

**ბ. ჯავახიშვილი
ტ. გუაჩე, ზ. კანდელაკი**

ალბათური მოდელები ეკონომიკაში

დამხმარე სახელმძღვანელო

მეორე შეცვებული და შესწორებული გამოცემა

**დამტკიცებულია თბილისის
საავიაციო უნივერსიტეტის
აკადემიური საბჭოს მიერ**

პროფესორ ბ. ჯავახიშვილის რედაქციით

**თბილისი
2009**

უაკ 001.891.573

- რეცენზენტები:**
1. ქუთაისის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის ტექნიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის გამგე, ფიზ. მათ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი გ. სოხაძე;
 2. თბილისის სააეიაციო უნივერსიტეტის ბიზნესისა და მართვის ფაკულტეტის სრული პროფესორი ნ. დუმბაძე

საგამომცემლო კომპანია „ბრიჭონი“

ISBN 978-9941-0-1603-5

ენიანსიფიკაცია

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო „ალბათური ოდელუბი ეკონომიკაში“ მომზადებულია თბილისის საავიაციო ინჟინერინგში და განკუთვნილია მაგისტრატურის ეკონომიკური და საინჟინრო სპეციალობების სტუდენტებისათვის.

წიგნი შედგება 11 პარაგრაფისაგან და 5 დანართისაგან. - §6-ში გადმოცემულია ალბათობის თეორიის, ხოლოს §7-§9-ი მათემატიკური სტატისტიკის ის ძირითადი საკითხები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ შევისწავლოთ, როგორც ონომიკური, ასევე საინჟინრო მოდელები. აღნიშნულ მასალაზე დაყრდნობით §10 - §11-ში შესწავლილია ალბათური მოდელები.

ყოველ პარაგრაფში მოცემულია თეორიული დებულებები, ფორმულები, მოყვანილია ტიპური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები, შესაბამისი მეთოდური მითითებებით და სავარჯიშოები შესაბამისი პასუხებით.

წიგნს თან ერთვის ამოცანები დამოუკიდებელი სამუშაოებისათვის, რომელთაგანაც შემდგომში შედგება ბილეთების რეიტინგო წერებისათვის.

უმაღლეს სასწავლებლებში მიმდინარე რეფორმებმა საშუალება მოგვცა, აღგვედგინა აღნიშნულ უნივერსიტეტში ამ საკითხების შესწავლა, რისთვისაც დიდ მადლობას მოვახსენებთ ბილისის საავიაციო უნივერსიტეტის რექტორს, პროფესორ ს. კენაძეს ხელშეწყობისა და თანადგომისათვის.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ სხვა უმაღლესი სასწავლებლების მაგისტრატურის საინჟინრო და ეკონომიკური სპეციალობების სტუდენტებსაც.

ავტორები გულწრფელ მადლობას უხდით ნანა კანჯარაშელს, რომელმაც უმოკლეს დროში, მძალად პროფესიონალურ ენაზე ააწყო სახელმძღვანელო კომპიუტერზე.

ავტორები

აღბათობის თეორიის ელემენტები

§1. ხდომილობები და მათი კლასიფიკაცია. აღბათობის კლასიკური, სტატისტიკური და გეომეტრიული განსაზღვრა. კომბინატორიკის ელემენტები

რაიმე მოვლენის მოხდენის ან არ მოხდენის ფაქტს ხდომილობა ეწოდება. ხდომილობა არის სამი სახის: აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი.

ხდომილობა წარმოადგენს დაკვირვების, ცდის ან ექსპერიმენტის პოტენციურ შედეგს. თავის მხრივ, დაკვირვება (ცდა, ექსპერიმენტი) გარკვეული პირობების კომპლექსის განხორციელებაა. მეცნიერების, ტექნიკის, ეკონომიკის ყველა სფეროში გვხვდება შემთხვევები, როდესაც დაკვირვება შეიძლება ერთნაირ პირობებში მრავალჯერ განმეორდეს.

დაკვირვების პირობების კომპლექსი (ვალსახად განსაზღვრავს ამ დაკვირვების მოსალოდნელ ხდომილობათა სიმრავლეს, მაგრამ დაკვირვების უშუალოდ ჩატარებამდე შეუძლებელია მიეუთითოთ ამ ხდომილობებიდან რომელ ხდომილობას ექნება ადგილი.

აღბათობის თეორიის მიზანია დაკვირვებების აზრობრივი ჩატარება და ასეთ ექსპერიმენტთა მათემატიკური მოდელების შესწავლა, ხოლო (აქვე აღენიშნავთ) უკვე

ნატარებული დაკვირვებების შედეგად მიღებული მონაცემების მათემატიკურ მოდელებს შეისწავლის მათემატიკური სტატისტიკა.

ხდომილობას, რომელიც ერთი და იგივე ცდის მრავალჯერ გამეორებისას ყოველთვის მოხდება აუცილებელ ხდომილობას უწოდებენ და აღნიშნავენ Ω ასოთი, ხოლო ხდომილობას, რომელიც არასოდეს არ მოხდება შეუძლებელ ხდომილობას უწოდებენ და აღნიშნავენ $\emptyset$ სიმბოლოთი.

ყუთში არის 5 წითელი ბურთი. აღალბედზე ვიღებთ ერთ ბურთს. ხდომილობა {ამოღებული ბურთი წითელია} არის აუცილებელი ხდომილობა, ხოლო ხდომილობა {ამოღებული ბურთი თეთრია} — შეუძლებელი ხდომილობაა.

ხდომილობას, რომელიც ერთი და იგივე დაკვირვების მრავალჯერ ნატარებისას ხან ხდება და ხან არა, ეწოდება შემთხვევითი ხდომილობა. შემთხვევით ხდომილობებს აღნიშნავენ A, B, C , ან A_1, A_2, A_3 , ასოებით.

თუ რამოდენიმე ხდომილობიდან, ნებისმიერი ორი ხდომილობის ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, მაშინ მათ წყვილ-წყვილად უთავსებად ხდომილობათა სისტემას უწოდებენ.

თუ ორი ხდომილობის ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, მაშინ მათ უთავსებადი ხდომილობები ეწოდებათ.

ორი A და B ხდომილობის ნამრავლი $A \cdot B$ არის ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს, რომ ორივე ხდომილობას ერთდროულად აქვს ადგილი.

ორი A და B ხდომილობის ჯამი $A+B$ არის ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს, რომ ერთ-ერთ ხდომილობას მაინც აქვს ადგილი ე.ი. ან ხდება A ან B ან $A \cdot B$.

A ხდომილობა იყოს კარტების კომპლექტიდან ტუზის ამოღების აღმნიშვნელი ხდომილობა, ხოლო B იყოს შავი ფერის კარტის ამოღება, მაშინ $A+B$ იქნება კომპლექტიდან ნებისმიერი ტუზის ან ნებისმიერი შავი ფერის კარტის ამოღების აღმნიშვნელი ხდომილობა, ხოლო $A \cdot B$ – იქნება კომპლექტიდან შავი ფერის ტუზის ამოღების აღმნიშვნელი ხდომილობა.

რაიმე A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა, რომელიც აღინიშნება $\bar{A}$ -თი, ნიშნავს A ხდომილობის არმოხდენას. (ახადია, რომ $A + \bar{A} = \Omega$).

ვთქვათ A ხდომილობა არის მოწეცის აგდებისას, მასზე გერბის მოსვლის აღმნიშვნელი, მაშინ $\bar{A}$ იქნება მასზე საფასურის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა.

თუ $A_1, A_2, \dots, A_n$ წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია და $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, მაშინ $A_1, A_2, \dots, A_n$ -ს ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა.

მოცემული დაკვირვების ხდომილობებს ეწოდებათ ტოლშესაძლებელი, თუ დაკვირვების პირობათა კომპლექსის მიხედვით არა გვაქვს საფუძველი რომელიმე ხდომილობის მოხდენას მივანიჭოთ უპირატესობა.

წყვილ-წყვილად უთავსებად ხდომილობებს ეწოდება შემთხვევები, თუ ისინი ტოლშესაძლებლები არიან და ქმნიან სრულ სისტემას. იმ შემთხვევებიდან, რომელსაც

შეიძლება პქონდვის ადგილი ცდის ჩატარების დროს, გამოკოფუნ შემთხვევებს, რომლებიც ხელს უწყობენ რაიმე ხდომილობის მოხდენას.

შესაძლებელია შევადაროთ ხდომილობები ერთმანეთს მათი მოხდენის შესაძლებლობის მიხედვით. შემოვიღოთ ხდომილობის ალბათობა. A ხდომილობის ალბათობა აღინიშნება $P(A)$ სიმბოლოთი და არის ამ ხდომილობის მოხდენის შესაძლებლობის რაოდენობითი ზომა ანუ წარმოადგენს A ხდომილობის მოხდენის პროგნოზს.

ეთქვამთ გვაქვს დაკვირვება, რომლის ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვია n (n სასრული რიცხვია), ხოლო დაკვირვების რაიმე A ხდომილობის *ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვია* m , მაშინ A ხდომილობის $P(A)$ ალბათობა გამოითვლება *კლასიკური* ფორმულით

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

აუცილებელ ხდომილობას ხელს უწყობს ცდის ყველა შესაძლო შემთხვევა, ე.ი. $m=n$, ამიტომ $P(\Omega) = 1$, ხოლო შეუძლებელ ხდომილობას არცერთი შემთხვევა არ უწყობს ხელს, ე.ი. $m=0$, ამიტომ $P(\emptyset) = 0$. საზოგადოდ: $0 \leq m \leq n$, ამიტომ $0 \leq P(A) \leq 1$.

(1.1) ფორმულის ალბათობის კლასიკურ განსაზღვრასაც უწოდება.

თუ დაკვირვების (ცდის) ყველა შესაძლო შემთხვევათა n რიცხვი სასრული არაა, ან ცდის პირობებით წყვილ-წყვილად უთავსებად ხდომილობათა თანაბრად შესაძლებლობას ადგილი არა აქვს, მაშინ A

ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა კლასიკური განსაზღვრის საფუძველზე შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევებში ხშირად მიმართავენ ალბათობის *სტატისტიკურ* განსაზღვრას, რომლის არსი დაკვირვებების უშუალოდ ჩატარებაში მდგომარეობს.

ეთქვათ, ვატარებთ ცდას, რომლის შედეგადაც A ხდომილობა ხდება ან არ ხდება. გავიმეოროთ აღნიშნული ცდები n -ჯერ. აღენიშნოთ m -ით იმ ცდების რაოდენობა, რომლებშიც მოხდა A ხდომილობა ($n-m$ არის ცდების რაოდენობა, რომლებშიც დაფიქსირდა $\bar{A}$).

$\frac{m}{n}$ -ს ეწოდება n ცდაში A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე. ფარდობითი სიხშირეები ამჟღავნებენ სტატისტიკური მდგრადობის თვისებას: თუ გავიმეორობთ ცდების ახალ-ახალ სერიებს, ისე რომ, ყოველ მომდევნო სერიაში ცდების n რიცხვს გავზრდით, აღმოჩნდება, რომ სერიებში დაფიქსირებული ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირეები მით უფრო მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, რაც უფრო დიდია ცდების რიცხვი და მერყეობენ (ფლუქტუაციას განიცდიან) გარკვეული მუდმივი რიცხვის მახლობლობაში. ეს მუდმივი რიცხვი წარმოადგენს A ხდომილობის $P(A)$ ალბათობას, რომელიც სინამდვილეში ჩვენთვის უცნობია. აღნიშნულიდან გამომდინარეობს ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრა: ცდების საკმარისად დიდი n რიცხვისათვის A ხდომილობის უცნობი $P(A)$ ალბათობა შეგ-

ვიძლია შევაფასოთ ამ ხდომილობის $\frac{m}{n}$ ფარდობითი სიხშირით, დაეწერს

$$P(A) \approx \frac{m}{n}. \quad (1.2)$$

ზოგჯერ დაკვირვებების შედეგები შეიძლება აღეწეროთ წერტილის მდებარეობით რაიმე არეზე, ხოლო ხდომილობა გამოიხატება წერტილის მდებარეობით ამ არის ნაწილზე.

A ხდომილობის $P(A)$ ალბათობა გამოითვლება გეომეტრიული ფორმულით

$$P(A) \approx \frac{s}{S}, \quad (1.3)$$

სადაც s არის მოცემული ხდომილობის ხელშემწყობი არის ზომა (მონაკვეთის სიგრძე, ბრტყელი ფიგურის ფართობი, სხეულის მოცულობა), ხოლო S – მოცემული დაკვირვების ყველა შესაძლო წერტილებით განსაზღვრული არის შესაბამისი ზომა.

ხდომილობების ალბათობების გამოთვლის პროცესში შემთხვევების დათვლის დროს ხშირად გამოიყენება შეერთებათა (კომბინატორიკის) თეორიის ფორმულები.

კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი შემდეგში მდგომარეობს: თანმიმდევრობით შესრულებულია k მოქმედება. თუ პირველი მოქმედება შეიძლება შევასრულოთ n_1 , მეორე n_2 , მესამე n_3 და ა.შ. k -ური n_k განსხვავებული წესით, მაშინ k მოქმედება მთლიანობაში შეიძლება შესრულდეს $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ განსხვავებული წესით.

n ელემენტებისაგან შედგენილ ისევე n ელემენტიან ჯგუფებს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ელემენტთა დალაგების რიგით, *გადანაცვლებები* ეწოდებათ, მათი რაოდენობა აღინიშნება P_n სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$$

n ელემენტიდან შედგენილ ისეთ m ელემენტიან ჯგუფებს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ან ელემენტთა დალაგების რიგით, ან ერთი ელემენტით მაინც, *წყობები* ეწოდებათ, მათი რაოდენობა აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1).$$

n ელემენტიდან შედგენილ ისეთ m ელემენტიან ჯგუფებს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც, *ჯუფთებები* ეწოდებათ, მათი რაოდენობა აღინიშნება C_n^m სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

შენიშვნა: $1! = 1$; $0! = 1$.

ყუთის სქემები. ვთქვათ ყუთში N დანომრილი ბურთულაა, რომლებიც დანომრილია 1, 2, 3, ..., N -მდე. ყუთიდან აღაღებდზე თითო-თითოდ ვიდებთ M ბურთულას და ვაფიქსირებთ ყოველი ამოღებული ბურთულის ნომერს. ამოღებული M ბურთულის დაფიქსირებული ნომრები აღებულია N ელემენტიდან და ქმნიან სავარაუდოდ

ჯგუფებს. გვარტერესებს ამ ჯგუფების რაოდენობა. უნდა განვასხვაოთ შემთხვევები:

ა) მოწესრიგებული ამოკრეფა ყუთიდან დაბრუნების გარეშე: ამ შემთხვევაში ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა ნომრის დაფიქსირების შემდეგ, უკან ყუთში არ ბრუნდება ($m \leq n$), მაგრამ თანმიმდევრობას მნიშვნელობა ენიჭება. ე.ი. მიღებული ჯგუფები განსხვავდებიან ან ელემენტების დალაგების რიგით, ან ერთი ელემენტით მაინც, ამიტომ ისინი წარმოადგენენ წყობებს და მათი რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

მაგალითად, ასეთ ჯგუფებთან გვექნება საქმე თუ ამოცანაში მოგვიწევდა განსხვავებული ციფრების შემცველი კოდის აკრეფა. ყუთის როლს თამაშობს ციფრების სიმრავლე $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $n=10$. m ($0 \leq m \leq n$) იქნება ამონაკრეფის მოცულობა.

ბ) მოუწესრიგებელი ამოკრეფა ყუთიდან დაბრუნების გარეშე: ამ შემთხვევაშიც ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა ნომრის დაფიქსირების შემდეგ, უკან ყუთში არ ბრუნდება, მაგრამ ელემენტების (ნომრების) ჩაწერის თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ ენიჭება. მიიღება n ელემენტიდან შედენილი m ელემენტიანი ($0 \leq m \leq n$) ჯუფთებები და მათი რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

მაგალითად, ასეთ ჯგუფებებთან გვექნება საქმე თუ გვექნება ყუთიდან ერთდროულად m ბურთულის ამოღება.

გ) მოწესრიგებული ამოკრეფა ყუთიდან დაბრუნებით: ამ შემთხვევაში ფიქსირდება ყუთიდან აღალბედსე ამოღებული ბურთულის ნომერი, რის შემდეგაც ბურთულას ისევ ყუთში ვაბრუნებთ, კელაე ვიღებთ აღალბედსე ბურთულას, ვაფიქსირებთ ნომერს, შემდეგ ისევ ყუთში ვაბრუნებთ და ა.შ. ვიმეორებთ პროცესს m -ჯერ. ამასთან, ჩაწერილი ნომრებისაგან შედგენილ სავარაუდო ჯგუფებში ელემენტების (ნომრების) დალაგებას მნიშვნელობა ენიჭება. ამ შემთხვევაში მიღებული ჯგუფების რაოდენობა ტოლია n^m -ის. (m ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია).

მაგალითად, ყუთში 10 ბურთულაა დანიმრილი (კიფრებით: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. აღალბედსე ვიღებთ სათითაოდ ორ ბურთულას დაბრუნებით. ბურთულის ყოველი ამოღების შემდეგ ვაფიქსირებთ მის ნომერს. ერთი სავარაუდო ჯგუფია (a_1, a_2), სადაც $a_1=0, 1, \dots, 9$, ასევე $a_2=0, 1, \dots, 9$. სულ ასეთი ჯგუფების რაოდენობა იქნება $10^2=100$.

დ) მოუწესრიგებელი ამოკრეფა ყუთიდან დაბრუნებით: ამ შემთხვევაშიც ყუთიდან ამოღებული ბურთულა, ნომრის დაფიქსირების შემდეგ ისევ ყუთში ბრუნდება და ა.შ. მხოლოდ ჩაწერილი ნომრების თანმიმდევრობას ჯგუფში მნიშვნელობა არ ენიჭება. მიღებული ჯგუფების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით

$$C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ყუთში მოთავსებულია 25 ერთნაირი ბურთული, რომელთაგან 5 თეთრია, ხოლო 20 წითელი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) შემთხვევით ამოღებული ბურთულია თეთრია; ბ) შემთხვევით ამოღებული ბურთულია წითელია.

ამოხსნა. ა) აღვნიშნოთ A-თი ხდომილობა – {ამოღებული ბურთულია თეთრია}. რადგან ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი $m=5$, ხოლო ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი $n=25$, ამიტომ (1.1) ფორმულის თანახმად

$$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

ბ) აღვნიშნოთ B-თი ხდომილობა – {ამოღებული ბურთულია წითელია}. ამ შემთხვევაში $m=20$, ხოლო $n=25$, ამიტომ გვექნება

$$P(B) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორებისას მოვა: ა) 6-იანი; ბ) კენტი რიცხვი.

ამოხსნა. A-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა – {კამათელზე მოვა 6-იანი}, ხოლო B={კამათელზე მოვა კენტი

რიცხვი). მაშინ ა) შემთხვევაში $m=1$, $n=6$, ამიტომ $P(A) = \frac{1}{6}$, ხოლო ბ) შემთხვევაში $m=3$, $n=6$, ამიტომ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. ყუთში არის 100 ბურთულა, გადანომრილი 1-დან 100-ის ჩათვლით. ვიპოვოთ აღბათობა იმისა, რომ აღალბედზე ამოღებული ბურთულის ნომერი გაიყოფა 3-ზეც და 5-ზეც.

ამოხსნა. ვთქვათ $A = \{\text{ამოღებული ბურთულის ნომერი გაიყოფა 3-ზეც და 5-ზეც}\}$, რადგან 15-ის ჯერადი რიცხვებია 15, 30, 45, 60, 75, 90 ე.ი. $m=6$, $n=100$, ამიტომ

$$P(A) = \frac{6}{100} = 0,06.$$

4. ტელეფონზე ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავეიწყდა ბოლო ორი ციფრი და ახსოვდა, რომ ისინი განსხვავებული ციფრები იყვნენ. ვიპოვოთ აღბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აკრეფილი ნომერი იქნება სწორი.

ამოხსნა. $A = \{\text{აკრეფილია საჭირო ნომერი}\}$. რადგან $n = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$, ხოლო $m=1$, ამიტომ გვექნება

$$P(A) = \frac{1}{90}.$$

5. 36 კარტიანი კომპლექტიდან ალაღბედზე იღებენ 3 კარტს, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის იქნება მხოლოდ ერთი 8-იანი.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A -თი ხდომილობა – {ამოღებული 3 კარტიდან მხოლოდ ერთია 8-იანი}. ყველა

შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი $n = C_{36}^3 = \frac{36!}{3!33!} = 34 \cdot 35 \cdot 6$,

ხოლო ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი

$m = C_4^1 \cdot C_{32}^2 = 4 \cdot \frac{32!}{2!30!} = 2 \cdot 31 \cdot 32$, ამიტომ (1.1) ფორმულის

თანახმად გვექნება

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot 31 \cdot 32}{6 \cdot 34 \cdot 35} \approx 0,28.$$

6. ვაგორებთ ორ კამათელს, რომელი ხდომილობაა უფრო მოსალოდნელი $A = \{\text{მოსულ ქელათა ჯამი ტოლი იქნება 7-ის}\}$, თუ $B = \{\text{მოსულ ქელათა ნამრავლი ტოლი იქნება 10-ის}\}$.

ამოხსნა. I *ხერხი.* ყველა შესაძლო შემთხვევები შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი წყვილების სახით:

(1; 1) (1; 2) (1; 3) (1; 4) (1; 5) (1; 6)

(2; 1) (2; 2) (2; 3) (2; 4) (2; 5) (2; 6)

(3; 1) (3; 2) (3; 3) (3; 4) (3; 5) (3; 6)

(4; 1) (4; 2) (4; 3) (4; 4) (4; 5) (4; 6)

(5; 1) (5; 2) (5; 3) (5; 4) (5; 5) (5; 6)

(6; 1) (6; 2) (6; 3) (6; 4) (6; 5) (6; 6)

$n=36$. A ხდომილობას ხელს უწყობენ შემთხვევები: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1). სულ ხელშემწყობი შემთხვევაა $m=6$. B ხდომილობას ხელს უწყობენ შემთხვევები: (2; 5), (5; 2). სულ 2 შემთხვევაა. (1.1) ფორმულის მიხედვით $P(A) = \frac{6}{36}$, $P(B) = \frac{2}{36}$. როგორც

გხედავთ, $P(A) > P(B)$ ანუ ორი კამათელის გაგორებისას უფრო მოსალოდნელია, რომ მოსულ ქულათა ჯამი ტოლი იყოს 7-ის, ვიდრე ხდომილობა: მოსულ ქულათა ნამრავლი ტოლია 10-ის.

II ხერხი. ყველა შესაძლო შემთხვევების წარმოსადგენად გამოვიყენოთ ყუთის სქემა. დაეუშვათ ყუთში მოთავსებულია ექვსი ბურთულა, რომლებიც დანომრილია 1-დან 6-მდე. ყუთიდან ალაღბედზე ვიღებთ სათითაოდ ორ ბურთულას დაბრუნებით. შესაძლო შემთხვევები გამოისახება ყველა შესაძლო $(i; j)$ წყვილებით, სადაც $i=1, \dots, 6; j=1, \dots, 6$. სულ შემთხვევების რაოდენობა $n=6^2=36$. A ხდომილობას ხელს უწყობს შემთხვევები $(i; j)$, სადაც $i+j=7$; და $i=1, \dots, 6; j=1, \dots, 6$; ანუ $m=6$ შემთხვევა. ხოლო B-ს შემთხვევები $(i; j)$, სადაც $i \cdot j=10$; და $i=1, \dots, 6; j=1, \dots, 6$; სულ $m=2$ შემთხვევა. (1.1) ფორმულით $P(A) = \frac{6}{36}$,

$$P(B) = \frac{2}{36}, P(A) > P(B).$$

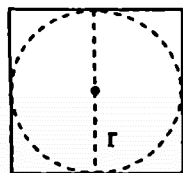
7. 1000 დეტალის შემოწმებისას აღმოჩნდა, რომ 10 იყო არასტანდარტული. ვიპოვეთ არასტანდარტული დეტალების აღმოჩენის ფარდობითი სიხშირე.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (1.2) ფორმულა. რადგან $m=10$ და $n=1000$, ამიტომ გვექნება

$$P(A) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

8. სამიზნეა კვადრატი. ეიპოვოთ მასში ჩახაზულ წრეში ტყვიის მოხვედრის ალბათობა.

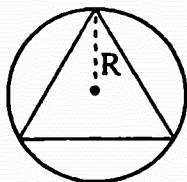
ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობა $A=\{\text{ტყვია მოხვდება წრეში}\}$. შევადგინოთ ნახაზი და ჩავატაროთ გამოთვლები. $S_{\text{წრ.}}=\pi r^2$, $S_{\text{კვ.}}=4r^2$, მაშინ (1.3) ფორმულის თანახმად გვექნება



$$P(A) = \frac{S_{\text{წრ.}}}{S_{\text{კვ.}}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

9. სამიზნეა წრე. ეიპოვოთ, მასში ჩახაზულ წესიერ სამკუთხედში ტყვიის მოხვედრის ალბათობა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობა $A=\{\text{ტყვია მოხვდება სამკუთხედში}\}$. ნახაზიდან გვაქვს, რომ $S_{\Delta} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$,



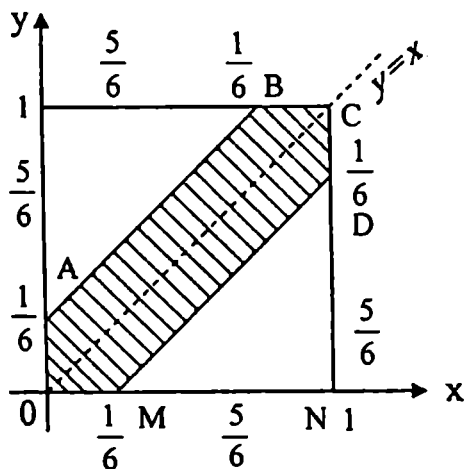
ხოლო $S_{\text{წრ.}}=\pi R^2$, ამიტომ აქაც (1.3) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$P(A) = \frac{S_{\Delta}}{S_{\text{წრ.}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,41.$$

10. გარკვეული პირობების გამო აღმოჩნდა, რომ აეროპორტის ერთადერთ თავისუფალ დასაფრენ ზოლზე 17სთ-დან 18სთ-მდე ღროის შეაღებულში დაფრენის შეკე-

თას იძლევა ორი თვითმფრინავი. ზოლში თითოეული მათგანისათვის მომსახურების დრო (ზოლის დაკაფების დრო) ერთდარიგევა და უდრის 10 წთ-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი თვითმფრინავი მაშინ მიადგება დასაფრენ ზოლს, როდესაც იგი დაკაფებულია მეორე თვითმფრინავის მიერ?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობა: $A = \{\text{ერთ-ერთი თვითმფრინავი მაშინ „ითხოვს“ ზოლში დაფრენას, როდესაც იგი დაკაფებულია მეორე თვითმფრინავით}\}$. ამოცანას შეგვიძლია მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ერთ-ერთი თვითმფრინავის ზოლში დაფრენის დრო აღვნიშნოთ x -ით, მეორის y -ით. $17\text{სთ} \leq x \leq 18\text{სთ}$, $17\text{სთ} \leq y \leq 18\text{სთ}$. $18\text{სთ} - 17\text{სთ} = 1\text{სთ}$, ამიტომ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ (x, y) წერტილები აესებენ კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძე 1-ის ტოლია. თვითმფრინავების დაფრენის დროის მომენტები დაემთხვევიან $y=x$



კვადრატის დიაგონალს. რადგან თითოეული თვითმფრინავისთვის დასაფრენი ზოლის დაკაფების დრო ტოლია

$$10\text{წთ} = \frac{1}{6}\text{სთ} - \text{ის,}$$

ამიტომ ერთ-ერთის დაფრენას ხელს შეუშლის მეორე თვითმფრინავი თუ

სრულდება პირობა $|x - y| \leq \frac{1}{6}$, ანუ $-\frac{1}{6} \leq x - y \leq \frac{1}{6}$ ე.ი.

$x - \frac{1}{6} \leq y \leq x + \frac{1}{6}$. რაც იმას ნიშნავს, რომ A ხდომილობა მოხდება, თუ (x, y) წერტილი მოხედება დაშტრიხულ $0ABCDM$ არეში.

$$S_{\Delta} = 1; S_{OABCDM} = 1 - 2S_{MDN} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} \right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

(1.3) ფორმულის თანახმად

$$P(A) = \frac{S_{OABCDM}}{S_{\Delta}} = \frac{11}{36}.$$

მაგალითები

1.1. ყუთში მოთავსებულია 20 ერთნაირი ბურთული, რომელთაგან 5 წითელია, ხოლო 15 თეთრი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთულია: ა) წითელია; ბ) თეთრია.

1.2. ყუთში მოთავსებულია მხოლოდ ფერით განსხვავებული 6 თეთრი და 11 შავი ფერის ბურთული. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) შემთხვევით ამოღებული ბურთულია თეთრია; ბ) შემთხვევით ამოღებული ბურთულია შავია; გ) შემთხვევით ამოღებული ბურთულია წითელია.

1.3. ყუთში აწყვია ერთნაირი 100 ბურთულა, გადა-
ნომრილი 1-დან 100-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ
შემთხვევით ამოღებული ბურთულის ნომერი იქნება: ა)
ლუწი; ბ) გაიყოფა 3-ზე.

1.4. ყუთში აწყვია ერთნაირი 80 ბურთულა, გადანომ-
რილი 1-დან 80-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ
შემთხვევით ამოღებული ბურთულის ნომერი: ა) გაიყოფა
4-ზე; ბ) არ გაიყოფა არც 2-ზე და არც 3-ზე.

1.5. ყუთში აწყვია 60 ბურთულა, გადანომრილი 1-დან
60-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით
ამოღებული ბურთულის ნომერი არ შეიცავს 5-ანს.

1.6. ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს
დააეიწყდა ბოლო ორი ციფრი და მან აღაღებელზე აკ-
რიფა ეს ციფრები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აკრე-
ფილი ნომერი სწორია თუ ა) აბონენტმა იცის, რომ
ეს ციფრები ერთნაირია; ბ) ინჟინრმა ციფრების
შესახებ არ გაანინია.

1.7. ყუთში მოთავსებულია 5 ერთნაირი ქაღალდის
ბარათი. თითოეულ მათგანზე დაბეჭდილია ერთ-ერთი
შემდეგი ასოებიდან: ა, ლ, კ, ი, ე. იპოვეთ ალბათობა
იმისა, რომ თითო-თითოდ ამოღებულ და ერთ ხაზზე
დალაგებულ ბარათებზე ამოვიკითხავთ სიტყვებს: ა)
ეკალი; ბ) ლიკა; გ) ალი; დ) ია.

1.8. 50 დეტალში 5 წუნდებულია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე ამოღებული 6 დეტალიდან 2 წუნდებულია.

1.9. საგამოცდო ბილეთებში შედის 40 საკითხი, რომელთაგან სტუდენტმა მოამზადა 30. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტის მიერ ალაღბედზე აღებული ბილეთი, რომელიც შეიცავს ორ საკითხს, შედგება მის მიერ მომზადებული საკითხებისაგან.

1.10. ყუთში აწყვია 10 შავი და 15 თეთრი ბურთულა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული 5 ბურთულიდან 2 იქნება შავი.

1.11. ქარხანა უშვებს 50% უმაღლეს და 45% პირველი ხარისხის ნაწარმს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე აღებული ნაწარმი აღმოჩნდება უმაღლესი ხარისხის?

1.12. საწყობში 18 პირველი და 7 მეორე ხარისხის მილაკია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე აღებული სამი მილაკიდან 2 მეორე ხარისხისაა და 1 პირველის.

1.13. საწყობში ერთად დევს ერთნაირი 20 უმაღლესი და 6 პირველი ხარისხის საბურავი. ალაღბედზე აიღეს 4 საბურავი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 4-ივე უმაღლესი ხარისხისაა.

1.14. ფირმაში მუშაობს 6 მამაკაცი და 4 ქალი. სამსახურში გამოცხადების განრიგის მიხედვით შემთხვევით აირჩიეს 7 ადამიანი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 3 ქალია.

1.15. ქარხნის მიერ დამზადებული ერთი და იგივე ტიპის 5 ძრავიდან 3 უმაღლესი ხარისხისაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 3 ძრავიდან მხოლოდ ორია უმაღლესი ხარისხის.

1.16. სეიფის კოდი შედგება 5 ციფრისგან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ციფრები სხვადასხვაა.

1.17. საწყობში 15 კინესკოპია, მათ შორის 10 დამზადებულია თბილისის ქარხანაში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ალეხული 5 კინესკოპიდან 3 აღმოჩნდება თბილისის ქარხანაში დამზადებული.

1.18. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათელის გაგორებისას პირველ კამათელზე უფრო დიდი ქულა მოვა ვიდრე მეორეზე.

1.19. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათელის გაგორებისას პირველ კამათელზე მოსული ქულა არ აღემატება მეორე კამათელზე მოსულ ქულას?

1.20. ყუთში 5 ბურთულაა. თითოეულ მათგანზე აღნიშნულია ერთ-ერთი შემდეგი რიცხვებიდან 1, 2, 3, 4, 5. თანმიმდევრობით აღალბედზე ვიდებთ ორ ბურთულას

და ვაფიქსირებთ ნომერს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მეორედ ამოღებული ბურთულის ნომერი მეტია პირველად ამოღებული ბურთულის ნომერზე. განიხილეთ ამოკრეფა: ა) დაბრუნების გარეშე და ბ) დაბრუნებით.

1.21. ყუთში ოთხი ერთნაირი ბურთულაა. თითოეულ მათგანზე აწერია ერთ-ერთი შემდეგი ასოებიდან: ო, კ, ა, ტ. ალაღბედზე სათითაოდ ვიღებთ ოთხ ბურთულას და ვაფიქსირებთ წარწერას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დაიწერება სიტყვა „კატო“. განიხილეთ: ა) ამოკრეფა დაბრუნებით და ბ) ამოკრეფა დაბრუნების გარეშე.

1.22. 200 დეტალის შემოწმებისას აღმოჩნდა, რომ 195 იყო სტანდარტული. იპოვეთ არასტანდარტული დეტალების ფარდობითი სიხშირე.

1.23. მიზანში სროლისას მოხვედრის ფარდობითი სიხშირეა 0,75. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვი, თუ სულ 200-ჯერ გაისროლეს.

1.24. აგვისტოს თვეში ქ. თბლისში მზიან დღეთა სტატისტიკური ალბათობა 0,9-ის ტოლია. რამდენი მზიანი დღე იქნება მომავალ წელს აგვისტოში?

1.25. 25 სმ სიგრძის მონაკვეთზე მოთავსებულია 5 სმ-ის სიგრძის მონაკვეთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ მონაკვეთზე ალაღბედზე დასმული წერტილი მცირე მონაკვეთზეც მოხედება.

1.26. 50 მ რადიუსიან წრეში მოთავსებულია 5 მ რადიუსიანი წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ წრეში ალაღბედზე ჩამოგდებული ბომბი მცირე წრეშიც მოხვდება.

1.27. r რადიუსიან წრეში ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში ჩამოგდებული ბომბი კვადრატის შიგნითაც მოხვდება.

1.28. 25 მ სიგანისა და 150 მ სიგრძის მინდორზე მოთავსებულია 500 სმ სიგანისა და 600 სმ სიგრძის ბეტონის ფილა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მინდორზე ჩამოგდებული ბომბი დაეცემა ბეტონის ფილასაც.

1.29. სამიზნეა წესიერი სამკუთხედი. იპოვეთ მასში ჩახაზულ წრეში, ტყეის მოხვედრის ალბათობა.

1.30. წარმოებს ლაზერის კვანტით ერთჯერადი დაბომბვა კვადრატზე, რომლის წვეროების კოორდინატებია $(0; 0)$, $(0; 4)$, $(4; 0)$ და $(4; 4)$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოხვედრა დაფიქსირდება წერტილში, რომლის კოორდინატები დააკმაყოფილებს პირობას $x^2 + y^2 \geq 2$.

1.31. სამიზნე შეადგენს კვადრატს, რომლის წვეროების კოორდინატებია $(0; 0)$, $(0; 8)$, $(8; 0)$, $(8; 8)$. კვადრატზე წარმოებს მხოლოდ ერთჯერადი გასროლა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოხვედრილი წერტილის კოორდი-

ნატები დააკმაყოფილებენ პირობას: ა) $x + y \geq 3$, ბ) $x + y < 3$.

1.32. სამხედრო აეროდრომის ტექნიკურად ვარგისიანი აღმოაჩნდა მხოლოდ ერთი დასაფრენი ზოლი, რომელზეც 9⁰⁰ სთ – 9³⁰ სთ შუალედში უნდა დაფრინდეს ორი თვითმფრინავი. თითოეულ თვითმფრინავს ზოლის დაკავება სჭირდება 5 წუთით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი თვითმფრინავი მაშინ მიადგება ზოლს, როდესაც დასაფრენი ზოლი დაკავებული აქვს მეორე თვითმფრინავს. თვითმფრინავების მოფრენის დრო მითითებულ შუალედში შემთხვევითია.

1.33. ნავსადგურში, რომელსაც ერთი ნავმისადგომი აქვს თავისუფალი, 11 სთ-დან 12 სთ-მდე უნდა შემოვიდეს ორი გემი. თითოეულ გემს ნავმისადგომში მომსახურებისათვის სჭირდება 20 წთ. გემების მოსვლის დრო შემთხვევითია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი გემი მაშინ მოადკება ნავმისადგომს, როდესაც იგი დაკავებულია მეორის მიერ?

1.34. ორ სხვადასხვა სტენდზე, რომელთაც ერთი მექანიკოსი ემსახურება, 1 სთ-ის განმავლობაში წარმოებს თვითმფრინავის ძრავების გამოცდა. საჭიროების შემთხვევაში მექანიკოსს სტენდის მომსახურებისათვის სჭირდება 15 წუთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთ სტენდს მაშინ დასჭირდება მექანიკოსის მომსახურება, როდესაც იგი დაკავებულია მეორეთი.

პასუხები

1.1. 0,25; 0,75. 1.2. ა) 0,35; ბ) 0,65; გ) 0. 1.3. ა) 0,5; ბ) 0,33. 1.4. ა) 0,25; ბ) 0,34. 1.5. 0,75. 1.6. ა) 0,1; ბ) 0,01. 1.7. ა) ბ) 0,008; გ) 0,02. დ) 0,9. 1.8. 0,096. 1.9. 0,56. 1.10. 0,385. 1.11. 0,5. 1.12. 0,16. 1.13. 0,33. 1.14. 0,5. 1.15. 0,6. 1.16. 0,3. 1.17. 0,4. 1.18. $\frac{5}{12}$.
1.19. $\frac{7}{12}$. 1.20. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{2}{5}$. 1.21. ა) $\frac{1}{256}$; ბ) $\frac{1}{24}$. 1.22. 0,025. 1.23. 150. 1.24. 28. 1.25. 0,2. 1.26. 0,01. 1.27. 0,64. 1.28. 0,008. 1.29. 0,6. 1.30. $\frac{32-\pi}{32}$. 1.31. ა) $\frac{119}{128}$; ბ) $\frac{9}{128}$. 1.32. $\frac{11}{36}$. 1.33. $\frac{5}{9}$. 1.34. $\frac{7}{16}$.

§2. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა. პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა

ორი ნებისმიერი A და B ხდომილობების ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.1)$$

თუ A და B ხდომილობა უთავსებადია, მაშინ $P(AB)=0$ და (2.1) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (2.2)$$

აქედან გამომდინარე

$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$, თუ $A_1, A_2, \dots, A_n$ წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია.

თუ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ხდომილობათა სრული სისტემაა, მაშინ (2.2) ფორმულის თანახმად

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1. \quad (2.3)$$

კერძოდ, ურთიერთსაწინააღმდეგო A და $\bar{A}$ ხდომილობებისათვის სამართლიანია ფორმულა

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2.4)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $p=P(A)$, $q=P(\bar{A})$, მაშინ (2.4) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$q = 1 - p. \quad (2.5)$$

A ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ ადგილი ჰქონდა B ხდომილობას, აღინიშნება $P(A|B)$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.6)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $P(B|A)$ პირობითი ალბათობა

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (2.7)$$

(2.6) და (2.7) ფორმულებიდან შეგვიძლია დავწეროთ A და B ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა

$$P(AB)=P(B) \cdot P(A|B)=P(A) \cdot P(B|A). \quad (2.8)$$

თუ A და B ურთიერთდამოუკიდებელი ხდომილობებია, ე.ი. $P(A|B)=P(A)$ და $P(B|A)=P(B)$, მაშინ (2.8) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B), \quad (2.9)$$

ხოლო (2.1) ფორმულა კი

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(A) P(B). \quad (2.10)$$

ხდომილობები $A_1, A_2, \dots, A_n$ ერთობლივ დამოუკიდებელი ხდომილობებია, თუ ამ სისტემიდან აღებული ნებისმიერი ხდომილობების ნამრავლის ალბათობა ტოლია თითოეული თანამამრავლის ალბათობების ნამრავლის. ე.ი.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (2.11)$$

ხდომილობათა ერთობლივ დამოუკიდებლობა მათ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობასაც ნიშნავს, პირიქით კი არა.

ვთქვათ A_1 და A_2 ურთიერთდამოუკიდებელი ხდომილობებია, ხოლო $P(\bar{A}_1) = q_1$, $P(\bar{A}_2) = q_2$, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთს მაინც ექნება ადგილი (ეს ხდომილობა ავლნიშნოთ A -თი) გამოითვლება ფორმულით

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) = 1 - q_1 \cdot q_2. \quad (2.12)$$

კერძოდ, თუ $P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = q$, მაშინ (2.12) ფორმულიდან მივიღებთ

$$P(A) = 1 - q^2. \quad (2.13)$$

შევნიშნოთ, რომ (2.13) და (2.12) ფორმულები სამართლიანია ნებისმიერი n რაოდენობის ხდომილობებისათვის.

მავალითუბის აქსიომის ნიშნები

1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათელის გაგორებისას, ერთზე მოვა კენტი რიცხვი, ხოლო მეორეზე 6-იანი.

ამოხსნა. A იყოს ერთ კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა, ხოლო B იყოს მეორეზე 6-იანის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა, მაშინ AB იქნება ხდომილობა, რომ ერთ კამათელზე მოვა კენტი რიცხვი, ხოლო მეორეზე 6-იანი. რადგან A და B ურთიერთდამოუკიდებელი ხდომილობებია და

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad \text{ამიტომ (2.9) ფორმულის თანახმად}$$

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

2. კურსზე 15 სტუდენტია, მათგან 3 სტუდენტი ფრიადოსანია, 5 სტუდენტი – ოთხოსანი, ხოლო 7 – სამოსანი. ლექტორი დაფასთან იძახებს ერთ-ერთ მათგანს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გამოძახებული სტუდენტი არ არის სამოსანი.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A-თი ხდომილობა – {გამოძახებული სტუდენტი ფრიადოსანია}, ხოლო B-თი ხდომილობა – {გამოძახებული სტუდენტი ოთხოსანია},

$$\text{მაშინ } P(A) = \frac{3}{15}, \quad P(B) = \frac{5}{15} \quad \text{და (2.2) ფორმულის თანახმად:}$$

მაღ:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15} = 0,5(3).$$

3. ერთ ყუთში არის 30 ბურთულა, რომელთაგან 12 თეთრია, 15 მწავი და 3 წითელი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა იქნება ან თეთრი ან წითელი.

ამოხსნა. A -თი აღვნიშნოთ ხდომილობა – {ამოღებული ბურთულა არის თეთრი}, ხოლო B -თი ხდომილობა – {ამოღებული ბურთულა არის წითელი}, მაშინ $A+B$ იქნება ხდომილობა – {ამოღებული ბურთულა არის ან თეთრი, ან წითელი}. $P(A) = \frac{12}{30}$, $P(B) = \frac{3}{30}$ და რადგან A და B უთავსებადი ხდომილობებია, ამიტომ (2.2) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$P(A + B) = \frac{12}{30} + \frac{3}{30} = \frac{1}{2}.$$

4. უნდა დაიბომბოს სამხედრო ობიექტი. მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,8, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ბომბი არ აფეთქდება – 0,09. ვიპოვოთ ერთი ჩამოგდებული ბომბით, ობიექტის დაზიანების ალბათობა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, $P(A)=0,8$, ხოლო $P(B)=0,09$. $A\bar{B}$ არის ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს, რომ ერთი ჩამოგდებული ბომბი დააზიანებს ობიექტს. თუ გამოვიყენებთ (2.9) ფორმულას და გავითვალისწინებთ, რომ (2.4) ფორმულის თანახმად $P(\bar{B}) = 0,91$, მაშინ გვექნება

$$P(A\bar{B}) = 0,8 \cdot 0,91 = 0,728.$$

5. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მოახვედრებს სამიზნე, არის 0,84, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ მეორე მოახვედრებს სამიზნეს – 0,5. ა) გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მოახვედრებს სამიზნეს; ბ) გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი დააზიანებს სამიზნეს თითო გასროლით.

ამოხსნა. ა) ვთქვათ A აღნიშნავს ხდომილობას – {სამიზნეს მოახვედრებს პირველი მსროლელი}, ხოლო B ხდომილობას – {სამიზნეს მოახვედრებს მეორე მსროლელი}, მაშინ $P(A)=0,84$, $P(B)=0,5$. AB არის არის ხდომილობა – {ორივე მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს}. რადგან მათი ნასროლის მოხვედრა ერთმანეთზე არ არის დამოკიდებული, ამიტომ A და B ხდომილობები ურთიერთდამოუკიდებელია; შეგვიძლია გამოვიყენოთ (2.3) ფორმულა, გვექნება

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)=0,84 \cdot 0,5=0,42.$$

ბ) ამოვხსნათ ორი ხერხით.

I ხერხი. ამ შემთხვევაში $A+B$ იქნება ხდომილობა, რომ სამიზნე დაზიანდება. ამიტომ (2.10) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P(A+B)=0,84+0,5-0,42=0,92.$$

II ხერხი. $A+B$ ხდომილობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით $A+B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $P(\bar{A})=0,16$ და $P(\bar{B})=0,5$ და გამოვიყენებთ (2.2) და (2.9) ფორმულებს, გვექნება

$$P(A + B) = P(A) P(\overline{B}) + P(\overline{A}) P(B) + P(A) P(B) = \\ = 0,84 \cdot 0,5 + 0,16 \cdot 0,5 + 0,84 \cdot 0,5 = 0,92.$$

6. ყუთში არის 5 თეთრი, 7 წითელი და 6 შავი ბურთულა. გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული პირველი 5 ბურთულიდან: ა) პირველი 3 იქნება წითელი, მეოთხე – თეთრი, მეხუთე – შავი; ბ) პირველი იქნება თეთრი, მეორე და მესამე – შავი, მეოთხე – თეთრი, მეხუთე – წითელი; გ) პირველი ორი იქნება შავი, მესამე – წითელი, მეოთხე – თეთრი, მეხუთე – შავი.

ამოხსნა. საძიებელი ალბათობების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ პირობითი ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა (2.8) თანმიმდევრობით 5 ხდომილობისათვის. გვექნება

$$ა) P = \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{14};$$

$$ბ) P = \frac{5}{18} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{14};$$

$$გ) P = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14}.$$

7. აგორებენ სამ კამათელს. გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთზე მაინც მოვა 3-იანი.

ამოხსნა. A იყოს ერთ კამათელზე 3-იანის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა. თუ გამოვიყენებთ მეხუთე მაგალითის ბ)-ში განხილულ II ხერხს, მაშინ მოგვიწევს

შემდეგი ხდომილობების ნამრავლთა ჯამის ალბათობის გამოთვლა

$$P(\overline{A}\overline{A} + \overline{A}A\overline{A} + A\overline{A}A + AA\overline{A} + A\overline{A}A + \overline{A}AA + AAA)$$

მაგრამ უფრო მარტივია საძიებელი ალბათობის გამოთვლა (2.13) ფორმულის გამოყენებით, რადგან

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ და } P(\overline{A}) = \frac{5}{6}, \text{ შეგვიძლია დავწეროთ}$$

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}.$$

8. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ოთხი გასროლიდან ერთხელ მაინც დააზიანებს სამიზნეს ტოლია 0,9984-ის. ვიპოვოთ ერთი გასროლით სამიზნეს დაზიანების ალბათობა.

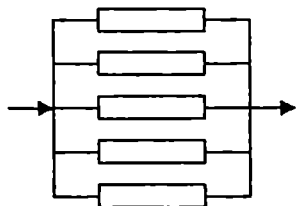
ამოხსნა. რადგან $p=0,9984$, ამიტომ (2.13) ფორმულის თანახმად შეგვიძლია გამოვთვალოთ, რომ

$$1 - q^4 = 0,9984 \Rightarrow q^4 = 0,0016 \Rightarrow q = 0,2 \Rightarrow p = 0,8.$$

9. მიკროსქემა შეიცავს პარალელურად შეერთებულ 5 ბლოკს. გარკვეულ t დროში თითოეული ბლოკის საიმედოობა შესაბამისად ტოლია 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5. ბლოკები მწყობრიდან გამოდიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. რას უდრის t დროში სქემების საიმედოობა?

ამოხსნა. t დროში სქემის საიმედოობის განსაზღვრა გულისხმობს: t დროში სქემის გამართულად მუშაობის ალბათობის პოვნას და იგი დამოკიდებულია თითოეული ბლოკის საიმედოობაზე (გამართულად მუშაობაზე ანუ გა-

მართულად მუშაობის ალბათობაზე). შემოვიღოთ



ხდომილობები: $A = \{t \text{ დროში სქემა გამართულად მუშაობს}\}$, $A_i = \{t \text{ დროში } i\text{-ური ბლოკი გამართულად მუშაობს}\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. მაშინ $\bar{A}_i = \{t \text{ დროში } i\text{-ური ბლოკი გამტყუნდა}\}$. ამოცანის პირობით:

$$P(A_1)=0,9; P(A_2)=0,8; P(A_3)=0,7; P(A_4)=0,6; P(A_5)=0,5.$$

რადგან ბლოკები პარალელურადაა შეერთებული, ამიტომ სქემა გამართულად იმუშაებს თუ ერთი ბლოკი მაინც იმუშაებს, ხოლო სქემა გამტყუნდება თუ ყველა ბლოკი ერთდროულად გამოირთვება ე.ი.

$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_5$. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ხდომილობები ერთობლივ დამოუკიდებელია; აქედან გამომდინარე $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5$ ხდომილობებიც ერთობლივ დამოუკიდებელია, ამიტომ (2.11) და (2.4) ფორმულების მიხედვით დაეწერტ:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_5) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot P(\bar{A}_4) \cdot P(\bar{A}_5) = \\ &= [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)][1 - P(A_4)][1 - P(A_5)] = \\ &= 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,0012 \end{aligned}$$

ამიტომ სქემის საძიებელი საიმედოობა განისაზღვრება ტოლობით:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,0012 = 0,9988.$$

10. მიკროსქემა შეიცავს მიმდევრობით ჩართულ 3 ბლოკს. თითოეული ბლოკის საიმედოობა t დროში შესაბამისად ტოლია 0,9; 0,8; 0,7. ბლოკები მწყობრიდან გამო-

დიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. რას უდრის სქემის საიმედოება?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: $A = \{t \text{ დროში სქემა საიმედოდ მუშაობს}\}$, $A_i = \{t \text{ დროში } i\text{-ური ბლოკი გამართულად მუშაობს}\}$, მაშინ $\bar{A}_i = \{t \text{ დროში } i\text{-ური}$

ბლოკი გამტყუნდა\}, $i=1, 2, 3$. ამოცანის პირობით $P(A_1)=0,9$, $P(A_2)=0,8$, $P(A_3)=0,7$. რადგან ბლოკები მიმდევრობითაა შეერთებული, ამიტომ სქემა გამართულად იმუშაავებს თუ თითოეული ბლოკი გამართულად იმუშაავებს, ე.ი. $A=A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

A_1 , A_2 , A_3 ერთობლივ დამოუკიდებელი ხდომილობებია. (2.11) ფორმულის მიხედვით დაეწერთ:

$$P(A)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)=0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7=0,504.$$

11. ორი სარაკეტო დანადგარიდან ერთდროულად ურთიერთდამოუკიდებლად გაუშვეს თითო რაკეტა მფრინავი ობიექტის გასანადგურებლად. I-ს შეუძლია გაანადგუროს ობიექტი 0,9-ის ტოლი ალბათობით, II-ს კი 0,8-ის ტოლი ალბათობით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

- სამიზნეს დააზიანებს მხოლოდ ერთი რაკეტა (ხდომილობა A).

ბ) სამიზნეს დააზიანებს I რაკეტა (ხდომილობა B).

გ) სამიზნე დაზიანდება (ხდომილობა C).

დ) სამიზნეს დააზიანებს ორივე რაკეტა (ხდომილობა E).

ე) სამიზნე არ დაზიანდება (ხდომილობა F).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: $A_1 = \{\text{სამიზნეს დააზიანებს I რაკეტა}\}$, $A_2 = \{\text{სამიზნეს დააზიანებს II რაკეტა}\}$, მაშინ $A_1 = \{\text{სამიზნეს I რაკეტა ვერ დააზიანებს}\}$, $\bar{A}_2 = \{\text{სამიზნეს II რაკეტა ვერ დააზიანებს}\}$. $P(A_1) = 0,9$; $P(A_2) = 0,8$. (2.4) ფორმულის მიხედვით $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0,1$; $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0,2$.

ა) სამიზნეს დააზიანებს მხოლოდ ერთი რაკეტა, თუ მოხდება შემთხვევა - დააზიანებს პირველი რაკეტა, ხოლო II რაკეტა აცილდება, ან დააზიანებს (მოხდება) II რაკეტა, ხოლო აცილდება I, ამიტომ ადგილი ექნება $A = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$ ტოლობას. ხდომილობები $A_1 \cdot \bar{A}_2$ და $\bar{A}_1 \cdot A_2$ უთავსებადია, ხოლო A_1 , $\bar{A}_2$; $\bar{A}_1$ და A_2 დამოუკიდებელი ხდომილობებია, ამიტომ

$$P(A) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = \\ = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,26.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$B = A_1 \cdot \bar{A}_2,$$

$$b) \quad P(B) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = 0,9 \cdot 0,2 = 0,18.$$

გ) სამიზნის დაზიანებას ექნება ადგილი, თუ ერთი რაკეტა მაინც მოხდება სამიზნეს, ანუ მოხდება I რაკეტა (მოხდება ხდომილობა A_1), ან მოხდება II რაკეტა (ხდომილობა A_2), ან მოხდება ერთდროულად I და II-ც (ხდომილობა $A_1 \cdot A_2$), ე.ი. $C = A_1 + A_2$, (2.10) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ

$$P(C) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = \\ = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98.$$

დ) სამიზნის ორივე რაკეტით დაზიანება ჩაიწერება შემდეგნაირად $E=A_1 \cdot A_2$. A_1 და A_2 ხდომილობების დამოუკიდებლობის გამო (2.9) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ $P(E)=P(A_1 \cdot A_2)=P(A_1) P(A_2)=0,9 \cdot 0,8=0,72$.

ე) სამიზნე არ დაზიანდება, თუ ერთდროულად არცერთი რაკეტა არ მოხვდება სამიზნეს, ე.ი. $F=\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$,
(2.9) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ $P(F)=P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2)=P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2)=0,1 \cdot 0,2=0,02$.

მაგალითები

2.1. ყუთში არის 50 ბურთულა, რომელთაგან 10 არის თეთრი, 15 წითელი, 25 შავი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა იქნება: ა) ან თეთრი ან წითელი; ბ) ან წითელი ან შავი; გ) ან შავი ან თეთრი.

2.2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი მონეტის აგდებისას ორივეზე მოვა საფასური.

2.3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათელის გაგორებისას ორივეზე მოვა ექვსიანი.

2.4. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს არის 0,7, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ მეორე მოახვედრებს – 0,8.

ა) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მოახვედრებს სამიზნეს;

ბ) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი თითო გასროლით დააზიანებს სამი'ხნეს.

2.5. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოახვედრებს სამინ'ხეს არის 0,9. მსროლელმა ესროლა ორჯერ. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე გასროლა მოხვდება მიზანში.

2.6. აგდებენ ორ მონეტას ერთდროულად. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ მათგან'ზე მაინც მოვა საფასური.

2.7. ორი მსროლელი ესკრის სამი'ხნეს თითოჯერ. პირველი მსროლელის მოხვედრის ალბათობა არის 0,9, ხოლო მეორის – 0,7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოახვედრებს: ა) ორივე; ბ) მხოლოდ ერთი; გ) არც ერთი.

2.8. აგორებენ ორ კამათელს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველზე მოვა 3-იანი, ხოლო მეორეზე ლუწი რიცხვი.

2.9. კარტის ორი კომპლექტიდან (თითოეულში 36 კარტია) შემთხვევით იღებენ თითო კარტს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი იქნება ტუზი.

2.10. კარტის კომპლექტიდან, რომელშიც 52 კარტია, ორჯერ შემთხვევით იღებენ თითო კარტს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი იქნება აგური.

განიხილეთ ორი შემთხვევა: ა) ამოკრეფა ხდება დაბრუნებით; ბ) ამოკრეფა ხდება დაბრუნების გარეშე.

2.11. კარტის ორი კომპლექტიდან (თითოეულში 52 კარტია) შემთხვევით იღებენ თითო კარტს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც იქნება ჯერის 10-იანი.

2.12. სამი მსროლელი ესერის ერთ სამიზნეს. თითოეულისათვის მოხვედრის ალბათობა შესაბამისად არის 0,5; 0,8; 0,9. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს მოხედება ერთი ნასროლი მაინც.

2.13. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი სამი გასროლიდან ერთხელ მაინც დააზიანებს სამიზნეს არის 0,973. იპოვეთ ერთი გასროლით მოხვედრის ალბათობა.

2.14. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ხუთი გასროლიდან ერთხელ მაინც დააზიანებს სამიზნეს ტოლია 0,99968-ის. იპოვეთ ერთი გასროლით სამიზნის დაზიანების ალბათობა.

2.15. წრიული სამიზნე შედგება სამი ზონისაგან. პირველ ზონაში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას არის 0,18, მეორეში – 0,17, ხოლო მესამეში – 0,15. გამოთვალეთ მიზანში აცდენის ალბათობა.

2.16. კარტის კომპლექტიდან (52 კარტი) შემთხვევით იღებენ სამ კარტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი მაინც იქნება ტუზი.

2.17. სამხედრო ობიექტის დასაბომბად თვითმფრინავში ჩატვირთეს ოთხი ბომბი. ალბათობა იმისა, რომ ბომბი აფეთქდება არის 0,8. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ერთი ბომბი მაინც აფეთქდება;

2.18. თვითმფრინავში არის 6 ფუგასური ბომბი და 4 ცეცხლგამჩენი ბომბი. მფრინავმა შემთხვევით ჩამოაგდო 2 ბომბი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი არის ფუგასური, ხოლო მეორე ცეცხლგამჩენი.

2.19. თვითმფრინავის 50 სათადარიგო ნაწილიდან 3 არასტანდარტულია. შემკეთებელმა შემთხვევით აიღო 2 ნაწილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე არასტანდარტულია.

2.20. ყუთში 4 თეთრი და 16 წითელი ბურთულია. ბურთულებს იღებენ იქამდე, სანამ არ გამოჩნდება თეთრი ბურთული. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ თეთრ ბურთულამდე ამოღებული იქნება 3 წითელი ბურთული.

2.21. სამი ბომბდამშენიდან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ჩამოაგდეს თითო-თითო ბომბი ერთი და იგივე სამიზნის გასანადგურებლად. პირველი ბომბდამშენის მიერ სამიზნეში მოხვედრების ალბათობა ტოლია 0,9-ის, მეორისთვის – 0,6-ის, მესამესთვის – 0,9-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) სამივე ბომბდამშენი მოახვედრებს სამიზნეს; ბ) მხოლოდ ერთი ბომბდამშენი მოახვედრებს

სამიზნეს; გ) ერთი ბომბდამშენი მაინც მოახვედრებს სამიზნეს; დ) სამივე ბომბდამშენი ააცილებს სამიზნეს.

2.22. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი გამოცდაზე სწორად ამოხსნის პრაქტიკულ ამოცანას ტოლია 0,8, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ სწორად უპასუხებს თეორიულ საკითხს ტოლია 0,9-ის. გამოცდის შედეგად დადებითი შეფასების მისაღებად საკმარისია ან პრაქტიკული ამოცანის სწორად ამოხსნა, ან სწორი პასუხის გაცემა თეორიულ საკითხზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი მიიღებს დადებით შეფასებას.

2.23. ორი გამანადგურებელი თვითმფრინავიდან ერთ-მანეთისაგან დაპოუკიდებლად ორ-ორჯერ ესროლეს მფრინავ ობიექტს. პირველისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0,9, მეორისათვის – 0,8. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება.

2.24. ერთი ქვემეხიდან სროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,9, მეორედან სროლისას – 0,8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ქვემეხებიდან თითო გასროლის შემდეგ სამიზნე არ დაზიანდება.

2.25. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საიდუმლო კოდი გაშიფრული იქნება, თუ მის გაშიფრვაზე მუშაობს სამი პიროვნება. გაშიფრვის ალბათობები შესაბამისად ტოლია $\frac{1}{3}$ -ის, $\frac{1}{4}$ -ის და $\frac{1}{5}$ -ის.

2.26. თვითმფრინავების სარემონტო ქარხანაში აღმონდა, რომ შასი შეიცვალა 36% შემთხვევაში, ძრავი შეიცვალა 42% შემთხვევაში, ხოლო 30% შემთხვევაში შეიცვალა ორივე. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თვითმფრინავის შეკეთებისას, რომელსაც შეცვლილი აქვს შასი აუცილებელი გახდება ძრავის შეცვლაც.

2.27. წინა ამოცანის პირობებში არის თუ არა ერთმანეთზე დამოკიდებული შასისა და ძრავის შეცვლა?

2.28. თვითმფრინავზე დაყენებულია სახანძრო სიგნალიზაციის ორი სიგნალიზატორი. ალბათობა იმისა, რომ ხანძრის შემთხვევაში ჩაირთვება პირველი სიგნალიზატორი, ტოლია 0,95-ის, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ჩაირთვება მეორე – ტოლია 0,8-ის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ხანძრის შემთხვევაში ჩაირთვება: ა) მხოლოდ პირველი სიგნალიზატორი; ბ) ჩაირთვება ერთი სიგნალიზატორი მაინც; გ) არ ჩაირთვება არცერთი სიგნალიზატორი.

2.29. სადაზვერვო თვითმფრინავმა უნდა აღმოაჩინოს ზღვაში ჩაეარდნილი ქიმიური ნივთიერებით დატვირთული დაკარგული კონტეინერები. საძიებელი ფართობი დაყოფილია 4 სექტორად. თითოეულ სექტორში საძიებელი კონტეინერი შეიძლება აღმოჩნდეს შესაბამისად ალბათობებით: 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საძიებელი კონტეინერი აღმოჩნდება: ა) არა უმეტეს 3 სექტორში ბ) არანაკლებ ორ სექტორში.

2.30. მსროლელის მიერ ერთი გასროლით სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0,8. რამდენი გასროლა მოუწევს მსროლელს იმისათვის, რომ არცერთ აცვილებას არ ქონდეს ადგილი 0,4-ზე ნაკლები ალბათობით.

პასუხები

2.1. ა) 0,5; ბ) 0,8; გ) 0,7. 2.2. 0,25. 2.3. 0,028. 2.4. ა) 0,56; ბ) 0,94. 2.5. 0,81. 2.6. 0,75. 2.7. ა) 0,63; ბ) 0,34; გ) 0,03. 2.8. 0,083. 2.9. 0,012. 2.10. 0,06. 2.11. 0,038. 2.12. 0,99. 2.13. 0,7. 2.14. 0,8. 2.15. 0,5. 2.16. 0,2. 2.17. 0,9984. 2.18. 0,27. 2.19. 0,0024. 2.20. 0,116. 2.21. ა) 0,486; ბ) 0,078; გ) 0,996; დ) 0,004. 2.22. 0,98. 2.23. 0,9996. 2.24. 0, 02. 2.25. 0,6. 2.26. $\frac{5}{6}$. 2.27. არის. 2.28. ა) 0,19; ბ) 0,99; გ) 0,01. 2.29. ა) 0,6976; ბ) 0,9572. 2.30. $n \geq 5$.

§3. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა

ეთქვათ $B_1, B_2, \dots, B_n$ არის ხდომილობათა სრული სისტემა, რაც იმას ნიშნავს, რომ: ა) ამ ხდომილობებიდან ერთ-ერთი ხდომილობა აუცილებლად მოხდება, ე.ი. $B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$; ბ) ეს ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, ე.ი. $B_i B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; ასეთ ხდომილობებს პიპოტეზებსაც უწოდებენ. სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i) \quad (3.1)$$

მას სრული ალბათობის ფორმულას უწოდებენ. იგი საშუალებას იძლევა გამოითვალოს A ხდომილობის ალბათობა, რომელსაც ადგილი ჰქონდა მხოლოდ ერთ-ერთ B_j -თან ($j=1, 2, \dots, n$).

იმ შემთხვევაში როცა A ხდომილობას უკვე ჰქონდა ადგილი, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა გამოიწვია B_j ($j=1, 2, \dots, n$) ხდომილობამ, გამოითვლება ბაიესის ფორმულით

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i)} \quad (3.2)$$

შევნიშნოთ, რომ $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ ალბათობები ცდის ჩატარებამდე ცნობილია. მათ აპრიორულ ალბათობებს უწოდებენ. ბაიესის ფორმულით გამოითვლება აპოსტერიორული (ცდის ჩატარების შემდეგ განისაზღვრული) $P(B_1|A), P(B_2|A), \dots, P(B_n|A)$ ალბათობები, რითაც განისაზღვრება ის შესაძლო ცვლილებები, რასაც ცდის ჩატარების შემდეგ განიცდიან აპოსტერიორული ალბათობები.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. გვაქვს ორი ერთნაირი ყუთი. პირველ ყუთში არის 4 თეთრი და 8 შავი ფერის ერთნაირი ბურთულა, მეორეში – 3 თეთრი და 9 შავი ფერის ბურთულა.

შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან ალაღბედზე ვიღებთ ერთ ბურთულას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ეს ბურთულა თეთრია; ბ) ეს ბურთულა II ყუთიდანაა, თუ ვიცით, რომ იგი აღმოჩნდა თეთრი ფერის.

ამოხსნა. I ხერხი. შემოვიღოთ ხდომილობები: $A = \{\text{ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა}\}$, $B_1 = \{\text{ბურთულა ამოღებულია პირველი ყუთიდან}\}$, $B_2 = \{\text{ბურთულა ამოღებულია მეორე ყუთიდან}\}$. ბურთულა ამოღებული იქნება ან პირველი (ხდომილობა B_1), ან მეორე ყუთიდან (ხდომილობა B_2), $B_1 \cdot B_2 = \emptyset$. რაც იმას ნიშნავს, რომ B_1 და B_2 ჰიპოთეზებია, ანუ მიზეზებია, რომლებმაც შეიძლება გამოიწვიოს A ხდომილობის (თეთრი ფერის ბურთულის) ამოღება. რადგან ორი ერთნაირი ფორმისა და ზომის ყუთიდან ერთ-ერთს ალაღბედზე ვარჩევთ ბურთულის ამოსაღებად, ამიტომ აპრიორული (ცდამდელი) ალბათობები ადვილად განისაზღვრება:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}; \quad P(B_2) = \frac{1}{2}. \text{ ასევე ყუთებში ბურთულების შე-}$$

მადგენლობის გათვალისწინებით, ადვილია გამოვთვალოთ შემდეგი პირობითი ალბათობები: ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა თეთრია, თუ იგი ამოღებულია

პირველი ყუთიდან ტოლია - $P(A|B_1) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}$, ხოლო

ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა თეთრია, თუ იგი

ამოღებულია მეორე ყუთიდან - $P(A|B_2) = \frac{3}{3+9} = \frac{1}{4}$. ამი-

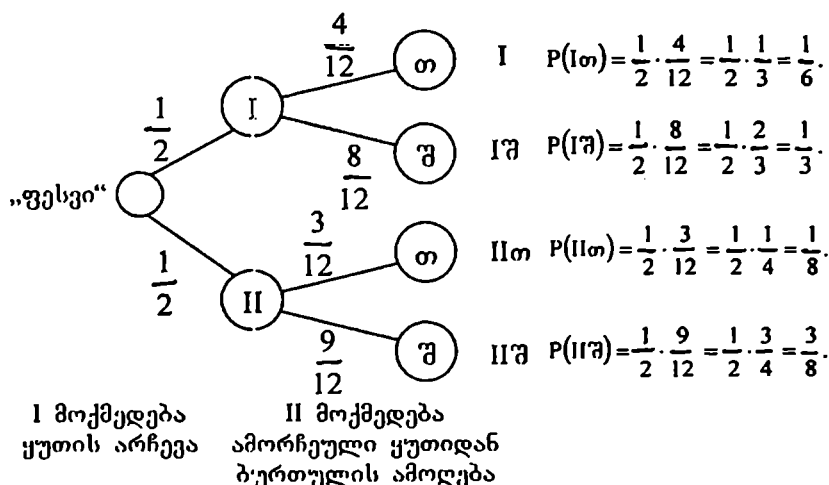
ტომ სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულების მიხედვით საძიებელი ალბათობები შესაბამისად იქნება

$$ა) P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{24},$$

$$ბ) P(B_2, A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}.$$

II ხერხი. ამოცანის ამოხსნისას გამოვიყენოთ ხისე-ბრი დიაგრამები ანუ დენდოგრამები.

დენდოგრამის აგებას ვიწყებთ საწყისი მდგომარეობიდან – „ფესვიდან“, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე $\frac{1}{2}$ -ის ტოლი ალბათობით ვირჩევთ ერთ-ერთ ყუთს, ამიტომ ეაგებთ „ფესვიდან“ გამოშვალ ორ „ბილიკს“ („შტოებს“), ამ შემთხვევაში ბილიკის ბოლოს მიეუთითებთ ყუთის ნომერს. ამით შესასრულებელი პირველი მოქმედება (ყუთის ალაღბედზე არჩევა) დასრულდა ორი შესაძლო ვარიანტით. შემდეგ ეაგებთ მეორე მოქმედების (ბურთულის ალაღბედზე ამოღების) შესაბამისი ბილიკების აგებას თითოეული ყუთისათვის, სულ ბილიკების ოთხი შესაძლო ვარიანტია. თითოეულ ბილიკს ეაწერთ შესაბამის ალბათობებს, რის შემდეგაც ეაკეთებთ საბოლოო გამოთვლებს:



საძიებელი ალბათობები იქნება:

$$P(A) = P(თ) = P(Iთ + IIთ) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24},$$

$$P(B_2|A) = P(II|თ) = \frac{P(IIთ)}{P(თ)} = \frac{3}{7}.$$

2. საბრძოლო დავალების შესასრულებლად შეეუღლნენ M პუნქტიდან N საკონტროლო პუნქტის გავლით უნდა ჩაფრინდეს K პუნქტში. M -დან N -ში იგი შეიძლება ჩაფრინდეს ორი საპერო დერეფნით, N -დან K -ში კი — სამით, მაგრამ ორივე ეტაპზე თითო დერეფანი მტრის დესანტს აქვს გადაკეტილი. თითოეული სელაგეზის არჩევა თანაბრად შესაძლებელია. რას უდრის ალბათობა

იმისა, რომ შეეუღლმფრენი შეასრულებს საბრძოლო დავალებას? ამოცანა ამოხსენით დენდოგრამის აგებითა(კ).

ამოხსნა 1. შემოვლოთ ხდომილობები $A=\{\text{შეეუღლმფრენი შეასრულებს საბრძოლო დავალებას}\}$, $B_1=\{\text{შეეუღლმფრენი M-დან N-ში ვერ ჩაფრინდება}\}=\{\text{შეეუღლმფრენი M-დან N-ში საჰაერო დერეფანში გადააწყდება დესანტს}\}$. გამოვთვალოთ ალბათობები

$$P(B_1)=\frac{1}{2}, \quad P(B_2)=\frac{1}{2},$$

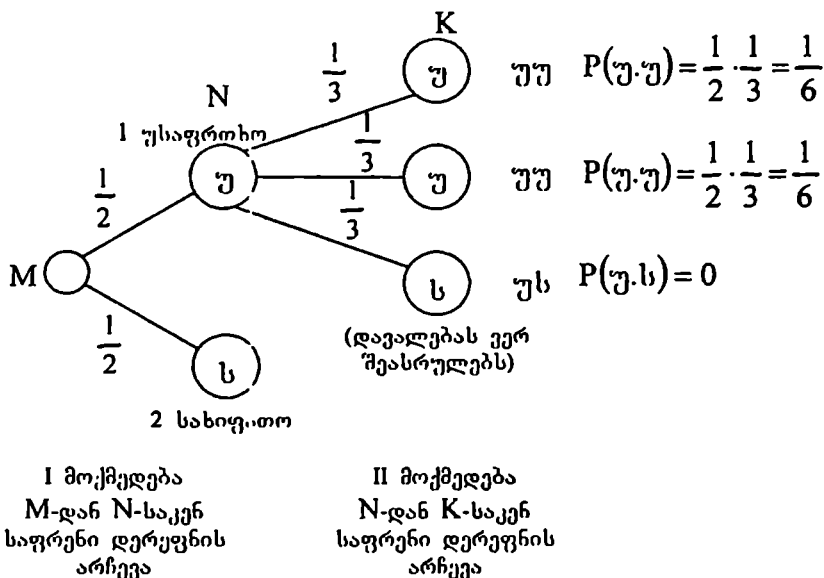
$$P(A|B_1)=\frac{P(A \cdot B_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

$$P(A|B_2)=\frac{P(A \cdot B_2)}{P(B_2)}=\frac{0}{\frac{1}{2}}=0.$$

სრული ალბათობის (3.1) ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ საძიებელ ალბათობას:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}+\frac{1}{2} \cdot 0=\frac{1}{3}.$$

ამოხსნა 2. ავაგოთ დენდოგრამა:



3. ერთ ყუთში არის 4 თეთრი და 8 შავი ერთნაირი ბურთულა, ხოლო მეორე იგივენაირ ყუთში 3 თეთრი და 9 შავი ბურთულაა, თითოეული ყუთიდან ალაღბედზე ვიღებთ თითო ბურთულას და მათგან ისევ ალაღბედზე ვარჩევთ ერთ ბურთულას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ეს ბურთულა თეთრია; ბ) ეს ბურთულა მეორე ყუთიდანაა, თუ ცნობილია, რომ იგი თეთრი ფერისაა.

ამოხსნა 1. A იყოს ხდომილობა – {საბოლოოდ ა-მორჩეული ბურთულა თეთრია}, $B_1 = \{\text{ყუთებიდან ამოღებულია თეთრი ბურთულები}\}$, $B_2 = \{\text{ყუთებიდან ამოღებულია შავი ბურთულები}\}$, $B_3 = \{\text{პირველი ყუთიდან ამოღებულია შავი ბურთულები}\}$.

ბულია თეთრი, მეორედან კი შავი ბურთულა},
 $B_4 = \{\text{პირველი ყუთიდან ამოღებულია შავი, მეორედან კი}$
 თეთრი ბურთულა}, რადგან $P(B_1) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$,

$$P(B_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(B_3) = \frac{4}{12} \cdot \frac{9}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(B_4) = \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{6}.$$

ამიტომ B_1, B_2, B_3, B_4 პიპოთესებია. $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \Omega$, $B_i B_j = \emptyset$,
 $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 4$. $P(A|B_1) = 1$, $P(A|B_2) = 0$, $P(A|B_3) = \frac{1}{2}$, $P(A|B_4) = \frac{1}{2}$.

ამიტომ სრული ალბათობის (3.1) ფორმულის გამოყენებით
 დავწერთ

$$a) P(A) = \sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{24}.$$

ბ) აღენიშნოთ $H_1 = \{\text{საბოლოოდ ამოღებული ბურთულა}$
 $\text{პირველი ყუთიდანაა}\}$, $H_2 = \{\text{საბოლოოდ ამოღებული ბურ-}$
 თულა მეორე ყუთიდანაა}. მაშინ $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_2) = \frac{1}{2}$.

რადგან $P(A|H_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, ამიტომ (3.2) ფორმულის თანახ-
 მად

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{7} = \frac{3}{7}.$$

ამოხსნა 2. აღენიშნოთ ხდომილობები:

$A = \{\text{ამორჩეული ბურთულა თეთრია}\}$, $B_1 = \{\text{ბურთულა}$
 $\text{პირველი ყუთიდანაა}\}$, $B_2 = \{\text{ბურთულა მეორე ყუთიდანაა}\}$.

რადგან $P(A|B_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $P(A|B_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, ხოლო

$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$, ამიტომ გვექნება:

ა) (3.1) ფორმულის თანახმად:

$$P(A) = P(B_1) P(A|B_1) + P(B_2) P(A|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{24};$$

ბ) (3.2) ფორმულის თანახმად

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}.$$

ამოხსნა 2 უფრო ინტუიციური ხასიათისაა, ვიდრე ამოხსნა 1. დენდოგრამის გამოყენებით ამოცანის ამოხსნა დიდ სირთულეს აღარ წარმოადგენს, ამიტომ შეასრულეთ თვითონ.

4. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს არის 0,8, ხოლო მეორესათვის – 0,9. ორივე მსროლელმა თითოჯერ ესროლა სამიზნეს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს მოახვედრა მეორე მსროლელმა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: $A = \{\text{სამიზნეს მოახვედრეს}\}$, $B_1 = \{\text{მოახვედრა პირველმა მსროლელმა}\}$, $B_2 = \{\text{მოახვედრა მეორე მსროლელმა}\}$, რადგან

$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$, ხოლო $P(A|B_1) = 0,8$, $P(A|B_2) = 0,9$, ამიტომ

(3.1) ფორმულის თანახმად

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{17}{20},$$

ხოლო (3.2) ფორმულის გამოყენებით ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს მოახვედრა მეორემ ტოლი იქნება

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{17}{20}} = \frac{9}{17}.$$

5. გზაზე, სადაც ბენზინის გასამართი სადგურია, გავლილი მსუბუქი ავტომობილების რიცხვი ისე შეეფარდება სატვირთო ავტომობილების რიცხვს, როგორც 5-ს. ალბათობა იმისა, რომ გამეღვლი მსუბუქი ავტომობილი ბენზინს წაისხავს, არის 0,3, ხოლო სატვირთოსთვის – 0,1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მანქანა, რომელმაც აღნიშნულ სადგურზე ბენზინი წაისხა, არის მსუბუქი.

ამოხსნა. A იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ავტომობილში ბენზინი წაასხეს, B_1 – ეს მსუბუქი ავტომობილია,

ხოლო B_2 – სატვირთოა. რადგან $P(B_1) = \frac{5}{7}$, $P(B_2) = \frac{2}{7}$,

ხოლო $P(A|B_1) = \frac{3}{10}$, $P(A|B_2) = \frac{1}{10}$, ამიტომ (3.2) ფორმულის თანახმად ალბათობა იმისა, რომ ბენზინი წაისხა მსუბუქმა ავტომობილმა იქნება

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{15}{17}.$$

6. საწყობში მოიტანეს ორი ყუთი, რომელთაგან თითოეულში 20 დეტალია; პირველში არის 15 სტანდარტული დეტალი, ხოლო მეორეში – 17. პირველი ყუთიდან ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მეორეში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ყუთიდან ამოღებული დეტალი არის სტანდარტული.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები: $A = \{\text{მეორე ყუთიდან ამოღებული დეტალი სტანდარტულია}\}$, $B_1 = \{\text{პირველი ყუთიდან ამოღებული დეტალი სტანდარტულია}\}$, ხოლო $B_2 = \{\text{პირველი ყუთიდან ამოღებული დეტალი არასტანდარტულია}\}$, მაშინ $P(B_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$,

$$P(B_2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \text{ ხოლო } P(A|B_1) = \frac{18}{21}, \quad P(A|B_2) = \frac{17}{21}. \quad (3.1)$$

ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{21} + \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{21} = \frac{71}{81} \approx 0,88.$$

7. სამმა მფრინავმა მითითებულ ობიექტზე ჩამოაგდო თითო ბომბი. მიზანს მოხვდა ორი მათგანი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ააცდინა მესამე მფრინავმა, თუ ცნობილია, რომ თითოეული მფრინავისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობა შესაბამისად არის 0,9, 0,8, 0,6.

ამოხსნა. აღენიშნოთ A -თი ხდომილობა – {სამიზნეს მოხვედა ორი ბომბი}. განვიხილოთ ორი ჰიპოთეზა: $B_3 = \{\text{მესამე მფრინავმა მოახვედრა მიზანს}\}$, $\overline{B}_3 = \{\text{მესამე მფრინავმა ააცილა მიზანს}\}$. $B_3 + \overline{B}_3 = \Omega$; $B_3 \cdot \overline{B}_3 = \emptyset$. საძიებელი ალბათობა $P(\overline{B}_3|A)$ შეიძლება გამოვთვალოთ ბაიესის (3.2) ფორმულით

$$P(\overline{B}_3|A) = \frac{P(\overline{B}_3)P(A|\overline{B}_3)}{P(B_3)P(A|B_3) + P(\overline{B}_3)P(A|\overline{B}_3)}.$$

გამოვთვალოთ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი ალბათობები.

დამატებით შემოვიღოთ ხდომილობები: $B_1 = \{\text{მიზანს მოახვედრა პირველმა მფრინავმა}\}$, $\overline{B}_1 = \{\text{მიზანს მოახვედრა მეორე მფრინავმა}\}$. ამოცანის პირობით $P(B_1) = 0,9$, $P(B_2) = 0,8$, $P(B_3) = 0,6$. (2.4) ფორმულის გათვალისწინებით დავწერთ $P(\overline{B}_1) = 1 - 0,9 = 0,1$. $P(\overline{B}_2) = 1 - 0,8 = 0,2$. $P(\overline{B}_3) = 1 - 0,6 = 0,4$. პირობითი ალბათობა $P(A|B_3)$ ნიშნავს, რომ გვინდა გამოვთვალოთ მიზანში ორი ბომბის მოხვედრის ალბათობა იმ პირობით, რომ მესამე მფრინავმა მოახვედრა. ეს ნიშნავს, რომ მოხდება ორი უთავესებადი ხდომილობიდან ერთ-ერთი: მოახვედრა პირველმა და ააცილა მეორემ, ან ააცილა პირველმა და მოახვედრა მეორემ ე.ი. $P(A|B_3) = P\{B_1 \cdot \overline{B}_2 + \overline{B}_1 \cdot B_2\} = P(B_1 \cdot \overline{B}_2) + P(\overline{B}_1 \cdot B_2)$. B_1 და $\overline{B}_2$, ასევე $\overline{B}_1$ და B_2 დამოუკიდებელი ხდომილობებია. (2.9) ფორმულის გამოყენებით დავწერთ

$$P(A|B_1) = P(B_1) \cdot P(\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}) \cdot P(B_2) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,18 + 0,08 = 0,26.$$

$P(A|\overline{B_1})$ არის ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვდება ორი ბომბი, იმ პირობით, რომ ააცილა მესამე მფსრინაემა, ანუ მოახვედრა პირველმა და მეორე მფრინაემა (ე.ი. $P(A|\overline{B_1}) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72$). საბოლოოდ მივიღებთ

$$P(\overline{B_3}|A) = \frac{0,4 \cdot 0,72}{0,6 \cdot 0,26 + 0,4 \cdot 0,72} = \frac{0,288}{0,444} = \frac{0,072}{0,111} \approx 0,64.$$

8. საავადმყოფოში პაციენტის დაავადების დასადგენად გამოიყენება დიაგნოსტიკური ტესტი. ავადმყოფობაზე ეს ტესტი იძლევა დადებით რეაქციას (ტესტი მიუთითებს, რომ პაციენტი დაავადებულია) 0,95-ის ტოლი ალბათობით, ხოლო უარყოფით რეაქციას იძლევა 0,05-ის ტოლი ალბათობით (ე.ი. დაავადებულ პაციენტზე 0,05-ის ტოლი ალბათობით მიუთითებს, რომ იგი ჯანმრთელია, რაც იგივეა, რომ ჯანმრთელ პაციენტზე მიუთითოს დაავადებულობაზე) – ესაა ტესტის შეცდომის ალბათობა. გამოსაკვლევად მივიდა პაციენტთა გარკვეული ჯგუფი. ცნობილია, რომ თითოეული მათგანისათვის დაავადებულობის ალბათობაა 0,005. ამ ჯგუფის რომელიმე პაციენტისათვის, რომლის ტესტმა მოგვცა დადებითი რეაქცია, რას უდრის დაავადებულობის ალბათობა?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A -თი ხდომილობა – {პაციენტის ტესტმა აჩვენა დადებითი რეაქცია}, მაშინ $\overline{A}$ = {პაციენტის ტესტმა აჩვენა უარყოფითი რეაქცია}. განვიხილოთ პიპო-

თეზები $B_1 = \{\text{პაციენტი დაავადებულია}\}$, $B_2 = \{\text{პაციენტი არაა დაავადებული}\} = \bar{B}_1$. ამოცანის პირობით: $P(B_1) = 0,005$; $P(B_2) = P(\bar{B}_1) = 1 - P(B_1) = 0,995$; $P(A|B_1) = 0,95$; $P(A|B_2) = P(\bar{A}|B_1) = 0,05$. საძიებელ $P(B_1|A)$ ალბათობას გამოვთვლით ბაიესის (3.2) ფორმულით:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} = \\ &= \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,95 \cdot 0,005 + 0,05 \cdot 0,995} = 0,0872 \end{aligned}$$

დასკვნა ასეთია: იმ პაციენტების მხოლოდ 8,72%-ია სინამდვილეში დაავადებული, რომლებისთვისაც მოცემულმა ტესტმა დადებითი რეაქცია აჩვენა.

9. ორი №1 და №2 კოსმოსური სადგურის საშუალებით აკვირდებიან რომელიღაც უცნობ ობიექტს. ობიექტი შეიძლება იმყოფებოდეს ორი განსხვავებული S_1 და S_2 მდგომარეობიდან ერთ-ერთში, ამასთან, ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლა შემთხვევითია.

ხანგრძლივი დაკვირვების პროცესმა აჩვენა, რომ მთელი დროის დაახლოებით 30%-ში ობიექტი S_1 მდგომარეობაშია, ხოლო დაახლოებით 70% კი S_2 მდგომარეობაში. №1 დამკვირვებელი სადგურის მიერ გადმოცემული ინფორმაციის 2% არასაიმედოა, №2 დამკვირვებელი სადგურისათვის – 8%-ია არასაიმედო. გარკვეულ მომენტში №1 სადგურმა გადმოსცა ინფორმაცია, რომ ობიექტი იმყოფებოდა S_1 მდგომარეობაში, ხოლო №2 სადგურმა კი

გადმოსცა ობიექტის S_2 მდგომარეობაში ყოფნა. რომელ შეტყობინებას უნდა დაუჯეროთ?

ამოხსნა. საკელევი ობიექტის მდგომარეობის შესახებ დაუშვათ ორი ჰიპოთეზა: $B_1 = \{\text{ობიექტი } S_1 \text{ მდგომარეობაშია}\}$, $B_2 = \{\text{ობიექტი } S_2 \text{ მდგომარეობაშია}\}$.

ცდით დაკვირვებული ხდომილობა A მდგომარეობის იმაში, რომ $\{N_1\}$ -მა სადგურმა ობიექტის შესახებ გადმოსცა მისი S_1 მდგომარეობაში ყოფნის ინფორმაცია და იმავედროულად N_2 სადგურმა ობიექტის S_2 მდგომარეობაში ყოფნის ინფორმაცია.

ამოცანის პირობით ცდამდე ჰიპოთეზების (აპრიორული) ალბათობები ტოლია $P(B_1) = \frac{30}{100} = 0,3$,

$$P(B_2) = \frac{70}{100} = 0,7 \quad \text{შეგვიძლია გამოვთვალოთ } A$$

ხდომილობის პირობითი ალბათობები მოცემული ჰიპოთეზების მიმართ; $P(A|B_1)$ წარმოადგენს ალბათობას იმისას, რომ ხდება A ხდომილობა იმ პირობით, რომ B_1 ჰიპოთეზას აქვს ადგილი, ე.ი. $P(A|B_1)$ არის ალბათობა იმისა, რომ როცა დასაკვირვებელი ობიექტი S_1 მდგომარეობაშია (სრულდება B_1 ჰიპოთეზა), მაშინ N_1 -მა სადგურმა გადმოსცა სწორი ინფორმაცია (ობიექტის S_1 მდგომარეობაში ყოფნის შესახებ), ხოლო N_2 -მ კი მცდარი ინფორმაცია (ობიექტის S_2 მდგომარეობაში ყოფნის შესახებ); რადგან N_1 სწორ ინფორმაციას გადმოსცემს 98% შემთხვევაში (არასწორს კი 2% შემთხვევაში), ხოლო N_2 სწორ ინფორმაციას გადმოსცემს 92% შემთხვევაში (არასწორს 8% შემთხვევაში), ამიტომ

$P(A|B_1) = P\{\text{№1 დამკვირვებელმა სადგურმა გადმოსცა სწორი ინფორმაცია და №2-ემ - არასწორი ინფორმაცია (რადგან ცნობილია, რომ ობიექტი } S_1 \text{ მდგომარეობაშია)} = \frac{98}{100} \cdot \frac{8}{100} = 0,98 \cdot 0,08 = 0,0784.$

ანალოგიურად გამოვთვლით $P(A|B_2) = P\{\text{№2 დამკვირვებელმა სადგურმა გადმოსცა სწორი ინფორმაცია, ხოლო №1-მა - არასწორი ინფორმაცია (რადგან ცნობილია, რომ ობიექტი } S_2 \text{ მდგომარეობაშია)} = \frac{92}{100} \cdot \frac{2}{100} = 0,92 \cdot 0,02 = 0,0184.$

ბაიესის (32) ფორმულის გამოყენებით დავადგენთ, რომ

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,0784}{0,3 \cdot 0,0784 + 0,7 \cdot 0,0184} \approx 0,645 \end{aligned}$$

დასკვნა ასეთია: B_1 ჰიპოთეზის აპოსტერიორული (ცდის 'შემდეგი) ალბათობა იმ პირობით, რომ ადგილი აქვს A ხდომილობას, ანუ ალბათობა იმისა, რომ დასაკვირვებელი ობიექტი S_1 მდგომარეობაშია, მაშინ როდესაც $\text{№1 სადგურმა დააფიქსირა ობიექტის } S_1 \text{ მდგომარეობა, ხოლო } \text{№2-მ - } S_2, \text{ ტოლია } 0,645, \text{ ე.ი. ორი გადმოცემული ინფორმაციიდან უფრო საიმედოა } \text{№1 სადგურის მიერ გადმოცემული ინფორმაცია.}$

10. ბაზაში მოიცანეს ორი ფაბრიკის მიერ დამზადებული ერთნაირი ნაკეთობები, რომელთაგან პირველი ფაბრიკის მიერ დამზადებულია 40% ნაკეთობა, ხოლო მეორეს მიერ – ნაკეთობების 60%. წუნდებული ნაკეთობების დამზადების ალბათობები პირველი და მეორე ფაბრიკისათვის შესაბამისად არის 0,01 და 0,02. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ბაზიდან შემთხვევით აღებული ორი ნაკეთობა არ იქნება წუნდებული.

ამოხსნა. A იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ბაზიდან აღებული ორივე დეტალი არ იქნება წუნდებული, A_1 და A_2 – აღნიშნავს ხდომილობებს: ეს ნაკეთობები დამზადებულია შესაბამისად პირველ და მეორე ფაბრიკაში, მაშინ A ხდომილობას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს A_1A_1 , A_2A_2 , A_1A_2 და A_2A_1 ხდომილობებიდან ერთ-ერთთან. რადგან $P(A_1) = 0,4$, $P(A_2) = 0,6$, გვექნება

$$P(A_1A_1) = P(A_1) P(A_1) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16;$$

$$P(A_2A_2) = P(A_2) P(A_2) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36;$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1) P(A_2) + P(A_2) P(A_1) = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,48;$$

ხოლო

$$P(A|A_1A_1) = 0,99 \cdot 0,99 = 0,9801,$$

$$P(A|A_2A_2) = 0,98 \cdot 0,98 = 0,9604,$$

$$P(A|A_1A_2) = 0,99 \cdot 0,98 = 0,9702.$$

(3.1) ფორმულის თანახმად კი საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,16 \cdot 0,9801 + 0,36 \cdot 0,9604 + 0,48 \cdot 0,9702 = \\ &= 0,968256 \approx 0,97. \end{aligned}$$

მაგალითები

3.1. ერთ ყუთში არის 6 თეთრი და 24 შავი ერთნაირი ბურთულა, ხოლო მეორე ყუთში – 5 თეთრი და 25 შავი ბურთულა. თითოეული ყუთიდან იღებენ თითო ბურთულას და მათგან ირჩევენ ერთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ეს ბურთულა თეთრია; ბ) ეს ბურთულა პირველი ყუთიდანაა.

3.2. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს არის 0,6, ხოლო მეორესათვის – 0,8. ორივე ესვრის ერთსა და იმავე სამიზნეს თითოჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს მოახვედრა მეორემ.

3.3. ბაზაში მიიტანეს სამი საწარმოს მიერ დამზადებული ერთნაირი სახის, შესაბამისად 40, 60 და 100 დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული სტანდარტული დეტალი დამზადებულია პირველი საწარმოს მიერ, თუ ცნობილია, რომ სტანდარტული დეტალების დამზადების ალბათობები პირველი, მეორე და მესამე საწარმოსათვის შესაბამისად არის 0,8, 0,9 და 0,8.

3.4. საწარმომ დაამზადა დეტალების სამი პარტია. პირველ პარტიაში წუნდებული დეტალები არის 20%, მეორეში – 10%, ხოლო მესამეში – არცერთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი: ა) წუნდებულია; ბ) არ იქნება წუნდებული.

3.5. ორ დაზგაზე მზადდება ერთი და იგივე სახის დეტალები. პირველ დაზგაზე წუნდებული დეტალების დამზადების ალბათობა არის 0,06, ხოლო მეორესათვის – 0,09. დამზადებულ დეტალებს ერთად აწყოვენ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი წუნდებულია, თუ ცნობილია, რომ პირველ დაზგაზე ხუთჯერ მეტი დეტალია დამზადებული.

3.6. ამწყობ საამქროში მოიტანეს დეტალების ახალი პარტია, რომელთაგან პირველ საამქროში დამზადებულია დეტალების 30%, მეორეში – 15%, ხოლო მესამეში – 55%. პირველ საამქროში წუნდებული დეტალის დამზადების ალბათობა არის 0,02, მეორეში – 0,01, ხოლო მესამეში – 0,01. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული წუნდებული დეტალი დამზადებულია მეორე საამქროში.

3.7. ცხრა შაშხანიდან, სამს ოპტიკური სამიზნე აქვს. ალბათობა იმისა, რომ ერთი გასროლით სამიზნე დაზიანდება, ოპტიკური სამიზნიანი შაშხანისათვის არის 0,9, ხოლო ჩვეულებრივი შაშხანისათვის – 0,6. ნებისმიერად აღებული შაშხანიდან ერთი გასროლით სამიზნე დააზიანეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გასროლა მოხდა ოპტიკურსამიზნიანი შაშხანით.

3.8. ორ ყუთში 15-15 ერთნაირი ბურთულაა. პირველში არის 10 თეთრი და 5 შავი, ხოლო მეორეში 5 თეთრი და 10 შავი ბურთულა. პირველი ყუთიდან ამოიღეს ერთი ბურთულა და ჩადეს მეორეში. იპოვეთ ალბათობა იმისა,

რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება: ა) თეთრი; ბ) შავი.

3.9. გზაზე. სადაც ბენზინის გასამართი სადგურია, გავლილი მსუბუქი ავტომობილების რიცხვი ისე შეე-
ფარდება სატვირთო ავტომობილების რიცხვს, როგორც
7
3 ალბათობა იმისა, რომ გამგლევი მსუბუქი ავტომო-
ბილი ჩაისხავს ბენზინს არის 0,6, ხოლო სატვირთოსათ-
ვის – 0,2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მანქანა, რო-
მელმაც ჩაისხა ბენზინი – სატვირთოა.

3.10. 20 საკამოცდო ბილეთში არც ერთი კითხვა არ
მეორდება. ყოველ ბილეთში 2 საკითხია. სტუდენტმა იცის
30 საკითხი. ნიშნის მისაღებად საჭიროა მან უპასუხოს
ბილეთის ორივე საკითხს. ან ბილეთის ერთ საკითხს და
დამატებით კითხვას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუ-
დენტი მიიღებს ნიშანს.

3.11. სამ ყუთში ერთნაირი 20-20 დეტალია, რო-
მელთაგან 18 სტანდარტულია. პირველი ყუთიდან
შემთხვევით ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მეორე
ყუთში; ამის შემდეგ მეორე ყუთიდანაც შემთხვევით
ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მესამე ყუთში. იპოვეთ
ალბათობა იმისა, რომ მესამე ყუთიდან ამოღებული დე-
ტალი იქნება სტანდარტული.

3.12. სამმა მფრინავემ ჩამოაგდო თითო ბომბი მით-
ითებულ ობიექტზე, რომელსაც მოხვდა მხოლოდ ორი.

თითოეული მფრინავის მიზანში მოხვედრის ალბათობა შესაბამისად არის 0,7, 0,9 და 0,8. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) მიზანში მოხვდა მეორე მფრინავის ჩამოგდებული ბომბი; ბ) ააცდინა პირველმა მფრინავმა.

3.13. ახალი პროდუქციის ათვისებაში სამმა ხარატმა თანაბრად მიიღო მონაწილეობა, რისთვისაც გამოეყოთ პრემია 2800 ლარი. გაანაწილეთ ეს პრემია მათ შორის, თუ ალბათობები იმისა, რომ ხარატები მაღალხარისხიანად დამზადდნენ პროდუქციას შესაბამისად ტოლია 0,9; 0,94 და 0,96.

3.14. ბაზაში მითიანეს სამი ფაბრიკის მიერ დამზადებული ერთნაირი სახის ნაკეთობები, რომელთაგან პირველის მიერ დამზადებულია ნაკეთობების 30%, მეორეს მიერ ნაკეთობების 20%, ხოლო მესამეს მიერ – 50%. წუნდებული ნაკეთობის დამზადების ალბათობები პირველი, მეორე და მესამე ფაბრიკისათვის შესაბამისად არის 0,03, 0,02 და 0,01. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბაზიდან შემთხვევით აღებული წუნდებული ნაკეთობა დამზადებულია პირველ ფაბრიკაში.

3.15. ბაზაში მითიანეს სამი ფაბრიკის მიერ დამზადებული ერთნაირი ნაკეთობები, რომელთაგან პირველის მიერ დამზადებულია ნაკეთობების 35%, მეორეს მიერ ნაკეთობების – 20%, ხოლო მესამეს მიერ – 45%. წუნდებული ნაკეთობების დამზადების ალბათობები პირველი, მეორე და მესამე ფაბრიკისათვის შესაბამისად არის 0,08, 0,02 და 0,1. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბაზიდან

შემთხვევით აღებული ორი ნაკეთობა არ იქნება წუნდებული.

3.16. 16 მსროლელისგან შემდგარი ჯგუფიდან 4 მათგანი ისერის ძალიან კარგად, 10 – კარგად, ხოლო 2 – საშუალოდ. თითოეულ გასროლით მიზანში მოხვედრის ალბათობა ძალიან კარგი მსროლელისათვის არის 0.98, კარგი მსროლელისათვის – 0.86, ხოლო საშუალოსათვის – 0.7. შემთხვევით არსებულმა მსროლელმა გაისროლა ორჯერ. რომელთაგან ერთი მოახვედრა მიზანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს იყო კარგი მსროლელი.

3.1. – 3.16. ამოცანები ამოხსენით დენდოგრამების გამოყენებით.

პასუხები

3.1. ა) 0,18; ბ) 0,55. 3.2. 0,57. 3.3. 0,19. 3.4. ა) 0,1; ბ) 0,9.
3.5. 0,065. 3.6. 0,115. 3.7. 0,43. 3.8. ა) 0,35; ბ) 0,65. 3.9. 0,125.
3.10. 0,84. 3.11. 0,81. 3.12. ა) 0,859; ბ) 0,54. 3.13. 900; 940;
960. 3.14. 0,5. 3.15. 0,852. 3.16. 0,5.

§4. დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა. უალბათესი რიცხვი

ვთქვათ, ერთიდაიგივე ორშედეგიან ცდას ვატარებთ ერთიდაიგივე პირობებში n -ჯერ. ყოველ ცდაში ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობა ან ხდება (ვამბობთ, ადგილი აქვს „წარმატებას“), ან არ ხდება (ვამბობთ, ადგილი აქვს „მარცხს“). A_i -ით აღვნიშნოთ ხდომილობა $A_i = \{i\text{-ურ ცდაში ადგილი აქვს „წარმატებას“}\} \equiv \{i\text{-ურ ცდაში მოხდა } A \text{ ხდომილობა}\}$, მაშინ $\bar{A}_i = \{i\text{-ურ ცდაში ადგილი აქვს „მარცხს“}\} \equiv \{i\text{-ურ ცდაში მოხდა } \bar{A} \text{ ხდომილობა}\}$, $i=1, 2, 3, \dots, n$.

1. თუ ყოველ ცდაში „წარმატების“ ალბათობა ერთიდაიგივე არაუარყოფითი p მუდმივი რიცხვია $P(A_1)=P(A_2)=\dots=P(A_n)=p$ და ხდომილობები $A_1, A_2, \dots, A_n$ ერთობლივ დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ ვამბობთ, რომ გვაქვს დამოუკიდებელ ცდათა ბერნულის მიმდევრობა (ბერნულის დამოუკიდებელ ცდათა სქემა).

დამოუკიდებელი ცდების ცნება ასეც შეგვეძლო შემოგვეტანა: ორშედეგიანი ცდები (ცალკეულ ცდაში ხდება A , ან $\bar{A}$) დამოუკიდებელია, თუ ცალკეულ დაკვირვებებში (ცდებში) წინა დაკვირვებების შედეგები არ ცვლიან მოცემული ხდომილობის ალბათობას. ე.ი. ყოველ ცალკეულ ცდაში $P(A)=p$ ერთიდაიგივეა და $P(\bar{A})=1-P(A)=1-p=q$; $p+q=1$.

აღვნიშნოთ X -ით n დამოუკიდებელ ცდაში „წარმატებათა“ (A ხდომილობის მოხდენათა) რიცხვი. პრაქტი-

კულად, იმისდამიხედვით, თუ n დამოუკიდებელ ცდაში რამდენჯერ მოხდებოდა A ხდომილობა (რამდენ „წარმატებასაც“ ექნება ადგილი), X შეიძლება იყოს ან 0 , ან 1 , ან 2 , ან 3 , ..., ან n -ის ტოლი. ე.ი. X არის შემთხვევითი რიცხვი (შემთხვევითი სიდიდე), რომელსაც შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები $0, 1, 2, 3, \dots, n$. ეთქვათ, m ($0 \leq m \leq n$) ფიქსირებული მთელი რიცხვია. საინტერესოა ამოცანა: რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობა მოხდება m -ჯერ და არ მოხდება $(n-m)$ -ჯერ? ეს ალბათობა აღვნიშნოთ $P_n(X=m)$ -ით, ან $P_n(m)$ -ით. ($P_n(X=m) \equiv P_n(m)$).

$0 < p < 1$ – პირობა ნიშნავს, რომ A ხდომილობა არც იშვიათია, არც ხშირი.

თუ $0 < p < 1$ და $np < 10$, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობას („წარმატებას“) ადგილი ექნება m -ჯერ (და არ ექნება $(n-m)$ -ჯერ), გაამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$P_n(X=m) \equiv P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad (4.1)$$

X -ის შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობების: $0, 1, 2, 3, \dots, n$ შესაბამისად მივიღებთ ალბათობების მიმდევრობას $P_n(X=0)=P_n(0)$, $P_n(X=1)=P_n(1)$, $P_n(X=2)=P_n(2)$, ..., $P_n(X=n)=P_n(n)$, რომლებსომაც

$$n=2\text{-სთვის } P_2(0)+P_2(1)+P_2(2)=q^2+2qp+p^2=(q+p)^2,$$

$$n=3\text{-სთვის } P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=q^3+3q^2p+3qp^2+p^3=(q+p)^3.$$

საზოგადოდ

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n) = (q + p)^n \quad (4.2)$$

ე.ი. $P_n(m)$ ალბათობები $(q+p)^n$ ბინომის გაშლის წევრებია, ამიტომ (4.1) ფორმულით გამოთვლილ ალბათობების მიმდევრობას $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$, ალბათობების ბინომიალურ განაწილებას უწოდებენ.

$p+q=1$, ამიტომ $\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1$. p ყველა ცდაში ერ-

თიდაიგივეა ($p = P(A)$).

(4.1) და (4.2) ფორმულების მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(q + pz)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} z^m \quad (4.3)$$

2. რადგან პრაქტიკულად ვერ ხერხდება დამოუკიდებელი ცდების ერთიდაიგივე პირობებში n -ჯერ განმეორება, ამიტომ ყოველ i -ურ ცდაში ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობის ალბათობა $p_i = P(A_i)$ სხვადასხვაა ($i=1, \dots, n$). მაგალითად, როდესაც წარმოებს მრავალჯერადი გასროლა მოძრავი სამიზნის მიმართულებით, ანუ გვაქვს გასროლათა მიმდევრობა, იმ შემთხვევაში, როდესაც სამიზნემდე მანძილი ყოველ გასროლაში სხვადასხვაა; ანდა თუ წარმოებს ფირმის საეაჭრო ობიექტში, რომელშიც სხვადასხვა ასორტიმენტის საქონელი იყიდება, გაყიდული საქონლის თითოეული ერთეულიდან მიღებული შემოსავლების დათვლა და სხვა.

ვთქვათ, ერთიდაიგივე ორშედეგიან ცდას ერთიდაიგივე პირობებში ვატარებთ ურთიერთდამოუკიდებლად n -ჯერ. A_i აღნიშნავს $\{i$ -ურ ცდაში ადგილი აქვს „წარმატებას“ $\}$. $\bar{A}_i = \{i$ -ურ ცდაში ადგილი აქვს „მარცხს“ $\}$. აღვნიშნოთ i -ურ ცდაში „წარმატების“ ალბათობა p_i -ით. $p_i = P(A_i)$, მაშინ $q_i = P(\bar{A}_i) = 1 - p_i$, $i = 1, \dots, n$. ამასთან, ალბათობები $p_1, p_2, \dots, p_n$ საზოგადოდ განსხვავებული რიცხვებია. აღვნიშნოთ X -ით n დამოუკიდებელ ცდაში „წარმატებათა“ რიცხვი X შეიძლება იყოს $0, 1, \dots, n$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი, შესაბამისი ალბათობები აღვნიშნოთ $P_n(X=0)=P_n(0)$ -ით, ..., $P_n(X=n)=P_n(n)$. $P_n(X=m)=P_n(m)$ ერთიდაიგივე აღნიშვნაა და აღნიშნავს ალბათობას იმისას, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში, „წარმატებას“ ადგილი აქვს m -ჯერ, იმ შემთხვევაში, თუ „წარმატების“ ალბათობა p_i ყველა ცდისთვის მუდმივი არაა. ანუ ბერნულის დამოუკიდებელ ცდათა სქემა არა გვაქვს.

განვიხილოთ გამოსახულება

$$(q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \dots (q_n + p_n z),$$

სადაც z ნებისმიერი პარამეტრია.

გადამრავლებით დავრწმუნდებით, რომ მიღებულ გამოსახულებაში z^m -ის ($m=0, 1, \dots, n$) კოეფიციენტებად მიიღებიან $P_n(m)$ ალბათობები: $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ ე.ი.

$$\begin{aligned} & (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \dots (q_n + p_n z) = \\ & = P_n(0) + P_n(1)z + P_n(2)z^2 + \dots + P_n(n)z^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

3. დავუბრუნდეთ ბერნულის დამოუკიდებელ ცდათა სქემას. იმ შემთხვევაში, როდესაც ცდების რაოდენობა დიდია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $np > 10$, მაშინ (4.1) ფორ-

მულის გამოყენება რთულ ტექნიკურ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, ამიტომ ამ შემთხვევაში გამოიყენება მუაერ-ლაპლასის ფორმულა:

$$P_n(X = m) = P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad (4.5)$$

$$\text{სადაც } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \text{ხოლო } \varphi(x)$$

ლაპლასის ლუწი ფუნქციაა, რომლის მნიშვნელობები მოცემულია დანართი 1-ში, როცა $x \in [0; 5]$, ხოლო როცა $x > 5$, $\varphi(x)$ -ის მნიშვნელობად ავიღებთ ცხრილის ბოლო მნიშვნელობას $\varphi(5) = 0$.

იმ შემთხვევაში, როცა n დიდი რიცხვია, m მცირე რიცხვია n -თან შედარებით და A იშვიათი (ან ხშირი) ხდომილობაა, ე.ი. p ალბათობა მცირე (ან დიდი) სიდიდეა, მაშინ $P_n(X=m) = P_n(m)$ ალბათობის გამოსათვლელად გამოიყენება პუასონის ასიმპტოტური ფორმულა

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \quad (4.6)$$

მოცემული m და $np = \lambda$ მნიშვნელობისათვის ამ $P_n(m)$ ალბათობებს ვეარაუდოთ ცხრილის გამოყენებით.

იმ შემთხვევაში, როცა $0 < p < 1$, მაშინ $P_n\{m_1 \leq X \leq m_2\} = P_n(m_1, m_2)$. ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი X მოთავსებული იქნება $[m_1, m_2]$ შუალედში გამოითვლება მუაერ-ლაპლასის ინტეგრალური ფორმულით

$$P_n(m_1 \leq X \leq m_2) = P_n(m_1, m_2) \equiv \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (4.7)$$

სადაც $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$, ხოლო $\Phi(x)(\Phi(-x) = -\Phi(x))$

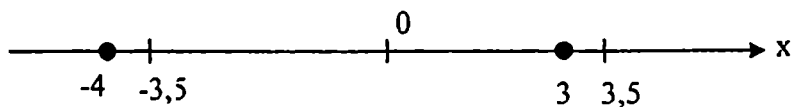
ფუნქციის მნიშვნელობების ცხრილი არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის 0-დან 5-ის ჩათვლით მოცემულია დანართი 1-ში, როცა $x > 5$ ყოველთვის ჩათვლით, რომ $\Phi(x) = 0,5$.

„წარმატებათა“ X რიცხვის იმ m_0 მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $P_n\{X = m_0\} = P_n(m_0)$ ალბათობა უდიდესია, ეწოდება A ხდომილობის მოხდენათა უაღბათესი რიცხვი და განისაზღვრება შემდეგი პირობიდან $np - q \leq m_0 \leq np + p$ ანუ $(n+1)p - 1 \leq m_0 \leq (n+1)p$. (4.8)

ა) თუ $(n+1)p$ მთელი რიცხვია, მაშინ $[(n+1)p - 1]$ -იც მთელი რიცხვია და გვაქვს ორი უაღბათესი მნიშვნელობა $(m_0)_1 = (n+1)p - 1$ და $(m_0)_2 = (n+1)p$.

ბ) თუ $(n+1)p$ არაა მთელი რიცხვი, მაშინ გვაქვს ერთადერთი უაღბათესი მნიშვნელობა m_0 , რომელიც აკმაყოფილებს (4.8) უტოლობას. რაც იმას ნიშნავს, რომ m_0 არის $(n+1)p$ რიცხვის მთელი ნაწილი. $m_0 = [(n+1)p]$.

შენიშვნა: ვიცით, რომ $[x] \leq x$. მაგალითად: $[0] = 0$, $[-3,5] = -4$; $[3,5] = 3$.



მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. მსროლელი ესერის სამიზნეს 4-ჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიზანში მოახვედრებს 3-ჯერ, თუ ცნობილია, რომ მსროლელის მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,8.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (4.1) ფორმულით. რადგან $n=4$, $m=3$, $p=0,8$, ხოლო $q=1-0,8=0,2$, $n \cdot p=4 \cdot 0,8=3,2 < 10$, გვექნება

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!1!} 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

2. ალბათობა იმისა, რომ გასროლილი ყუმბარა მოხვდება მიზანს არის 0,7. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ხუთი გასროლილი ყუმბარიდან მიზანს მოხვდება არანაკლებ ოთხის.

ამოხსნა. $n=5$, $p=0,7$, $n \cdot p=3,5 < 10$. (4.1) ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა იქნება

$$\begin{aligned} P_5(4) + P_5(5) &= \frac{5!}{4!1!} 0,7^4 \cdot 0,3 + \frac{5!}{5!0!} 0,7^5 \cdot 0,3^0 = \\ &= 0,36015 + 0,16807 = 0,52822. \end{aligned}$$

3. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლილი ყუმბარიდან სამიზნეს მოხვდება 75, თუ ცნობილია, რომ მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,8.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (4.5) ფორმულით. რადგან $n=100$, $p=0,8$, $q=0,2$ $n \cdot p=100 \cdot 0,8=80 > 10$, ამიტომ შეგვიძლია

დავწეროთ, რომ $x = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-5}{4} = -1,25$. $\varphi(-1,25)$

მნიშვნელობა მოვძებნოთ დანართი 1-ში. გვექნება $\varphi(-1,25) = 0,1826$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა ფორმულა (4.5)-ში, საბოლოოდ მივიღებთ

$$P_{100}(75) = 0,0457.$$

4. საწყობში მიიტანეს 10000 დეტალი, რომელთაგან 2 არასტანდარტულია. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 2000 დეტალიდან არცერთი არ იქნება არასტანდარტული.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ პუასონის ფორმულით.

რადგან $n=2000$, $m=0$, $p = \frac{2}{10000} = 0,0002$, ამიტომ $np=0,4$.

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები ფორმულა (4.6)-ში, გვექნება

$$P_{2000}(0) = e^{-0,4}$$

$e^{-0,4}$ სიდიდის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$P_{2000}(0) = 0,64.$$

5. მსროლელის მიერ მიზანში მოხედრის ალბათობა ერთი გასროლით არის 0,8. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლიდან: ა) მსროლელის მიერ მიზანში

მოხვედრათა რიცხვი მოთავსებული იქნება [70; 90] შუალედში; ბ) მსროლელი მოახვედრებს არანაკლებ 70-ჯერ.

ამოხსნა. ა) ვისარგებლოთ მუაერ-ღაპლასის ინტეგრალური ფორმულით. ამოცანის პირობით $m_1=70$, $m_2=90$, $n=100$, $p=0,8$, $q=0,2$, $np=100 \cdot 0,8=80 > 10$, ამიტომ

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5; \text{ ხოლო } \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = -2,5.$$

რადგან $\Phi(x)$ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ დანართი 1-დან $\Phi(2,5) = -\Phi(-2,5) = 0,4938$.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები ფორმულა (4.7)-ში, მივიღებთ

$$P_{100}(70, 90) = 0,9876.$$

ბ) ამ შემთხვევაში $m_1=70$, $m_2=100$, ამიტომ

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = 5, \quad \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = -2,5.$$

იმავე დანართიდან ეპოულობთ $\Phi(5) = 0,5$, $\Phi(-2,5) = -0,4938$. საბოლოოდ, იმავე (4.7) ფორმულის თანახმად, გექნება

$$P_{100}(70; 100) = 0,9938.$$

6. რამდენი ბომბი უნდა ჩამოაგდოს თვითმფრინავმა, რომ სამიზნე ობიექტს მოხვდეს 10, თუ ცნობილია, რომ მოხვედრის ალბათობა არის 0,7.

ამოხსნა. ამოცანის პირობით $m_0=10$, $p=0,7$, $q=0,3$. ვის-
არგებლოთ (4.8) ფორმულით და ვიპოვოთ საძიებელი
უაღბათესი რიცხვი. გვექნება

$$0,7n - 0,3 \leq 10 \leq 0,7n + 0,7 \Rightarrow \begin{cases} 0,7n \leq 10,3 \\ 0,7n \geq 9,3 \end{cases} \Rightarrow 13,3 \leq n \leq 14,7 \Rightarrow n = 14.$$

7. ბომბდამშენმა ხიდის ასაფეთქებლად სხვადასხვა
სიმაღლიდან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ჩამოაგდო
4 ბომბი. მიზანში მოხვედრის ალბათობები შესაბამისი
თანმიმდევრობით არის $P_1=0,1$, $P_2=0,2$, $P_3=0,3$, $P_4=0,4$. რას
უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ყველა ბომბი აცილდება
მიზანს, ბ) მიზანში მოხედება ერთი ბომბი, გ) მიზანში
მოხედება ორი ბომბი, დ) მიზანში მოხედება სამი ბომბი,
ე) მიზანში მოხედება ოთხი ბომბი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობა $A=\{\text{ბომბი მოხ-}\br/>ედება მიზანს\}=\{\text{ადგილი ექნება „წარმატებას“}\}$, მაშინ
 $A_i=\{i\text{-ური ბომბი მოხედება მიზანს}\}=\{\text{„წარმატებას“}\}$
ადგილი ექნება i -ური ბომბის ჩამოგდების შემთხვევაში,
 $i=1, 2, 3, 4$. თითოეული ცდაში „წარმატების“ ალბათობები
განსხვავდებიან. ამიტომ საძიებელ ალბათობებს გა-
მოვთვლით (4.4) ფორმულით.

$$(q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)(q_3 + p_3 z)(q_4 + p_4 z) = P_4\{X=0\} + P_4\{X=1\}z + \\ + P_4\{X=2\}z^2 + P_4\{X=3\}z^3 + P_4\{X=4\}z^4$$

სადაც X აღნიშნავს 4 ბომბიდან მიზანში მოხვედრილი
ბომბების რაოდენობას. z ნებისმიერი პარამეტრია. რადგან

$$q_1=1-p_1=0,9, \quad q_2=1-p_2=0,8, \quad q_3=1-p_3=0,7, \quad q_4=1-p_4=0,6,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$(0,9 + 0,1z)(0,8 + 0,2z)(0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z) = P_4\{X = 0\} + \\ + P_4\{X = 1\}z + P_4\{X = 2\}z^2 + P_4\{X = 3\}z^3 + P_4\{X = 4\}z^4.$$

ე.ი.

$$0,302 + 0,44z + 0,215z^2 + 0,04z^3 + 0,002z^4 = P_4\{X = 0\} + \\ + P_4\{X = 1\}z + P_4\{X = 2\}z^2 + P_4\{X = 3\}z^3 + P_4\{X = 4\}z^4.$$

ამ ტოლობიდან, იმის გამო, რომ მარჯვენა და მარცხენა ნაწილში z პარამეტრის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები ტოლი უნდა იყოს, მივიღებთ:

$$ა) P_4\{X = 0\} = 0,302; \quad ბ) P_4\{X = 1\} = 0,44;$$

$$გ) P_4\{X = 2\} = 0,215; \quad დ) P_4\{X = 3\} = 0,04;$$

$$ე) P_4\{X = 4\} = 0,002.$$

მაგალითები

4.1. აუქციონზე საშუალოდ პაკეტების 20% იყიდება თავდაპირველად გამოცხადებულ ფასად. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) 9 პაკეტიდან ვაჭრობის შედეგად საწყის ფასად გაიყიდება 4 პაკეტი; ბ) იპოვეთ უაღბათესი რიცხვი.

4.2. მსროლელი ესკრის სამიზნეს 7-ჯერ. თითოეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,6-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი მიზანში მოახვედრებს: ა) 4-ჯერ; ბ) 3-ჯერ; გ) არანაკლებ 6-ჯერ; დ) არანაკლებ 5-ჯერ.

4.3. მიზანი ჩაითვლება დაზიანებულად, თუ სამიზნეს მოხედება არანაკლებ 4 ჭურვი. იპოვეთ სამიზნის დაზიანების ალბათობა 5 გასროლის შემდეგ, თუ ყოველი ნასროლის მოხვედრის ალბათობა არის 0,8.

4.4. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ამოხსნის ამოცანას არის 0,9. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს ფრიადს, თუ ცნობილია, რომ მან 10 ამოცანიდან უნდა ამოხსნას არანაკლებ 9.

4.5. დასახლებულ პუნქტში ყოველი 100 ოჯახიდან 80-ს აქვს მაცივარი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 400 ოჯახიდან მაცივარი ექნება 300-ს.

4.6. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლის შემდეგად სამიზნეს მოხედება 80 ტყვია, თუ ცნობილია, რომ მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,7.

4.7. ვაჟის დაბადების ალბათობა არის 0,51. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 100 ახალშობილიდან 50 ვაჟია.

4.8. საწყობში მოიტანეს 1000 დეტალი, რომელთაგან 3 არასტანდარტულია. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 300 დეტალიდან არცერთი არ იქნება არასტანდარტული.

4.9. 10000 ადამიანიდან 9990-ს უმაღლესი განათლება აქვს, გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით

არჩეული 200 ადამიანიდან არცერთი არ იქნება უმაღლესი განათლების გარეშე.

4.10. ალბათობა იმისა, რომ შეძენილი იქნება ლატარიის წამგებიანი ბილეთი არის 0,6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 ნაყიდი ბილეთიდან წამგებიანი ბილეთების რაოდენობა მოთავსდება [50; 70] შუალედში.

4.11. მსროლელის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლით არის 0,9. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 150 გასროლიდან: ა) მსროლელის მიერ მიზანში მოხვედრათა რიცხვი მოთავსებული იქნება [100; 140] შუალედში; ბ) მსროლელი მოახვედრებს არანაკლებ 100-ჯერ.

4.12. ალბათობა იმისა, რომ დამზადებული დეტალი არასტანდარტულია არის 0,1. იპოვეთ არასტანდარტულ დეტალთა უაღბათესი რიცხვი, თუ სულ დამზადებულია 30 დეტალი.

4.13. თვითმფრინავმა სამიზნეზე ჩამოყარა 100 ბომბი. ალბათობა იმისა, რომ ბომბი მოხვდება სამიზნეს არის 0,77. იპოვეთ სამიზნეს მოხვედრათა უაღბათესი რიცხვი.

4.14. რამდენი ბომბი უნდა ჩამოაგდოს თვითმფრინავმა, რომ სამიზნე ობიექტს მოხვდეს 20, თუ ცნობილია, რომ სამიზნეს მოხვედრის ალბათობა არის 0,8.

4.15. დედამიწაზე მდებარე ცენტრალური რადიოსადგურიდან ხორციელდება კავშირი ორი მფრინავი ობიექტის რადიოსადგურთან. სადგურებამდე მანძილის ცვლილების, შემთხვევითი ატმოსფერული რადიოშეფერხებების და სხვა მიზეზების გამო კავშირი დროდადრო წყდება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, მხოლოდ სხვადასხვა 0.1 და 0.2 ალბათობებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში ცენტრალურ რადიოსადგურს კავშირი არაქვს ა) ერთ ობიექტთან მაინც; ბ) ორივე ობიექტთან.

4.16. რადიოსალოკაციო სისტემა დაკვირვებას აწარმოებს ოთხი დამოუკიდებელი ობიექტის ფრენაზე. ობიექტები შეიძლება დაიკარგოს რადიოსალოკაციო არეალიდან, შესაბამისად ალბათობებით $p_1=p_2=0,1$; $p_3=p_4=0,2$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სალოკაციო არეში არიქნება ოთხივე ობიექტი.

4.17. ფირმის ოფისში სხვადასხვა ადგილზე დამონტაჟებულია 10 ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ფარული ვიდეოკამერა. თითოეული მათგანი ერთიდაიგივე $p=0,1$ -ის ტოლი ალბათობით შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში ერთი კამერა მაინც გამოვიდა მწყობრიდან; ბ) რას უდრის მომუშავე ვიდეოკამერათა უაღბათესი რიცხვი?

4.18. წინა ამოცანის პირობებში რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყველა ვიდეოკამერა მუშა მდგომარეობაშია?

4.19. ფირმის ოფისში ელექტროენერგიის დანახარჯმა ივლის-აგვისტოში ნორმას გადააჭარბა 4 დღე-ღამეში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ელექტროენერგიის დანახარჯი უახლოესი 3 დღე-ღამეში ნორმას გადააჭარბებს?

4.20. დაკვირვებებით დადგენილია, რომ საბრძოლო დავალების შესასრულებლად გაფრენილი თვითმფრინავების 20% უკან ვეღარ ბრუნდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5 თვითმფრინავიდან დაბრუნდება არანაკლებ ორი თვითმფრინავი.

პასუხები

4.1. 0,0665; 1; 2. 4.2. ა) 0,29; ბ) 0,19; გ) 0,35; დ) 0,275. 4.3. 0,737. 4.4. 0,736. 4.5. 0,00218. 4.6. 0,008. 4.7. 0,078. 4.8. 0,5. 4.9. 0,82. 4.10. 0,9586. 4.11. ა) 0,91; ბ) 0,99. 4.12. 3. 4.13. 77. 4.14. 25. 4.15. 0,28; 0,02. 4.16. 0,0004. 4.17. 0,65; 9. 4.18. 0,35. 4.19. 0,18. 4.20. 0,853.

§5. შემთხვევითი სიდიდე. შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები

შემთხვევითი ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ცდის შედეგად მიიღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას რაიმე სიმრავლიდან და ამ მნიშვნელობის მიღება დაკავშირებულია გარკვეული ალბათობის მქონე შემთხვევით ხდომილობასთან. შემთხვევით სიდიდეებს აღნიშნავენ X, Y, Z , ასოებით, ხოლო მის მნიშვნელობებს $x, y, z, \dots$ ასოებით.

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული, თუ მნიშვნელობები, რომელსაც იგი მიიღებს, წარმოადგენს სასრულ ან თვლად სიმრავლეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ეწოდება უწყვეტი ტიპის. გარკვეული მოსაზრების გამო, უფრო დაწერილებით განვიხილავთ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს.

ფორმალურად დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება განესაზღვროთ, როგორც ცდის ყველა შესაძლო შემთხვევათა (აქ არაა სავალდებულო შემთხვევები ტოლალბათური იყვნენ) დისკრეტულ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია.

დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია მისი ალბათობების განაწილების კანონი შემდეგი ცხრილის სახით

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

სადაც პირველ სტრიქონში ჩაწერილია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლოა რიცხვითი მნიშვნელობები, ხოლო მეორე სტრიქონში შესაბამისი $p_i = P(X = x_i)$ ალბათო-

ბები. აქვე შევნიშნოთ, რომ რადგან $(X=x_1)$, $(X=x_2)$, $(X=x_n)$, ხდომილობები ქმნიან უთავსებად ხდომილობათა სრულ სისტემას, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

(5.1)-ს მოკლედ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს უწოდებენ.

ვთქვათ, დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია (5.1), $y=g(x)$ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია X -ის შესაძლო $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებისათვის, მაშინ $g(x)$ წარმოადგენს შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციას, იგი შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების კანონი იქნება

$$g(X) \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & p_n \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$p_i = P(g(X) = g(x_i)), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

თუ პირველ სტრიქონში რომელიმე $g(x_i)$ მნიშვნელობები ტოლი აღმოჩნდა, იგი შეიძლება ჩავწეროთ ერთჯერ და მეორე სტრიქონში მიეწერეთ, x_i -ების შესაბამისი აღბათობების ჯამი.

X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომელიც აღინიშნება $M(X)$ სიმბოლოთი, განისაზღვრება ტოლობით

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (5.3)$$

$$M[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) p_i ; \quad (5.4)$$

ხოლო დისპერსია, რომელიც აღინიშნება $D(X)$ სიმბოლოთი, განისაზღვრება ტოლობით

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad (5.5)$$

(5.1) განაწილების კანონით განაწილებული დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია (5.3) და (5.5) ფორმულების გათვალისწინებით გამოითვლება ფორმულით

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i . \quad (5.6)$$

ან

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left[\sum_{i=1}^n x_i p_i \right]^2 \quad (5.7)$$

შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma(X)$, განისაზღვრება ტოლობით

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \quad (5.8)$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1. $M(c) = c$, სადაც $c = \text{const.}$
2. $M(cX) = cM(X)$.
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
4. $M(X - M(X)) = 0$,
5. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, სადაც X და Y ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რაც იმას ნიშნავს, რომ:

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i q_j,$$

სადაც იგულისხმება, რომ $Y \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$,

$$q_j = P\{Y = y_j\}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, m. \end{matrix}$$

დისპერსიის თვისებები:

$$1. D(c) = 0.$$

$$2. D(cX) = c^2 D(X).$$

$$3. D(X + Y) = D(X) + D(Y), \text{ სადაც } X \text{ და } Y \text{ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.}$$

$$4. D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y).$$

განვიხილოთ n დამოუკიდებელ ცდაში „წარმატებათა“ (A ხდომილობის მოხდენათა) X რიცხვის, რომელიც შემთხვევითი სიდიდეა, განაწილების კანონი

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ P_n(0) & P_n(1) & P_n(2) & \dots & P_n(n) \end{pmatrix},$$

ამ განაწილებაში თუ $P_n(X=m) = P_n(m)$ ალბათობები გამოითვლება (4.1) ფორმულით, მაშინ მას ეწოდება ბინომიალური განაწილების კანონი, ხოლო თუ ეს ალბათობები გამოითვლება (4.6) ფორმულით – პუასონის განაწილების კანონი.

მტკიცდება, რომ თუ X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ბინომიალური განაწილების კანონით, მაშინ

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad (5.9)$$

ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა (სტანდარტული გადახრა) $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$

პუასონის განაწილებისათვის

$$M(X) = D(X) = np = \lambda. \quad (5.10)$$

თუ X_i -ით აღვნიშნავთ i -ურ ცდაში „წარმატებათა“ რიცხვს, მაშინ

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ ხდება } A \text{ („წარმატება“), მაგრამ } P(A) = p, \\ 0, & \text{თუ ხდება } \bar{A} \text{ („მარცხი“), } P(\bar{A}) = q = 1 - p, \end{cases}$$

ამიტომ X_i არის შემთხვევითი სიდიდე (მას უწოდებენ i -ურ ცდაში A ხდომილობის („წარმატების“) ინდიკატორს) და მისი განაწილების კანონია

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

ამ კანონს ბერნულის განაწილების კანონს უწოდებენ.

$M(X_i) = p$, $D(X_i) = pq$, საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma_{X_i} = \sqrt{pq}$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

ამოხსნა. (5.3) ფორმულის თანახმად

$$M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,2 = 3,3.$$

რადგან (5.2)-ის თანახმად X^2 -ის განაწილების კანონია

$$X^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 36 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix},$$

ამიტომ (5.7) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია დაევწეროთ, რომ

$$D(X) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,3 + 36 \cdot 0,2 - 3,3^2 = 2,81,$$

ხოლო (5.8) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$\sigma(X) = \sqrt{2,81} \approx 1,68.$$

2. მსროლელს აქვს სამი ვაზნა და ესერის მიზანში პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,7. ვიპოვოთ დახარჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

ამოხსნა. A იყოს ერთ გასროლაში მიზანში მოხვედრის აღმნიშვნელი ხდომილობა („წარმატება“). მაშინ პირველ „წარმატებამდე“ დახარჯული ტყვიების X რიცხვის განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(A) & P(\bar{A}A) & P(\bar{A}\bar{A}) \end{pmatrix}$$

ახლა გამოვთვალოთ საძიებელი ალბათობები და შევიტანოთ ცხრილში. რადგან $P(A)=0,7$, ამიტომ $P(\bar{A})$ იქნება 0,3-ის ტოლი. ხოლო

$$P(\bar{A}A) = P(\bar{A}) \cdot P(A) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21 \text{ და}$$

$$P(\bar{A}\bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,7 & 0,21 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

3. მსროლელი, რომელსაც აქვს 4 ვაზნა, ესერის სამიზნეს პირველ მოხვედრამდე. მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,7. ვიპოვოთ დაუხარჯავი ვაზნების განაწილების კანონი.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A -თი ხდომილობა: {ერთ გასროლაში სამიზნე დაზიანდა} – „წარმატება“. მაშინ დაუხარჯავი ვაზნების X განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ P(A) & P(\bar{A}A) & P(\bar{A}\bar{A}A) & P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) \end{pmatrix}.$$

ახლა გამოვთვალოთ საძიებელი ალბათობები. გვექნება

$$P(A)=0,7; \quad P(\bar{A}A) = P(\bar{A}) \cdot P(A) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21;$$

$$P(\bar{A}\bar{A}A) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(A) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,063;$$

$$P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = (0,3)^3 = 0,027.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები ცხრილში, რომელიც მიიღებს საბოლოო სახეს

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0,7 & 0,21 & 0,063 & 0,027 \end{pmatrix}.$$

4. მსროლელი ესერის მოძრავ სამიზნეს პირველ მოხვედრამდე და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწრებს. შევადგინოთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი, თუ მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას არის 0,25.

ამოხსნა. A იყოს ერთ გასროლაში მიზანში მოხვედრის აღმნიშვნელი ხდომილობა („წარმატება“). მაშინ პირველ „წარმატებამდე“ დახარჯული ტყვიების X რიცხვის განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ P(A) & P(\bar{A}A) & P(\bar{A}\bar{A}A) & P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) \end{pmatrix}.$$

რადგან ამოცანის მოცემულობის თანახმად $P(A) = \frac{1}{4}$, და

$P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$, ამიტომ შეგვიძლია გამოვთვალოთ საძიებელი

ალბათობები:

$$P(\bar{A}A) = P(\bar{A}) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16};$$

$$P(\bar{A}\bar{A}A) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64};$$

$$P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები ცხრილში და მივიღებთ მის საბოლოო სახეს

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{9}{64} & \frac{27}{64} \end{pmatrix}.$$

5. ლითონის ფულს აგდებენ 10-ჯერ. X შემთხვევითი სიდიდე იყოს {გერბის} მოსვლათა რაოდენობა. დავეწეროთ მისი განაწილების კანონი, ვიპოვოთ $M(X)$, $D(X)$ და $\sigma(X)$.

ამოხსნა. X შემთხვევითი სიდიდეს ექნება ალბათობების ბინომიალური განაწილების კანონი

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 10 \\ P_{10}(0) & P_{10}(1) & P_{10}(2) & P_{10}(10) \end{pmatrix}.$$

რადგან $n=10$, $p=\frac{1}{2}$ და $q=\frac{1}{2}$, ამიტომ (5.9) ფორმულების თანახმად შეგვიძლია დავეწეროთ, რომ

$$M(X)=10 \cdot \frac{1}{2}=5, \quad D(X)=10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

ხოლო $\sigma(x)=1,58$.

6. ორ მფრინავ ობიექტს შორის გაიმართა საბრძოლო დუელი. პირველს მარაგში აქვს ორი რაკეტა, მეორეს კი ერთი. პირველს შეუძლია ერთ გასროლაში დააზიანოს მეორე 0,2-ის ტოლი ალბათობით, ხოლო მეორეს პირველი – 0,3-ის ტოლი ალბათობით. ჯერ რაკეტას უშვებს პირველი მფრინავი ობიექტი. თუ ააცილა, მაშინ გაისვრის მეორე და თუ მანაც ააცილა მიზანს – ისერის ისევ პირველი. დავეწეროთ გაშვებულ რაკეტათა შესაძლო X

რიცხვის განაწილების კანონი, გამოთვალეთ საშუალო მნიშვნელობა $M(X)$, დისპერსია $D(X)$ და საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma(X)$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: $A = \{\text{ერთი გასროლაში პირველი დააზიანებს მეორეს}\}$, $B = \{\text{ერთი გასროლაში მეორე დააზიანებს პირველს}\}$. $P(A) = 0,2$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,3$, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,7$. $X=1$ – დაიხარჯება ერთი რაკეტა – თუ მოხდება A ხდომილობა, $X=2$ – დაიხარჯება ორი რაკეტა, თუ ააცილებს პირველი და მოახვედრებს მეორე, ანუ მოხდება ხდომილობა AB , $X=3$ – დაიხარჯება 3 რაკეტა – თუ ააცილებს პირველიც და ააცილებს მეორეც, ანუ მოხდება ხდომილობა $\bar{A}\bar{B}$.

დაეწეროთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(A) & P(AB) & P(\bar{A}\bar{B}) \end{pmatrix},$$

რადგან $P(A) = 0,2$; $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$,
 $P(AB) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$, ამიტომ გვექნება

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,24 & 0,56 \end{pmatrix}, \quad 0,2 + 0,24 + 0,56 = 1.$$

(5.3) ფორმულის გამოყენებით დაეწეროთ

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,56 = 2,36,$$

ხოლო (5.2)-ის თანახმად –

$$X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,2 & 0,24 & 0,56 \end{pmatrix}.$$

ფორმულა (5.7)-ის თანახმად

$$D(X) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,56 - (2,36)^2 = 6,2 - 5,5696 = 0,6304,$$

ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,6304} \approx 0,79.$$

მაგალითები

5.1. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

$$X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $M(X)$, $D(X)$ და $\sigma(X)$.

5.2. მიზანში ესერიან ერთხელ. სამიზნის დაზიანების ალბათობა არის 0,9. X შემთხვევითი სიდიდე არის მოხვედრათა რაოდენობა. შეადგინეთ განაწილების კანონი და იპოვეთ $M(X)$, $D(X)$ და $\sigma(X)$.

5.3. მსროლელს, რომელსაც აქვს 3 ვაზნა, ესერის სამიზნეს პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,8. იპოვეთ დახარჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

5.4. მსროლელი, რომელსაც 4 ვაზნა აქვს, ესერის სამიზნეს პირველ მოხვედრამდე. მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,6. იპოვეთ დაუხარჯავი ვაზნების განაწილების კანონი.

5.5. მსროლელი ესერის მოძრავ სამიზნეს და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწრებს. შეადგინეთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი, თუ მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,7.

5.6. ლითონის ფულის აგდებენ 4-ჯერ. X შემთხვევითი სიდიდე იყოს საფასურის მოხვლის რაოდენობა. იპოვეთ მისი განაწილების კანონი და გამოთვალეთ $M(X)$, $D(X)$ და $\sigma(X)$.

5.7. წარმოებს 3 დამოუკიდებელი გასროლა მიზანში. თითოეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,4. X შემთხვევითი სიდიდე არის მიზანში მოხვედრათა რაოდენობა. იპოვეთ $M(X)$, $D(X)$ და $\sigma(X)$.

5.8. მსროლელი მიზანში ესერის 3-ჯერ. ყოველი გასროლის მოხვედრის ალბათობა არის 0,5, რისთვისაც მას ეწერება 10 ქულა. შეადგინეთ მიღებული ქულების განაწილების კანონი.

პასუხები

5.1. 2,6; 3,84; 1,92. 5.2. $X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$; 0,9; 0,09; 0,3. 5.3.

$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,8 & 0,16 & 0,04 \end{pmatrix}$. 5.4. $X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0,24 & 0,096 & 0,064 \end{pmatrix}$.

$$5.5. X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,7 & 0,21 & 0,063 & 0,027 \end{pmatrix}.$$

$$5.6. X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}, 2; 1; 1.$$

$$5.7. X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{27}{125} & \frac{54}{125} & \frac{36}{125} & \frac{8}{125} \end{pmatrix}, 1,2; 0,72; 0,849.$$

$$5.8. X \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

§6. უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე. ნორმალური განაწილება

ვიტყვი, რომ მოცემულია X უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე, თუ ცნობილია მისი განაწილების $F(x)$ ფუნქცია

$$F(x) = P\{X < x\} \quad (6.1)$$

შეგნიშნოთ, რომ თუ განაწილების $F(x)$ ფუნქციას განესაზღვროთ ასეთი სახით $F(x) = \sum_{x_i < x} P_i$, მაშინ იგი გა-

მოდგება დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის დასახასიათებლად.

განვიხილოთ ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი - ნორმალური განაწილება μ და $\sigma((\mu; \sigma))$ პარამეტრებით, რომლის განაწილების ფუნქციაა

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (6.2)$$

ხოლო $M(X) = \mu$ და $D(X) = \sigma^2$ (6.3)

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით განვიხილოთ სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებას ანუ ნორმალურ განაწილებას $(0; 1)$ პარამეტრებით. ცხადია, მისი განაწილების ფუნქცია, (6.2)-ის თანახმად იქნება

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{2}, \quad (6.4)$$

სადაც $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოიძებნება დანართი 1-დან.

აქვე მოვიყვანოთ ერთ-ერთ დებულებას, რომელიც მიუთითებს ნორმალური განაწილების პრაქტიკულ მნიშვნელობაზე:

დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი მიისწრაფის ნორმალური განაწილებისაკენ.

ეთქვას $X_1, X_2, \dots, X_n$ ერთობლივ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდებია, $M(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i=1, \dots, n$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \text{რომლისთვისაც} \quad M(S_n) = n \cdot \mu, \quad \text{ხოლო}$$

$$D(S_n) = n\sigma^2 \quad (\text{იხ. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერ-})$$

სიის თვისებები §5). საკმარისად დიდი n -თვის სამართლიანია შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა

$$P\{S_n < S\} = P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \quad (6.5)$$

$X = \sum_{i=1}^n X_i$ — ჯამისათვის სრულდება (6.5) ფორმულის პი-

რობები, ამიტომ ნებისმიერი მთელი k რიცხვისათვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$\begin{aligned} P\{X > k\} &= P\left\{\frac{X - np}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{k - np}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = 1 - P\left\{\frac{X - np}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{k - np}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{k - np}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების ფუნქციით

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \leq -1, \\ 3x, & \text{როცა } -1 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{როცა } x > 2. \end{cases}$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $[0; 2]$ შუალედიდან.

ამოხსნა. რადგან $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$P(0 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - 0 = 1,$$

რადგან

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

2. უწყვეტი ტიპის X შემოხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

ეიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და $P(0 < X \leq 1)$ ალბათობა.

ამოხსნა. რადგან ამ განაწილების სიმკვრივე $f(x)$ არის

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{2}{3}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწერთ, რომ მათემატიკური ლოდინი

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x dx = \frac{1}{3} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

დისპერსია

$$D(X) = \int_0^1 (x - M(X)) \cdot f(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{9},$$

ხოლო

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = 1.$$

3. სადაზღვევო კომპანიამ დააზღვია 38 წლის ასაკის 3000 ადამიანი იმ პირობით, რომ თუ დაზღვეული ადამიანი მოკვდება 1 წლის განმავლობაში, მაშინ კომპანია იხდის 1000 დოლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არაფერს. რისი ტოლი უნდა იყოს სადაზღვევო გადასახადი, რომ არგაქოტრების ალბათობა იყოს არაუმეტეს 5%-სა, თუ ცნობილია, რომ 38 წლის ყოველი 1000 ადამიანიდან ერთ წელიწადში კვდება 3 ადამიანი.

ამოხსნა. $x=38$, $A=\{38 \text{ წლის ადამიანი იცოცხლებს კიდევ ერთ წელიწადს}\}$, $\bar{A}=\{38 \text{ წლის ადამიანი 1 წლის განმავლობაში მოკვდება}\}$. A ხდომილობის ფარდობითი

სიხშირე $\frac{m}{n} = \frac{997}{1000} \approx P_x$ (ალბათობის სტატისტიკური გან-

საზღერების თანახმად, ფორმულა (1.2)). რადგან

$P_x = P(A) = 0,997$, ამიტომ $q_x = P(\bar{A}) = 1 - 0,997 = 0,003$.

წლის ბოლოს კომპანიას გასაცემი ექნება $S_{3000} = \sum_{i=1}^{3000} X_i$

თანხა, სადაც X_i -ის განაწილების კანონია

$$X_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,997 & 0,003 \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, 3000.$$

$M(X_i) = 0,003$; $D(X_i) = 0,00299$. $X_1, X_2, \dots, X_{3000}$,
ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი
შემთხვევითი სიდიდეებია, ამიტომ

$$M(S_{3000}) = (X_1 + X_2 + \dots + X_{3000}) = 3000 \cdot 0,003 = 9,$$

ხოლო

$$D(S_{3000}) = 3000 \cdot 0,00299 = 8,97 \approx 9.$$

$$\sigma = \sqrt{D(S_{3000})} = 3.$$

სადაზღვევო კომპანიის კაპიტალის რაოდენობაა S .
გამოთვალათ არგაკოტრების ალბათობა (6.5) ფორმუ-
ლის საშუალებით

$$P(S_{3000} \leq S) \approx \Phi\left(\frac{S-9}{3}\right).$$

რადგან, ამოცანის პირობით გაკოტრების ალბათობა
არ უნდა აღემატებოდეს 5%-ს, ანუ $P = \frac{5}{100} = 0,05$ და

$P\{S_{3000} > S\} \leq 0,05$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$P(S_{3000} \leq S) = 1 - P\{S_{3000} > S\} \geq 0,95$, ე.ი. მივიღეთ, რომ

$\Phi\left(\frac{S-9}{3}\right) \geq 0,95$, რაც გვაძლევს საშუალებას, რომ

დანართი 1-დან ვიპოვოთ Φ -ის არგუმენტის მნიშვნელობა
 $\frac{S-9}{3} = 1,645$, საიდანაც მივიღებთ, რომ კომპანიის კაპი-

ტალი $S=13,935$. შესაბამისად, ერთი დაზღვევის გადასახადი იქნება $\frac{S}{n} = \frac{13,935}{3000} = 0,005$.

4. თეიომფრინაის მგზავრთა 70% უპირატესობას ანიჭებს ბიზნეს კლასის სალონს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დამოუკიდებლად არჩეული 50 მგზავრიდან 40-ზე მეტი აირჩევს ბიზნეს კლასის სალონს.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობა $A=\{\text{მგზავრი იყიდის ბიზნეს კლასის სალონის ბილეთს}\}$. X აღნიშნავს იმ მგზავრთა რაოდენობას, რომლებიც ირჩევენ ბიზნეს კლასის სალონს. $p = P(A) = \frac{70}{100}$; $q = P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3$;

$n=50$; $n \cdot p = 35 > 10$.

ამოცანის პირობით გამოსათვლელია ალბათობა

$$P_{50}\{X > 40\} = P_{50}\{40 < X \leq 50\}.$$

მუაერ-ლაპლასის (4.7) ფორმულის გამოყენებით ჩვენ მივიღებთ შემდეგ შეფასებას $P_{50}\{40 < X < 50\} \approx 0,061$, მაგრამ როგორც ახლა ვნახავთ, თუ ჩვენ გამოვიყენებთ ფორმულა (6.6)-ს, მივიღებთ უკეთეს მიახლოებას

$$\begin{aligned} \Phi\{X > 40\} &= P\left\{\frac{X-35}{\sqrt{10,5}} > \frac{(40+0,5)-35}{\sqrt{10,5}}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{X-35}{\sqrt{10,5}} > 1,697\right\} = 1 - \Phi(1,697) \approx 0,045. \end{aligned}$$

მაგალითები

6.1. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ cx^2, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c ; ბ) $M(X)$, $D(X)$, σ_X ; გ) $P\left\{0 < X \leq \frac{3}{2}\right\}$.

6.2. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

იპოვეთ $P\left\{0 \leq X \leq \frac{1}{3}\right\}$.

6.3. X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით $m=M(X)=20$ და $\sigma_X=10$ პარამეტრებით. რას უდრის: ა) $P\{|X-20| < 3\}$; ბ) $P\{20-3 \cdot 10 < X < 20+3 \cdot 10\}$.

6.4. X შემთხვევითი სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული $[-3; 5]$ შუალედში. გამოთვალეთ $P\{0 < X < 6\}$.

6.5. X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალური განაწილების კანონითაა განაწილებული $\mu=4$ და $\sigma^2=4$ პარამეტრებით. t -ს რა მნიშვნელობისთვის სრულდება ტოლობა $P\{X \geq t\} = 0,9$?

6.6. X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალური განაწილების კანონითაა განაწილებული $\mu=5$ და $\sigma^2=16$ პარამეტრებით. α, β, γ -ს რა მნიშვნელობებისთვის სრულდება შესაბამისად ტოლობები: ა) $P\{X \leq \alpha\} = 0,7$; ბ) $P\{X \leq \beta\} = 0,4$; გ) $P\{|X - 5| \leq \gamma\} = 0,8$.

6.7. სადაზღვევო კომპანიამ დააზღვია 50 წლის 2000 ადამიანი ერთი წლის ვადით. ამ პერიოდში კლიენტის გარდაცვალების შემთხვევაში კომპანია იხდის 150 000 ლარს. ცნობილია, რომ $q_{50}=0,007$, გაკოტრების დასაშვები დონეა 5%. შეაფასეთ სადაზღვევო პროცენტული განაკვეთი.

6.8. სადაზღვევო კომპანია მოსახლეობას სთავაზობს დაზღვევის გარკვეულ პირობებს. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ 50 სავარაუდო „კლიენტიდან“ დაზღვევაზე დათანხმდება 40-ზე მეტი ადამიანი, თუ წინა სტატისტიკური მონაცემებით დაზღვევაზე უარი განაცხადა 30%-მა.

პასუხები

6.1. ა) $c = \frac{1}{3}$; ბ) $\frac{14}{9}$; $\frac{13}{162}$; 0,28; გ) $\frac{5}{12}$. 6.2. 0,25. 6.3. ა) 0,2358; ბ) 0,997. 6.4. $\frac{5}{8}$. 6.5. -1,29. 6.6. ა) 7,2; ბ) 6; გ) 5,2.

მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები

§7. მონაცემები, პოპულაცია და შერჩევა. წარტილოვანი შეფასებები

მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდი არის შერჩევითი მეთოდი. ამ მეთოდის ძირითადი პრინციპი გადმოცემული იყო §1-ში განხილულ ე.წ. „ყუთის სქემებში“.

ყველა იმ ერთგვაროვან საგანთა ერთობლიობას, საიდანაც ხდება აღალბედზე საგანთა შერჩევა სტატისტიკურ პოპულაციას (გენერალურ ერთობლიობას) უწოდებენ, ხოლო შემთხვევით შერჩეულ საგანთა ერთობლიობას – შერჩევას.

ჩაატაროთ შემდეგი ანალიზი.

ჩვენ ხშირად გვიწევს ფიზიკური, ტექნიკური, ეკონომიკური და სხვა სისტემების გარკვეული რაოდენობრივი ან თვისობრივ-ხარისხობრივი მაჩასიათებლების შესწავლა. თეორიულად ეს მაჩასიათებლები განიხილე-

ბიან, როგორც რაღაც განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთათვისაც უცნობია ან მთლიანად განაწილების კანონი, ან ცნობილია განაწილების ფორმა, მაგრამ უცნობია მისი პარამეტრები. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს მათი შესწავლა დაკვირვებების (შერჩევითი მნიშვნელობების) საფუძველზე.

მონაცემები წარმოადგენს ობიექტთა (საგანთა) რაიმე სიმრავლის რაოდენობრივ ან თვისობრივ მახასიათებელთა (როგორც შემთხვევით სიდიდეთა) უშუალოდ დაკვირვებულ მნიშვნელობათა ერთობლიობას, მის ყოველ წევრს დაკვირვება წარმოადგენს. აქ დაკვირვება განიხილება, როგორც მონაცემი, დაკვირვებული წერტილი და იგი შეიძლება იყოს: 1) რაოდენობრივი მახასიათებლის უშუალოდ ფიზიკური გაზომვის შედეგი, როგორიცაა მაგალითად: მანძილი, წონა, ტემპერატურა, შრომის ნაყოფიერება, ფირმის მოგება ფულად ერთეულში, მწყობრიდან გამოსულ ხელსაწყოთა რიცხვი, მგზავრთა რაოდენობა, დაზღვეულ პირთა რაოდენობა, რაიმე დაავადებაზე კარანტინის დროს სახელმწიფო გამტარ პუნქტებს გადაცემულ სიებში ამ დაავადებაზე არასაიმედო ქვეყნების ან დაავადებულ პირთა რაოდენობა და სხვ. ან 2) რაიმე ნიშან-თვისების მიხედვით კლასიფიკაციის შედეგი, მაგალითად, უამღლესი ხარისხის, კონდენციური – არაკონდენციური, წუნდებული – არაწუნდებული, დეფექტური – არადეფექტური, დაავადებული – არადაავადებული და სხვ.

მონაცემთა რაოდენობას შერჩევის მოცულობას ეწოდება.

პოპულაცია არის კონკრეტული რაოდენობრივი ან თვისობრივი მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის ერთობლიობა, ანუ ამ მახასიათებლის ყველა შესაძლო დაკვირვებათა სიმრავლე.

პოპულაცია შეიძლება იყოს რეალური – როგორც მაგალითად, 2005 წელში თბილისის აეროპორტში რეგისტრირებულ მგზავრთა ერთობლიობა, ისე კონცეპტუალური ანუ წარმოსახვითი – მაგალითად, თვითმფრინავის რაიმე ნაწილის გარკვეულ პირობებში ქმედითუნარიანობის ხანგრძლივობის შესაძლო მნიშვნელობები.

პოპულაციისაგან განსხვავებით, შერჩევა მხოლოდ ზოგიერთ დაკვირვებულ მნიშვნელობას შეიცავს.

სტატისტიკური კვლევის საბოლოო მიზანს პოპულაციის შესწავლა წარმოადგენს, რასაკვირველია, სასურველია პოპულაციის სრულყოფილი (ყველა წევრის) შესწავლა, რაც ჩრავალ მიზეზთა გამო ვერ ხერხდება. ასეთი მიზეზებია მაგალითად: ეკონომიკური, მატერიალური და დროითი დანახარჯები, უფრო მეტიც, ზოგჯერ დაკვირვების პროცესში ხდება შესწავლილი ობიექტის გაფუჭება-განადგურება, რასაც ადგილი ექნებოდა მაგალითად: ასანთის ღერების ანთების ხარისხის შემოწმების პროცესში და სხვა. ამიტომ ვახდენთ პოპულაციის რაიმე ნაწილის ალაღბედზე გამოყოფას (შემთხვევით შერჩევას) და *შერჩევის* შესწავლის საფუძველზე ვაკეთებთ დასკვნებს პოპულაციის შესახებ. რასაკვირველია, არსებითია, თუ რამდენად რეპრეზენტაციული ანუ წარმომადგენლობითია შერჩევა, ე.ი. რამდენად კარგად წარმოაჩენს იგი პოპულაციის პროპორციებს.

ვთქვათ მოცემულია n მოცულობის $x_1, x_2, \dots, x_n$ შერჩევა რაიმე X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის მქონე პოპულაციიდან (გენერალური ერთობლიობიდან), ამავე დროს დაეუშვათ, რომ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სახე ვიცით, მაგრამ უცნობია ამ განაწილების რაიმე Θ პარამეტრი (ჩვენ შემდეგში შემოვიფარგლებით მხოლოდ იმ შემთხვევებით, როდესაც უცნობი პარამეტრია მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია).

$x_1, x_2, \dots, x_n$ შერჩევის, ანუ X შემთხვევითი სიდიდის n -ჯერ დამოუკიდებელი „გაზომვის“ შედეგების მიხედვით აგებული ნებისმიერი $\Theta_n^* = \Theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც Θ -ს წერტილოვანი „შეფასება“ (Θ -ს მნიშვნელობის მიახლოებითი განსაზღვრა), თუმცა ისმის კითხვა: რომელი შეფასება ჩავთვალოთ „საუკეთესოდ“ და როგორ მივიღოთ ასეთი შეფასება შერჩევითი მონაცემების საშუალებით.

სტატისტიკაში წერტილოვან შეფასებათა სასურველი თვისებებია ამ შეფასებათა გადაუადგილებადობისა და ძალდებულობის თვისება, ამავე დროს, განიხილება შეფასებათა ეფექტურობის კრიტერიუმებიც.

Θ_n^* -ს ეწოდება Θ პარამეტრის გადაუადგილებადი შეფასება, თუ

$$M(\Theta_n^*) = \Theta \quad (7.1)$$

(ტერმინი გადაუადგილებადი და ჩაუნაცვლებელი სინონიმებია).

Θ_n^* -ს ეწოდება Θ -ს ძალდებული შეფასება, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $P\{|\Theta_n^* - \Theta| < \varepsilon\} \rightarrow 1$, როცა $n \rightarrow \infty$.

ვთქვათ X შემთხვევითი სიდიდის n -ჯერ დამოუკიდებელი „გაზომვის“ შედეგად მიღებული $x_1, x_2, \dots, x_n$ მონაცემების სიხშირეთა სტატისტიკური (ემპირიული) განაწილებაა

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{pmatrix},$$

სადაც ვიგულისხმობთ, რომ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ შერჩევის ზრდის მიხედვით გადალაგებული მონაცემებია, რომელსაც ხშირად ვარიაციულ მწკრივსაც უწოდებენ, ხოლო $n_1, n_2, \dots, n_k$ მათი შესაბამისი სიხშირეებია ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$).

$n_i (i=1, 2, \dots, k)$ არის x_i -ის შესაბამისი სიხშირე ნიშნავს, რომ ვარიაციული მწკრივიდან მონაცემი X შემთხვევითი სიდიდის შერჩევისას განმეორდა n_i -ჯერ ანუ დაკვირვებებში ხდომილობა ($X=x_i$) მოხდა n_i -ჯერ.

დავწეროთ $x_1, \dots, x_n$ მონაცემთა ფარდობით სიხშირეთა სტატისტიკური (ემპირიული) განაწილების კანონი

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix},$$

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = \frac{1}{n} (n_1 + \dots + n_k) = 1.$$

თვალსაზრისითვის სტატისტიკურ (ემპირიულ) განაწილების კანონს ხშირად გამოსახავენ სხვადასხვა

სახის დიაგრამებით. როგორცაა სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) პოლიგონი, ჰისტოგრამა და სხვ.

X შემთხვევითი სიდიდის (პოპულაციის) უცნობი $M(X)$ მათემატიკური ლოდინისათვის გამოიყენება შეფასება

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i. \quad (7.2)$$

სტატისტიკური განაწილების დისპერსიას აღვნიშნავთ S^2 -ით, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 n_i, \quad (7.3)$$

ხოლო X შემთხვევითი სიდიდის უცნობი $D(X)$ დისპერსიისათვის გამოიყენება შეფასება

$$\begin{aligned} \sigma^{2*} &= \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - \frac{n}{n-1} \bar{X}^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური განაწილება

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ $\bar{X}$ და σ^{2*}

ამოხსნა. გამოვთვალოთ $\bar{X}$ -ის მნიშვნელობა. რადგან $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ და $n_1=1$, $n_2=1$, $n_3=3$, ხოლო $n=n_1+n_2+n_3=5$, ამიტომ (7.2) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$\bar{X} = \frac{1}{5} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3) = \frac{12}{5}$$

ახლა გამოვთვალოთ σ^2 -ის მნიშვნელობა (7.4) ფორმულის საშუალებით

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} (1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 3) - \frac{5}{4} \left(\frac{12}{5} \right)^2 = \frac{4}{5}.$$

მაგალითები

7.1. იპოვეთ $\bar{X}$ და σ^2 თუ მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური განაწილებები:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

გ) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

დ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

ე) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

ვ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

პასუხები

- 7.1. ა) $1\frac{3}{6}$, $2\frac{9}{30}$; ბ) 3 , $1\frac{10}{9}$; გ) $\frac{3}{5}$, $9\frac{2}{45}$;
 დ) 2 , $\frac{5}{3}$; ე) $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{12}$; ვ) $\frac{1}{6}$, $2\frac{9}{30}$.

§8. ნდობის ინტერვალი

შერჩევითი ერთობლიობის მცირე მოცულობის შემთხვევაში წერტილოვანი შეფასებები ზოგჯერ საგრძნობლად განსხვავდებიან შესაფასებელი პარამეტრებისაგან. აქის გამო უმჯობესია მათი შეფასება ინტერვალით.

ეთქვას Θ^* არის Θ პარამეტრის რაიმე შეფასება.

განვიხილოთ ალბათობა:

$$P(|\Theta - \Theta^*| < \delta) = \gamma$$

ანუ რაც იგივეა

$$P(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) = \gamma \quad (8.1)$$

δ -ს ეწოდება შეფასების სიზუსტე, γ -ს საიმედოობის ალბათობა, ანუ საიმედოობის ხარისხი, ხოლო $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ -ს ნდობის ინტერვალი. ჩვეულებრივ γ -ს იღებენ ერთთან ახლოს და განსაზღვრავენ δ -ს, შეადგენენ ნდობის ინტერვალს, რომელიც γ ალბათობით დაფარავს Θ პარამეტრს.

ნორმალურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალი მოცემული σ -სიგმასათვის არის

$$\left(\bar{X} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right), \quad (8.2)$$

სადაც t ლაპლასის ფუნქციის არგუმენტის ის მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$; t -ს მნიშვნელობას ვიპოვით დანართი 1-დან.

უცნობი σ -სათვის მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალს ექნება სახე

$$\left(\bar{X} - t(\gamma) \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t(\gamma) \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \right), \quad (8.3)$$

სადაც $t(\gamma) = t(n; \gamma)$ -ის მნიშვნელობას ვიპოვით დანართი 2-დან.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ნდობის ინტერვალი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინისათვის, თუ

$$\sigma=4, n=80, \bar{X}=3, \gamma=0,95.$$

ამოხსნა. რადგან $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,475$, ამიტომ დანართი

1-დან შეგვიძლია ვიპოვოთ t -ს მნიშვნელობა, კერძოდ,

$t=1,96$. შევიტანოთ მიღებული და მოცემული მნიშვნელობები (8.2) ფორმულაში

$$\left(3 - \frac{1,96 \cdot 4}{\sqrt{80}}; 3 + \frac{1,96 \cdot 4}{\sqrt{80}} \right),$$

რომლის გამარტივება მოგვცემს ნდობის ინტერვალს $(2,1; 3,9)$.

2. ვიპოვოთ ნორმალურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალი $\gamma=0,95$ ალბათობით, თუ ცნობილია შერჩევის სტატისტიკური განაწილება

$$X \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ $\bar{X}$ და σ^* -ის მნიშვნელობები შესაბამისად (7.2) და (7.4) ფორმულების საშუალებით. გვექნება

$$\bar{X} = \frac{1}{10}(-2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 0,1,$$

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \frac{1}{9}(4 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 10 \cdot 0,01) = 2,99 \Rightarrow \sigma^* = \\ &= \sqrt{2,99} \approx 1,73 \end{aligned}$$

ხოლო დანართი 2-დან ამოვწეროთ $t(10; 0,95)$ -ის მნიშვნელობა $t(10; 0,95)=2,26$. მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (8.3) ფორმულაში და გავამარტივოთ, მივიღებთ საძიებელ ინტერვალს $(-1,14; 1,34)$.

3. შემნახველი და სესხის გამცემი ასოციაციები, რომლებიც აფინანსებენ საცხოვრებელი სახლების შესყიდვათა დიდ რაოდენობას გარკვეულ რეგიონში, საჭიროებენ შემდეგ ინფორმაციას: როგორ ამცირებს საკრედიტო გადასახადები მყიდველის წმინდა შემოსავალს სახლის შესყიდვის პირველი წლის განმავლობაში (გაითვალისწინება მხოლოდ ის მყიდველები, რომლებმაც პირველად შეიძინეს საცხოვრებელი სახლი). შერჩეულ იქნა ბოლო წლების 35 კრედიტის ამღები და ყოველი მათგანისათვის გამოთვლილ იქნა თვის საკრედიტო გადასახადის პროცენტული წილი წმინდა შემოსავალში $\left(100 \cdot \frac{\text{გადასახადი}}{\text{შემოსავალი}}\right)$. მიღებული მონაცემების საფუძველზე

გამოთვლილ იქნა შერჩევითი საშუალო, $\bar{X}=24,7$. დაეუშვათ, რომ პროცენტული წილი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, უცნობი საშუალოთი და სტანდარტული გადახრით $\sigma=3$ და ავაგოთ $p=0,9$ დონის მქონე ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

ამოხსნა. რადგან $\bar{X}=24,7$; $n=35$, $\sigma=3$, ხოლო

$$\Phi(t) = \frac{0,9}{2} = 0,45 - \text{თვის დანართი } t - \text{დან } t=1,65, \text{ ამიტომ (8.2)}$$

ფორმულის თანახმად ნდობის ინტერვალი იქნება

$$\left(24,7 - \frac{3}{\sqrt{35}} \cdot 1,65; 24,7 + \frac{3}{\sqrt{35}} \cdot 1,65\right)$$

ანუ

$$(23,9; 25,5).$$

4. უძრავი ქონების აგენტს მენეჯერმა დააეღლა დაეზუსტებინა გარკვეული ტიპის საცხოვრებელი სახლის გასაყიდი ფასი. აგენტმა სააგენტოს არქივში მოიძია ბოლო ერთი წლის პერიოდში გაყიდული ამ ტიპის სახლების ფასები. სულ გაყიდული აღმოჩნდა 10 სახლი შესაბამისად ფასებით (1000\$-ში)

14; 20; 205; 15; 20; 21; 15,5; 20; 14; 16.

ამ მონაცემების საფუძველზე მან არა მარტო იპოვნა აღნიშნული ტიპის საცხოვრებელი სახლის ღირებულების წერტილოვანი შეფასება – საშუალო გასაყიდი $\bar{X}$ ფასი, არამედ მისთვის ააგო 99%-იანი სანდოობის ნდობის ინტერვალი.

ამოხსნა. სახლის ღირებულება აღვნიშნოთ X -ით. $n=10$ ამონაკრეფის მოცულობაა. ამონაკრეფის მიხედვით შევადგინოთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების კანონი და გამოთვლებისათვის საჭირო ცხრილი

1	2	3	4	5	6	7
x_i ვარიანტი	n_i სიხშირე	$\frac{n_i}{n}$ ფარდობითი სიხშირე	$x_i \cdot \frac{n_i}{n}$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})^2 \cdot \frac{n_i}{n}$
14	2	$\frac{2}{10} = 0,2$	2,8	-3,6	12,96	2,592
15	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	1,5	-2,6	6,76	0,676

1	2	3	4	5	6	7
15.5	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	1,55	-2,1	4,41	0,441
16	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	1,6	-1,6	2,56	0,256
20	3	$\frac{3}{10} = 0,3$	6,0	2,4	5,76	1,728
20.5	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	2,05	2,9	8,41	0,841
21	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	2,1	3,4	11,56	1,156
Σ	$n=10$	1	$\bar{X}=17,6$			$S^2=7,69$

$\bar{X}$ საშუალო მნიშვნელობისა და ემპირიული S^2 დისპერსიის გამოსათვლელად ვისარგებლეთ (7.2), (7.3) ფორმულებით, მივიღეთ

$$\bar{X}=17,6, S^2=7,69.$$

შესწორებულ ემპირიულ დისპერსიას გამოთვლით ფორმულით

$$S'^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{10}{9} \cdot 7,69 \approx 8,55. \quad (n=10\text{-თვის})$$

ჩაეთვალოთ, რომ X განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით უცნობი მათემატიკური $M(X)=m$ ლოდინითა და დისპერსიით $D(X)=\sigma^2$. მაშინ $\gamma=0,99$ -ის სანდოობის ნდობის ინტერვალს ექნება სახე

$$\left(\bar{X} - t_{\gamma} \frac{S'}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\gamma} \frac{S'}{\sqrt{n}} \right).$$

რადგან დანართი 2-ის მიხედვით $t_{0,99}=3,25$, ამიტომ მივიღებთ

$$\left(17,6 - 3,25 \cdot \sqrt{\frac{8,55}{10}}; 17,6 + 3,25 \cdot \sqrt{\frac{8,55}{10}} \right),$$

რომლის გამარტივებაც მოგვცემს საძიებელ ინტერვალს $(14,6; 20,6)$.

მაგალითები

8.1. იპოვეთ ნდობის ინტერვალი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინისათვის, თუ

1. $\sigma=5$, $n=100$, $\bar{X}=20$, $\gamma=0,95$;

2. $\sigma=4$, $n=121$, $\bar{X}=20$, $\gamma=0,95$;

3. $\sigma=10$, $n=225$, $\bar{X}=30$, $\gamma=0,95$;

4. $\sigma=8$, $n=16$, $\bar{X}=10$, $\gamma=0,95$;

5. $X \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma=0,95$;

6. $X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$, $\gamma=0,95$;

7. $X \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\gamma=0,95$;

$$8. \quad X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 10 & 20 & 5 \end{pmatrix}, \quad \gamma=0,95;$$

8.2. სადაზღვევო კომპანიის აქტუარს დააეღღეს ჩაატაროს „პრემიების“ კატალოგის რევიზია, რათა შეაფასოს იმ „მოთხოვნათა“ საშუალო სიდიდე, რომლებიც გამოწვეულია სახანძრო შემთხვევებით გარკვეულ საცხოვრებელ უბანში. შემთხვევითი ამოკრეფის (შერჩევის) საფუძველად აიღეს ბოლო ერთი წლის ანგარიშსწორების მონაცემები. სულ წარმოდგენილი იქნა 15 სახანძრო შემთხვევა, რომელთა „მოთხოვნების“ საშუალო სიდიდე აღმოჩნდა $\bar{X}=73249\$$, შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი $S'=37246\$$. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის, თუ მოთხოვნათა განაწილების კანონი ნორმალური განაწილებისაა.

8.3. ბანკის მენეჯერს სურს შეაფასოს დეპოზიტების საშუალო მოცულობა კლიენტების გარკვეული კლასისათვის. აღაღებდზე შეამოწმა 400 ასეთი დეპოზიტი. ამონაკრეფის საშუალომ შეადგინა $\bar{X}=6,2 \cdot 10^3\$$, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრაა $S'=2,2 \cdot 10^3\$$. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი დეპოზიტების საშუალო მოცულობისათვის, თუ ჩათვლით, რომ სახეზეა ნორმალური განაწილების კანონი.

8.4. ბანკის კლიენტებისაგან შემთხვევით შეირჩა 60 კლიენტი და შეგროვებულ იქნა თითოეული მათგანის საბალანსო ანგარიშზე მყოფი თანხების სიდიდე, რის სა-

ფუძველზეც გამოთვლილ იქნა შერჩევითი საშუალო $\bar{X}=1499,9\$,$ სტანდარტული გადახრა $S'=596,9\$.$ ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსა და დისპერსიისათვის, თუ საბაღანსო ანგარიშების პოპულაცია ნორმალური კანონითაა განაწილებული.

8.5. ფარმაცევტული წარმოების პროდუქციის ხარისხის კონტროლის მენეჯერმა, წინა ისტორიიდან გამომდინარე იცის, რომ რაღაც პრეპარატის ყოველი ცალკეული კაფსულა შეიცავს მინარევთა გარკვეულ დოზას, ამასთან, დოზები მერყეობს. კონტროლის მექანიზმი არეგულირებს მინარევთა დოზის საშუალო დონეს. პერიოდულად კონტროლის მექანიზმი მწყობრიდან გამოდის და შესაძლოა, მინარევთა დოზის საშუალო დონე აღარ აღმოჩნდეს დასაშვებ ფარგლებში. კონტროლის მექანიზმის შემოწმების მიზნით მზა პროდუქციიდან აიღება სხვადასხვა მოცულობის შემთხვევითი შერჩევა და აიგება ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის. ითვლება, რომ მინარევთა დონის ვარიაბულობა დაახლოებით მუდმივია და მოიცემა სტანდარტული გადახრით, $\sigma=2,5$ (დოზის ერთეული).

შერჩევების მიხედვით მიღებული შედეგები საშუალო არითმეტიკულისათვის (არითმეტიკული საშუალოსათვის) შემდეგია:

1) $n=25, \bar{X}_n=153,4;$ 2) $n=100, \bar{X}_n=125,6;$ 3) $n=200, \bar{X}_n=148,9;$ 4) $n=500, \bar{X}_n=206,4.$

ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის და აღწერეთ, თუ როგორ იცვლება ნდობის

ინტერვალის სიგრძე დაკვირვებათა რიცხვის ზრდასთან ერთად.

პასუხები

8.1. 1) (19,02; 20,98), 2) (19,3; 20,7), 3) (28,7; 31,3), 4) (6,08; 13,92), 5) (-2,5; 4,9), 6) (-0,46; 0,46), 7) (-0,5; 1,3), 8) (-0,34; 0,34). 8.2. (69020,4; 77477,6). 8.3. (5984; 6416). 8.4. (1301,41; 1698,39), 8.5. 1) (152,42; 154,38), 2) (125,11; 126,09), 3) (148,55; 149,25), 4) (206,18; 206,62), მკირდება.

ზოგიერთი ეკონომიკური მაჩვენებლების პროგნოზირება

§9. ზოგიერთი განაწილების კვანტილები

შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლები მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია სრულად ვერ აღწერენ მათ, ვინაიდან ვერ მიუთითებენ ალბათობებს, რომელთაგანაც შემთხვევითი სიდიდე იღებს ამა თუ იმ მნიშვნელობებს. სრულ აღწერას ვიღებთ მაშინ, თუ ცნობილია განაწილების სახე და მისი პარამეტრები. თუ ისინი ცნობილია, მაშინ ყოველ $P(0 \leq p \leq 1)$ ალბათობისათ-

ვის შეიძლება განვსაზღვროთ $K^{-1}(p)$ კვანტილი – რომელიც არის ისეთი რიცხვი, რომელსაც არ აღემატება შემთხვევითი სიდიდე p ალბათობით.

როგორც ცნობილია, ნორმალური განაწილების პარამეტრებია $M(X)=\mu$ და $\sigma=\sqrt{D(X)}$, ამიტომ ამ განაწილებას აღნიშნავენ $\Phi(\mu; \sigma^2)$ სიმბოლოთი [4]. თუ ამ განაწილებისათვის $M(X)=0$ და $D(X)=1$, მაშინ მისი კვანტილი აღინიშნება $\Phi^{-1}(p)$ -თი, რომლის მნიშვნელობებიც მოცემულია დანართი 3-ში.

საზოგადოდ კვანტილი

$$\Phi^{-1}(\mu; \sigma^2) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p). \quad (9.1)$$

მაგ. ვთქვათ შემთხვევითი სიდიდის ნორმალური განაწილებაა $\Phi(1; 9)$, ხოლო $p=0.2$. ვიპოვოთ ამ განაწილების კვანტილი.

ამოხსნა. დანართი 3-დან ეპოულობთ $\Phi^{-1}(0.2) = -2.0537$ შევიტანოთ მიღებული და მოცემული

პარამეტრების $\mu=1$ და $\sigma^2=9$ მნიშვნელობები (9.1) ფორმულაში, მივიღებთ კვანტილის მნიშვნელობას

$$\Phi^{-1}(\mu; \sigma^2) = 1 - 3 \cdot 2.0537 = -5.1611.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ უმეტეს შემთხვევაში ეკონომიკური მაჩვენებლების განაწილება ექვემდებარება ნორმალურ კანონს.

თუ $X_1, X_2, \dots, X_v$ არიან $\Phi(0; 1)$ ნორმალური განაწილების მქონე დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები და $M(X_i)=0$, $D(X_i)=1$, $i=1, \dots, v$, მაშინ

$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_v^2$ -ის გააჩნია χ^2 - განაწილება თავისუფლების v ხარისხებით, რომელსაც აღნიშნავენ $K(v)$ სიმბოლოთი, ხოლო კვანტილის p ალბათობით - $K^{-1}(p; v)$, რომლის მნიშვნელობები მოცემულია დანართი 4-ში.

მაგალითად, შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილებაა $K(4)$, $p=0,9$ ალბათობით არ აღემატება $K^{-1}(0,9; 4) = 7,78$ -ს.

ნორმალურ განაწილებასთანაა დაკავშირებული სტიუდენტის განაწილებაც. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, შესაბამისად $\Phi(0; 1)$ და $K(v)$ განაწილებით, მაშინ $\sqrt{v} X/Y$ -ს აქვს სტიუდენტის განაწილება თავისუფლების v - ხარისხებით, რომელიც აღინიშნება $S(v)$ სიმბოლოთი, ხოლო მისი კვანტილი p ალბათობით - $S^{-1}(p; v)$. კვანტილის მნიშვნელობები მოცემულია დანართი 5-ში. კერძოდ, $S^{-1}(0,8; 9) = 0,883$.

ვთქვათ σ^2 არის σ^2 პარამეტრის ისეთი შეფასება, რომ $v\sigma^2/\sigma^2$ შეფარდებას აქვს χ^2 - განაწილება თავისუფლების v ხარისხებით, მაშინ σ^2 -სათვის ნდობის ინტერვალს p ნდობის ალბათობით აქვს შემდეგი სახე

$$\left(0; v\sigma^2 \left(K^{-1}(1-p; v)\right)^{-1}\right) \quad (9.2)$$

ვთქვათ μ^* და σ^* არის μ და σ პარამეტრების ისეთი შეფასებები, რომ $\sqrt{C}(\mu - \mu^*)/\sigma^*$ ($C = \text{const}$) შეფარდებას აქვს სტიუდენტის განაწილება თავისუფლების v

ხარისხით, მაშინ μ -ს ნდობის ინტერვალს, p ნდობის ალბათობით, აქვს შემდეგი სახე

$$\left(\mu^* - \frac{\sigma^*}{\sqrt{c}} S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; \nu \right); \mu^* + \frac{\sigma^*}{\sqrt{c}} S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; \nu \right) \right). \quad (9.3)$$

§10. ნდობის ინტერვალის აგება პროგნოზირებადი ეკონომიკური მაჩვენებლისათვის

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ეთქვათ, ცნობილია ექვსი თვის განმავლობაში ავიაგზავრთა ყოველთვიური სტატისტიკური მონაცემები

თვე	თებერე	მარტი	აპრილი	მაისი	ივნისი	ივლისი
ავიაგზავრთა რაოდენობა	541	550	571	595	620	625

მოვახდინოთ ავიაგზავრთა რაოდენობის პროგნოზირება სექტემბრის თვისათვის, წრფივი რეგრესიული მოდელით (იხ. [10] §8)

$$Y_k^* = C_0^* + C_1^* t_k, \quad k=1, 2, \dots, 6, \quad (10.1)_1$$

C_0^* და C_1^* პარამეტრები განვსაზღვროთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი

k	t_k	t_k^2	Y_k	$t_k Y_k$
1	1	1	541	541
2	2	4	550	1100
3	3	9	571	1713
4	4	16	595	2380
5	5	25	620	3100
6	6	36	625	3750
n=6	$\sum_{k=1}^6 t_k = 21$	$\sum_{k=1}^6 t_k^2 = 91$	$\sum_{k=1}^6 Y_k = 3502$	$\sum_{k=1}^6 t_k Y_k = 12584$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$C_1^* = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n t_k Y_k - \sum_{k=1}^n t_k \cdot \sum_{k=1}^n Y_k}{n \cdot \sum_{k=1}^n t_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n t_k \right)^2} = \frac{6 \cdot 12584 - 21 \cdot 3502}{6 \cdot 91 - 21^2} = 18,69.$$

$$C_0^* = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n Y_k - C_1^* \cdot \sum_{k=1}^n t_k \right) = 6(3502 - 18,69 \cdot 21) = 518,25.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (10.1) ფორმულაში და გავითვალისწინოთ, რომ $t_k=8$. გვექნება

$$Y_g^* = 518,25 + 18,69 \cdot 8 = 667,77.$$

ამგვარად მივიღეთ, რომ სექტემბერში ავიაგზავრთა პროგნოზირებული რაოდენობა იქნება 667.

განივიხილოთ შემდეგი მათემატიკური მოდელი

$$Y_k = C_0 + C_1 t_k + X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10.1)_2$$

სადაც X_k შემთხვევითი სიდიდეებია. ვიგულისხმობთ, რომ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და ყოველი მათგანის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, ხოლო დისპერსიები ყველასათვის ერთიდაიგივე რიცხვია σ^2 . ამგვარად გვაქვს

$$M(X_k) = 0, \quad D(X_k) = \sigma^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.2)$$

(10.1)₂ და (10.2) ფორმულები განსაზღვრავენ ჩვენს მოდელს, რომლის თანახმადაც

$$M(Y_k) = C_0 + C_1 t_k, \quad M(Y_k) = \sigma^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.3)$$

სამართლიანია, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის შემდეგი ძირითადი შედეგები:

1. C_0^* და C_1^* შეფასებები წარმოადგენს C_0 და C_1 პარამეტრების გადაუადგილებად შეფასებებს, რომელთაც გააჩნიათ უმცირესი დისპერსიები, ყველა სხვა გადაუადგილებად შეფასებებს შორის, რომლებიც წარმოადგენენ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ სტატისტიკური მონაცემების წრფივ ფუნქციებს.

2. უცნობი σ^2 დისპერსიის გადაუადგილებადი შეფასებაა

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n [Y_k - (C_0^* + C_1^* t_k)]^2 \quad (10.4)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $Y_k^* = C_0^* + C_1^* t_k$ ფორ-
მულით გამოთვლილი პროგნოზი წარმოადგენს
 $M(Y_k) = C_0 + C_1 t_k$ მათემატიკური ლოდინის
გადაუადგილებად შეფასებას, რომლის დისპერსია უმცო-
რესია და გამოითვლება ფორმულით

$$D(Y_k^*) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\left(t_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n t_k \right)^2} \right). \quad (10.5)$$

ამ ფორმულაში იგულისხმება, რომ σ^2 ცნობილი
სიდიდეა, წინააღმდეგ შემთხვევაში, უნდა ეისარგებლოთ
ფორმულით

$$D'(Y_k^*) = \sigma^{2*} \left(\frac{1}{n} + \frac{\left(t_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n t_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n t_k \right)^2} \right). \quad (10.6)$$

ახლა შევთანხმდეთ, რომ X შემთხვევით სიდიდეს
გააჩნია ნორმალური განაწილება $\Phi(0; \sigma^2)$. ამ
შემთხვევაში კიდევ დამატებით სამართლიანია შემდეგი
მტკიცებულებები:

3. C_0^* და C_1^* შეფასებებს გააჩნიათ უმცირესი დისპერსიები C_0 და C_1 პარამეტრების ყველა შეფასებებს შორის.

4. $(n-2)\sigma^{*2}/\sigma^2$ შეფარდებას გააჩნია χ^2 - განაწილება $K(n-2)$; რაც საშუალებას გვაძლევს (9.2) ფორმულის თანახმად σ^2 -სათვის ავაგოთ ნდობის ინტერვალი

$$\left(0; (n-2)\sigma^{*2} \left(K^{-1}(1-p; n-2)\right)^{-1}\right). \quad (10.7)$$

5. p ნდობის ალბათობისათვის $M(Y_k) = C_0 + C_1 t_k$. t_k -ს მნიშვნელობის შესაბამისი მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალი არის

$$\left(Y_k^* \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-2\right) \sqrt{D^*(Y_k^*)}\right). \quad (10.8)$$

6. p ნდობის ალბათობისათვის t_k -ს შესაბამისი $Y_k = C_0 + C_1 t + X_k$ - ცვლადისათვის ნდობის ინტერვალი იქნება

$$\left(Y_k^* \pm S^{-1} \left(\frac{1+p}{2}; n-2\right) \sqrt{\sigma^{*2} + D^*(Y_k^*)}\right). \quad (10.9)$$

შემდგომში ეკონომიკური მაჩვენებლის ფაქტიური მნიშვნელობის პროგნოზირებისას ნდობის ინტერვალს ავაგებთ სწორედ (10.9) ფორმულის საშუალებით.

შეგადგინოთ შემდეგი ცხრილი

k	t _k	C _i t _k	Y _k [*] = C ₀ + C _i t _k	Y _k	Y _k - Y _k [*]	(Y _k - Y _k [*]) ²
1	1	18,69	536,94	541	4,06	16,48
2	2	37,38	555,63	550	-5,63	31,7
3	3	56,07	574,32	571	-3,32	11,02
4	4	74,76	593,01	595	1,99	3,96
5	5	93,45	611,7	620	9,3	68,89
6	6	112,14	630,39	625	-5,39	29,05
					$\sum_{k=1}^6 (Y_k - Y_k^*) =$ = 0,01	$\sum_{k=1}^6 (Y_k - Y_k^*)^2 =$ = 161,1

(10.4) ფორმულის თანახმად

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-2} \cdot 161,1 = 40,28,$$

$$\text{საიდანაც } \sigma^* = \sqrt{\sigma^{2*}} = \sqrt{40,28} = 6,35.$$

როგორც ზემოთ განესაზღვრეთ, სექტემბრის თვეში ავიმგზავრთა რაოდენობის პროგნოზია $Y_8^* = 667,77$.

ამ პროგნოზის დისპერსია გამოთვალეთ (10.6) ფორმულით

$$D^*(Y_8^*) = 40,28 \left(\frac{1}{6} + \frac{(8-3,5)^2}{91-73,5} \right) = 40,28 \cdot 1,32 = 70,03.$$

ვიპოვოთ σ^2 -ის ნდობის ინტერვალი $p=0,5$ ალბათობით. დანართი 4-დან ეპოულობთ

$$K^{-1}(1-0,5; 6-2) = K^{-1}(0,5; 4) = 3,36.$$

საძიებელი ნდობის ინტერვალი (10.7) ფორმულის თანახმად იქნება

$$(0; 4 \cdot 40,28 \cdot 3,36) = (0; 47,95).$$

ვიპოვოთ $M(Y_8)$ მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალი $p=0,99$ ნდობის აღბათობით. დანართი 5-დან ვპოულობთ

$$S^{-1}\left(\frac{1+0,99}{2}; 8-2\right) = S^{-1}(0,995; 6) = 3,707$$

მაშასადამე (10.8) ფორმულის თანახმად ნდობის ინტერვალი $t_k=8$ -ის შესაბამისი მათემატიკური ლოდინისათვის იქნება

$$(667,77 \pm 3,707 \cdot \sqrt{70,03}) = (667,77 \pm 31,03) = (636,74; 698,8).$$

და ბოლოს, ნდობის ინტერვალი $p=0,99$ ნდობის აღბათობით $Y_k = C_0 + C_1 t + X_k$ -სათვის (10.9) ფორმულის თანახმად იქნება

$$(667,77 \pm 3,707 \cdot \sqrt{40,28 + 70,03}) = (667,77 \pm 38,934) = (628; 706).$$

აქვე შევიჩინავთ, რომ ასევე შეიძლება მოხდეს ავიამგზავრთა სარეგისტრაციო დახლების საჭირო რაოდენობის, საპაერო ხომალდების ინტენსივობის, მომსახურე ინჟინერ-ტექნიკური პერსონალის აუცილებელი რაოდენობისა და სხვა ეკონომიკური მაჩვენებლების პროგნოზირება და მათთვის შესაბამისი ნდობის ინტერვალების აგება.

§11 კორელაციური დამოკიდებულება.

რეგრესიის წრის განტოლება

კორელაცია მათემატიკურ სტატისტიკაში არის ალბათური (სტატისტიკური) დამოკიდებულება ორ სიდიდეს შორის, რომელთა შორისაც არ არის ფუნქციონალური დამოკიდებულება ანუ ერთი სიდიდის რაიმე მნიშვნელობას შეესაბამება მეორე სიდიდის რაიმე შესაძლო მნიშვნელობათა აგარკვეული სიმრავლე და პირიქით; და უფრო ზუსტად: კორელაციური დამოკიდებულების დროს ერთი სიდიდის რაიმე მნიშვნელობას შეესაბამება მეორე სიდიდის რაიმე განაწილების კანონი და პირიქით.

ვთქვათ X შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობები, ხოლო Y -ს - $y_1, y_2, \dots, y_m$ კორელაციური დამოკიდებულების დროს X -ის რაიმე x_i ($i = 1, \dots, n$) მნიშვნელობას შეესაბამება Y -ის განაწილების კანონი

$$Y \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1^{(i)} & q_2^{(i)} & \dots & q_m^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (11.1)$$

სადაც $q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, \dots, q_m^{(i)}$ -ით აღნიშნულია $(Y=y_1), (Y=y_2), \dots, (Y=y_m)$ ხდომილობების პირობით ალბათობები იმ პირობით, რომ $(X=x_i)$ ხდომილობას უკვე ჰქონდა ადგილი. ანალოგიურად Y შემთხვევით სიდიდეს შეესაბამება X -ის განაწილების კანონი

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1^{(j)} & p_2^{(j)} & \dots & p_n^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (11.2)$$

სადაც $p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots, p_n^{(j)}$ -ით აღნიშნულია $(X=x_1), (X=x_2), \dots, (X=x_n)$ ხდომილობების პირობითი ალბათობები იმ პირობით, რომ $(Y=y_j)$ ხდომილობას უკვე ჰქონდა ადგილი.

ვთქვათ X დისკრეტული შემთხვევით სიდიდის ყოველი x მნიშვნელობისათვის განსაზღვრულია Y შემთხვევით სიდიდის მათემატიკური ლოდინი

$$M(X|Y=y) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i|y),$$

იგი წარმოადგენს x -ის ფუნქციას, რომელსაც ასე აღვნიშნავთ

$$m_x(y) = M(X|Y=y). \quad (11.3)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $m_y(x)$ ფუნქცია

$$m_y(x) = M(Y|X=x), \quad (11.4)$$

$$\text{სადაც } M(Y|X=x) = \sum_{j=1}^m y_j P(y_j|x).$$

(11.3) და (11.4) განტოლებებს ეწოდებათ რეგრესიის განტოლებები შესაბამისად X -ისა Y -ის მიმართ და Y -ისა X -ის მიმართ.

ნორმალურად განაწილებული X და Y შემთხვევითი სიდიდეებისა თვის(11.3) და (11.4) განტოლებები წრფეებია.

რეგრესიის წრფის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$y - m_y = P_{y|x} (x - m_x), \quad (11.5)$$

$$x - m_x = P_{x|y} (y - m_y).$$

ამ წრფეთა საკუთხო კოეფიციენტებს $P_{y|x}$ და $P_{x|y}$ -ს ეწოდებათ წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტები, ხოლო ρ -ს რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\rho = \frac{M[(y - m_y)(x - m_x)]}{\sigma_y \sigma_x} \quad (11.6)$$

ეწოდება კორელაციის კოეფიციენტი X -სა და Y -ს შორის. ამასთან

$$P_{y|x} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad P_{x|y} = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

ამიტომ

$$\rho = \pm \sqrt{P_{y|x} P_{x|y}} \quad (11.7)$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ $|\rho| \leq 1$. თუ კორელაციის კოეფიციენტი $\rho > 0$ მაშინ, რეგრესიის წრფეები გადახრილია მარჯვნივ, როცა $\rho < 0$ - მარცხნივ; როცა $\rho = 1$, მაშინ კორელაციური დამოკიდებულება X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის წრფივია. იმ შემთხვევაში, როცა $\rho = 0$, მაშინ კორელაციური დამოკიდებულება არ არსებობს ე.ი. დამოკიდებულება x -სა და y -ს შორის ფუნქციონალურია.

თუ გავიხსენებთ X შემთხვევით სიდიდის უცნობი მათემატიკური ლოდინის, (ფორმულა (7;2)), საშუალო კვადრატული გადახრის (ფორმულა (7;4)) შეფასებებს, მაშინ განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე

$$y - \overline{m}_y = \bar{\rho} \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x} (x - \overline{m}_x), \quad (11.8)_1$$

$$x - \overline{m}_x = \bar{\rho} \frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y} (y - \overline{m}_y), \quad (11.8)_2$$

სადაც

$$\begin{aligned} \overline{m}_x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i; \quad \overline{m}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_i n_i; \\ \overline{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{m}_x)^2; \quad \overline{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{m}_y)^2; \\ \bar{\rho} &= \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{m}_x) (y_i - \overline{m}_y)}{\overline{\sigma}_x \cdot \overline{\sigma}_y}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

გამალითავის აპოსნის ნიშნები

1. გამო თვალესერთერთი სატელევიზიო არხის ვიდეო და ხმის არხების მგრძნობიერება (მიკროვოლტებში) 20 ტელევიზიისათვის.

მათი შესაბამისი მონაცემებია

x	y	x	y	x	y	x	y
450	230	450	235	435	225	435	225
435	240	460	240	460	215	460	215
440	225	440	220	455	240	435	220
455	240	445	235	460	245	455	235
455	225	440	230	420	210	450	240

შევადგინოთ რეგრესიის წრფის განტოლება x -სა y -ის მიმართ.

ამოხსნა.

ამოვწეროთ რეგრესიის წრფის ზოგადი სახის განტოლება x -სა y -ის მიმართ (11.8) 2 ფორმულა

$$x - \bar{m}_x = \bar{\rho} \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_y} (y - \bar{m}_y). \quad (11.10)$$

გამოვთვალოთ მასში შემავალი უცნობი კოეფიციენტები (11.9) ფორმულების საშუალებით. გვქვია

$$\begin{aligned} \bar{m}_x &= \frac{1}{20} (450 \cdot 3 + 435 \cdot 4 + 440 \cdot 3 + 455 \cdot 4 + 460 \cdot 4 + \\ &+ 445 + 420) = 446,75; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_y &= \frac{1}{20} (230 \cdot 2 + 240 \cdot 5 + 225 \cdot 4 + 235 \cdot 3 + 220 \cdot 2 + \\ &215 \cdot 2 + 245 + 210) = 229,5. \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - 446,75)^2} \approx 11,3;$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (y_i - 229,5)^2} \approx 10,1.$$

$$\bar{\rho} = \frac{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - 446,75) (y_i - 229,5)}{11,3 \cdot 10,1} = \frac{46,97}{114,13} = 0,4.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (11.10) განტოლებაში და გავამარტივოთ. გვექნება

$$x - 0,45 y = 343,5.$$

2. X და Y შემთხვევით სიდიდეებზე ჩატარებული დაკვირვების შედეგად შედგენილია შემდეგი კორელაციური ცხრილი

$y_j \backslash x_i$	20	25	30	35	40	45	n_{y_j}
10	3	-	-	-	4	-	7
14	-	-	-	3	-	6	9
18	1	4	-	12	-	-	17
22	-	2	-	5	-	-	7
26	-	-	3	-	7	-	10
n_{x_i}	4	6	3	20	11	6	50

იგი შედგენილია შემდეგი წესით: ცხრილის პირველ სტრიქონში ჩანერილია x_i -ის ($i = \overline{1,6}$) მნიშვნელობები, ხოლო პირველი სვეტში y_j -ის ($j = \overline{1,5}$) მნიშვნელობები; ყოველი სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთის უჯრებში ჩანერილია n_{ij} სიხშირის მნიშვნელობები ე.ი. ის რაოდენობა რამდენჯერაც პქონდა ადგილი $(x_i : y_j)$ წყვილს დაკვირვების დროს; ბოლო სტრიქონში ჩანერილია n_{x_i} (x -ის სიხშირეთა ჯამი) -ის მნიშვნელობები, ხოლო ბოლო სვეტში n_{y_j} (y -ის სიხშირეთა ჯამი) -ის მნიშვნელობები.

შევადგინოთ რეგრესიის წრფის განტოლება y -სა x -ის მიმართ გამოთვლების გამარტივების მიზნით შემოვიღილოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$x_i = h_i \cdot u_i + c_i, \quad y_j = h_j \cdot v_j + c_j, \quad i = \overline{1,6}; \quad j = \overline{1,5}; \quad (11.10)$$

სადაც $h_1 = 25 - 20 = 5$; $h_2 = 14 - 10 = 4$; ხოლო $c_1 = 35$ და $c_2 = 18$ არიან x_i -ის და y_j -ის ის მნიშვნელობებია რომლებიც შეესაბამებიან n_{xy} სიხშირეთა უდიდეს მნიშვნელობას, ჩვენ შემთხვევაში $n_{xy} = 12$ -ს.

ჩავთვალოთ, რომ $n_{xy} = n_{uv}$, გამოვთვალოთ $n_{uv} \cdot uv$ სიდიდეები და მათი ჯამი და გადავწეროთ მოცემული კორელაციური ცხრილი U და V სიდიდეებისათვის შემდეგი სახით

$\begin{smallmatrix} u_i \\ v_j \end{smallmatrix}$	-3	-2	-1	0	1	2	n_v	$n_{uv} uv$
-2	3				4		7	10
-1						6	9	-12
0	1	4		12			17	0
1		2		5			7	-4
2			3		7		10	8
n_u	4	6	3	20	11	6	50	$\sum n_{uv} uv =$ -2

გამოვთვალოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u = \frac{1}{50} (4 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 20 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 6 \cdot 2) = -0,08;$$

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v = \frac{1}{50} (7 \cdot (-2) + 9 \cdot (-1) + 17 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 10 \cdot 2) = 0,08;$$

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u' = 1,96; \quad \bar{V} = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v' = 1,68;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\bar{U} - (\bar{U})'} = \sqrt{1,96 - 0,08^2} = 1,4.$$

$$\sigma_v = \sqrt{\bar{V} - (\bar{V})'} = \sqrt{1,68 - 0,08^2} = 1,3.$$

$$\bar{\rho} = \frac{\frac{1}{n} \sum n_{uv} \cdot uv - \bar{U} \cdot \bar{V}}{\sigma_u \cdot \sigma_v} = \frac{0,04 + 0,0064}{1,4 \cdot 1,3} = 0,025.$$

რომ შევადგინოთ რეგრესიის წრფის განტოლება

$$y - \bar{Y} = \bar{\rho} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{X}), \quad (11.11)$$

საჭიროა ვიპოვოთ შემდეგი სიდიდეებიც

$$\bar{X} = \bar{U} \cdot h_1 + c_1 = -0,08 \cdot 5 + 35 = 34,6;$$

$$\bar{y} = \bar{V} \cdot h_2 + c_2 = 0,08 \cdot 4 + 18 = 18,32;$$

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u = 5 \cdot 1,4 = 7; \quad \sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 4 \cdot 1,3 = 5,2.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (11.11) განტოლებაში და გაგაძრავოთ მივიღებთ საძიებელ რეგრესიის წრფის განტოლებას

$$y - 18,32 = 0,019 (x - 34,6).$$

მეშალითაში

11.1. სატელევიზიო არხის ვიდეო და ხმის არხების მგრძნობიერების (მიკროვოლტებში) მნიშვნელობები შესაბამისად მოცემულია შემდეგი ცხრილით

400 - 140	340 - 160	480 - 160	320 - 120
420 - 170	500 - 240	430 - 270	540 - 260
450 - 110	450 - 100	420 - 190	450 - 280
380 - 160	280 - 150	410 - 200	320 - 130
540 - 180	310 - 120	500 - 180	460 - 200

შეადგინეთ რეგრესიის წრფის განტოლებები.

11.2. გაზომეს 50 გორგოლაჭის სიგრძეები X და დიამეტრები Y . შედეგები მოცემულია შემდეგი კორელაციური ცხრილით

$Y \setminus X$	5	15	25	35	45	55	65	n_y
4	2	-	2	-	-	-	-	4
8	-	1	4	-	-	-	-	5
12	-	4	3	10	-	-	-	17
16	-	2	-	2	3	6	-	13
20	-	-	-	-	5	4	-	9
24	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	2	7	9	12	8	11	1	$n=50$

შეადგინეთ რეგრესიის წრფის განტოლებები.

11.3. მოცემულია კორელაციური ცხრილი

$Y \backslash X$	30	35	40	45	50	55	n_y
18	4	6	-	-	-	-	10
28	-	8	10	-	-	-	18
38	-	-	4	35	5	-	44
48	-	-	4	12	6	-	22
58	-	-	-	1	3	2	6
n_x	4	14	18	48	14	2	100

შეადგინეთ რეგრესიის განტოლება y -ისა x -ის მიმართ.

11.4. მოცემულია კორელაციური ცხრილი

$Y \backslash X$	10	15	20	25	30	n_y
6	-	-	7	-	5	12
16	8	-	-	15	-	23
26	-	12	25	-	-	37
36	-	8	-	-	12	20
46	-	-	-	8	-	8
n_x	8	20	32	23	17	100

შეადგინეთ რეგრესიის განტოლება y -ისა x -ის მიმართ.

11.5. მოცემულია კორელაციური ცხრილი

$y \cdot X$	15	25	35	45	55	65	75	n_y
10	5	-	-	6	-	-	-	11
15	-	-	9	-	-	-	12	29
20	-	8	-	-	-	10	-	18
25	-	-	-	28	-	-	2	30
30	7	-	-	-	6	-	-	13
35	-	-	3	-	4	-	-	7
n_x	12	8	12	34	10	10	14	100

შეადგინეთ რეგრესიის განტოლება y -ისა და x -ის მიმართ.

პასუხები

11.1 $x - 420 = 0,17 (y - 180);$

$y - 180 = 0,1 (x - 420).$

11.2 $x - 35,8 = 2,3 (y - 13,92);$

$y - 13,92 = 0,3 (x - 35,8).$

11.3 $y - 37,6 = 1,5 (x - 43).$

11.4 $y - 24,9 = 0,2 (x - 21,05).$

11.5 $y - 20,9 = -0,03 (x - 45,8).$

§12. ეკონომიკური მოდელების ამოხსნა თამაშთა თეორიისა და სტატისტი- კურ გადაწყვეტილებათა მიღების მეთოდებით

საბაზრო ეკონომიკისა და კონკურენციის პირობებში, კონკურენტებს, რომლებიც ეკონომიკურ ურთიერთობებში მონაწილე მხარეებია, ამოძრავებთ მაქსიმალური მოგების მიღების მიზანი, საშუალება აქვთ ჩაატარონ ურთიერთ-საწინააღმდეგო მოქმედებები, შესაძლებელია წესებით გათვალისწინებულ ჩარხოვებში, მაგრამ წინასწარი გაფრთხილების გარეშე; შეუძლიათ განახორციელონ ცრუ მოქმედებანი („ბლეფი“) და სხვა. აქედან გამომდინარე, კონკურენტთა ურთიერთდამოკიდებულება კომფლიქტურია, ხოლო როდესაც განიხილება ისეთი ეკონომიკური მოდელი, რომლებშიც მხარეების დაპირისპირება ე.წ. „ბუნებისა და ინდივიდის“ ურთიერთობის დონეზეა, ე.ი. როდესაც მხოლოდ ერთ მხარეს გააჩნია მიზნები, მაშინ ეს დამოკიდებულება – არაკომფლიქტურია.

იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს კომფლიქტის ანალიზი, აგებენ მის მათემატიკურ მოდელს, რომელსაც უწოდებენ „საქმიან თამაშს“ ანუ მოკლედ „თამაშს“, ხოლო დაპირისპირებულ მხარეებს – „მოთამაშეებს“. ისინი შეიძლება იყვნენ სხვადასხვა სუბიექტური თუ იურიდიული პირები, ეკონომიკური, ბიზნესის ერთეულები, გაერთიანებები, კლუბები, სამხედრო-პოლიტიკური ერთეულები და სხვ. ამდენად, თამაშთა თეორიის გამოყენებით

შეიძლება ოპტიმალური გადაწყვეტილების ამორჩევა გარკვეულ ვითარებაში ეკონომიკის, სამხედრო, პოლიტიკის და სხვა სფეროებში წამოჭრილი პრობლემების გადაწყვეტის მიღების დროს.

„საკმიანი თამაში“ წარმოადგენს გარკვეული წესების ერთობლიობას, რომლის მიხედვითაც დგინდება თამაშში მონაწილე მხარეთა ქცევის ნორმები, მათი მიზნები, განისაზღვრება შემთხვევითი ქმედების წესები, თამაშის დაწყებისა და დამთავრების მომენტი, გადასახადის ოდენობა, რომელსაც იხდის ან ღებულობს თითოეული მონაწილე მხარე, დგინდება მონაწილეთა რიცხვი, პარტიათა რაოდენობა და სხვ.

თითოეული მოთამაშის მიერ წესებით გათვალისწინებული რომელიმე მოქმედების „ამორჩევას“ და მის განხორციელებას *სელა* ეწოდება, რომელიც შეიძლება იყოს: ა) შემთხვევითი და ბ) მოთამაშის გადაწყვეტილებით მიღებული. ამ ორივე შემთხვევაში, ცხადია, ადგილი აქვს გარკვეულ რისკის ფაქტორს, რომელიც გამოხატავს შემთხვევითობასთან დაკავშირებულ გარკვეულ „ხარაღს“.

აღვნიშნოთ ჩვენთვის სასურველი A ხდომილობათა რაოდენობა K -თი, A ხდომილობის ალბათობა $P(A)$ -თი, ხოლო რისკის რაოდენობრივი შეფასება – R -ით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$R = K \cdot P(A) \quad (12.1)$$

თითოეული მოთამაშისათვის თამაშის ჩატარების ყოველ (ვალკეულ გეგმას *მოთამაშის სტრატეგიას* უწოდებენ. ყოველ საკმიან თამაშში მონაწილე ირჩევს

ოპტიმალურ სტრატეგიას, ანუ ისეთ სტრატეგიას, რომელიც უზრუნველყოფს მოთამაშის **მაქსიმალურ მოგებას**, ხოლო თუ თამაში მეორდება მრავალჯერ, მაშინ – **მაქსიმალურ საშუალო მოგებას**.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ თამში ორ a და b მონაწილეთა შორის და შევადგინოთ მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, I მონაწილეს აქვს m რაოდენობის $A_1, A_2, \dots, A_m$ სტრატეგია, ხოლო II მონაწილეს – n რაოდენობის $B_1, B_2, \dots, B_n$ სტრატეგია. აღვნიშნოთ a_{ij} -თ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) მოგების ის რაოდენობა, რომელსაც მიიღებს I მოთამაშე II მოთამაშისგან, თუ იგი გამოიყენებს A_i სტრატეგიას, ხოლო მეორე B_j სტრატეგიას. შევადგინოთ a_{ij} ელემენტებისაგან მატრიცა და ჩაწეროთ იგი შემდეგი სახით (მას საგადასახადო მატრიცას უწოდებენ)

I \ II	II			
	B_1	B_2	B_j	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{1j}	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{2j}	a_{2n}
A_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}	a_{in}
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$ a_{mj}	$\dots$ a_{mn}

(12.2)

ანალოგიურად შეიძლება II მოთამაშის საგადასახადო $n \times m$ განზომილებიანი მატრიცის შედგენა, მაგრამ

მას აზრი არა აქვს, რადგან პირველის „მოგება“ მეორის „წაგების“ ტოლია. ამგვარად, თუ $a_{ij} > 0$, მაშინ a_{ji} გამოხატავს I მოთამაშის მოგებას, ხოლო თუ $a_{ij} < 0$ – „წაგებას“.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ორი მოწინააღმდეგე მხარის საპაერო ძალები ებრძვიან ერთმანეთს ორი ობიექტის დასაკავებლად. I-ის განკარგულებაშია 4 თვითმფრინავი, ხოლო მეორის – 3. ავაგოთ საგადასახადო მატრიცი მოწინააღმდეგისთვის, თუ ცნობილია, რომ ბრძოლაში მოწინააღმდეგისთვის, თვითმფრინავს მოწინააღმდეგის განადგურება შეუძლია ერთი და იგივე ალბათობით.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $[m; n]$, რომელიც ნიშნავს, რომ პირველმა მხარემ I ობიექტზე გააგზავნა m თვითმფრინავი, ხოლო II-ზე – n . ცხადია, $m+n=4$, ($m=1, 2, 3, 4$; $n=1, 2, 3, 4$). ანალოგიურ აღნიშვნას გამოვიყენებთ II მხარისათვის, ოღონდ $m+n=3$, $m, n=1, 2, 3$.

I მხარეს აქვს 5 შესაძლო სტრატეგია: $\{[4; 0], [3; 1], [2; 0], [1; 3], [0; 4]\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, ხოლო II მხარეს – 4: $\{[3; 0], [2; 1], [1; 2], [0; 3]\} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

საგადასახადო მატრიცის ელემენტების განსასაზღვრავად ვისარგებლოდ შემდეგი წესით: ყოველ ობიექტზე იგებს ის მხარე (მოთამაშე), ვისაც ამ

ობიექტზე აღმოაჩნდება თვითმფრინავების მეტი რაოდენობა. ითვლება, რომ ამ შემთხვევაში იგი ანადგურებს მოწინააღმდეგის თვითმფრინავებს, რისთვისაც მას ეწერება შესაბამისად იმდენივე ქულა და რადგან ამ შემთხვევაში იგი იკავებს ამ ობიექტს – ემატება ერთი ქულა, ხოლო საერთო მოგება ანუ საგადასახადო მატრიცის ელემენტი იქნება ორივე ობიექტზე მიღებულ ქულათა ჯამი. აქედან გამომდინარე, პირველი მხარისათვის საგადასახადო მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

I \ II				
	[3; 0]	[2; 1]	[1; 2]	[0; 3]
[4; 0]	4	2	1	0
[3; 1]	1	3	0	-1
[2; 2]	-2	2	2	-2
[1; 3]	-1	0	3	1
[0; 4]	0	1	2	4

(12.3)

როგორც ვხედავთ, $a_{11}=4$, რომელიც ასე მივიღეთ: რადგან I მხარემ I ობიექტზე გააგზავნა 4 თვითმფრინავი, II მხარის 3-ის საწინააღმდეგოდ, ამიტომ მათ გაანადგურეს სამივე და ჩაიწერეს 3 ქულა, მას მიემატა 1 ქულა, ობიექტის დაკავებისათვის, ამავე დროს II ობიექტზე ორივე მხარეს 0 ქულა აქვს; ამგვარად, $a_{11}=(3+1)+0=4$. $a_{12}=2$, რადგან ამ ვარიანტში I მხარემ I და II ობიექტებზე მიიღეს შემდეგი ქულები: $a_{12}=2$ (გაანადგურეს I ობიექტზე მოწინააღმდეგის 2 თვითმფრინავი)+1(აიღეს I

ობიექტი)–1(II ობიექტი დაკარგეს, მაგრამ თვითმფრინავი არ დაუკარგავთ)=2 და ა.შ.

2. ვთქვათ ბაზარზე ორი კონკურენტი ფირმის შესაძლო სტრატეგიების მიხედვით შედგენილია საგადასახადო მატრიცა

I \ II	II				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	3	4	5	2	3
A ₂	1	8	4	3	4
A ₃	10	3	1	7	6
A ₄	4	5	3	4	8

(12.4)

როგორი სტრატეგია უნდა აირჩიოს I მხარემ?

ამოხსნა. მატრიცის მიხედვით მაცდური მოგებაა 10 ერთეული, ე.ი. A₃ სტრატეგია, თუ II აირჩევს B სტრატეგიას, მაგრამ რომ არ ვიცით რა სტრატეგიას აირჩევს II მოწინააღმდეგე; მან რომ აირჩიოს B₃, მაშინ მოგება იქნება I-ის ტოლი. სიფრთხილის პოზიციიდან A₃ სტრატეგიის შერჩევა არ შეიძლება. ჩვენ უნდა შევარჩიოთ ის სტრატეგია, რომლის დროსაც ჩვენი მინიმალური (min) მოგება იქნება მაქსიმალური (max) ანუ, როგორც ჩვენთვის ცნობილია, [5] „მინი-მაქსის“ პრინციპი: მოიქეცი ისე, რომ მოწინააღმდეგის მიერ შენთვის ყველაზე არასასურველი სტრატეგიის არჩევისას მიიღო მაქსიმალური მოგება.

ამისათვის ასე მოვიქცეთ: გადმოვწეროთ (12.4) მატრიცა ორმაგად გაფართოებული მატრიცის სახით

I \ II						b_{i6}
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	4	5	2	3	2
A_2	1	8	4	3	4	1
A_3	10	3	1	7	6	1
A_4	4	5	3	4	8	3
a_{sj}	10	8	5	7	8	$a_{43}=3$

, (12.5)

სადაც მატრიცის დამატებული სვეტის ელემენტები

$$2 = \min \{3; 4; 5; 2; 3\},$$

$$1 = \min \{1; 8; 4; 3; 4\},$$

$$1 = \min \{10; 3; 1; 7; 6\},$$

$$3 = \min \{4; 5; 3; 4; 8\},$$

ხოლო დამატებული სტრიქონის ელემენტები

$$10 = \max \{3; 1; 10; 4\},$$

$$8 = \max \{4; 8; 3; 5\},$$

$$5 = \max \{5; 4; 1; 3\},$$

$$7 = \max \{2; 3; 7; 4\},$$

$$8 = \max \{3; 4; 6; 8\}.$$

ახლა კი დამატებულ სვეტში შემოვსახოთ ელემენტი $a_{45} = 3$ ($3 = \max \{2; 1; 1; 3\}$), დამატებულ სტრიქონში კი

– $a_{53} = 5$ ($5 = \min \{10; 8; 5; 7; 8\}$), ხოლო მათი შემცველი სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი $a_{43} = 3$. ამგვარად მივიღეთ, რომ პირველმა მხარემ უნდა აირჩიოს A_4 სტრატეგია, ხოლო მეორემ – B_3 , ე.ი. პირველის გარანტირებული მოგება იქნება 3-ის ტოლი.

ახლა, თუ ამ თამაშს შევხედავთ მოწინააღმდეგის თვალთ, თამაში ანტაგონისტურია, მან იცის საგადასახადო მატრიცის სახე და ამიტომ იგი ეცდება პირველი მხარის მიერ სტრატეგიის არჩევის შემდეგ აირჩიოს ის სტრატეგია (B_3), რომლის დროსაც იგი წააგებს მაქსიმუმ 5 ერთეულს.

ხოლო B_1 სტრატეგიის არჩევისას მან შეიძლება წააგოს: (B_1, A_1) წყვილის შემთხვევაში 10 ერთეული, (B_2, A_2)-ის შემთხვევაში – 8 ერთეული, (B_4, A_3)-ის შემთხვევაში – 7 ერთეული და (B_5, A_4)-ის შემთხვევაში – 8 ერთეული. ე.ი. ჩვენი გაანგარიშება საესებით ლოგიკურია.

3. ორ ფარმაკეპტულ ფირმას ერთიდაიგივე საბითუმო ბაზარზე შეუძლიათ გაიტანონ გასაყიდად პრეპარატი „დექსამეტაზონი“ ამჟღავნებში, რომელიც ორი A და B სახისაა. მეორე ფირმას ჭარბად აქვს A სახის მედიკამენტი, ვიდრე B, ხოლო პირველ ფირმას ორივე თანაბარი რაოდენობით აქვს. II ფირმა სთავაზობს I ფირმას შემდეგი სახის გარიგება-ხელშეკრულებას: თუ I ფირმა გაიტანს გასაყიდად B პრეპარატს, ხოლო II ფირმა – A-ს, მაშინ მეორე ფირმა გადაუხდის პირველ ფირმას 30 000 ლარს, თუ I გაიტანს A-ს, ხოლო II – B-ს, მაშინ მეორე

ფირმა გადაუხდის პირველ ფირმას 10 000 ლარს, ხოლო თუ ორივე ფირმა გაიტანს ერთიდაიგივე სახის პრეპარატებს, მაშინ პირველმა ფირმამ უნდა გადაუხადოს მეორე ფირმას 20 000 ლარი.

დავადგინოთ არის თუ არა ეს ხელშეკრულება პირველი ფირმისათვის მისაღები?

ამოხსნა. ვთქვათ პირველი ფირმის სტრატეგიებია: $A_1 = \{I \text{ ფირმა ბაზარზე გაიტანს } A \text{ პრეპარატს}\}$, $A_2 = \{I \text{ ფირმა ბაზარზე გაიტანს } B \text{ პრეპარატს}\}$, ხოლო მეორე ფირმისა: $B_1 = \{II \text{ ფირმა ბაზარზე გაიტანს } A \text{ პრეპარატს}\}$, $B_2 = \{II \text{ ფირმა ბაზარზე გაიტანს } B \text{ პრეპარატს}\}$.

ხელშეკრულების მიხედვით თითოეულ მოთამაშეს ეძლევა თავისუფალი არჩევანის შესაძლებლობა, რაც მოწინააღმდეგე მხარეს აყენებს გაურკვეველ ვითარებაში, ამიტომ თითოეული არის მოთამაშე ფირმა.

შევადგინოთ საგადასახადო მატრიცი ათას ლარებში. რადგან ხელშეკრულებით I ფირმისათვის (A_1 ; B_1), სტრატეგიათა წყვილი განაპირობებს $\sim -20 \cdot 10^3$ -ის ტოლ მოგებას, (A_1 ; B_2) $\sim 10 \cdot 10^3$ -ის ტოლ მოგებას, (A_2 ; B_1) $\sim 30 \cdot 10^3$ -ს, ხოლო (A_2 ; B_2) $\sim -20 \cdot 10^3$ -ს, ამიტომ საგადასახადო მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

I \ II	II	
	B_1	B_2
A_1	-20	10
A_2	30	-20

(12.6)

რადგან $-20 = \min\{-20; 10\}$, $-20 = \min\{30; -20\}$, ხოლო $30 = \max\{-20; 30\}$, $10 = \max\{10; -20\}$, ამიტომ (11.6) მატრიცა ასე გადავწეროთ

I \ II	II		α_i
	B_1	B_2	
A_1	-20	10	-20
A_2	30	-20	-20
β_j	30	10	$\alpha = -20$ $\beta = 10$

(12.7)

სადაც $\alpha = -20 \cdot 10^3$ არის ქვედა ფასი, ხოლო $\beta = 10 \cdot 10^3$ – ზედა ფასი. რადგან $\alpha < 0$, იგი ნიშნავს „წაგებას“, ხოლო რადგან $\beta > 0$ – ნიშნავს მაქსიმალურ გარანტირებულ „მოგებას“. ხელშეკრულების პირობებში პირველმა ფირმამ შეიძლება მეტიც კი მოიგო, თუმცა არც „წაგება“ გამოირიცხებოდა. ამიტომ გამოვიყენოთ უილიამსის მეთოდი და ვიპოვოთ ამ თამაშის ამონახსნი. ამისათვის გავაფართოვოთ (11.6) საგადასახადო მატრიცა, გვექნება

I \ II	II		$'\alpha_{i1} - \alpha_{i2}'$
	B_1	B_2	
A_1	-20	10	30
A_2	30	-20	50
$\alpha_{1j} - \alpha_{2j}$	50	30	

მიღებული მატრიცა ასე გადავწეროთ

I \ II	II		$\alpha_{i1} - \alpha_{i2}$
	B_1	B_2	
A_1	-20	10	50
A_2	30	-20	30
$\alpha_{1j} - \alpha_{2j}$	30	50	

ახლა თუ ვიკულისხმებთ, რომ $p_i = P(A_i)$ არის ალბათობა იმისა, რომ I ფირმა აირჩევს A_i ($i = 1, 2$) სტრატეგიას, ხოლო $q_j = P(B_j)$ არის ალბათობა იმისა, რომ მეორე ფირმა აირჩევს სტრატეგიას B_j ($j = 1, 2$), ($p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$), მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ ოპტიმალური სტრატეგიების ალბათობებია:

$$p_1 = \frac{50}{50 + 30} = 0,625, \quad p_2 = \frac{30}{50 + 30} = 0,375$$

$$(p_1 + p_2 = 1).$$

$$q_1 = \frac{30}{30 + 50} = 0,375, \quad q_2 = \frac{50}{30 + 50} = 0,625$$

$$(q_1 + q_2 = 1).$$

ხოლო ფასი იქნება $-20 \cdot 0,625 + 30 \cdot 0,375 = -1,3$ ანუ I ფირმის ყოველდღიური საშუალო „წაგება“ იქნება $1,3 \cdot 10^3$

ლარი, რის გამოც მან უარი უნდა თქვას შემოთავაზებულ ხელშეკრულებაზე.

4. ახლა განვიხილოთ ეკონომიკური მოდელი, როდესაც მხოლოდ ერთ მხარეს აქვს მეორე მხარის მიმართ გარკვეული მიზნები. როგორც ამ ამ პარაგრაფის დასაწყისში აღვნიშნეთ, ასეთ მოდელს „ბუნებასთან თამაშს“ უწოდებენ, ამიტომ იგი უნდა ამოიხსნას სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა მიღების მეთოდით.

ვთქვათ ჩვენ წარმოვადგენთ პირველ მხარეს და გვაქვს A_1, A_2, A_3 და A_4 შესაძლო სტრატეგიები, ხოლო მეორე მხარეს ანუ ბუნების შესაძლო მდგომარეობებია B_1, B_2, B_3 და B_4 , შესაბამისი $q_1=0,3, q_2=0,1, q_3=0,2$ და $q_4=0,4$ ($q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0,3 + 0,1 + 0,2 + 0,4 = 1$) ალბათობებით, ხოლო „ბუნებასთან თამაშში“ მოცემულია შემდეგი საგადასახადო მატრიცით

I \ II	II				q_j
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	5	0,3
A_2	7	4	4	5	0,1
A_3	3	4	4	1	0,2
A_4	7	4	2	2	0,4

ვიპოვოთ ოპტიმალური სტრატეგია.

ამოხსნა. ნავატაროთ შემდეგი მოქმედებები (მატრიცათა გამრავლების წესის თანახმად)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 5,3 \\ 2,5 \\ 3,7 \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$z_1=3,1; \quad z_2=5,3; \quad z_3=2,5; \quad z_4=3,7.$$

წესის თანახმად მიღებული მნიშვნელობებიდან აეარჩიოთ max-მი, გვექნება $z_{\max} = \{3,1; 5,3; 2,5; 3,7\} = 5,3$, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაბამისი სტრატეგია არის A_2 .

ამგვარად მივიღეთ, რომ A_2 არის ოპტიმალური სტრატეგია, რომელიც იძლევა 5,3-ის ტოლ მაქსიმალურ მოგებას.

3. ორ ყუთში ერთნაირი დასახელების n – დეტალია. თითოეულში A სტანდარტულია და B არასტანდარტული. პირველი ყუთიდან აღაღებდზე ამოიღეს m დეტალი და ჩადეს მეორე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	17	15	19	14	20	21	22	20	25	21
A	15	12	17	13	16	18	20	19	23	17
B	2	3	2	1	4	3	2	1	2	4
m	1	2	3	2	3	1	1	3	2	2
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	27	17	30	23	28	31	11	14	34	28
A	25	16	27	21	24	28	10	12	30	26
B	2	1	3	2	4	3	1	2	4	2
m	2	3	1	1	2	1	3	2	2	3

4. პარტიიდან, რომელშიც იყო შესაბამისად n_1 , n_2 და n_3 სამი სხვადასხვა საწარმოს მიერ დამზადებული ტრი-ოდი, აღაღებდზე ამოიღეს ერთი ცალი და დაამონტაჟეს თვითმფრინაეში. ალბათობა იმისა, რომ პირველი საწარმოს მიერ გამოშვებული დეტალი საჭირო რაოდენობის

საათს იმუშავენ, არის p , მეორე საწარმოსათვის – p_2 , ხოლო მესამესათვის – p_3 . რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დამონტაჟებული დეტალი, რომელიც საჭირო რაოდენობის საათს იმუშავენს დამსადებულია m საწარმოს მიერ

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_1	20	25	45	65	45	30	35	20	25	60
n_2	45	40	30	20	25	35	60	40	80	90
n_3	55	35	15	25	50	25	25	80	75	30
p_1	0,8	0,6	0,75	0,9	0,7	0,65	0,85	0,95	0,7	0,9
p_2	0,7	0,9	0,6	0,8	0,65	0,75	0,9	0,8	0,65	0,75
p_3	0,95	0,7	0,8	0,6	0,9	0,8	0,65	0,75	0,85	0,8
m	I	II	III	II	I	III	III	II	I	III

5. თვითმფრინავმა სამიზნეზე ჩამოაგდო n ბომბი. ალბათობა იმისა, რომ ბომბი მოხვდება სამიზნეს არის p . იპოვეთ სამიზნეს მოხვედრათა უაღბათესი რიცხვი

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	40	25	45	20	40	50	80	70	60	20
p	0,7	0,8	0,6	0,9	0,75	0,85	0,65	0,72	0,6	0,9

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	50	30	45	15	20	42	22	25	40	35
p	0,77	0,68	0,55	0,8	0,7	0,62	0,82	0,9	0,87	0,72

6. თვითმფრინავს, რომელსაც აქვს ოთხი რაკეტა, ესერის სამიზნეს, ვიდრე არ მოახვედრებს ან არ გაუთავდება რაკეტები. იპოვეთ დახარჯული რაკეტების მათემატიკური ლოდინი, თუ მოხვედრის ალბათობა არის p

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$

7. იპოვეთ ნდობის ინტერვალი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური

ლოდინისათვის, თუ $\gamma=0,95$, ხოლო შერჩევის სტატისტიკური განაწილებებია:

$$1. \begin{pmatrix} x_i & 2 & 4 & 5 \\ n_i & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} x_i & -1 & 2 & 3 \\ n_i & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} x_i & -2 & 0 & 2 \\ n_i & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} x_i & 2 & 3 & 5 \\ n_i & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5. \begin{pmatrix} x_i & -2 & -1 & 1 \\ n_i & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$6. \begin{pmatrix} x_i & 3 & 5 & 6 \\ n_i & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7. \begin{pmatrix} x_i & 2 & 3 & 4 \\ n_i & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$8. \begin{pmatrix} x_i & -1 & 0 & 4 \\ n_i & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$9. \begin{pmatrix} x_i & -1 & 2 & 3 \\ n_i & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$10. \begin{pmatrix} x_i & 2 & 4 & 6 \\ n_i & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

ნორმალური განაწილების სიმკვრივისა და ლაპლასის
ფუნქციის ცხრილები

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,30	0,3814	0,1179	0,60	0,3332	0,2257
0,01	0,3989	0,0040	0,31	0,3802	0,1217	0,61	0,3312	0,2291
0,02	0,3989	0,0080	0,32	0,3790	0,1255	0,62	0,3292	0,2324
0,03	0,3988	0,0120	0,33	0,3778	0,1293	0,63	0,3271	0,2357
0,04	0,3986	0,0160	0,34	0,3765	0,1331	0,64	0,3251	0,2389
0,05	0,3984	0,0199	0,35	0,3752	0,1368	0,65	0,3230	0,2422
0,06	0,3982	0,0239	0,36	0,3739	0,1406	0,66	0,3209	0,2454
0,07	0,3980	0,0279	0,37	0,3725	0,1443	0,67	0,3187	0,2486
0,08	0,3977	0,0319	0,38	0,3712	0,1480	0,68	0,3166	0,2517
0,09	0,3973	0,0359	0,39	0,3697	0,1517	0,69	0,3144	0,2549
0,10	0,3970	0,0398	0,40	0,3683	0,1554	0,70	0,3123	0,2580
0,11	0,3965	0,0438	0,41	0,3668	0,1591	0,71	0,3101	0,2611
0,12	0,3961	0,0478	0,42	0,3653	0,1628	0,72	0,3079	0,2642
0,13	0,3956	0,0517	0,43	0,3637	0,1664	0,73	0,3056	0,2673
0,14	0,3951	0,0557	0,44	0,3621	0,1700	0,74	0,3034	0,2703
0,15	0,3945	0,0596	0,45	0,3605	0,1736	0,75	0,3011	0,2734
0,16	0,3939	0,0636	0,46	0,3589	0,1772	0,76	0,2989	0,2764
0,17	0,3932	0,0675	0,47	0,3572	0,1808	0,77	0,2966	0,2794
0,18	0,3925	0,0714	0,48	0,3555	0,1844	0,78	0,2943	0,2823
0,19	0,3918	0,0753	0,49	0,3538	0,1879	0,79	0,2920	0,2852
0,20	0,3910	0,0793	0,50	0,3521	0,1915	0,80	0,2897	0,2881
0,21	0,3902	0,0832	0,51	0,3503	0,1950	0,81	0,2874	0,2910
0,22	0,3894	0,0871	0,52	0,3485	0,1985	0,82	0,2850	0,2939
0,23	0,3885	0,0910	0,53	0,3467	0,2019	0,83	0,2827	0,2967
0,24	0,3876	0,0948	0,54	0,3448	0,2054	0,84	0,2803	0,2995
0,25	0,3867	0,0987	0,55	0,3429	0,2088	0,85	0,2780	0,3023
0,26	0,3857	0,1026	0,56	0,3210	0,2123	0,86	0,2756	0,3051
0,27	0,3847	0,1064	0,57	0,3391	0,2157	0,87	0,2732	0,3078
0,28	0,3836	0,1103	0,58	0,3372	0,2190	0,88	0,2709	0,3106
0,29	0,3825	0,1141	0,59	0,3352	0,2224	0,89	0,2685	0,3133

x	$\Phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\Phi(x)$
0,90	0,2661	0,3159	1,20	0,1942	0,3849	1,50	0,1295	0,4332
0,91	0,2637	0,3186	1,21	0,1919	0,3869	1,51	0,1276	0,4345
0,92	0,2613	0,3212	1,22	0,1895	0,3888	1,52	0,1257	0,4357
0,93	0,2589	0,3238	1,23	0,1872	0,3907	1,53	0,1238	0,4370
0,94	0,2565	0,3264	1,24	0,1849	0,3925	1,54	0,1219	0,4382
0,95	0,2541	0,3289	1,25	0,1826	0,3944	1,55	0,1200	0,4394
0,96	0,2516	0,3315	1,26	0,1804	0,3962	1,56	0,1182	0,4406
0,97	0,2492	0,3340	1,27	0,1781	0,3980	1,57	0,1163	0,4418
0,98	0,2468	0,3363	1,28	0,1758	0,3997	1,58	0,1145	0,4429
0,99	0,2444	0,3389	1,29	0,1736	0,4015	1,59	0,1127	0,4441
1,00	0,2420	0,3413	1,30	0,1714	0,4082	1,60	0,1109	0,4452
1,01	0,2396	0,3438	1,31	0,1691	0,4049	1,61	0,1092	0,4463
1,02	0,2371	0,3461	1,32	0,1669	0,4066	1,62	0,1074	0,4474
1,03	0,2347	0,3485	1,33	0,1647	0,4082	1,63	0,1057	0,4484
1,04	0,2323	0,3508	1,34	0,1626	0,4099	1,64	0,1040	0,4495
1,05	0,2299	0,3531	1,35	0,1604	0,4115	1,65	0,1023	0,4505
1,06	0,2275	0,3554	1,36	0,1582	0,4131	1,66	0,1006	0,4515
1,07	0,2251	0,3577	1,37	0,1561	0,4147	1,67	0,0989	0,4525
1,08	0,2227	0,3599	1,38	0,1539	0,4162	1,68	0,0973	0,4535
1,09	0,2203	0,3621	1,39	0,1518	0,4177	1,69	0,0957	0,4545
1,10	0,2179	0,3643	1,40	0,1497	0,4192	1,70	0,0940	0,4554
1,11	0,2155	0,3665	1,41	0,1476	0,4207	1,71	0,0925	0,4564
1,12	0,2131	0,3686	1,42	0,1456	0,4222	1,72	0,0909	0,4573
1,13	0,2107	0,3708	1,43	0,1435	0,4236	1,73	0,0898	0,4582
1,14	0,2083	0,3729	1,44	0,1415	0,4251	1,74	0,0878	0,4591
1,15	0,2059	0,3749	1,45	0,1394	0,4265	1,75	0,0863	0,4599
1,16	0,2036	0,3770	1,46	0,1374	0,4279	1,76	0,0848	0,4608
1,17	0,2012	0,3790	1,47	0,1354	0,4292	1,77	0,0833	0,4616
1,18	0,1989	0,3810	1,48	0,1334	0,4306	1,78	0,0818	0,4625
1,19	0,1965	0,3830	1,49	0,1315	0,4319	1,79	0,0804	0,4633

x	$\Phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\Phi(x)$
1,80	0,0790	0,4641	2,20	0,0355	0,4861	2,80	0,0079	0,4974
1,81	0,0775	0,4649	2,22	0,0339	0,4868	2,82	0,0075	0,4976
1,82	0,0761	0,4656	2,24	0,0325	0,4875	2,84	0,0071	0,4977
1,83	0,0748	0,4664	2,26	0,0310	0,4881	2,86	0,0067	0,4979
1,84	0,0734	0,4671	2,28	0,0297	0,4887	2,88	0,0063	0,4980
1,85	0,0721	0,4678	2,30	0,0283	0,4893	2,90	0,0060	0,4981
1,86	0,0707	0,4686	2,32	0,0270	0,4898	2,92	0,0056	0,4982
1,87	0,0694	0,4693	2,34	0,0258	0,4904	2,94	0,0053	0,4984
1,88	0,0681	0,4699	2,36	0,0246	0,4909	2,96	0,0050	0,4985
1,89	0,0669	0,4706	2,38	0,0235	0,4913	2,98	0,0047	0,4986
1,90	0,0656	0,4713	2,40	0,0224	0,4918	3,00	0,00443	0,49865
1,91	0,0644	0,4719	2,42	0,0213	0,4922	3,10	0,00327	0,49908
1,92	0,0632	0,4726	2,44	0,0203	0,4927	3,20	0,00238	0,49931
1,93	0,0620	0,4732	2,46	0,0194	0,4931	3,30	0,00172	0,49952
1,94	0,0608	0,4738	2,48	0,0184	0,4934	3,40	0,00123	0,49966
1,95	0,0596	0,4744	2,50	0,0175	0,4938	3,50	0,00087	0,49977
1,96	0,0584	0,4750	2,52	0,0167	0,4941	3,60	0,00061	0,49984
1,97	0,0573	0,4756	2,54	0,0158	0,4945	3,70	0,00042	0,49989
1,98	0,0562	0,4761	2,56	0,0151	0,4948	3,80	0,00029	0,49993
1,99	0,0551	0,4767	2,58	0,0143	0,4951	3,90	0,00020	0,49995
2,00	0,0540	0,4772	2,60	0,0136	0,4953	4,00	0,0001338	0,499968
2,02	0,0549	0,4783	2,62	0,0129	0,4956	4,50	0,0000160	0,499897
2,04	0,0498	0,4793	2,64	0,0122	0,4959	5,00	0,0000015	0,499997
2,06	0,0478	0,4803	2,66	0,0116	0,4961			
2,08	0,0459	0,4812	2,68	0,0110	0,4963			
2,10	0,0440	0,4821	2,70	0,0104	0,4965			
2,12	0,0422	0,4830	2,72	0,0099	0,4967			
2,14	0,0404	0,4838	2,74	0,0093	0,4969			
2,16	0,0387	0,4846	2,76	0,0088	0,4971			
2,18	0,0371	0,4854	2,78	0,0084	0,4973			

$t(n; \gamma)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,6	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,5	5,41	35	2,032	2,72	3,6
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,2	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,926	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,64	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,617	3,374
18	2,11	2,9	3,97	∞	1,96	2,576	3,291
19	2,1	2,88	3,92				

$\phi(0;1)$ ნორმალური განაწილების $\phi^{-1}(p)$ კვანტილი

p	$\phi^{-1}(p)$	p	$\phi^{-1}(p)$	p	$\phi^{-1}(p)$	p	$\phi^{-1}(p)$
0,01	-2,3268	0,26	-0,6433	0,51	0,0251	0,76	0,7063
0,02	-2,0537	0,27	-0,6128	0,52	0,0502	0,77	0,7388
0,03	-1,8808	0,28	-0,5828	0,53	0,0753	0,78	0,7722
0,04	-1,7507	0,29	-0,5534	0,54	0,1004	0,79	0,8064
0,05	-1,6449	0,30	-0,5244	0,55	0,1257	0,80	0,94116
0,06	-1,5548	0,31	-0,4958	0,56	0,1510	0,81	0,8779
0,07	-1,4758	0,32	-0,4677	0,57	0,1764	0,82	0,9154
0,08	-1,4051	0,33	-0,4399	0,58	0,2019	0,83	0,9542
0,09	-1,3408	0,34	-0,4125	0,59	0,2275	0,84	0,9945
0,10	-1,2816	0,35	-0,3853	0,60	0,2533	0,85	0,0364
0,11	-1,2265	0,36	-0,3585	0,61	0,9793	0,86	1,0803
0,12	-1,1750	0,37	-0,3319	0,62	0,3055	0,87	1,1264
0,13	-1,1264	0,38	-0,3055	0,63	0,3319	0,88	1,1750
0,14	-1,0803	0,39	-0,2793	0,64	0,3585	0,89	1,2265
0,15	-1,0364	0,40	-0,2533	0,65	0,3853	0,90	1,2816

p	$\phi^{-1}(p)$	p	$\phi^{-1}(p)$	p	$\phi^{-1}(p)$	p	$\phi^{-1}(p)$
0,16	-0,9945	0,41	-0,2275	0,66	0,4125	0,91	1,3408
0,17	-0,9542	0,42	-0,2019	0,67	0,4399	0,92	1,4051
0,18	-0,9154	0,43	-0,1764	0,68	0,4677	0,93	1,4758
0,19	-0,8779	0,44	-0,1510	0,69	0,4958	0,94	1,5548
0,20	-0,8416	0,45	-0,1257	0,70	0,5244	0,95	1,6449
0,21	-0,8064	0,46	-0,1004	0,71	0,5534	0,96	1,7507
0,22	-0,7722	0,47	-0,0573	0,72	0,5828	0,97	1,8808
0,23	-0,7388	0,48	-0,0502	0,73	0,6128	0,98	2,0537
0,24	-0,7063	0,49	-0,0251	0,74	0,6433	0,99	2,3268
0,25	-0,6745	0,50	-0,000	0,75	0,6745		

χ^2 განაწილების $k^{-1}(p; \nu)$ კვანტილი

ν	$k^{-1}(0,1; \nu)$	$k^{-1}(0,3; \nu)$	$k^{-1}(0,5; \nu)$	$k^{-1}(0,7; \nu)$	$k^{-1}(0,9; \nu)$	$k^{-1}(0,95; \nu)$	$k^{-1}(0,99; \nu)$	$k^{-1}(0,999; \nu)$
1	0,016	0,148	0,445	1,07	2,17	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,594	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	11,3	16,3
4	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	20,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	27,7	34,5
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7

ν	k^{-1} (0,1; ν)	k^{-1} (0,3; ν)	k^{-1} (0,5; ν)	k^{-1} (0,7; ν)	k^{-1} (0,9; ν)	k^{-1} (0,95; ν)	k^{-1} (0,99; ν)	k^{-1} (0,999; ν)
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,10	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	10,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	2,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

$S^{-1}(p; \nu)$ სტიუდენტის განაწილების კვანტილი

ν	S^{-1} (0,6; ν)	S^{-1} (0,7; ν)	S^{-1} (0,8; ν)	S^{-1} (0,9; ν)	S^{-1} (0,95; ν)	S^{-1} (0,99; ν)	S^{-1} (0,995; ν)	S^{-1} (0,999; ν)
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	31,821	63,657	318,3
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	6,965	9,925	22,327
3	0,277	0,684	0,978	1,638	2,353	4,541	5,841	10,214
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	3,747	4,604	7,173
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	3,365	4,032	5,893
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	3,143	3,707	5,208
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,998	3,499	4,785
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,896	3,355	4,501
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,821	3,250	4,297
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,764	3,169	4,144
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,718	3,106	4,030
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,681	3,055	3,930
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,650	3,012	3,850
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,624	2,977	3,787
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,602	2,947	3,730
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,583	2,921	3,686
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,567	2,898	3,650

ν	S^{-1} (0,6; ν)	S^{-1} (0,7; ν)	S^{-1} (0,8; ν)	S^{-1} (0,9; ν)	S^{-1} (0,95; ν)	S^{-1} (0,99; ν)	S^{-1} (0,995; ν)	S^{-1} (0,999; ν)
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,552	2,878	3,610
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,539	2,861	3,580
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,528	2,845	3,552
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,518	2,831	3,530
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,508	2,819	3,505
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,500	2,807	3,490
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,492	2,797	3,467
25	0,256	0,531	0,856	1,315	1,708	2,485	2,787	3,450
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,479	2,779	3,435
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,473	2,771	3,420
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,467	2,763	3,408
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,462	2,756	3,400
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,457	2,750	3,386
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,423	2,704	3,310
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,390	2,660	3,230
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	2,358	2,517	3,170
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090

ლიტერატურა

1. ნ. ლაზრიევა, გ. მანია, თ. შერვაშიძე და სხვ., „ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის“. თბილისი, 2000.
2. ა. ცივაძე, თ. ყიფიანი და სხვ., „ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა კრებული“. თბილისი, სპი-ის გამომცემლობა, 1984.
3. ტ. ბუაძე, გ. ჯავახიშვილი და სხვ., „მეთოდური მითითებები ინდივიდუალური მოცემულობების შესასრულებლად ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში“, თბილისი, 1991.
4. Андронов А.М. Хижняк А.Н., «Математические методы планирования и управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации». М., „Транспорт“, 1977.
5. გ. ჯავახიშვილი, „მათემატიკური მოდელირება ეკონომიკაში“. თბილისი, გამომც. სტუ, 2002.
6. Е.С. Вентцель. «Исследование операций – задачи, принципы, методология». М., „Наука“, 1988.
7. ა. ედიბერიძე. „ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები“. თსუ, 1975.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ალბათობის თეორიის ელემენტები

§1. ხდომილობები და მათი კლასიფიკაცია. ალბათობის კლასიკური, სტატისტიკური და ბეოგმეტრიული განსაზღვრა. კომბინატორიკის ელემენტები - - - - -	4
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები - - - - -	13
მაგალითები - - - - -	19
პასუხები - - - - -	26
§2. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა. პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა - - - - -	26
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები - - - - -	29
მაგალითები - - - - -	37
პასუხები - - - - -	43
§3. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა - - - - -	43
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები - - - - -	44
მაგალითები - - - - -	60

პასუხები	64
§4. დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა.	
შალგათესი რიცხვი	65
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები	71
მაგალითები	75
პასუხები	79
§5. შემთხვევითი სიდიდე. შემთხვევითი სიდიდის	
რიცხვითი მახასიათებლები	80
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები	84
მაგალითები	90
პასუხები	91
§6. უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე.	
ნორმალური განაწილება	92
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები	94
მაგალითები	99
პასუხები	101

მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები

§7. მონაცემები, პოპულაცია და შერჩევა. წერტილოვანი შეფასებები - - - - -	101
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები - - - - -	106
მაგალითები	107
პასუხები - - - - -	108
§8. ნდობის ინტერვალი - - - - -	108
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები - - - - -	109
მაგალითები - - - - -	114
პასუხები - - - - -	117

ზოგიერთი ეკონომიკური მაჩვენებლების პროგნოზირება

§9. ზოგიერთი ბანაწილების კვანტილები - - - - -	117
§10. ნდობის ინტერვალის აგება პროგნოზირებადი ეკონომიკური მაჩვენებლისათვის - - - - -	120

§11. კორელაციური დამოკიდებულება.	127
§12. ეკონომიკური მოღვაწეების ამოხსნა თამაშთა თეორიისა და სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა მიღების მეთოდებით	136
მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები - - - - -	139
სარეზიუმეო ამოცანები - - - - -	149
დანართი 1 - - - - -	153
დანართი 2 - - - - -	156
დანართი 3 - - - - -	157
დანართი 4 - - - - -	159
დანართი 5 - - - - -	161
ლიტერატურა - - - - -	163
სარჩევი - - - - -	164