

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ა. შ. გუგუშვილი, თ. გ. იმედაძე, დ. ფ. გარგი

## ავტომატური მართვის თეორია მდგომარეობის სივრცის მეთოდი

დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუ-ს  
სასწავლო-მეთოდური საბჭოს მიერ

გამოცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“

თბილისი 1994

უკ 681.51.011(075.8)

**ა. შ. გუგუშვილი, თ. გ. იმედაძე, დ. ფ. გარბი.**

ავტომატური მართვის თეორია (მდგომარეობის სივრცის მეთოდი). -თბილისი: სტუ-ს გამომცემლობა, 1994. -111 გვ.

წიგნი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს კურსისათვის - ავტომატური მართვის თეორია, რომელშიც განხილულია საკითხები, დაკავშირებული ავტომატური მართვის სისტემების აგების პრინციპებთან და მისი თვისობრივი ანალიზის მეთოდების შესწავლასთან. მოცემულია ძირითადი ცნებები, ამოცანების დასა და მათი გადაწყვეტა ავტომატური მართვის თეორიის თანამედროვე მეთოდების გამოყენებით, დაუფლებული მართვადობისა და დაკვირვებადობის ცნებებზე, მდგომარეობის სივრცის მეთოდზე, მოდელური მართვის პრინციპებზე. ეს საშუალებას იძლევა, გამოავლინოს ურთიერთკავშირები ავტომატური მართვის სისტემების კლასიკის მეთოდების შორის, დამყარებულს მათემატიკურ მოდელებზე: შემავალი-გამომავალი და შემავალი-მდგომარეობა-გამომავალი.

წიგნი გათვლილია მეცნიერულა ფართო წრისათვის: მეცნიერებისათვის, ასპირანტებისათვის, სტუდენტებისათვის და მათთვის, ვისაც სურს დაეუფლოს ავტომატური მართვის თანამედროვე თეორიას.

**Гугушвили А. Ш. Имедадзе Т. Г. Гарб Д. П.**

Теория автоматического управления (Метод пространства состояний). -Тбилиси: Изд-во ГТУ, 1994. -111 с.

Книга представляет собой учебник по курсу Теория автоматического управления (Метод пространства состояний), в котором рассматриваются вопросы, связанные с изучением принципов построения и методов качественного анализа систем автоматического управления. На основе современной теории автоматического управления (наблюдаемость и управляемость, методов пространства состояний, теории наблюдателей, теории модального управления) возможно решить многие задачи теории, практики, анализа и синтеза САУ.

Книга предназначена для широкого круга читателей: студентов, аспирантов, а также специалистов, знакомящихся с применением методов пространства состояний для решения задач анализа и синтеза САУ.

რეცენზენტები: საქართველოს რესპუბლიკის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსები:

ვ. კ. ჭიჭინაძე  
ბ. ე. სალუქვაძე

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| წინასიტყვაობა                                                                                                      | 7   |
| <u>1. წინამდებარე სისტემის მდგომარეობის სივრცე</u>                                                                 | 9   |
| 1.1 სისტემის მდგომარეობა                                                                                           | 9   |
| <u>2. პირველი რიგის სისტემები</u>                                                                                  | 11  |
| 2.1 სისტემის მდგომარეობა და მისი თვისებები                                                                         | 13  |
| 2.2 სისტემის წრფივობა და მისი სტაციონარულობა                                                                       | 14  |
| 2.3 პირველი რიგის სისტემების მათემატიკური თვისებები                                                                | 18  |
| <u>3. მაღალი რიგის სისტემები</u>                                                                                   | 21  |
| 3.1 მატრიცების თეორიის ძირითადი ცნებები                                                                            | 21  |
| 3.2 მდგომარეობის განტოლების მატრიცული წარმოდგენა<br>მაგალითი: სიჩქარის რეგულატორის მდგომარეობის განტოლების შედგენა | 32  |
| 3.3 მდგომარეობის გარდამავალი მატრიცა და მისი არსი                                                                  | 37  |
| 3.4 წრფივი სტაციონალური სისტემის გარდამავალი მატრიცის განსაზღვრა                                                   | 39  |
| 3.5 ფაზური ცვლადების კანონიკურ ფორმაში გარდაქმნა                                                                   | 48  |
| 3.6 ჟორდანის კანონიკური ფორმა                                                                                      | 53  |
| 3.7 წრფივი სისტემები, რომლებიც არ შეიძლება აღიწერონ მდგომარეობის<br>ცვლადებით                                      | 57  |
| 3.8 ურთიერთკავშირი მდგომარეობის განტოლებებსა და გადაცემით ფუნქციებს<br>შორის                                       | 57  |
| <u>4. წრფივი სისტემების მდგრადობა</u>                                                                              | 61  |
| 4.1 წრფივი სისტემების მდგრადობა და მისი თვისებები                                                                  | 61  |
| 4.2 მდგრადი წრფივი სისტემის თვისებები                                                                              | 64  |
| 4.3 სტაციონალური წრფივი სისტემების მდგრადობა                                                                       | 65  |
| 4.4 სისტემის მდგრადობა შემავალ და გამოშვალ სიდიდეებს შორის<br>თანაფარდობის თვალსაზრისით                            | 66  |
| <u>5. უწყვეტი წრფივი სისტემების ლაპირვეზაობა და მართვაობა</u>                                                      | 74  |
| 5.1 უწყვეტი წრფივი სისტემების დაკვირვებადობა                                                                       | 75  |
| 5.2 უწყვეტი წრფივი სისტემების და მართვაობა                                                                         | 78  |
| 5.3 მართვადი/დაკვირვებადი/ქვესისტემების გამოყენება                                                                 | 82  |
| 5.4 მაგალითი:<br>თვითმფრინავის მართვის გამართვებული მოდელის გამოკვლევა                                             | 85  |
| <u>6. მდგომარეობის იდენტიფიკატორები</u>                                                                            | 89  |
| 6.1 დამკვირვებლების თეორია (ლიუნბერგერის იდენტიფიკატორის თეორია)                                                   | 89  |
| 6.2 სისტემების მოდალური მართვა,<br>რეგულატორების კონსტრუქციის ამოცანა                                              | 95  |
| <u>7. გადამხდელური ქანქარა და მისი ანალიზი მდგომარეობის სივრცის<br/>მეთოდის საშუალებით</u>                         |     |
| ლიტერატურა                                                                                                         | 101 |
|                                                                                                                    | 111 |

# CONTENTS

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <u>1. STATE SPACE OF DYNAMIC SYSTEM</u>                                                          | 9   |
| 1.1 State of System                                                                              | 9   |
| <u>2. FIRST-ORDER SYSTEMS</u>                                                                    | 11  |
| 2.1 State of System and It's Features                                                            | 13  |
| 2.2 Linearity and Time-Invariant Systems                                                         | 14  |
| 2.3 Mathematical Features of the First Order Systems                                             | 18  |
| <u>3. HIGH-ORDER SYSTEMS.</u>                                                                    | 21  |
| 3.1. Elementary Matrix Theory                                                                    | 21  |
| 3.2. Matrix Representation of State Equations<br>Case study: State Equation of a Speed Regulator | 32  |
| 3.3. State Transition Matrix                                                                     | 37  |
| 3.4. Transition Matrix of a Linear Time-Invariant System                                         | 39  |
| 3.5. Transformation to Phase-Variable Canonical Form                                             | 48  |
| 3.6. Jordan Canonical Form                                                                       | 53  |
| 3.7. Linear Systems - which are not discribed by State Variables                                 | 57  |
| 3.8. Relationship Between State Equations and Transfer Functions                                 | 57  |
| <u>4. STABILITY OF LINEAR SYSTEMS</u>                                                            | 61  |
| 4.1. Stability of Linear Systems and Their Features                                              | 61  |
| 4.2. Features of Stable Linear System                                                            | 64  |
| 4.3. Stability of Linear Time-Invariant Systems                                                  | 65  |
| 4.4. Stability of Linear Systems with inputs and outputs                                         | 66  |
| <u>5. CONTROLABILITY AND OBSERVABILITY OF LINEAR SYSTEMS</u>                                     | 74  |
| 5.1. Controllability of Linear Systems                                                           | 75  |
| 5.2. Observability of Linear Systems                                                             | 78  |
| 5.3. Controllable /Observable/ Subsystem                                                         | 82  |
| 5.4. Case study: Simulation of Airplanes Control                                                 | 85  |
| <u>6.IDENTIFICATORS OF STATE</u>                                                                 | 89  |
| 6.1 Theory of Observars                                                                          | 89  |
| 6.2. Model Control of System                                                                     | 95  |
| <u>7. STATE SPACE ANALYSIS OF A PIVOTED LINK IN A GRAVITY FIELD</u>                              | 101 |

სპეციალისტთა სამსჯავროზე წარმოდგენილი წიგნი არის ნაწილი იმ ნაშრომთა ციკლისა, რომელიც ჩაითქირა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრის მეცნიერ - თანამშრომლებმა ამერიკის შეერთებული შტატების დუკის უნივერსიტეტის ანალოგიური დეპარტამენტის პროფესორთან ერთად.

ნაშრომთა ციკლი ეხება ავტომატური მართვის თეორიის კუთხის, რომელიც წარმოდგენილი იქნება ცალკეული წიგნების სახით. წინამდებარე სახელმძღვანელოში განხილულია ავტომატური მართვის სისტემების აგების პრინციპები და მისი თვისებრივი ანალიზის მეთოდები. მოცემულია ძირითადი ცნებები, პრობლემათა დასმა და მათი გადაწყვეტა ავტომატური მართვის თეორიის თანამედროვე მეთოდების გამოყენებით. ამ მეთოდებში განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა მართვადობისა და დაკორექტებლობის პრინციპებს, მდგომარეობის სივრცის ანალიზსა და სისტემების მოდელის, მართვის, ლინამიკური სისტემების მდგომარეობის შესწავლის თანამედროვე მათემატიკური მოდელები "შემაჯალი გამაყალი" და "შემაჯალი - მდგომარეობა - გამაყალი" გამოთვლითი ტექნიკის სრული გამოყენებით. საშუალებას გვაძლევს არამართო დაეპირეპტით ავტომატური მართვის სისტემები, არამედ მოვადინოთ მართვის ალგორითმების პრაქტიკული რეალიზაცია.

მასალის გადმოცემა ხდება ევრისტიკულად, მკითხველის აქტიური მონაწილეობით და აუცილებელი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით. სადაც ეს საჭირო იყო, კომპრომისების გარეშე გამოვიყენეთ მკაცრი მათემატიკური ფორმულირება. თუმცა ავტორები შეეცადნენ აქცენტი გაეკეთებინათ ფორმალურ მათემატიკურ მოდელებსა და პრაქტიკულ რეალიზაციას შორის.

წიგნი დამყარებულია ავტორების პირად პედაგოგიურ და კვლევით გამოცდილებაზე, რომელიც ითვალისწინებს საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტისა და დუკის უნივერსიტეტის (აშშ) ტრადიციებს. განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს ავტორთა ერთი ნაწილის მასწავლებლების, - გამოჩენილი ქართველი მეცნიერებისა და პედაგოგების ნ.ვ.გაბაშვილის, კ.ბ.ბარამიძის, გ.კ.ტყეშელაშვილის, ა.ე.კერესელიძისა და შ.დ.გარსიაშვილის ღვაწლი ამ ტრადიციების ჩამოყალიბებაში.

ავტორები მადლიერები არიან ყველა იმ პირებისა, რომლებმაც ხელი შეუწვეს წიგნის მომზადებას. პირველ რიგში აღვნიშნავთ კოლეგებს სტუ-ს ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრიდან.

განსაკუთრებული აღვნიშნის ლირსი არიან ჩვენი ახალგაზრდა კოლეგები ო.თ.კიკილაშვილი და გ.რ.ჩხაიძე, რომლებმაც დიდი რუდუნებით მოამზადეს და კომპიუტერზე დააკაზმოდნენ წიგნის ტექსტი. მათი დახმარების გარეშე საეტეო იყო ამ სახელმძღვანელოს გამოცემა. ტექსტის მომზადებაში მონაწილეობა მიიღეს აგრეთვე კათედრის თანამშრომლებმა პ.დ.ჯობაძემ და ა.გ.დათიაშვილმა.

ავტორები დიდ მადლობას უხდებიან წიგნის რეცენზენტებს საქართველოს რესპუბლიკის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსებს ვ.კ.ჭიჭინაძეს და მ.ე.სალუქვაძეს ზოგიერთი შენიშვნისათვის, რომელთა გათვალისწინებამ გააუმჯობესა წიგნის შინაარსი.

წიგნი გათვლილია მკითხველთა ფართო წრისათვის: ინჟინრებისათვის, ასპირანტებისათვის, სტუდენტებისათვის, ყველასათვის, ვისაც სურს დაეუფლოს ავტომატური მართვის თანამედროვე თეორიას.

დღიე ხანია იდგა საკითხი ქართულ ენაზე ასეთი ორიგინალური წიგნის არსებობისა; რამდენად შეძლეს ეს ავტორებმა დაე. მკითხველმა განსაჯოს. ტექსტში ალბათ იქნება შეუმჩნეველი უზუსტობანი, შეიძლება სადაც შეცდომაც კი გაიპარა. ავტორები მადლობელი დარჩებიან ყველა მკითხველის მიმართ, რომლებიც არ დაიშურებენ შრომას და გამოგზავნიან თავიანთ შენიშვნებს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

ა.შ.გუგუშვილი  
თ.გ.იმედაძე  
დ.ფ.გარგი

თბილისი, საქართველოს რესპუბლიკა - დარკემი, ჩრდილოეთ კოროლინა. აშშ.  
1994 წ.

## Preface

This book specifically aims at presenting control system theory, by means of state space approach, in a way which will be subject obvious to students, designers and users alike. It presents an introductory account of state space analysis of control systems and furnishes a background necessary for studying modern control theory. After a brief introduction in Chapter 1, the mathematical model of the first order systems are presented in Chapter 2. Here used to describe an idealized system. Because modern control theory is based on theory of ordinary differential equations, matrices and vectors, a detailed treatment of the vector matrix differential equation is given in Chapter 3. This Chapter gives the time response consideration of control systems.

Chapter 4 presents stability analysis of linear systems and nonlinear systems. The concepts and definitions of controllability and observability are introduced in Chapter 5. Model control and identification are given in Chapter 6. The common example is considered in Chapter 7. The problems of illustrative example are carried out by means of considered techniques.

Most of the material presented in this book has been offered in the author's courses at the senior and post-graduate level in the Department of Control Engineering of Georgian Technical University and Duke University (USA).

The authors have been considerably Stimulated by the texts of Professors N. Gabashvili, K. Baramidze, G. Tkeshelashvili, A. Kereselidze, Sh. Garsiasvili. It is sincerely hoped that this book reflects the spirit of their teaching.

The authors wish to thank Professors V. Tchitchinadze and M. Salucvadze for their reviewing the manuscript and for most helpful comments.

It is a pleasure to acknowledge the assistance of O. Kikilashvili, G. Chkhaidze, P. Jokhadze and A. Datiashvili who expertly and patiently typed the manuscript.

Almaskhan Sh. Gugushvili,  
Theimuraz G. Imedadze,  
Devendra P. Garg,

Tbilisi: Republic of Georgia - Durham, North Carolina, USA.

1994

# 1. ღონისძიების სისტემის გაცემის სისტემა

## 1.1 სისტემის გაცემის სისტემა

მართვის კლასიკური თეორია განიხილავს წრფივ ღონისძიების სისტემებს გადაცემის ფუნქციების, იმპულსური ფუნქციების, ბლოკ-დიაგრამებისა და გრაფიკის თეორიის გამოყენებით. წრფივი სისტემების ამ მეთოდებით დახასიათება დაკავშირებული იყო ღონისძიების სისტემებში არსებული "შემაღლ-გამოშვით" ურთიერთკავშირების არსებობასთან. ე.ი მიზნულ-შედეგობრივი ურთიერთობის შესწავლასთან. მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული მეთოდები ძალზე მარტივია და გეგმევენ ეფექტურ შედეგებს, ღონისძიების სისტემების თავისებურებათა შესწავლა მარტო მათზე დაყრდნობით ვერ ამისწერავს ყველა იმ შესაძლებელ შემთხვევაში, რაც ასეთ სისტემებს გააჩნიათ. მაგალითად, გადაცემის ფუნქცია ახასიათებს წრფივი სისტემის მიზნულ-შედეგობრივ დამოკიდებულებას, ლაქასის გარდასახვითა არეში, რომელიც გამოირჩევა სისტემის წარსული და აწმყო მდგომარეობის გათვალისწინებას. სხვა სიტუაციებში რომ ვთქვათ, მხედველობაში არ ვიღებთ სისტემის საწყის პირობებს და განტოლების ამოხსნის შემთხვევაში ვერ ვითვალისწინებთ სისტემის წარსულ მდგომარეობას. ამიტომ, გადაცემის ფუნქცია სრულად ვერ განსაზღვრავს ღონისძიების სისტემის ყველა საჭირო ინფორმაციას, თუმცა გადაცემის ფუნქციის მეთოდი, თავისი სიმარტივის გამო, ფართოდ გამოიყენება მართვის სისტემების ანალიზისა და სინთეზის განხორციელებაში, მდგომარეობისა და თვისებების დამოკიდებულების საქმეში. მაგრამ ჩვენი მიზანია არა ნაწილობრივი ინფორმაციის მიღება ღონისძიების სისტემის დახასიათების დროს, არამედ შეძლებისდაგვარად სრული ინფორმაციის წარმოდგენა, რასაც გარკვეულწილად გვაძლევს მდგომარეობის სივრცის მეთოდი მდგომარეობის პარამეტრებზე დაყრდნობით.

მდგომარეობის სივრცე ეწოდება ისეთ მეტრიკულ სივრცეს, რომლის თვითოეული ელემენტი სრულად განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობას (მეტრიკულ სივრცეზე ცოტა მოგვიხსენიება, გვეყენება სახეობა). ეს მეთოდი შეგვიძლია გამოვიყენოთ არა მარტო წრფივი სისტემების დახასიათებად (როგორც, მაგალითად, ჯამბიკის ფუნქციის გამოყენების შემთხვევაში), არამედ არაწრფივი და არასტაციონალური ღონისძიების სისტემების გამოსავლენადაც. და კიდევ ერთი, რომ თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკა გვიადვილებს ამ მეთოდით სისტემის ღონისძიების თვისებების შემცენებას, მითუმეტეს, თუ საქმე ეხება მაღალი რიგის სისტემებს.

მდგომარეობის სივრცის მეთოდი (რომლისაც აგრეთვე, მდგომარეობის პარამეტრების მეთოდს უწოდებენ) ხშირად მიაკუთვნებენ მართვის სისტემების გამოკვლევის თანამედროვე ხეობას. თუმცა, როგორც ცნობილია, მდგომარეობის განტოლებანი წარმოადგენენ პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომლებიც დიდი ხანია გამოიყენება მათემატიკისა და ფიზიკის მიერ ღონისძიების სისტემების დახასიათებად. მდგომარეობის პარამეტრების მეთოდზე გადასვლაზე საჭიროა ვერ განსაზღვროთ, თუ რა არის სისტემის "მდგომარეობა". როგორც თვით სიტყვა "მდგომარეობა" გვიჩვენებს, ნებისმიერ ობიექტის სრული წარმოდგენა დაკავშირებულია მის წარსულ მდგომარეობასთან, მის აწმყოსა და მომავალზე, ანუ მდგომარეობაზე. საინტერესო მაგალითი, წარმოადგენს სახელმწიფოს მდგომარეობა ყოველ წელს. ამ შემთხვევაში სრული სისტემა მოიცავს მმართველობას, პოლიტიკას, საზოგადოებას, ეკონომიკას და სხვა ელემენტებს, რომლებთანაც განისაზღვრება სახელმწიფოს მდგომარეობა წარსულში, აწმყოში და მომავალში. ზოგადად, სისტემის მდგომარეობა შეიძლება აღწერილი იქნას რაღაც რიგებში, მრუდეებით, განტოლებებით ან სხვა მონაცემებით, რომლებიც თავისი ბუნებით შეიძლება წარმოადგენდნენ რაღაც აბსტრაქტულ სიდიდებს.

მათემატიკური თვალსაზრისით სისტემის ღონისძიების თვისებების ფორმალიზაციის მიზნით, მიზანშეწონილია ღონისძიების სისტემა განისაზღვროს მდგომარეობის პარამეტრებისა და მდგომარეობის განტოლებათა სისტემით. სისტემის მდგომარეობასა და მდგომარეობის პარამეტრებს შორის არსებობს გარკვეული დამოკიდებულება. მდგომარეობის პარამეტრების არჩევის განსაზღვრავს ჩვენს წინაშე დასმული ამოცანა. მაგალითად, თუ გვინტერესებს ელექტროლოგიკური ენერგიის წყაროს მართვის საკითხები (ელექტროსადგურის), მიზანშეწონილია ასეთ პარამეტრებად ავირჩიოთ ტემპერატურა, წნევა, სიქარე, ძაბვა და ა.შ. თუ იგივე ელექტროსადგურს განვიხილავთ გარეშის გატეხილობის თვალსაზრისით, მაშინ მდგომარეობის პარამეტრები სულ სხვა იქნება, ხოლო თუ განვიხილავთ ამ სისტემას ეკონომიკური ოპტიმიზაციის თვალსაზრისით, მივიღებთ მდგომარეობის განსაზღვრულ სურათს. არაკლასიკური დამოკიდებულებების ადგილი აქვს არამატრიკული და

იგივე ობიექტის სხვადასხვა ამოცანაში განხილვის დროს, არამედ ამ ობიექტის ერთი და იგივე სახის ამოცანის გადაწყვეტის დროს. აქ ძალზე დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ინჟინერ-ავტომატიკოსის ინტუიციას. რომელიც გაითვალისწინებს ყველა შესაძლო პარამეტრებს და მათგან ამოარჩევს არსებული სიტუაციის შესაბამის მთავარ პარამეტრებს.

## 2. პირველი რიგის სისტემები

მრავალი ფიზიკური სისტემა აღწერება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad (2.1)$$

და ფუნქციონალური თანადარდობებით (ალგებრული განტოლებებით)

$$y(t) = g(X(t), U(t), t), \quad (2.2)$$

სადაც  $t$ -დროა,  $U(t)$ -შემაველი ცვლადებია,  $Y(t)$ -გამომავალი ცვლადებია,  $X(t)$ -მდგომარეობის ცვლადებია.

სისტემები, რომლებიც აღიწერებიან (2.1) და (2.2) განტოლებებით, წარმოადგენენ პირველი რიგის სისტემებს. ისინი მნიშვნელოვანია არა მარტო თავისთავად, არამედ იმიტომ, რომ მათი საშუალებით შეიძლება შევადგათ უფრო რთული სისტემები.

### მაგალითი 2.1

განვიხილოთ  $m$  მასის მქონე წერტილოვანი სხეულის ვარდნა წინააღმდეგობიან ზღანტ გარემოში (ნახ.1), რომელიც პროპორციულია  $X(t)$  სიჩქარისა. სხეულზე მოქმედებს ორი გარეშე ძალა: მიზიდულობის ძალა  $mg$  და გარემოს წინააღმდეგობების ძალა  $-KX(t)$ . თუ აღვნიშნავთ  $d$  მანძილს სხეულიდან რომელიმე მოცემულ მდებარეობამდე, მაშინ მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

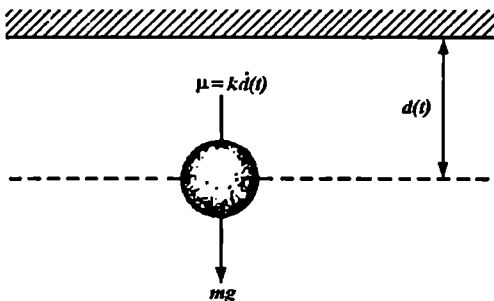
$$m\ddot{d}(t) = mg - K\dot{d}(t). \quad (2.3)$$

უნიდან  $X(t)$  სიჩქარე არის

$$\dot{X}(t) = \dot{d}(t), \quad (2.4)$$

მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\dot{X}(t) = -(K/m)X(t) + g. \quad (2.5)$$

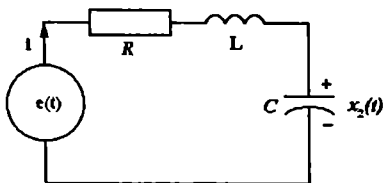


ნახ.1.

### მაგალითი 2.2

განვიხილოთ ნახ.2-ზე მოცემული RLC წრედი. თუ გამოვიყენებთ კირჰოფის კანონს, შეგვიძლია დავწეროთ ამ წრედის განტოლება:

$$e(t) = Ri(t) + L di(t)/dt + (1/c) \int i(t) dt. \quad (2.6)$$



ნახ.2

შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება არ არის ჩაწერილი მდგომარეობის განტოლების სახით, რადგანაც უკანასკნელი წევრი არის ინტეგრალი დროის მიხედვით. ამ განტოლებიდან მდგომარეობის განტოლების მიღების ერთი ხერხი მდგომარეობის შემდეგში. შევარჩიოთ მდგომარეობის ცვლადები ასე:

$$x_1(t) = i(t), \quad (2.7)$$

$$x_2(t) = \int i(t) dt. \quad (2.8)$$

თუ (2.6) განტოლებაში შევსტანთ (2.7) და (2.8) აღნიშვნებს, მივიღებთ:

$$e(t) = R x_1(t) + L dx_1(t)/dt + (1/C) x_2(t). \quad (2.9)$$

მოვახდინოთ (2.9) განტოლების წვერების გადაადგილება და (2.8) განტოლების გაწარმოება - მივიღებთ მდგომარეობის ორ განტოლებას:

$$dx_1(t)/dt = -(R/L)x_1(t) - (1/LC)x_2(t) + (1/L)e(t), \quad (2.10)$$

$$dx_2(t)/dt = x_1(t), \quad (2.11)$$

რომლებიც წარმოადგენენ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს.

ჩვენ ვაჩვენოთ, თუ RLC წრედის მდგომარეობის განტოლება როგორ შეიძლება მივიღოთ მდგომარეობის ცვლადების სპეციფიკური გზით განსაზღვრის შემთხვევაში. ალტერნატიული გზა მდგომარეობის შემდეგში: განვიხილოთ ზემოთ მოცემული წრედი და განსაზღვროთ წრედის ელემენტების საშუალებით მდგომარეობის ცვლადები. მდგომარეობის ცვლადებად შეგვიძლია შევარჩიოთ დენი. ინდუქციურობა და ძაბვა ტევადობაში. ამ განმარტების თანახმად, RLC წრედში მდგომარეობის პარამეტრები შეგვიცა ია ჩაეწეროთ ასე:

$$x_1(t) = i(t), \quad (2.12)$$

$$x_2(t) = e(t). \quad (2.13)$$

ვიცით რა, რომ მდგომარეობის განტოლების მარცხენა მხარე უნდა შეიცავდეს  $x_1(t)$  და  $x_2(t)$  ცვლადების პირველი რიგის წარმომებულებს, შეგვიძლია უშუალოდ შევადგინოთ შემდეგი სახის განტოლებანი:

ძაბვა L ინდუქტიუობაზე:

$$L(di(t)/dt) = -Ri(t) - e(t) + e(t). \quad (2.14)$$

დენი C ტევადობაზე:

$$C(de(t)/dt) = i(t). \quad (2.15)$$

გამოვიყენოთ (2.12) და (2.13) აღნიშვნები მიღებულ ბოლო ორ განტოლებაში და თანაც გავყოთ L-ზე და C-ზე. მივიღებთ:

$$dx_1(t)/dt = -(R/L)x_1(t) - (1/L)x_2(t) + (1/L)e(t), \quad (2.16)$$

$$dx_2(t)/dt = (1/C)x_1(t). \quad (2.17)$$

მიღებულ განტოლებანი წარმოადგენენ RLC წრედის მდგომარეობის ალტერნატიულ განტოლებებს. მდგომარეობის განტოლების მიღების ამ ორი ხერხიდან განსხვავება არის მხოლოდ მდგომარეობის მერვე ცვლადის განსაზღვრაში ე.ი.  $x_2(t)$ -ს განსაზღვრაში.

## 2.1 სისტემის მდგომარეობა და მისი თვისებები

სისტემის მდგომარეობა  $t_0$  მომენტში არის სისტემის ყოფაქცევის შესახებ ისეთი ცნობების ერთობლიობა, რომელიც ნებისმიერ შესაძლო შემავალ სიდიდესთან ერთად, მოცემულ  $t_0 \leq t \leq t_1$  მონაკვეთში, საკმარისია გამოშავალი სიგნალის ცალსახად განსაზღვრისათვის  $t_0 \leq t \leq t_1$  მომენტში. ნებისმიერი  $t_1 \geq t_0$ .

მდგომარეობის დინამიკის სტანდარტული განტოლებებია:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (2.18)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t). \quad (2.19)$$

(2.18) განტოლებას უწოდებენ მდგომარეობის დიფერენციალურ განტოლებას, (2.19) განტოლებას უწოდებენ შემავალი - მდგომარეობა - გამოშავალი ტიპის განტოლებას.

განვიხილოთ პრაქტიკულ ანალიზში ძალიან მნიშვნელოვანი სამი სახის მდგომარეობა: ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

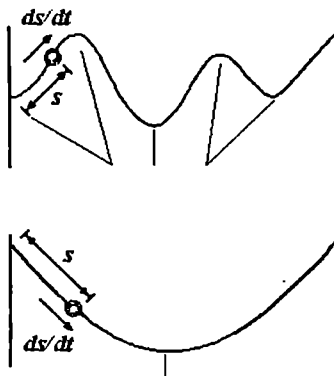
წინასწარ განვიხილოთ ნულოვანი მდგომარეობა. ნულოვანი მდგომარეობა, დამყარებული მდგომარეობა, წონასწორული მდგომარეობა.

### მაგალითი 2.3

მდგომარეობის ამ სამი ტიპის ილუსტრირება შეიძლება მოვახდინოთ ბურთულას მაგალითზე. რომელიც მათემატიკურ სივრცეში (ნ. 3), დავუშვათ, რომ მათემატიკური სივრცის სივრცის დროს წარმოიშობა ხახუნის ძალა, რომელიც მოქმედებს ბურთულაზე და ხელს უშლის მის მოძრაობას. იგულისხმება, რომ სიმძიმის ძალა მუდმივია. ბურთულას სიჩქარე პროპორციულია ჯამური ძალის იმ კომპონენტისა, რომელიც მოქმედებს ბურთულაზე მათემატიკური სივრცის გასწვრივ:

$$ds/dt = \mu t.$$

სისტემის მათემატიკური აღწერისათვის დავუშვათ, რომ ბურთულაზე მოქმედი ძალა (რომელიც შეიცავს სიმძიმის ძალას) წარმოადგენს შემავალ ცვლადს, ბურთულას სიჩქარე მათემატიკური სივრცის გამოშავალი ცვლადია და ბურთულას მდგომარეობა (მანძილი  $S$  მათემატიკური სივრცის მარცხენა ბოლოდან) არის სისტემის მდგომარეობა. წინასწორული მდგომარეობა მოცემულია (ნახ. 3). ამ სისტემას არა აქვს დამყარებული მდგომარეობა. ანალიზური სისტემა დამყარებული მდგომარეობით მოცემულია ნახ. 4. უნდა აღინიშნოს, წინასწორული და ნულოვანი მდგომარეობები არ იქნებოდნენ თანხვედრით, თუ გამოშავალ ცვლადად მივიჩნევდით სიმაღლეს რომელიმე დონის მიმართ. ამ შემთხვევაში იარსებებდა მხოლოდ სკალარული მდგომარეობა, განსაზღვრული ამორჩეული ნულოვანი დონით, იგი თანხვედრადი სიმაღლის ერთ-ერთი წინასწორული მდგომარეობისა. დანარჩენი წინასწორული მდგომარეობები არ არიან ნულოვანი მდგომარეობები (თუ დონეები არ თანხვედნიან).



ნახ. 3. წონასწორული მდგომარეობა და ნულოვანი მდგომარეობა.  
ნახ. 4 დამყარებული მდგომარეობა

## 2.2 სისტემის წარმოშობა ან სტატისტიკა

სისტემების წარმოშობა წარმოადგენს და მათ, შესწავლა, წრფივ თეორიაზე დაყრდნობით ჩვეულებრივად ხდება ორი მიზნის გამო:

1. მრავალი სისტემის მახასიათებელი არის წრფივი პარამეტრების ცვლილების განსაზღვრულ უბნებში.

2. წრფივი სისტემების მათემატიკური შესწავლა არის მარტივი, იმ დროს, როდესაც ზოგადი სისტემების შესწავლა არ ხერხდება. განსაზღვრა "წრფივობა" ნიშნავს გარკვეული პროპორციულობის არსებობას შემავალ და გამოშვალ ცვლადებს შორის. თუ სისტემის შემავალი ცვლადი არის ნულოვანი და სისტემის რეაქცია განსხვავდება ნულოვანისაგან, ცხადია, რომ ეს რეაქცია ერთადერთი შესაძლო რეაქციაა მოცემული საწყისი მდგომარეობისათვის. მას ეწოდება რეაქცია ნულოვან შემავალ ზემოქმედებაზე. აღვნიშნოთ, რომ თუ სისტემის მუშაობის დასაწყისი თანხვედრა ნულოვან მდგომარეობას, მაშინ რეაქცია ნულოვან შემავალ ზემოქმედებაზე უნდა იყოს ნულოვანი. ანალოგიურად განსაზღვრეთ რეაქციის ნულოვან მდგომარეობაზე, როგორც სისტემის რეაქციის ნებისმიერ შემავალ მდგომარეობაზე ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას.

### წარმოშობა ნულოვანი მდგომარეობის მიმართ

სისტემას ეწოდება წრფივი ნულოვანი მდგომარეობის მიმართ, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1. ერთგვაროვნობა. თუ ნებისმიერი  $x$  შემავალი ზემოქმედებისას  $y$  არის რეაქცია ნულოვან მდგომარეობაზე, მაშინ  $Cx$  შემავალი ზემოქმედებისას  $Cy$  არის რეაქცია ნულოვან მდგომარეობაზე,  $C$  ნებისმიერი მუდმივია.

2. ადტიურობა. თუ ნებისმიერი  $x_1$  შემავალი ზემოქმედებისას  $y_1$  არის სისტემის რეაქცია ნულოვან მდგომარეობაზე, ხოლო ნებისმიერი  $x_2$  შემავალი ზემოქმედებისას  $y_2$  არის რეაქცია ნულოვან მდგომარეობაზე, მაშინ შემავალი  $x_1 + x_2$  ზემოქმედებისას  $y_1 + y_2$  არის სისტემის რეაქცია ნულოვან მდგომარეობაზე.

## წრფივობა ნულოვანი შემაჯავლი ზემოქმედებებს მიმართ

სისტემის ეწოდება წრფივი ნულოვანი შემაჯავლი ზემოქმედების მიმართ, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. ერთგვაროვნობა. თუ სისტემის რეაქცია ნულოვან შემაჯავლ ზემოქმედებაზე, ნებისმიერ საწყის  $x_0$  მდგომარეობაზე, არის  $y_0$ , მაშინ სისტემის რეაქცია ნულოვან შემაჯავლ ზემოქმედებაზე, ნებისმიერ საწყის  $Cx_0$  მდგომარეობაზე, არის  $Cy_0$ .

2. ადითიურობა. თუ  $y_1$  არის რეაქცია ნულოვან შემაჯავლ ზემოქმედებაზე, ნებისმიერი საწყისი  $x_1$  მდგომარეობისას, ხოლო  $y_2$  არის რეაქცია ნულოვან შემაჯავლ ზემოქმედებაზე, ნებისმიერი საწყისი  $x_2$  მდგომარეობისას, მაშინ  $y_1 + y_2$  არის რეაქცია ნულოვან შემაჯავლ ზემოქმედებაზე  $x_1 + x_2$  საწყისი მდგომარეობის დროს. საილუსტრაციოთ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითები:

### მაგალითი 2.4

განვიხილოთ სისტემა, რომლისთვისაც რეაქცია ნულოვან შესასვლელზე მოცემულია გამოსახულებით:

$$Y(t) = \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0,$$

სადაც  $u(t)$  არის ნამდვილი ცვლადი, ფუნქცია. ეს სისტემა არის ერთგვაროვანი. თუ სისტემის რეაქცია  $u$ -ზე არის  $y$ , მაშინ რეაქცია  $Cu$ -ზე არის  $Cy$  ნებისმიერი  $C$  მუდმივასათვის და ნებისმიერი  $u$  შემაჯავლი ცვლადისათვის. ეს სისტემა არის აგრეთვე ადითიური. თუ სისტემის რეაქცია  $u_1$ -ზე არის  $y_1$ , ხოლო რეაქცია  $u_2$ -ზე არის  $y_2$ , მაშინ რეაქცია  $u_1 + u_2$  შემაჯავლ სიგნალზე არის  $y_1 + y_2$ , ე.ი. სისტემა არის წრფივი ნულოვანი მდგომარეობის მიმართ.

### მაგალითი 2.5

განვიხილოთ სისტემა, რომლის რეაქცია ნულოვან მდგომარეობაზე არის:

$$y(t) = [u(t)]^2.$$

ეს სისტემა არაერთგვაროვანია. ვინაიდან, თუ  $y$  არის სისტემის რეაქცია  $u$ -ზე, მაშინ სისტემის რეაქცია  $Cy$ -ზე იქნება  $C^2y$ . სისტემა არის აგრეთვე არაადითიური: თუ სისტემის რეაქცია  $u_1$ -ზე არის  $y_1$  და  $u_2$ -ზე  $y_2$ , მაშინ სისტემის რეაქცია  $(u_1 + u_2)$ -ზე არ არის  $y_1 + y_2$ .

### მაგალითი 2.6

განვიხილოთ სისტემა, რომლისთვისაც რეაქცია ნულოვან შემაჯავლ ზემოქმედებაზე მოცემულია შემდეგი გამოსახულებით:

$$y(t) = e^{-(t-t_0)} x(t_0).$$

ადვილად გასარკვევია, რომ ეს სისტემა ერთგვაროვანია და ადითიურია ნულოვანი შემაჯავლი ზემოქმედებისას. მაშასადამე, ის წრფივია ნულოვანი შემაჯავლი ზემოქმედების მიმართ. თუ განვიხილავთ RC წრედს (ნახ.5), რომლის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი არის:

$$y(t) = \exp[-(1/RC)(t-t_0)] x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[-(1/RC)(t-\tau)] u(\tau) d\tau,$$

სადაც  $y(t)$  გამომაჯავლი სიდიდეა,  $X(t)$ -ძაბვაა კონდენსატორზე, ადვილი მისახვედრია,

რომ ამონახსნი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას ნულოვანი მდგომარეობისა და ნულოვანი შემავალი სიდიდის მიმართ.

## დეკომპოზიციის თვისება

სისტემას ახასიათებს დეკომპოზიციის თვისება, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: თუ  $y_0$  არის სისტემის რეაქტია ნულოვან შემავალ სიდიდეზე ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობისათვის და  $y_u$  - რეაქტია ნულოვან შემავალზე ნებისმიერი საწყისი ზემოქმედებისას, მაშინ ჯამური რეაქტია იმავე საწყის მდგომარეობასა და შემავალ ზემოქმედებაზე არის  $y_0 + y_u$ .

## წრფივობა

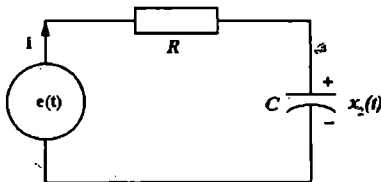
სისტემას ეწოდება წრფივი, თუ ის არის წრფივი ნულოვანი მდგომარეობის მიმართ. აგრეთვე, წრფივია ნულოვანი შემავალი ზემოქმედების მიმართ და აკმაყოფილებს დეკომპოზიციის პირობას.

## სტასიონარურობა

სისტემას ეწოდება სტაციონალური, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: თუ  $y(t)$  არის სისტემის რეაქტია ნებისმიერ შემავალ  $u(t)$  სიგნალზე დროის  $t_0$  მომენტში, ნებისმიერ საწყის  $X_0$  მდგომარეობისას, მაშინ  $y_h(t)$  არის რეაქტია შემავალ  $u_h(t)$  ზემოქმედებაზე საწყისი  $X_0$  მდგომარეობისას დროის  $t_0$  მომენტში.

## მაბატლითი 2.7

განვიხილოთ RC წრედი, რომელიც მოცემულია ნახ.5-ზე.



ნახ.5

თუ კონდენსატორზე ძაბვას ჩავთვლით გამომავალ სიგნალად, მაშინ შემავალი-მდგომარეობა-გამომავალ თანაფარდობას  $t_0$  საწყისი მომენტისა და შემავალი  $u(t)$  ზემოქმედებისათვის აქვს სახე:

$$y(t) = \exp[-(1/RC)(t-t_0)] x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[-(1/RC)(t-\tau)] u(\tau) d\tau.$$

მოცემული სისტემის რეაქტია შემავალ  $u_h(t)$ -ზე,  $t_1$  საწყის მომენტში, შემდეგი სახისაა:

$$y(t) = \exp[-(1/RC)(t-t_1)] x(t_1) + \int_{t_1}^t \exp[-(1/RC)(t-\tau)] u_h(\tau) d\tau.$$

ვინაიდან  $u_h(t) = u(t-\tau)$ , ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$y(t) = \exp[-(1/RC)(t-t_1)] x(t_1) + \int_{t_1-h}^{t-h} \exp[-(1/RC)(t-h-\sigma)] u(\sigma) d\sigma.$$

სტაციონალურობის შემოწმებისათვის დაეშვათ, რომ  $t_1 = t_0 + h$  და  $x(t_1) = x(t_0)$ , მაშინ

$$y(t) = \exp[-(1/RC)(t-h-t_0)] x(t_0) + \int_{t_0}^{t-h} \exp[-(1/RC)(t-h-\sigma)] u(\sigma) d\sigma = y(t-h) = y_h(t)$$

ე.ი. მოცემული სისტემა სტაციონალური და წრფივია.

განვიხილოთ სტაციონალურობის ორი ძირითადი სახე:

**სტაციონალურობა ნულზეანი მდგომარეობის მიმართ**

სისტემას ეწოდება სტაციონალური ნულოვანი მდგომარეობის მიმართ, თუ ის სტაციონალურია, როდესაც მისი საწყისი მდგომარეობა არის ნულოვანი.

**სტაციონალურობა ნულზეანი შემავალი ზემოქმედების მიმართ**

სისტემას ეწოდება სტაციონალური ნულოვანი შემავალი ზემოქმედების მიმართ, თუ ის სტაციონალურია ნულოვანი შემავალი სიგნალის მიმართ. უნდა აღინიშნოს, რომ სტაციონალური სისტემა არის ერთდროულად სტაციონალური ნულოვანი მდგომარეობისა და სტაციონალური ნულოვანი შემავალი სიგნალის მიმართ. უკუ მსჯელობა არასამართლიანია. სისტემის წრფივობა და სტაციონალურობა არის დამოუკიდებელი თვისებები. ეს კარგად ჩანს შემდეგი მაგალითიდან.

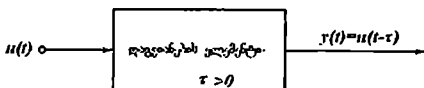
## მაგალიტი 2.8

განვიხილოთ დაცოვნების იდეალური ელემენტი (ნახ.6), რომელიც აღიწერება შემდეგი თანადროლობით:

$$y(t) = u(t-\tau), \quad \tau \geq 0.$$

წრფივობის შესაწმენდლად დაეშვათ, რომ  $y_0(t)$  არის რეაქცია შემავალ  $u_0(t)$  ზემოქმედებაზე ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას

$$y_0(t) = u_0(t-\tau)$$



ნახ.6

გამოშვებული სიგნალი  $y_b(t)$  არის რეაქცია შემავალ  $u_b(t)$ -ზე ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას, ე.ი.

$$y_b(t) = u_b(t-\tau).$$

დაეშვათ შემავალ ზემოქმედებას აქვს სახე

$$u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t),$$

სადაც  $\alpha$  და  $\beta$  მუდმივებია. სისტემის რეაქცია ნულოვან საწყის მდგომარეობისას არის

$$y_{ab}(t) = u_{ab}(t-\tau) = \alpha u_a(t-\tau) + \beta u_b(t-\tau) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t).$$

მაშასადამე, სისტემა არის წრფივი ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას. მოვახდინოთ სისტემის სტაციონალურობის შემოწმება ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას, როდესაც შემავალ ზემოქმედებას აქვს სახე:

$$u_h(t) = u(t-h),$$

მაშინ გამოიყენო სიგნალი იქნება:

$$y(t) = u_h(t-\tau) = u((t-\tau)-h).$$

უნაიდან

$$y_h(t) = y(t-h) = u(t-\tau-h),$$

მაშინ

$$y(t) = y_h(t).$$

მაშასადამე, დაყოვნების იდეალური ელემენტი არის სტაციონალური ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას. ე.ი. დაყოვნების იდეალური ელემენტი არის წრფივი და სტაციონალური ნულოვანი საწყისი მდგომარეობისას.

## 2.3 პირველი რიგის სისტემების მათემატიკური თვისებები

განვიხილოთ პირველი რიგის სისტემების დინამიკის აღმწერი განტოლებები:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t), \quad (2.20)$$

$$y(t) = c(t)x(t) + d(t)u(t). \quad (2.21)$$

ჯერ ვიპოვოთ (2.20) განტოლების ამონახსნი. როგორც ცნობილია, (2.20) განტოლების ამონახსნი შედგება ორი შესაკრებლისაგან: ერთგვაროვანი და კერძო ამონახსნისაგან. ერთგვაროვანი განტოლება ამოიხსნება შემდეგნაირად: (2.20)-დან ელემენტარულად, რომ

$$dx(t)/dt = a(t)x(t). \quad (2.22)$$

(მიღებულია მხედველობაში, რომ შემაჯავლი ზემოქმედება ნულოვანია).

გამოვიყენოთ ცვლადების ტანცალკაების მეთოდი. (2.22) განტოლება გარდაქმნათ შემდეგნაირად:

$$d \ln [x(t)/x(\tau)] = a(t) dt. \quad (2.23)$$

მოვახსნიოთ (2.23) ინტეგრირება  $\tau$ -დან  $t$ -მდე.

$$\ln [x(t)/x(\tau)] = \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi,$$

ან

$$x(t) = \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] x(\tau),$$

ან

$$x(t) = \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] x(t_0), \quad (2.24)$$

$x(t_0)$  საწყისი მნიშვნელობაა  $t_0$  მომენტში.

ვინაიდან პირობა  $\exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right]$  აღწერს სისტემის მოძრაობას  $t$  და  $\tau$  მომენტებს

შორის ნულოვანი აღშფოთებისას, გამოსახულებას

$$\phi(t, \tau) = \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] = x(t)x^{-1}(\tau)$$

უწოდებენ მდგომარეობის გარდამავალ ფუნქციას. ის ხასიათდება შემდეგი ორი თვისებით:

$$\phi(t, \tau) = 1,$$

$$\partial \phi(t, \tau) / \partial t = a(t) \phi(t, \tau).$$

პირველი რიგის სისტემებისათვის მიღებული მდგომარეობის გარდამავალი ფუნქცია შეიძლება განზოგადებული იყოს მაღალი რიგის სისტემებისათვის. ახლა განვიხილოთ (2.20) განტოლების კერძო ამონახსნი. დაეუყვას. რომ  $\lambda(t)$  არის (2.20) განტოლების ერთგვაროვანი ამონახსნი, ასე რომ

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= a(t)\lambda(t), \\ \lambda(t_0) &= \lambda_0.\end{aligned}\quad (2.25)$$

აეილოთ შემდეგი სახის კერძო ამონახსნი

$$x(t) = \lambda(t) \eta(t), \quad (2.26)$$

სადაც  $\eta(t)$ -დროის ნებისმიერი ფუნქციაა.  $\lambda(t)$ -ერთგვაროვანი განტოლების არატრივიალური (არანულოვანი) ამონახსნია. ძვეტანოთ (2.26) გამოსახულება (2.20) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\lambda(t) \eta(t) = b(t)u(t), \quad (2.27)$$

ან

$$\eta(t) = \lambda^{-1}(t)b(t)u(t). \quad (2.28)$$

$\lambda^{-1}(t)$ - ფუნქცია არსებობს დროის ყველა სასრულო მნიშვნელობათვის, ვინაიდან  $\lambda(t)$  არატრივიალური ამონახსნია. თუ გაიხდენთ (2.28) განტოლების ინტეგრირებას და მიღებულ შედეგს გავამრავლებთ  $\lambda(t)$ -ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$x(t) = \lambda(t) \eta(t) = \int_{t_0}^t \lambda(t) \lambda^{-1}(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau.$$

(აღვნიშნოთ, რომ  $(t_0)=0$ ). ვინაიდან

$$\lambda(t) = \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] \lambda(\tau), \quad (2.29)$$

კერძო ამონახსნი მიიღებს სახეს:

$$x(t) = \int_{\tau}^t \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] b(\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

საერთო ამონახსნი, (2.29) და (2.30) გათვალისწინებით, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x(t) = \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] x(t_0) + \int_{\tau}^t \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] b(\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

ე.ი. თანაფარდობა შემავალი-მდგომარეობა-გამომავალი პირველი რიგის სისტემებისათვის ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}y(t) = c(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\xi) d\xi \right] x(t_0) + \int_{t_0}^t c(t) \exp \left[ \int_{\tau}^t a(\xi) d\xi \right] b(\tau) u(\tau) d\tau + \\ + d(t) u(t).\end{aligned}\quad (2.32)$$

თუ დავუშვებთ, რომ პირველი რიგის სისტემა არის სტაციონალური, მაშინ განტოლებები (2.20) და (2.21) მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned}x(t) &= ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= cx(t) + du(t).\end{aligned}\quad (2.33)$$

გამოსახულებები (2.31) და (2.32) სტაციონალურობის გათვალისწინებით მიიღებენ სახეს:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau, \quad (2.34)$$

$$y(t) = ce^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t). \quad (2.35)$$

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $X_0=0$  და  $t_0 \rightarrow \infty$ . მაშინ (2.35)-დან მივიღებთ:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t),$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \left[ ce^{a(t-\tau)} b + d\delta(t-\tau) \right] u(\tau) d\tau. \quad (2.36)$$

აქ მიღებულია მხედველობაში დირაკის  $\delta(t)$  ფუნქციის ერთი თვისება

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t).$$

აღვნიშნოთ:

$$h(t)=ce^{at}b+d\delta(t). \quad (2.37)$$

$h(t)$  ფუნქციას უწოდებენ სისტემის ზირთეს - წონით აქეციას, ან იმპულსურ რეაქციას. თუ გამოვიყენებთ (2.36) და (2.37) მივიღებთ ჩვეულებრივ ნახვევის ინტეგრალს:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.38)$$

ამ განტოლების ამოხსნა წინამდებარე ნაშრომის შესწავლის საგანს არ წარმოადგენს და განიხილება სპეციალურ კურსში.

### 3. მაღალი რიგის სისტემები

ძირითადად განსახილველი სისტემები ხასიათდება რამდენიმე შემაჯავლი და გამომაჯავლი ცვლადებით. ამიტომ საჭიროა განვაზოგალოთ ის შედეგები, რომლებიც განხილული იყო პირველი რიგის სისტემების შესწავლისას. ამისათვის მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ მატრიცების თეორია.

#### 3.1 მატრიცების თეორიის ძირითადი სწავლებები

განვიხილოთ  $n$  უცნობიანი  $m$  წრფივი ალგებრული განტოლებები

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m, \end{aligned} \quad (3.1)$$

სადაც

$y_i (i=1, \dots, m)$  - ნებისმიერი რიცხვია.

$a_{ij} (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n)$  - მუდმივი კოეფიციენტები

$x_j (j=1, \dots, n)$  - უცნობებია.

(3.1) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცულ აღნიშვნებში

$$AX = Y, \quad (3.2)$$

სადაც  $A$  არის  $m \times n$  განზომილების რიცხვების სწორკუთხოვანი ცხრილი

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

$X$  არის  $n \times 1$  განზომილების მატრიცა

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

$Y$  არის  $m \times 1$  განზომილების მატრიცა

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

$Y$  მატრიცა არის ნამრავლი  $A$  მატრიცისა  $X$  მატრიცაზე, ელემენტების სწორკუთხოვანი ცხრილი, რომელსაც აქვს  $m$  სტრიქონი და  $n$  სვეტი უწყობის  $m \times n$  განზომილების მატრიცას. თუ  $m=n$ , მაშინ მატრიცას უწოდებენ კვადრატულს.  $m=n$  ოცსვეს უწოდებენ მატრიცის რიგს.

$m \times n$  განზომილების  $A$  მატრიცის და  $m \times r$  განზომილების  $B$  მატრიცის ნამრავლს უწოდებენ  $n \times r$  განზომილების  $C$  მატრიცას, რომლისთვისაც

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{kj} \quad (3.6)$$

ყველა  $i=1,2,\dots,n$ ,  $j=1,2,\dots,r$ .

### მაბეჭდი 3.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$C=AB = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 9 \\ 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1 & 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 & 4 \times 1 + 5 \times 4 + 6 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 36 \\ 15 & 32 & 78 \end{bmatrix}.$$

ორ  $n \times n$  განზომილების მატრიცას უწოდებენ კომუტატიურს, თუ სრულდება პირობა  $AB=BA$

### მაბეჭდი 3.2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$AB \neq BA$$

ორი  $A=[a_{ij}]$  და  $B=[b_{ij}]$   $m \times n$  განზომილების სკალარული მატრიცის ჯამი ეწოდება  $m \times n$  განზომილების  $C$  მატრიცას:  $C = A+B$ . სადა  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $i=1,2,\dots,m$  და  $j=1,2,\dots,n$ .

### მაბეჭდი 3.3

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

თუ  $A$ -ს მატრიცის

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

მაშინ მატრიცას

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

რომელიც მიიღება მატრიცის სტრიქონების სვეტებით შეცვლით, უწოდებენ ტრანსპონირებულს.

## მსაგზავრელები

თუ  $A$  არის  $n$  რიგის კვადრატული მატრიცა, მაშინ  $A$  მატრიცის დეტერმინანტი გამოითვლება ლაპლასის შემდეგი ფორმულით

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}, \quad (3.7)$$

ან

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \quad (3.8)$$

ნებისმიერი  $i$ -ათვის.  $\Delta_{ij}$  არის  $a_{ij}$ -ის ალგებრული დამატება. როგორც ვიცით  $a_{ij}$  ელემენტის ალგებრული დამატება გამოითვლება გამოსახულებით

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (3.9)$$

$M_{ij}$  -  $a_{ij}$  ელემენტის მინორია, რომელიც მიიღება  $A$  მატრიცაში სტრიქონის და  $j$ -სვეტის ამოშლით. მაგალითად, პირველი რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი  $a$ -ს ტოლია. მეორე რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი აღინიშნება შემდეგნაირად

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

მესამე რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი აღინიშნება შემდეგნაირად

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

### მაგალითი 3.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= 1 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 3 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 1[1 \times 3 - 1 \times 1] - 2[1 \times 3 - 1 \times 2] + 3[1 \times 1 - 1 \times 2] = -3. \end{aligned}$$

## წრფივი ვექტორული სივრცე და მისი თვისებები

ველი წარმოადგენს ისეთ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ჯამს, სხვაობას, ნამრავლს. გაყოფას (თუ გამყოფი არაა ნულის ტოლი) ამ ველის ნებისმიერი ორი რიცხვისათვის.

მაგალითად, გვაქვს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და, აგრეთვე, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე. ვექტორების  $L$  სიმრავლეს უწოდებენ წრფივ ვექტორულ სივრცეს. თუ მისი ყველა ორი ვექტორისათვის განსაზღვრულია აჯამების ოპერაცია და ყველა ვექტორისათვის განსაზღვრულია გამრავლების ოპერაცია  $\Phi$  ველის ელემენტებზე შემდეგი აქსიომების შესრულებისას.

### აჯამება

ნებისმიერი  $f \in L$  და  $g \in L$  გვაქვს

$$f + g \in L. \quad (3.10)$$

ამას გარდა:

1.  $f + g = g + f$ , ყველა  $f, g \in L$  (კომუტატიურობა).
2.  $(f + g) + h = f + (g + h)$ , ყველა  $f, g, h \in L$  (ასოციატიურობა).
3. არსებობს ელემენტი  $0 \in L$  ისეთი, რომ  $f + 0 = f$ , ყველა  $f \in L$
4. ყველა  $f \in L$  არსებობს შებრუნებული ელემენტი  $g \in L$ . ისეთი, რომ  $f + g = 0$ .

### რისხვზე გამრავლება

ნებისმიერი ვექტორისათვის  $f \in L$  და ყველა სკალარისათვის  $\alpha \in \Phi$  გვაქვს

$$\alpha f \in L. \quad (3.11)$$

ამას გარდა

5.  $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ , ყველა  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $f \in L$  (ასოციატიურობა).
6.  $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ , ყველა  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $f \in L$

და

$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ , ყველა  $\alpha \in \Phi$ ,  $f, g \in L$  (დისტრიბუტიულობა).

7. არსებობს ისეთი ელემენტი  $1 \in \Phi$ , რომ  $1f = f$ , ყველა  $f \in L$ .

ვექტორული სივრცის ერთ-ერთი მარტივი მაგალითია ნამდვილ რიცხვთა მოწესრიგებულ წყვილთა სიმრავლე:

$$X'(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 \in R', \quad \xi_2 \in R'.$$

გეომეტრიულად ასეთი წრფივი ვექტორული სივრცე წარმოადგენს სიბრტყეს. ამ სივრცეს უწოდებენ ორგანიზაციულ სივრცეს ან

$$R^2 = R' \times R'.$$

სადაც  $X$  ს  $R$  ან  $R'$  ნიშნავს რეალურ ნამრავლს.

## ვექტორების წრფივი დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა

ვექტორების სიმრავლეს  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  უწოდებენ წრფივად დამოკიდებულს, თუ არსებობს ისეთი სკალარები  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , რომელთაგან ერთ-ერთი მაინც

განსხვავდება ნულისაგან და ისეთები, რომ

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k = 0. \quad (3.12)$$

ვექტორების სიმრავლეს  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  უწოდებენ წრფივად დამოუკიდებელს, თუ ტოლობიდან

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k = 0$$

გამომდინარეობს

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0. \quad (3.13)$$

$m \times n$  განზომილების მატრიცის რანგი ეწოდება არასინგულარული კვადრატული მატრიცის უმაღლეს რიგს, როდესაც საწყის მატრიცას მოეპოვებოდა სტრუქტურა ან სვეტებს.

### მაბაღიში 3.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

ვინაიდან  $\det(A)=0$ ,  $A$  მატრიცის რანგი 3-ზე ნაკლებია. რადგან ერთი მინორი

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

ამიტომ, რანგი უფროსი 2-ს,  $\text{rank}=2$ .

კვადრატულ  $A$  მატრიცას, რომლისთვისაც სიმართლიანია  $A^{-1}$ , უწოდებენ სიმეტრიულ მატრიცას. ე.ი. სრულდება პირობა  $a_{ij}=a_{ji}$ ,  $i,j=1..n$ . დიაგონალური ელემენტები  $a_{ii}$  არის სიმეტრიული.

### ბანჯომილიზება

წრფივ  $L$  ვექტორულ სივრცეს ეწოდება სასრულო განზომილებიანი. ხოლო  $n$ -ს უწოდებენ სივრცის განზომილებას. თუ არსებობს  $n$  წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები  $L$ -დან, და ნებისმიერი  $n+1$  ვექტორები  $L$ -დან არიან წრფივად დამოკიდებული. თუ სივრცე შეიცავს რაგინდ დიდ რიცხვს წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორებს, მაშინ ასეთ სივრცეს უწოდებენ უსასრულო განზომილებიანს.

შემდეგში ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ სასრულო განზომილებიან სივრცეებს.

### ბაზისი

წრფივი ვექტორული სივრცის  $L$  წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების სიმრავლეს  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  უწოდებენ მის ბაზისს, თუ ნებისმიერი  $X$  ვექტორი  $L$  სივრციდან შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$X = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$$

სადაც  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - რიცხვებია.

### შებრუნებული მატრიცა

შებრუნებული მატრიცა განისაზღვრება ფორმულით:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}, \quad (3.14)$$

სადაც  $\text{adj } A$ -ს უწოდებენ  $A$  მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას. რომელიც მიიღება  $A$  მატრიცის  $a_{ij}$  ელემენტის შეცვლით მისი ალგებრული დამაკმატებელი და შემდეგ მათი ტრანსპონირებით.

### მაბაღიში 3.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

განვიხილოთ ელემენტი  $a_{21}=2$ ; ამ ელემენტის მინორი არის მატრიცა

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

ბოლო

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = -1.$$

აღნიშნული ელემენტის ალგებრული დამატება ტოლია

$$v_{1j} = (-1)^{1+j} \mu_{1j}, \quad (3.15)$$

სადაც  $\mu_{1j}$  არის  $(n-1) \times (n-1)$  განზომილებიანი მატრიცა, მიღებული  $A$  მატრიცაში სტრიქონების და სვეტების ამოგდებათ, რომელშიც არის ელემენტი  $a_{1j}$ .

$a_{21}$  ელემენტის ალგებრული დამატება ტოლია:

$$(-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = +1.$$

$A$  მატრიცასთან მიერთებულ მატრიცას აქვს სახე:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = (12-1) - 2(-1) = 13.$$

ა  $A$  მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ტოლია:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}.$$

აგრეთვე ადვილი სანახაია, რომ სრულდება პირობა:  $AA^{-1} = I$ .

### მაგალითი 3.7

ვიპოვოთ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. ვინაიდან  $|A| = \Delta = 3$  განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ  $A^{-1}$  შებრუნებული მატრიცა არსებობს. გამოვთვალოთ  $A$  მატრიცის ყველა ელემენტების მინორები.

,

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

მასშაბად, მიერთებული მატრიცა A-ს მიმართ

$$\text{adj } A = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{vmatrix},$$

ხოლო შებრუნებული მატრიცა

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \text{adj } A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{vmatrix}.$$

### მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები

მატრიცული ანალიზის ეს ორი განსაზღვრება დიდ როლს თამაშობს მრავალი ფიზიკური ამოცანის შესწავლისას. წრფივი სისტემების ანალიზისას საკუთრივი მნიშვნელობები განსაზღვრავენ განსახილველი დინამიკური სისტემის საკუთარ რხევებს. ხოლო საკუთრივი ვექტორები საშუალებას გვაძლევენ სისტემის განტოლებები მივიყვანოთ ვგრეთწოდებულ ფორდანის კანონიკურ ფორმებზე. ეს ყველაფერი სამართლიანია მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის.

განტოლება  $y = AX$  წარმოადგენს ვექტორ  $X$ -ის წრფივ გარდაქმნას.  $A$  არის კვადრატული მატრიცა.

ხშირად საკითხა ეიზენშტის  $X$  ვექტორი და  $\lambda$  სკალარი, რომ განტოლება

$$AX = \lambda X$$

აკმაყოფილებდეს რომელიმე მოცემული კვადრატულ  $A$  მატრიცას.  $\lambda$  სკალარი, რომლისთვისაც კმაყოფილდება (3.16) განტოლება, უწოდებენ საკუთრივ მნიშვნელობას.

გადავწეროთ (3.16) განტოლება შემდეგნაირად:

$$(A - \lambda I)X = 0, \quad (3.17)$$

საიდანაც გვაქვს

$$|A - \lambda I| = 0. \quad (3.18)$$

(3.18) წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას არატრივიალური  $\lambda$ -ს არსებობისათვის.  $I$  არის ერთეულოვანი მატრიცა და უდრის

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

დავშალოთ (3.18) მწკრივად. მივიღებთ  $n$  რიგის პოლინომს  $P(\lambda)$  მისი მისახაველ განტოლებას. რომლის ფესვებს  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  უწოდებენ საკუთრივ მნიშვნელობებს.

ყოველ  $\lambda_i$  მნიშვნელობას შეესაბამება ვექტორი  $v_i$ , რომელიც აკმაყოფილებს (3.16).

ე.ი.

$$A v_i = \lambda_i v_i.$$

$v_1$  ვექტორს უწოდებენ საკუთრივ ვექტორს. რომელიც შეესაბამება საკუთრივ მნიშვნელობას.

### მაგალითი 3.8

განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნა. რომელიც განისაზღვრება მატრიცით:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

მახასიათებელი განტოლება ჩაიწერება:

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

საკუთრივი მნიშვნელობებია:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0, \\ (\lambda + 1)(\lambda + 2) &= 0, \\ \lambda_1 &= -1; \quad \lambda_2 = -2. \end{aligned}$$

საკუთრივი ვექტორების მოსაძებნად განვიხილოთ:

$$(A - \lambda_1 I)\xi_1 = 0,$$

ან

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

აქედან

$$\xi_{11} + \xi_{21} = 0, \quad \xi_{11} = 1; \quad \xi_{21} = -1$$

ამიტომ, საკუთრივი ვექტორი. რომელიც შეესაბამება  $\lambda_1 = -1$ , არის შემდეგი სახის

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

უბრალოდ. საკუთრივი ვექტორი ერთადერთი მაგალითად

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს პირობას.

ახლა განვიხილოთ:

$$(A - \lambda_2 I)\xi_2 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$2\xi_{12} + \xi_{22} = 0.$$

საიდანაც

$$\xi_{22} = 1; \quad \xi_{12} = -\frac{1}{2}.$$

ე.ი.

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### მაბეზლი 3.9

განვიხილოთ მატრიცა:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -8 & -4 & -7-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8 = 0.$$

საკუთრივი მნიშვნელობებია:

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = -4.$$

$\lambda_1$ -ს შესაბამისად:

$$Av_1 = -v_1.$$

ეს გვაძლევს:

$$\begin{aligned} v_{12} &= -v_{11}; & v_{13} &= -v_{12} = v_{11}, \\ -8v_{11} - 14v_{12} - 7v_{13} &= -v_{11}. \end{aligned}$$

სადაც

$v_{11}, v_{12}, v_{13}$  არის  $v_1$  ვექტორის მდგენელები.

თუ მივიღებთ მხედველობაში  $v_{11} = 1$ ,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

### კვადრატული ფორმები

თუ  $A$  არის მატრიცა  $n \times n$ , ხოლო  $X$   $n$ -განზომილებიანი ვექტორია. მაშინ:

$$XAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (3.20)$$

ეს ნამრავლი არის სკალარი და უწოდებენ კვადრატულ ფორმას.  $A$ -არის სიმეტრიული მატრიცა.

თუ  $X'AX > 0$  ყველა  $x \neq 0$ , მაშინ ამბობენ, რომ კვადრატული ფორმა არის დადებითად განსაზღვრული. ასეთ შემთხვევაში  $A$  მატრიცას უწოდებენ დადებითად განსაზღვრულს. თუ  $X'AX \geq 0$  ყველა  $x \neq 0$ , უწოდებენ არაუარყოფითად განსაზღვრულს ან დადებითად ნახევრადგანსაზღვრულს. თუ  $X'AX < 0$  ყველა  $x \neq 0$ , უწოდებენ უარყოფითად განსაზღვრულ მატრიცას.

### ქვე-ჰამილტონის თეორემა

ყოველი  $n$  რიგის კვადრატული მატრიცა აკმაყოფილებს თავის მახასიათებელ განტოლებას. ე. ი. თუ

$$\det(A - \lambda I) = g(\lambda) = g_0 + g_1 \lambda + \dots + g_n \lambda^n, \quad (3.21)$$

მაშინ

$$g(A) = g_0 I + g_1 A + \dots + g_n A^n = 0. \quad (3.22)$$

სადაც  $I = A^0$ .

### მატალოტი 3.10

გამოვთვალეთ ფუნქცია:

$$f(A) = e^{At},$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

კელი-ჰამილტონის თეორემის თანახმად

$$f(A) = e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A.$$

მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები: (იხ. მაგალითი 3.8)

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2,$$

საკუთრივი ვექტორები:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

მატრიცა

$$S = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n].$$

მაშასადამე,

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

ზოგადად, დანდერშონდის მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

ჩვენი შემთხვევისათვის

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

ანუ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

ამიტომ

$$\alpha_0(t) = 2^{-t} - e^{-2t},$$

$$\alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

მაშასადამე

$$e^{At} = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

ა6

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

ა6

$$e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

## უკრელური მატრიცები

რომელიც  $A$  მატრიცა დაყოფილია ნაწილებად ვერტიკალური და ჰორიზონტალური წრფეების სისტემით. ეს ნაწილები შეიძლება განვიხილოთ როგორც დაბალი რიგის მატრიცები, რომელთაგან, როგორც ელემენტებისაგან, აგებულია  $A$  მატრიცა. ამ ნაწილებს უწოდებენ  $A$  მატრიცის უკრელებს, ხოლო ასე დაყოფილ  $A$  მატრიცას უწოდებენ უკრელურ მატრიცას. ერთი და იგივე მატრიცა შეიძლება რამდენიმე გზით დაიყოს.

მაგალითად:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{23} \\ \hline & & & & \\ a_{31} & a_{32} & & & a_{33} \end{array} \right], \quad (3.23)$$

უკრელად დაყოფილ მატრიცებში ძირითადი ოპერაციები უკრელებში ხდება იმავე წესით, როგორც ჩვეულებრივ მატრიცებში.

კვადრატული მატრიცები დაიყოფა უკრელად ისე, რომ დიაგონალური უკრელებიც უნდა იყოს კვადრატული.

კვადრატულ მატრიცას უწოდებენ უკრელდოვან-დიაგონალურს

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

სადაც  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$  - კვადრატული უკრელებია, ხოლო  $0$  - შესაბამისი რიგის ნულუვანი მატრიცებია.

## მეტრიკა

ორ  $\xi$  და  $\eta$  ვექტორის შორის მანძილი მოცემულია  $\rho$  მეტრიკის საშუალებით, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1.  $\rho(\xi, \eta) = 0$ , მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ  $\xi = \eta$ ,  $\rho(\xi, \eta) \geq 0$  ნებისმიერი  $\xi$  და  $\eta$ ;

2.  $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi)$ , (სიმეტრიულობა);

3.  $\rho(\xi, \eta) + \rho(\eta, \lambda) \geq \rho(\xi, \lambda)$ , (სამკუთხედის უტოლობა).

თუ  $\xi$  და  $\eta$  არის  $R^2$  სივრცის ვექტორები ე. ი.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

მაშინ ჩვეულებრივი მანძილი განსაზღვრავს მეტრიკას

$$\rho_2(\xi, \eta) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}.$$

ცხადია, რომ აქსიომები სრულდება. შეიძლება შემოვიტანოთ სხვა მეტრიკები

$$\rho_2(\xi, \eta) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|,$$

$$\rho_\infty(\xi, \eta) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|\}.$$

წინაა

ξ ვექტორის ნორმა (ან მისი "სიგრძე") ეწოდება მ.წ.მ-ის ξ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე. ξ ვექტორის ნორმა აღინიშნება ||ξ||.

### ნორმირებული სივრცე

წრფივ ვექტორულ L სივრცეს ეწოდება ნორმირებული, თუ ყოველ ვექტორს f ∈ L შეიძლება შეუსაბამოთ არაუარყოფითი რიცხვი ||ξ||, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1. ||ξ|| = 0, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც f = 0.

2. ||αξ|| = |α| ||ξ||.

3. ||f + g|| ≤ ||f|| + ||g||.

ეკრძალ, სივრცეში შეიძლება შემოვიტანოთ შემდეგი ნორმები:

ნორმა 1<sub>1</sub><sup>n</sup>

$$\| \xi \|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|.$$

ნორმა 1<sub>2</sub><sup>n</sup>

$$\| \xi \|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}.$$

ნორმა 1<sub>∞</sub><sup>n</sup>

$$\| \xi \|_\infty = \max_k \{ |\xi_k| \}$$

### 3.2 მდგომარეობის განტოლების მატრიცული წარმოდგენა

სისტემის მდგომარეობა t<sub>0</sub> მომენტში არის ინფორმაცია, რომელიც გარკვეულ შემავალ ფუნქციასთან ერთად, მოცემული t<sub>0</sub> ≤ t ≤ t<sub>f</sub> დროის მონაკვეთში, აღეკვეთურად განსაზღვრავს ერთადერთ გამოსავალ ფუნქციას. t<sub>0</sub> ≤ t ≤ t<sub>f</sub> დროის მონაკვეთში ნებისმიერი t<sub>f</sub> > t<sub>0</sub> -თვის, სისტემის მდგომარეობა აღიწერება n-განზომილებიანი ვექტორით X, რომლის კომპონენტები

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

წარმოადგენენ სისტემის მდგომარეობის ცვლადებს.

მაღალი რიგის სისტემები აღიწერებიან შემდეგი სტანდარტული განტოლებებით:

$$\dot{X}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (3.25)$$

$$Y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (3.26)$$

სადაც  $X$   $n$ -განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციაა.  $f$  და  $g$   $m$ -განზომილებიანი ვექტორული ფუნქციებია.  $f$  და  $g$  არიან ერთგვაროვანი.

სისტემის დინამიკის განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შედარებით მოხერხებული სახით, თუ გამოვიყენებთ მატრიცებს.

განვსაზღვროთ შემდეგი სვეტიანი მატრიცები:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (n \times 1), \quad (3.27)$$

სადაც  $X(t)$ -ს ეუწოდებთ მდგომარეობის ვექტორს.

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \quad (p \times 1), \quad (3.28)$$

სადაც  $u(t)$  წარმოადგენს შემავალ ვექტორს და საბოლოოდ:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \dots \\ c_g(t) \end{bmatrix}, \quad (g \times 1), \quad (3.29)$$

სადაც  $Y(t)$  განისაზღვრება, როგორც გამოშვებული ვექტორი.

თუ გამოვიყენებთ ამ აღნიშვნებს, მდგომარეობის განტოლებანი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f[x(t), u(t)], \quad (3.30)$$

სადაც  $f$  აღნიშნავს  $(n \times 1)$  განზომილების სვეტიან მატრიცას, რომელიც შეიცავს  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ფუნქციებს-როგორც ელემენტებს. სისტემის  $g$  მოშვებული განტოლება შესაბამისად მიიღებს სახეს:

$$Y(t) = g[x(t), u(t)], \quad (3.31)$$

სადაც  $g$  აღნიშნავს  $(g \times 1)$  განზომილების სვეტიან მატრიცას, რომელიც შეიცავს  $g_1, g_2, \dots, g_g$  ფუნქციებს-როგორც ელემენტებს.

წრფივი სტაციონალური სისტემებისათვის დინამიკის განტოლება ჩაიწერება ასე:

მდგომარეობის ბანტოლება:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t), \quad (3.32)$$

ბამშვებული ბანტოლება:

$$Y(t) = DX(t) + Eu(t), \quad (3.33)$$

სადაც  $A$  წარმოადგენს  $(n \times n)$  განზომილების კოფიციენტების მატრიცას:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (n \times n); \quad (3.34)$$

$B$  არის  $(n \times p)$  განზომილების მატრიცა:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}, \quad (n \times p); \quad (3.35)$$

D არის (qxn) განზომილების მატრიცა:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{q1} & d_{q2} & \dots & d_{qn} \end{bmatrix}, \quad (q \times n); \quad (3.36)$$

E წარმოადგენს (qxp) განზომილების მატრიცას:

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1p} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{q1} & e_{q2} & \dots & e_{qp} \end{bmatrix}, \quad (q \times p). \quad (3.37)$$

### მაბაღი 3.11

RLC - წრელის აღწერილობითი განტოლებები ჩაწერეთ მატრიცულ სახეში: (იხილეთ მაგალითი 2.2, განტოლება (2.16), (2.17))

$$\begin{bmatrix} \frac{d x_1(t)}{d t} \\ \frac{d x_2(t)}{d t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t). \quad (3.38)$$

ამრიგად, A და B კოეფიციენტების მატრიცა გამოისახება შემდეგი გამოსახულებით:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

და

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

### მაბაღი 3.12

მაგალითის სახით განვიხილოთ მდგომარეობის განტოლების შედგენა სიჩქარის რეგულატორისათვის, რომელიც მოცემულია (7) ნახაზზე გარკვეული პირობების გათვალისწინებით ამ სისტემისათვის სამართლიანია შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

ელექტრო-მანქანური მძღვერების განტოლება:

$$T_1 \frac{d E_b}{d t} + E_b = k_1 u_y, \quad (3.41)$$

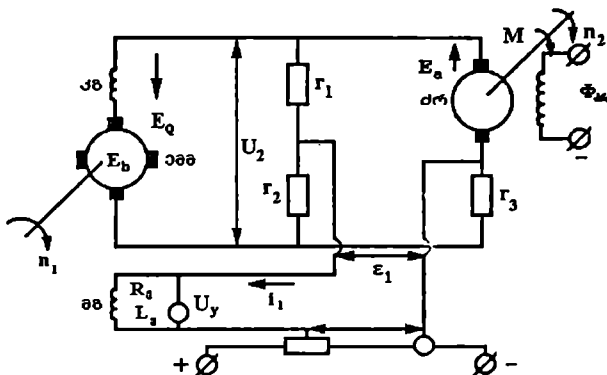
$$T_2 \frac{d E_a}{d t} + E_a = k_2 E_b. \quad (3.42)$$

ძრავის განტოლება:

$$T_{d\sigma} \frac{d n_2}{d t} + n_2 = k_{d\sigma} E_a \leftarrow K M. \quad (3.43)$$

გამზომი მოწყობილობის განტოლება:

$$u_y = E_y - K_y n_2. \quad (3.44)$$



ნახ.7.

მდგომარეობის ცვლადებად ავირჩიოთ ფიზიკური სიდიდეები:

$$x_1 = n_2; \quad x_2 = E_b; \quad x_3 = E_a.$$

$$X = \begin{bmatrix} n_2 \\ E_b \\ E_a \end{bmatrix}.$$

დაეუშვათ, რომ  $M=0$ , განტოლებები (3.41)-(3.44) მიიღებენ სახეს:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-1/T_{d\sigma}) x_1 + (k_{d\sigma}/T_{d\sigma}) x_2, \\ \dot{x}_2 &= (-1/T_2) x_2 + (k_2/T_2) x_3, \\ \dot{x}_3 &= (-k_1 k/T_1) x_1 - (1/T_1) x_3 + (k_1/T_1) E_y, \\ Y &= n_2 = x_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

$$\dot{X} = Ax + bu, \quad (3.46)$$

$$Y = c' x. \quad (3.47)$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} -1/T_{d\kappa} & k_{d\kappa}/T_{d\kappa} & 0 \\ 0 & -1/T_2 & k_2/T_2 \\ -k_1 k_y / T_1 & 0 & -1/T_1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 / T_1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ახლა წარმოადგინოთ მდგომარეობის განტოლება ნორმალურ ფორმაში. განტოლებათა სისტემა (3.41)-(3.44) შეიძლება ჩაეწეროს ერთი მესამე რიგის განტოლება:

$$\begin{cases} \ddot{n}_2^{(3)}(t) + [1/T_1 + 1/T_2 + 1/T_{d\kappa}] \ddot{n}_2^{(2)}(t) + \\ + [1/T_2 T_{d\kappa} + 1/T_1 T_{d\kappa} + 1/T_1 T_2] \ddot{n}_2^{(1)}(t) + \\ + [(1 + K_1 K_2 K_{d\kappa}) / T_1 T_2 T_{d\kappa}] \ddot{n}_2(t) = \\ = [K_1 K_2 K_{d\kappa} / T_1 T_2 T_{d\kappa}] E_y \end{cases} \quad (3.48)$$

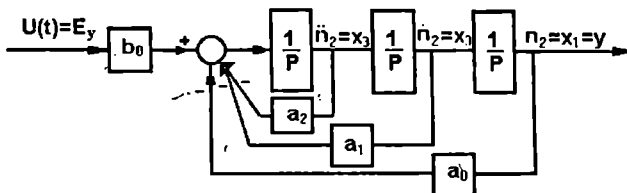
ან

$$\ddot{n}_2^{(3)}(t) + a_2 \ddot{n}_2^{(2)}(t) + a_1 \ddot{n}_2^{(1)}(t) + a_0 \ddot{n}_2(t) = b_0 E_y. \quad (3.49)$$

გადაეწეროთ ეს განტოლება უმაღლესი წარმოებულის მიმართ:

$$\ddot{n}_2^{(3)}(t) = -a_2 \ddot{n}_2^{(2)}(t) - a_1 \ddot{n}_2^{(1)}(t) - a_0 \ddot{n}_2(t) + b_0 E_y. \quad (3.50)$$

სისტემის ბლოკ-სქემა მოცემულია (8) ნახაზზე:



ნახ.8.

ბლოკ-სქემიდან გამომდინარეობს:

$$x_1 = x_2; \quad y = x_1, \quad x_3 = -a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u.$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu; & y &= c^T x. \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, & b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, & c &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

მაშასადამე, თუ ამოვირჩევთ მდგომარეობის ცვლადებად გამოშვალ სიგნალს და მის (n-1) რიგის წარმოებულს, ე. ი. წარმოადგენთ სისტემის მდგომარეობის ცვლადებს ნორმალური

ფორმით, მაშინ  $A$  მატრიცა მიიღებს მარტივ სახეს მდგომარეობის ცვლადების ნებისმიერ შერჩევასთან შედარებით.

### 3.3 მდგომარეობის ბარდამაპალი მატრიცა და ვიწი პრინცი

შემოვიტანოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი განსაზღვრება:  
ბანსაზღვრება:

$X(t)$  მატრიცას, რომლის განზომილებაა  $(n \times n)$ , უწოდებენ  $X(t) = A(t)X(t)$  სისტემის ფუნდამენტალურ მატრიცას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი სვეტები შედგებიან ამ სისტემის  $n$  წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისაგან. საწყისი პირობაა  $X_0(t) = X_0$ , სადა  $X_0$  არის არაგანსაკუთრებული ნამდვილი მატრიცა.

ნებისმიერი ფუნდამენტალური მატრიცის დეტერმინანტი, უწოდებენ ერონსკის დეტერმინანტს. ერონსკის დეტერმინანტი არ უტოლდება ნულს დროის ინტერვალს  $t_0 \leq t \leq t_1$  არცერთ წერტილში. მაშასადამე ფუნდამენტალური მატრიცა  $t$ -ს ნებისმიერ მნიშვნელობისათვის არის არაგანსაკუთრებული მატრიცა.

#### ბარდამაპალი მატრიცა

ენიდან ფუნდამენტალური  $X(t)$  მატრიცის დეტერმინანტი არ უტოლდება ნულს არცერთ წერტილში, ამიტომ ნებისმიერ დიქსირებულ  $t_0$ -ში არსებობს შეზღუდვების მატრიცა

$X^{-1}(t)$  ადგილი აქვს შემდეგ განსაზღვრებას: ბანსაზღვრება: თუ  $X(t)$ -არის

წრფივი დიფერენციალური  $X(t) = A(t)X(t)$  განტოლების ფუნდამენტალური მატრიცა, მაშინ  $\Phi(t, t_0) = X^{-1}(t)X(t_0)$ , ყველა  $t_0 \leq t \leq t_1$ , უწოდებენ წრფივი დიფერენციალური

განტოლების გარდამავალ მატრიცას. ნ გარდამავალ მატრიცას, რომელიც შეესაბამება  $A(t)$  მატრიცას.

რადგან მდგომარეობის გარდამავალი მატრიცა აკმაყოფილებს ეროგვაროვანი მდგომარეობის განტოლებას, ამიტომ იგი წარმოადგენს სისტემის თავისუფალი რეჟების რეაქციას. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ის განსაზღვრავს სისტემის რეაქციას, რომელიც გამოწვეულია მხოლოდ  $L$ -წყის. პირობებით, მდგომარეობის გარდამავალი მატრიცა დამოკიდებულია მხოლოდ  $A$  მატრიცაზე, როგორც ზემოთ მოყვანილი განმარტება გვიჩვენებს. მდგომარეობის გარდამავალი მატრიცა  $\Phi(t, t_0)$  სრულად განსაზღვრავს მდგომარეობის ცვლილებას დროის საწყისი  $t=0$  მომენტიდან დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტამდე.

#### მდგომარეობის ბარდამაპალი მატრიცის თვისებები

მდგომარეობის  $A$ -ს, გარდამავალი მატრიცა  $\Phi(t, t_0)$  ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

$$1. \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (3.51)$$

ე.ი. წარმოადგენს ერთეულოვან მატრიცას.

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = -A(t)\Phi(t, t_0) \quad (3.52)$$

განტოლებიდან, თუ დაეუწყებთ, რომ  $t=0$ .

$$2. \quad \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t). \quad (3.52)$$

დამტკიცება:  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$  განტოლების ორივე მხარის  $t$ -ზე თანმიმდევრული გადამრავლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\Phi(t_0, t_0) e^{-A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)} e^{-A(t-t_0)} = I. \quad (3.53)$$

ამისგან, (3.53) განტოლება გადავამრავლოთ  $\Phi^{-1}(t_0, t)$  მარცხნიდან, მივიღებთ:

$$\Phi^{-1}(t_0, t) e^{A(t-t_0)} = \Phi^{-1}(t_0, t). \quad (3.54)$$

ამრიგად,

$$\Phi^{-1}(t_0, t) = \Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}. \quad (3.55)$$

$\Phi^{-1}(t_0, t)$ -ს ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს საინტერესო შედეგი, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ  $X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$  განტოლება შეიძლება გარდაიქმნას ასე:

$$X(0+) = \Phi^{-1}(t_0, t)X(t), \quad (3.56)$$

რომელიც ნიშნავს იმას, რომ მდგომარეობის გარდამავალი პროცესი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ღროში ორშრივი ფუნქცია. ე.ი. ღროში გარდასახვა შეიძლება განხორციელდეს ორივე მიმართულებით.

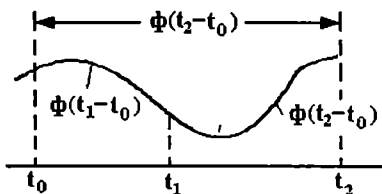
$$3. \quad \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0), \quad (3.57)$$

ნებისმიერი  $t_0$ ,  $t_1$  და  $t_2$ -თვის.

დამტკიცება:

$$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = e^{A(t_2 - t_1)}e^{A(t_1 - t_0)} = e^{A(t_2 - t_0)} = \Phi(t_2 - t_0). \quad (3.58)$$

მდგომარეობის გარდამავალი მატრიცისათვის ეს თვისება მნიშვნელოვანია იმით, რომ მდგომარეობის გარდამავალი პროცესი შეიძლება დაიყოს თანამიმდევრულ გარდაქმნათა გარკვეულ სეზებად. ნახ. (9) გვიჩვენებს, რომ გარდაქმნა  $t=t_0$ -დან  $t=t_2$ -მდე ტოლია გარდაქმნისა  $t_0$ -დან  $t_1$ -მდე და შემდეგ  $t_1$ -დან  $t_2$ -მდე.



ნახ. 9.

ზოგადად, გარდაქმნის პროცესი შეიძლება დაიყოს ნებისმიერი რაოდენობის ნაწილად. (3.57) განტოლების დამტკიცების მეორე გზა მდგომარეობს 'შესაღებში':

$$X(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)X(t_1), \quad (3.59)$$

$$X(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)X(t_0), \quad (3.60)$$

$$X(t_2) = \Phi(t_2 - t_0)X(t_0). \quad (3.61)$$

შესაფერისი შედეგი მიიღება (3.60) განტოლების ჩასმით (3.59) განტოლებაში და შემდეგ რეზულტატის (3.61) განტოლებასთან შედარებით.

$$4. \quad [\Phi(t, t_0)]^k = \Phi(kt, kt_0). \quad (3.62)$$

ნებისმიერი მთელი  $k$  რიცხვისათვის.

დამტკიცება

$$[\Phi(t, t_0)]^k = e^{A(t-t_0)}e^{A(t-t_0)} \dots e^{A(t-t_0)}; \quad (3.63)$$

### 3.4 ქრისტიან სტატისტიკური სისტემის გარდასახვაში პარამეტრის განსაზღვრა

წრფივი სტატისტიკური სისტემისათვის ხშირ შემთხვევებში შესაძლებელია მოიძებნოს მდგომარეობის გარდასახვა მატრიცა. როგორც ვიცით, მდგომარეობის განტოლების ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$X(t) = e^{A(t-t_1)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} B(t_1) U(t_1) dt_1, \quad (3.64)$$

ხოლო გარე შემოქმედების არ არსებობის დროს ამონახსნს აქვს სახე

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0). \quad (3.65)$$

ჩვენ არ მოგვიცა  $e^{A(t-t_0)}$  სახე შეკრულ ფორმაში; ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ მატრიცის

$$\Phi(t-t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t-t_0) & \dots & \Phi_{1n}(t-t_0) \\ & \dots & \\ \Phi_{n1}(t-t_0) & \dots & \Phi_{nn}(t-t_0) \end{bmatrix} = [\Phi_{ij}(t-t_0)]. \quad (3.66)$$

ელემენტები  $\Phi_{11}(t-t_0)$ ,  $\Phi_{12}(t-t_0)$ .

თეორიულად  $\Phi(t-t_0)$  შეიძლება განისაზღვროს უსასრულო მატრიცული მწკრივით

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}, \quad (3.67)$$

სადაც

$$A^0 = I. \quad (3.68)$$

მაგრამ, ზოგად შემთხვევაში ასეთი გზა პრაქტიკულად ძნელი გამოსაყენებელია. კერძო შემთხვევებისათვის არსებობს უფრო ხელსაყრელი მეთოდები. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

1. მატრიცა  $A$ -დიაგონალურია. ამას აღვნიშნავთ  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  როგორც  $n$ -რიგის სისტემა შესდგება  $n$  ურთიერთ დაუკავშირებელი პირველი რიგის სისტემებისაგან. ან როგორც,  $G(p)$  ფუნქციის მარტივი პოლუსების შემთხვევაში, გამოიყენება დაშლა მარტივ წილადებად. ამ შემთხვევაში  $A = \Lambda$ , სადაც  $\Lambda$  არის დიაგონალური მატრიცა. რომლის ელემენტებია საკუთრივი მნიშვნელობები (ან  $G(p)$  ფუნქციის პოლუსები). ამ მატრიცისათვის გვაქვს

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

და, თუ გამოვიყენებთ  $e^{A(t-t_0)}$  მნიშვნელობებს, გვექნება

$$e^{\Lambda(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

2.  $A$  მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები არის სხვადასხვა, მაგრამ  $A$  არ არის დიაგონალური.

როგორც  $A$  არ არის დიაგონალური, ჩვენ უნდა შევეცადოთ ვიპოვოთ  $P$  მატრიცის მუდმივა, რომელიც  $A$  მატრიცას დიაგონალურ  $\Lambda$  მატრიცაში გარდაქმნის, ე.ი.  $\Lambda = P^{-1}AP$ , სადაც  $\Lambda$  წარმოადგენს კვადრატულ მატრიცას,  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  არის  $A$

მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები.

P მატრიცა არის ისეთი, რომ მისი სვეტები 1-დან n-მდე წარმოადგენენ საკუთრივ ვექტორებს.  $P^{-1}$  პირობის არსებობისას  $\lambda = P^{-1}AP$  სრულდება. ის შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$AP = P\lambda, \quad (3.71)$$

ან

$$P\lambda P^{-1} = A. \quad (3.72)$$

ვინაიდან

$$A^n = P\lambda^n P^{-1}, \quad (3.73)$$

გააქვს

$$e^{A(t-t_0)} = P e^{\lambda(t-t_0)} P^{-1}. \quad (3.74)$$

ეს ექვივალენტურია გარდაქმნისა

$$\Phi(t, t_0) = P\theta(t, t_0). \quad (3.75)$$

ამ განტოლების თანახმად, განტოლება

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi, \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \quad (3.76)$$

გარდაიქმნება განტოლებაში

$$P \frac{d\theta}{dt} = A P \theta, \quad (3.77)$$

ან

$$\frac{d\theta}{dt} = P^{-1} A P \theta = \lambda \theta, \quad \theta(t_0, t_0) = P^{-1}$$

ვინაიდან მატრიცა  $P^{-1}AP$  არის დიაგონალური, როგორც პირველ შემთხვევაში, ადვილად შეიძლება მოიძებნოს  $\theta$  მატრიცის  $\theta_{ij}$  ელემენტები. თანაფარდობიდან  $\Phi = P\theta$

შეიძლება დავასკვნათ, რომ თითოეული ელემენტი  $\Phi_{ij}$  უნდა იყოს  $e^{\lambda_i(t-t_0)}$  წევრების წრფივი კომბინაცია.

P მატრიცის მოძებნის უბრალო გზა მდგომარეობს იმაში, რომ პირველად უნდა მოიძებნოს n საკუთრივ ვექტორები  $v_i$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$A v_i = \lambda_i v_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, n.$$

შემდეგ ხდება P მატრიცის ფორმირება, რომლის სვეტებს წარმოადგენენ  $v_i$  ვექტორები.

ასეთი წესის სამართლიანობა ნათელია, თუ თანაფარდობას  $P^{-1}AP = \lambda$  გადავწერთ როგორც  $AP = P\lambda$ . თუ სისტემის განტოლებები ჩაწერილია ნორმალურ ფორმაში, მაშინ A მატრიცას აქვს თავისებური სახე. მატრიცა, როდესაც A გარდაიქმნება დიაგონალურ  $\lambda$  მატრიცაში, არის უანდერშონდის მატრიცა

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

მატრიცას, რომელიც გარდაქმნის სისტემას კანონიკური ფორმებიდან ნორმალურ ფორმებში, არის მატრიცა VC, სადაც C არის დიაგონალური მატრიცა  $[C_1, C_2, \dots, C_n]$ . რომ ვაჩვენოთ ეს, ამისათვის წარმოვადგინოთ გამომავალი სიგნალი y და მისი n-1 წარმოებულზე

$$y = \sum_{i=1}^n C_i X_i \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^n C_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i X_i.$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = \sum_{i=1}^n C_i \frac{d^{n-1}X_i}{dt^{n-1}} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^{n-1} X_i.$$

თუ გამოვსახავთ მდგომარეობის ნორმალურ ვექტორს

$$X_N = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix},$$

მდგომარეობის კანონიკური ვექტორით.

$$X_C = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

მივიღებთ

$$X_N = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_n \\ C_n \lambda_n & C_n \lambda_n & C_n \lambda_n & \dots & C_n \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 \lambda_1^{n-1} & C_2 \lambda_2^{n-1} & C_3 \lambda_3^{n-1} & \dots & C_n \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} X_C = V C X_C. \quad (3.79)$$

$X_N$  და  $X_C$  შეესაბამებოდა სისტემის მდგომარეობის ნორმალურ და კანონიკური ფორმებს.

ე. ი. ჩვენ დავამტკიცეთ ჩვენი მსჯელობის მეორე ნაწილი. ახლა შეიძლება ჩაიწეროს

$$V C \lambda (V C)^{-1} = V C \lambda C^{-1} V^{-1} = A_N.$$

სადაც  $A_N$  არის  $A$  მატრიცის ნორმალური ფორმა. ვინაიდან  $C \lambda C^{-1} = \lambda$ , მაშინ  $V \lambda V^{-1} = A_N$ .

ე.ი. დავამტკიცეთ ჩვენი მსჯელობის პირველი ნაწილი.

3. ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდი

ეს მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც მარტივი, ისე უკრადი ფუნქციებისათვის.

$$X(P) = L[X(t)]. \quad (3.80)$$

$L$ -არის ლაპლასის გარდასახვის ოპერატორი, მაშინ განტოლება

$$\dot{X} = A X, \quad X(0) = X_0,$$

მიიღებს სახეს

$$P X(P) - X_0 = A X(P). \quad (3.81)$$

აქედან

$$(P I - A) X(P) = X_0.$$

აბ

$$X(P) = (PI - A)^{-1} X_0. \quad (3.82)$$

ვინაიდან

$$X(t) = e^{At} X_0,$$

მაშინ

$$L[\Phi(t, 0)] = L[e^{At}] = (PI - A)^{-1},$$

ან

$$\Phi(t, 0) = L^{-1}[(PI - A)^{-1}]. \quad (3.83)$$

მაშასადამე  $\Phi(t, 0)$  მოსაძებნად აუცილებელია გამოვთვალოთ მატრიცა  $(PI - A)^{-1}$  და ამ მატრიცის ყველა ელემენტისათვის მოვახდინოთ ლაპლასის უკუგარდაქმნა.

### მატალოში 3.13

ვიპოვოთ ფუნქცია  $e^{At}$ , თუ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

ჯერ განვსაზღვროთ  $(PI - A)^{-1}$ :

$$(PI - A)^{-1} = \frac{1}{P^2 + 3P + 2} \begin{bmatrix} P+3 & i \\ -2 & P \end{bmatrix}.$$

ლაპლასის უკუგარდასახვის აქვს სახე

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-3t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

### მატალოში 3.14

განვიხილოთ სისტემა

$$G(P) = \frac{1}{P(P+\alpha)(P+\beta)}.$$

ნორმალურ ფორმაში ჩაწერა გვაძლევს

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ვანდეერმონდის მატრიცას აქვს სახე

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta^2 \end{bmatrix},$$

ხოლო

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \frac{1}{\alpha\beta} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)} & \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)} \\ 0 & \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} & \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} \end{bmatrix}.$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ გარდაშავალი მატრიცა  $\Phi(t, 0)$ :

$$\Phi(t, 0) = V e^{At} V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \alpha e^{-\beta t} & \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\alpha)} \\ 0 & \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\beta-\alpha} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\alpha-\beta} & \frac{e^{-\alpha t}}{\beta-\alpha} + \frac{e^{-\beta t}}{\alpha-\beta} \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha\beta-\beta t}{\beta-\alpha} & \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} + \frac{\beta e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

იგივე რეზულტატი შეიძლება მივიღოთ, თუ გამოვიყენებთ ლაპლასის გარდასახვას.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix},$$

$$(P I - A) = \begin{bmatrix} P & -1 & 0 \\ 0 & P & -1 \\ 0 & \alpha\beta & P + (\alpha + \beta) \end{bmatrix},$$

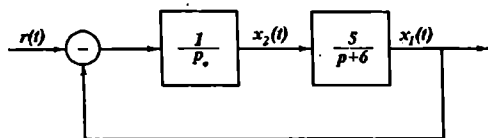
$$(P I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{P} & \frac{P + (\alpha + \beta)}{P(P + \alpha)(P + \beta)} & \frac{1}{P(P + \alpha)(P + \beta)} \\ 0 & \frac{P + (\alpha + \beta)}{(P + \alpha)(P + \beta)} & \frac{1}{(P + \alpha)(P + \beta)} \\ 0 & \frac{-\alpha\beta}{(P + \alpha)(P + \beta)} & \frac{P}{(P + \alpha)(P + \beta)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \frac{(\alpha + \beta)/\alpha\beta}{\alpha} - \frac{\beta/[\alpha(\beta - \alpha)]}{P + \alpha} + \frac{\alpha/[\beta(\beta - \alpha)]}{P + \beta} & \frac{1/\alpha\beta}{P} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{P + \alpha} + \frac{1/[\beta(\beta - \alpha)]}{P + \beta} \\ 0 & \frac{\beta(\beta - \alpha)}{P + \alpha} + \frac{\alpha/(\alpha - \beta)}{P + \beta} & \frac{1/(\beta - \alpha)}{P + \alpha} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{P + \beta} \\ 0 & \frac{\alpha\beta/(\alpha - \beta)}{P + \alpha} + \frac{\alpha\beta/(\beta - \alpha)}{P + \beta} & \frac{\alpha/(\alpha - \beta)}{P + \alpha} + \frac{\beta/(\beta - \alpha)}{P + \beta} \end{bmatrix}$$

ადვილი სანახაია, რომ  $L^{-1}(PI-A)^{-1}$  გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც ახლოგური (3.84)-ის.

### მაბალი 3.15

სისტემისათვის, რომელიც მოცემულია (10) ნახაზზე, ვიპოვოთ



ნახ.

ა) გარდამავალი მატრიცა.

ბ) მდგომარეობის ცვლადების გარდამავალი პროცესი, როდესაც  $r(t)=0$ ,  $x_1(0)=4$ ,  $x_2(0)=2$ .

გ) სისტემის რეაქცია  $r(t)=\cos 2t$  შესავალ სიგნალზე, რომელიც მოდებულია  $t=0$  მომენტში, საწყისი პირობებისას  $x_1(0)=x_2(0)=0$ , სისტემის განტოლებებია

$$\dot{X}_1 = -6X_1 + 5X_2,$$

$$\dot{X}_2 = -X_1 + r(t).$$

ვ.ი.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

სისტემის საკუთრივი მნიშვნელობები განისაზღვრება გამოსახულებიდან

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+6)+5 = (\lambda+1)(\lambda+5).$$

მაშასადამე,

$$\lambda_{1,2} = -1, -5.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ გარდამავალი მატრიცა, წინასწარ მოძებნილი საკუთრივი მნიშვნელობებიდან შევარჩიოთ მატრიცა  $P$ .  $\lambda = -1$  და  $\lambda = -5$  მნიშვნელობებისათვის წარმოვადგინოთ შესაბამისი განტოლება

$$AZ = \lambda Z$$

ეპოულობთ საკუთრივ ვექტორებს მუდმივი მდგენელის სიზუსტემდე

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ და } \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

მაშასადამე

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

შემოწმების გზით შეიძლება დავადგინოთ, რომ

$$\lambda = P^{-1}AP.$$

შემდეგი გარდაქმნით შეიძლება განვსაზღვროთ, რომ გარდამავალი მატრიცა

$$\phi(t,0) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{-5t} & 5e^{-t} - 5e^{-5t} \\ -e^{-t} + e^{-5t} & 5e^{-t} - e^{-5t} \end{bmatrix}$$

თუ  $r(t) \equiv 0$ ;  $X_1(0) = 4$ ;  $X_2(0) = 2$  გარდამავალი პროცესი განისაზღვრება გამოსახულებით

$$X(t) = \phi(t,0)X(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-5t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

და ბოლოს,  $r(t) = \cos 2t$  და  $X_1(0) = X_2(0) = 0$  შემთხვევაში, სისტემის რეაქცია  $t=0$  მომენტიდან განისაზღვრება განტოლებით

$$X(t) = \phi(t,0)X(0) + \int_0^t \phi(t,\tau)B(\tau)U(\tau)d\tau$$

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int_0^t (5e^{-(t-\tau)} - 5e^{-5(t-\tau)}) \cos 2\tau d\tau \\ \frac{1}{4} \int_0^t (5e^{-(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}) \cos 2\tau d\tau \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{29} (12 \sin 2t + \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{25}{4} e^{-5t}) \\ \frac{1}{29} (14 \sin 2t + 6 \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{5}{4} e^{-5t}) \end{bmatrix}.$$

მაბტარიში 3.16

განვიხილოთ სისტემა

$$\frac{dx}{dt} = Fx + Gu, \quad (3.85)$$

$$F = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x(t_0) = 0. \quad (3.86)$$

თუ შევიტანთ (3.86) მნიშვნელობებს (3.85), მივიღებთ

$$\begin{bmatrix} \frac{d x_1}{dt} \\ \frac{d x_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

გამრავლების ოპერაციის ჩატარების შემდეგ გვექნება

$$\begin{aligned}\frac{d x_1}{d t} &= -6x_1 + 5x_2 + e^{-\alpha t}, \\ \frac{d x_2}{d t} &= -x_1.\end{aligned}\quad (3.88)$$

გარდამავალი მატრიცის მოსაძებნათ დაეშვათ, რომ  $u(t)=0$ , ე. (3.88) განტოლებები ჩავეწეროთ ოპერატორულ სახეში

$$\begin{aligned}P x_1 &= -6x_1 + 5x_2, \\ P x_2 &= -x_1.\end{aligned}$$

მივიღებთ

$$(P^2 + 6P + 5)x_1 = 0,$$

$$(P^2 + 6P + 5)x_2 = 0.$$

მაშასადამე  $x_1$  და  $x_2$  აქვთ მახასიათებელი განტოლების ერთნაირი ფესვები.

$$P_1 = -1, \quad P_2 = -5.$$

საერთო ამონახსნს აქვს სახე

$$x_{1,2}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}. \quad (3.89)$$

$t$ -ს მიხედვით გადიფერენცირება გადავღებ

$$\frac{d x_{1,2}}{d t} = -c_1 e^{-t} - 5c_2 e^{-5t}.$$

განხილული სისტემისათვის გარდამავალ მატრიცას აქვს სახე:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

$\Phi(t, t_0)$  მატრიცის ელემენტების განსაზღვრავად საჭიროა საწყისი პირობების გამოყენება შემდეგი 1 ცხრილიდან

ცხრილი 1.

| მატრიცის ელემენტები |            | $\varphi_{11}$ | $\varphi_{21}$ | $\varphi_{12}$ | $\varphi_{22}$ |
|---------------------|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| საწყისი პირობები    | $x_1(t_0)$ | 1              | 1              | 0              | 0              |
|                     | $x_2(t_0)$ | 0              | 0              | 1              | 1              |

თუ შევითვით ამ მნიშვნელობებს (3.88)-ში და დავეშვათ  $t=t_0$ , შეგვიძლია ვიპოვოთ წარმოებულების საწყისი მნიშვნელობები. ისინი მოცემულია 2 ცხრილში.

ცხრილი 2.

| $x_1(t_0)$ | $x_2(t_0)$ | $\dot{x}_1(t_0)$ | $\dot{x}_2(t_0)$ |
|------------|------------|------------------|------------------|
| 1          | 0          | -6               | -1               |
| 0          | 1          | 5                | 0                |

ფ ყველა მნიშვნელობები განისაზღვრებიან (3.89)-დან,  $C_1$  და  $C_2$  განისაზღვრებიან

იგივე განტოლებებიდან  $t=t_0$  ჩასმით:

$$\left. \begin{aligned} X_{1,2}(t_0) &= c_1 e^{-t_0} + c_2 e^{-5t_0} \\ \dot{X}_{1,2}(t_0) &= -c_1 e^{-t_0} - 5c_2 e^{-5t_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

ამ განტოლებებში საწყისი მნიშვნელობების ჩასმა ხდება შემდეგი სქემით:

$$\varphi_{11} \rightarrow x_1(t_0), \quad \dot{x}_1(t_0),$$

$$\varphi_{12} \rightarrow x_2(t_0), \quad \dot{x}_2(t_0),$$

$$\varphi_{21} \rightarrow x_1(t_0), \quad \dot{x}_1(t_0),$$

$$\varphi_{22} \rightarrow x_2(t_0), \quad \dot{x}_2(t_0).$$

$C_1$  და  $C_2$  განსაზღვრისათვის მივიღებთ 3 ცხრილს

ცხრილი 3.

| მატრიცის ელემენტები | $\varphi_{11}$ | $\varphi_{21}$ | $\varphi_{12}$ | $\varphi_{22}$ |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $C_1$               | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{4}$  | $\frac{5}{4}$  |
| $C_2$               | $\frac{5}{4}$  | $\frac{1}{4}$  | $-\frac{5}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ |

თუ შევითვალთ ამ მნიშვნელობებს (3.89), ვიპოვებთ გარდამავალი მატრიცის ელემენტებს

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(t-t_0) & -5(t-t_0) & -(t-t_0) & -5(t-t_0) \\ -e^{-(t-t_0)} & +5e^{-(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} & -5e^{-(t-t_0)} \\ -(t-t_0) & -5(t-t_0) & -(t-t_0) & -5(t-t_0) \\ -e^{-(t-t_0)} & +e^{-(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} & -e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

აღვილი სანახაუროა, რომ თუ  $t=t_0$ , მაშინ  $\Phi(t_0, t_0)=1$ . მდგომარეობის  $X(t)$  ვექტორის მოსაძებნათ გამოვიყენოთ ფორმულა

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) U(\tau) d\tau.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $X(t_0)=0$ , მივიღებთ

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} -(t-\tau) & -5(t-\tau) & -(t-\tau) & -5(t-\tau) \\ -e^{-(t-\tau)} & +5e^{-(t-\tau)} & 5e^{-(t-\tau)} & -5e^{-(t-\tau)} \\ -(t-\tau) & -5(t-\tau) & -(t-\tau) & -5(t-\tau) \\ -e^{-(t-\tau)} & +e^{-(t-\tau)} & 5e^{-(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\alpha\tau} \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

მატრიცის გარდამავლების შემდეგ, მივიღებთ

$$X_1(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[ -e^{-(t-\tau)} + 5e^{-5(t-\tau)} \right] e^{-\alpha\tau} d\tau,$$

$$X_2'(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[ -e^{-(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)} \right] e^{-\alpha\tau} d\tau,$$

ინტეგრირების ჩატარების შემდეგ, მივიღებთ

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4(\alpha-1)} (e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{5}{4(\alpha-5)} (e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \\ \frac{1}{4(\alpha-1)} (e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{1}{4(\alpha-5)} (e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \end{bmatrix}.$$

### 3.5 უაზური სვლაუზის კანონიკურ ფორმაში გარდაქმნა.

ნებისმიერი წრფივი სტაციონალური სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს მართვადობის გარკვეულ პირობებს, ყოველთვის შეიძლება წარმოვიდგინოთ ფაზური ცვლადების კანონიკურ ფორმაში.

თეორემა 3.1

დავუშვათ, რომ წრფივი სტაციონალური სისტემის მდგომარეობის განტოლება მეცხუეულია შემდეგი სახით

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.91)$$

სადაც  $x(t)$  წარმოადგენს  $(n \times 1)$  განზომილების მდგომარეობის ვექტორს,  $A = (n \times n)$  კოეფიციენტების მატრიცას,  $B = (n \times 1)$  კოეფიციენტების მატრიცას და  $u(t)$  არის სკალარული შემავალი. თუ მატრიცა

$$S = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (3.92)$$

არის არასინგულარული, მაშინ არსებობს არასინგულარული გარდასახვა

$$y(t) = Px(t), \quad (3.93)$$

ანუ

$$x(t) = P^{-1}y(t), \quad (3.94)$$

რომელიც (3.91) განტოლებას გარდაქმნის ფაზური ცვლადის კანონიკურ ფორმაში

$$y(t) = A_1 y(t) + B_1 r(t), \quad (3.95)$$

სადაც

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

და

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

გარდამქმნელი მატრიცა  $P$  მოიცემა შემდეგი გამოსახულებით

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

სადაც

$$P_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1] [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1}. \quad (3.99)$$

დამტკიცება: დაეუვათ,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

სადაც

$$P_i = [P_{i1} \ P_{i2} \ \dots \ P_{in}], \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (3.103)$$

შემდეგ, (3.93) განტოლებიდან

$$y_1(t) = P_{11} x_1(t) + P_{12} x_2(t) + \dots + P_{1n} x_n(t) = P_1 x(t). \quad (3.104)$$

თუ მოვახდენთ ამ განტოლების გაწარმოებას დროით და გავითვალისწინებთ (3.95) და (3.96) განტოლებებს, მივიღებთ:

$$\dot{y}_1(t)=y_2(t)=P_1 \dot{x}(t)=P_1 A x(t)+P_1 B r(t). \quad (3.105)$$

რადგანაც (3.93) განტოლება ამყარებს, რომ  $y(t)$  წარმოადგენს მხოლოდ  $x(t)$ -ს ფუნქციას, განტოლებაში (3.05)

$$P_1 B=0.$$

ამრიგად.

$$y_1(t)=y_2(t)=P_1 A x(t). \quad (3.106)$$

თუ მოვახდენთ ამ განტოლების გაწარმოებას ერთხელ კიდევ (დროში) ჩვენ მივიღებთ

$$y_2(t)=y_3(t)=P_1 A^2 x(t). \quad (3.107)$$

კვლავ მივიღებთ, რომ  $P_1 A B=0$ . ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$y_{n-1}(t)=y_n(t)=P_1 A^{n-1} x(t) \quad (3.108)$$

და კვლავ  $P_1 A^{n-2} B=0$ .

ამრიგად, გამოვიყენებთ რა (3.93) განტოლებას, მივიღებთ:

$$y(t)=P x(t)=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix} x(t) \quad (3.109)$$

ანუ

$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$P_1$ -მა უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი პირობა:

$$P_1 B=P_1 A B=\dots=P_1 A^{n-1} B=0 \quad (3.111)$$

ახლა ავიღოთ (3.93) განტოლების დროით წარმოებული, მივიღებთ:

$$y(t)=\dot{P} x(t)=P A x(t)+P B r(t) \quad (3.112)$$

თუ შევადარებთ (3.112) და (3.95) განტოლებებს, მივიღებთ:

$$A_1=P A P^{-1} \quad (3.113)$$

და

$$B_1=P B. \quad (3.114)$$

შემდეგ, (3.110) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$AB = \begin{bmatrix} P_1 B \\ P_1 AB \\ P_1 A^{n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

რადგანაც  $P_1$  წარმოადგენს  $(1 \times n)$  განზომილების სტრიქონ-მატრიცას. განტოლება (3.115) შეიძლება ჩაიწეროს

$$P[B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] = [0 \ 0 \ \dots \ 1]. \quad (3.116)$$

ამრიგად  $P_1$  მიიღება, როგორც

$$P_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1][B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]^{-1} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]S^{-1} \quad (3.117)$$

თუ მატრიცა  $S = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$  არის არასინგულარული, ეს წარმოადგენს მდგომარეობის სრული მართვადობის პირობას. საბოლოოდ, როდესაც (3.117) განტოლებიდან განესაზღვრათ  $P_1$ , მაშინ გარდაქმნის მატრიცა  $P$  მოიცემა (3.110) განტოლებით.

### მაბატალითი 3.17

დაუშვათ, რომ წრფივი სტაციონალური სისტემა აღიწერება (3.91) განტოლებით, სადაც

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

ჩვენს ამოცანას წარმოადგენს მდგომარეობის განტოლების გარდაქმნა ფაზური ცვლადების კანონიკურ ფორმაში. რადგანაც მატრიცა

$$S = [BAB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

წარმოადგენს არასინგულარულს. სისტემა შეიძლება გამოისახოს ფაზური ცვლადების კანონიკურ ფორმაში. შესაბამისად,  $P_1$  მიიღება როგორც სტრიქონ-მატრიცა, რომელიც შეიცავს  $S$  მატრიცის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებს. ამრიგად,

$$P = [1 \ -1]. \quad (3.120)$$

თუ გამოვიყენებთ (3.110) განტოლებას, გვექნება

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

და ამრიგად

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

$$B_1 = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.123)$$

მდგომარეობის ცვლადების განსაზღვრის მეთოდი, (შემოწმების მიხედვით) როგორც აღწერილი იყო ადრე (3.91) განტოლების გამოყენებით. ა. არის ალექვატური, როდესაც დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა ნაწილი შეიცავს  $u(t)$ -ს წარმოებულს. ამ აზრის ნათელსაყოფად განვიხილოდ შემდეგი მაგალითი:

მოცემულია შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 5 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t). \quad (3.124)$$

ჩვენი მიზანია, მოცემული განტოლება წარმოვადგინოთ მდგომარეობის სამი განტოლების მიხედვით. რადგანაც მდგომარეობის განტოლების მარჯვენა ნაწილი არ შეიძლება შეიცავდეს  $u(t)$  შემავლის წარმომადგენელს, ამიტომ აუცილებელია  $u(t)$  გაეთვალისწინოთ მდგომარეობის ცვლადების განსაზღვრის დროს. (3.124) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d^3 c(t)}{dt^3} - \frac{du(t)}{dt} = -5 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} - \frac{dc(t)}{dt} - 2c(t) + 2u(t). \quad (3.125)$$

მდგომარეობის ცვლადები ამ ახალი განტოლების მიხედვით განისაზღვრება ასე:

$$x_1(t) = c(t), \quad (3.126)$$

$$x_2(t) = \frac{dc(t)}{dt}, \quad (3.127)$$

$$x_3(t) = \frac{d^2 c(t)}{dt^2} - u(t). \quad (3.128)$$

თუ გავითვალისწინებთ ბოლო სამ და (3.125) განტოლებებს, მდგომარეობის განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) + u(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -2x_1(t) - x_2(t) - 5x_3(t) - 3u(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.129)$$

მოგადად, შეიძლება ვამჩნევთ, რომ შემდეგი  $n$ -ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\begin{aligned} \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) &= \\ = b_0 \frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{du(t)}{dt} + b_n u(t) \end{aligned} \quad (3.130)$$

მდგომარეობის ცვლადები შეიძლება განისაზღვროს ასე:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{dx_1(t)}{dt} - h_1 u(t), \\ x_2(t) &= \frac{dx_2(t)}{dt} - h_2 u(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} - h_{n-1} u(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.131)$$

სადაც

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= b_1 - a_1 b_0, \\ h_2 &= (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1, \\ h_3 &= (b_3 - a_3 b_0) - a_2 h_1 - a_1 h_2, \\ h_n &= (b_n - a_n b_0) - a_{n-1} h_1 - a_{n-2} h_2 - \dots - a_2 h_{n-1} - a_1 h_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (3.132)$$

თუ გამოვიყენებთ (3.31) და (3.32) განტოლებებს, შეგვიძლია (3.130)  $n$ -ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას დავშალოთ შემდეგ  $n$  მდგომარეობის განტოლებად:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + h_1 u(t), & \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) + h_2 u(t), \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_2 x_{n-1}(t) - a_1 x_n(t) + h_n u(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.133)$$

გამომავალი განტოლება მიიღება (3.131) განტოლების წვერების გადაადგილებით:  $c(t) = x_1(t) + b_0 u(t)$ . (3.134)

ახლა. თუ გამოვიყენებთ ამ განტოლებას 18 მაგალითში მოცემული შემთხვევისათვის. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5, \quad b_0 = 0, \quad b_3 = 2, \\ a_2 &= 1, \quad b_1 = 0, \\ a_3 &= 2, \quad b_2 = 1, \\ h_1 &= b_1 - a_1 b_0 = 0, \\ h_2 &= (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1 = 1, \\ h_3 &= (b_3 - a_3 b_0) - a_2 h_1 - a_1 h_2 = -3. \end{aligned}$$

როდესაც ჩვენ ჩავსვამთ ამ სიდიდეებს (3.131) და (3.132) განტოლებებში. მდგომარეობის ცვლადებისა და მდგომარეობის განტოლებებისათვის ჩვენ გვექნება იგივე შედეგი. რაც მიღებულ იქნა 18 მაგალითში. (3.131), (3.132) და (3.133) განტოლებების მეთოდის საკმაოდ რთულია და არა პრაქტიკულია დასამახსოვრებლად. არ არის მოსალოდნელი, რომ ეს განტოლებანი გვექნოდეს ყოველთვის სახელზე. უფრო, მეტიც, შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ უფრო მოსახერხებელ მეთოდს, სადაც გამოყენებულია გადაცემის ფუნქცია.

### 3.6. ჟორდანის კანონიკური ფორმა.

ზოგადად, როდესაც  $A$  მატრიცას გააჩნია მრავალჯერადი (ერთნაირი) მახასიათებელი რიცხვები, და თუ იგი არ არის სიმეტრიული და გააჩნია ნამდვილი ელემენტები, ის არ შეიძლება დიაგონალიზებულ იქნას. მიუხედავად ამისა, არსებობს შემდეგი მსგავსი გარდაქმნა:

$$\Lambda = P^{-1}AP, \quad (n \times n), \quad (3.135)$$

ისეთი, რომ  $\Lambda$  მატრიცა არის დიაგონალური მატრიცა.  $\Lambda$  მატრიცას უწოდებენ ჟორდანის კანონიკურ ფორმას. ჟორდანის კანონიკური ფორმის ტიპური მაგალითები მოცემულია ქვემოთ:

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{array} \right], \quad (3.136)$$

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array} \right], \quad (3.137)$$

ფორდანის კანონიკურ ფორმას ზოგადად აქვს შემდეგი თვისებები:

1.  $\Lambda$  მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტები წარმოადგენენ მატრიცის მახასიათებელ რიცხვებს.

2.  $\Lambda$ -ის მთავარი დიაგონალის ქვეშ მოთავსებული ელემენტები არიან ნულის ტოლი.

3. მთავარ დიაგონალზე უშუალოდ ჯერადი მახასიათებელი რიცხვების შემთხვევაში ზოგიერთი ელემენტი არის 1-ანეზი, ისე როგორც ნაჩვენებია (3.136) და (3.137) მაგალითებში.

4. 1-ანეზი მახასიათებელ რიცხვებთან ერთად ქმნიან ტიპურ ჯგუფებს, რომლებსაც უწოდებენ ფორდანის ჯგუფებს. (3.136) და (3.137) გამოსახულებებში ფორდანის ჯგუფები გამოყოფილი არიან წყვეტილი ხაზებით.

5. როდესაც არასიმეტრიულ  $A$  მატრიცას, გააჩნია ჯერადი მახასიათებელი რიცხვები, მაშინ მათი საკუთრივი ვექტორები არ წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელს.  $(n \times n)$  განზომილების  $A$  მატრიცისათვის ასეობს მხოლოდ  $r$  ( $r < n$ ) რაიდენობის წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორები.

6. ფორდანის ჯგუფების რაოდენობა უდრის დამოუკიდებელ საკუთრივი ვექტორთა რაოდენობას, ე.ი.  $r$ -ს. ასეობს მხოლოდ და მხოლოდ ერთი წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი, რომელიც დაკავშირებულია თითოეულ ფორდანის ჯგუფზე.

7. ერთიანების რიცხვი (რაოდენობა) მთავარი დიაგონალის შემთხვევაში უდრის  $(n-r)$ -ს.  $P$  მატრიცა განისაზღვრება შემდეგი მსჯელობით: დაეუშვათ, რომ  $A$ -ს გააჩნია  $q$  განსხვავებული მახასიათებელი რიცხვები  $\mu$  მახასიათებელ რიცხვებს შორის. პირველ რიგში განისაზღვრებინათ ისეთი საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც შეესაბამებინათ პირველი რიგის (ერთჯერად) მახასიათებელ რიცხვებს-შემდეგი ჩვეულებრივი ფორმით:

$$(\lambda_l I - A) P_l = 0, \quad (3.138)$$

სადაც  $\lambda_l$  აღნიშნავს  $l$ -ურ განსხვავებულ რიცხვს.  $l=1, 2, \dots, q$  საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც დაკავშირებული არიან  $m$ -ური რიგის ფორდანის ჯგუფთან, განისაზღვრებიან შემდეგი სახით ჩაწერილი ფორდანის ჯგუფის გამოყენებით:

$$\left[ \begin{array}{cccc} \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{array} \right], \quad (m \times m), \quad (3.139)$$

სადაც  $\lambda_j$  აღნიშნავს  $j$ -ურ მახასიათებელ რიცხვს.

ამის შემდეგ, უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი სახის გარდაქმნა:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} P_1 & P_2 & P_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & & \lambda_j & \end{array} \right] = A \left[ \begin{array}{cc|c} P_1 & P_2 & P_m \end{array} \right], \quad (3.140)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 + \lambda_1 P_2 &= AP_2, \\ P_1 + \lambda_1 P_3 &= AP_3, \\ P_{m-1} + \lambda_1 P_m &= AP_m \end{aligned} \right\} \quad (3.141)$$

$P_1, P_2, \dots, P_m$  ვექტორები განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებების საშუალებით, რომლებიც აგრეთვე შეიძლება ასეთი სახით ჩაიწეროს:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 I - A)P_1 &= 0, \\ (\lambda_1 I - A)P_2 &= -P_1, \\ (\lambda_1 I - A)P_3 &= -P_2, \\ &\vdots \\ (\lambda_1 I - A)P_m &= -P_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

### მაგალითი 3.19

მოცემულია მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.143)$$

$(\lambda I - A)$ - დეტერმინანტი იქნება:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 & 5 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -3 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2. \quad (3.144)$$

როგორც ვხედავთ,  $A$  მატრიცას გააჩნია მარტივი მახასიათებელი რიცხვი  $\lambda = 2$  და წყვილი მახასიათებელი რიცხვი  $\lambda = 1$ .

ჟორდანის კანონიკური ფორმის განსაზღვრა მოითხოვს ისეთი  $P$  მატრიცის მოძებნას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას, რომ:

$$A = P^{-1}AP.$$

საკუთრივი ვექტორი, რომელიც დაკავშირებულია  $\lambda_1 = 2$ -თან, განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$(\lambda_1 I - A)P_1 = 0. \quad (3.145)$$

ამრიგად

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.146)$$

თუ დავუშვებთ ნებისმიერად, ვთქვად  $P_{11} = 2$ , უკანასკნელი განტოლება გვაძლევს  $P_{21} = -1$  და  $P_{31} = -2$ . ამრიგად,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (3.147)$$

ისეთი საკუთრივ ვექტორს განსაზღვრისათვის, რომელიც დაკავშირებულია მეორე რიგის ვერად მასსიათებელ რიცხვთან, მივუბრუნდეთ (3.142) განტოლებას, ჩვენ გვაქვს (ორი დარჩენილი საკუთრივ ვექტორები  $P_2$  და  $P_3$ )

$$(\lambda_2 I - A)P_2 = 0 \quad (3.148)$$

და

$$(\lambda_2 I - A)P_3 = -P_2 \quad (3.149)$$

(3.149) განტოლება გვაძლევს შემდეგ გამოსახულებას

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.150)$$

დავუშვათ  $P_{12}$  (ნებისმიერად), გვექნება  $P_{22} = -\frac{3}{7}$  და  $P_{32} = -\frac{5}{7}$ ; ამრიგად,

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}. \quad (3.151)$$

(3.149) განტოლება გაშლის შემდეგ გვაძლევს:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}. \quad (3.152)$$

საიდანაც ჩვენ გვაქვს:

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix}. \quad (3.152)$$

საბოლოოდ,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} \\ -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} \end{bmatrix}. \quad (3.153)$$

ამ შემთხვევაში ფორდანის კანონიერი ფორმა მიიღებს ასეთ სახეს

$$A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.154)$$

შენიშნით, რომ აქ არის ფორდანის 2 ვკუფი და ერთი ერთიანი, რომელიც მოთავსებულია მთავარი დიაგონალის ზემოთ.

### 3.7 წრფივი სისტემები, რომლებიც არ შეიძლება აღიწერონ მდგომარეობის ცვლადებით

არსებობენ ისეთი წრფივი სისტემები, რომლებიც არ აღიწერებიან სასრულო რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით. ასეთი სისტემების მაგალითია - სისტემები განაწილებული პარამეტრებით, რომლებიც აღიწერებიან კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებით. ასეთი სისტემების მიმართ მდგომარეობის ცვლადების გამოყენება გაძნელებულია. ვინაიდან სისტემა არის წრფივი, იგი შეიძლება დახასიათდეს  $g(t)$  იმპულსური გარდამავალი ფუნქციით და კავშირი შემავალ და გამომავალ სიგნალებს შორის გამოისახოს ნახევრის ინტეგრალთი:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (3.156)$$

სადაც  $u(t)$  - შემავალი სიგნალია,  $y(t)$  - გამომავალი. ბევრი ფიზიკური პროცესი შეიძლება აღიწეროს კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}, \quad (3.157)$$

სისტემის რეაქცია  $x=x_1$  წერტილში,  $V(0,0)$  შემავალ სიგნალზე, (რომელიც მოდებულია  $x=0$  წერტილში) განისაზღვრება განტოლებით:

$$V(x_1,t) = V_0(x_1,t) + \int_0^t g(x_1, t-\tau)V(0,\tau)d\tau, \quad (3.158)$$

რომელიც თანხვდება თავისი სახით (3.156) განტოლებას. აქ  $V(x_1,t)$  სისტემის გარდამავალი პროცესია, რომელიც დამოკიდებულია საწყის პირობებზე. უნდა შევნიშნოთ, რომ  $V(0,t) \equiv 0$  სიგნალზე  $V(x_1,t)$  არ მოიძებნება, თუ არ ვიცით  $V(x,0)$ . როგორც

ცნობილია, წრფივი შეყურსული სისტემებისათვის საჭიროა ვიცოდეთ სასრულო რაოდენობის საწყისი პირობები. განაწილებულ პარამეტრებიანი სისტემებისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ უსასრულო განზომილებიანი მდგომარეობის სივრცე. (3.157) სისტემებისათვის გარდამავალი პროცესი გამოისახება განტოლებით:

$$V_b(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}} \right) V(\xi,0) d\xi, \quad (3.159)$$

საიდანაც იმპულსური გარდამავალ ფუნქციას აქვს სახე:

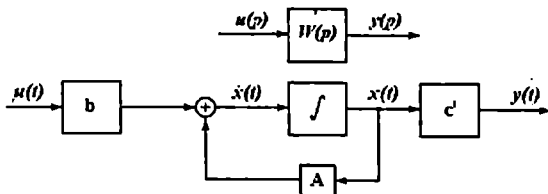
$$g(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (x \geq 0). \quad (3.160)$$

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ფიქსირებული  $x$ -თვის სისტემის გადაცემითი ფუნქცია აღარ არის პოლინომი  $P$  მიმართ. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$G(P) = L[g(x,t)] = e^{-x^2 \sqrt{P}}$$

### 3.8 ურთიერთაქავეშირი მდგომარეობის ბანტოვლებებს და ბადაცებით ფუნქციებს შორის

ერთერთი ძირითადი ცნება მართვის თეორიაში არის გადაცემითი ფუნქციის ცნება. მდგომარეობის სივრცის მეთოდის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს ხშირ შემთხვევაში მარტივად გადაწყვეთს მართვის ამოცანები. რაც მოაყვარია, ეს მეთოდი საშუალებას იძლევა ეფექტურად გამოვიყენოთ გამოთვლითი ტექნიკა. მე-11 ნახაზზე მოცემულია სისტემა ერთი შესასვლელით და ერთი გამოსასვლელით, აღწერილობა როგორც გადაცემითი ფუნქციებით, ასევე მდგომარეობის ექვტორებით:



ნახ. 11

მდგომარეობის სივრცეში აღწერილი სისტემის და გადაცემითი ფუნქციით აღწერილი სისტემის შედარებისას წარმოიშობა კითხვა: როდის არიან ეს სისტემები ექვივალენტური? და ამ კითხვასთან დაკავშირებული შეკითხვა: როგორ გადავიღეთ ერთი აღწერიდან მეორეზე? ამასთან დაკავშირებით უნდა აღვნიშნოთ შემდეგი: ვინაიდან გადაცემის ფუნქცია აკავშირებს სისტემის შემავალსა და გამომავალ სიგნალებს, არსებობს გარკვეული თავისებურება სისტემის მდგომარეობის ექვივალენტის შერჩევაში მოცემული გადაცემითი ფუნქციების საშუალებით. მეორე მხრივ, თუ მოცემულია სისტემის აღწერა მდგომარეობის სივრცეში, მაშინ გადაცემითი ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრის ფაქტი, რომ მდგომარეობის სივრცეში აღწერილ სისტემას შეესაბამება ერთ-ერთი გადაცემითი ფუნქცია. ხოლო გადაცემითი ფუნქციას შეესაბამება უსასრულო რაოდენობის წარმოდგენები მდგომარეობის სივრცეში, მიგვიითიყეს იმაზე, რომ სისტემის აღწერა მდგომარეობის სივრცეში არის უფრო ზოგადი ცნება. განესაზღვროთ სტაციონალური სისტემის გადაცემითი ფუნქცია ერთი შემაჯავლი და ერთი გამომავალი სიგნალით. საწყისი პირობები ნულის ტოლია. სისტემის აღმწერი განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad (3.161)$$

$$Y(t) = C(t)X(t). \quad (3.162)$$

$X(t)$ ,  $U(t)$  და  $Y(t)$  შესაბამისად  $n$ ,  $m$  და  $p$  განზომილების ვექტორებია. მატრიცებს  $A(t)$ ,  $B(t)$  და  $C(t)$  შესაბამისად აქვთ განზომილებები  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$ . განვიხილოთ სტაციონალური შემთხვევა და ავიღოთ მოცემული განტოლებების ორივე მხარის ლაპლასის გარდასახვები:

$$PX(p) = AX(p) + BU(p), \quad (3.163)$$

$$Y(p) = CX(p). \quad (3.164)$$

პირველი განტოლებიდან შებრუნებული მატრიცის არსებობისას, გვაქვს

$$X(p) = [pI - A]^{-1} BU(p). \quad (3.165)$$

მაშინ

$$Y(p) = C[pI - A]^{-1} BU(p). \quad (3.166)$$

ამ გამოსახულებაში

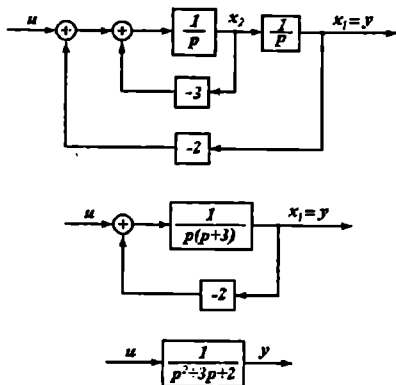
$$C[pI - A]^{-1} B = W(p) \quad (3.167)$$

წარმოადგენს გადაცემის ფუნქციას.

განვიღწეოთ პირდაპირი მეთოდი ყოველთვის არ არის ხელსაყრელი პრაქტიკული გამოყენებისათვის, ვინაიდან საჭიროა შებრუნებული მატრიცის გამოთვლა. გაცილებით მარტივია საერთო გადაცემითი ფუნქციის გამოთვლა სტრუქტურული გარდაქმნების მეთოდების გამოყენებით. მაგალითად მოცემულია მატრიცები

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12 ნახაზზე მოცემულია სტრუქტურული სქემები



ნახ.12.

სისტემის მიხედვით წარმოდგენა მდგომარეობის სივრცეში მოცემული გადაცემით ფუნქციის მიხედვით გაცილებით რთული ამოცანაა. ვთქვათ მოცემულია გადაცემით ფუნქციის გადაცემით

$$W(P) = \frac{h_{n-1} P^{n-1} + h_{n-2} P^{n-2} + \dots + h_0}{P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0} \quad (3.168)$$

ამ გადაცემით ფუნქციის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = h_{n-1} U^{(n-1)}(t) + h_{n-2} U^{(n-2)}(t) + \dots + h_0 U(t). \quad (3.169)$$

წარმოედგინოთ მოცემული განტოლება, როგორც  $n$  პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, ამისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) - b_1 U(t), \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) - b_1 \dot{U}(t) - b_2 U(t), \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) - b_1 U^{(n-1)}(t) - \dots - b_{n-1} U(t), \end{aligned}$$

რომელშიც მუდმივები  $b_i (i=1, 2, \dots, n)$  რეკურსულად არიან დაკავშირებული გადაცემით ფუნქციის კოეფიციენტებთან:

$$b_1 = h_{n-1}, \quad b_2 = h_{n-2} - b_1 a_{n-1}, \quad b_{n-1} = h_1 - \sum_{i=1}^{n-2} b_i a_{i+1}, \quad b_n = - \sum_{i=1}^{n-1} b_i a_i.$$

კოეფიციენტების ასეთი შერჩევით მივიღებთ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 4. წრშივი სისტემების მდგრადობა

ავტომატური მართვის თეორიის განვითარების საწყის სტადიებში სისტემების მდგრადი ქემაოა იყო პირველი და ჩვეულებრივად ერთადერთი მოთხოვნა. პირველი თეორიული ნაშეუერებიც სისტემის მდგრადობის გამოკვლევას შეეხებოდა.

როგორც ერთ-ერთი ცნობილი მეცნიერი აღნიშნავდა, ტერმინი "მდგრადობა" იმდენად გამოიმეტველია, რომ ის თვითონ ლაპარაკებს თავის თავზე, მიუხედავად ამისა, არამათემატიკური ხასიათის უზუსტობების გარდა ასევე ძალიან ხშირად გვხვდება ტერმინოლოგიური და შინაარსობრივი უზუსტობებიც.

ცხოვრებაში მდგრადობას უწოდებენ ნებისმიერ მოვლენას, რომელსაც უნარი შესწევს საკმაოდ ხანგრძლივად და საკმარისი სიზუსტით შეინარჩუნოს თავისი არსებობის ფორმები, რომლის დაკარგვის შემდეგ ის თავისთავს აღარ წარმოადგენს. მეცნიერულ ტერმინოლოგიაში მდგრადს უწოდებენ არა მოვლენას, არამედ სისტემას, რომელშიც ხდება დაკვირვება, მიუხედავად იმისა, რომ ეს ლოგიკურად არასწორია. მდგრადია თუ არა ფიზიკური სხეულები - სფერო და კუბი? ამგვარ შეკითხვას აზრი აქვს, თუ ლაპარაკი ეხება იმ მასალებს, რომლისგანაც გაეთქეულია სხეულები (მეტალური სფერო მდგრადია, კვამლის სფერო არამდგრადი). მართვის თეორიას არ აინტერესებს მასალური მდგრადობის საკითხები; ~ მას აინტერესებს ამ სისტემის მდგრადობის მდგომარეობა და ფუნქციონირება. ერთი და იგივე სისტემაში ერთი მდგომარეობები და მოძრაობები შეიძლება იყოს მდგრადი, სხვა - არამდგრადი. უფრო მეტიც, კი და იგივე მოძრაობა ერთი ცვლადის მიმართ შეიძლება იყოს მდგრადი, მეორე ცვლადის მიმართ არამდგრადი. ამაზე მიუთითებდა ჯერ კიდევ ა.მ. ლიპუნოვი, რომლის დეაწლი სისტემის მდგრადობის თეორიის განვითარებაში საკმაოდ დიდია.

#### 4.1 წრშივი სისტემების მდგრადობა და მისი სახეები

განვიხილოთ არაწრფივი - არასტაციონალური n-ური რიგის სისტემა, რომელიც აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (4.1)$$

თუ შესასვლელი სიგნალი  $U(t) \equiv 0$ , მაშინ სისტემას უწოდებენ თავ-სუფალს. იგი ხასიათდება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t). \quad (4.2)$$

ვინაიდან (4.2) განტოლების ამონახსნი ცალსახად განისაზღვრება საწყისი  $X_0$  მდგომარეობით, ამიტომ უმჯობესია ის ჩაეწეროს  $X(t) = \Phi(t, X_0, t_0)$  სახით ე.ი.

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t, X_0, t_0)] = f[\Phi(t, X_0, t_0); t],$$

$$\Phi(t_0, X_0, t_0) = X_0. \quad (4.3)$$

ნებისმიერი სისტემა შეიძლება ჩაითვალოს თავისუფლად, თუ შემავალი ცვლადი ფიქსირებულია. ფუნქციას  $\Phi(t, X_0, t_0)$  უწოდებენ სისტემის მდგომარეობის გარდამავალ ფუნქციას. ის არის განზოგადებული სახე (არაწრფივი შემთხვევაში) წრფივი სისტემის მდგომარეობის გარდამავალი მატრიცისა.

მდგომარეობის გარდამავალი ფუნქცია  $\Phi(t, X_0, t_0)$  აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- 1)  $\Phi(t_0, X_0, t_0) = X_0$ .
- 2)  $\Phi(t_2, \Phi(t_1, X_0, t_0), t_1) = \Phi(t_2, X_0, t_0), \quad t_2 \geq t_1$ .
- 3)  $\Phi(t, X_0, t_0)$  ფუნქცია უწყვეტი და დიფერენცირებადია ყველა არაუმეტესის მიხედვით.
- 4)  $\Phi(t, X_0, t_0)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ყველა  $t, X_0, t_0$  მნიშვნელობებისათვის.

შემოვიტანოთ კიდევ ერთი ცნება - ეს არის ცნება წონასწორული მდგომარეობისა. მოცემულია თავისუფალი სისტემის დიფერენციალური განტოლება:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t). \quad (4.4)$$

მდგომარეობა  $X_*$ -ს უწოდებენ წონასწორულ მდგომარეობას, თუ

$$f(x_e, t) = 0, \quad (4.5)$$

ან რაც იგივეა

$$\Phi(t, x_e, t_0) = x_e, \text{ ყველა } t > t_0. \quad (4.6)$$

$n$ -ური რიგის სისტემის მდგარლობა შეიძლება განისაზღვროს წონასწორობის პირობით კოორდინატთა სათავეში. დავუშვათ, რომ  $X(t)$  არის შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა

$$\dot{X}(t) = f[X(t), U(t), t], \quad X(t_0) = X_0. \quad (4.7)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი  $V(t)$  გადახრა ამ ამონახსნიდან, რომელიც თვითონ იქნება სხვა ამონახსნი

$$\dot{V}(t) = f[V(t), U(t), t], \quad V(t_0) = V_0. \quad (4.8)$$

ავღნიშნოთ  $\xi(t)$  სხვაობა

$$\xi(t) = V(t) - X(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0 = V_0 - X_0. \quad (4.9)$$

ამის გარდა, თუ  $\xi_0 = 0$ , მაშინ ერთადერთობის პირობის თანახმად  $\xi(t) = 0$  ყველა  $t$ -სათვის.

თუ გავაღვიწიოთ (4.9)-ს და გაითვალისწინებთ (4.7) და (4.8), გვექნება

$$\dot{\xi}(t) = f[X(t) + \xi(t), U(t), t] - f[X(t), U(t), t]. \quad (4.10)$$

ვინაიდან შემავალი ცვლადია  $U$  და პირველადი ამონახსნი  $X$  მოცემულია, შეიძლება განისაზღვროს ფუნქცია

$$h[\xi(t), t] = f[X(t) + \xi(t), U(t), t] - f[X(t), U(t), t]. \quad (4.11)$$

მაშასადამე, სისტემის მდგომარეობის დიფერენციალური განტოლების ცნობილი მნიშვნელობის გადახრა, როდესაც შემავალი განსაზღვრულ ალწერს თავისუფალ სისტემას

$$\dot{\xi}(t) = h[\xi(t), t], \quad \xi(t_0) = \xi_0. \quad (4.12)$$

და ამას გარდა, კოორდინატთა სათავე წარმოადგენს ამ სისტემის წონასწორობის მდგომარეობას

$$h(0, t) = f[X(t), U(t), t] - f[X(t), U(t), t] = 0. \quad (4.13)$$

სისტემის მდგარობა ზოგად შემთხვევაში დაყვანილია თავისუფალი სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის მდგარობის შესწავლაზე.

ანალოგიურად შეიძლება შევისწავლოთ არათავისუფალი სისტემის მდგარობა მოცემული შემავალი სიდიდის დროს, თუ დავიყვანთ მას თავისუფალ სისტემაზე გარკვეული გარდაქმნების საშუალებით. ამასთანავე, ნულოვან ფუნქციას გადავიყვანთ მოცემული თავისუფალი სისტემის ამოხსნაში. გარდაქმნა დამოკიდებულია  $t$  დროზე. მაშასადამე, თავისუფალი სისტემის

$$\dot{\xi}(t) = h[\xi(t), t], \quad \xi(t_0) = \xi_0 \quad (4.14)$$

მდგომარეობის გარადამავალი ფუნქცია არის  $\Phi(t, \xi_0, t_0)$ , ისეთი, რომ

$$\Phi(t, \xi_0, t_0) = h[\Phi(t, \xi_0, t_0), t] \text{ და } \Phi(t, \xi_0, t_0) = \xi_0, \quad (4.15)$$

მაშინ ყოველთვის

$$\Phi(t, 0, t_0) = 0. \quad (4.16)$$

ახლა განვიხილოთ სისტემის მდგარობის შემდეგი სახეები:

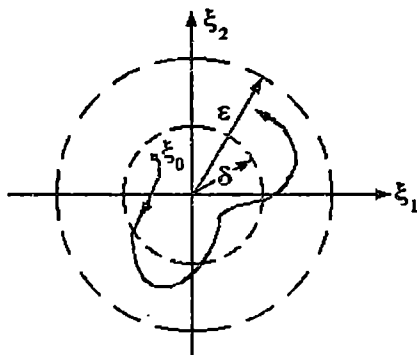
მდგრადობა ლიპაუნოვის მნიშვნით (მდგრადობა მკომში). თავისუფალი სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის უწყობდებენ მდგრადს, თუ ნებისმიერი ნამდვილი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ნამდვილი რიცხვი  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , ისეთი რომ, როდესაც

$$\|\xi_0\| \leq \delta,$$

სრულდება უტოლობა

$$\|\Phi(t, \xi_0, t_0)\| \leq \varepsilon, \text{ ყველა } t \geq t_0, \text{ (ცხადია, რომ } \varepsilon \geq \delta).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ წონასწორული მდგომარეობა მდგრადია. მაშინ ამონახსნი შეიძლება ამოვარჩიოთ რაც შეიძლება მცირე ნორმის მიხედვით, შესაბამისი საწყისი პირობების ამორჩევით  $\|\xi_0\| \leq \delta$ . მე-13. ნახაზზე მოცემულია (ორგანზომილებიან შემთხვევაში) მდგრადობა ლიაპუნოვის მიხედვით.



ნახ.13.

### ასიმპტოტური მდგრადობა

მდგრადობა ლიპუნოვის. წრფივ სისტემებში სისტემის რეაქცია ნულოვან შესასვლელზე ერთგვაროვანია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ სისტემის ნულოვანი მდგომარეობა  $X=0$  ასიმპტოტურად მდგრადია, მაშინ ნებისმიერ  $X_0$  ნულოვან შესასვლელზე  $X(t, X_0, t_0)$  არის შეზღუდული და საბოლოო ვაშში უახლოვდება 0 მდგომარეობას. უფრო ზუსტად, ნებისმიერი საწყისი  $X_0$  მდგომარეობისათვის მოიძებნება დადებითი რიცხვი  $M$ , რომ

$$\|X(t, X_0, t_0)\| < M, \text{ როცა } t \geq t_0 \quad (4.17)$$

და

$$\|X(t, X_0, t_0)\| \rightarrow 0, \text{ თუ } t \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

$M$  უნდა ამოირჩეს პირობიდან  $M = (c/\delta) \|X_0\|$ . ეს პირობა შეიძლება შემდეგნაირად განესაზღვროთ: თუ წრფივი სისტემის მდგომარეობა ასიმპტოტურად მდგრადია. იგი ასიმპტოტურად მდგრადია ლიპუნოვის. გამოთქმა "ლიპუნოვის" ნიშნავს, რომ ასიმპტოტური მდგრადობა სრულდება ყველა საწყისი მდგომარეობისათვის და არ არის შეზღუდული ნულოვან მდგომარეობისთან მიახლოებული მდგომარეობებით. საბოლოოდ შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრება.

ბანსაზღვრება: წრფივი სისტემა  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  არის მდგრადი (ასიმპტოტურად მდგრადი) ლიაპუნოვის მიხედვით, თუ მისი საწყისი მდგომარეობა მდგრადია (ასიმპტოტურად მდგრადია) ლიაპუნოვის მიხედვით.

თავისუფალი სისტემის წონასწორული მდგომარეობა 0 არის ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ

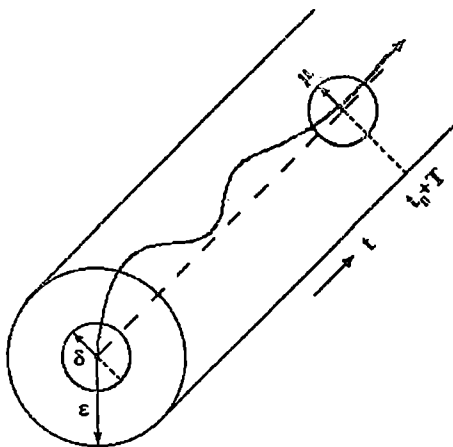
1) ის არის მდგრადი,

2) ყველა მოძრაობა დაწყებული 0 მახლობლობაში მ.კ.ს.რ.აღის 0-საკენ, როდესაც  $t \rightarrow \infty$ . სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, წონასწორული მდგომარეობა 0 არის ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ ის არის მდგრადი და თუ არსებობს ნამდვილი რიცხვი  $r(t_0) > 0$ , ისეთი, რომ ნებისმიერი  $\mu_0 > 0$ -თვის მოიძებნება  $T(\mu_0, t_0)$ , ისეთი, რომ

$\|\dot{X}\| \leq r(t)$  სივრცეში სიუღღმ პირობა

$$\|\Phi(t, X_0, t_0)\| \leq M, \text{ ყველა } t \geq t_0 + T.$$

ასიმპტოტური მდგომარეობა ილუსტრირებულია 14 ნახაზზე



ნახ.14.

#### 4.2 მდგრადი წრფივი სისტემის თვისებები

##### თეორემა 4.1

სისტემა, რომელიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad (4.19)$$

მდგრადია ლიაპუნოვის მიხედვით, მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, თუ მოიძებნება  $M$  მუდრავი, რომელიც შეიძლება ისე იყოს  $t$ -ზე დამოკიდებული, რომ

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M, \text{ ყველა } t \geq t_0. \quad (4.20)$$

##### წამტკიცება.

(4.19) სისტემის რეაქცია ნულოვან შესასვლელზე ტოლია

$$X(t, X_0, t_0) = \Phi(t, t_0)X_0. \quad (4.21)$$

მაშასადამე,

$$\|X(t, X_0, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|X_0\| \leq M \|X_0\|; \quad (4.22)$$

მაშინ

$$\|X_0\| < \frac{\epsilon}{M} \implies \|\dot{X}(t, X_0, t_0)\| \leq \epsilon, \quad t \geq t_0. \quad (4.23)$$

სისტემა არის მდგრადი ლიაპუნოვის მიხედვით განსაზღვრების თანახმად.

მოვახდინოთ თეორემის დამტკიცება უკუმიმართებიდან, დავუშვათ, რომ სისტემა არის მდგრადი და  $\Phi$  არ არის თანაბრად შეზღუდული ფუნქცია  $t \geq t_0$  მომენტში. ამ შემთხვევაში შეიძლება მოიძებნოს ისეთი ერთი ელემენტი მაინც მაგალითად  $\Phi_{1k}$ , რომელიც  $t \rightarrow \infty$

დროს აღწევს რაღაც დიდ მნიშვნელობას. შევარჩიოთ საწყისი  $X_0$  მნიშვნელობა ისეთნაირად, რომ  $K$  კომპონენტის გარდა (რომელიც  $\xi$ -ის ტოლია) ყველა კომპონენტი იყოს ნულის ტოლი. მაშინ მდგომარეობის ვექტორის  $i$  კომპონენტი ტოლია

$$X_i(t) = \varphi_{ik}(t)\xi.$$

ვინაიდან  $\Phi_{ik}$   $t \rightarrow \infty$  მომენტისათვის აღწევს დიდ მნიშვნელობას, როგორი მცირეც არ უნდა იყოს  $\xi$ ,  $X_i(t)$   $t \rightarrow \infty$  მომენტში არის რომელიღაც დიდი მნიშვნელობა. ამიტომ სისტემა იქნება არამდგრადი. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის მტკიცებას. მაშასადამე მდგრად სისტემას ფუნქცია  $\Phi$  უნდა ჰქონდეს თანაბრად შეზღუდული ყველა  $t \geq t_0$  მომენტში.

შემდეგი თეორემა ახასიათებს ასიმპტოტურ მდგრადობას.

#### თეორემა 4.2

წრფივი სისტემა  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  არის ასიმპტოტურად მდგრადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

1. არსებობს ისეთი მუდმივი  $M$ , რომ  $\|\Phi(t, t_0)\| \leq M$ , ყველა  $t \geq t_0$ .

2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0$ , ყველა  $t_0$ .

დამტკიცება. დამტკიცება ხდება 4.1 თეორემის მსგავსად. მკითხველმა შეეცადოს დამოუკიდებლად მიიღოს შედეგი.

#### 4.3 სტასიონარული წრფივი სისტემების მდგრადობა

ახლა განვიხილოთ ის პირობები, რომლის დროსაც წრფივ სისტემებს გააჩნიათ მდგრადობის შემთხვევაში ჩამოთვლილი სახეები. განვიხილოთ სისტემა

$$\dot{X}(t) = AX(t). \quad (4.24)$$

$A$  არის  $n \times n$  განზომილების მატრიცა.  $A$ -ს გააჩნია სხვადასხვა მახასიათებელი რიცხვები  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  და საკუთრივი ვექტორები  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . სისტემის რეაქცია ნებისმიერ საწყის გადახრაზე შეიძლება წარმოადგინოთ შემდეგნაირად:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i t} e_i. \quad (4.25)$$

სადაც  $\mu_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) სკალარები განისაზღვრებიან საწყისი  $X(0)$  მდგომარეობიდან. არადიანონალური  $A$  მატრიცის შემთხვევაში ეს გამოსახულება შეიცავს აგრეთვე, წევრებს  $\exp(\lambda_i t)$ . ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში მდგრადობა დამოკიდებულია  $\lambda_i$  მახასიათებელ რიცხვებზე. ამასთან გვაქვს შემდეგი რეზულტატი.

#### თეორემა 4.3

სტაციონარული სისტემა

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad (4.26)$$

არის მდგრადი ლიაპუნოვის მიხედვით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც:

1.  $A$  მატრიცის ყველა მახასიათებელ რიცხვს აქვს არადადებითი ნამდვილი ნაწილები.

2. ნებისმიერ  $m$  ჯვარდობის მახასიათებელ რიცხვს წარმოსახვით ღერძზე ზუსტად შეესაბამება  $A$  მატრიცის  $m$  საკუთრივი ვექტორი.

ასიმპტოტური მდგრადობისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი თეორემები.

## თეორემა 4.4

სტაციონალური სისტემა

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

არის ასიმპტოტურად მდგრადი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $A$  მატრიცის ყველა მახასიათებელი რიცხვი აქვს მკაცრად უარყოფითი ნაწილები.

## თეორემა 4.5

სტაციონალური სისტემა

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

არის ექსპონენციალურად მდგრადი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის ასიმპტოტურად მდგრადი. ვინაიდან სისტემის ასიმპტოტურად მდგრადობა განისაზღვრება  $A$  მატრიცის საშუალებით, მიზანშეწონილი გამოვიყენოთ შემდეგი ტერმინოლოგია.

**ბანსაზღვრება.** სტაციონალური  $n \times n$  განზომილების მატრიცა  $A$  არის ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ მის ყველა მახასიათებელი რიცხვი აქვს უარყოფითი ნამდვილი ნაწილები.

$A$  მატრიცის ნამდვილი რიცხვები წარმოადგენენ  $\lambda I - A$  მახასიათებელი განტოლების ფუნქციას. ცნობილი რაუს-ჰურვიციის კრიტერიუმით  $A$  მატრიცის მდგრადობა შეიძლება გამოვიკვლიოთ მახასიათებელი განტოლების კოფიციენტების დახმარებით.

სტაციონალური წრფივი სისტემების მდგრადობის სივრცე შეიძლება დაცუთ მდგრად და არამდგრად მდგომარეობის ქვესივრცეებად.

**ბანსაზღვრება.** განვიხილოთ სისტემა  $\dot{X}(t) = AX(t)$ .  $A$ -ს აქვს სხვადასხვა მახასიათებელი რიცხვები. განვსაზღვროთ ამ სისტემის მდგომარეობის მდგრადი ქვესივრცე, როგორც ნამდვილი წრფივი ქვესივრცე, რომელსაც წარმოქმნის  $A$  მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და რომლებიც შეესაბამებიან მკაცრად უარყოფითი ნამდვილი ნაწილების მქონე მახასიათებელი რიცხვებს. ზოლო არამდგრად ქვესივრცეებს წარმოქმნის ის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც შეესაბამებიან არაუყოფითი ნამდვილი ნაწილების მქონე მახასიათებელი რიცხვებს.

ამ განსაზღვრების თანახმად,  $n$  განზომილებიანი ნამდვილი სივრცე  $R^n$  არის მდგომარეობის მდგრადი და არამდგრადი ქვესივრცეების პირდაპირი ჯამი.

## 4.4 სისტემის მდგრადობა შემავალზე და გამომავალზე შორის

### თანაშარღოვის თვალსაზრისით

ხშირ შემთხვევებში საჭიროა გაითვალისწინოთ არა სისტემის რეაქცია ნულოვან შესასვლელზე, არამედ თანაფარდობები სისტემის შემავალზე და გამომავალ სიდიდეებს შორის.

განვიხილოთ სისტემა, რომელიც აღიწერება განტოლებით:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad (4.27)$$

სადაც  $A(t)$  და  $B(t)$   $n \times n$ ,  $n \times r$  განზომილების მატრიცებია, რომელთა ელემენტები მოცემულია. შეზღუდულია და დროის მიხედვით უწყვეტი ფუნქციებია. შემავალი  $U$  სიგნალი წარმოადგენს  $r$  განზომილების ვექტორ-სვეტს. სიმარტივისათვის გამოიმთავალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მდგომარეობის ვექტორი  $X$ . მდგრადობის ცნება შეიძლება ნაარად ფორმულირდება:

**ნებისმიერი** შეზღუდული შემავალი იწვევს შეზღუდულ რეაქციას. იმისათვის, რომ გაეარჩიოთ ახალი ცნება წრფივი სისტემის მდგრადობის ცნებისაგან, შემოვიტანოთ ახალი ტერმინი "შეზღუდული შემავალი - შეზღუდული რეაქცია" (შშ - შრ).

(4.27) სისტემას, უწოდებენ მდგრადს "შშ - შრ", თუ ნებისმიერ  $t_0$ -თვის, ყველა საწყის  $X_0$  მდგომარეობისათვის და ყველა  $U|_{[t_0, \infty]}$  შეზღუდული შესასვლელისათვის ვექტორი  $X(t; X_0, U|_{[t_0, \infty]})$  არის შეზღუდული  $[t_0, \infty]$  - დროის მომენტში.

მდგრადობა "შმ - შრ" განისაზღვრება შემდეგი თეორემით.

#### თეორემა 4.6

განვიხილოთ (4.27) სისტემა  $\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)U(t)$ .

სისტემა არის მდგრადი "შმ - შრ", მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

1. არსებობს ისეთი რიცხვი  $M_1$ , რომ

$$\|\Phi(t, t_0)\| < M_1 < \infty \quad \text{ყველა } t_0, t \geq t_0. \quad (4.28)$$

2. არსებობს ისეთი რიცხვი  $M_2$ , რომ

$$\int_{t_0}^t \|\Phi(t, t') B(t')\|_1 dt' < M_2 < \infty, \quad \text{ყველა } t_0, t \geq t_0. \quad (4.29)$$

სადაც 1 ინდექსი ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში ნიშნავს იმას, რომ უნდა ავიღოთ ნორმა  $e_1$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |X_i|$$

#### დამტკიცება.

(4.27) განტოლების ამონახსნი ტოლია

$$X(t; x_0, t_0; U_{[t_0, t]}) = \Phi(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, t') B(t') U(t') dt'. \quad (4.30)$$

(4.30) განტოლება გადავწეროთ შემდეგ სახეში

$$\|X(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|X_0\| + \int_{t_0}^t \|\Phi(t, t') B(t')\| \|U(t')\| dt'. \quad (4.31)$$

ვინაიდან  $U_{[t_0, \infty]}$  შეზღუდულია, რომელიმე  $M_3$  მუდმივასათვის, შეგვიძლია ჩავწეროთ  $\|U(t)\| < M_3 < \infty$ , ყველა  $t \geq t_0$ . თუ გავითვალისწინებთ თეორემის პირობებს და (4.31)-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &< M_1 \|X_0\| + M_3 \int_{t_0}^t \|\Phi(t, t') B(t')\| dt', \\ \|X(t)\| &< M_1 \|X_0\| + M_2 M_3, \quad \text{ყველა } t \geq t_0. \end{aligned}$$

ამრიგად, თეორემის პირობები

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, t_0)\| &< M_1 < \infty, \quad \text{ყველა } t \geq t_0, \\ \int_{t_0}^t \|\Phi(t, t') B(t')\|_1 dt' &< M_2 < \infty, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

ნიშნავს სისტემის მდგრადობას "შშ-შრ".

დავუშვათ, რომ (4.30) განტოლებაში  $U=0$ . ცხადია,  $x$  რომ იყოს შეზღუდული ყველა  $t$ -თვის და ყველა შესაძლო  $x_0$ -თვის. უნდა სრულდებოდეს თეორემის შემდეგი პირობა

$$\|\phi(t, t_0)\| < M_1 < \infty, \text{ ყველა } t_0, t \geq t_0. \quad (4.32)$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლება მოიძებნოს ისეთი  $x_0$  მნიშვნელობა, რომ  $x(t, x_0, t_0, 0)$  გახდება ნებისმიერად დიდი. ამრიგად, "შშ-შრ" მდგრადობიდან გამომდინარეობს (4.31) პირობის შესრულება. იმისათვის, რომ შემოწმდეს (4.28) პირობა, განვიხილოთ შემთხვევა  $x_0=0$ , მაშინ პირველი მდგენელი (4.31) განტოლებაში

გახდება ნულის ტოლი. ამოვიწყოთ ნორმა  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ . მაშინ  $A$  მატრიცის

შესაზამისი ნორმა ტოლია

$$\|A\|_1 = \max_s \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

დაშვების მიხედვით  $B(t')$  არის შეზღუდული ყველა  $t'$ -თვის. (4.28) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ  $\phi(t, t')$  არის შეზღუდული ყველა  $t \geq t'$ . ამიტომ ერთადერთი შესაძლებლობა (4.29) პირობის დარღვევის მდგომარეობს იმაში, რომ როცა  $t \rightarrow \infty$ , ინტეგრალი ხდება ნებისმიერად დიდი. საწინააღმდეგოს დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ ეს მოხდა მაშინ, როცა ნებისმიერი  $N$  რიცხვისათვის, როგორი დიდიც არ უნდა იყოს ის, მოიძებნება ისეთი  $T$  (დამოკიდებული  $N$ -ზე), რომ

$$\int_{t_0}^T \|\phi(T, t') B(t')\|_1 dt' > N. \quad (4.33)$$

დავუშვათ,

$$\phi(T, t) B(t) = \psi(T, t).$$

მაშინ, წინა პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი  $N$ -თვის მოიძებნება ისეთი  $T$ , რომ

$$\int_{t_0}^T \max_{i,j} \left( \sum_{l=1}^n \left| \psi_{ij}(T, t') \right| \right) dt' > N \quad (4.34)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\psi$ -ს ერთ-ერთი კომპონენტა მაინც, მაგალითად  $(i, j)$ ,  $T \rightarrow \infty$  მომენტში

$$\int_{t_0}^T \|\psi_{ij}(T, t')\| dt'$$

ხდება ნებისმიერად დიდი. ეს პირობა ცხადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ გვექნებოდა

$$\sup_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \left| \psi_{kl}(T, t') \right| dt' < M < \infty, \text{ ყველა } k, l\text{-თვის}$$

რომელიც  $M$ -თვის, ვინაიდან  $\psi$  აქვს მხოლოდ  $n^2$  კომპონენტი. რაც ეწინააღმდეგება (4.33). ამიტომ (4.33)-დან გამომდინარეობს, რომ  $\psi_{ij}$ -ს ერთ-ერთი კომპონენტის

ნებისმიერი  $k$  დიდი მნიშვნელობისათვის მოიძებნება ისეთი  $T$ , რომ

$$\int_{t_0}^T \left| \psi_{ij}(T, t') \right| dt' > k.$$

ამოვიჩინოთ შემდეგი შეზღუდული შემავალი სიგნალი  $u_{ij}(t)=0$ , ყველა  $t$  და ყველა  $e \neq j$  და  $u_j(t) = Sgn \psi_{ij}(T, t)$ .

(4.30) გამოსახულებიდან ადვილად გამოდის, რომ

$$\|X(T')\|_1 \geq \left| X_1(T') \right| = \int_t^T \left| \psi_{ij}(T', t) \right| dt > k.$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ მეთოდი შეზღუდული შემავალი სიგნალის კონსტრუირებისათვის, რომელიც იწვევს გამომავალ სიგნალს, და მისი ნორმა მეტია წინასწარ მოცემულ რიცხვზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, "შშ-შრ" არის არამდგრადი. ეს ეწინააღმდეგება საწყის დაშვებას, რომ (4.30) განტოლების მეორე შესაყრები ხდება ნებისმიერად დიდი. მაშასადამე, "შშ-შრ" მდგრადობიდან გამომდინარეობს უტოლობა (4.29).

#### მაბატლითი 4.1.

სანამ განვიხილავდეთ მაგალითის, შევჩერდეთ რამდენიმე ფაქტზე, რომელიც საჭიროა ამოხსნისათვის.

#### ბეზმან-ბრენვილის ლემა

დავუშვათ, რომ  $v(t)$  და  $w(t)$ - დროის ნამდვილი ფუნქციებია,  $w(t) \geq 0$ .  $C$  არის ნამდვილი მუდმივა. თუ

$$v(t) \leq c + \int_0^t w(\tau) v(\tau) d\tau, \quad (4.35)$$

მაშინ

$$v(t) \leq c \exp \left[ \int_0^t w(\tau) d\tau \right]. \quad (4.36)$$

#### დამტკიცება.

შევიფიქსოთ ორი ფუნქცია  $x(t)$  და  $z(t)$  ისეთები, რომ

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} c + \int_0^t w(\tau) v(\tau) d\tau, \quad (4.37)$$

$$v(t) \stackrel{\Delta}{=} x(t) - z(t). \quad (4.38)$$

( $\Delta$  ნიშნავს "განსაზღვრის თანახმად".)

თუ (4.35) უტოლობა სრულდება, მაშინ  $z(t) \geq 0$ . უფრო მეტიც,  $x(t)$  არის უწყვეტი. გავადიფერენცირთ  $x(t)$  და გამოვიყენოთ (4.38), გვექნება

$$\dot{x}(t) = w(t)x(t) - w(t)z(t). \quad (4.39)$$

მოვახდინოთ (4.39) ინტეგრირება

$$x(t) = x(0) \exp \left[ \int_0^t w(\tau) d\tau \right] - \exp \left[ \int_0^t w(\tau) d\tau \right] \int_0^t z(\tau) w(\tau) \exp \left[ - \int_0^\tau w(u) du \right] d\tau. \quad (4.40)$$

ვინაიდან  $z(t) \geq 0$  და  $w(t) \geq 0$ , მაშინ

$$x(t) \leq x(0) \exp \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right]. \quad (4.41)$$

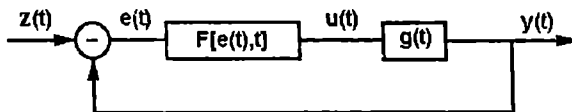
რეგორე ვიცით,  $x(0)=c$ . მაშინ  $z(t) \geq 0$  და (4.38) განტოლებიდან ეიპოვით

$$v(t) - x(t) - z(t) \leq x(t) = c \exp \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right].$$

ღმა დამტკიცებულია.

თუ განვიხილავთ სისტემას, რომელიც მოცემულია (15) ნახაზზე, მის შესაბამის განტოლებებს ექნებათ სახე

$$\begin{aligned} y(t) &= -e_0(t) + \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau, \\ u(t) &= F[e(t), t], \\ u(t) &= r(t) - y(t). \end{aligned} \quad (4.42)$$



ნახ.15.

#### თეორემა 4.7

განვიხილოთ 15 ნახაზზე მოცემული სისტემა. დავუშვათ, რომ  
1. წირვივი ელემენტისათვის საწყისი პირობები შეირჩეულია ისე, რომ კმაყოფილდება შემდეგი უტოლობები:

$$|e_0(t)| \leq c_0 e^{-\alpha t}; \quad |g(t)| \leq c_g e^{-\alpha t}, \quad (4.43)$$

სადაც  $c_0, c_g$  და  $\alpha$  მუდმივებია.

2. არაწრფივი ელემენტისათვის არსებობს ისეთი  $K$  კონსტანტა, რომ

$$|u(t)| \leq K |e(t)| \quad (4.44)$$

ნებისმიერი  $t$ -თვის.

3. შემავალი სიგნალისათვის არსებობს ისეთი კონსტანტა  $c_r$ , რომ

$$|r(t)| \leq c_r e^{-\alpha t} \quad (4.45)$$

ყველა  $t$ -თვის.

თუ შესრულებულია უტოლობა

$$\alpha > K c_g, \quad (4.46)$$

მაშინ  $e(t) \rightarrow 0$ , როცა  $t \rightarrow \infty$ . უფრო მეტიც,  $e(t)$  რეაქცია შეზღუდულია

$$|e(t)| \leq (c_0 + c_r) e^{-(\alpha - K c_g) t}. \quad (4.47)$$

თეორემის დამტკიცებისათვის გამოვიყენოთ (4.41) გამოსახულებაში (4.43-4.45) განტოლებები. მივიღებთ

$$|e(t)| \leq (c_r + c_0) e^{-\alpha t} + K c_g e^{-\alpha t} \int_0^t |e(\tau)| e^{\alpha \tau} d\tau,$$

$$|e(t)|e^{\alpha t} \leq (c_r + c_0) + Kc_g \int_0^t |e(\tau)|e^{\alpha \tau} d\tau.$$

თუ გამოვიყენებთ ბელმან-გრენველის ლემას მივიღებთ (4.47). განხილული თეორემა განსაზღვრავს სუსტ საზღვარს სისტემის მდგრადობის შესამოწმებლად. ახლა განვიხილოთ სისტემა, რომელიც აღიწერება მატეის განტოლებით

$$\ddot{e}(t) + 2\dot{e}(t) + (c - 3 - d\cos \omega t)e(t) = 0.$$

თუ გავითვალისწინებთ ნახაზზე მოცემულ აღნიშვნებს, მივიღებთ

$$r(t) = 0, \quad u(t) = k(t)e(t),$$

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)^2 + c - 4}; \quad k(t) = d\cos \omega t.$$

$G(p)$ -დან გადავიღოთ იმპულსურ გარდამავალ ფუნქციას

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{c-4}} \sin \sqrt{c-4} t.$$

მასამადამე, შესაძლებელია ჩაეწეროს

$$|g(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{c-4}} e^{-1 - \sqrt{c-4}} t, & c < 4, \\ \frac{1}{\sqrt{c-4}} e^{-t}, & c > 4 \end{cases}$$

გარდამავალი ფუნქციის საზღვრებს (საწყისი პირობებიდან გამომდინარე) უნდა ჰქონდეს იგივე მაჩვენებლები. თეორემიდან გამომდინარე, აღნიშვნებს აქვთ სახე

$$c_g = \frac{1}{2\sqrt{4-c}}; \quad \alpha = 1 - \sqrt{4-c}, \quad \text{თუ } c < 4.$$

$$c_g = \frac{1}{\sqrt{c-4}}; \quad \alpha = 1 \quad \text{თუ } c > 4.$$

საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , მდგომარეობს შემდეგში:

$$d < \begin{cases} 2(\sqrt{4-c} - 4 + c), & c < 4, \\ \sqrt{c-4} & c > 4. \end{cases}$$

## მატაბლითი 4.2

განვიხილოთ განტოლება

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = 0 \quad (4.48)$$

გამოვიყენოთ ჩასმა

$$z(t) = x(t) \exp(-0.5) \int_0^t a(s) ds. \quad (4.49)$$

მაშინ (4.48) -ზე დავა უფრო ზოგადი განტოლება

$$\dot{z}(t) + a(t)z(t) + b(t)z(t) = 0. \quad (4.50)$$

ჩაეწეროს (4.48) განტოლებათა სისტემის სახით

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -P(t)x, \quad (4.51)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -P(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Tr} A(t) = 0$$

ფუნდამენტალური  $X(t)$  მატრიცის აქვს სახე

$$X(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \quad \psi(0) = 0, \\ \dot{\varphi}(0) &= 0, \quad \dot{\psi}(0) = 1. \end{aligned} \quad (4.52)$$

თუ გამოვიყენებთ ფლოკუს განტოლებას

$$\det [X(\lambda) - P_1] = 0, \quad (4.53)$$

სადაც  $P_1$  არის  $X(\lambda)$  მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები. (4.53) განტოლებიდან ვიტყავს ფორმულებისა და ოსტროგრადსკი-ლიუვილის თეორემის გამოყენებით გამომდინარეობს

$$\sum_{j=1}^n P_j = \text{Tr} X(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_{ii}(\lambda), \quad (4.54)$$

$$\prod_{j=1}^n P_j = \det X(\lambda) = \exp \int_0^\infty \text{Tr} A(t) dt \quad (4.55)$$

ამ შემთხვევაში თუ გავითვალისწინებთ (4.53), მივიღებთ

$$P^2 - aP + \det X(\lambda) = 0.$$

(4.52), (4.53), (4.54) გათვალისწინებით

$$\det X(\lambda) = 1, \quad a = \varphi(\lambda) + \dot{\psi}(\lambda), \quad P_{1,2} = 0.5(a \pm \sqrt{a^2 - 4})$$

სიდიდეს  $a = \varphi(t) + \dot{\psi}(t)$  უწოდებენ ლიპუნოვის მუდმივას და განსაზღვრავს (4.48) განტოლების მდგრადობას. შესაძლოა სამი შემთხვევა

1.  $|a| > 2$ , მაშინ  $P_1$  და  $P_2$  ნამდვილია.  $|P_1| > 1$  და  $|P_2| < 1$ ; სისტემა არის არამდგრადი.

2.  $|a| < 2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  კომპლექსური-მეუღლეებულია.  $|P_1| = |P_2| = 1$ ; სისტემა არის მდგრადი.

3.  $|a| = 2$ , ამ შემთხვევაში  $P_1 = P_2$ -ეს არის კრიტიკული შემთხვევა და საჭიროებს დამატებით კვლევებს.

მაშასადამე, თუ

$$|\varphi(\lambda) + \dot{\psi}(\lambda)| < 2$$

მაშინ (4.48) სისტემა არის მდგრადი.

ახლა განვიხილოთ მათემატიკის განტოლების სხვა სახე

$$\ddot{X}(\omega^2 + \varepsilon \cos \omega t)X = 0.$$

$\varepsilon = 0$  შემთხვევაში განტოლებას აქვს სახე

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0.$$

მისი ამოხსნა იქნება

$$\varphi(t) = \cos \omega t, \quad \psi(t) = 1/\omega \sin \omega t.$$

მაშასადამე  $a = 2 \cos 2\pi \omega$ . ნათელია, რომ  $|a| < 2$ , თუ  $\omega \neq 0.5, 1, 1.5, 2, \dots$  წერტილები  $\omega = 0.5, 1, 1.5, 2, \dots$  შეიძლება განვიხილოთ როგორც მდგრადობის უბნების საზღვარები. როდესაც  $\varepsilon \neq 0$ , მდგრადობის საზღვარი აიკეზა რიცხვობრივად (ნახაზი 16.). პარამეტრების იმ მნიშვნელობების დროს, რომელიც მოცემულია დაშტრიხულ უბნებში. სისტემა არის არამდგრადი, არადაშტრიხულში - მდგრადი.

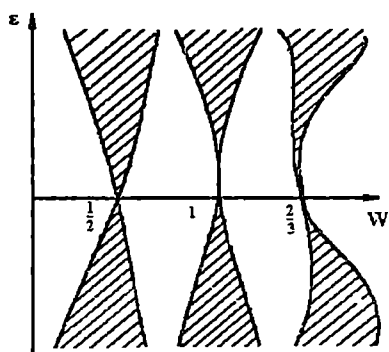


Abb. 16.

## 5. წარმომადგენლის სისტემების დაკვირვებადობა და მართვადობა

ახლა განვიხილოთ წარმომადგენლის სისტემების ორი ფუნდამენტალური ცნება. ესენია დაკვირვებადობა და მართვადობა. რომელიც შემოიტანა რ.კალმანმა. დაკვირვებადობის და მართვადობის ცნება დამყარებულია შემდეგ ორ საკითხზე, რომელთაც აქვთ ცხადი ფიზიკური შინაარსი:

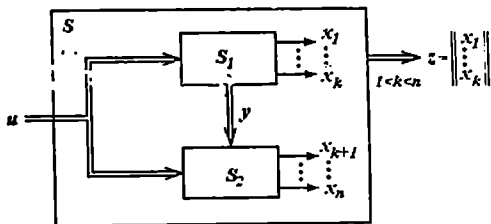
1. როგორი პირობების დროს შეიძლება ალგადინით დინამიკური სისტემის მდგომარეობის  $X$  ვექტორის მოქმედება დროის სასრულო ინტერვალში, თუ ვიცით გაზომვის  $Z$  ვექტორის მოქმედება იმავე დროის ინტერვალში.

2. როგორი პირობების დროს შეიძლება გადავიყვანოთ დინამიკური სისტემა მოცემული საწყისი მდგომარეობიდან სასრულო მდგომარეობაში უბან-უბან უწყვეტი მართვის  $U$  ფუნქციის გამოყენებით.

სანამ გადავიდეთ საკითხის ვრცელ განხილვაზე, რამდენიმე უბრალო სქემის საშუალებით მოვახდინოთ დაკვირვებადობის და მართვადობის თვისობრივი ილუსტრაცია.

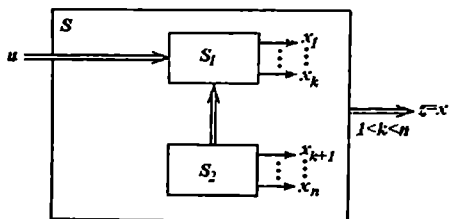
განვიხილოთ დინამიკური  $S$  სისტემა,  $X$  მდგომარეობით, მართვის  $U$  ვექტორით და გაზომვის  $Z$  ვექტორით.

პირველად დავუშვათ, რომ სისტემის სტრუქტურულ სქემას აქვს (17) ნახაზზე მოცემული სახე.



ნახ.17

(არადაკვირვებადი მართვადი სისტემის სქემა)



ნახ.18

დაკვირვებადი არამართვადი სისტემის სქემა

$Y$ -არის ვექტორი, რომლის მდგენელებია  $X(X_1 \dots X_k)$  ვექტორის პირველი  $K$  კომპონენტი. ან მისი ნაწილი. სტრუქტურებიდან არ შეიძლება განისაზღვროს  $X_{k+1}, \dots, X_n$ , თუ ვიცით  $Z$ , ვერაირად ეს ცვალდება არ ახდენენ ზეგავლენას  $X_1 \dots X_k$  მდგენელებზე და არ შეიძლება  $Z$ -ში. მაშასადამე, სისტემა არის არადაკვირვებადი. მეორეს მხრივ, თუ  $U$  მოქმედებს  $X$  ყველა ელემენტზე, სისტემა არის მართვადი.

ანალოგიურად, ნახ. 18-ზე მოცემული სისტემა არის დაკვირვებადი და არამართვადი. ვინაიდან  $U$  მოქმედებს მხოლოდ  $X_1, \dots, X_k$  ცვლადებზე.

ცხადია, რომ სისტემები შეიძლება დაეთვალიეროს კონტროლირებად: დაკვირვებადი მართვადი, დაკვირვებადი არამართვადი, არადაკვირვებადი მართვადი და არადაკვირვებადი არამართვადი.

## 5.1 უწყვეტი წრფივი სისტემების დაკვირვებადობა

განივილით უწყვეტი წრფივი სისტემა

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + C(t)U(t), \quad (5.1)$$

$$Z(t) = H(t)X(t), \quad \text{ყველა } t \geq t_0. \quad (5.2)$$

$X$  —  $n$  განზომილების მდგომარეობის ვექტორია,

$U$  —  $r$  განზომილების მართვის ვექტორია,

$F(t)$  — არის  $n \times n$  განზომილების მატრიცა,

$C(t)$  არის  $n \times r$  განზომილების მატრიცა,

$H(t)$  არის  $n \times n$  განზომილების მატრიცა.

ნაგულისხმებია, რომ  $U(t)$  არის დროის უწყვეტი ფუნქცია ყველა  $t \geq t_0$ ,  $X(t)$  — უცნობია. მოთხოვნაა, რომ განისაზღვროს  $X(t)$ , თუ ვიცით  $Z(t)$  დროის სასრულო  $[t_0, t_1]$  ინტერვალში. ყველა  $t \geq t_0$ , მაშინ

$$X(t) = H^{-1}(t)Z(t)$$

და საკითხი დაკვირვებადობაზე წყდება ტრივიალურად. ეს საკითხი აგრეთვე მართვად წყდება, თუ მატრიცა  $H(t)$ -ს აქვს  $n \times n$  განზომილება და არასინგულარულია. ცხადია, თუ მატრიცა  $H(t)$  აქვს განზომილება  $n \times n$  და არასინგულარულია მხოლოდ  $t \geq t_0$  ერთი მნიშვნელობისათვის, ვთქვათ  $t_\alpha$ . მაშინ ადვილად დაფრწმუნდებით, რომ

$$X(t_\alpha) = H^{-1}(t_\alpha)Z(t_\alpha).$$

როგორც ცნობილია,

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t (\tau, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (5.3)$$

$t = t_\alpha$  მნიშვნელობისათვის

$$H^{-1}(t_\alpha)Z(t_\alpha) = \Phi(t_\alpha, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau.$$

საიდანაც გამოდის, რომ

$$\begin{aligned} X(t_0) &= \Phi^{-1}(t_\alpha, t_0)[H^{-1}(t_\alpha)Z(t_\alpha) - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau] = \\ &= \Phi(t_0, t_\alpha)H^{-1}(t_\alpha)Z(t_\alpha) - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (5.4)$$

თუ შევითავსებთ  $X(t_0)$  მნიშვნელობას (5.3) განტოლებაში, მაშინ შეიძლება განისაზღვროს  $X(t)$  ყველა  $t \geq t_0$ , ვინაიდან  $U(\tau)$  ცნობილია  $\tau \geq t_0$ .

მაგრამ თუ  $n \times n$  განზომილების  $H(t)$  მატრიცა სინგულარულია ყველა  $t \geq t_0$ , ან თუ  $H(t)$  აქვს განზომილება  $m \times n$ , როდესაც  $m < n$ , მაშინ სრულებითაც არ არის ნათელი. როგორ განესაზღვროთ  $X(t)$   $Z(t)$ -დან,  $t_0 \leq t \leq t_1$  ის საწყისი მნიშვნელობისას. აი ეს საკითხია, რომელიც უნდა იყოს გამოკვლეული. შევნიშნოთ, რომ (5.3) განტოლების თანახმად მდგომარეობა  $X(t)$  ცნობილია ყველა  $t \geq t_0$ , თუ საწყისი პირობა  $X(t_0)$

შეიძლება განსაზღვროს გამოშვებიდან. გვაქვს რა ეს მხედველობაში. შემოვიტანოთ დაკვირვებადობის შემდეგი განსაზღვრება:

უწყვეტ წრფივ სისტემას

$$\dot{X}(t) = F(t)X + C(t)U(t) \quad (5.5)$$

$$Z(t) = H(t)X(t) \quad (5.6)$$

უწოდებენ დაკვირვებადს, თუ  $X(t)$  შეიძლება განსაზღვროს  $Z(t)$ -დან, რაღაც განსაზღვრული სასრული  $t_1$ -ის დროს,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . თუ ეს სამართლიანია ნებისმიერი  $t_0$ , მაშინ სისტემას უწოდებენ მთლიანად დაკვირვებადს. სისტემის მთლიანად დაკვირვებადობის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

## თეორემა 5.1

უწყვეტი წრფივი სისტემა (5.5), (5.6) არის მთლიანად დაკვირვებადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სიმეტრიული  $n \times n$  განზომილებიანი მატრიცა

$$M_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) H'(t) H(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (5.7)$$

არის დადებითად განსაზღვრული რაღაც სასრული  $t_1 > t_0$ .

დამტკიცება: ვინაიდან იგულისხმება, რომ  $U(t)$  ცნობილია ყველა  $t \geq t_0$ , ადვილი განსაზღვრია  $U(t)$  მოქმედება  $X(t)$ -ზე:

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) C(\tau) U(\tau) d\tau.$$

მაშასადამე, საკმარისია განვიხილოთ სისტემა

$$\dot{X} = F(t)X(t), \quad (5.8)$$

$$Z(t) = H(t)X(t), \text{ სადაც } t \geq t_0. \quad (5.9)$$

პირველად დავამტკიცოთ საკმარისობა. (5.8) განტოლების ამონახსნი  $X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$  შევითანოთ (5.9) განტოლებაში. მივიღებთ

$$Z(t) = H(t)\Phi(t, t_0)X(t_0). \quad (5.10)$$

გავამრავლოთ ეს განტოლება მარცხნიდან  $\Phi'(t, t_0)H'(t)$  და მოვახდინოთ ინტეგრირება  $t_0$ -დან  $t_1$ -მდე ზღვრებში. მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) H'(t) H(t) \Phi(t, t_0) dt X(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) H'(t) Z'(t) dt. \quad (5.11)$$

თუ ავლნიშნავთ

$$M_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) H'(t) H(t) \Phi(t, t_0) dt,$$

მაშინ (5.11)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$X(t_0) = M_c^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) H'(t) H(t) Z(t) dt \quad (5.12)$$

და სისტემა ცხადია, იქნება მთლიანად დაკვირვებადი, თუ მატრიცა  $M_c(t_0, t_1)$  დადებითად განსაზღვრულია რომელიმე სასრულ  $t_1 > t_0$ -ზე.

აუცილებლობის დასამტკიცებლად დაეუშვათ, რომ სისტემა არის მთლიანად ლაკირებული. მაგრამ მატრიცა  $M_c(t_0, t_1)$  არ არის დადებითად განსაზღვრული, ე.ი. რომელიმე  $X(t_0) \neq 0$

$$X'(t_0)M_c(t_0, t_1)X(t_0)=0.$$

(შემთხვევა  $X'(t_0)M_c(t_0, t_1)X(t_0) < 0$  არ განიხილება,  $M_c(t_0, t_1)$  მატრიცის განსაზღვრების თანახმად).

(5.11) თანახმად ეს ნიშნავს, რომ

$$X'(t_0) \int_{t_2}^{t_1} H'(t)Z(t)dt=0.$$

თუ შევითვალთ, რომ  $Z(t)$  (5.10), მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_1} Z'(t)Z(t)dt=0,$$

საიდანაც  $Z(t)=0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$

მაშასადამე, არსებობს ნულისაგან განსხვავებული  $X(t)$ , რომლის განსაზღვრაც შეუძლებელია, თუ ვიცით  $Z(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , რომელიც ეწინააღმდეგება დაშვებას სისტემის ლაკირებულობის შესახებ. თორემ დაშვებულია.

აღნიშნული თეორემის გამოყენება პრაქტიკულად ძნელია, ამიტომ სტაციონარული სისტემებისათვის მიღებულია შემდეგი შედეგი.

### შედეგი.

სტაციონარული უწყვეტი წრფივი სისტემა  $\dot{X}(t)=FX(t)$ ,  $Z(t)=Hx(t)$ , სადაც  $t \geq t_0$ , არის მთლიანად ლაკირებული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ  $n \times n$  განზომილების მატრიცას

$$\left| H'F'H' \dots (F')^{n-1}H' \right|$$

აქვს რანგი  $n$ .

დამტკიცება ხდება შემდეგნაირად. დაეუშვათ, რომ სისტემა  $\dot{X}(t)=AX(t)+BX(t)$ ,  $Y(t)=CX(t)$ ,

$$F=A, H=C, Y(t)=Z(t)$$

არის მთლიანად ლაკირებული, მაშინ თეორემიდან გამოდის, რომ  $t_1$ -თვის არსებობს ისეთი მომენტი  $t_0$ , რომლისთვისაც ტოლობიდან

$$C e^{A(t-t_0)} X_0 = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (5.13)$$

მივიღებთ  $X_0=0$ . წარმოადგინოთ  $\exp^{A(t-t_0)}$  ტეილორის მწკრივად. მივიღებთ  $C e^{A(t-t_0)}=0$  ექვივალენტურია ტოლობის

$$[C + CA(t-t_0) + CA^2(t-t_0)^2/2! + CA^3(t-t_0)^3/3! + \dots] X_0 = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (5.14)$$

თუ  $Q$  ლაკირებულობის მატრიცას არა აქვს სრული რანგი, მაშინ არსებობს ისეთი არანულოვანი  $X_0$ , რომ  $CX_0=0$ ,  $CAX_0=0$ , ...,  $CA^{n-1}X_0=0$ . თუ გამოვიყენებთ კელი-ჰამილტონის თეორემას, ადვილი სანახავია, რომ  $CA^e X_0=0$ ,  $e \leq n$ . ე.ი. თუ  $Q$ -ს არა აქვს სრული რანგი, არსებობს ისეთი არანულოვანი  $X_0$ , რომლისთვისაც სამართლიანია (5.14).

ცხადია, რომ  $X_0 \neq 0$  და სისტემა არ არის მთლიანად დაკვირვებადი. რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას. აქედან გამომდის, რომ  $Q$  მატრიცას აქვს მთლიანი რანგი. ეს შედეგი იწვევს შემდეგს:

$$Y(t) = Ce^{A(t-t_0)} X_0 = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

$$Y(t) \text{-ს მრავალჯერადი ღიფერენცირება გვაძლევს}$$

$$Y(t_0) = CX_0 = 0,$$

$$\dot{Y}(t_0) = CAX_0 = 0,$$

$$\ddot{Y}(t_0) = CA^2 X_0 = 0,$$

$$Y^{(n-1)}(t_0) = CA^{(n-1)} X_0 = 0$$

$$\text{ან } QX_0 = 0$$

ვინაიდან  $Q$ -ს აქვს მთლიანი რანგი, ვღებულობთ, რომ  $X_0 = 0$ . აქედან ვასკენით, რომ თეორემის თანახმად, სისტემა არის მთლიანად დაკვირვებადი. თეორემა დამტკიცებულია.

## 5.2 უწყვეტი წრფივი სისტემის მართვადობა

განივილით უწყვეტი წრფივი სისტემა

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + C(t)U(t), \quad t \geq t_0. \quad (5.15)$$

საწყისი მდგომარეობა  $X(t_0)$  ცნობილია, მაგრამ მართვა  $U(t)$  ჯერ არ არის განსაზღვრული. აქ უნდა იყოს გამოკვლეული (5.15) სისტემა  $X(t_0)$  მნიშვნელობიდან სასრულო  $X(t_1) = X^1$  მნიშვნელობამდე, სადაც  $t_1$  შეზღუდულია. ახალი კოორდინატების შემოტანისას  $Y(t) = X(t) - X^1$  ამოცანა ჩამოყალიბდება, როგორც გადასვლა  $X(t_0)$  კოორდინატთა სათავეში სასრულო დროში.

შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრება: უწყვეტ წრფივ სისტემას ეწოდება მართვადი  $t_0$  მომენტში, თუ არსებობს უბან-უბან წრფივი  $X(t_0)$ -ზე დამოკიდებული მართვის ფუნქცია  $U(t)$  განსაზღვრული დროის  $t_0 \leq t \leq t_1$  ინტერვალში, ამასთან  $X(t_1) = 0$ . თუ ეს სამართლიანია ყველა  $X(t_0)$ -თვის ნებისმიერი  $t_0$ -ის დროს, მაშინ სისტემას უწოდებენ მთლიანად მართვად სისტემას.

სისტემის მართვადობის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მოცემულია შემდეგი თეორემის სახით:

### თეორემა 5.2

უწყვეტი წრფივი სისტემა

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + C(t)U(t) \quad (5.16)$$

არის მთლიანად მართვადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $n \times n$  განზომილების სიმეტრიული მატრიცა

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) C(t)' (t) \Phi'(t_0, t) dt \quad (5.17)$$

არის დადებითად განსაზღვრული რომელიმე  $t_1 > t_0$  მომენტში.

სამპარისონა. წინა პარაგრაფის (5.3) განტოლებიდან  $t=t_1$ , გვექნება

$$X(t_1) = X(t_0) \Phi(t_1, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau) C(\tau) U(\tau) d\tau. \quad (5.18)$$

დაეშვათ,

$$U(\tau) = -C'(\tau) \Phi'(t_0, \tau) W_c^{-1}(t_0, t_1) X(t_0), \quad t_0 \leq \tau \leq t_1. \quad (5.19)$$

მაშინ, თუ შევიტანთ (5.18) განტოლებას (5.19) განტოლებაში, მივიღებთ

$$X(t_1) = \Phi(t_1, t_0) X(t_0) - \left[ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) C(\tau) C'(\tau) \Phi'(t_0, \tau) d\tau \right] \cdot \\ \cdot W_c^{-1}(t_0, t_1) X(t_0). \quad (5.20)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\Phi(t_1, \tau) = \Phi(t_1, t_0) \Phi(t_0, \tau)$$

ყველა  $t_0$ . მაშასადამე, ინტეგრალი (5.20) განტოლებაში მიიღებს სახეს

$$\Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) C(\tau) C'(\tau) \Phi'(t_0, \tau) d\tau = \Phi(t_1, t_0) W_c(t_0, t_1),$$

საიდანაც გამოდის

$$X(t_1) = \Phi(t_1, t_0) X(t_0) - \Phi(t_1, t_0) W_c(t_0, t_1) W_c^{-1}(t_0, t_1) X(t_0),$$

რომელსაც მივყევართ  $X(t_1) = 0$ . მაშასადამე, სისტემა არის მთლიანად მართვადი, თუ  $W_c(t_0, t_1)$  მატრიცა არის დადებითად განსაზღვრული რომელიმე სასრულო  $t_1 > t_0$ .

აუცილებლობა

ახლა დაეშვათ, რომ სისტემა არის მართვადი. მაგრამ რომელიმე  $X(t_0) \neq 0$  სამართლიანია თანაფარდობა

$$X'(t_0) W_c(t_0, t_1) X(t_0) = 0. \quad (5.21)$$

აღვნიშნოთ

$$U^*(t) = -C'(t) \Phi'(t_0, t) X(t_0), \quad \text{ყველა } t_0 \leq t \leq t_1. \quad (5.22)$$

მაშინ

$$U^*(t) = -C'(t) \Phi'(t_0, t) X(t_0) C(t) C'(t) \Phi'(t_0, t) X(t_0)$$

ხოლო გამოსახულების ინტეგრირება ხდება  $t_0$  -დან  $t_1$  -მდე ზღვრებში და თუ გამოვიყენებთ  $W_c(t_0, t_1)$  განსაზღვრებას და (5.21) განტოლებას, მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_1} U^*(t) U^*(t) dt = X'(t_0) \left[ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) C(t) C'(t) \Phi'(t_0, t) dt \right] X(t_0) =$$

$$=X'(t_0)W_c(t_0, t_1)X(t_0)=0 \quad (5.23)$$

მატრიცები  $C(t)$  და  $\Phi(t_0, \tau)$  (5.22) განტოლებაში არიან დროის უწყვეტი ფუნქციები და, მაშასადამე, მართვა  $U(t)$  არის უწყვეტი. ამიტომ (5.23) დან გამომდინარეობს, რომ  $U(t)=0$  ყველა  $t$  -თვის, ინტერვალში  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

ვინაიდან სისტემა არის მთლიანად მართვადი, უნდა არსებობდეს მართვა  $U(t)$ , რომლისთვისაც  $X(t_1)=0$ . ამ შემთხვევაში განტოლება (5.18) იღებხს სახეს

$$\Phi(t, t_0)X(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau,$$

ან, რაც იგივეა

$$X(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (5.24)$$

ახლა (5.24) და (5.22) განტოლებებიდან მივიღებთ,

$$\begin{aligned} X'(t_0)X(t_0) &= -X'(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau = - \int_{t_0}^{t_1} X'(t_0)\Phi(t_0, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} U^*(\tau)U(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ  $X'(t_0)X(t_0)=0$ , ვინაიდან  $U(t)=0$ , ყველა  $t_0 \leq t \leq t_1$  აქედან გამომდინარეობს, რომ  $X(t_0)=0$ , ეს კი ეწინააღმდეგება საწყის პირობას  $X(t_0) \neq 0$ . თეორემა დამტკიცებულია.

სტაციონალური უწყვეტი წრფივი სისტემებისათვის ცნობილია შემდეგი შედეგი.

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (5.25)$$

შედეგი.

სტაციონარული უწყვეტი წრფივი სისტემა  $\dot{X} = AX + BU$ ;  $t \geq 0$ , არის მთლიანად დაკვირვებადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $n \times n$  განზომილების მატრიცას

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

აქვს რანგი  $n$ .

დამტკიცება

თუ სისტემა იმყოფება ნულიდან მდგომარეობაში, მაშინ  $t_1$  მომენტში მდგომარეობის პრეზენტაციას აქვს სახე

$$X(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BU(\tau)d\tau. \quad (5.26)$$

ექსპონენციალი დავშალთ ტეილორის მწკრივად

$$X(t_1) = B \int_{t_0}^{t_1} U(\tau) d\tau + AB \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - \tau) U(\tau) d\tau + A^2 B \int_{t_0}^{t_1} ((t_1 - \tau)^2 / 2!) U(\tau) d\tau + \dots \quad (5.27)$$

ჩანს, რომ მდგომარეობის სასრულო მნიშვნელობა ეკუთვნის წრფივ ქვესივრცეს. რომელიც წარმოშობილია უსასრულო მიმდევრობის ვექტორ — სვეტების მატრიცებით  $B, AB, A^2B, \dots$  ამ თანმიმდევრობაში უნდა გამოჩნდეს მატრიცა  $A^{e+1}B$ , რომლის ყველა ვექტორი — სვეტები წრფივად არის დამოკიდებული წინა მატრიცის ვექტორ — სვეტებზე  $B, AB, \dots, A^{e-1}B$ . ასეთ მატრიცას უნდა ჰქონდეს ადგილი, უნაიდან  $n$  განზომილებიან სივრცეში არ შეიძლება იყოს  $n$  — ზე მეტი წრფივად დამოკიდებული ვექტორები. ეს გულისხმობს, რომ  $e \leq n$ .

ასეა განვიხილოთ  $A^{e+1}B = A(A^eB)$ . უნაიდან  $A^eB$  მატრიცის ვექტორ — სვეტები წრფივად არიან დამოკიდებული ვექტორ — სვეტებზე  $B, AB, \dots, A^{e-1}B$ , შეიძლება, ჩაეწეროთ.

$$A^e B = BA_0 + AB_1 + \dots + A^{e-1}B_{l-1},$$

სადაც  $\lambda_i$ , ( $i=0, 2, \dots, l-1$ ) წარმოადგენენ მატრიცებს, რომლებიც შეიცავენ კოეფიციენტებს. რომელთა საშუალებით ყოველი ვექტორ — სვეტი  $A^e B$  მატრიცის  $B, AB, \dots, A^{e-1}B$  — საშუალებით გვაქვს

$$A^{e+1}B = BA_0 + A^2B_1 + \dots + A^e B_{l-1}.$$

აქედან ჩანს, რომ  $A^{e+1}B$  ვექტორის სვეტები წრფივად არის დამოკიდებული  $B, AB, \dots, A^{e-1}B$  ვექტორ — სვეტებზე.

ასეონაირადვე შეიძლება ვთქვათ, რომ  $A^k B$  მატრიცის ყველა ვექტორ-სვეტები  $k \geq e$  — თვის წრფივად არის დამოკიდებული  $B, AB, \dots, A^{e-1}B$  მატრიცების ვექტორ-სვეტებზე.

დაეუბრუნდეთ (5.26) განტოლებას. შევაჩვენეთ, რომ  $X(t_1)$  ეკუთვნის წრფივ ქვესივრცეს, რომელსაც წარმოქმნის  $B, AB, \dots, A^{e-1}B$  მატრიცის ვექტორ-სვეტები. უნაიდან  $e \leq n$ , შეიძლება ითქვას, რომ  $X(t_1)$  ეკუთვნის ქვესივრცეს, რომელიც წარმოიქმნება  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  მატრიცის ვექტორ-სვეტებით.

ასეა ნათელია, რომ თუ მატრიცის ვექტორ-სვეტები ვერ აღწარმოებენ  $n$  — განზომილებიან სივრცეს, შეიძლება მივადწიოთ მხოლოდ იმ პარამეტრებს, რომლებიც ეკუთვნიან წრფივ ქვესივრცეს და მისი განზომილება  $n$  — ზე ნაკლებია. ამიტომ სისტემა არ არის მთლიანად მართალი. ეს ამტკიცებს იმას, რომ თუ სისტემა არის მთლიანად მართალი,  $P = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  მატრიცის ვექტორ-სვეტები წარმოშობენ  $n$  — განზომილებიან სივრცეს.

თორემის მეორე ნაწილის დამტკიცება, რომ  $P$  მატრიცა წარმოქმნის  $n$  — განზომილებიან სივრცეს, ხდება შემდეგნაირად:  $U(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t_1$  შესასვლელის შერჩევით შეიძლება ამოვარჩიოთ კოეფიციენტების ისეთი ვექტორები განტოლებაში

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^{l-1}}{(l-1)!} U(\tau) d\tau,$$

რომ (5.27) მარჯვენა მხარეები გაუტოლდეს სივრცეში მოცემულ ნებისმიერ ვექტორს, წარმოშობილი  $P$  მატრიცის სვეტებით.

$P$  მატრიცის სვეტები წარმოშობენ  $n$  — განზომილებიან სივრცეს. ეს იმას, ნიშნავს, რომ მიიღწევი სასრულო მდგომარეობა და სისტემა არის მთლიანად მართალი. ამით მთავრდება თეორემის დამტკიცება.

(5.25) სისტემის მართალობა მთლიანად განისაზღვრება  $A$  და  $B$  მატრიცებით. სამართლიანია შემდეგი განსაზღვრება.

ბანსაზღვრება. მოცემულია  $n \times n$  და  $n \times k$  განზომილების მატრიცები. მაშინ წყვილი  $\{A, B\}$  არის მთლიანად მართვადი, თუ სისტემა

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

არის მთლიანად მართვადი.

საქსებით ცხადია მსკავსება დაკვირვებადობის და მართვადობის თეორემებს შორის. ერთი თეორემიდან მეორეზე შეიძლება გადასვლა, თუ მოვახდენთ შემდეგ ცვლილებებს

$$\begin{cases} \text{დაკვირვებადობა} \longrightarrow \text{მართვადობა.} \\ M_c(t_0, t_1) \longrightarrow W_c(t_0, t_1). \\ \Phi(t, t_0) \longrightarrow \Phi'(t_0, t). \\ H(t) \longrightarrow C'(t). \end{cases} \quad (5.28)$$

ეს თვითება პირველად შეამჩნია რ.კალმანმა, რომელმაც მას უწოდა დუალობა. ამრიგად, დაკვირვებადობა და მართვადობა წარმოადგენენ წრფივი სისტემის დუალურ თვისებებს.

### 5.3 მართვადი/დაკვირვებადი ქვესისტემის ბაზოჟობა

იმ შემთხვევაში, თუ განსახილველი სისტემა არის /არ არის/ მთლიანად მართვადი/დაკვირვებადი, სასარგებლოა გამოიყოს მართვადი/დაკვირვებადი ქვესისტემა და მისთვის მოვახდინოთ მართვის ამოცანების გადაწყვეტა.

სანამ გამოვყოფდეთ ასეთი ქვესისტემებს, უნდა აღვნიშნოთ თვისება, რომ მართვადობა/დაკვირვებადობა ინვარიანტულია ბაზისის მიმართ, რომელშიც განსაზღვრულია მდგომარეობის  $X$  ვექტორი.

#### თეორემა 5.3

თუ სისტემა

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX, \quad X(t_0) = X_0 \quad (5.29)$$

არ არის მთლიანად მართვადი, მაშინ არსებობს ისეთი არასინგულარული მუდმივი მატრიცა  $T$ , რომ

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

და სისტემა  $\dot{X}_1 = A_{11}X_1 + B_1U$  (5.31) არის მთლიანად მართვადი.

ახალ ბაზისში (5.29) სისტემას აქვს სახე

$$\dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + B_1U, \quad \dot{X}_2 = A_{22}X_2, \quad Y = C_1X_1 + C_2X_2. \quad (5.32)$$

$X_1$  აქვს  $P$  რანგის განზომილება.

(5.29)-დან გამომდინარეობს, რომ  $X_2$  მთლიანად დამოუკიდებელია და შეიძლება განვიხილოთ როგორც გარეშე ზემოქმედება მართვად ქვესისტემაზე.

#### თეორემა 5.4

თუ (5.29) სისტემა არ არის მთლიანად დაკვირვებადი, მაშინ არსებობს ისეთი არასინგულარული მატრიცა  $T$ , რომ

$$T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad CT = [C_1 | 0]. \quad (5.33)$$

და (5.29) ქვესისტემას ახალ ბაზისში აქვს სახე

$$X = A_{11}X_1 + B_1U, \quad Y = C_1X_1 \quad (5.34)$$

$$X = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + B_2U \quad (5.35)$$

ამასთან ქვესისტემა (5.34) არის დაკვირვებადი (5.34) და (5.35) განტოლებების ანალოზის შედეგად. შეიძლება დაუადგინოთ, რომ  $y(t)$  დაკვირვების შედეგად ვერაფრით მსჯელობას ვერ ჩაუტარებთ  $X_2$ -ზე.

დაკვირვებადი/მართვადი ქვესისტემის გამოყოფის ალგორითმი შეიძლება შედგებოდეს პირველად (5.34) ქვესისტემის გამოყოფით და განხილვიდან (5.35) ამოღებით. შემდეგში კი მართვადი ქვესისტემის გამოყოფით.

აუცილებლად (5.32) ქვესისტემა, დავუშვათ, რომ

$$\text{rank}[B | AB | \dots | A^{n-1}B] = P. \quad (5.36)$$

სივრცე დაჭიმულია

$$\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}.$$

ეს არის ინვარიანტული  $A$ -სივრცე. ე.ი. ნებისმიერი ვექტორი ამ სივრციდან გამრავლებული  $A$ -ზე, რჩება ისევ ამ სივრცეში. ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ

$$A[B | \dots | A^{n-1}B] = \left[ AB | A^2B | \dots | \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i B \right]. \quad (5.37)$$

$T$  მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად:  $T$ -ს პირველი  $P$  სვეტი არის სივრცის ბაზისი, დაჭიმული  $\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ . მათ მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ განტოლებას

$$\begin{bmatrix} b_1 | \dots | b_{n-1} | \dots | b_1 | \dots | A^{n-1}b_1 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

დარჩენილი  $n-P$  სვეტს ვირჩევთ ისე, რომ გარანტირებული იყოს  $T$ -ს არასინგულარობა. ამისათვის (5.38)-ში უნდა მოვახდინოთ მატრიცის სტრიქონების გადაადგილება ისე, რომ პირველი  $P$  სტრიქონები იმყოფებოდნენ არასინგულარულ მატრიცაში, რომლის რანგია  $P$ . შემდეგ ეს მატრიცა წაიზრდება მარჯვნიდან შემდეგი სახის მატრიცით  $[O \quad I]^P$ .  $I$ - ერთეულოვანი მატრიცაა. ამრიგად  $T$  მატრიცის არასინგულარობა გარანტირებულია. შემდეგ მოვახდინოთ სტრიქონების უკუ გადაადგილება. დავამტკიცოთ, რომ ეს მიგვიყვანს (5.32) განტოლებასთან.  $B$  მატრიცა ეკუთვნის სიმრავლეს, რომელიც დაჭიმულია  $\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ , ამას გარდა. ეს სივრცე წარმოქმნილია  $T$  მატრიცის  $P$  სვეტებით, ანუ:

$$B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

ზოგიერთი  $B_1$   $P$  მწკრივებით. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\begin{bmatrix} B | AB | \dots | A^{n-1}B \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} S_1 \\ - \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

$S_1$  აქვს  $P$  მწკრივები, ამას გარდა  $\text{rank } S_1 = P$ . აუცილებელია გვქონდეს

$$A \begin{bmatrix} B | AB | \dots | A^{n-1}B \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} S_2 \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$$

რომელიც  $S_2$   $P$  მწკრივებით. ეს ნიშნავს, რომ

$$AT \begin{bmatrix} -S_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} -S_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ან } T^{-1}AT \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

ვინაიდან  $S_1$  აქვს რანგი  $P$ , მაშინ

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

სადაც  $A_{11}$  არის  $P \times P$  განზომილების მატრიცა. (5.41) და (5.39) განტოლებებიდან გამომდინარეობს (5.38). რჩება მხოლოდ ვაჩვენოთ, რომ  $[A_{11} B_1]$  არის მთლიანად მართებული. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ (5.41) და (5.39) გამომდინარეობს

$$T^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(5.40)-დან და იმ ფაქტიდან, რომ  $\text{rank} S_1 = P$ , ვღებულობთ

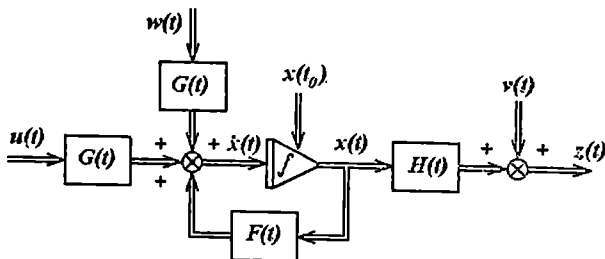
$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = \text{rank} S_1 = p.$$

ვინაიდან  $A_{11}$  არის  $P \times P$  განზომილების მატრიცა, ამიტომ  $A_{11}^{n-1}B_1$  წრფივად არიან დამოკიდებული უფრო დაბალი რიგის წევრებისაგან. მაშასადამე

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & \dots & A_{11}^{P-1}B_1 \end{bmatrix} = P.$$

აი, ის რაც უნდა დაგვემტკიცებინა. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე თეორემა.

სანამ გადავიდოდეთ უშუალოდ მაგალითის განხილვაზე. შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნები და განმარტებები (ნახ.19).



ნახ.19.

განვიხილოთ ფიზიკური სისტემები, რომლებიც აღიწერებიან ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების დახმარებით

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + G(t)w(t) + C(t)U(t), \quad t \geq 0, \quad (5.43)$$

(5.43) განტოლებაში  $X$  —  $n$  განზომილებიანი ვექტორია, რომელსაც უწოდებენ სისტემის მდგომარეობას.

$w$  —  $p$  განზომილებიანი ვექტორი, რომელსაც უწოდებენ აღმშოთხებას.

$U$  —  $r$  განზომილებიანი ვექტორი, რომელსაც უწოდებენ მართვას.

$F(t)$  არის  $n \times n$  განზომილების მატრიცა.

$G(t)$  არის  $n \times p$  განზომილების მატრიცა.

$C(t)$  არის  $n \times r$  განზომილების მატრიცა.

იგულისხმება, რომ ეს მატრიცები დროის მიხედვით არის უწყვეტი.

გამომავალი სიდიდეები იზომება გადამწოდების საშუალებით. განტოლებას აქვს სახე:

$$Z(t) = H(t) \cdot V(t) + V(t) \quad (5.44)$$

(5.44)

$\gamma$  —  $m$  განზომილების ვექტორია, რომელსაც უწოდებენ გაზომვის ვექტორს.

$v$  —  $m$ -განზომილებიანი ვექტორია, რომელსაც უწოდებენ გაზომვის შეცდომის ვექტორს.

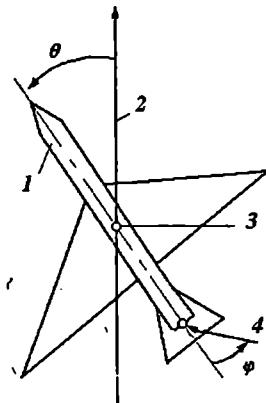
$H(t)$  — არის უწყვეტი  $m \times n$  განზომილების მატრიცა.

#### 5.4 მატრიცა:

#### თვითმფრინავის მართვის გამარტივებული მოდელის გამოკვლევა

გამოვიყვლით თვითმფრინავის მართვის გამარტივებული მოდელი მისი პორიზონტალურად ფრენის შემთხვევაში ქარის ღინებში მიმართულების კუთხის ცვლილებას. ვუშვებთ, რომ ქარი გადახრის თვითმფრინავს მითითებული მიმართულებიდან და საჭიროა მოვახდინოთ მიმართულების ცვლილების კორექტირება საჭის შესაბამისი გადაადგილებით.

განვიხილოთ მხოლოდ ჰრტყელი მოძრაობა, ვთვლით, რომ თვითმფრინავი წარმოადგენს მყარ სხეულს წრფის მონაკვეთის სახით და ვუშვებთ, რომ კუთხური გადახრები მცირე სიდიდეებია. გრაფიკულად ეს მოდელი მოცემულია 20 ნახაზზე



ნახ. 20.

20 ნახ. თვითმფრინავის დინამიკის სქემატური მოდელი. 1. თვითმფრინავის ღერძული ხაზი. 2. გათვლილი მიმართულება. 3. მიმართულების ცვლილების ღერძი. 4. საჭე.  $\theta$  — მიმართულების ცვლილება.  $\phi$  — საჭის გადახრა.

მიმართულების ცვლილების ღერძი გადის სიმძიმის ცენტრში და ნახაზის სიზრტის ნორმალაა. იგულისხმება, რომ თვითმფრინავს აქვს ამ ღერძის მიმართ  $J$  ინერციის მომენტი. აღმდგენი მომენტი პროპორციულია საჭის გადახრისა. ბლანტი წინააღმდეგობა ბრუნვის მიმართ, რომელიც გამოწვეულია ქარის ტალღებით და კავშირი მიმართულების ცვლილების კუთხესა და კრენს შორის არის ძალიან მცირე.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად

$$J\ddot{\theta} = -K\phi(t) + \omega_c(t)$$

სადაც,  $K_1$  — არის პროპორციულობის კოეფიციენტი საჭის გადახრისა და აღმდგენ მომენტს შორის ( $K > 0$ ),  $\omega_c(t)$  — მომენტი, რომელიც გამოწვეულია ქარის დატვირთვით.

გაეყვით განტოლება  $J\ddot{\theta}$  და აღვნიშნოთ

$$b = \frac{k_1}{J}, \quad u(t) = \varphi(t) \quad \text{და} \quad \omega(t) = \omega_0(t)/J.$$

გვაქვს

$$\ddot{\theta} = bu(t) + \omega.$$

მიღებული დიფერენციალური განტოლება არის მეორე რიგის. ამიტომ, მისი ამოხსნისათვის საჭიროა,  $u(t)$  და  $\omega(t)$  ცოდნასთან ერთად, გვექონდეს მოცემული ორი

საწყისი პირობა:  $\theta(t_0)$  მიმართულების კუთხის ღირებულება და  $\dot{\theta}(t_0)$  - მიმართულების კუთხის ცვლილების სიჩქარის საწყისი მნიშვნელობები.

შემოვიტანოთ ცვლადები  $X_1 = \theta$  და  $X_2 = \dot{\theta} = \dot{X}_1$  და სისტემის განტოლება ჩავეწეროთ შემდეგი სახით:

$$\dot{X}_1 = X_2,$$

$$\dot{X}_2 = bu(t) + \omega(t).$$

ან იგივე

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t),$$

$$\text{სადაც } X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

მდგომარეობის ვექტორია, რომელიც ხასიათდება ორი ფიზიკური სიდიდით: მიმართულების კუთხის შეცდომისა და მიმართულების კუთხის ცვლილების სიჩქარისაგან.

თუ შევადარებთ მიღებულ განტოლებას, შემდეგ განტოლებას

$$\dot{X} = F(t)X + G(t)\omega(t) + C(t)u(t),$$

მივიღებთ,

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

აღშვლითება  $\omega(t)$  და მართვა  $u(t)$  სკალარული სიდიდეებია.

დავუშვათ, რომ  $\theta$ -ს და  $\dot{\theta}$ -ს გაზომვა შეიძლება თერარზრანსებზე ინერციული სისტემების დასმარებით

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \nu(t),$$

$$\text{სადაც } Z(t) = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{bmatrix} \text{ არის გაზომვის ვექტორი,}$$

$$\nu(t) = \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix} \text{ გაზომვის შეცდომის ვექტორი,}$$

$\nu_1(t)$  -  $\theta$  კუთხის შეცდომის მნიშვნელობა,

$\nu_2(t)$  - მიმართულების კუთხის შეცდომის სიჩქარის მნიშვნელობა.

თუ შევადარებთ მიღებულ შედეგს (5.41) განტოლებას, მივიღებთ:

$$H(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ახლა გამოვიყვლით, არის თუ არა სისტემა დაკორექტირებადი. გამოვიყენოთ კალმანის

$$\text{შედეგი } \text{rank} \begin{bmatrix} H^1 & F^1 H^1 & \dots & (F^1)^{n-1} H^1 \end{bmatrix} = n.$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F'H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

მაშინ მატრიცის რანგი

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H'F'H' \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

და სისტემა არის მთლიანად დაკორეებადი.

თუ დავუშვებთ, რომ იზომება მხოლოდ მიმართულების კუთხის შეცდომის სიჩქარე, მაშასადამე [01]

$$H' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, F'H' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} H'F'H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

ამ შემთხვევაში სისტემა არის არადაკორეებადი.

განვიხილოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი.

### მაგალითი 5.5

მოცემულია სისტემის განტოლება, რომელიც შედგება ორი ქვესისტემი-საგან:

$$\dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + B_1U(t),$$

$$\dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2,$$

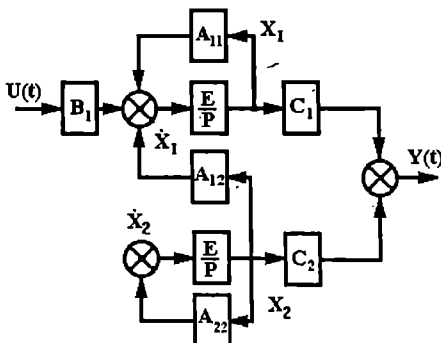
$$Y(t) = C_1X_1 + C_2X_2.$$

საჭიროა, გამოვიყვილოთ სისტემის მართვადობა.

ამოხსნა. მოცემული განტოლებების მიხედვით ავაგოთ სისტემის სტრუქტურული სქემა.

ნახ.21 ნახაზიდან ჩანს, რომ სისტემა არ არის მთლიანად მართვადი, ვინაიდან მართვის ვექტორი მოქმედებს მხოლოდ I ქვესისტემაზე  $X_1 = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ , ხოლო II

ქვესისტემა  $X_{II} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$  ასრულებს თავისუფალ მოძრაობას, რომელიც განისაზღვრება  $A_{22}$  მატრიცით და საწყისი პირობებით.



ნახ. 21.

## მაბალოთი 5.6

შევისწავლოთ დაკვირვებადობა და მართვადობა შემდეგი სისტემებისა:

$$\dot{Y} + aY = bU.$$

შემოვიტანოთ მდგომარეობის კოორდინატები  $X_1 = Y$ ,  $X_2 = \dot{Y}$ , გვექნება:

$$\dot{X}_1 = X_2,$$

$$\dot{X}_2 = -aX_1 + bU.$$

მართვადობის მატრიცაა:

$$K_1 = \begin{vmatrix} CFC \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b^2 \neq 0,$$

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad F^1 = \begin{vmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$F^1 H^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

დაკვირვებადობის მატრიცაა

$$K_2 = \begin{vmatrix} H^1 F^1 H^1 \\ H^1 F^1 H^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

სისტემა არის დაკვირვებადი და მართვადი.

ერთგანზომილებიანი სისტემისათვის  $H$  შედეგაა ერთი სტრუქტურისაგან, ხოლო  $H^1$  - ერთი სვეტისაგან.  $K_2$  მატრიცის განზომილებაა  $(n \times n)$  და სისტემის მთლიანი დაკვირვებადობის საკმარისია, რომ  $K_2$  მატრიცა იყოს გადუბეჭდვადი ე.ი.  $\det K_2 \neq 0$ .

## მაბალოთი 5.7

განვიხილოთ სისტემა ორი შემოქმედებით:

$$\dot{X}_1 = X_2 - U_1 + U_2,$$

$$\dot{X}_2 = X_1 - 2X_2 + 2U_2.$$

ამ შემთხვევაში:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad FC = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

მართვადობის მატრიცაა:

$$K_1 = \begin{vmatrix} CFC \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

მატრიცის რანგი ტოლია 2-ის, ე.ი. სისტემა არის მთლიანად მართვადი.

6.1 ლაპასიანობის თეორია (ლინეარების იდენტიფიკაციის თეორია)

სისტემის მართვის ყველა ამოცანაში გვხვდება ერთ-ერთი ძირითადი დაშვება: მდგომარეობის მთლიანი ვექტორი შეიძლება ზუსტად გაიზომოს ეს პრაქტიკულად არაქალაქური. ძირითადად გვხვდება შემთხვევა, როდესაც მოცემულია სისტემისათვის მდგომარეობის განტოლება

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (6.1)$$

შეიძლება გაიზომოს ცვლადების გარკვეული წრფივი კომბინაცია  $y(t) = C(t)X(t)$ . (6.2)

$y(t)$  ცვლადი არის  $l$  განზომილებიანი ვექტორი.  $l \leq n$ .  $y(t)$ -ს უწოდებენ დაკვირვების ცვლადს. ისმის ამოცანა: ისე აღვადგინოთ დაკვირვების ცვლადის მდგომარეობა, რომ თუ სამართლიანია ფუნქციონალი

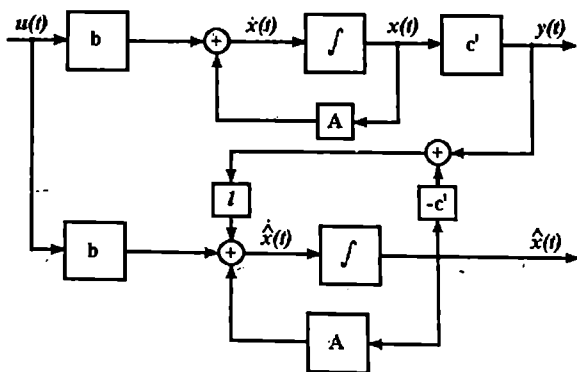
$$\dot{X}'(t) = F(y(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad t_0 \leq t,$$

მაშინ  $X'(t) = X(t)$ , სადაც  $X'(t)$  არის აღდგენილი მდგომარეობა,  $t_0$ -დაკვირვების საწყისი მომენტი. უნდა აღვნიშნოთ, რომ  $F(y(\tau))$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t_1$ , ე.ი. აღდგენილი მდგომარეობა  $X(t)$  არის ფუნქცია  $y(\tau)$ ,  $(t_0 \leq \tau \leq t)$ , წინა დაკვირვების და არ არის დამოკიდებული  $y(\tau)$ ,  $\tau \geq t$ , მომავალ დაკვირვებებზე. მას შედეგ რაც აღდგენილია მდგომარეობის ვექტორი, შეიძლება გამოვიყენოთ სისტემის მართვის ცნობილი მეთოდები, რომლებშიც ნამდვილი მდგომარეობა შეცვლილია აღდგენილი მდგომარეობით. ამ თავში განვიხილავთ დინამიური სისტემების განტოლებებს, რომელთა შემავალი სიდიდეებია საწყისი სისტემის შემავალი და გამომავალი ცვლადები, ხოლო

გამოსასვლელია  $\hat{X}(t)$  ვექტორის შეფასების კომპონენტები. დინამიურ სისტემას,

რომელიც აფორმირებს გამოსასვლელზე საწყისი, სისტემის  $\hat{X}(t)$  მდგომარეობას შემავალი და გამომავალი ცვლადებით, უწოდებენ სისტემის დამკვირვებელს, ან მდგომარეობის იდენტიფიკატორებს. ეს საკითხები პირველად დაამუშავა ლიუნბერგერმა და მას ხშირად აგრეთვე ლიუნბერგერის იდენტიფიკატორებს უწოდებენ.

განვიხილოთ ასიმპტოტური იდენტიფიკატორი ერთი შესასვლელით. მისი სტრუქტურა მოცემულია 22 ნახაზზე:



ნახ.22.

ამ იდენტიფიკატორის შესასვლელზე მოდებულია საწყისი სისტემის როგორც შემავალი. ისე გამოთვლილი სიდიდეები. გამოთვლილი  $y(t)=C^1X(t)$  ელარება  $\hat{y}(t)=C^1\hat{X}(t)$  და მათი სხვაობა მიეწოდება სისტემის შესასვლელზე, როგორც მაკორექტირებელი ზემოქმედება. სხვაობა  $[y-\hat{y}]=[y-C^1X]$  მრავალდება 1-იან ვექტორზე და მიეწოდება იდენტიფიკატორის ინტეგრატორებს. ამ იდენტიფიკატორის დინამიკა ძალიან არის დამოკიდებული 1 ვექტორის ამორჩევაზე. ამ ვექტორის საშუალებით მიიღწევა  $X(t)-\hat{X}(t) \rightarrow 0$ , როდესაც  $t \rightarrow \infty$ . წრფივ დინამიკურ სისტემას, რომლის გამოთვლილია  $\hat{X}(t)$  ვექტორი, უწოდებენ წრფივი სისტემის

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t), \quad y(t)=CX(t) \quad (6.3)$$

ასიმპტოტურ იდენტიფიკატორს, თუ  $X(t)-\hat{X}(t) \rightarrow 0$ , როდესაც  $t \rightarrow \infty$ .

### მთლიანი რიგის დამკვირვებლები

ბანსაზღვრა. სისტემა

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= F(t)q(t) + C(t)y(t) + H(t)U(t), \\ Z(t) &= K(t)q(t) + L(t)y(t) + M(t)U(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

არის შემდეგი სისტემის დამკვირვებელი

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}(t) &= A(t)\bar{X}(t) + B(t)U(t), \\ y(t) &= C(t)\bar{X}(t), \end{aligned} \quad (6.5)$$

თუ ყველა საწყისი  $X(t_0)$  პირობისათვის სისტემა (6.5)-სათვის არსებობს ისეთი საწყისი პირობა  $q_0$  (6.4) სისტემიდან, რომ ტოლობიდან

$$q(t_0) = q_0, \quad (6.6)$$

მივიღებთ  $Z(t)=X(t)$ ,  $t \geq t_0$ . ყველა  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

(6.4) დასკოივების შემავალი სიგნალებია სისტემის შემავალი ცვლადები  $U$  და დაკვირვებადი ცვლადი  $Y$ , გამოთვლილი- $Z$  ცვლადებია.

ბანსაზღვრა.

$n$ -ური რიგის სისტემა

$$\dot{\bar{X}}(t) = F(t)\bar{X}(t) + G(t)Y(t) + H(t)U(t) \quad (6.8)$$

არის მთლიანი რიგის დამკვირვებელი  $n$ -ური რიგის სისტემისათვის

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad (6.9)$$

$$Y(t) = C(t)X(t), \quad (6.10)$$

თუ

$$\hat{X}(t_0) = X(t_0) \quad (6.11)$$

გვაძლევს

$$\hat{X}(t) = X(t), \quad \text{ყველა } U(t), \quad t \geq t_0. \quad (6.12)$$

დამკვირვებულს (6.8) უწოდებენ მთლიანი რიგის დამკვირვებულს, ეინაიდან მის  $\hat{X}$  მდგომარეობას აქვს იგივე განზომილება, რაც  $X(t)$  სისტემის მდგომარეობას. განვიხილოთ, თუ როგორ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მატრიცები  $F, G, H$ , იმისთვის, რომ სისტემა (6.8) იყოს დამკვირვებელი.

განვიხილოთ შემდეგი თეორემა:

## თეორემა 6.1

სისტემა (6.8) არის დამკვირვებელი (6.9) სისტემისათვის, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{aligned} F(t) &= A(t) - K(t)C(t), \\ G(t) &= K(t), \\ H(t) &= B(t), \end{aligned} \quad (6.13)$$

სადაც  $K(t)$  - არის ნებისმიერი დროში ცვლადი მატრიცა. მთლიანი რიგის დამკვირვებელს აქვს შემდეგი სტრუქტურა:

$$\dot{X}(t) = A(t)\hat{X}(t) + B(t)U(t) + K(t)[Y(t) - C(t)\hat{X}(t)] \quad (6.14)$$

თეორემის დამტკიცება შემდგენიარად ხდება: გამოვსვალოთ (6.9) განტოლებას (6.8), და გამოვიყენოთ თანადარდობა (6.10), მივიღებთ

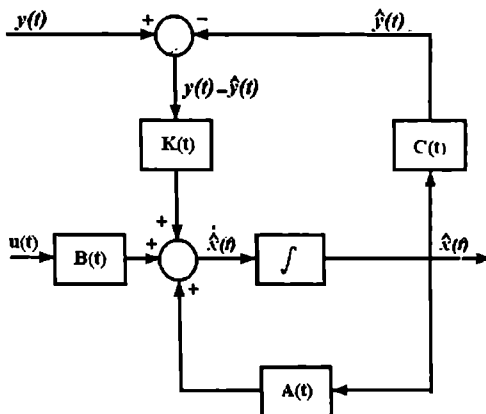
შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას სხვაობისათვის  $\dot{X}(t) - \dot{\hat{X}}(t)$ :

$$\dot{X}(t) - \dot{\hat{X}}(t) = [A(t) - G(t)C(t)]X(t) - F(t)\hat{X}(t) + [B(t) - H(t)]U(t). \quad (6.15)$$

ამ განტოლებიდან უშუალოდ გამოვძინარეოთ, რომ  $X(t) = \hat{X}(t)$  ყველა  $t > t_0$  და  $U(t)$ -თვის,  $t > t_0$  - გამოვძინარეოთ (6.13) და პირიქით, თუ სრულდება (6.13), მაშინ

$$\dot{X}(t) - \dot{\hat{X}}(t) = [A(t) - K(t)C(t)][X(t) - \hat{X}(t)]. \quad (6.16)$$

ეს გვიჩვენებს, რომ თუ  $X(t_0) = \hat{X}(t_0)$ , მაშინ  $X(t) = \hat{X}(t)$ , ყველა  $t > t_0$  და  $U(t)$ ,  $t > 0$ . ამით მტკიცდება თეორემა.



ნახ. 23.

(6.14) განტოლება მიიღება (6.13)-ის ჩასმით (6.8)-ში. ამიტომ მთლიანი რიგის დამკვირვებელი (ნახ. 23) შეიცავს სისტემის მოდელს, და კიდევ დამატებით ცვლადს, რომელიც პროპორციულია  $Y(t) - Y(t)$  სხვაობისა, სადაც

$$\dot{Y}(t) = C(t)\dot{X}(t) \quad (6.17)$$

არის დამკვირვებელი ცვლადი, აღდგენილი დამკვირვებლისათვის.

$K(t)$  მატრიცას უწოდებენ დამკვირვებლის გაძლიერების კოეფიციენტების მატრიცას.  $K(t)$  მატრიცა არის ნებისმიერი. (6.14) განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\dot{\hat{X}}(t)=[A(t)-K(t)C(t)]\hat{X}(t)+B(t)U(t)+K(t)Y(t). \quad (6.18)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ დამკვირვებლის მდგომარეობა განისაზღვრება მატრიცით  $A(t)-K(t)C(t)$ . თავისთავად, დამკვირვებლის მდგომარეობა არის სასურველი თვისება. მაგრამ შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ დამკვირვებლის მდგომარეობას აქვს სხვა მნიშვნელობაც.

## თეორემა 6.2

განვიხილოთ დამკვირვებელი

$$\dot{\hat{X}}(t)=A(t)\hat{X}(t)+B(t)U(t)+K(t)[Y(t)-C(t)\hat{X}(t)] \quad (6.19)$$

სისტემისათვის

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + B(t)U(t), \\ Y(t) &= C(t)X(t). \end{aligned} \quad (6.20)$$

მაშინ აღდგენის შეცდომა

$$e(t) = X(t) - \hat{X}(t)$$

აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{e}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t). \quad (6.21)$$

აღდგენის შეცდომას აქვს ის თვისება, რომ  $e(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , ყველა  $e(t_0)$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც დამკვირვებელი არის ასიმპტოტურად მდგრადი.

(6.1) და (6.18) განტოლების შედარება გვიჩვენებს, რომ დამკვირვებლის მდგომარეობა და აღდგენის შეცდომის განსაზღვრა ხდება  $A(t)-K(t)C(t)$  მატრიცის მოქმედებით. ჩანს, რომ შეცდომა  $e(t)$  ნულის ტოლი ხდება საწყისი პირობების დამოუკიდებლად. მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც დამკვირვებელი ასიმპტოტურად მდგრადია. ეს რეზულტატი ძალიან მნიშვნელოვანია.

$K(t)$ -ს ამოჩვენა საკმაოდ რთული ამოცანაა. ძირითადად მისი ამოჩვენა კომპრომისულია სხვადასხვა პირობების გათვალისწინებით.

## მაბაღიში 6.1

ვთქვათ, სისტემის მატრიცებს აქვთ სახე:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0].$$

ამოვიჩიოთ დამკვირვებლის საკუთრივი მნიშვნელობა  $\lambda = -3$ , მაშინ დამკვირვებლის განტოლებას აქვს სახე

$$\dot{Z}(t) = -3Z(t) + [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(t).$$

დაეუშვათ,  $\dot{Z}(t) = TX(t)$ , სადაც  $T$  არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$T \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 3T = [1 \quad 0].$$

ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

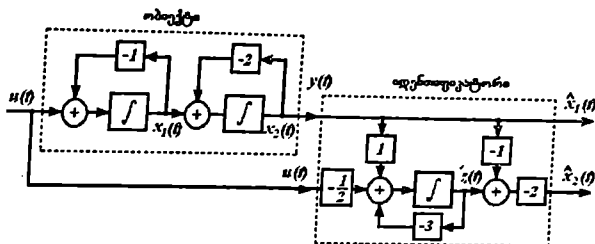
$$T = [1 \quad -1/2].$$

$$\text{გამოვივალთ } TB = [1 \quad -1/2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1/2.$$

საბოლოოდ, დამკვირვებლის განტოლებას აქვს სახე

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= -3Z(t) + X_1(t) - 1/2U(t), \\ Z(t) &= X_1(t) - 1/2X_2(t). \end{aligned}$$

ამ სისტემის სტრუქტურული სქემა და აგებული დამკვირვებელი მოცემულია (24) ნახაზზე



ნახ. 24.

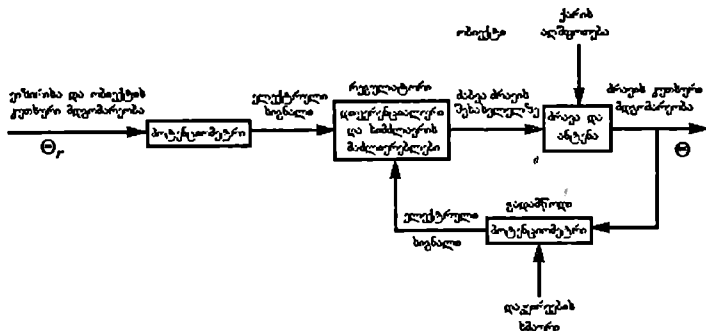
## მატალოტი 6.2

მდგომარეობის მართვის სისტემაში წარმოადგინოთ ობიექტი, რომელიც მოძრაობს სიბრტყეში. სიბრტყის ცენტრში მოთავსებულია მბრუნავი ანტენა, რომელიც აღნიშნავს დროში ობიექტის მიმართულებებს (ნახ. 25.). ანტენა მოდის მოძრაობაში ელექტროდრავით. მართვის ამოცანა მდგომარეობს ძრავაზე ისეთი ზემოქმედების განვითარებით, რომ

$$\theta(t) = \theta_r(t), \quad t \geq t_0 \quad (6.23)$$

სადაც  $\theta(t)$  - არის ანტენის კუთხური მდებარეობა.

$\theta_r(t)$  - ობიექტის კუთხური მდებარეობა.



ნახ. 25.

$\theta_r(t)$ -ს გაზომვა ხდება ვიზირული მოწყობილობის საშუალებით. ამ შემთხვევაში ობიექტის ანტენა და ძრავი. ანტენის აღმოჩენაა ქარის დატვირთვის მომენტი. დაკვირვების ცვლადი პოტენციომეტრის გამომავალი სიგნალი.

$$\psi(t) = \theta(t) + \psi(t),$$

სადაც  $\psi(t)$ -გაზომვის ხმაურია.  $\theta(t)$  არის სამართავი ცვლადი. ეტალონური ცვლადია  $\theta_r(t)$ . ობიექტის შესასვლელია ძაბვა  $\mu$ , რომელიც მიღებულია ძრავზე. განხილული სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix} \mu(t),$$

$$\text{სადაც } X(t) = \text{Col}[\xi_1(t), \xi_2(t)], \quad \alpha = \frac{B}{\psi}, \quad \kappa = \frac{K}{\psi},$$

$\psi$  - ინოვაციის სიმბოლო,  $B$  - ბლანტი ხახუნის კოეფიციენტი,  $K$  - მუდმივია.

$\xi_1(t)$ -არის კუთხური გადაადგილება,  $\xi_2(t)$ -არის კუთხური სიჩქარე.

დავუშვათ, რომ  $\psi(t)$  ცვლადი არის კუთხური გადაადგილება, ე.ი.  $\psi(t)=(1,0)X(t)$ .

დამკვირვებელი აღიწერება განტოლებით:

$$\dot{\hat{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix} \mu(t) + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [\psi(t) - (1,0)\hat{X}(t)]. \quad (6.24)$$

სადაც  $K_1$  და  $K_2$  უნდა ამოვიწყოთ. დამკვირვებლის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე

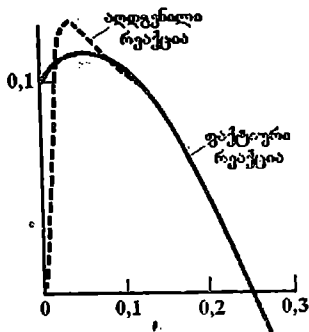
$$\det \left\{ \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} (1,0) \right\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} P+K_1 & -1 \\ K_2 & P+\alpha \end{bmatrix} \right\} = P^2 + (\alpha+K_1)P + K_2 + \alpha K_1. \quad (6.25)$$

სისტემის საკუთრივი მნიშვნელობა მოიძებნება წერტილებში  $0$  და  $-\alpha = -4,6s^{-1}$ . იმისათვის, რომ დამკვირვებლის სწრაფქმედება გაუტოლდეს სისტემის სწრაფქმედებას, უნდა შევარჩიოთ გაძლიერების კოეფიციენტები  $K_1$  და  $K_2$  ისეთნაირად, რომ დამკვირვებლის პოლუსები ტოლი იყოს  $-50 \pm i50s^{-1}$ . გაძლიერების კოეფიციენტი შეირჩევა

$$K_1 = 95,40s^{-1}, K_2 = 4561s^{-2}.$$

ნახაზზე მოცემულია დამკვირვებლის გამომავალი სიგნალის პედარება სისტემის ფაქტორულ რეაქციასთან. მდგომარეობის საწყისი მნიშვნელობებია  $\xi_1(0)=0,1$  რად;  $\xi_2(0)=0,5$  რად/ს; მაშინ შესასვლელი ძაბვა ტოლია  $\mu(t)=-10$  ე,  $t \geq 0$ .

დამკვირვებელს აქვს ნულოვანი საწყისი მნიშვნელობები. (26) ნახაზი გვიჩვენებს აღდგენილი სიგნალის სიხლოვეს რეალურ სიგნალთან.



ნახ.26.

## 6.2 სისტემის მოდელური მართვა

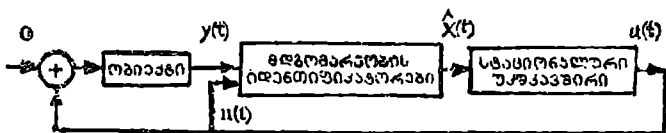
მოდელური მართვა საერთოდ განისაზღვრება როგორც მართვა, რომელიც ცვლის მოდელს (ობიექტის მატრიცის საკუთრივ მნიშვნელობებს) მართვის მიზნების ბისაღწევად.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ მოდელური მართვის, საკითხებს მდგომარეობის მდგრადი რეგულატორების კონსტრუქციებში, ძირითადი ადგილი, დაეძმობა უკუკავშირების კონსტრუირებას, რომლებიც უზრუნველყოფენ კომპლექსურ სიბრტყეში შეკრული სისტემის საკუთრივ მნიშვნელობების მოცემულ განაწილებას. ნაგულისხმებია, რომ კონსტრუქტორისათვის ცნობილია სასურველი საკუთრივ მნიშვნელობები. ერთდერით აუცილებელი პირობაა, რომ შეკრული სისტემა უნდა იყოს მდგრადი, მაგრამ არა საკმარისი პრაქტიკული გაამოყენების თვალსაზრისით.

რეგულატორი აკმაყოფილებს სხვადასხვა მოთხოვნებს გარდამავალი პროცესების მიმართ. ეს მოთხოვნები რთულად არის დაკავშირებული როგორც შეკრული სისტემის საკუთრივ მნიშვნელობებზე, ასევე მისი გადაცემითი ფუნქციის პოლუსებზე.

### რეგულატორის კონსტრუქცია

რეგულატორის კონსტრუქცია მოცემულია (27) ნახაზზე



ნახ.27.

რეგულატორი შესდგება დინამიკური სისტემისაგან, რომელიც გამოიმუშავებს გამოსასვლელზე მდგომარეობის  $\hat{x}(t)$  შეფასების მნიშვნელობას. ობიექტის გამოშვალი  $y(t)$ -ს და შემაჯალი  $u(t)$ -ს გამოებით. სტაციონალური უკუკავშირის აქვს სახე:

$$u(t) = -kx(t).$$

### n - ბანსონილმეზიანი იდენტიფიკატორის ბამოყენება

განვიხილოთ მართვადი და დაკვირვებადი წრფივი სისტემა

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

ვნახოთ, რა ეფექტს იწვევს სისტემაში იდენტიფიკატორის შეტანა, რა თანაფარდობა არსებობს უკუკავშირის მახასიათებელ განტოლებასა და იდენტიფიკატორის მახასიათებელ განტოლებას შორის. სამართლიანია თიორემა:

წარმოვიდგინოთ, რომ აგებულია მდგომარეობის დამკვირვებელი (იდენტიფიკატორი)

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - LC]\hat{x}(t) + LY(t) + BU(t).$$

აღვნიშნოთ იდენტიფიკატორის მახასიათებელი მრავალწევრი  $\varphi_A(\lambda) = \det[A - LC]$ . ვინაიდან  $x(t)$ -ს გამოშვა არ შეიძლება, შევადლოთ უკუკავშირში ვექტორი  $x(t)$  შევცვალოთ მისი შეფასებით  $\hat{x}(t)$ .  $\varphi_A(\lambda)$  შეიძლება ჩვენს მიერ იქნას შერჩეული, ამიტომ მივიღებთ ნებისმიერ დინამიკას, რომ  $\hat{x}(t)$  შევასება უახლოვდებოდეს  $x(t)$ , როცა  $t \rightarrow \infty$ , ასეთი შეცვლისას საინტერესოა ორი საკითხი:

1.  $K$  მატრიცა ამორჩეულია ისე, რომ ცნობილია მდგომარეობა  $x(t)$ , ხოლო შემდეგ ის შეცვლილია  $\hat{x}(t)$ -ით. მივიღებთ თუ არა წინა რეზულტატს? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეწეება თუ არა უკუკავშირის იგივე მახასიათებელი განტოლება. 2. რა ცვლილებები შეაქვს იდენტიფიკატორს?

### თეორემა 6.3

ვთქვათ, მოცემულია მართვადი და დაკვირვებადი სისტემა  $\sim(A, B, C)$ . მატრიცა  $K$  ამორჩეულია ისეთნაირად, რომ  $[A-BK]$  მატრიცის მახასიათებელი განტოლება თანხვედრა პრავალწევრს  $\varphi_p(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$  და ამორჩეულია ისეთი  $L$  მატრიცა, რომ  $[A-LC]$  მატრიცის მახასიათებელი განტოლება თანხვედრა  $\varphi_n(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$ . მაშინ შეკრული სისტემის  $2n$  რიგის მახასიათებელი განტოლებათა

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - B K \hat{x}(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) &= [A-LC] \hat{x}(t) - B K \hat{x}(t) + L C x(t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

ავღნიშნოთ იგი  $\varphi_0(\lambda)$ , რომელიც ღანხვდება ნამრავლს  $\varphi_0(\lambda) = \varphi_p(\lambda) * \varphi_n(\lambda)$ .

### ღამტკიცება.

გამოვთვალოთ  $2n$  რიგის მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

მოვახდინოთ ჩასმა  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . ამ გარდაქმნის მატრიცას აქვს სახე:

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

სადაც  $I$  არის  $n \times n$  განზომილების ერთეულოვანი მატრიცა. ახალ კოორდინატებში შეკრული სისტემის მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

ამ მატრიცას უწოდებენ უკრდულ-დიაგონალურს, რომლის მახასიათებელი განტოლება თანხვედრა დიაგონალში მოთავსებული წევრების ნამრავლს.

განვიღოთ თეორემას აქვს დიდი პრაქტიკული გამოყენება. ვინაიდან ჩვენ ვიხილავთ უკუკავშირის სისტემის საკუთრივ მნიშვნელობებს, არა აქვს მნიშვნელობა უკუკავშირში არის ჩართული  $x(t)$  თუ  $\hat{x}(t)$ .

### ღიუნზბერგერის იდენტიფიკატორის ბამოყენება

### თეორემა 6.4

დაკვირვებადი და მართვადი სისტემა ერთი შესასვლელით (საერთოდ შეიძლება იყოს მრავალი შესასვლელით) მოცემულია მატრიცებით  $(A, B, C)$ . მატრიცა  $K$  ამორჩეულია ისე, რომ  $[A-BK]$  მატრიცის მახასიათებელი განტოლება თანხვედრა სასურველ  $\varphi_p(\lambda)$  და ამ სისტემისათვის არის აგებული მდგომარეობის  $(n-1)$  დენთიფიკატორი მახასიათებელი განტოლებით  $\varphi_p(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_1 \lambda^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$ . მაშინ შეკრული სისტემის  $(2n-1)$  რიგის მახასიათებელი განტოლება ტოლია პრავალწევრების ნამრავლისა:

## დამტკიცება

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi_y(\lambda) \varphi_u(\lambda).$$

აღნიშნით  $\hat{x}(t)$  იდენტიფიკატორის გამოსასვლელი. ამ ვექტორს აქვს განზომილება  $n-1$ . შეკრული სისტემა აღიწერება განტოლებით:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - Bk \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - \bar{a}_n x_n(t) + BU(t).$$

მოვახდინოთ ცვლადების შეცვლა

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - \bar{x}(t).$$

მაშინ გვექნება

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}(t), \quad \dot{X}(t) = [A - BK]X(t) + [?] \tilde{X}(t),$$

სადაც  $\bar{A}$  არის  $(n-1) \times (n-1)$  განზომილების ქვემატრიცა, მოთავსებული  $A$  მატრიცის მარცხენა ზედა ნაწილში.  $\bar{a}_n$  არის  $A$  მატრიცის ბოლო სვეტი. ხაზი ზევიდან ნიშნავს  $n$  ვექტორის  $n-1$  ვექტორად გადაქცევას. ამ შეკრული  $(2n-1)$  რიგის სისტემას აქვს მატრიცა

$$\left[ \begin{array}{c|c} A-Bk & ? \\ \hline 0 & \bar{A} \end{array} \right].$$

ეს არის უკრდულ-დიაგონალური მატრიცა და მისი მახასიათებელი განტოლება ტოლია დიაგონალში მოთავსებულ ელემენტების ნამრავლისა  $\varphi_0(\lambda) = \varphi_y(\lambda) \varphi_u(\lambda)$ . თუ სისტემას გააჩნია ერთი შესასვლელი, სამართლიანია შემდეგი თეორემა

## თეორემა 6.5.

ვთქვათ,  $n$ -ური რიგის სისტემა არის დაკვირვებადი და მართვადი. აქვს  $P$  დამოუკიდებელი გამოსასვლელი. შეიძლება აიგოს ისეთი  $(n-p)$  რიგის უკუკავშირი, რომ შეკრული სისტემის  $(2n-1)$  რიგის მახასიათებელი განტოლება თანხედებოდეს ნამდვილ  $(2n-p)$  რიგის მრავალწევრს.

## დამტკიცება

გამოვიყენოთ იდენტიფიკატორის  $Z$  გამოსასვლელის განტოლება

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= A_z \tilde{z}(t), \\ \hat{x}(t) &= [A - KB]\hat{x}(t) - P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{yz} \end{bmatrix} \tilde{z}(t). \end{aligned} \right\}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ შეკრული სისტემის საკუთრივი მნიშვნელობები არის სტაციონალური შეკრული სისტემის  $[A - BK]$  საკუთრივი მნიშვნელობები პლუს იდენტიფიკატორის საკუთრივი მნიშვნელობები (მატრიცა  $A_z$ ). ეს სამართლიანია განტოლებიდან:

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{zz} & 0 \\ ? & [A-Bk] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

ეს თეორემა ამთავრებს კურსს ნულოვანი ზღვომარეობის რეგულატორის კონსტრუქციებზე. ახლა განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

### მაგალითი 6.3

ორი მაინტეგრებული რგოლი მოცულია დადებითი უკუკავშირით. სისტემა აღიწერება განტოლებებით:

$$\dot{X}_1 = X_2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{X}_2 = X_1 + U, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y = X_1, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

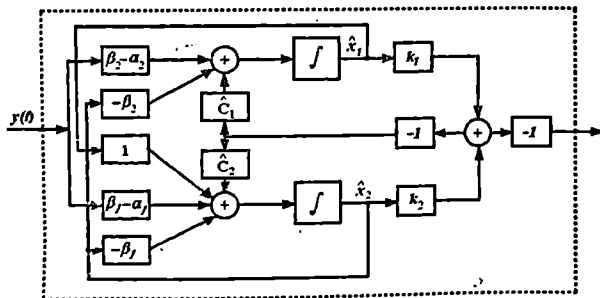
მესამე კონტროლის თანახმად, ამ სისტემისათვის შეიძლება შეიქმნას უკუკავშირის წრილი, რომელიც შეიცავს ორ დინამიკურ ელემენტსა და მე-4 რიგის შერეულ სისტემას, რომელსაც ექნება მოცემული მახასიათებელი განტოლება. ეს შეიძლება გაკეთდეს იმიტომ, რომ სისტემა არის დაკვირვებადი და მართვადი. უკუკავშირის წრედის კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$[A - Bc] = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 \\ 1 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad -I = \begin{bmatrix} \beta_2 & -\alpha_2 \\ \beta_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_1 = c_1(\alpha_1 b_1 + \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2) + c_2(\alpha_2 b_2 + \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2), \quad \hat{c}_2 = b_1 c_1 + b_2 c_2,$$

$$k = \left[ \frac{\hat{c}_2(\gamma_2 + \alpha_2) - \hat{c}_1(\gamma_1 + \alpha_1)}{\alpha_2(\alpha_1 \hat{c}_1 - \alpha_2 \hat{c}_2) - \hat{c}_1^2}, \frac{(\gamma_1 - \alpha_1)(\alpha_1 \hat{c}_1 - \alpha_2 \hat{c}_2) - \hat{c}_1(\gamma_2 - \alpha_2)}{\hat{c}_2(\alpha_1 \hat{c}_1 - \alpha_2 \hat{c}_2) - \hat{c}_1^2} \right].$$

ამ რეგულატორის სტრუქტურული სქემა მოცემულია 28-ე ნახაზზე:



ნახ.28.

(6.4) თეორემის თანხმად, ამ სისტემისათვის შეიძლება შეირჩეს პირველი რიგის უკუკავშირით, რომ შეკრულ სისტემას ჰქონდეს სასურველი ნებისმიერი მესამე რიგის მახასიათებელი განტოლება. აეგოთ ეს რეგულატორი

1. გამოთვალეთ A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1.$$

2. შემოვიტანოთ მრავალწევრები

$$\varphi_y(\lambda) = \lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2,$$

$$\varphi_u(\lambda) = \lambda + \beta,$$

რომლებიც ახასიათებენ სისტემის დინამიკას, მოცემულს მდგომარეობის სტაციონალური უკუკავშირით და იდენტიფიკატორის მდგომარეობის დინამიკით.

3. ვინაიდან მატრიცის  $\{A, B\}$  წყვილს აქვს კანონიკური სახე,  $k^1$  ვექტორის კომპონენტები გამოითვლება ფორმულით

$$k_1 = \gamma_2 - \alpha_2, \quad k_2 = \gamma_1 - \alpha_1$$

და მაშასადამე

$$k^1 = [\gamma_2 + 1, \gamma]$$

4. ახლა გადავიღოთ ბაზისზე, სადაც  $\{A, C^1\}$  წყვილს აქვს კანონიკური სახე

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცების გამოყენებით სხვა მატრიცებს აქვთ სახე

$$A := PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b := Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$c^1 := c^1 P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad k^1 := k^1 P^{-1} = [\gamma_1, \gamma_2 + 1]$$

5. რჩება, რომ გარდაქმნათ სისტემის მატრიცები  $\{A, b, c^1, k^1\}$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

საშუალებით. საბოლოოდ მივიღებთ რეგულატორის მატრიცას

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -\beta^2 + 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix},$$

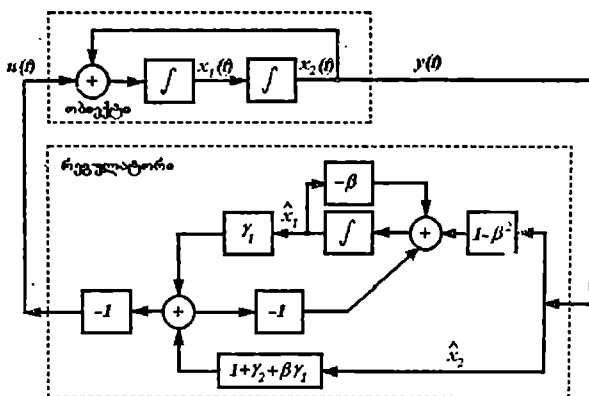
$$b := Pb = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k^1 := k^1 P^{-1} = [\gamma_1, \gamma_2 + 1] \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2 + 1 + \gamma_1 \beta].$$

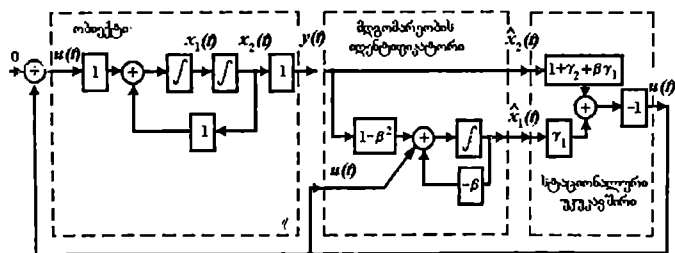
$$c' := c' P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(29) ნახაზზე მოცემულია უკუკავშირის სტრუქტურული სქემა, ობიექტის სტრუქტურასთან ერთად.

(30) ასახაზე მოცემულია ზოგადი სქემა.



ნახ.29.



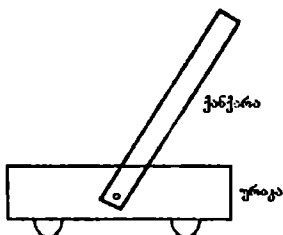
ნახ.30.

## 7. ბაზრუნებული ქანქარა და მისი ანალიზი

### მდგომარეობის სივრცის გამოვლით

ახლა გავაჩვიოთ მაგალითი, რომლის განხილვისას გამოვიყენებთ ყველა იმ შედეგებს, რომლებიც მივიღეთ თეორიულ ნაწილში.  
მაბეჭდი

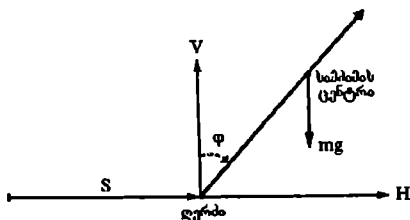
გადაზრუნებული ქანქარას მდგომარეობის მართვის სისტემა.  
განვიხილოთ გადაზრუნებული ქანქარა (ნახ.31)



ნახ.31

ქანქარას ღერძი დამონტაჟებულია ურეკაზე, რომელსაც შეუძლია გადაადგილდეს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში. ურეკა მოდის მოძრაობაში პატარა ძრავით, რომელიც  $x$  დროის მომენტში ურეკაზე მოქმედებს ძალათ  $\mu(x)$ , რომელიც ახლა სისტემის შეშავალი სიგნალი.

(32) ნახაზზე მოცემულია გადაადგილებები და ძალები



ნახ.32

$t$  დროის, მომენტში ღერძის გადაადგილება ხასიათდება  $s(t)$  ფუნქციით. ქანქარას კუთხური გადაადგილება აღვნიშნოთ  $m$ ,  $L$ -მანძილია ღერძსა და სიმძიმის ცენტრს შორის.  $\varphi$ -ინერციის მომენტია სიმძიმის ცენტრის მიმართ.  $M$ -ურეკის მასაა. ქანქარაზე მოდებულია სიმძიმის ძალა  $mg$ .  $H(t)$  და  $V(t)$  ქანქარას ღერძის რეაქციის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ძალებია.  
სისტემისათვის ხამართლიანია შემდეგი განტოლებები

$$m \frac{d^2}{dt^2} [S(t) + L \sin \varphi(t)] = H(t), \quad (7.1)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} [L \cos \varphi(t)] = V(t) - mg, \quad (7.2)$$

$$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = LV(t) \sin \varphi(t) - LH(t) \cos \varphi(t), \quad (7.3)$$

$$M \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = \mu(t) - H(t) - F \frac{dS(t)}{dt}. \quad (7.4)$$

ხახუნი გათვალისწინებულია მხოლოდ ურკას მოძრაობისას. (7.4) განტოლებაში  $F$  ხახუნის კოეფიციენტი. ქანქარას ღერძის ხახუნი არ მიიღება მხედველობაში. (7.1) და (7.2) განტოლების გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ

$$m\ddot{S}(t) + mL\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) - mL\dot{\varphi}^2(t)\sin\varphi(t) = H(t), \quad (7.5)$$

$$-mL\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) - mL\dot{\varphi}^2(t)\cos\varphi(t) = V(t) - mg, \quad (7.6)$$

$$J\ddot{\varphi}(t) = LV(t)\sin\varphi(t) - LH(t)\cos\varphi(t), \quad (7.7)$$

$$M\ddot{S}(t) = \mu(t) - H(t) - FS(t). \quad (7.8)$$

გამარტივების თვალსაზრისით დავუშვათ, რომ  $m$  გაცილებით მცირეა  $M$ -თან შედარებით და ეს საშუალებას გვაძლევს უგულებელვყოთ პორეზონტალური რეაქცია  $H(t)$ . მაშინ (7.8) განტოლება მიიღებს სახეს

$$M\ddot{S}(t) = \mu(t) - FS(t). \quad (7.9)$$

(7.5) და (7.6) განტოლებიდან გამოვრიცხოთ  $H(t)$  და  $V(t)$ , მივიღებთ

$$(J + mL^2)\ddot{\varphi}(t) - mgL\sin\varphi(t) + mL\ddot{S}(t)\cos\varphi(t) = 0. \quad (7.10)$$

(7.10) განტოლების ყველა წევრის  $(J + mL^2)$ -ზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{g}{L}\sin\varphi(t) + \frac{1}{L}\ddot{S}(t)\cos\varphi(t) = 0, \quad (7.11)$$

სადაც

$$L = \frac{J + mL^2}{mL}. \quad (7.12)$$

ამ სიდიდეს უწოდებენ ქანქარას ეფექტურ სიგრძეს. ნომინალური ამონახსნია  $\mu(t) \equiv 0$ ,  $S(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$ . თუ  $\sin\varphi$  და  $\cos\varphi$  დავშლით ტეილორის მწკრივად და დავტოვებთ მხოლოდ წრფივ მდგენელებს, მაშინ (7.11) მიიღებს სახეს

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{g}{L}\varphi(t) + \frac{1}{L}\ddot{S}(t) = 0. \quad (7.13)$$

მდგომარეობის ვექტორის  $X$ -ის კომპონენტებად ამოვირჩიოთ

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(t) &= S(t) \\ \xi_2(t) &= \dot{S}(t) \\ \xi_3(t) &= S(t) + L\dot{\varphi}(t), \\ \xi_4(t) &= \dot{S}(t) + L\dot{\varphi}(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

$\xi_3(t)$  ფუნქცია წარმოადგენს ქანქარას გადაადგილებას. (7.9) და (7.14)

წარმოადგენენ მდგომარეობის გაწრფივებულ განტოლებებს

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) &= \frac{1}{M} \mu(t) - \frac{F}{M} \xi_2(t), \\ \dot{\xi}_3(t) &= \xi_4(t), \\ \dot{\xi}_4(t) &= g \varphi(t) = \frac{g}{L'} \left[ \xi_3(t) - \xi_4(t) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

რომელიც ვექტორულ-მატრიცული სახით შემდეგნაირად წარმოვიღებთ.

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g/L' & 0 & g/L' & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t), \quad (7.16)$$

$$\text{სადაც } X(t) = \text{col} \left[ \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t) \right].$$

სისტემის პარამეტრებს აქვთ შემდეგი რიცხობრივი, მნიშვნელობები

$$F/M = 1 \text{ სეკ}^{-1},$$

$$1/M = 1 \text{ კგ}^{-1},$$

$$g/L' = 11,65 \text{ სეკ}^{-2},$$

$$L' = 0,842 \text{ მ.}$$

ქანქარას ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g/L' & 0 & g/L' & 0 \end{bmatrix} X(t). \quad (7.17)$$

მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები და ვექტორები გამოისახებიან ასე

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -F/M, \lambda_3 = \sqrt{g/L'}, \lambda_4 = -\sqrt{g/L'}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -F/M \\ \alpha \\ -\alpha F/M \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{g/L'} \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{g/L'} \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

სადაც

$$\alpha = \frac{\frac{g}{L'}}{\frac{g}{L'} - \frac{F^2}{M^2}}.$$

$\alpha$ - განსხვავებულია ნულისაგან.  $T$  და  $T^{-1}$  მატრიცებს აქვთ სახე

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha F/M & \sqrt{g/L^1} & -\sqrt{g/L^1} \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & M/F & 0 & 0 \\ 0 & -M/F & 0 & 0 \\ -1/2 - \frac{1/2}{F/M + \sqrt{g/L^1}} & 1/2 & 1/2 & 1/2 \sqrt{L^1/g} \\ -1/2 \frac{1/2}{-F/M + \sqrt{g/L^1}} & 1/2 - 1/2 \sqrt{L^1/g} & & \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

სისტემის მოდელს წარმოადგენენ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -F/M \\ - \\ -\alpha F/M \end{bmatrix} e^{-(F/M)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{g/L^1} \end{bmatrix} e^{t\sqrt{g/L^1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{g/L^1} \end{bmatrix} e^{-t\sqrt{g/L^1}} \quad (7.21)$$

პირველი მოდა გვიჩვენებს, რომ იგი არ არის დამოკიდებული პორიზონტალურ გადაადგილებებზე. ხოლო მესამე მოდა გვიჩვენებს გადაბრუნებული ქანქრას არამდგრადობას.

თუ ურიკის სახუნს უგულებელვყოფთ,  $F=0$ , მაშინ მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad (7.22)$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g/L^1 & 0 & g/L^1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

$A$  მატრიცის მახასიათებელი რიცხვებია

$$\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=\sqrt{g/L}, \lambda_4=-\sqrt{g/L} \quad (7.24)$$

ადელი მისაძებნია, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი საკუთრივი ვექტორი

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (7.25)$$

რომელიც შეესაბამება ორ ნულურ მახასიათებელ მნიშვნელობას.  $\lambda_3$  და  $\lambda_4$  შეესაბამებიან საკუთრივი ვექტორებს

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{g/L} \end{bmatrix} \text{ და } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{g/L} \end{bmatrix}. \quad (7.26)$$

არსებობს ჟორდანის ფორმის მხოლოდ ერთი ქვებლოკი  $2 \times 2$  განზომილებით, ვინაიდან არ არსებობს 2 წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი. საკუთრივი ვექტორი  $q_1$  არის T მატრიცის, გარდაქმნის პირველი სვეტი. მაშინ მეორე სვეტი  $-q_2$  გამოითვლება განტოლებიდან  $Aq_2 = 0q_2 + q_1$ , ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

სადაც  $\beta$ - ნებისმიერი მუდმივია. მივიღოთ  $\beta=0$ . ვინაიდან  $q_3$  და  $q_4$  წარმოადგენენ (7.26) გამოსახულებების საკუთრივი ვექტორებს. ვიპოვოთ T გარდაქმნა:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{g/L} & -\sqrt{g/L} \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

A მატრიცის ჟორდანის ნორმალურ ფორმას აქვს სახე:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{g/L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{g/L} \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

A მატრიცას ექსპონენციალი უნდა მოიძებნოს განტოლებიდან  $e^{At} = Te^{jLt}T^{-1}$  და აგრეთვე განტოლებიდან (7.29) (7.30).

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ გადაბრუნებული ქანქარას მდგომარეობის განტოლების A მატრიცას აქვს შემდეგი მახასიათებელი რიცხვები და ვექტორება:

$$\lambda_1=0, \lambda_2=-\frac{F}{M}, \lambda_3=\sqrt{g/L}, \lambda_4=-\sqrt{g/L}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -F/M \\ \alpha \\ -\alpha F/M \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{g/L} \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{g/L} \end{bmatrix}.$$

(7.31)

ცხადია, რომ მდგრადი მდგომარეობის ქვესივრცე წარმოიშობა  $e_2$  და  $e_4$  ვექტორებით, ხოლო არამდგრადი  $e_1$  და  $e_3$  ვექტორებით. იმ შემთხვევაში, თუ ხახუნს არ მივიღებთ მხვედველობაში ჩვენ გვეჩვენება, რომ ნულ-სივრცეს შეესაბამება მახასიათებელი რიცხვი 0 და წარმოიქმნება T მატრიცის პირველი ორი სვეტი:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ და } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(7.32)

ეს ორი სვეტი, საკუთრივ ვექტორთან ერთად, რომელიც შეესაბამება  $\sqrt{g/L}$  ე.ი.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{g/L} \end{bmatrix},$$

(7.33)

წარმოქმნის სისტემის არამდგრადი მდგომარეობის ქვესივრცეს. მდგრად ქვესივრცეს წარმოქმნის საკუთრივ ვექტორი:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{g/L} \end{bmatrix}.$$

(7.34)

ქანქარას გამოსასვლელად ავიღოთ კუთხე  $\varphi(t)$ , შევადაროთ მდგომარეობები

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ და } \begin{bmatrix} d_0 \\ 0 \\ d_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(7.35)

მეორე მდგომარეობა განსხვავდება პირველისაგან (ნულოვანისაგან) იმით, რომ ურიკა და ქანქარა გადაადგილდებიან  $d_0$  მანძილზე. ე.ი. სისტემა იმყოფება წონასწორობაში. თუ მოდებული შემაჯავლი სიგნალი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემა იმყოფება იმავე მდგომარეობაში და  $\varphi(t)=0$  ორივე შემთხვევაში. ცხადია, რომ ხდება მხოლოდ  $\varphi(t)$ -ს დაკვირვება. მაშინ ძნელია გაგება, თუ ამ ორიდან რომელ მდგომარეობაში იმყოფება სისტემა. ე.ი. სისტემა არ არის მთლიანად დაკვირვებადი. გადაბრუნებული ქანქარა, როგორც ვიცით, აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g/L^1 & 0 & g/L^1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t). \quad (7.36)$$

მართვადობის მატრიცას აქვს სახე

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & -\frac{F}{M} \frac{1}{M} & \left[\frac{F}{M}\right]^2 \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & -\frac{F}{M} \frac{1}{M} & \left[\frac{F}{M}\right]^2 \frac{1}{M} & -\left[\frac{F}{M}\right]^3 \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{L^1} \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{L^1} \frac{1}{M} & -\frac{g}{L^1} \frac{F}{M} \frac{1}{M} \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

ჩანს, რომ მატრიცის რანგი 4-ის ტოლია ყველა პარამეტრების მნიშვნელობისათვის, ამიტომ სისტემა არის მთლიანად მართვადი.

თუ გამოსასვლელ სიდიდედ ავიღებთ  $\eta(t)$  ცვლადს  $\varphi(t)$ -ს სახით, მივიღებთ

$$\eta(t) = (-1/L^1, 0, 1/L^1, 0)x(t).$$

დაკვირვებადობის მატრიცას აქვს სახე

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^1} & 0 & \frac{1}{L^1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L^1} & 0 & \frac{1}{L^1} \\ -\frac{g}{L^1} \frac{1}{L^1} & \frac{F}{M} \frac{1}{L^1} & \frac{g}{L^1} \frac{1}{L^1} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{L^1} \frac{1}{L^1} - \left[\frac{F}{M}\right]^2 \frac{1}{L^1} & 0 & \frac{g}{L^1} \frac{1}{L^1} \end{bmatrix}. \quad (7.38)$$

ამ მატრიცის რანგი 3-ის ტოლია, ე. ი. სისტემა არ არის მთლიანად დაკვირვებადი. თუ დავუმატებთ გამოსასვლელი ცვლადის მეორე კომპონენტს ურიკის  $S(t)$  გადაადგილების სახით, მივიღებთ

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^1} & 0 & \frac{1}{L^1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

ეს გვაძლევს შემდეგი დაკვირვებადობის მატრიცას

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^1} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L^1} & 0 & \frac{1}{L^1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{L^1} & \frac{F}{M} \frac{1}{L^1} & \frac{F}{L^1} \frac{1}{L^1} & 0 \\ 0 & \frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{L^1} \frac{1}{L^1} - \left[ \frac{F}{M} \right]^2 \frac{1}{L^1} & 0 & \frac{g}{L^1} \frac{1}{L^1} \\ 0 & \left[ \frac{F}{M} \right]^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

მატრიცის რანგი 4 ტოლია, ე. ი. სისტემა არის დაკვირვებადი.

ჩვენ იაჩვრეთ, რომ გადაზრუნებული ქანქარა არ არის მთლიანად დაკვირვებადი, თუ დაკვირვებად ცვლადთა ავიღებთ კუთხეს  $\varphi(t)$ . ახლა განვსაზღვროთ არადაკვირვებადი მდგომარეობის ქვესივრცე. ადგილი სანახაია, რომ  $Q$  დაკვირვებადობის მატრიცა აღწარმოებულია ვექტორ-სტრიქონით  $(-1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ .

ნებისმიერი ვექტორი  $X = \text{Col}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ , რომელიც ეკუთვნის  $Q$  ნულ-სივრცეს, აკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_3 &= 0, \\ -\xi_2 + \xi_4 &= 0, \\ \xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ არადაკვირვებადი მდგომარეობის ქვესივრცე წარმოიქმნება ვექტორით

$$\text{Col}(1, 0, 0, 0).$$

რომ მივიღოთ დაკვირვებადობის კანონიკური ფორმა, ამოვირჩიოთ ვექტორ-სტრიქონი  $U$  მატრიცის პირველ სამ სტრიქონად. მეოთხე სტრიქონი ამოვირჩიოთ ნებისმიერად  $(1, 0, 0, 0)$ .

ვიპოვოთ მატრიცები  $U$  და  $U^{-1}$

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.42)$$

გარდაქმნილ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\dot{X}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g/L^1 & 0 & F/M & 0 \\ 0 & 0 & -F/M & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X'(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/M \\ 1/M \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t), \quad (7.43)$$

$$\eta(t) = (1/L^1, 0, 0, 0) X'(t).$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'(t) &= -\xi_1(t) + \xi_3(t) = L_1' \varphi(t), \\ \xi_2'(t) &= -\xi_2(t) + \xi_4(t) = L_1' \varphi(t), \\ \xi_3'(t) &= \xi_2(t) = S(t), \\ \xi_4'(t) &= \xi_1(t) = S(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

ჩანს, რომ მდგომარეობა და ქანქარას სიჩქარე ურთიკას მიმართ და აგრეთვე, ურთიკას სიჩქარე, შეიძლება აღვადგინოთ დაკვირვების ცვლადიდან, მაგრამ არ შეიძლება აღვადგინოთ ურთიკას მდგომარეობა. აღვიღო სანახავია, რომ დაკვირვებადობის პოლუსებზეა

$-F/M$  და  $\pm \sqrt{g/L_1}$ , არადაკვირვებადობის პოლუსი ნულის ტოლია.

გაუხსენოთ შემდეგი განსაზღვრა. მართვის წრფივი კანონი:

$$U(t) = -F(t)X(t) + U'(t) \quad (7.45)$$

არის სისტემისათვის

$$X(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (7.46)$$

ასიმპტოტურად მდგრადი მართვის კანონი, თუ შეკრული სისტემა

$$\dot{X}(t) = [A(t) - B(t)F(t)]X(t) + B(t)U'(t) \quad (7.47)$$

არის ასიმპტოტურად მდგრადი.  $F(t)$  არის უკუკავშირის გაძლიერების კოეფიციენტების მატრიცა.  $U'$  არის ახალი შემავალი ცვლადი. (7.47) სისტემის მდგრადობა მუდმივი კოეფიციენტების დროს დამოკიდებულია  $A - BF$  მატრიცის მახასიათებელ რიცხვებზე. თუ შეკრული სისტემის ყველა პოლუსები იმყოფებიან მარცხენა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ ცხადია, სისტემა არის ასიმპტოტურად მდგრადი.

გადაზრუნებული ქანქარას მდგრადობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{L_1} & 0 & \frac{g}{L_1} & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{M} \mu(t). \quad (7.48)$$

განვიხილოთ მართვის კანონი

$$\mu(t) = -(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)X(t) \quad (7.49)$$

(7.48) და (7.49)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_1}{M} & -\frac{F+\varphi_2}{M} & \frac{\varphi_3}{M} & -\frac{\varphi_4}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L_1} & 0 & \frac{g}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

ამ მატრიცის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$S^4 + S^3 \frac{F+\varphi_2}{M} + S^2 \left( \frac{\varphi_1}{M} - \frac{g}{L_1} \right) - S \frac{F+\varphi_2+\varphi_4}{M} - \frac{g}{L_1} - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{M} \frac{g}{L_1} = 0. \quad (7.51)$$

დაეუშვათ, შეკრული სისტემის ყველა პოლუსები მოთავსებულია  $-\alpha$  წერტილში. მაშინ შეკრული სისტემის მახასიათებელი განტოლება ჩაიწერება სახეში:

$$(S+\alpha)^4 = S^4 + 4\alpha S^3 + 6\alpha^2 S^2 + 4\alpha^3 S + \alpha^4. \quad (7.52)$$

გავეტოლოთ (7.51) და (7.52) განტოლებების კოეფიციენტები ერთმანეთს. მივიღებთ გამოსახულებებს  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  მიმართ.

$$\left. \begin{aligned} \frac{F + \varphi^2}{M} &= 4\alpha, \\ \frac{\varphi_1}{M} - \frac{g}{L_1} &= 6\alpha^2, \\ \frac{F + \varphi_2 + \varphi_4}{M} - \frac{g}{L_1} &= 4\alpha^3, \\ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{M} - \frac{g}{L_1} &= \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

აეიღოთ რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$\frac{F}{M} = 15^{-1}, \quad \frac{g}{L_1} = 11,655^{-2}.$$

$$\frac{1}{M} = 1 \text{ კგ}^{-1}, \quad L_1 = 0,842 \text{ მ}.$$

$$\alpha = 35^{-1}.$$

წრფივი განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ შემდეგ მართვის კანონს:

$$\mu(t) = -(65,65, 11,00, -72,60, -21,27)X(t). \quad (7.54)$$

## ლიტერატურა

1. ბარაძე გ. მ. ავტომატური რეგულირების თეორიის საფუძვლები. ჰ.: განათლება, 1966, -274 გვ.
2. ბარდაველიძე ა.მ. ავტომატური მართვის თეორია. ქუთაისი: ქპი, 1959, ტ1, -235 გვ; ტ2, -130 გვ.
3. ავტომატური მართვის თეორია. ა. მ. სეკუნიძის რედაქციით. - თბ. განათლება, 1978, -458 გვ.
4. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. -М.: Мир, 1974, -464 с.
5. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. -М.:Машиностроение,1972, -552 с.
6. Афанасьев В.Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. -М.:Высшая школа, 1989, -447 с.
7. Андреев Ю. Н. Управление конечными линейными объектами. -М.: Наука, 1976, -424 с.
8. Чхарტიшвили Г. С., Починок И.В. Машинный анализ и синтез САУ в пространстве состояний. -М.: Изд-во МЭИ, 1980. -65 с.
9. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. -М.: Наука, 1970, -620 с.
10. Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. -М.: Энергия, 1973, -440 с.
11. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. -М.: Наука, 1979, -336 с.
12. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. -М.: Наука, 1970, -703 с.
13. Сидоров В. П., Математические модели "вход-состояние-выход" в задачах теории автоматического управления. -М.: Изд-во МАИ, 1990, -68 с.
14. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. -М.: Наука, 1986, -616 с.
15. Солодов А. В. Методы теории систем в задачах непрерывной линейной фильтрации. -М.: Наука, 1976, -264 с.
16. Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. -М.: Мир, 1976, -650 с.
17. Справочник по теории автоматического управления. Под редакцией А. К. Красовского. -М.: Наука, 1987, -712 с.
18. Позняк А. С. Основы робастного управления. Н<sup>я</sup>-теория.-М.: Изд-во МФТИ, 1991, -128 с.
19. Палу де Ла Барьер Р. Курс теории автоматического управления. -М.: Машиностроение, 1973, -397 с.
20. Воронов А. А. и др. Теория автоматического управления. -М.: Высшая школа, 1986, т.1 -397 с., т.2 -504 с.
21. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. -М.: Наука, 1989, -304 с.
22. Борович З. И. Определители и матрицы. -М.: Наука, 1988, -188, с.