \mathcal{S}_{1,0}$, $f_2 \in \mathcal{S}_{0,1}$, ამიტომ გვაქვს

$$\nabla^a f_a dF = 2 (\partial_{\bar{z}} f_1 + \partial_z f_2) dx dy. \quad (6.35)$$

მაშასადამე,

$$\int_F \Delta^a f_a dF = 2 \int_{F_z} (\partial_{\bar{z}} f_1 + \partial_z f_2) dx dy. \quad (6.36)$$

მაგრამ გრინის ფორმულის თანახმად (იხ., მაგალითად, [1], თავი I)

$$\int_{F_z} \partial_z \dot{f}_1 dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial F_z} f_1 dz; \quad \int_{F_z} \partial_z f_2 dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial F_z} f_2 d\bar{z}. \quad (6.37)$$

ამ ფორმულების ძალით (6.36) ტოლობა მიიღება

$$\int_F \nabla^a f_a dF = \frac{1}{i} \int_{\partial F_z} (f_1 dz^1 - f_2 dz^2) = \int_{\partial F} c_{\alpha\beta}^a f_a dz^\beta \quad (6.38)$$

საზუს, რაც უნდა დაგვეტკიცებინა.

(6.38) ფორმულა საშარტილიანი რჩება ნებისმიერი F ზედაპირისათვის, თუ ის ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების მქონე სასრული რაოდენობა ნაპრებისაგან შედგება. კერძოდ, თუ F შეკრული რეგულარული ზედაპირია, ხოლო f_a —მასზე უწყვეტად წარმოებადი კოვარიანტებია, მაშინ გვაქვს

$$\int_F \nabla^a f_a dF = 0 \quad (6.39)$$

იგივეობა.

ახლა დაუბრუნდეთ ისევ ინტეგრალურ (6.31) ფორმულას. ცხადია, გვაქვს შემდეგი იგივეობები:

$$(\nabla f, \nabla g)_M = \nabla_a [f \nabla^a \tilde{g}] dF = \nabla^a (\tilde{g} \nabla_a f) dF - g \nabla^a \nabla_a f dF, \quad (6.40)$$

$$(\nabla f, \nabla g)_M = \nabla_a (f \nabla^a \tilde{g}) dF - \nabla_a \nabla^a \tilde{g} dF. \quad (6.41)$$

ამ ტოლობების ინტეგრებით F ზედაპირზე მივიღებთ

$$(\nabla f, \nabla g) = \int_{\partial F} \tilde{g} \cdot \nabla f - \int_F \tilde{g} \nabla^2 f dF, \quad (6.42)$$

$$(\nabla f, \nabla g) = \int_{\partial F} f \cdot \nabla \tilde{g} - \int_F f \nabla^2 \tilde{g} dF. \quad (6.43)$$

თუ ამ ტოლობათაგან ერთ-ერთს მეორეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$\int_{\partial F} \tilde{g} \cdot \nabla f - f \cdot \nabla \tilde{g} = \int_F (\tilde{g} \nabla^2 f - f \nabla^2 \tilde{g}) dF \quad (6.44)$$

ფორმულას, რომელიც გრინის ფორმულის განზოგადებაა ზედაპირის ნებისმიერი კოვარიანტებისათვის.

თუ F ჩაკეტილი რეგულარული ზედაპირია, ხოლო f და g —ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი კოგრადიენტული კოვარიანტები, მაშინ გვაქვს

$$(\nabla f, \nabla g) = - \int_F \tilde{g} \nabla^2 f dF, \quad (6.45)$$

$$(\nabla f, \nabla g) = - \int_F f \nabla^2 \tilde{g} dF. \quad (6.46)$$

აქედან ჩაკეტილი ზედაპირისათვის ვლუბულობით გრინის ფორმულას

$$\int_F (\tilde{g} \nabla^2 f - f \nabla^2 \tilde{g}) dF = 0. \quad (6.47)$$

ახლა საგანგებოდ შევისწავლოთ ინვარიანტულ დიფერენციალურ

$$\varphi = \varphi_a dz^a \quad (6.48)$$

ფორმათა თვისებები. ამ შემთხვევაში

$$\varphi_1 \in \mathcal{E}_{1,0}, \quad \varphi_2 \in \mathcal{E}_{0,1}. \quad (6.49)$$

φ ფორმის გარე დიფერენციალი განვმარტოთ

$$\begin{aligned} d\varphi &= d \wedge \varphi = \partial_a dz^a \wedge \varphi_b dz^b = c^{ab} \partial_a \varphi_b dF = \\ &= \frac{1}{i} (\partial_z \varphi_2 - \partial_{\bar{z}} \varphi_1) dx dy \end{aligned} \quad (6.50)$$

ფორმულით. დავუშვათ, რომ φ_a უწყვეტია ჩაკეტილ $F + dF$ ზედაპირზე და აქვს უწყვეტი წარმოებულები F -ის შიგნით. თუ (6.50) ტოლობას ვაინტეგრებთ F -ზე და გრინის (6.47) ფორმულებს გამოვიყენებთ, გვექნება

$$\int_F d\varphi = \int_F \varphi_a dz^a = \int_F \varphi. \quad (6.51)$$

5. ჩაკეტილი დიფერენციალური ფორმები. ვთქვათ, $d\varphi = d \wedge \varphi = 0$. მაშინ (6.51)-დან გამომდინარეობს, რომ აუცილებლად სრულდება

$$\int_L \varphi = 0 \quad (6.52)$$

პირობა ნებისმიერი L წირისათვის, რომელიც F ზედაპირს ეკუთვნის და რაიმე (ბმულ) არეს შემოსაზღვრავს.

ვთქვათ φ ფორმა f ფუნქციის დიფერენციალია. მაშინ მას ზუსტ დიფერენციალს უწოდებენ. ცხადია,

$$\varphi_a = \partial_a f \quad (6.53)$$

და, როგორც (6.50) ფორმულიდან ჩანს, $d\varphi = d \wedge df = 0$. პირიქით, თუ $d\varphi = d \wedge \varphi = 0$, მაშინ (6.50)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\partial_x \varphi_2 = \partial_z \varphi_1. \quad (6.54)$$

მაშასადამე, არსებობს f ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (6.53) პირობებს, ე. ი. $\varphi = df$. f ფუნქცია გამოისახება

$$f(M) = \int_{M_0 M} \varphi_a dz^a + C \quad (6.55)$$

ინტეგრალით, სადაც C მუდმივია. აქ ინტეგრალი აიღება ნებისმიერი წარის გასწვრივ, რომელიც F ზედაპირს ეკუთვნის და ფიქსირებულ M_0 წერტილს ცვლად M წერტილთან აერთებს.

f ფუნქციას φ ფორმის პოტენციალი ეწოდება. თუ f ცალსახა ფუნქციაა, მაშინ $\varphi = df$ -ს ჩაკეტილი დიფერენციალი ეწოდება. (6.50) და (6.52) პირობები, ცხადია, ეკვივალენტურია. ვთქვათ F მარტივადბმული ზედაპირია. მაშინ (6.55) ინტეგრალით f ფუნქცია განისაზღვრება ადითიური C მუდმივის სიზუსტით. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (6.54) (ან ეკვივალენტური (6.52)) პირობის შესრულება წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისა, რომ φ ფორმა ჩაკეტილი დიფერენციალი იყოს.

რაცა F მრავლადბმული ზედაპირია, მაშინ ეს პირობები, საზოგადოდ, არაა საკმარისი იმისათვის, რომ φ ჩაკეტილი დიფერენციალი იყოს. დავუშვათ, რომ F შემოსაზღვრულია $m+1$ უბან-უბან გლუვი მარტივი $L_0, L_1, \dots, L_m$ წირებით. მაშინ f ფუნქციის ცალსახობისათვის აუცილებელი და საკმარისია

$$\int_{L_k} \varphi = 0, \quad k=0, 1, \dots, m \quad (6.56)$$

პირობების შესრულება. აქ უნდა აღინიშნოს, რომ საკმარისია შემოწმდეს ამათგან მხოლოდ m პირობის შესრულება. მაშინ მე- $(m+1)$ პი-

რობა შესრულებული იქნება (6.52) აუცილებელი პირობის თანახმად, რომელიც (6.54)-ის ეკვივალენტურია.

განვიხილოთ აგრეთვე $\varphi = \varphi_\alpha dz^\alpha$ ფორმის გარე კოდიფერენციალი, რომელიც

$$\bullet d\varphi = \bullet d \wedge \varphi, \quad \bullet d = \frac{1}{i} (\partial_1 dz^1 - \partial_2 dz^2) \quad (6.57)$$

ფორმულით განისაზღვრება. მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$\bullet d\varphi = 2 (\partial_z \varphi_2 + \partial_{\bar{z}} \varphi_1) dx dy. \quad (6.58)$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით F -ზე და გრინის (6.37) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_F \bullet d\varphi = \int_F \bullet \varphi. \quad (6.59)$$

რაცა $\bullet d\varphi = 0$, ვიტყვი, რომ φ ფორმა ზუსტი კოდიფერენციალია. მაშინ (6.59)-დან გვექნება

$$\int_F \bullet \varphi = 0. \quad (6.60)$$

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი

$$\partial_z \varphi_2 = -\partial_{\bar{z}} \varphi_1 \quad (6.61)$$

პირობის შესრულება. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi_1 = \frac{1}{i} \partial_z g, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{i} \partial_{\bar{z}} g. \quad (6.62)$$

მაშასადამე,

$$\varphi = \frac{1}{i} (\partial_z g dz - \partial_{\bar{z}} g d\bar{z}) = \bullet dg. \quad (6.63)$$

თუ F მარტივადამულო ზედაპირია, მაშინ g ცალსახა ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში φ ჩაკეტილი კოდიფერენციალი იქნება. როცა F ზემოაღნიშნული სახის სასრულადამულო ზედაპირია, მაშინ g ფუნქციის ცალსახობას უზრუნველყოფს

$$\int_{L_k} \bullet \varphi = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m) \quad (6.64)$$

სახის პირობები.

თუ φ დიფერენციალია, $\varphi = df$, მაშინ (6.57) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\bullet d \wedge df = 4 \partial_z \partial_{\bar{z}} f dx dy = \Delta f dF, \quad (6.65)$$

სადაც Δf ფუნქციის ლაპლასის ოპერატორია:

$$\Delta f = \frac{4}{\Lambda} \partial_z \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \quad (6.66)$$

დავეშვათ ახლა, რომ $\varphi = \varphi_\alpha dx^\alpha$ ფორმა ერთდროულად აკმაყოფილებს

$$d\varphi = 0, \quad \bullet d\varphi = 0 \quad (6.67)$$

პირობებს. მაშინ ერთდროულად უნდა შესრულდეს (6.54), (6.61) პირობები და (6.53) და (6.62)-დან მივიღებთ ტოლობებს

$$\partial_z (f + ig) = 0, \quad \partial_{\bar{z}} (f - ig) = 0. \quad (6.68)$$

აქედან გვაქვს

$$f + ig = 2 \overline{\Psi(z)}, \quad f - ig = 2 \Phi(z), \quad (6.69)$$

სადაც Φ და Ψ z -ის ანალიზური ფუნქციებია. ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$f = \Phi(z) + \overline{\Psi(z)}, \quad g = \frac{1}{i} (\overline{\Psi(z)} - \Phi(z)). \quad (6.70)$$

ამრიგად, თუ φ ფორმის დიფერენციალი და კოდიფერენციალი ნულის ტოლია, მაშინ მისი პოტენციალი ნებისმიერი კარმონიული ფუნქციაა, რომელიც, საზოგადოდ, კომპლექსურ მნიშვნელობებს ღებულობს. მარტივადმხდული ზედაპირის შემთხვევაში ეს ფუნქცია ცალსახაა. მრავალადმხდული ზედაპირის შემთხვევაში კი პოტენციალის ცალსახობისათვის აუცილებელი და საკმარისია (6.56) პირობების შესრულება.

(6.65) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ლაპლასის $\Delta f = 0$ განტოლება შეიძლება ჩავეწიროთ

$$\bullet d \wedge df = 0 \quad (6.71)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$d \wedge \bullet df = 0 \quad (6.72)$$

სახით.

დიფერენციალური ფორმების თეორიას ფართო განზოგადებანი გააჩნია რიმანის ნებისმიერი მრავალსახეობის შემთხვევაში (იხ., მაგალითად, [19], [20], [21]).

ზედაპირთან ნორმალურად დაკავშირებული სივრცითი კოორდინატთა სისტემები

§ 1. სივრცის კოორდინატთა სისტემების S -ოჯახი. ინდექსთა შეზღუდვის ოპერაციები

1. კოორდინატთა სისტემების S -ოჯახი. სასარგებლოა ისეთი სივრცითი კოორდინატთა სისტემების სპეციალური ოჯახის განხილვა, რომელთათვისაც ერთ-ერთი საკოორდინატო წირთა ერთობლიობა რაიმე S ზედაპირის ნორმალთა ოჯახს წარმოადგენს. შემოკლებით ასეთ კოორდინატთა სისტემების სიმრავლეს S -ოჯახი დავარქვათ. კოორდინატთა ასეთი სისტემები განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ზედაპირთა თეორიაში.

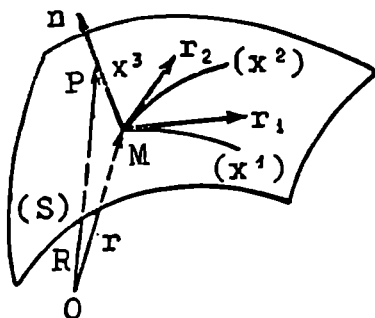
ეტყვათ S რეგულარული ზედაპირია. S ზედაპირის მახლობელი ნებისმიერი P წერტილის R რადიუს-ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$R = r + x^3 n$$

სახით (ნახ. 23), სადაც n წარმოადგენს P წერტილიდან

S ზედაპირზე დაშვებული ნორმალის ორტს, r ამ ნორმალის M ფუძის რადიუს-ვექტორია, x^3 კი $R - r$ ვექტორის პროექციაა ზედაპირის ნორმალზე.

ცხადია, x^3 სკალარული სიდიდეა, იმასთან $|x^3|$ წარმოადგენს მანძილს P წერტილიდან S ზედაპირამდე. ამიტომ x^3 -ს ვუწოდებთ ფარდობით მანძილს P წერტილიდან S ზედაპირამდე.



ნახ. 23

ამრიგად, S ზედაპირის მიდამოში აღებული რაიმე Ω არის ნებისმიერი P წერტილის კოორდინატებად ჩვენ, შევვიძლია ავიღოთ x^1, x^2, x^3 რიცხვები, სადაც x^1, x^2 ზედაპირის M წერტილის რაიმე კოორდინატებია.

საკოორდინატო x^3 წირები, ცხადია, S ზედაპირის ნორმალთა ოჯახს შეადგენს, ხოლო $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირები S -ის ეკვიდისტანტური ზედაპირების ოჯახს წარმოქმნის.

2. ინდექსთა შეზღუდვის ოპერაციები. სივრცითი S -ტენზორი. დავამტკიცოთ ერთი მარტივი დებულება. შეგახსენებთ, რომ ლათინური (ყრუ და განუსაზღვრელი) ინდექსები 1, 2, 3 მნიშვნელობებს ლებულობს, ხოლო ბერძნული — 1, 2 მნიშვნელობებს. $\bar{S}$ -ით აღვნიშნავთ რაიმე $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირს.

ვთქვათ გვაქვს სივრცითი $A_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$ ტენზორი რაიმე Ω მოდულიდან $\mathcal{U}(\Omega)$ რგოლზე. თუ ყველა ლათინურ ინდექსს ბერძნულით შევცვლით, მაშინ მივიღებთ $A_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ (p, q)-მატრიცას, რომელიც წარმოადგენს (p, q)-ტენზორს $\Omega(\bar{S})$ მოდულიდან ნებისმიერი $\bar{S}$: $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირისთვის.

ჩვენ ეგულისხმობთ, რომ S -ოჯახიდან ერთი საკოორდინატო სისტემის მეორით შეცვლა ხორციელდება არაგანსაკუთრებული

$$x^{a'} = \psi^{a'}(x^1, x^2), \quad x^{3'} = x^3 \quad (a' = 1, 2) \quad (1.2)$$

სახის გარდაქმნებით. ეს ნიშნავს, რომ S -ოჯახიდან ერთი საკოორდინატო სისტემის მეორით შეცვლისას სკალარული x^3 კოორდინატი უცვლელი რჩება. შეზღოვოვში x^1 კოორდინატების ამგვარ გარდაქმნებს მოკლედ S -გარდაქმნებს ვუწოდებთ.

ზემოთ ჩამოყალიბებული დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია განვიხილოთ მე-2 რანგის შერეული ტიპის A_j^i ტენზორის შემთხვევა. გვაქვს

$$A_{j'}^i = A_j^i D_{i'}^i D_{j'}^j, \quad D_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad D_{j'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \quad (1.3)$$

თუ აქ დავუშვებთ $i = \alpha, j = \beta$ და მხედველობაში მივიღებთ $D_{\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} = 0, \quad D_{\beta'}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} = 0$ ტოლობებს, გვქვია

$$A_{\beta'}^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha} D_{\alpha'}^{\alpha} D_{\beta'}^{\beta}. \quad (1.4)$$

ამრიგად, დებულება დამტკიცებულია მე-2 რანგის ტენზორის შემთხვევაში. იგი ანალოგიურად დამტკიცდება ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერი რანგის ტენზორისთვისაც.

ამავე გზით მტკიცდება შემდეგი, უფრო ზოგადი დებულება.

თუ სივრცითი $A_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_q}$ ტენზორის r კონტრავარიანტულ და s კოვარიანტულ ინდექსებს 3-ს გავუტოლებთ ($r \leq q, s \leq p$), ხოლო დანარჩენებს შევცვლით ბერძნული განუსაზღვრელი ინდექსებით, რომლებიც 1 და 2 მნიშვნელობებს დებულობენ, მაშინ მივიღებთ ($p - s, q - r$) ტიპის ტენზორს ნებისმიერ $x^3 = \text{const}$ ზედაპირზე. ამრიგად, სივრცითი ტენზორისაგან შეგვიძლია მივიღოთ $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირების ტენზორები ოპერაციით, რომელსაც ინდექსების შეზღუდვის ოპერაციას ვუწოდებთ. იგი იმაში მდგომარეობს, რომ ზოგიერთი (ან ყველა) ინდექსი გაირბენს 1, 2 მნიშვნელობებს და, მაშასადამე, აღინიშნება ბერძნული ასოებით, ხოლო დანარჩენი ინდექსები კი 3-ის ტოლი აიღება.

თუ p რანგის სივრცითი ტენზორის ყველა ინდექსს ბერძნული ინდექსებით შევცვლით, მივიღებთ $x^3 = \text{const}$ ზედაპირების იმავე რანგის ტენზორს. ასეთ ტენზორს სივრცითი ტენზორის მინიმალური შეზღუდვა ვუწოდოთ. თუ სივრცითი ტენზორის ყველა ინდექსს 3-ს გავუტოლებთ, მივიღებთ სკალარს, რომელსაც სივრცითი ტენზორის მაქსიმალურ შეზღუდვას ვუწოდებთ.

ინდექსების მინიმალური შეზღუდვისას $r = s = 0$, ხოლო მაქსიმალური შეზღუდვისას $s = p, r = q$. $m = r + s$ რიცხვს ინდექსების შეზღუდვის რიგი ვუწოდოთ. ინდექსების m -ური რიგის შეზღუდვის შემთხვევაში ტენზორის რანგი m ერთეულით მცირდება.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, სივრცითი r რანგის ტენზორისაგან ინდექსების შეზღუდვის ოპერაციის განოყენებით შესაძლებელია მივიღოთ $S: x^3 = \text{const}$ ზედაპირების $r, r - 1, \dots, 0$ რანგის ტენზორები. მათ შორის ნულისაგან განსხვავებული ტენზორების ერთობლიობას სივრცითი ტენზორის არსებითი მირთვი ვუწოდოთ.

შევნიშნოთ, რომ (p, q) ტიპის სივრცითი ტენზორის ინდექსების შეზღუდვის $r + s$ რიგის ოპერაცია შესაძლებელია განხორციელდეს მისი

$$\delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_s}^{i_s} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_s}^{i_s} \delta_{\alpha_{r+1}}^{i_{r+1}} \dots \delta_{\alpha_q}^{i_q} \delta_{j_{s+s}}^{i_{s+s}} \dots \delta_{j_p}^{i_p} \quad (1.5)$$

სახის ტენზორთან შეკვეცის შედეგად. ცხადია, $s \leq p, r \leq q$. $i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_s$ ინდექსების სივრცითი ტენზორის ინდექსებთან გადაჯაჭვის

რიგის შეცვლით ჩვენ მივიღებთ $x^s = \text{const}$ ზედაპირის ($p - s, q - r$) ტიპის, საზოგადოდ, სხვადასხვა ტენზორებს.

თუ x^i კოორდინატების S -გარდაქმნების შემთხვევაში $A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ მატრიცა

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = A_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} D_{i'_1}^{i_1} \dots D_{i'_p}^{i_p} D_{j_1}^{j'_1} \dots D_{j_q}^{j'_q} \quad (1.6)$$

ფორმულის საშუალებით ვარდაიქმნება, სადაც

$$D_{i'}^{i'} = \delta_{i'}^{i'}, \quad D_{j'}^{j'} = \delta_{j'}^{j'}, \quad D_{i'_s}^{i_s} = \delta_{i'_s}^{i_s}, \quad D_{j'_r}^{j_r} = \delta_{j'_r}^{j_r},$$

მაშინ მას (p, q) ტიპის ($p + q$ რანგის) სივრცით S -ტენზორს ვუწოდებთ. ყოველი სივრცითი ტენზორი, ცხადია, სივრცით S -ტენზორს წარმოადგენს. მაგრამ შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, მართებული არაა.

თუ $A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ S ზედაპირის (p, q) ტიპის ტენზორია, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} \delta_{i_1}^{\alpha_1} \dots \delta_{i_p}^{\alpha_p} \delta_{\beta_1}^{j_1} \dots \delta_{\beta_q}^{j_q} \quad (1.7)$$

მატრიცა (p, q) ტიპის სივრცით S -ტენზორს წარმოადგენს. ამ ტენზორს $A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ ტენზორის მარტივი გაფართოება ვუწოდოთ.

თუ (1.7) ტოლობის ორივე მხარეს $\delta_{i_{p+1}}^{\beta_1} \dots \delta_{i_{p+r}}^{\beta_r} \delta_{j_{q+1}}^{\alpha_1} \dots \delta_{j_{q+s}}^{\alpha_s}$ ტენზორზე გავამრავლებთ, მივიღებთ ($p + r, q + s$) ტიპის სივრცით S -ტენზორს.

ამრიგად, ზედაპირის (p, q) ტიპის ნებისმიერი ტენზორი (1.5) სახის ტენზორთან შეკვეცის საშუალებით (ბერძნული ინდექსების მიმართ) შეიძლება გავაფართოოთ ($p + r, q + s$) ტიპის სივრცით S -ტენზორამდე, სადაც r და s ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვებია.

§ 2. არის S_g -პარამეტრიზაცია

1. არის S_g -პარამეტრიზაცია. კოვარიანტული ბაზისი. განვიხილოთ S -ოჯახის კოორდინატთა სისტემების საბაზისო ვექტორ-ფუნქციები, რომელთაც

$$R_\alpha = r_\alpha + n_\alpha x^s, \quad R_s = n, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.1)$$

სახე აქვთ, სადაც r_a წარმოადგენს ზედაპირის გაუსის x^a კოორდინატ-
თა სისტემის საბაზისო ვექტორ-ფუნქციებს.

ვეინგარტენის $n_a = -b_a^b r_b$ ფორმულების თანახმად დავწერთ

$$R_a = r_a - x^b b_a^b r_b, \quad R_3 = n \quad (2.1a)$$

ანუ

$$R_a = (a_a^b - x^b b_a^b) r_b \equiv (a_{ab} - x^b b_{ab}) r^b, \quad R_3 = n. \quad (2.1b)$$

ამ ფორმულების საშუალებით ადვილად ვიპოვნით სივრცის მეტ-
რული ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების გამოსახულებებს
 S -ოჯახის კოორდინატთა სისტემების მიმართ:

$$g_{ab} = R_a R_b = a_{ab} - 2 x^c b_{ab} + (x^c)^2 b_a^c b_{cb}, \quad (2.2)$$

$$g_{a3} = R_a R_3 = 0, \quad g_{33} = R_3 R_3 = 1.$$

საკოორდინატო სისტემას S -ოჯახიდან, რომლის კოვარიანტული
მოდრავი ბაზისი (2.1) ვექტორ-ფუნქციებს შეადგენს, შემოკლებით
სივრცის S_g -პარამეტრიზაცია ვუწოდოთ. ქვემოთ ჩვენ S -ოჯახის კო-
ორდინატთა სისტემების ბაზისად ავიღებთ აგრეთვე r_1, r_2, n ვექტორ-
ფუნქციებსაც. ასეთ კოორდინატთა სისტემას სივრცის S_a -პარამეტრი-
ზაციას ვუწოდებთ. ქვემოთ უფრო ნათლად გამოვაყენებთ ამ ტერმინე-
ბის მნიშვნელობას და დავადგენთ კავშირს სივრცის S_g და S_a -პარა-
მეტრიზაციებს შორის.

2. არის $S_{g, \eta}$ -პარამეტრიზაცია. თუ (x^a) კოორდინატთა წირები,
როცა $x^3 = 0$, S ზედაპირის სიმრუდის წირებს ემთხვევა, მაშინ
(იხ. (VI, § 1, პუნქტი 4) და (VI, § 1, პუნქტი 5))

$$R_1 = (1 - k_1 x^3) r_1, \quad R_2 = (1 - k_2 x^3) r_2, \quad R_3 = n, \quad (2.3)$$

$$g_{11} = (1 - k_1 x^3)^2 A^2 = \widehat{A}^2, \quad g_{22} = (1 - k_2 x^3)^2 B^2 = \widehat{B}^2, \quad (2.4)$$

$$g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0, \quad \text{როცა } i \neq j,$$

სადაც k_1 და k_2 S ზედაპირის მთავარი სიმრუდეებია, ხოლო $A^2 = r_1 r_1$,
 $B^2 = r_2 r_2$ — ამ ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიცი-
ენტები.

(2.4) ფორმულების თანახმად სივრცითი მეტრული კვადრატული
ფორმის დისკრიმინანტს აქვს

$$g = a \Phi^2, \quad (2.5)$$

$$\Phi = (1 - k_1 x^3) (1 - k_2 x^3) = 1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2 \quad (2.6)$$

სახე, სადაც H S ზედაპირის საშუალო, ხოლო K მთავარი სიმრუდეები. აქედან ჩანს, რომ g/a შეფარდება, სადაც a S ზედაპირის მეტრული კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტია, ინვარიანტია ნებისმიერ $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირზე. მაშასადამე, (2.5) ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი კოორდინატთა სისტემისათვის S -ოჯახიდან.

ამრიგად, როგორც ამას (2.4) ფორმულები გვიჩვენებს, არის S_{ξ} -პარამეტრიზაცია, რომელიც დაკავშირებულია S ზედაპირის სიმრუდის წირებთან, კოორდინატთა ორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს. ამ კოორდინატთა სისტემას შემოკლებით არის $S_{\xi, \eta}$ -პარამეტრიზაცია ვუწოდოთ.

(2.3) და (2.5) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$n = \frac{R_1 \times R_2}{\sqrt{g}} = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{a}} \quad (2.7)$$

მაშასადამე, ნებისმიერი $\bar{S}: x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირის ნორმალის ორტი n -ს ემთხვევა. ამიტომ, (2.3) ფორმულების ძალით, ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს $S_{\xi, \eta}$ -პარამეტრიზაციის მიმართ აქვს

$$\begin{aligned} \bar{b}_{11} &= -R_1 n_1 = k_1 R_1 r_1 = k_1 (1 - k_1 x^3) A^2, \\ \bar{b}_{22} &= -R_2 n_2 = k_2 R_2 r_2 = k_2 (1 - k_2 x^3) B^2, \\ \bar{b}_{12} &= \bar{b}_{21} = -R_1 n_2 = k_2 R_1 r_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

სახე. (2.4) და (2.8) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ არის $S_{\xi, \eta}$ -პარამეტრიზაციის შემთხვევაში საკოორდინატო (ξ) და (η) წირები ნებისმიერი $\bar{S}: x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირის სიმრუდის წირებს წარმოადგენს.

(2.4) და (2.8)-ის თანახმად $\bar{S}$ ზედაპირის პირველ და მეორე კვადრატულ ფორმებს აქვს სახე:

$$\bar{I} = d\bar{s}^2 = \bar{A}^2 d\xi^2 + \bar{B}^2 d\eta^2, \quad (2.9)$$

$$\bar{II} = \bar{k}_1 d\bar{s}^2 = \bar{k}_1 \bar{A}^2 d\xi^2 + \bar{k}_2 \bar{B}^2 d\eta^2, \quad (2.10)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \bar{A}^2 &= A^2 (1 - k_1 x^3)^2, & \bar{B}^2 &= B^2 (1 - k_2 x^3)^2, \\ \bar{k}_1 &= k_1 (1 - k_1 x^3)^{-1}, & \bar{k}_2 &= k_2 (1 - k_2 x^3)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

მაშასადამე, $\widehat{k}_1$ და $\widehat{k}_2$ $\widehat{S} : x^3 = c$ საკოორდინატო ზედაპირის მთავარი სიმრუდეებია, ხოლო ამ ზედაპირის საშუალო და მთავარი სიმრუდეები გამოისახება

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \frac{1}{2} (\widehat{k}_1 + \widehat{k}_2) = \frac{H - K x^3}{1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2}, \\ \widehat{K} &= \widehat{k}_1 \widehat{k}_2 = \frac{K}{1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2}\end{aligned}\quad (2.12)$$

ფორმულებით.

არის $S_{\xi, \eta}$ -პარამეტრიზაციისათვის, ცხადია, ადგილი აქვს

$$R^1 = (1 - k_1 x^3)^{-1} r^1, \quad R^2 = (1 - k_2 x^3)^{-1} r^2, \quad R^3 = n \quad (2.13)$$

ფორმულებს, რომლებიც განსახილავი პარამეტრიზაციის კონტრავარიანტულ ბაზისს გამოსახავენ. აქედან ვღებულობთ

$$\begin{aligned}g^{11} &= R^1 R^1 = (1 - k_1 x^3)^{-2} A^{-2} = \frac{1}{g_{11}}, \\ g^{22} &= R^2 R^2 = (1 - k_2 x^3)^{-2} B^{-2} = \frac{1}{g_{22}}, \\ g^{33} &= n n = 1, \quad g^{ij} = R^i R^j = 0, \quad \text{როცა } i \neq j\end{aligned}\quad (2.14)$$

ტოლობებს, რომლებიც სივრცის მეტრული ტენზორის კონტრავარიანტულ კომპონენტებს გამოსახავენ $S_{\xi, \eta}$ პარამეტრიზაციის მიმართ.

3. S_{ξ} -პარამეტრიზაციის კონტრავარიანტული ბაზისი. დაეუშვათ, რომ სკალარული x^3 კოორდინატი აკმაყოფილებს

$$|k_1| |x^3| < 1, \quad |k_2| |x^3| < 1 \quad (2.15)$$

პირობებს. ეს ნიშნავს, რომ განიხილება S -ზედაპირის მახლობელი, საკმარისად თხელი ფენა. მაშინ გვაქვს

$$R^{\alpha} = (1 + k_{\alpha} x^3 + k_{\alpha} (x^3)^2 + \dots) r^{\alpha}, \quad R^3 = n \quad (2.16a)$$

(α -ს მიმართ შეჯამება არ ხდება!).

ეს ტოლობები შეიძლება ჩაიწეროს S -ოჯახიდან ნებისმიერი კოორდინატთა სისტემის მიმართ მართებული

$$\begin{aligned}R^{\alpha} &= r^{\alpha} + x^3 b_{\beta}^{\alpha} r^{\beta} + (x^3)^2 b_{\lambda}^{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} r^{\beta} + \dots \\ R^3 &= n\end{aligned}\quad (2.16b)$$

ფორმით.

ამ მწკრივის ზოგადი წევრია

$$(x^3)^n b_{\lambda_1}^\alpha b_{\lambda_2}^{\lambda_1} \dots b_{\lambda_n}^{\lambda_{n-1}} r^\beta.$$

(2.16b)-ს თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= R^\alpha R^\beta = a^{\alpha\beta} + 2 x^3 b^{\alpha\beta} + 3 (x^3)^2 b_{\lambda}^{\alpha} b^{\lambda\beta} + \dots \\ g^{\alpha 3} &= g^{3\alpha} = 0, \quad g^{33} = 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.16a) და (2.17) ფორმულები შეიძლება სასრული ფორმით ჩავწეროთ. მივმართოთ (2.13) ფორმულებს. მათგან პირველი ორი შეიძლება გამოისახოს საერთო

$$R^\alpha = \Phi^{-1} \tilde{b}_\beta^\alpha r^\beta \quad (2.18)$$

ფორმით, სადაც

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\beta^\alpha &= a_\beta^\alpha - x^3 c_{\beta\gamma}^\alpha b_\gamma^\alpha = (1 - 2 H x^3) a_\beta^\alpha + x^3 b_\beta^\alpha, \\ \Phi &= (1 - k_1 x^3) (1 - k_2 x^3) = 1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (2.18) ფორმულები სამართლიანი რჩება ნებისმიერი S_g -პარამეტრიზაციისთვისაც. (2.18) ტოლობების გამოყენებით დავწერთ

$$g^{\alpha\beta} = \Phi^{-2} \tilde{b}_\lambda^\alpha \tilde{b}^{\lambda\beta} \quad (2.20)$$

ფორმულას, რომელიც $g^{\alpha\beta}$ -ს სასრული სახით გამოსახავს.

ვანვიხილოთ აგრეთვე გაფართოებული $\tilde{b}_j^i$ ტენზორი:

$$\tilde{b}_j^i = \begin{cases} \tilde{b}_\beta^\alpha, & \text{როცა } i = \alpha, \quad j = \beta, \\ K \delta_3^i \delta_j^3, & \text{როცა } i = 3 \text{ ან } j = 3. \end{cases} \quad (2.21)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\tilde{b}_j^i$ მე-2 რანგის შერეული ტიპის სივრცითი S -ტენზორია. მაშინ გვექნება შემდეგი ზოგადი ფორმულები:

$$R^i = \Phi^{-1} \tilde{b}_j^i r^j, \quad (2.22)$$

$$g^{ij} = \Phi^{-2} \tilde{b}_k^i \tilde{b}^k{}^j. \quad (2.23)$$

ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ არის ნებისმიერი S_g -პარამეტრიზაციის მიმართ $\tilde{S}: x^3 = c$ საკოორდინატო ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები გამოსახება

$$\tilde{b}_{\alpha\beta} = -R_\alpha n_\beta = b_{\alpha\beta} - x^3 b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \quad (2.24a)$$

ფორმულების საშუალებით. შერეული ტიპის შესაბამისი ტენზორი გამოისახება

$$\widehat{b}_\beta^\alpha = -R^\alpha{}_\beta \equiv \Phi^{-1} \widetilde{b}_\beta^\alpha b_\beta^\alpha \quad (2.24b)$$

ფორმულით. მაშასადამე, არის $S_{\Sigma, \eta}$ -პარამეტრიზაციის მიმართ

$$\widehat{k}_1 = \widehat{b}_1^1, \quad \widehat{k}_2 = \widehat{b}_2^2. \quad (2.25)$$

4. ქრისტოფელის სიმბოლოების გამოსახულებები. თუ (2.1, ბ) ტოლობებს გავაწარმოებთ და მხედველობაში მივიღებთ გაუსისა და ვეინგარტენის

$$r_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta, \lambda} r^\lambda + b_{\alpha\beta} n = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda r_\lambda + b_{\alpha\beta} n, \quad (2.26a)$$

$$\partial_\beta r^\lambda = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\lambda r^\gamma + b_\beta^\lambda n, \quad \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \quad (2.26b)$$

$$n_\alpha = -b_\alpha^\lambda r_\lambda = -b_{\alpha\lambda} r^\lambda \quad (2.26g)$$

ფორმულებს, გვექნება

$$R_{\alpha\beta} = [\Gamma_{\alpha\beta, \lambda} - x^3 (\nabla_\beta b_{\alpha\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma b_{\gamma\lambda})] r^\lambda + (b_{\alpha\beta} - x^3 b_\alpha^\lambda b_{\beta\lambda}) n, \quad (2.27a)$$

$$R_{\alpha 3} = b_{\alpha\lambda} r^\lambda \quad R_{33} = 0, \quad (2.27b)$$

სადაც ∇_β კოვარიანტული წარმოებულის სიმბოლოა S ზედაპირზე.

თუ ქრისტოფელის 1-ლი გვარის სივრცით სიმბოლოებს გამოვსახავთ

$$G_{ij, k} = R_{ij} R_k \quad (2.28)$$

ფორმულებით, (2.1 ბ) და (2.27 ა, ბ)-ს ძალით მივიღებთ

$$G_{\alpha\beta, \lambda} = \Gamma_{\alpha\beta, \lambda} - x^3 (\nabla_\beta b_{\alpha\lambda} + 2 \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma b_{\gamma\lambda}) + (x^3)^2 (b_\alpha^\gamma \nabla_\beta b_{\gamma\lambda} + b_{\lambda\gamma} b_\gamma^\nu \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu), \quad (2.28a)$$

$$G_{\alpha\beta, 3} = -G_{\alpha 3, \beta} = b_{\alpha\beta} - x^3 b_\alpha^\lambda b_{\beta\lambda}, \quad (2.28b)$$

$$G_{\alpha 3, 3} = 0, \quad G_{33, k} = 0. \quad (2.28g)$$

თუ S ზედაპირზე საკოორდინატო წირებად სიმრუდის წირებს აღვიღებთ, გვექნება

$$R_{\alpha\beta} = (1 - k_\alpha x^\beta) r_{\alpha\beta} - x^\beta \frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} r_\alpha, \quad (2.29a)$$

$$R_{3\alpha} = -k_\alpha r_\alpha, \quad R_{33} = 0 \quad (2.29b)$$

(α -ს მიმართ შეჯამება არ ხდება).

ამ შემთხვევაში (2.28 ა, ბ) ფორმულები მიიღებს

$$G_{\alpha\beta,\lambda} = (1 - k_\alpha x^\beta)(1 - k_\lambda x^\beta) \Gamma_{\alpha\beta,\lambda} - x^\beta (1 - k_\lambda x^\beta) \frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} a_{\alpha\lambda}, \quad (2.30a)$$

$$G_{\alpha\beta,\beta} = -G_{\alpha 3,\beta} = b_{\alpha\beta} (1 - k_\alpha x^\beta) \quad (2.30b)$$

სახეს. მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ამ ტოლობებში $a_{1i} = A^2$, $a_{22} = B^2$, $b_{11} = k_1 A^2$, $b_{22} = k_2 B^2$, $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, ხოლო ქრისტოფელის $\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}$ სიმბოლოები გამოისახება

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right) \equiv r_{\alpha\beta} r_\lambda \quad (2.31)$$

ფორმულებით.

შეენიშნოთ, რომ $G_{\alpha\beta,3}$ საკოორდინატო $\widehat{S}: x^3 = \text{const}$ ზედაპირის მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების ტოლია, $\widehat{G}_{\alpha\beta,3} = \widehat{b}_{\alpha\beta}$.

ვიპოვოთ ახლა მე-2 გვარის ქრისტოფელის სიმბოლოების გამოსახულებანი

$$G_{ik}^j = g^{jl} G_{ik,l} = R^j R_{ik}. \quad (2.32)$$

თუ ვისარგებლებთ (2.14) და (2.30 ა, ბ) ფორმულებით, მივიღებთ

$$G_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1 - k_\alpha x^\beta}{1 - k_\lambda x^\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \frac{x^\beta}{1 - k_\lambda x^\beta} \frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} a_\alpha^\lambda, \quad (2.32a)$$

$$G_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta} (1 - k_\alpha x^\beta), \quad G_{\alpha 3}^\beta = - \frac{b_\alpha^\beta}{1 - k_\beta x^3}, \quad (2.32b)$$

$$G_{\alpha 3}^3 = 0, \quad G_{33}^3 = 0. \quad (2.32c)$$

(α, β, λ -ს მიმართ შეჯამება არ ხდება!), სადაც

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = a^{\lambda\nu} \Gamma_{\alpha\beta,\nu} = r_{\alpha\beta} r^\lambda. \quad (2.33)$$

რადგან $k_1 = b_1^1$, $k_2 = b_2^1$, $b_1^1 = b_2^1 = 0$, ამიტომ (2.32a) ტოლობები შეიქმნება კიდევ შემდეგი სახით ჩაეწერათ:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}{}^\lambda &= \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda - \frac{x^3}{1 - k_{\lambda} x^3} \left(\frac{\partial b_{\alpha}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\nu} b_{\nu}{}^{\lambda} + \Gamma_{\beta\nu}{}^{\lambda} b_{\alpha}{}^{\nu} \right) = \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda - \frac{x^3}{1 - k_{\lambda} x^3} \nabla_{\beta} b_{\alpha}{}^{\lambda} \end{aligned} \quad (2.34)$$

(λ -ს მიმართ შეჯამება არ ხდება!) ან, თუ დავშლით x^3 -ის ხარისხების მიხედვით,

$$G_{\alpha\beta}{}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda - x^3 \nabla_{\beta} b_{\alpha}{}^{\lambda} - (x^3)^2 b_{\nu}^{\lambda} \nabla_{\alpha} b_{\beta}{}^{\nu} - \dots, \quad (2.34a)$$

ამ მწკრივის ზოგადი წევრია

$$-(x^3)^n b_{\nu_1}^{\lambda} b_{\nu_2}^{\nu_1} \dots b_{\nu_{n-1}}^{\nu_{n-2}} \nabla_{\alpha} b_{\beta}{}^{\nu_{n-1}}.$$

როგორც (2.34a)-დან ჩანს, $G_{\alpha\beta}{}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda$ სხვაობა წარმოადგენს ტენზორს ყოველ $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირზე. ამის გამო (2.34a) ფორმულა სამართლიანია არის ნებისმიერი S_g -პარამეტრიზაციისათვის. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}{}^3 &= b_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} x^3, \\ G_{\alpha\beta}{}^{\beta} &= -b_{\alpha}^{\beta} - x^3 b_{\nu}^{\beta} b_{\alpha}{}^{\nu} - (x^3)^2 b_{\nu_1}^{\beta} b_{\nu_2}^{\nu_1} b_{\alpha}{}^{\nu_2} - \dots \\ G_{3\alpha}{}^3 &= 0, \quad G_{3\beta}{}^{\alpha} = 0, \quad G_{33}{}^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

ამრიგად, $G_{\alpha\beta}{}^3$ და $G_{\alpha\beta}{}^{\beta}$ წარმოადგენს ტენზორებს ყოველ $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირზე.

5. მიახლოებითი ფორმულები. ვთქვათ, x^3 იცვლება $-h \leq x^3 \leq h$ შუალედში, სადაც h იმდენად მცირე სიდიდეა, რომ შეიძლება მივიღოთ

$$1 \mp k_1 h \cong 1, \quad 1 \mp k_2 h \cong 1. \quad (2.36)$$

ასეთ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი მიახლოებითი ფორმულებით:

$$R_{\alpha} = r_{\alpha}, \quad R_3 = n, \quad (2.37a)$$

$$R^{\alpha} = r^{\alpha}, \quad R^3 = n, \quad (2.37b)$$

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad g_{3\alpha} = g_{\alpha 3} = 0, \quad g_{33} = 1, \quad (2.38a)$$

$$g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha 3} = g^{3\alpha} = 0, \quad g^{33} = 1; \quad (2.38b)$$

$$G_{\alpha\beta,\lambda} = \Gamma_{\alpha\beta,\lambda} - x^\lambda \nabla_\beta b_{\alpha\lambda}, \quad G_{\alpha\beta,3} = b_{\alpha\beta}, \quad (2.39a)$$

$$G_{\alpha 3,\beta} = -b_{\alpha\beta}, \quad G_{\alpha 3,3} = 0, \quad G_{33,k} = 0:$$

$$G_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - x^\lambda \nabla_\alpha b_\beta^\lambda, \quad (2.39b)$$

$$G_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta}, \quad G_{\alpha 3}^\beta = -b_\alpha^\beta, \quad G_{\alpha 3}^3 = 0, \quad G_{33}^\lambda = 0.$$

ეს ტოლობები ჩვენ გამოვიყენეთ იმ შემთხვევაში, როცა საკოორდინატო წირები S ზედაპირზე სიმრუდის წირებს წარმოადგენს. მაგრამ ისინი სამართლიანია (იმავე ხარისხის სიზუსტით) ნებისმიერი სხვა სისტემის მიმართაც S -ოჯახიდან.

თუ S სფერული ზედაპირი ან წრიული ცილინდრია, მაშინ $\nabla_\alpha b_\beta^\lambda = 0$. ამ შემთხვევებში (2.39 ა, ბ) ფორმულები კიდევ უფრო მარტივდება და ლეზულობს

$$G_{\alpha\beta,\lambda} = \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}, \quad G_{\alpha\beta,3} = b_{\alpha\beta}, \quad (2.40a)$$

$$G_{\alpha 3,\beta} = -b_{\alpha\beta}, \quad G_{\alpha 3,3} = 0, \quad G_{33,k} = 0.$$

$$G_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda, \quad G_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta},$$

$$G_{\alpha 3}^\beta = -b_\alpha^\beta, \quad G_{\alpha 3}^3 = 0, \quad G_{33}^\lambda = 0 \quad (2.40b)$$

საჩეს.

§ 3. არის S_α -პარამეტრიზაცია

1. არის S_α -პარამეტრიზაცია. კავშირი S_α - და S_α -პარამეტრიზაციითა ბაზისებს შორის. მ აჩვენებს, სადაც შესრულებულია (2.15) პირობები, S -ოჯახიდან აღებული საკოორდინატო სისტემის ბაზისად შეიძლება ავიღოთ r_1, r_2, n ტრიადი, რომელიც უშუალოდ არის დაკავშირებული S ზედაპირთან.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$r_\alpha = \partial_\alpha r \quad (\alpha = 1, 2), \quad r_3 = n, \quad (3.1a)$$

$$r^\alpha = a^{\alpha\beta} r_\beta \quad (\alpha = 1, 2), \quad r^3 = n, \quad (3.1b)$$

$$a_{ij} = r_i r_j, \quad a^{ij} = r^i r^j, \quad a_j^i = r^i r_j = \delta_j^i. \quad (3.2)$$

გვაქვს

$$a_{ij}, a^{ij}, a_j^i = \begin{cases} a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}, a_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha = \delta_\alpha^\beta, & \text{როცა } i = \alpha, j = \beta, \\ \delta_{i1}, & \delta^{ij}, \delta_j^i, & \text{როცა } i = 3 \text{ ან } j = 3. \end{cases} \quad (3.3)$$

თუ S ზედაპირის $M(x^1, x^2)$ წერტილიდან r_1, r_2, r_3 და r^1, r^2, r^3 ტრიედრებს პარალელურად გადავიტანთ S -ის შესაბამისი ნორმალის გასწვრივ Ω არის $P(x^1, x^2, x^3)$ წერტილში, ამით ავაგებთ Ω არეში მოძრავი ტრიედრების ოჯახს, რომელიც ჩვენ შეიძლება გამოვიყენოთ მოძრავ ბაზისად შესაბამისი კოორდინატთა სისტემისათვის S -ოჯახიდან. კოორდინატთა სისტემას S -ოჯახიდან, რომელსაც ბაზისად r_1, r_2, r_3 ტრიედრი აქვს, Ω არის S_α -პარამეტრიზაციას ვუწოდებთ.

ადვილად მიიღება ფორმულები, რომლებიც S_α -პარამეტრიზაციის r_i და r^i ბაზისებს S_α -პარამეტრიზაციის R_i და R^i ბაზისებით გამოსაჩვენებ. ამ მიზნით შემოვიღეთ კიდევ ახალი აღნიშვნები:

$$b_{ij} = -r_i n_j, \quad b'_i = -r^i n_j, \quad b'^j = -r^j n^i \quad (n^i = a^{ih} n_h). \quad (3.4a)$$

გვაქვს

$$b_{ij}, b'^i, b'_j = \begin{cases} b_{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}, b'_\beta, & \text{როცა } i = \alpha, \quad j = \beta, \\ 0, & \text{როცა } i = 3 \text{ ან } j = 3. \end{cases} \quad (3.4b)$$

ახლა (2.1 ბ) და (2.22) ფორმულები შეგვიძლია

$$R_i = A_i^j r_j = A_{ij} r^j, \quad R^i = A^{ij} r_j = A^i_j r^j \quad (3.5a)$$

სახით ჩაეწეროს, სადაც

$$A_i^j = R_i r^j = a_i^j - x^3 b'_i, \quad A_{ij} = r_i R_j = a_{ij} - x^3 b_{ij}, \quad (3.6a)$$

$$A_i^j = R^i r^j = g^{ih} A_k^j, \quad A_k^j = R^j r_i = g^{jh} A_{ki}. \quad (3.6b)$$

ცხადია, R_i და R^i წარმოადგენს შესაბამისად კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ სივრცით S ტენზორებს $\tilde{V}(\Omega)$ მოდულიდან (იხ. III თავი, § 3, პუნქტი 3). ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ r_i და r^i აგრეთვე წარმოადგენს შესაბამისად კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ სივრცით S -ტენზორებს $\tilde{V}(\Omega)$ მოდულიდან. ამის გამო R_i, R^i, r_i, r^i S -ტენზორების ყველანაირი სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლები, ცხადია, აგრეთვე სივრცითი S -ტენზორები იქნება. მაშასადამე $a_{ij}, b_{ij}, A_{ij}, a'^i, b'^i, A'^i, a'_j, b'_j, A'_j$ წარმოადგენს შესაბამისად კოვარიანტულ, კონტრავარიანტულ და შერეული ტიპის მე-2 რანგის სივრცით S -ტენზორებს $\mathcal{M}(\Omega)$ -დან.

(3.5 ა) ფორმულების შებრუნებით ვღებულობთ

$$r_i = A_i^j R_j = A_{ji} R^j, \quad r^i = A^{ij} R_j = A^i_j R^j. \quad (3.5b)$$

ახლა ადვილად მივიღებთ აგრეთვე A^i_j და A^{ij} ტენზორების ცხად გამოსახულებებს a_{ij} და b_{ij} ტენზორების საშუალებით. (2.22) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$A^i_j = R^i r_j = \Phi^{-1} \tilde{b}^i_j, \quad A^{ij} = R^i r^j = \Phi^{-1} \tilde{b}^{ij}, \quad (3.6\text{გ})$$

სადაც

$$\tilde{b}^{ij} = a^{ik} \tilde{b}^j_k, \quad \Phi = 1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2. \quad (3.6\text{დ})$$

უფრო გაშლილი სახით (3.6 გ) ფორმულებს შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$A^i_i = \frac{(1 - 2Hx^3) a^i_i + x^3 b^i_i + (x^3)^2 K a^i_i a^i_i}{1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2}, \quad (3.7\text{ა})$$

$$A^{ij} = \frac{(1 - 2Hx^3) a^{ij} + x^3 b^{ij} + (x^3)^2 K a^{ij} a^{ij}}{1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2} \quad (3.7\text{ბ})$$

ამრიგად, კავშირი Φ არის S_a და S_g -პარამეტრიზაციებს შორის სორციელდება A_{ij} , A^i_j , A^i_i და A^{ij} სივრცითი S -ტენზორების საშუალებით, რომლებიც (3.6 ა, ბ) და (3.7 ა, ბ) ფორმულების მიხედვით ცხადი სახით გამოისახება a_{ij} , a^i_j , a^i_i , b_{ij} , b^i_j და b^i_i ტენზორებით. (3.3) და (3.4 ბ) ტოლობების თანახმად (3.6 ა) და (3.7 ა, ბ)-დან გვაქვს

$$A_a^b = a_a^b - x^3 b_a^b, \quad A_3^a = A_a^3 = 0, \quad A_3^3 = 1, \quad (3.8\text{ა})$$

$$A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - x^3 b_{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha 3} = A_{3\alpha} = 0, \quad A_{33} = 1, \quad (3.8\text{ბ})$$

$$A^b_a = \frac{a_a^b - x^3 c_{a\lambda} c^{b\lambda} b^b_\lambda}{1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2}, \quad A^3_a = A_a^3 = 0, \quad A^3_3 = 1, \quad (3.8\text{გ})$$

$$A^{ab} = \frac{a^{ab} - x^3 c^{a\lambda} c^{b\lambda} b_{\lambda\gamma}}{1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2}, \quad A^{a3} = A^{3a} = 0, \quad A^{33} = 1. \quad (3.8\text{დ})$$

(V, 10.8) და (V, 10.9) ფორმულების თანახმად S ზედაპირის რიმან-ქრისტოფელის ტენზორის კონტრაგარიანტული კომპონენტები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$R^{\alpha\beta\gamma} = b^{\alpha\beta} b^{\gamma\gamma} - b^{\alpha\gamma} b^{\beta\gamma} = K c^{\alpha\gamma} c^{\beta\gamma}. \quad (3.9)$$

მაშასადამე,

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\gamma} b_{\gamma\gamma} = K^{-1} R^{\alpha\beta\gamma} b_{\gamma\gamma} \quad (3.10)$$

და A^{ij} და A^i_j მატრიცები შეიძლება გამოვსახოთ S ზედაპირის რიზან — ქრისტოფელის ტენზორის საშუალებით:

$$A^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta} - x^3 K^{-1} R^{\alpha\beta\gamma} b_{\gamma\gamma}}{1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2}, \quad A^{33} = A^{3\alpha} = 0, \quad A^{33} = 1, \quad (3.11a)$$

$$A^{\alpha}_{\beta} = \frac{a^{\alpha}_{\beta} - x^3 K^{+1} R^{\alpha}_{\beta\gamma} b^{\gamma}_{\gamma}}{1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2}, \quad A^{\alpha}_{3} = A^3_{\alpha} = 0, \quad A^3_3 = 1. \quad (3.11b)$$

ამ ფორმულებს ჩვენ შემდეგ პარაგრაფში გამოვიყენებთ.

აღვიღად დავრწმუნდებით, რომ სამართლიანია

$$a_{ij} = a_{ik} a^k_j = a_{ik} a_{jm} a^{km}, \quad a^i_j = a^{ik} a_{kj}, \quad a^{ij} = a^{ik} a^l_k = a^{ik} a^{lm} a_{km}; \quad (3.11c)$$

$$b_{ij} = a_{ik} b^k_j = a_{ik} b_{jm} b^{km}, \quad b^i_j = a^{ik} b_{kj}, \quad b^{ij} = a^{ik} b^l_k = a^{ik} a^{lm} b_{km} \quad (3.11d)$$

ფორმულები. ამის გამო a_{ij} , a^{ij} , a^i_j (შესაბამისად b_{ij} , b^i_j , b^{ij}) ტენზორები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ეკვივალენტური სივრცითი S -ტენზორები. დამოკიდებულებანი მათ შორის მყარდება ინდექსთა ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციებით, რომლებიც a_{ij} და a^{ij} - S -ტენზორებით ხორციელდებიან. შემდგომში ამ ტენზორებს შესაბამისად a და b სიმბოლოებით აღვნიშნავთ.

როგორც ზემომოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, A_{ij} და A^{ij} , A^i_j და A^i_j მატრიცებს შეიძლება ვუყუროთ როგორც რაიმე A ტენზორის კომპონენტებს. აქ საჭიროა შევთანხმდეთ, რომ მისი კომპონენტები არ შეადგენს ჩვეულებრივი აზრით ეკვივალენტურ ტენზორებს. მათი პირველი ინდექსები ვერტიკალის გასწვრივ გადაინაცვლებენ g_{ij} და g^{ij} ტენზორებთან შეკვეცის შედეგად, ხოლო მეორე ინდექსები კი — ზედაპირის a_{ij} და a^{ij} ტენზორებთან შეკვეცის შედეგად.

მეორე S_{ξ} და S_{α} -პარამეტრიზაციების ერთდროული გამოყენების დროს ჩვენ სამი განსხვავებული სახის სივრცითი ტენზორი გვხვდება.

პირველი, ესაა სივრცითი ეკვივალენტური ტენზორები, რომელთა კომპონენტებს შორის კავშირი ინდექსების ატანით და ჩამოტანით ხორციელდება მეტრული g_{ij} და g^{ij} ტენზორების საშუალებით. ამ სახის ტენზორებს შემოკლებულად S_{ξ} -ტენზორებს ვუწოდებთ. S_{ξ} -ტენზორების მაგალითებს წარმოადგენს R_i , R^i , g_{ij} და g^{ij} .

მეორე, სივრცითი ეკვივალენტური S -ტენზორებია, რომელთა კომპონენტებს შორის კავშირი ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერა-

ციებით ხორციელდება a_{ij} და a^{ij} ტენზორების საშუალებით. ამ სახის ტენზორებს შემოკლებით S_{α} -ტენზორებს ვუწოდებთ. S_{α} -ტენზორების მაგალითებია r_i , r^i , a და b .

ბოლოს, მესამე სახის სივრცითი ეკვივალენტური S -ტენზორებია, რომელთა კომპონენტებს შორის კავშირი ინდექსების ატანითა და ჩამოტანით ხორციელდება ინდექსების ნაწილისათვის g_{ij} და g^{ij} ტენზორების, ხოლო დანარჩენებისთვის a_{ij} და a^{ij} ტენზორების საშუალებით. ამ სახის ტენზორებს შემოკლებით $S_{\alpha, \beta}$ -ტენზორებს ვუწოდებთ. $S_{\alpha, \beta}$ -ტენზორების მაგალითებია A_{ij} , A_i^j , A_j^i , A^{ij} .

A ($S_{\alpha, \beta}$ -ტენზორების) საშუალებით შეიძლება დავამყაროთ აგრეთვე კავშირი ტენზორთა კომპონენტებს შორის Ω არის S_{α} და S_{β} -პარამეტრიზაციების მიმართ.

შევთანხმდეთ, ტენზორთა კომპონენტების აღმნიშვნელი ინდექსები არის S_{α} -პარამეტრიზაციის შემთხვევაში შტრიხებით მოვნიშნოთ, ხოლო S_{β} -პარამეტრიზაციისთვის ინდექსებად უშტრიხოთ ასოები გამოვიყენოთ. ამ ინდექსებს სათანადოდ a და g -ინდექსებს ვუწოდებთ. ამის შესაბამისად შემდგომში A ტენზორის კომპონენტები მიზანშეწონილია A_{ij} , A_i^j , A^{ij} , A_j^i -ით აღვნიშნოთ. ეს გვიჩვენებს, რომ პირველი ინდექსების მიმართ ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები g_{ij} და g^{ij} ტენზორებით სრულდება, ხოლო მეორე ინდექსების მიმართ კი — a_{ij} , a^{ij} ტენზორებით. b ტენზორის კომპონენტებს b_{ij} , $b^i{}^j$, b_j^i -ით აღვნიშნავთ.

რადგან

$$R^i R_j = \delta_j^i, \quad r^i r_j = \delta_j^i, \quad (3.12)$$

ამიტომ გვაქვს

$$A_i^{k'} A_j^{l'} = g_{ij}^{l'}, \quad A_i^{k'} A_j^{l'} = a_i^{l'} \quad (3.13)$$

ფორმულები. ზემოთ მიღებული შეთანხმების თანახმად ინდექსების ატანითა და ჩამოტანით მივიღებთ

$$A_i^{k'} A_j^{l'} = g_{ij}^{l'}, \quad A_i^{k'} A_j^{l'} = g^{ll'}, \quad (3.14a)$$

$$A_i^{k'} A_j^{l'} = a_i^{l'}, \quad A_i^{k'} A_j^{l'} = a_i^{l'}, \quad (3.14b)$$

ფორმულებს. ეს ფორმულები შეიძლება ჩაევწეროთ

$$g_{ij} = a_{i'j'} A_i^{i'} A_j^{j'} = a^{i'i'} A_{i'}^i A_{j'}^j, \quad (3.15a)$$

$$g^{ij} = a_{i'j'} A^{i'i'} A^{j'j} = a^{i'i'} A_i^{i'} A_j^{j'}, \quad (3.15b)$$

$$a_{i'j'} = g_{ij} A_i^{i'} A_j^{j'} = g^{ij} A_{i'}^i A_{j'}^j, \quad (3.15c)$$

$$a^{i'i'} = g_{ij} A^{i'i'} A^{j'j} = g^{ij} A_i^{i'} A_j^{j'} \quad (3.15d)$$

სახითაც. ამ ფორმულების საშუალებით

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.16)$$

კვადრატული ფორმა, რომელიც ევკლიდეს სივრცის მეტრიკას გამოსახავს, მიიღებს

$$ds^2 = A_i^{i'} A_{j'}^{j} dx^i dx^j = a_{i'j'} A_i^{i'} A_j^{j'} dx^i dx^j \quad (3.17)$$

სახეს.

2. $\mathcal{M}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისები. S -ტენზორების წარმოდგენა S_g , S_a - და $S_{g,a}$ -ბაზისებით. p რანგის ტენზორთა $\mathcal{M}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისად შეგვიძლია ავიღოთ მულტიპლიკატიური S_g და S_a -ტენზორები

$$e_{i_1 \dots i_p} = R_{i_1} \dots \otimes R_{i_p}, \quad e^{i_1 \dots i_p} = R^{i_1} \dots \otimes R^{i_p} \quad (3.18)$$

$$e_{i'_1 \dots i'_p} = r_{i'_1} \dots \otimes r_{i'_p}, \quad e^{i'_1 \dots i'_p} = r^{i'_1} \dots \otimes r^{i'_p} \quad (3.19a)$$

$\mathcal{M}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისად შეგვიძლია განვიხილოთ აგრეთვე მულტიპლიკატიური შემდეგი სახის

$$e_{i_1 \dots i_k i'_{k+1} \dots i'_p} = R_{i_1} \dots \otimes R_{i_k} \otimes r_{i'_{k+1}} \dots \otimes r_{i'_p}, \quad (3.19b)$$

$$e_{i_1 \dots i_k}^{i'_{k+1} \dots i'_p} = R_{i_1} \dots \otimes R_{i_k} \otimes r^{i'_{k+1}} \dots \otimes r^{i'_p}$$

$S_{g,a}$ -ტენზორები. (3.5a) და (3.5b) ფორმულების თანახმად, მათ შორის კავშირი ხორციელდება

$$e_{i_1 \dots i_p} = A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_p}^{j_p} e_{j_1 \dots j_p} = A_{i_1 j_1} \dots A_{i_p j_p} e^{j_1 \dots j_p}, \quad (3.20a)$$

$$e^{i_1 \dots i_p} = A^{i_1 j_1} \dots A^{i_p j_p} e_{j_1 \dots j_p} = A^{i_1 j_1} \dots A^{i_p j_p} e^{j_1 \dots j_p}; \quad (3.20b)$$

$$e_{i'_1 \dots i'_p} = A_{i'_1}^{j_1} \dots A_{i'_p}^{j_p} e_{j_1 \dots j_p} = A_{j_1 i'_1} \dots A_{j_p i'_p} e^{j_1 \dots j_p}, \quad (3.21a)$$

$$e^{i'_1 \dots i'_p} = A^{j_1 i'_1} \dots A^{j_p i'_p} e_{j_1 \dots j_p} = A^{j_1 i'_1} \dots A^{j_p i'_p} e^{j_1 \dots j_p} \quad (3.21b)$$

ფორმულებით. თუ $p+q$ რანგის f ტენზორს შერეული $f_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ კომპონენტების საშუალებით

$$f = f_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1 \dots i_p} j_1 \dots j_q \quad (3.22a)$$

სახით წარმოვადგენთ, (3.20 ა, ბ)-ს თანახმად მივიღებთ

$$f = f_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} e^{i'_1 \dots i'_p} j'_1 \dots j'_q, \quad (3.22b)$$

სადაც

$$f_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} = f_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_p}^{i_p} A_{j_1}^{j'_1} \dots A_{j_q}^{j'_q} \quad (3.23a)$$

(2.13) ფორმულების საშუალებით ამ ტოლობების შებრუნების შედეგად გვექნება

$$f_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = f_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_p}^{i'_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q}. \quad (3.23b)$$

ტენზორი შეგვიძლია გამოვსახოთ შერეული ტიპის ბაზისის საშუალებითაც. მაგალითად, p რანგის f ტენზორი შეიძლება ჩავწეროთ

$$f = f_{i_{k+1} \dots i_p}^{i_1 \dots i_k} e_{i_{k+1} \dots i_p}^{i_{k+1} \dots i_p} \quad (3.23c)$$

სახით. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\begin{aligned} f_{i_{k+1} \dots i_p}^{i_1 \dots i_k} &= A_{i_{k+1}}^{i'_{k+1}} \dots A_{i_p}^{i'_p} f_{i'_{k+1} \dots i'_p}^{i_1 \dots i_k} = \\ &= A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_k}^{i_k} f_{i'_{k+1} \dots i'_p}^{i_1 \dots i_k}. \end{aligned} \quad (3.23d)$$

მაგალითად, A ტენზორისთვის გვაქვს ოთხი განსხვავებული ეკვივალენტური წარმოდგენა:

$$A = A_{ij}, e^{ij} \equiv A^{ij} e_{ij}, \equiv A^i_j e_i^j = A_i^j e_j^i. \quad (3.23e)$$

ამრიგად, p რანგის ყოველი S -ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შერეული ტიპის კომპონენტებით, რომლებსაც k გ-ინდექსი და $p-k$ ა-ინდექსი გააჩნიათ, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, $0 \leq k \leq p$.

თუ. (3.23ბ) ტოლობის მარცხენა მხარეში $f_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q}$ ტენზორის ზოგიერთ ქვედა და ზედა ინდექსებს გადავკაპავთ, (3.13)-ის მეორე

ტოლობების თანახმად მარჯვენა მხარეშიც $f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'}$ ტენზორის შესაბამისი ინდექსები გადაიჯაჭვება. მაშასადამე, $p + q = 2m$ რანგის S_a -ტენზორს, რომელიც $f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'}$ ტენზორის ინდექსების m -ჯერადი შეკვეცით მიიღება, შეესაბამება იმავე რანგის S_a -ტენზორი, რომელიც $f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'}$ S_a -ტენზორის შესაბამისი ინდექსების m -ჯერადი შეკვეცით მიიღება. მაგალითად, თუ დავუშვებთ, რომ $i_1 = j_1 = 1$ და გავითვალისწინებთ, რომ $A_{i_1'}^{j_1'} = \delta_{i_1'}^{j_1'}$, მივიღებთ

$$f_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = f_{i_1' i_2' \dots i_p'}^{j_1' j_2' \dots j_q'} A_{i_2'}^{i_2} \dots A_{i_p'}^{i_p} A_{j_2'}^{j_2} \dots A_{j_q'}^{j_q} \quad (3.23)$$

ფორმულას.

3. ვექტორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმომადგენლები S_a -პარამეტრიზაციის მიმართ. Ω არის S_g და S_a -პარამეტრიზაციების ერთდროული გამოყენებისას, გარდა 1-ლი და მე-2 გვარის ქრისტოფელის სივრცითი $G_{ij,k}$, G_{ij}^k და ზედაპირული $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ სიმბოლოებისა, მიზანშეწონილია განვიხილოთ $\Gamma_{i'j',k'}$, $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ სახის სიმბოლოები, რომლებიც $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ სიმბოლოების გარკვეულ გაფართოებებს წარმოადგენენ.

ვთქვათ f ვექტორია. წარმოვადგინოთ იგი

$$f = f^{i'} r_{i'} \quad (3.24a)$$

სახით. თუ f -ს x^h -ს მიმართ გავაწარმოებთ, გვექნება

$$\partial_{k'} f = \partial_{k'} f^{i'} r_{i'} + f^{i'} \partial_{k'} r_{i'}. \quad (3.25a)$$

რომ უზრუნველყოთ აღნიშვნათა ერთგვაროვნება, ჩვენ $\partial_{k'}$ და $\partial_{k'} = \frac{\partial}{\partial x^k}$ -ს გავაიგივებთ. მაგრამ $\partial_{k'} r_{i'}$ ვექტორ-ფუნქციები S_a -პარამეტრიზაციის ბაზისებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$\partial_{k'} r_{i'} = \Gamma_{k'i',j'} r^{j'} = \Gamma_{k'i'}^{j'} r_{j'} \quad (3.26a)$$

სახით, სადაც, ცხადია,

$$\Gamma_{k'i',j'} = r_{j'} \partial_{k'} r_{i'}, \quad \Gamma_{k'i'}^{j'} = r^{j'} \partial_{k'} r_{i'}. \quad (3.27)$$

აქედან გვაქვს

$$\Gamma_{k'i',j'} = a_{j'm'} \Gamma_{k'i'}^{m'}, \quad \Gamma_{k'i'}^{j'} = a^{j'm'} \Gamma_{k'i',m'}. \quad (3.27a)$$

დამოკიდებულებები. გაუსისა და ვეინგარტენის სადერივაცია (3.20ა, ბ) ფორმულებისა და, აგრეთვე, $\partial_\alpha r_{i'} = 0$ ტოლობების თანახმად, გვექნება

$$\Gamma_{k'i',j'}, \Gamma_{k'i',j'} = \begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}, \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \text{ როცა } k' = \alpha, i' = \beta, j' = \gamma, \\ b_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, \text{ როცა } k' = \alpha, i' = \beta, j' = 3, \\ -b_{\alpha\beta}, -b_{\alpha\beta}^\beta, \text{ როცა } k' = \alpha, i' = 3, j' = \beta, \\ 0, 0, \text{ როცა } k' = 3 \text{ ან } k = \alpha \text{ და } i' = j' = 3. \end{cases} \quad (3.27\text{ბ})$$

$\Gamma_{k'i',j'}$ და $\Gamma_{k'i',j'}$ სიდიდეებს არის S_α -პარამეტრიზაციის ქრისტოფელის შესაბამისად 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოები ანუ, შემოკლებით, ქრისტოფელის S_α -სიმბოლოები ეწოდოთ. მაშინ, ბუნებრივია, G_{ij}^h და $G_{ij,k}$ -ს ქრისტოფელის S_α -სიმბოლოები ეწოდოთ. მნიშვნელოვანია, რომ ეს სიმბოლოები x^α კოორდინატზე არაა დამოკიდებული.

ცხადია, გვაქვს

$$\begin{aligned} \partial_\alpha r_{j'} &= \partial_\alpha (R_{j'})_{x^\alpha} = 0 = (\partial_\alpha R_{j'})_{x^\alpha} = 0 = (G_{\alpha j'}^i R_i)_{x^\alpha} = 0 = \\ &= (G_{\alpha j'}^i)_{x^\alpha} = 0 r_{i'} = \Gamma_{\alpha j'}^{i'} r_{i'} \quad (\partial_\alpha \equiv \partial_\alpha). \end{aligned} \quad (3.27\text{გ})$$

მაშასადამე,

$$\Gamma_{\alpha j'}^{i'} = (G_{\alpha j'}^i)_{x^\alpha} = 0. \quad (3.27\text{დ})$$

რადგან $\Gamma_{3j'}^{i'} = 0$, ამიტომ (3.27დ) ტოლობა, როცა $\alpha = 3$, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა.

(3.26 ა)-ს თანახმად (3.25 ა) ტოლობა ლებულობს

$$\partial_{k'} f = \widetilde{\nabla}_{k'} f^{i'} r_{i'}, \quad \partial_{k'} \equiv \partial_{k'} \quad (3.28\text{ა})$$

სახეს, სადაც

$$\widetilde{\nabla}_{k'} f^{i'} = \partial_{k'} f^{i'} + \Gamma_{k'j'}^{i'} f^{j'} \quad (3.29\text{ა})$$

ეს ფორმულა გამოსახავს ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოდებულებებს არის S_α -პარამეტრიზაციის მიმართ.

ახლა თუ f ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტებით

$$f = f_{i'} r^{i'} \quad (3.24\text{ბ})$$

სახით წარმოვადგენთ და ამ ტოლობას x^h კოორდინატებით გავაწარმოებთ, მივიღებთ

$$\partial_{k'} f = \partial_{k'} f_{i'} r^{i'} + f_{i'} \partial_{k'} r^{i'}. \quad (3.25\text{ბ})$$

$\partial_k r'$ ვექტორ-ფუნქციებს თუ Ω არის S_a -პარამეტრიზაციის r' ბაზისით გამოვსახავთ, გვექნება

$$\partial_k r' = \tilde{\Gamma}_{k,j'} r', \quad (3.25\text{გ})$$

სადაც

$$\tilde{\Gamma}_{k,j'} = r_{j'} \partial_k r' = \partial_k (r_{j'} r') = r' \partial_k r_{j'}. \quad (3.25\text{დ})$$

რადგან $r_{j'} r' = \delta_{j'}^i$, ამიტომ (3.13)-ის მეორე ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\tilde{\Gamma}_{k,j'} = -r' \partial_k r_{j'} = -\Gamma_{k,j'}{}^{i'} \quad (3.27\text{ე})$$

მაშასადამე,

$$\partial_k r' = -\Gamma_{k,j'}{}^{i'} r' \quad (3.26\text{ბ})$$

თუ ამ გამოსახულებას (3.25 ბ) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\partial_k f = \tilde{\nabla}_k f_{i'} r' \quad (3.28\text{ბ})$$

ფორმულას, სადაც

$$\tilde{\nabla}_k f_{i'} = \partial_k f_{i'} - \Gamma_{k,i'}{}^{j'} f_{j'}. \quad (3.29\text{ბ})$$

ეს ფორმულა გამოსახავს ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს Ω არის S_a -პარამეტრიზაციის მიმართ.

ახლა (3.27ბ) ფორმულების თანახმად, შეგვიძლია უფრო ცხადად ამოვწეროთ $\tilde{\nabla}_k f^{i'}$ და $\tilde{\nabla}_k f_{i'}$ გამოსახულებები შემდეგი

$$\tilde{\nabla}_k f^{i'}, \tilde{\Delta}_k f_{i'} = \begin{cases} \nabla_{\alpha'} f^{\beta'} - b_{\alpha'}^{\beta'} f^{\gamma'}, & \nabla_{\alpha'} f_{\beta'} - b_{\alpha'\beta'} f^{\gamma'}, & k' = \alpha', i' = \beta', \\ \partial_{\alpha'} f^{\gamma'} - b_{\alpha'\beta'} f^{\beta'}, & \partial_{\alpha'} f_{\beta'} + b_{\alpha'}^{\beta'} f_{\beta'}, & k' = \alpha, i' = 3, \\ \partial_3 f^{i'}, & \partial_3 f_{i'}, & k' = 3 \end{cases} \quad (3.29\text{გ})$$

სახით, სადაც $\nabla_{\alpha'} \equiv \nabla_{\alpha}$ წარმოადგენს კოვარიანტული გაწარმოების სიმბოლოს S ზედაპირის მეტრიკის მიმართ,

$$\nabla_{\alpha'} f^{\beta'} = \partial_{\alpha'} f^{\beta'} + \Gamma_{\alpha'\gamma'}{}^{\beta'} f^{\gamma'}, \quad \nabla_{\alpha'} f_{\beta'} = \partial_{\alpha'} f_{\beta'} - \Gamma_{\alpha'\beta'}{}^{\gamma'} f_{\gamma'} \quad (3.29\text{დ})$$

($\partial_{\alpha'} = \partial_{\alpha}$, $\nabla_{\alpha'} = \nabla_{\alpha}$).

4. S -ტენზორების კოვარიანტული წარმოებულებები S_a -პარამეტრიზაციის მიმართ. ქვემოთ ჩვენ ამოვწერთ აგრეთვე მე-2 რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულების ფორმულებს Ω არის S_a -პარა-

მეტრიზაციის მიმართ. თუ (3.27 ა, ბ) ფორმულებს ფორმალურად გამოვიყენებთ r_i , და r'^i -სათვის, (3.26 ა, ბ) სადერივაციო ფორმულები შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\widetilde{\nabla}_k r_i = 0, \quad \widetilde{\nabla}_k r'^i = 0, \quad k', i' \in [1, 3] \quad (3.26\text{ე})$$

სახით. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\widetilde{\nabla}_k e_{i'j'} = 0, \quad \widetilde{\nabla}_k e_{i'j'} = 0, \quad \widetilde{\nabla}_k e_{i'j'} = 0, \quad \widetilde{\nabla}_k e^{i'j'} = 0. \quad (3.26\text{დ})$$

სადერივაციო ფორმულები არის S_g -პარამეტრიზაციის ბაზისებისთვის შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\widehat{\nabla}_k R_i = \partial_k R_i - G_{ki}{}^j R_j = 0, \quad \widehat{\nabla}_k R^i = \partial_k R^i + G_{ki}{}^j R^j = 0 \quad (3.26\text{ე})$$

სახით (იხ. IV თავი, § 2, პუნქტი 7). თუ ახლა (2.26 გ, ე) ტოლობებს გამოვიყენებთ, ვაჩვენებთ აგრეთვე, რომ

$$\widehat{\widehat{\nabla}}_k e_{ij'} = \partial_k e_{ij'} - G_{ki}{}^l e_{lj'} - \Gamma_{k'j'}{}^{i'} e_{il'} = 0,$$

$$\widehat{\widehat{\nabla}}_k e_{i'j} = \partial_k e_{i'j} - G_{ki}{}^l e_{l'j} + \Gamma_{k'j'}{}^{i'} e_{il'} = 0,$$

$$\widehat{\widehat{\nabla}}_k e_{i'j'} = \partial_k e_{i'j'} + G_{ki}{}^l e_{l'j'} - \Gamma_{k'j'}{}^{i'} e_{il'} = 0, \quad (3.26\text{ვ})$$

$$\widehat{\widehat{\nabla}}_k e^{ij'} = \partial_k e^{ij'} + G_{ki}{}^l e^{lj'} + \Gamma_{k'j'}{}^{i'} e^{il'} = 0,$$

$$(k = k', \quad \partial_k = \partial_{k'}).$$

თუ მე-2 რანგის f ტენზორს

$$f = f^{i'j'} e_{i'j'} = f_{i'j'} e^{i'j'} = f_{i'j'} e^{i'j'} = f_{i'j'} e^{i'j'} \quad (3.30\text{ა})$$

და

$$f = f^{i'j'} e_{ij'} = f_{i'j'} e_{ij'} = f_{i'j'} e_{ij'} = f_{ij'} e^{i'j'} \quad (3.30\text{ბ})$$

სახით წარმოვადგენთ, ხოლო შემდეგ x^k კოორდინატით გავაწარმოებთ, მაშინ (3.26 ე, ვ) სადერივაციო ფორმულების თანახმად მივიღებთ

$$\partial_k f = \widetilde{\nabla}_k f^{i'j'} e_{i'j'} = \widetilde{\nabla}_k f_{i'j'} e^{i'j'} = \widetilde{\nabla}_k f_{i'j'} e^{i'j'} = \widetilde{\nabla}_k f_{ij'} e^{i'j'} \quad (3.31\text{ა})$$

და

$$\partial_k f = \widehat{\widehat{\nabla}}_k f^{i'j'} e_{ij'} = \widehat{\widehat{\nabla}}_k f_{i'j'} e_{ij'} = \widehat{\widehat{\nabla}}_k f_{i'j'} e_{ij'} = \widehat{\widehat{\nabla}}_k f_{ij'} e^{i'j'}. \quad (3.31\text{ბ})$$

სადაც

$$\widetilde{\nabla}_k f^{i'j'} = \partial_k f^{i'j'} + \Gamma_{k'm'}^{i'j'} f^{m'} + \Gamma_{k'm'}^{j'i'} f^{m'}, \quad (3.32a)$$

$$\widetilde{\nabla}_k f_{i'j'}^{..} = \partial_k f_{i'j'}^{..} + \Gamma_{k'm'}^{i'j'} f_{m'}^{..} - \Gamma_{k'j'm'}^{i'} f_{m'}^{..}, \quad (3.32b)$$

$$\widetilde{\nabla}_k f_{i'j'} = \partial_k f_{i'j'} - \Gamma_{k'l'}^{i'm'} f_{m'j'} - \Gamma_{k'l'}^{j'm'} f_{im'}, \quad (3.32g)$$

$$\widehat{\nabla}_k f^{ij} = \partial_k f^{ij} + G_{kl}^i f^{lj} + \Gamma_{kl}^{ij} f^{..}, \quad (3.32d)$$

$$\widehat{\nabla}_k f_{i'j'}^{..} = \partial_k f_{i'j'}^{..} + G_{kl}^i f_{i'j'}^{..} - \Gamma_{kl}^{ij} f_{i'j'}^{..}, \quad (3.32e)$$

$$\widehat{\nabla}_k f_{i'j'} = \partial_k f_{i'j'} - G_{kl}^i f_{i'j'} - \Gamma_{kl}^{ij} f_{i'j'}^{..}, \quad (3.32v)$$

$$\widehat{\nabla}_k f_{ij} = \partial_k f_{ij} - G_{kl}^i f_{ij} - \Gamma_{kl}^{ij} f_{ij}^{..}. \quad (3.32z)$$

(3.32 ა — ზ) ფორმულებიდან ადვილად გამოვძინავენ ზოგადი წესი: მე-2 რანგის $S_{g,a}$ -ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული გაწარმოებისას g -ინდექსებისთვის (შესაბამისად a -ინდექსებისთვის) გამოიყენება ქრისტოფელის მე-2 გვარის G_{kl}^i სიმბოლოები S_g -პარამეტრიზაციის შემთხვევაში (შესაბამისად ქრისტოფელის მე-2 გვარის Γ_{kl}^{ij} S -სიმბოლოები S_a -პარამეტრიზაციისათვის). სხვა ზნაოვ კოვარიანტული გაწარმოების ფორმულათა ზოგადი სტრუქტურა სავსებით შენარჩუნებულია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს წესი საძირითიანი რჩება ნებისმიერი რანგის $S_{g,a}$ -ტენზორისათვის.

ამგვარად, სივრცის სხვადასხვა S -პარამეტრიზაციის შემთხვევაში მიზანშეწონილია სამი სხვადასხვა სახის კოვარიანტული გაწარმოების ოპერატორის გამოყენება. $\widehat{\Delta}_i$ (შესაბამისად, $\widehat{\nabla}_i$) სიმბოლოები აღნიშნავს კოვარიანტული გაწარმოების სიმბოლოებს, რომლებიც გამოისახებიან ქრისტოფელის მე-2 გვარის G_{ij}^k სიმბოლოებით S_g -პარამეტრიზაციისათვის (შესაბამისად, ქრისტოფელის მე-2 გვარის Γ_{ij}^{kl} S -სიმბოლოებით S_a -პარამეტრიზაციისათვის). ამას გარდა, განვიხილავთ შერეული ტიპის კოვარიანტული გაწარმოების $\widehat{\nabla}_i$ ოპერატორებს, რომლებიც გამოიყენებიან $S_{g,a}$ -ტენზორებზე და g -ინდექსების (შესაბამისად a -ინდექსების) მიმართ გამოისახებიან G_{ij}^k -თი (შესაბამისად Γ_{ij}^{kl} -ით). ამრიგად, $\widehat{\nabla}_i$, $\widetilde{\nabla}_i$ და $\widehat{\nabla}_i$ სიმბოლოები კოვარიანტული გაწარმოების ოპერატორებს აღნიშნავს სივრცის შესაბამისად S_g -, S_a - და $S_{g,a}$ -ტენზორებისათვის. კოვარიანტული გაწარმოების ფორმულებს ნებისმიერი რანგის

S-ტენზორებისთვის აქ არ ამოეწერთ. ისინი ადვილად მიიღებიან (3.32 ა—ზ) ფორმულების ანალოგიით.

(3.27 ბ) ტოლობების თანახმად (3.32 ა—გ) ფორმულები შეიძლება ჩაეწეროს

$$\tilde{\nabla}_k f^{i'j'} = \begin{cases} \nabla_\alpha f^{\alpha'\beta'} - b_{\alpha'}^{\beta'} f^{\alpha\gamma'} - b_{\alpha'}^{\gamma'} f^{\beta\alpha}, & k' = \alpha', i' = \beta, j' = \gamma, \\ \nabla_\alpha f^{\beta'\gamma} - b_{\alpha'}^{\beta'} f^{\alpha\gamma} + b_{\alpha'\gamma'} f^{\beta\alpha'}, & k' = \alpha', i' = \beta, j' = 3, \\ \nabla_\alpha f^{\alpha\gamma'} - b_{\alpha'}^{\gamma'} f^{\alpha\beta} + b_{\alpha'\beta} f^{\beta\gamma'}, & k' = \alpha', i' = 3, j' = \gamma, \\ \nabla_\alpha f^{\alpha\beta} + b_{\alpha'\beta} f^{\beta\gamma} + b_{\alpha'\gamma} f^{\beta\alpha'}, & k' = \alpha, i' = j' = 3, \\ \partial_3 f^{i'j'}, & k' = 3; \end{cases} \quad (3.33a)$$

$$\tilde{\nabla}_k f_{i'j'} = \begin{cases} \nabla_\alpha f_{\beta'\gamma'} - b_{\alpha'}^{\beta'} f_{\gamma'} + b_{\alpha'\gamma'} f_{\beta'}, & k' = \alpha, i' = \beta', j' = \gamma, \\ \nabla_\alpha f_{\beta'} - b_{\alpha'}^{\beta'} f_{\beta} + b_{\alpha'}^{\gamma'} f_{\gamma'}, & k' = \alpha', i' = \beta', j' = 3, \\ \nabla_\alpha f_{\gamma'} - b_{\alpha'\beta} f_{\beta'} + b_{\alpha'\gamma'} f_{\beta}, & k' = \alpha', i' = 3, j' = \gamma', \\ \nabla_\alpha f_{\beta} - b_{\alpha'\beta} f_{\beta'} + b_{\alpha'}^{\gamma'} f_{\gamma'}, & k' = \alpha', i' = 3, j' = 3, \\ \partial_3 f_{i'j'}, & k' = 3; \end{cases} \quad (3.33b)$$

$$\tilde{\nabla}_k f_{i'j'} = \begin{cases} \Delta_\alpha f_{\beta'\gamma'} - b_{\alpha'\beta} f_{\gamma'} - b_{\alpha'\gamma'} f_{\beta'}, & k' = \alpha', i' = \beta', j' = \gamma, \\ \nabla_\alpha f_{\beta\gamma} - b_{\alpha'\beta} f_{\alpha\gamma} + b_{\alpha'}^{\gamma'} f_{\beta\gamma'}, & k' = \alpha', i' = \beta', j' = 3, \\ \nabla_\alpha f_{\alpha\gamma'} + b_{\alpha'}^{\beta'} f_{\beta\gamma} - b_{\alpha'\gamma'} f_{\alpha\beta}, & k' = \alpha', i' = 3, j' = \gamma, \\ \nabla_\alpha f_{\alpha\beta} + b_{\alpha'}^{\beta'} f_{\beta\gamma} + b_{\alpha'}^{\gamma'} f_{\alpha\beta'}, & k' = \alpha', i' = 3, j' = 3, \\ \partial_3 f_{i'j'}, & k' = 3 \end{cases} \quad (3.33g)$$

სახით, სადაც ∇_α სიმბოლოებით ჩვენ აღენიშნავენ S ზედაპირის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს: $\nabla_\alpha \equiv \nabla_\alpha$.

თუ (3.33) ფორმულებს გამოვიყენებთ $a_{i'j'}$, $a^{i'j'}$, $a_j^{i'}$ ტენზორებზე, მივიღებთ

$$\tilde{\nabla}_k a_{i'j'} = 0, \quad \tilde{\nabla}_k a^{i'j'} = 0, \quad \tilde{\nabla}_k a_j^{i'} = 0 \quad (3.33დ)$$

ტოლობებს. დავამტკიცოთ, მაგალითად, პირველი ტოლობები. (3.27) და (3.27 ა) ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} \partial_k a_{i'j'} &= \partial_k (r_{i'} r_{j'}) = r_{j'} \partial_k r_{i'} + r_{i'} \partial_k r_{j'} = \\ &= \Gamma_{k i' l'} r_{l'} + \Gamma_{k j' l'} r_{l'} = \Gamma_{k i' l'} a_{m l'} + \Gamma_{k j' l'} a_{l' m} \end{aligned}$$

ტოლობები, რომლებიც (3.32გ) ფორმულების თანახმად შეგვიძლია $\widetilde{\nabla}_k a_{i'j'} = 0$ სახით ჩაეწეროს, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა. (3.33დ)-ს დანარჩენი ტოლობები ანალოგიურად მტკიცდება.

(3.33 დ) ფორმულების ძალით $a_{i'j'}$ და $a^{i'j'}$ ტენზორები შეიძლება გადავსვათ S_a -ტენზორების კომპონენტების კოვარიანტული გაწარმოების $\widetilde{\nabla}_k$ სიმბოლოებთან. თუ შემოვიღებთ აგრეთვე კონტრავარიანტული გაწარმოების

$$\widetilde{\nabla}^k f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} = a^{k'm'} \widetilde{\nabla}_{m'} f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} \quad (3.33\text{ე})$$

ოპერატორებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $n = p + q$ რანგის S_a -ტენზორის (p, q) -კომპონენტების $\widetilde{\nabla}_k$ კოვარიანტული წარმოებულები $(p + 1, q)$ ტიპის და, მაშასადამე, $n + 1$ რანგის S_a -ტენზორს შეადგენს.

(3.32) ფორმულების გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ

$$\widehat{\nabla}_k A_{ij'} = 0, \quad \widehat{\nabla}_k A_{i'}^{j'} = 0, \quad \widehat{\nabla}_k A_{i'}^{j''} = 0, \quad \widehat{\nabla}_k A^{i''j''} = 0 \quad (3.34)$$

ტოლობები. მაგრამ ისინი უფრო მარტივად დამტკიცდება სადერივაციო (3.26 გ, დ) ფორმულების გამოყენებით. დავამტკიცოთ, მაგალითად, (3.34)-ის პირველი ტოლობა. გვაქვს

$$\widehat{\nabla}_k A_{ij'} = \widehat{\nabla}_k (R_i r_{j'}) = (\widehat{\nabla}_k R_i) r_{j'} + R_i (\widehat{\nabla}_k r_{j'}) = 0.$$

დანარჩენი ტოლობები ანალოგიურად დამტკიცდება.

თუ $f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'}$ S_a -ტენზორის $f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'}$ S_a -ტენზორით წარმოდგენის (3.23ბ) ფორმულით ვისარგებლებთ, (3.24) ტოლობების გამოყენებით დავამტკიცებთ

$$\widehat{\nabla}_k f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} = A_{j_1'}^{i_1'} \dots A_{j_q'}^{i_q'} A_{i_1'}^{i_1'} \dots A_{i_p'}^{i_p'} \widetilde{\nabla}_k f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} \quad (3.35\text{ა})$$

($k = k'$)

მნიშვნელოვან ფორმულას. სამართლიანია აგრეთვე უფრო ზოგადი ფორმულა ნებისმიერი რანგის $S_{g,a}$ -ტენზორისთვის. მას ამოვწერთ

$$\widehat{\nabla}_k f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} = A_{i_1'}^{i_1'} \dots A_{i_p'}^{i_p'} \widetilde{\nabla}_k f_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'} \quad (3.35\text{ბ})$$

($k = k'$)

ფორმით.

კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ მნიშვნელოვანი გარემოება, რომ არის S_α -პარამეტრიზაციისათვის ქრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის $\Gamma_{k'l',j}, \Gamma_{k'l',j}'$ სიმბოლოები, რომელთა საშუალებით გამოისახება $\tilde{\nabla}_k x^j$ კოორდინატზე არაა დამოკიდებული. როგორც (2.28 ა — გ) და (2.34 ა) ფორმულებიდან ჩანს, ეს თვისება არ გააჩნია არის S_α -პარამეტრიზაციის ქრისტოფელის სიმბოლოებს და, მაშასადამე, $\tilde{\nabla}_k$ და $\tilde{\nabla}_k$ ოპერატორებს. კოვარიანტული გაწარმოების $\tilde{\nabla}_k$ ოპერატორების აღნიშნული თვისება არის S_α -პარამეტრიზაციის მიმართ ზოგჯერ საშუალებას გვაძლევს x^j -ზე დამოკიდებული კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებები მივიყენოთ ისეთ განტოლებებზე, რომელთა კოეფიციენტები ამ ცვლადზე აღარ არიან დამოკიდებული.

5. არის $S_{\alpha,\alpha}$ -პარამეტრიზაცია, რომელიც დაკავშირებულია S ზედაპირის კოორდინატთა სისტემასთან სიმრუდის წირებში. განვიხილოთ ახლა Ω არის S -პარამეტრიზაცია, რომელიც დაკავშირებულია S ზედაპირის კოორდინატთა სისტემასთან სიმრუდის წირებში. მაშინ (3.8 ა — გ) ფორმულები

$$\begin{aligned} A_{1i}' &= 1 - k_1 x^3, & A_{2i}' &= 1 - k_2 x^3, & A_{3i}' &= 1, \\ A_{i1}' &= 0, & \text{როცა } i &\neq j', & & (3.36) \\ A_{1j}' &= (1 - k_1 x^3)^{-1}, & A_{2j}' &= (1 - k_2 x^3)^{-1}, \\ A_{3j}' &= 1, & A_{ij}' &= 0, \text{ როცა } i &\neq j' \end{aligned}$$

სახეს ღებულობს. (3.35 ბ) და (3.36) ფორმულების ძალით გვექნება

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_k f_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \tilde{f}_{j_{n+1} \dots j_p}^{i'_{m+1} \dots i'_q} = \\ = (1 - k_{\underline{i}_1} x^3)^{-1} \dots (1 - k_{\underline{i}_m} x^3)^{-1} (1 - k_{\underline{j}_1} x^3) \dots \\ \dots (1 - k_{\underline{j}_n} x^3) \tilde{\nabla}_k f_{j_1' \dots j_n' \dots j_p'}^{i_1' \dots i_m' \dots i_q'}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

სადაც

$$k_s = 0, \quad i_s = i'_s, \quad j_l = j'_l, \quad s \in [1, m], \quad l \in [1, n].$$

თუ $k_\alpha x^3$ ნამრავლების აბსოლუტური სიდიდეები მცირეა, შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$1 - k_\alpha x^3 \cong 1. \quad (3.38)$$

მაშინ გვექნება მიახლოებითი

$$A'_{j'} \cong \delta'_{j'}, \quad (3.39)$$

$$\widetilde{\nabla}_k f_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \widetilde{\nabla}_{k'} f_{j_{n+1} \dots j_p}^{i'_{m+1} \dots i'_q} \cong \widetilde{\nabla}_{k'} f_{j_1 \dots j_p}^{i'_1 \dots i'_q} \quad (3.40)$$

ფორმულები. ეს ფორმულები, მათი ტენზორული ბუნების ძალით, შეიძლება შევინარჩუნოთ Ω არის ნებისმიერი S -პარამეტრიზაციის მიმართაც.

6. S -ტენზორების განმეორებითი კოვარიანტული წარმომადგენლები. დავამტკიცოთ ახლა, რომ $\widetilde{\nabla}_i$ ოპერატორების S_a -ტენზორებზე განმეორებითი გამოყენების შედეგი, საზოგადოდ, დამოკიდებულია ამ ოპერატორების რიგზე. ეს საკმარისია დავამტკიცოთ ვექტორის შემთხვევაში. f ვექტორი წარმოვადგინოთ

$$f = f^{k'} r_{k'} \quad (3.41a)$$

სახით. ამ ტოლობის გაწარმოებით (3.26 გ) ფორმულების თანახმად, დავწერთ

$$\partial_{i'} f = \widetilde{\nabla}_{i'} f^{k'} r_{k'} \quad (i' = i). \quad (3.41b)$$

უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოებით და ისევ (3.26 გ) ფორმულების გამოყენებით ადვილად გამოვიყვანთ

$$\partial_{j'} \partial_{i'} f = \widetilde{\nabla}_{j'} \widetilde{\nabla}_{i'} f^{k'} r_{k'} + \Gamma_{j' i'}^{m'} \widetilde{\nabla}_{m'} f^{k'} r_{k'} \quad (3.41g)$$

ტოლობებს. მათი მარცხენა მხარეები არ შეიცვლება i' და j' ინდექსების გადასმისას. ამის გამო გვაქვს

$$\widetilde{\nabla}_{j'} \widetilde{\nabla}_{i'} f^{k'} - \widetilde{\nabla}_{i'} \widetilde{\nabla}_{j'} f^{k'} = (\Gamma_{i' j'}^{m'} - \Gamma_{j' i'}^{m'}) \widetilde{\nabla}_{m'} f^{k'} \quad (3.42)$$

ვთქვათ, $i' = \alpha'$, $j' = \beta'$. მაშინ

$$\Gamma_{\alpha' \beta'}^{m'} = \Gamma_{\beta' \alpha'}^{m'}. \quad (3.43)$$

ამიტომ (3.42)-დან გვაქვს

$$\widetilde{\nabla}_{\alpha'} \widetilde{\nabla}_{\beta'} f^{k'} = \widetilde{\nabla}_{\beta'} \widetilde{\nabla}_{\alpha'} f^{k'} \quad (3.43a)$$

თუ $i' = 3$, $j' = \alpha'$, მაშინ

$$\Gamma_{3\alpha'}^{m'} = 0, \quad \Gamma_{\alpha'3}^{m'} = -b_{\alpha'}^{m'} \quad (3.43b)$$

მაშასადამე, (3.42)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\widetilde{\nabla}_{\alpha'} \widetilde{\nabla}_3 f^{k'} = \widetilde{\nabla}_3 \widetilde{\nabla}_{\alpha'} f^{k'} + b_{\alpha'}^{3'} \widetilde{\nabla}_{\beta'} f^{k'} \quad (3.43g)$$

ამრიგად, საზოგადოდ,

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta f^{h'} \neq \widetilde{\nabla}_\beta \widetilde{\nabla}_\alpha f^{h'}. \quad (3.44)$$

7. კავშირი ქრისტოფელის G_{ik}^I და $\Gamma_{i,j'}^{h'}$ სიმბოლოებს შორის. $A_{i,j'}^I$ და $A_{i,j'}^I$ ტენზორების საშუალებით შეიძლება დავამყაროთ კავშირი ქრისტოფელის G_{ik}^I და $\Gamma_{i,j'}^{h'}$ სიმბოლოებს შორის.

$$R_i = A_{i,m'}^{m'} r_{m'}$$

ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \partial_j R_i &= R_{ij} = \partial_j A_{i,m'}^{m'} r_{m'} + A_{i,m'}^{m'} \Gamma_{j',m'}^{n'} r_{n'} = \\ &= (\partial_j A_{i,m'}^{m'} + \Gamma_{j',n'}^{m'} A_{i,n'}^{n'} - \Gamma_{j',i'}^{n'} A_{n,m'}^{m'}) r_{m'} + \Gamma_{j',i'}^{n'} A_{n,m'}^{m'} r_{m'}, \\ (\partial_j &\equiv \partial_{j'}, \quad n' = n, \quad j = j', \quad i = i'). \end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ R^h -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} G_{ij}^h &= \widetilde{\nabla}_{j'} A_{i,m'}^{m'} A_{n,m'}^h + \Gamma_{j',i'}^{n'} A_{n,m'}^{m'} A_{n,m'}^h \\ (j &= j', \quad i = i', \quad \widetilde{\nabla}_{j'} A_{i,m'}^{m'} \equiv \widetilde{\nabla}_{j'} A_{i,m'}^{m'}). \end{aligned}$$

რადგან $A_{n,m'}^{m'} A_{n,m'}^h = \delta_n^h$, ამიტომ გვექნება

$$G_{ij}^h = \Gamma_{i,j'}^{h'} + A_{n,m'}^h \widetilde{\nabla}_{j'} A_{i,m'}^{m'} \quad (3.45)$$

$$(i = i', \quad j = j', \quad k = k', \quad \widetilde{\nabla}_{j'} A_{i,m'}^{m'} \equiv \widetilde{\nabla}_{j'} A_{i,m'}^{m'}).$$

(2.6 ა) ფორმულებისა და (3.33 ბ) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$\widetilde{\nabla}_\alpha A_{i,m'}^{m'} = x^\beta \widetilde{\nabla}_\alpha b_{\beta'}^{m'}, \quad \widetilde{\nabla}_\beta A_{i,m'}^{m'} = -b_{\beta'}^{m'} \quad (3.46)$$

$$(i = i', \quad \widetilde{\nabla}_\alpha A_{i,m'}^{m'} \equiv \widetilde{\nabla}_\alpha A_{i,m'}^{m'}).$$

(3.33 ბ) ფორმულების საშუალებით ვბოულობთ

$$\widetilde{\nabla}_{j'} b_{i'}^{h'} = \begin{cases} \nabla_\alpha b_{\beta'}^{h'}, & i = \alpha', \quad j = \beta', \quad k' = \gamma', \\ -b_{\alpha'}^{h'} b_{\beta'}^{\gamma'}, & i = \alpha', \quad j = \beta', \quad k' = 3, \\ -b_{\alpha'}^{h'} b_{\beta'}^{\gamma'}, & i = \alpha', \quad j = 3, \quad k' = \beta', \\ 0, & i = 3. \end{cases} \quad (3.47)$$

თუ ამ გამოსახულებებს (3.46)-ში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელ

$$\tilde{\nabla}_i A_j^{k'} = \begin{cases} -x^3 \nabla_a b_{\beta'}^{a'}, & i = a', \quad j = \beta', \quad k' = \gamma', \\ x^3 b_{\alpha'}^{a'} b_{\beta'}^{a'}, & i = 3, \quad j = \beta', \quad k' = 3, \\ x^3 b_{\alpha'}^{a'} b_{\gamma'}^{a'}, & i = a', \quad j = 3, \quad k' = \beta', \\ -b_{j'}^{i'}, & i = 3 \quad (j' = j), \\ 0 & k' = j' = 3 \end{cases} \quad (3.48).$$

ფორმულას. ახლა, თუ

$$A_{i,m}^{l'}, A_j^{m'} = \delta_{ij} \quad (3.49)$$

ტოლობებზე $\tilde{\nabla}_k$ ოპერატორებს გამოვიყენებთ, გვქნება

$$\tilde{\nabla}_k A_{i,m}^{l'} A_j^{m'} + A_{i,m}^{l'} \tilde{\nabla}_k A_j^{m'} = 0.$$

ამ ტოლობების $A_{i,n}^{l'}$ -ზე გამრავლებით და j ინდექსის მიმართ შეჯამებით, (3.13) ფორმულების ძალით, მივიღებთ

$$\tilde{\nabla}_k A_{i,n}^{l'} = -A_{i,n}^{l'} A_{i,m}^{l'} \tilde{\nabla}_k A_j^{m'}. \quad (3.50)$$

თუ განიხილება არის $S_{\xi,\eta}$ -პარამეტრიზაცია, მაშინ (3.36) და (3.48) ფორმულების თანახმად, (3.50) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\tilde{\nabla}_k A_{i,n}^{l'} = -(1 - k_i x^3)^{-1} (1 - k_i x^3)^{-1} \tilde{\nabla}_k A_{n'}^{l'} \quad (3.51),$$

$$(n' = n, \quad i = i', \quad k_3 = 0),$$

§ 4. ზედაპირის ჩადგმის შესაძლებლობის შესახებ რიმანის სამგანზომილებიან მრავალსახეობაში

როგორც ეს ზემოთ იყო ნაჩვენები, გაუსის არანულოვანი სიმ-რუდის ზედაპირები წარმოდგენს რიმანის ორგანზომილებიან მრავალსახეობებს, რომლებიც ჩადგმულია ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში. ამის გამო ამ მრავალსახეობათა თვისებებზე შეიძლება შევიქმნათ საკმარისად ნათელი თვალსაჩინო წარმოდგენა. ახლა ჩვენ განვიხილავთ რიმანის სამგანზომილებიან მრავალსახეობათა კლასს, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ევკლიდური სივრცის ზედაპირების სახით წარმოდგენად რიმანის ორგანზომილებიან მრავალსახეობებთან. ჩვენ ვნახავთ, რომ ნებისმიერი საკმარისად რეგულარული ზედაპირი შეიძლება აგრეთვე ჩავდგათ რიმანის სამ-

განზომილებიან მრავალსახეობაში. ქვემოთ ჩვენ ვსარგებლობთ წინათავეებში მიღებული აღნაშენებითა და ფორმულებით.

განვიხილოთ რიმანის სამგანზომილებიანი M_3 მრავალსახეობა, რომელიც $S: r = r(x^1, x^2)$ ზედაპირთან დაკავშირებულია

$$ds^2 = A_{ik} dx^i dx^k \quad (4.1)$$

ფორმულით განსაზღვრული მეტრიკის საშუალებით, სადაც

$$A_{ik} = R_i r_k = a_{ik} - x^3 b_{ik}. \quad (4.2)$$

(3.3) და (3.4 ბ) ფორმულების თანახმად (4.1) კვადრატული ფორმა შეიძლება ჩაეწეროს

$$ds^2 = (1 - x^3 k_0) ds_0^2 + (dx^3)^2 \quad (4.3)$$

სახით, სადაც

$$ds_0^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (4.4)$$

ხოლო k_0 წარმოადგენს S ზედაპირის ნორმალურ სიძრულეს ds_0 რკალის მიმართულებით. $x^3 = c = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირზე M_3 მრავალსახეობის მეტრიკა განისაზღვრება

$$ds^2 = (1 - ck_0) ds_0^2 \quad (4.5)$$

კვადრატული ფორმით. ახლა ადვილი გასარკვევია (4.3) ფორმულით მოცემული მეტრიკის გეომეტრიული შინაარსი. $\widehat{S}: x^3 = c$ საკოორდინატო ზედაპირზე მეტრიკას ვლებულობთ ds_0 რკალის პარალელური გადატანით S ზედაპირის შესაბამისი ნორმალის გასწვრივ $(x^1, x^2, 0) \in S$ წერტილიდან $(x^1, x^2, c) \in \widehat{S}$ წერტილში. ამასთან, რკალის გაჭიმვა ან შეკუმშვა ექვემდებარება $\sqrt{1 - ck_0} ds_0$ ფორმულას; შემდეგ კი მანძილს ნებისმიერ მახლობელ (x^1, x^2, c) და $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, c + dx^3)$ წერტილებს შორის პითაგორის თეორემით განვმარტავთ.

განვიხილოთ აგრეთვე სამგანზომილებიანი M_3^* მრავალსახეობა, რომლის მეტრიკა განიმარტება

$$ds^2 = ds_0^2 + (dx^3)^2 = a_{ij} dx^i dx^j \quad (4.6)$$

კვადრატული ფორმით. ამ შემთხვევაში $\widehat{S}: x^3 = c$ საკოორდინატო ზედაპირზე გვაქვს $ds = ds_0$ ტოლობა, ე. ი. S ზედაპირის მეტრიკა

შეკუმშვისა და გაჭიმვის გარეშე პარალელურად გადატანება ნებისმიერ $x^3 = c$ ზედაპირზე.

(4.1) და (4.6) კვადრატული ფორმების დისკრიმინანტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია

$$g = a\vartheta, \quad (4.7)$$

ფორმულით, სადაც

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2. \quad (4.8)$$

$$\vartheta = (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3) = 1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2. \quad (4.8a)$$

თუ M_S მრავალსახეობის 1-ლი და მე-2 გვარის ქრისტოფელის სიმბოლოებს $\bar{\Gamma}_{ij,k}$ და $\bar{\Gamma}_{ij}{}^k$ -თი აღვნიშნავთ, გვექნება

$$\bar{\Gamma}_{ij,k} = \frac{1}{2} (\partial_i A_{jk} + \partial_j A_{ik} - \partial_k A_{ij}), \quad (4.9a)$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}{}^k = A^{km} \bar{\Gamma}_{ij,m}, \quad (4.9b)$$

სადაც A^{ik} მატრიცა A_{im} მატრიცის შებრუნებულია, და მას (3.11a) ფორმულების თანახმად აქვს

$$A^{\alpha\beta} = \vartheta^{-1} (a^{\alpha\beta} - x^3 K^{-1} R^{\alpha\beta\gamma} b_{\gamma}), \quad A^{33} = 1, \quad A^{3\alpha} = A^{\alpha 3} = 0 \quad (4.10)$$

სახე, სადაც $R^{\alpha\beta\gamma}$ წარმოადგენს S ზედაპირის რიმან-ქრისტოფელის ტენზორის კონტრაქციანტულ კომპონენტებს. (3.9) ფორმულების თანახმად

$$R^{\alpha\beta\gamma} = b^{\alpha\beta} b^{\gamma} - b^{\alpha\gamma} b^{\beta} = K c^{\alpha\gamma} c^{\beta} \quad (4.11)$$

შეგახსენებთ, რომ რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი S ზედაპირის ქრისტოფელის სიმბოლოების საშუალებით გამოისახება

$$R^{\alpha\beta\gamma} = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}{}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}{}^\gamma \quad (4.12)$$

ფორმულებით (იხ. V თავი. § 10, პუნქტი 1).

(4.2)-ის ძალით გვაქვს

$$\bar{\Gamma}_{ij,k} = \Gamma_{ij,k} - x^3 \tilde{\Gamma}_{ij,k} - \frac{1}{2} (\partial_i^3 b_{jk} + \partial_j^3 b_{ik} - \partial_k^3 b_{ij}), \quad (4.13)$$

სადაც

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}), \quad (4.14a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij,k} = \frac{1}{2} (\partial_i b_{jk} + \partial_j b_{ik} - \partial_k b_{ij}). \quad (4.14b)$$

$\Gamma_{ij,k}$ და $\tilde{\Gamma}_{ij,k}$ სიმბოლოების ინდექსთა მინიმალური შეზღუდვით ვლებულობთ

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_{\beta\gamma} + \partial_\beta a_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma a_{\alpha\beta}), \quad (4.15a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha b_{\gamma\beta} + \partial_\beta b_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma b_{\alpha\beta}); \quad (4.15b)$$

ხოლო მათი ინდექსების ყველა სხვა რიგის შეზღუდვები ნულის ტოლია.

თუ ვისარგებლებთ

$$\partial_\gamma b_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma b_{\alpha\beta} + b_{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\nu + b_{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}{}^\nu \quad (4.16)$$

ფორმულით, (4.15 ბ) ტოლობები შეიძლება ჩავწეროთ

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} (\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} + 2 \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu b_{\gamma\nu}) \quad (4.15გ)$$

სახით. თუ ახლა $\tilde{\Gamma}_{ij,k}$ სიმბოლოების ინდექსების პირველი რიგის შეზღუდვებს განვიხილავთ (ე. ი. ორი ინდექსი ბერძნულია, ერთი კი ტოლია 3-ის), გვექნება

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta,3} = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}, \quad \overline{\Gamma}_{3\alpha,\beta} = \overline{\Gamma}_{\alpha 3,\beta} = -\frac{1}{2} b_{\alpha\beta}. \quad (4.15დ)$$

$\overline{\Gamma}_{ij,k}$ სიმბოლოების ინდექსთა მე-2 და მე-3 რიგის შეზღუდვები, ცხადია, ნულის ტოლია.

ამრიგად, $\overline{\Gamma}_{ij,k}$ მატრიცის არსებით ბირთვს შეადგენს მინიმალური და პირველი რიგის შეზღუდვები, რომლებიც გამოისახებიან

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2} x^3 (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} + 2 \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu b_{\gamma\nu}), \quad (4.17a)$$

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta,3} = -\overline{\Gamma}_{3\alpha,\beta} = -\Gamma_{\alpha 3,\beta} = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \quad (4.17b)$$

ფორმულებით. ამას გარდა გვაქვს

$$\overline{\Gamma}_{33,k} = \overline{\Gamma}_{3k,3} = \overline{\Gamma}_{k3,3}. \quad (4.17გ)$$

(4.10), (4.17) ფორმულების საფუძველზე $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ -თვის გვაქვს

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma &= A^{\gamma\sigma} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\sigma} = \\ &= \frac{1}{\Phi} \left\{ \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \left(\frac{1}{2} \nabla^\gamma b_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu b_\mu^\gamma + K^{-1} R^{\gamma\sigma\lambda} b_{\gamma\lambda} \Gamma_{\alpha\beta,\sigma} \right) x^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x^3)^2}{2K} [R^{\gamma\sigma\lambda} b_{\gamma\lambda} \nabla_\sigma b_{\alpha\beta} + 2 R^{\gamma\sigma\lambda} b_{\gamma\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu b_{\sigma\mu}] \right\} \quad (4.18) \end{aligned}$$

(4.13) და (4.14 ბ) ფორმულების საშუალებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu b_\mu^\gamma + \frac{1}{K} R^{\gamma\sigma\lambda} b_{\gamma\lambda} \Gamma_{\alpha\beta,\sigma} = 2H \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma, \quad (4.19a)$$

$$\frac{1}{K} R^{\gamma\sigma\lambda} b_{\gamma\lambda} b_{\sigma\mu} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu = K \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma. \quad (4.19b)$$

ამ ფორმულების თანახმად (4.18) ტოლობები ღებულობს

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \frac{1}{2} x^3 B_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (4.20)$$

სახეს, სადაც

$$B_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{\Phi} (\nabla^\gamma b_{\alpha\beta} - x^3 K^{-1} R^{\mu\sigma\lambda} b_{\mu\lambda} \nabla_\sigma b_{\alpha\beta}). \quad (4.21a)$$

ცხადია, $B_{\alpha\beta}^{\gamma}$ წარმოადგენს $x^3 = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირის მე-3 რანგის ტენზორს. ადვილი საჩვენებელია, რომ არის $S_{\xi,\eta}$ -პარამეტრიზაციის მიმართ გვაქვს

$$B_{\alpha\beta}^{1\gamma} = \frac{1}{1 - k_1 x^3} \nabla^1 b_{\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta}^{2\gamma} = \frac{1}{1 - k_2 x^3} \nabla^2 b_{\alpha\beta}. \quad (4.21b)$$

(4.9ბ), (4.10), (4.11) და (4.17ბ, გ) ფორმულების საშუალებით მივიღებთ

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^3 = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}. \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{3\alpha}{}^\beta &= \bar{\Gamma}_{\alpha 3}{}^\beta = \frac{1}{2\Phi} \left(b_\alpha^\beta - \frac{x^3}{K} R^{\beta\gamma\lambda} b_{\gamma\lambda} b_{\alpha\gamma} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\Phi} (b_\alpha^\beta - x^3 c^{\beta\gamma} c_{\gamma\lambda} b_{\gamma\lambda} b_{\alpha\gamma}). \quad (4.22b) \end{aligned}$$

უქანასკნელ ფორმულებს ξ , η , x^3 კოორდინატების მიმართ აქვს სახე

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{13}^1 = \bar{\Gamma}_{31}^1 &= -\frac{k_1}{2(1-k_1 x^3)}, \quad \bar{\Gamma}_{23}^2 = \bar{\Gamma}_{32}^2 = -\frac{k_2}{2(1-k_2 x^3)}, \\ \bar{\Gamma}_{21}^1 = \bar{\Gamma}_{12}^1 &= \bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{31}^2 = 0.\end{aligned}\quad (4.23)$$

M_S^0 მრავალსახეობის ქრისტოფელის სიმბოლოები გამოისახება

$$\Gamma_{ij,k}^0 = \frac{1}{2} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}); \quad \Gamma_{ij}^k = a^{lm} \Gamma_{lm}^k \quad (4.24)$$

ფორმულებით. ამრიგად, მათი ინდექსების მინიმალური შეზღუდვა გვაძლევს

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^0 = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (4.25)$$

სხვა რიგის შეზღუდვები ყველა იგივეურად ნულია.

მაშასადამე, ყურადღება უნდა მიექცეს იმ ფაქტს, რომ M_S და M_S^0 მრავალსახეობათა ქრისტოფელის სიმბოლოები არ ემთხვევა ერთმანეთს $S: x^3 = 0$ ზედაპირზე, მიუხედავად იმისა, რომ მათ ერთნაირი მეტრიკა გააჩნიათ.

M_S და M_S^0 მრავალსახეობანი მართლაც რომ რიმანის ზედაპირებს წარმოადგენს, ამისათვის საკმარისია ავაგოთ სათანადო რიმან — ქრისტოფელის ტენზორები და ვაჩვენოთ, რომ ისინი ნულის ტოლი არ არიან.

M_S^0 და M_S მრავალსახეობათა რიმან — ქრისტოფელის სიმბოლოები გამოისახება

$$R_{ijk}^n = \partial_k \Gamma_{ij}^n - \partial_j \Gamma_{ik}^n + \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^n - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jl}^n, \quad (4.26a)$$

$$\bar{R}_{ijk}^n = \partial_k \bar{\Gamma}_{ij}^n - \partial_j \bar{\Gamma}_{ik}^n + \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{km}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^m \bar{\Gamma}_{jl}^n \quad (4.27a)$$

ფორმულებით. თუ განვიხილავთ ამ ტენზორთა მინიმალურ შეზღუდვებს, მივიღებთ

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\nu = R_{\alpha\beta\gamma}^\nu = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu + \Gamma_{\alpha\delta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\nu, \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^\nu &= \partial_\gamma \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\nu - \partial_\beta \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\nu + \bar{\Gamma}_{\alpha\delta}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\gamma}^\nu - \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^\nu + \\ &+ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\gamma}^\nu - \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^\nu.\end{aligned}\quad (4.27b)$$

R_{ijk}^n ტენზორის ინდექსების სხვა შეზღუდვები, ცხადია, ნულის ტოლია.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ M_S^* მრავალსახეობის რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი S ზედაპირის რიმან — ქრისტოფელის ტენზორის ტოლია. მაშასადამე, (4.1) ფორმულის თანახმად, იგი ნულისაგან განსხვავებულია, თუ S ზედაპირის K მთავარი (გაუსის) სიმრუდე ნულისაგან განსხვავდება. ასე რომ, ზედაპირის თანმზლები S მრავალსახეობა (4.6) მეტრიკით რიმანის მრავალსახეობაა, თუ $K \neq 0$. ამ შემთხვევაში M_S^* წარმოადგენს რიმანის სამგანზომილებიანი მრავალსახეობის მაგალიტს, რომელშიაც ჩადგმულია S ზედაპირი.

გადავიდეთ ახლა (4.27 ბ) ტენზორის განხილვაზე. (4.22) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \bar{\Gamma}_{\gamma\gamma'}^{\nu} - \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma'}^{\beta} \bar{\Gamma}_{\beta\beta}^{\nu} &= - \frac{1}{4\Phi} \{ b_{\alpha\beta} b_{\gamma'}^{\nu} - b_{\alpha\gamma'} b_{\beta}^{\nu} - \\ &- x^3 K^{-1} R^{\mu\alpha\lambda} b_{\mu\lambda} (b_{\gamma\sigma} b_{\alpha\beta} - b_{\beta\sigma} b_{\alpha\gamma}) \}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

მაგრამ (4.11)-ის ძალით

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} b_{\gamma'}^{\nu} - b_{\alpha\gamma'} b_{\beta}^{\nu} &= R_{\alpha\beta\gamma'}^{\nu} = K c_{\alpha}^{\nu} c_{\beta\gamma'}, \\ b_{\alpha\beta} b_{\gamma\sigma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\sigma} &= R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = K c_{\alpha\sigma} c_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

თუ ამ გამოსახულებებს (4.28)-ში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \bar{\Gamma}_{\gamma\gamma'}^{\nu} - \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma'}^{\beta} \bar{\Gamma}_{\beta\beta}^{\nu} = - \frac{1}{4\Phi} (R_{\alpha\beta\gamma'}^{\nu} - x^3 R_{\lambda\beta\gamma'}^{\nu} b_{\alpha}^{\lambda}). \quad (4.29)$$

თუ (4.20) და (4.29) გამოსახულებებს (4.27 ბ)-ში შევიტანთ და გავითვალისწინებთ (4.14 ა) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\alpha\beta\gamma'}^{\nu} &= \left(1 - \frac{1}{4\Phi} \right) R_{\alpha\beta\gamma'}^{\nu} - \\ &- \frac{1}{2} x^3 \left(\nabla_{\gamma} B_{\alpha\beta}^{\nu} - \nabla_{\beta} B_{\alpha\gamma}^{\nu} - \frac{1}{2\Phi} x^3 R_{\lambda\beta\gamma'}^{\nu} b_{\alpha}^{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma'}^{\nu} \Big|_{x^3=0} = \frac{3}{4} R_{\lambda\beta\gamma'}^{\nu} = \frac{3}{4} K c_{\alpha}^{\nu} c_{\beta\gamma'}. \quad (4.31)$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $K \neq 0$, მაშინ რიმანის M_S მრავალსახეობის რიმან — ქრისტოფელის $\bar{R}_{ijk}^n$ ტენზორის ინდექსთა მინიმალური შეზღუდვა იგივერად ნული არ არის. მაგალითად,

$$\bar{R}_{.iii}^{.iii} \Big|_{x^3=0} = \frac{3}{4} R_{.iii}^{.iii} = \frac{3}{4} K c_{i1}^2 c_{i2} = \frac{3}{4} K a_{11} \neq 0. \quad (4.32)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ, როცა $K \neq 0$, S ზედაპირის მიდამოში M_5 მრავალსახეობის რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი განსხვავებულია ნულისაგან. მაშასადამე, თუ $K \neq 0$, მაშინ M_5 წარმოადგენს რიმანის სამგანზომილებიან მრავალსახეობას, რომელშიც ჩადგმულია S ზედაპირი.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ S ზედაპირის თანმხლები, რიმანის სამგანზომილებიანი ორი სახის M_5^* და M_5 მრავალსახეობა, რომლებშიც ჩადგმულია ეს ზედაპირი. ორივე ეს მრავალსახეობა წარმოადგენს S ზედაპირით განხორციელებულ რიმანის ორგანზომილებიან მრავალსახეობის გაფართოებას რიმანის სამგანზომილებიან მრავალსახეობამდე. ცხადია, M_5^* უმარტივესი ასეთი გაფართოებაა: S ზედაპირის მეტრიკა დამახინჯების გარეშე პარალელურად (ნორმალის გასწვრივ) გადაიტანება $x^3 = c = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირზე, ხოლო შემდეგ მანძილი მახლობელ წერტილებს შორის განისაზღვრება პითაგორას თეორემით. ამიტომ M_5^* -ს ვუწოდოთ S ზედაპირის პითაგორასკმური მარტივი გაფართოება რიმანის სამგანზომილებიან სივრცეში.

M_5 მრავალსახეობას აგრეთვე S ზედაპირის პითაგორულ (მაგრამ არა მარტივ) გაფართოებას ვუწოდებთ. მასში მეტრიკა სივრცის ყოველ (x^1, x^2, x^3) წერტილში აგრეთვე აიგება პითაგორას თეორემის თანახმად (4.3) ფორმულის საშუალებით. M_5^* -საგან განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ S ზედაპირის მეტრიკა ნორმალის გასწვრივ პარალელურად გადაიტანება $x^3 = c = \text{const}$ საკოორდინატო ზედაპირზე და ამასთან აღილი აქვს დამახინჯებას, რომელიც $\sqrt{1 - ck_0}$ მამრავლით განისაზღვრება. უნდა აღინიშნოს, რომ ზედაპირის მეტრიკის გაჭიმვის ან შეკუმშვის განმსაზღვრელი $\sqrt{1 - ck_0}$ ამრავლი, საზოგადოდ, დამოკიდებულია არა მარტო ზედაპირის რილზე, არამედ რკალის ელემენტის მიმართულებაზედაც. თუ რკალის ელემენტი ds_0 ზედაპირის ერთ-ერთ მთავარ მიმართულებასთან Φ , კუთხეს ქმნის, მაშინ ნორმალის გასწვრივ გადატანისას $x^3 = c$ ზედაპირზე იგი, ეილერის ფორმულის თანახმად, მრავლდება

$$\sqrt{1 - ck_0} = \sqrt{(1 - ck_1) \cos^2 \Phi_0 + (1 - ck_2) \sin^2 \Phi_0} \quad (4.33)$$

მამრავლზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ S ზედაპირის (x^1, x^2) წერტილში მოდებული ds_0 რკალის ბოლო წერტილი შესაბამის მხებ სიბრტყეში

ერთეულ წრეწირს აღწერს, მაშინ მისი სახის ბოლო წერტილი $x^2 = c$ ზედაპირის მხებ სიბრტყეში შემოწერს ელიფსს $1 - cx_1$ და $1 - cx_2$ მთავარი ღერძებით. ამიტომ რიმანის M_5 ზრავ:ლსახეობას S ზედაპირის ელიფსური პითაგორული გაფართოება ეწოდოთ. მარტივი პითაგორული M_5^* გაფართოების შემთხვევაში, ცხადია, ერთეულოვანი წრეწირი კვლავ ერთეულოვან წრეწირში გადადის.

თუ S წარმოადგენს R რადიუსიან სფერულ ზედაპირს, მაშინ, ცხადია, რომ ელიფსურ პითაგორულ გაფართოებისას ერთეულოვანი წრეწირი გადადის $\left(1 - \frac{c}{R}\right)$ რადიუსიან წრეწირში.

შეგნიშნოთ, რომ $K = 0$ -თვის S ზედაპირის მარტივი პითაგორული M_5^* გაფართოება ევკლიდური სამგანზომილებიანი სივრცე იქნება, რადგან ამ შემთხვევაში რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი ნულის ტოლია. მაგრამ M_5^* , საზოგადოდ, პირდაპირი აზრით არ წარმოადგენს იმ ჩვეულებრივ ევკლიდურ სივრცეს, რომელშიც S ზედაპირია ჩადგმული. M_5^* -ის მეტრიკა არ ემთხვევა ევკლიდეს სივრცის არის S_g -პარამეტრიზაციის მეტრიკას S -ის მახლობლად.

მაგალითად, R რადიუსიანი წრიული ცილინდრისთვის ($K = 0$) Ω არის S_g -პარამეტრიზაციის შემთხვევაში მეტრული კვადრატული ფორმა (ξ, η, x^3 კოორდინატების მიმართ) გამოისახება

$$ds^2 = \left(1 - \frac{x^3}{R}\right)^2 d\xi^2 + d\eta^2 + (dx^3)^2 \quad (4.34a)$$

ფორმულით. მარტივი პითაგორული M_5^* გაფართოების მეტრიკა (იმავე ξ, η, x^3 კოორდინატების მიმართ) დეკარტულია:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + (dx^3)^2. \quad (4.34b)$$

უკანასკნელი ფორმულა გამოსახავს სივრცის დეკარტულ მეტრიკას იმ შემთხვევაში, როცა S -ზედაპირი სიბრტყეა. აქ მკლავნდება ის ფაქტი, რომ გაუსის ნულოვანი სიმრუდის მქონე ზედაპირები (და მხოლოდ ისინი) განიფინება სიბრტყეზე. ამიტომ, ბუნებრივია, ტორსების ყველა პითაგორული გაფართოება ეკვივალენტურად ჩავთვალოთ. საზოგადოდ, ორი S_1 და S_2 ზედაპირის მარტივ პითაგორულ გაფართოებას ეკვივალენტურად ჩავთვლით, თუ მათ ერთნაირი მეტრიკა გააჩნიათ, ე. ი. თუ S_1 და S_2 ერთმანეთზე გადაიღუნება (ზედაპირის ლუნვისას მეტრიკა არ იცვლება). მაშასადამე, M_5^* -ად

შეიძლება ვიგულისხმოთ S ზედაპირის ეკვივალენტური მარტივი პითაგორულ გაფართოებათა კლასი.

ამ აზრით სხვა სურათი გვაქვს M_S მრავალსახეობისთვის. იგი უფრო მკიდრეოდაა დაკავშირებული S ზედაპირთან. რიმანის ორი M_{S_1} და M_{S_2} მრავალსახეობა ეკვივალენტურია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა S_1 ზედაპირი S_2 -ისგან მოძრაობით მიიღება. ეს გასაგებია, რადგან ამ ზედაპირებს ერთნაირი პირველი და მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმები უნდა ჰქონდეს.

ვთქვათ, S წარმოადგენს R -რადიუსიან სფერულ ზედაპირს. მაშინ

$$n = -\frac{1}{R} r \quad (4.35)$$

და

$$b_{\alpha\beta} = -n_\alpha r_\beta = \frac{1}{R} r_\alpha r_\beta = \frac{1}{R} a_\alpha \quad (4.36)$$

მაშასადამე,

$$A_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{x^3}{R}\right) a_{\alpha\beta}, \quad A_{33} = 1, \quad A_{3\alpha} = A_{\alpha 3} = 0, \quad (4.37a)$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta}}{1 - \frac{x^3}{R}}, \quad A^{33} = 1, \quad A^{3\alpha} = A^{\alpha 3} = 0. \quad (4.37b)$$

მაშინ მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} &= \left(1 - \frac{x^3}{R}\right) \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}, & \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,3} &= \frac{1}{2R} a_{\alpha\beta}, \\ \bar{\Gamma}_{\alpha 3,\beta} &= \bar{\Gamma}_{3\alpha,\beta} = -\frac{1}{2R} a_{\alpha\beta}, & \bar{\Gamma}_{3\alpha,\beta} &= \bar{\Gamma}_{\beta\alpha,3} = \bar{\Gamma}_{\beta 3,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.38a)$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^3 = \frac{1}{2R} a_{\alpha\beta}, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha 3}{}^\beta = \bar{\Gamma}_{3\alpha}{}^\beta = -\frac{a_{\alpha\beta}}{2R \left(1 - \frac{x^3}{R}\right)}. \quad (4.38b)$$

თუ ახლა რიმან — ქრისტოფელის ტენზორს გამოვივლით, (4.27 ა) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$\bar{R}^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} = \left(1 - \frac{1}{4\left(1 - \frac{x^3}{R}\right)}\right) R^{\nu}_{\alpha\beta\gamma}, \quad (4.39)$$

სადაც $R^{\nu}_{\alpha\beta\gamma}$ სფერული ზედაპირის რიმან — ქრისტოფელის ტენზორია

$$R^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{R^2} c^{\nu}_{\alpha} c_{\beta\gamma}. \quad (4.40)$$

(4.39) ფორმულიდან ჩანს, რომ

$$\bar{R}^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} \neq 0, \text{ როცა } x^3 < \frac{3R}{4} \quad (4.41)$$

მაშასადამე, $\frac{3R}{4}$ რადიუსიანი, S -ის კონცენტრული სფერული ზედაპირი

არის გარეთ M_S მკაცრად რიმანისებულია. $\frac{3R}{4}$ რადიუსიან სფერულ

ზედაპირზე M_S მრავალსახეობის რიმან — ქრისტოფელის ტენზორი ნული ზდება, ე. ი. ეს ზედაპირი რიმანის M_S მრავალსახეობის გადაგვარების ზედაპირს წარმოადგენს. ეს შენიშვნა საყურადღებოა იმის გამო, რომ R რადიუსიან სფერულ ზედაპირთან ნორმალურად დაკავშირებული სივრცის ევკლიდური პარამეტრიზაცია შესაძლებელია $x^3 > 0$ შემთხვევაში (მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ სფერული S ზედაპირის გარეთ x^3 უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს, რადგან S -ის ნორმალი მიმართულია სფერული ზედაპირის ცენტრისაკენ). სფერული ზედაპირის არამარტივი ელიფსური პითაგორული სამგანზომილებიანი გაფართოება რიმანის მრავალსახეობის თვისებებს ინარჩუნებს არის

მხოლოდ ნაწილზე, სახელდობრ, $\frac{3R}{4}$ რადიუსიანი კონცენტრული სფე-

რული ზედაპირის გარეთ, იქ, სადაც შესაძლებელია S ზედაპირთან ნორმალურად დაკავშირებული სივრცის S_g -პარამეტრიზაცია. საინტერესოა გამოიჩვენოს, როგორი მდგომარეობაა ამ მხრივ ნებისმიერი ზედაპირის შემთხვევაში, ე. ი. საინტერესოა შევაფასოთ მანძილი S ზედაპირიდან M_S მრავალსახეობის გადაგვარების ზედაპირამდე.

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Векуа И. Н. Замечания о свойствах решений уравнений $\Delta u = -2ke^u$. — Сибирский математический журнал, 1960, т. 1, № 3, с. 331—342.
3. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М.—Л.: Гостехиздат, 1947—1948, — тт. I, II.
4. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. — М.: ИЛ, 1963.
5. Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956.
6. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1958.
7. Векуа И. Н. Об одном функциональном уравнении теории минимальных поверхностей. — ДАН СССР, 1974, т. 217, № 5.
8. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Гостехиздат, 1953.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Физматгиз, 1958, — тт. II, IV.
10. Schouten J. A. Ricci-calculus — Berlin, 1954.
11. Levi-Civita T. Lezioni di calcolo differenziale assoluto. — Roma, 1925.
12. Nitsche Johannes C. C. On New Results in the Theory of Minimal Surfaces. — Bulletin of the American Mathematical Society, 1955. t. 716, № 2.
13. Ricci G. Lezioni sulla teoria delle superficie. — Verona — Padova, 1898.
14. Weierstrass K. Untersuchungen über die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. — Mathematische Werke, Band 3, Berlin, 1903.
15. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: Гостехиздат, 1948.
16. Оссерман Р. Минимальные поверхности. — Усп. матем. наук, 1967, т. 22, вып. 4 (136) — с. 55—135.
17. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа. — Тбилиси: Изд. Тбилисского университета, 1967.
18. Cartan E. Les systems differentiel exterieurs et leurs applications geometriques. — Paris, 1945.
19. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960.

20. Шиффер М., Спенсер Д. Функционалы на конечных римановых поверхностях. — М.: ИЛ, 1957.
 21. Hodge W. Harmonic Integrals, 1952.
 22. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966.
 23. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ (пер. с франц.) — М.: Наука, 1974.
 24. Nitsche Johannes C. C. Vorlesungen über Minimalflächen. — Berlin: Springer — Verlag, 1975.
 25. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ, 1961.
 26. Vekua I. N. On conformal invariant differential forms in shell theory. — Funct. theor. meth. part. diff. equat., Acad. Press, 1969, с. 303—311.
-

შ ი ნ ა რ ს ი

შესავალი	3
თ ა ვ ი 1. ალგებრის ზოგიერთი საკითხი	7
§ 1. მატრიცები. შეჯამების წესი. ინდექსთა შეკვეთის ოპერაცია. მატრიცების პირდაპირი და შიგა ნამრავლები	7
1. მატრიცები (7). 2. ადიციური ჯგუფები. მატრიცების ჯამი (8). 3. რგოლები და ველები. მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი (10). 4. შეჯამების წესი (12). 5. ინდექსთა შეკვეთის ოპერაცია (14). 6. მატრიცების შიგა ნამრავლები (15). 7. ვექტორული სივრცეები. მოდულები (15).	
§ 2. კონეცერის სიმბოლოები. ლევი-ჩივიტას სიმბოლოები	16
§ 3. დეტერმინანტები	18
1. დეტერმინანტების განმარტება (18). 2. დეტერმინანტების ძირითადი თვისებები (20). 3. მატრიცის მინორები. დეტერმინანტების დაშლა (21). 4. შებრუნებული მატრიცის გამოსახულება (23)	
§ 4. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები	24
1. განტოლებათა მიკავშირებული სისტემები. კრამერის ფორმულები (24). 2. განტოლებათა ერთგვაროვანი მიკავშირებული სისტემები (25). 3. განტოლებათა არაერთგვაროვანი მიკავშირებული სისტემები (28)	
§ 5. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიერ სახეზე	30
1. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა (30). 2. კანონიერ სახეზე დაყვანა (31). 3. კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი. სილვესტრის პირობა (32). 4. კვადრატების ჯამამდე დაყვანა (35)	
თ ა ვ ი II. ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ვექტორული ალგებრის ელემენტები	36
§ 1. ვექტორები ევკლიდეს სივრცეში და ზოგიერთი ალგებრული ოპერაცია მათზე	36
1. ვექტორის ცნება (36). 2. ვექტორების შეკრება. ვექტორების პარამეტრიზაცია (37). 3. ვექტორების სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლები (39). 4. ორმაგი ვექტორული ნამრავლი (41)	
§ 2. ბაზისები. ინდექსის ატანის და ჩამოტანის ოპერაციები	42
1. ბიორთოგონალური და ბიორთონორმალური ბაზისები (42). 2. საბაზისო მატრიცები. ბაზისის დისკრიმინანტი (43). 3. ინდექსების	

ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრაკვარიანტული კომპონენტები (44)

§ 3. დისკრიმინანტული მატრიცები და მათი ზოგიერთი გეომეტრიული გამოყენება 45

1. ვექტორის სიგრძე (45). 2. კუთხე ორ მიმართულებას შორის (46). 3. დისკრიმინანტული მატრიცები. საბაზისო მატრიცების გამოსახვა დისკრიმინანტული მატრიცებით (46). 4. პარალელოგრამის ფართობი. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა (48). 5. პარალელები-დის მოცულობა (49)

§ 4. ბაზისებისა და მათთან დაკავშირებული მატრიცების გარდაქმნა. 50

1. ბაზისებისა და საბაზისო მატრიცების გარდაქმნა (50). 2. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრაკვარიანტული კომპონენტების გარდაქმნა. სკალარული ნამრავლის ინვარიანტობა (51). 3. ბაზისის დისკრიმინანტის და დისკრიმინანტული მატრიცების გარდაქმნა. ტენზორის ცნება (52)

თ ა ვ ი III. ზოგადი ტენზორული აღგებრის საფუძვლები 54

§ 1. საკოორდინატო სისტემები $\mathcal{F}^n$ სივრცეში 55

1. არითმეტიკული სივრცე $\mathcal{F}^n$ (55). 2. არის პარამეტრიზაცია. კოორდინატთა გარდაქმნის იაკობიანი (56). 3. საკოორდინატო წირები (58)

§ 2. $\mathcal{F}^n$ სივრცის არის ასახვათა რგოლები და მოდულები. $\mathcal{F}^n$ სივრცის ტენზორები 59

1. არის ასახვათა რგოლები და მოდულები (59). 2. კოორდინატთა დიფერენციალების გარდაქმნის ფორმულები. 1-ლი რანგის კონტრაკვარიანტული ტენზორი (60). 3. სკალარის კერძო წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულები. 1-ლი რანგის კოვარიანტული ტენზორი (61). 4. მაღალი რანგის ტენზორები (63). 5. ტენზორების ძირითადი თვისებები. ტენზორის იზომერები (64). 6. ტენზორების შიგა რ-ნამრავლი (66)

§ 3. ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტული და კონტრაკვარიანტული მოძრავი ბაზისები 67

1. კოვარიანტული მოძრავი ბაზისი (67). 2. კონტრაკვარიანტული მოძრავი ბაზისი (68). 3. ვექტორ-ფუნქციების სივრცე (69). 4. ვექტორული ველების წარმოდგენა მოძრავი ბაზისებით. 1-ლი რანგის ეკვივალენტური ტენზორები (70). 5. ვექტორის ფიზიკური კომპონენტები (73)

§ 4. სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის მეტრული კვადრატული ფორმა 73

1. მეტრული კვადრატული ფორმა (73). 2. დისკრიმინანტის გარდაქმნის ფორმულა (75). 3. კოორდინატთა სისტემის მავალითები (75). 4. დისკრიმინანტული ტენზორები (76). 5. სივრცის მოცულობისა და ზედაპირის ფართობი ელემენტები ინვარიანტული ფორმით (77)

§ 5. განაყოფის წესი (თეორემა ტენზორების გაყოფის შესახებ)	80
§ 6. დისკრიმინანტული, შებრუნებული და ფარდობითი ტენზორები (93)	
1. დისკრიმინანტული ტენზორები (83). 2. შებრუნებული ტენზორები (84). 3. ფარდობითი ტენზორები (85)	
§ 7. რიმანის სივრცის ტენზორები	86
1. ინვარიანტული მეტრიკა $\mathcal{F}''$ -ზე. რიმანის მრავალსახეობები (86). 2. ინდექსების ატანისა და ჩამოტანის ოპერაციები (90). 3. ტენზორთა ეკვივალენტური კლასები. ტენზორის ზოგადი ცნება (93)	
§ 8. ტენზორთა ლოკალურად ჰილბერტული მოდულები	94
1. $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდული (95). 2. ტენზორების ლოკალური სკალარული ნამრავლი. ტენზორის ლოკალური ნორმა. ორ ტენზორის შორის კუთხე (95). 3. ტენზორების წრფივად დამოუკიდებელი სისტემები (98). 4. ტენზორების ორთონორმალური და ბიორთონორმალური სისტემები (99). 5. ბაზისები. ტენზორის დაშლა ბაზისის მიმართ (101)	
§ 9. მულტიპლიკაციური ტენზორები, $\widehat{\mathcal{F}}_p(\Omega)$ მოდულის ბაზისების აგება	103
1. მულტიპლიკაციური ტენზორები და მათი ძირითადი თვისებები (103). 2. მოდულის ბაზისების აგება (105). 3. ტენზორთა ბაზისები ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში (107) 4. (9.17) ფორმულის განვითარება რიმანის სივრცის შემთხვევაში (108)	
§ 10. ლუწი რიგის ტენზორული მოდულები	111
1. ტენზორთა გამრავლება ლუწი რიგის მოდულებიდან. $\mathcal{F}_{2p}(\Omega)$ რგოლი ერთეულით (111). 2. $\mathcal{F}_{2p}(\Omega)$ ალგებრა (114). 3. მულტიპლიკაციური M_{2p} ჩვეუთა (116). 4. $2p$ რანგის ტენზორის საკუთრივი მნიშვნელობა (119). 5. $2p$ რანგის ტენზორის დაყვანა მთავარ ღერძებზე (123)	
§ 11. ერმიტული კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე	128
§ 12. ჰილბერტის $H_p(\Omega)$ სივრცე. ბანახის $\widetilde{C}_p(\Omega)$ სივრცე	131
1. ჰილბერტის $H_p(\Omega)$ სივრცე (131). 2. ბანახის $\widetilde{C}_p(\Omega)$ სივრცე (134)	
თ ა ე ი IV. ტენზორული ანალიზის საფუძვლები	136
§ 1. კრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოები. სადერივაციო ფორმულები	136
1. კრისტოფელის სიმბოლოები ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში. სადერივაციო ფორმულები (136). 2. სადერივაციო ფორმულები მულტიპლიკაციური საბაზისო ტენზორებისათვის (138). 3. კრისტოფელის სიმბოლოების ძირითადი თვისებები (139). 4. კრისტოფელის 1-ლი და მე-2 გვარის სიმბოლოები რიმანის n -განზომილებიან სივრცეში (141)	
§ 2. ტენზორების გაწარმოება	144
1. 1-ლი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების კოვა-	

რიატული წარმოებულები (144). 2. 1-ლი რანგის ტენზორის კონტრაქციანტული კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები (146). 3. ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულები. ტენზორის პირდაპირი კოვარიანტული წარმოებულები (147). 4. ტენზორის დიფერენციალი. ტენზორთა ჯამისა და ნამრავლის გაწარმოების წესი (152). 5. დისკრიმინანტული ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები (154). 6. ტენზორის კომპონენტების კონტრაქციანტული წარმოებულები. ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულები (156). 7. საბაზისო ვექტორების კოვარიანტული წარმოებულები (156). 8. განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებულები. რიმან-ქრისტოფელის ტენზორი (157)

- § 3. ვექტორის დიფერენცია. გაუს-ოსტროგრადსკისა და გრინის ფორმულები. ლაპლასის ოპერატორი მრუდწირულ კოორდინატებში 162
1. ვექტორის დიფერენცია (163). 2. გაუს-ოსტროგრადსკისა და გრინის ფორმულები (163). 3. ლაპლასის ოპერატორი მრუდწირულ კოორდინატებში (165). 4. გაუს-ოსტროგრადსკისა და გრინის ფორმულები ტენზორებისათვის (165).

თ ა ვ ი V. ზედაპირის ტენზორები. ზედაპირთა თეორიის ელემენტები 170

- § 1. ზედაპირის პარამეტრული განტოლება. კოორდინატთა სისტემის კოვარიანტული და კონტრაქციანტული ბაზისები 170
1. ზედაპირის პარამეტრული განტოლება. საკოორდინატო წირები (170). 2. კოვარიანტული მოძრავი ბაზისი (171). 3. კონტრაქციანტული მოძრავი ბაზისი (173)

- § 2. ზედაპირის პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა. ზედაპირის დისკრიმინანტული ტენზორები 174
1. პირველი ძირითადი კვადრატული ფორმა. ზედაპირის კოვარიანტული და კონტრაქციანტული ტენზორები (174). 2. ზედაპირის ფართის ელემენტი. ზედაპირის დისკრიმინანტული ტენზორები (176). 3. კუთხე ორ მხებ მიმართულებას შორის (178)

- § 3. ზედაპირის ტენზორები 179
1. 1-ლი რანგის ტენზორები (179). 2. ნებისმიერი რანგის ტენზორები (182).

- § 4. გაუსისა და ვეინგარტენის სადრივაციო ფორმულები. ქრისტოფელის სიმბოლოები ზედაპირზე 184

- § 5. ზედაპირის გეოდეზიური წირები. კოორდინატთა პოლარული (ნახევრადგეოდეზიური) სისტემა 186
1. გეოდეზიური წირების განტოლებები (186). 2. ვარიაციული ამოცანა, რომელსაც მიეყვებათ გეოდეზიური წირების განტოლებებზე (187). 3. გეოდეზიური წირების ინვარიანტობა ზედაპირის ლენვის მიმართ (189). 4. პოლარული (ნახევრადგეოდეზიური) კოორდინატთა სისტემა (190).

§ 6. მეორე ძირითადი კვადრატული ფორმა. ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე	191
§ 7. როდრიგის ვექტორი. გეოდეზიური გრეხა და გეოდეზიური სიმრუდე	192
1. ზედაპირის მესამე კვადრატული ფორმა. როდრიგის ვექტორი (192). 2. გეოდეზიური გრეხა (194). 3. გეოდეზიური სიმრუდე (196)	
§ 8. ზედაპირის მთავარი მიმართულებები. მთავარი სიმრუდეები. გაუსის (მთავარი) და საშუალო სიმრუდეები	197
1. ზედაპირის მთავარი მიმართულებები. ზედაპირის საშუალო და გაუსის სიმრუდეები. ეილერის სხვაობა (197). 2. ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები. სიმრუდის წირები (199). 3. ეილერის ფორმულები (200)	
§ 9. ზედაპირის ტენზორთა გაწარმოება	202
1. ზედაპირის ტენზორის კომპონენტების კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულები. ზედაპირის ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული (202). 2. ზედაპირის ვექტორის დივერგენცია. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის ანალოგი (სტოქსის ფორმულა) (204). 3. ლაპლასის ოპერატორი ზედაპირზე. გრინის ფორმულები (206)	
§ 10. კავშირი ზედაპირის პირველ და მეორე ძირითად კვადრატულ ფორმებს შორის. განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებულები	207
1. გაუსისა და პეტერსონ-კოდაცის განტოლებები. რიმან-ჰრისტოფელის ტენზორი (208). 2. განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებულები. რიჩის ტენზორი (210)	
თავი VI. კოორდინატთა სპეციალური სისტემები და მათი ზოგიერთი გამოყენება ზედაპირთა თეორიაში	215
§ 1. კოორდინატთა სისტემები სიმრუდის წირებში	215
1. ზედაპირის პირველი და მეორე ძირითადი ფორმების გამოსახულებები (215). 2. ქრისტოფელის სიმბოლოები. გაუსისა და პეტერსონ-კოდაცის განტოლებები. ლაპლასის ოპერატორი (216). 3. სფერული ზედაპირის ერთი დამახასიათებელი თვისების შესახებ (217). 4. ნულოვანი მთავარი სიმრუდის ზედაპირები. ტორსები (218)	
§ 2. კოორდინატთა სისტემა ასიმპტოტურ წირებში	220
§ 3. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემა ზედაპირზე ბელტრამის განტოლებათა სისტემა და მისი ჰომეომორფიზმები	222
1. ბელტრამის განტოლებათა სისტემა. ბელტრამის განტოლებების ჰომეომორფიზმები (222). 2. ბელტრამის განტოლებათა სისტემა ანალიზური კოეფიციენტებით (225). 3. ბელტრამის განტოლების ძირითადი ჰომეომორფიზმის აგება (226). 4. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემა ჩაკეტილ სფერულ ზედაპირზე (230). 5. კოორდინატთა იზომეტრული სისტემის ინვარიანტობა კონფორმულ გარდაქმნათა მიმართ (231). 6. ქრისტოფელის სიმბოლოები კოორდინატთა იზომეტრულ სისტემაში. გაუსისა და ვეინგარტენის სადერევაციო ფორმულებისა და გაუსისა და პეტერსონ-კოდაცის განტოლებების კომპლექსური ჩაწერა (232). 7. ო. ბონეს ფორმულა (236). 8. გეოდეზიური წირების განტოლებები კოორდინატთა	

იზომეტრულ სისტემაში (237). 9. სიბრტყეზე იზომეტრული ასახვის კონფორმულობა (238)

§ 4. მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირის ერთი თვისების შესახებ. მინიმალური ზედაპირები

238

1. მუდმივი საშუალო სიმრუდის ზედაპირები (238). 2. მინიმალური ზედაპირები (241)

§ 5. მუდმივი გაუსის სიმრუდის ზედაპირები

243

1. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის არსებობა ნულოვან გაუსის სიმრუდის ზედაპირზე (243). 2. მუდმივი დადებითი (უარყოფითი) გაუსის სიმრუდის ზედაპირის ლოკალური განფენადობა სფეროზე (ფსევდოსფეროზე) (245).

§ 6. კავშირი მუდმივი საშუალო და მუდმივი მთავარი სიმრუდის ზედაპირებს შორის $\Delta u + 2H(e^u - e^{-u}) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

246

§ 7. ამოზნექილი ზედაპირების შეუღლებულად-იზომეტრული პარამეტრიზაცია

249

თ ა ე ი VII. კოვარიანტების თეორია

251

§ 1. გაუსის კომპლექსური კოორდინატები ზედაპირზე. ბელტრამის განტოლება კოორდინატთა სისტემების მახასიათებელი ფუნქციისთვის

252

1. გაუსის კომპლექსური კოორდინატები ზედაპირზე (252). 2. კომპლექსური გეგმარების ოპერაცია (256). 3. გაუსის კომპლექსური პარამეტრების დიფერენციალთა გარდაქმნის წესი (257). 4. ზედაპირის სკალარის კერძო წარმოებულების გარდაქმნის წესი (258). 5. ბელტრამის განტოლება. კოორდინატთა სისტემების მახასიათებელი ფუნქცია (259). 6. ზედაპირის გაუსის კომპლექსური კოორდინატების გარდაქმნათა ფუნქციონალური დეტერმინანტები (იაკობიანები) (262). 7. კოორდინატთა სისტემების მახასიათებელი ფუნქციის თვისებები (264).

§ 2. ზედაპირის კოვარიანტები და მათი თვისებები

266

1. ზედაპირის კოვარიანტები (266). 2. ზედაპირის კოვარიანტების თვისებები (270).

§ 3. კოვარიანტების გეგმარება

282

1. კოვარიანტების კოვარიანტული წარმოებულები (283). 2. კოვარიანტების კოვარიანტულ წარმოებულთა თვისებები (285). 3. კოვარიანტის კონტრავარიანტული წარმოებულები. ლაპლასის ოპერატორი კოვარიანტებისათვის (286). 4. კავშირი კოვარიანტების კოვარიანტულ წარმოებულებსა და ტენზორის კომპლექსური კომპონენტების კოვარიანტულ წარმოებულებს შორის (289)

§ 4. კოში-რიმანის განტოლებები კოვარიანტებისათვის. ანალიზური და განზოგადებული ანალიზური კოვარიანტები. კოვარიანტების ფაქტორიზაცია

292

1. კოში-რიმანის განტოლების ანალოგი კოვარიანტებისათვის. ანალიზური კოვარიანტები (292). 2. ანალიზური კოვარიანტების ფაქტორიზაცია. განზოგადებული ანალიზური და ანტიანალიზური კოვარიანტები. 1-ლი და მე-2 გვარის კოვარიანტული დიფერენციალები (294). 3. კოში-რიმანის არაერთგვაროვანი განტოლება (296). 4. კოში-რიმანის განტოლებები ოვალოიდებზე (297). 5. თეორემა ოვალოიდებზე კოში-რიმანის ერთგვაროვანი განტოლების უწყვეტი ამონახსნების არსებობის შესახებ (301).
- § 5. კოვარიანტული დიფერენციალი. მუდმივის ტიპის კოვარიანტები 305
1. კოვარიანტული დიფერენციალი (305). 2. მუდმივის ტიპის კოვარიანტი (305)
- § 6. წრფივი დიფერენციალური ფორმები. ფორმათა გარე გაწარმოება. ინტეგრალური ფორმულები 306
1. წრფივი დიფერენციალური ფორმები (306). 2. დიფერენციალური ფორმების გარე ნაშთი (307). 3. მოცემული დიფერენციალური ფორმის კოფორმა და შეუღლებული ფორმა. წრფივი დიფერენციალური ფორმათა ჰილბერტის სივრცეები (308). 4. კოვარიანტული კოდიფერენციალი. კონტრავარიანტული და შეუღლებული კოვარიანტული დიფერენციალები. ინტეგრალური ფორმულები (310). 5. ჩაკეტილი დიფერენციალური ფორმები (313).
- თ ა ვ ი VIII. ზედაპირთან ნორმალურად დაკავშირებული სივრცითი კოორდინატთა სისტემები 317
- § 1. სივრცის კოორდინატთა სისტემების S-ოქსი. ინდექსთა ზეზღუდვის ოპერაციები 317
1. კოორდინატთა სისტემების S-ოქსი (317). 2. ინდექსთა ზეზღუდვის ოპერაციები. სივრცითი S-ტენზორი (318).
- § 2. არის S_g -პარამეტრიზაცია 320
1. არის S_g -პარამეტრიზაცია. კოვარიანტული ბაზისი (320). 2. არის $S_{g,h}$ -პარამეტრიზაცია (321). 3. S_g -პარამეტრიზაციის კონტრავარიანტული ბაზისი. (323). 4. ქრისტოფელის სიმბოლოების გამოსახულებები (325). 5. მიახლოებითი ფორმულები (327)
- § 3. არის S_a -პარამეტრიზაცია 328
1. არის S_a პარამეტრიზაცია. კავშირი S_g - და S_a -პარამეტრიზაციათა ბაზისებს შორის (328). 2. $\Pi_p(Q)$ მოდულის ბაზისები. S-ტენზორების წარმოდგენა S_g -, S_a -, და $S_{g,a}$ -ბაზისებით (333). 3. ვექტორის კომპონენტების კოვარიანტული წარმოებულები S_a -პარამეტრიზაციის მიმართ (335). 4. S-ტენზორების კოვარიანტული წარმოებულები S_a -პარამეტრიზაციის მიმართ (337). 5. არის $S_{g,a}$ -პარამეტრიზაცია, რომელიც დაკავშირებულია S ზედაპირის კოორდინატთა

სისტემასთან სიმრუდის წირებში (342). 6. S -ტენზორების განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებულები (343). 7. კავშირი ქრისტოფელის G_{ik} და Γ^i_{jk} სიმბოლოებს შორის (344)

§ 4. ზედაპირის ჩადგმის შესაძლებლობის შესახებ რიმანის სამგანზომილებიან მრავალსახეობაში

345

ლიტერატურა

356

დაიბეჭდა საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს დადგენილებით

•
ИБ 1825

გამომცემლობის რედაქტორი გ. ბოკუჩავა
ტექნორედაქტორი ე. ბოკერიძე
მხატვარი ა. დუმბაძე
კორექტორი ლ. აბუანდაძე

გადაეცა წარმოებას 16.11.1981; ხელმოწერილია დასაბეჭდად 16.3. 1982;
ქაღალდის ზომა 60×90^{1/16}; ქაღალდი № 1; ნაბეჭდი თაბახი 23.0;
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 16.4;
ტირაჟი 1000; შეკვეთა № 3525;
ფასი 2 მან. 75 კაპ.

გამომცემლობა „მეცნიერება“, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Издательство «Мецниереба», Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Типография АН Груз. ССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19