გიორგი ყირმელაშვილი

პითაგორას თეორემა და მისი გამოყენება

ნაკვეთი II

თბილისი
2012

პითაგორას თეორემა გამოიყენებოდა და გამოიყენება ცხოვრების პრაქტიკულ საქმიანობებში, სასწავლო პროცესში და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში. ამ მიზნით ნაშრომის II ნაკვეთში გაგრძელებულია პირველი ნაკვეთისაგან განსხვავებული ზოგიერთი მასალის გამოქვეყნება.

რეცენზენტი: სრული პროფესორი, **რ. ცხვედაძე**

რედაქტორი: სრული პროფესორი, **გ. ყიფიანი**

კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ე. ზარიძე

ISBN 978-9941-0-3911-9 (ყველა ნაკვეთის)
ISBN 978-9941-0-5020-6 (II ნაკვეთის)

წინასიტყვაობა

ვაგრძელებთ I ნაკვეთში მოყვანილი პითაგორას თეორემის დამტკიცებებისგან განსხვავებულ დამტკიცებებს და ზოგიერთ განსხვავებულ ისტორიულ ცნობებს პითაგორასა და მისი სკოლის (კავშირის) შესახებ. ძნელია ჩვენება ყოველი დამტკიცების შესახებ, თუ ვინაა მისი ავტორი. ჩვენი ძირითადი ამოცანაა მოვიყვანოთ თეორემის რაც შეიძლება მეტი დამტკიცება, გავხადოთ ისინი გასაგები და წარმოვადგინოთ თვალსაჩინოდ. ავტორი მიზნად ისახავს თეორემის განსხვავებულ დამტკიცებათა შეგროვებასა და მათ წარმოდგენას იმ სახით, რომ იგი იყოს საშუალო სკოლის მოსწავლეთათვის რაც შეიძლება მარტივი და საინტერესო.

ნაშრომის წაკითხვისა და სასარგებლო შენიშვნებისათვის ავტორი მადლობას უძღვნის სრულ პროფესორებს რ. ცხვედაძეს და გ. ყიფიანს.

მკითხველთა შენიშვნები ავტორის მიერ სიამოვნებით იქნება გათვალისწინებული სამომავლოდ.

ავტორი

შესავალი

პითაგორას თეორემას არა მარტო თეორიული, არამედ დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. თვით თეორემის შინაარსს და გამოყენებას განსაკუთრებულ ყურადღებას უთმობდნენ ბერძნები, ეგვიპტელები, ბაბილონელები, ინდოელები, ჩინელები და მოგვიანებით რუსები. რადგან თეორემას პრაქტიკული გამოყენება აქვს მიწათმზომელობაში, სამხედრო, სამშენებლო და სამთო საქმეში, ამიტომ ჯერ კიდევ ადრეულ ხანაში ჩ.წ. აღრიცხვამდე თეორემის დამტკიცებით დაინტერესდნენ პითაგორა და პითაგორელები. ისტორიულად ცნობილია, რომ თეორემის დამტკიცება ეკუთვნის პითაგორელებსა და თვით პითაგორას, მაგრამ თეორემა ატარებს პითაგორას სახელს, რადგან აღმოჩენები, დამტკიცებები და სხვადასხვა სახის მიღწევები ჯგუფის ხელმძღვანელს მიეწერებოდა. ამა თუ იმ საკითხის შესწავლის შესახებ, კერძოდ, პითაგორას თეორემის შესახებ, ყველა სახის ცნობები და გადმოცემები (რაც დასტურდება ისტორიული წყაროებით) საინტერესოა და ამჟამადაც დიდ ინტერესს იწვევს. ამ თვალსაზრისით საჭიროა გამომზეურდეს ყველაფერი, თუ რომელ ქვეყანაში როდის რა დონეზეა კვლევითი სამუშაოები შესრულებული, რადგან პითაგორას თეორემის ყოველი ახალი დამტკიცებისათვის პიროვნებებს აჯილდოებდნენ, მეცნიერულ ხარისხს ანიჭებდნენ და აწინაურებდნენ.

პითაგორას თეორემით დაინტერესებული პირები ცდილობდნენ არა მარტო მოეძებნათ თეორემის ახალი დამტკიცება. არამედ იყო მცდელობები შეეგროვებინათ არსებული დამტკიცებები და მიეწოდებინათ დაინტერესებული მკითხველებისათვის. არსებობს პითაგორას თეორემის დამტკიცებათა კრებულები გამოცემული გერმანიაში (ლაიბციგი, 1880 – ორმოცდაექვსი დამტკიცება), ამერიკის შეერთებულ შტატებში (ჩიკაგო, 1995 – ოთხმოცდათექვსმეტი დამტკიცება). ისტორიულად (გადმოცემით) კი ცნობილია, რომ არსებობს თეორემის 100-ზე მეტი დამტკიცება. თეორემის რაც შეიძლება მეტი რაოდენობის დამტკიცებების სრული სახით წარმოდგენა გარკვეულ სარგებლობას მოუტანს საშუალო სკოლის მოსწავლეებს და მკითხველთა ფართო საზოგადოებას.

1. მოკლე ისტორიული ცნობები

პითაგორას, პითაგორელების და პითაგორას თეორემის შესახებ არსებობს მრავალი გადმოცემა. მკვლევარები და ისტორიკოსები აღნიშნავდნენ, თუ რა გამოყენება ჰქონდა პითაგორას თეორემას (მარკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია), როდის და როგორ დამტკიცდა იგი, შემდგომი მისი რამდენი და როგორი სახის დამტკიცება შესრულდა, რომელი ქვეყნის მათემატიკოსები იყვნენ დაინტერესებული თეორემის დამტკიცებითა და მისი გამოყენებით და ა.შ. აღვნიშნოთ რამოდენიმე მათგანი, თუ რას წერდნენ ადრე.

1) ჩვენ არ ვიცით, როგორ გახდა ცნობილი პითაგორას თეორემა ბაბილონელებისათვის. როგორც ეგვიპტელები, ისე ბაბილონელები თავიანთი ჩატარებული ცდების საფუძველზე ცდილობდნენ ეჩვენებინათ, თუ როგორ მიიღეს თავისი შედეგები. მათი ყოველი მოსაზრება წინასწარმეტყველება უფრო იყო. მომავალი თაობა იზრდებოდა ევკლიდეს მკაცრ შედეგებზე, ხოლო აღმოსავლური განსჯის ხერხი უცნაურ და არადამაკმაყოფილებელ შთაბეჭდილებას ტოვებდა. ძველინდური მათემატიკის შესწავლის საქმეში დიდი იყო საბერძნეთის, ჩინეთის და ბაბილონის გავლენა. მას დიდი და განმსაზღვრელი მნიშვნელობა ჰქონდა და პითაგორას თეორემა ძირითადად შეისწავლებოდა არა როგორც კავშირი მარკუთხა სამკუთხედის სამი გვერდის სიგრძეებს შორის, არამედ – როგორც დამოკიდებულება სამი კვადრატის ფართობთა შორის [1].

2) პითაგორას და სხვა დიდი მეცნიერების დაფასებაზე და ყურადღებაზე მეტყველებს ლოგარითმული ცხრილების გამოცემა რუსეთში, რომელიც მეზღვაურებისთვის იყო განკუთვნილი, დაიბეჭდა ვ.ა. კარპიანოვის სტამბაში (1728). ეს სტამბა იყო პირველი რუსული წიგნების გამომცემელი. კარპიანოვმა მონაწილეობა მიიღო მაგნიცკის არითმეტიკის დაბეჭდვაშიც. არითმეტიკის გამოყენების შესახებ მაგნიცკის წიგნისათვის მან მოამზადა მომხიბლავი და საინტერესო

პლაკატები და შეამკო იგი გეომეტრიული ხელსაწყოების სურათებით კრემლის სახეებით (1705). მაგნიცკის წიგნში წარმოდგენილი იყო კრემლის კედლებზე გამოსახული შესანიშნავი სწავლულების პითაგორას, არქიმედის, პტოლომეის, ტიხო ბრაგეს და სხვების, მათ შორის კოპერნიკის პორტრეტები. მაგნიცკის წიგნში მოყვანილია მრავალი ამოცანა პითაგორას თეორემის და მისი სივრცითი ანალოგების (ცილინდრის განმარტებაზე ტოლი სიმაღლითა და დიამეტრით, სფეროს ტოლდიდი კუბის და სხვა) შესახებ [2].

3) რამდენიმე რედაქციით ჩვენამდე მოაღწია ძველ ინდურმა ნაწარმოებმა „შულბა-სუტრამ“, რაც თოკის წესს ნიშნავს. ისევე, როგორც ყოველ გეომეტრიულ გამოსახულებაში, ამ ნაშრომშიც მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია პითაგორას თეორემას შესაბამისი ნახაზით. თეორემა ასეა წარმოდგენილი: მართკუთხედის დიაგონალი იქმნება იმ ორი ფართობით, რომლებიც მიიღებიან ცალცალკე მისი ორი გვერდით. ეს შინაარსი ასე შეიძლება ავხსნათ: მართკუთხედის მოცემულ ორ განსხვავებულ გვერდზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამი მისი დიაგონალის კვადრატის ტოლია, ანუ დიაგონალზე აგებულ კვადრატის ფართობს უდრის. დიაგონალის სიგრძის გამოთვლა კი სიძნელეს აღარ წარმოადგენს.

„შულბა-სუტრას“ შემდგენლები იყენებდნენ ექვს მართკუთხა სამკუთხედს, რომელთა გვერდების სიგრძეები მთელი რიცხვებით გამოისახებოდა: 3,4,5; 5,12,13; 8,15,17; 7,24,25; 12,35,37; 15,36,39. ამ და მათი მსგავსი სამკუთხედებით ადგენდნენ ტოლფერდა ტრაპეციებს. პითაგორას თეორემის დახმარებით ხდებოდა მოცემული კვადრატის გაორკეცება, გასამკეცება და ა.შ., აგრეთვე, ხდებოდა მოცემული მართკუთხედის კვადრატად გარდაქმნა, ე.ი. როგორი უნდა იყოს კვადრატის გვერდი, რომ მისი ფართობი იყოს მოცემული მართკუთხედის ფართობის ტოლი.

„შულბა-სუტრაში“ მოცემულია ზუსტი და მიახლოებითი წესები, რომელთა დახმარებითაც მოიძებნება სამკუთხედების, პარალელოგრამების, ტრაპეციების ფართობები და პრიზმების, წაკვეთილი პრიზმების, ცილინდრების მოცულობები [3].

4) პითაგორამ და პითაგორელებმა შექმნეს მათემატიკა როგორც მეცნიერება, მათმა სკოლამ სასწრაფოდ შექმნა პლანიმეტრია, დაამკვიდრეს ირაციონალური რიცხვის არსებობა, შექმნეს მოძღვრება პროპორციათა შესახებ, შემოიღეს ახალი მეთოდი ალგებრული ფორმულათა გრაფიკული დახასიათების შესახებ, მაგალითად მათ ორი წევრის ჯამის კვადრატი დაახასიათეს გეომეტრიულად. შემოიღეს მათემატიკური ტერმინები: სიდიდე, წერტილი, ხაზი, ზედაპირი, სხეული, კუთხე; ფიგურებს და რიცხვებს, რომლებიც წარმოდგენილი იყო გეომეტრიასა და არითმეტიკაში, პრაქტიკულად იყენებდნენ გეოდეზიასა და ლოგისტიკაში. პითაგორისა და პითაგორელების ყველა გამოკვლევა მოცული იყო საიდუმლოებით. შეუძლებელი იყო გაგვერჩია რა ეკუთვნოდა მასწავლებელს (პითაგორას) და რა ეკუთვნოდა მოწაფეებს. მიუხედავად იმისა, რომ კვლევითი შედეგების შესახებ არაა შემორჩენილი არავითარი ხელნაწერი, არ წავაწყდებით წინააღმდეგობას გამოვიჩინოთ ინიციატივა და არსებითი საკითხები მივაწეროთ პითაგორას, ხოლო მათი რეალიზაცია-ადრეული პერიოდის მის სკოლას.

პითაგორელებს ალგებრული ფორმულების გეომეტრიული სახით წარმოდგენებს „გეომეტრიული ალგებრა“ უწოდეს. ასეთი „გეომეტრიული ალგებრის“ დახმარებით პითაგორელები სრულიად დაეუფლნენ მეორე ხარისხის განტოლებებს. სახელგანთქმული „პითაგორას თეორემა“ იყო ცნობილი ადრეც ამა თუ იმ კერძო შემთხვევებში, მაგრამ პითაგორამ იგი განაზოგადა მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებისათვის და მოგვცა ფორმულირება რაციონალური რიცხვების მოძებნის შესახებ, ე.ი. $x^2+y^2=z^2$ განუსაზღვრელი განტოლება გამოსახა თანამედროვე სახით და მოგვცა მისი მთელ რიცხვებში ამოხსნა [4]. კერძოდ, თუ x კენტი რიცხვია, მაშინ განტოლებას აკმაყოფილებს ტოლობები

$$y=\frac{x^2-1}{2} \quad \text{და} \quad z=\frac{x^2+1}{2}.$$

5) XVII საუკუნის რუსულ გეომეტრიულ ხელნაწერებში არაა აღნიშნული, თუ როდის აქვს ადგილი პითაგორას თეორემას, და ამიტომ ორ A და B პუნქტებს შორის

მანძილის გამოთვლის დროს, როცა ცნობილია მათი დაშორებები C პუნქტამდე, ვსარგებლობთ პითაგორას თეორემის შესაბამისი ტოლობით (როცა $\angle ACB = 90°$):

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 .$$

ამ ფორმულით სარგებლობდნენ დამოუკიდებლად იმისა, თუ როგორი კუთხე იქნება C წვეროსთან [5].

6. არსებობს პითაგორას თეორემის ორი დამტკიცება ევკლიდეს მიერ, ამიტომ სინამდვილეში მხოლოდ „პითაგორას თეორემის" დამტკიცება პირდაპირ, მიეწერებოდა ევკლიდეს. ალბათ იმიტომ, რომ თეორემის დამტკიცების შესახებ პითაგორას ხელნაწერი არ არსებობს. გადმოცემები ადასტურებს, რომ თეორემის დამტკიცება ევკლიდეს დამტკიცებებზე ადრე იყო ცნობილი, თანაც პითაგორა ევკლიდეზე ადრე მოღვაწეობდა...

პითაგორელები რიცხვებს ყოფდნენ კენტ და ლუწ რიცხვებად; მათ შენიშნეს, რომ კენტ რიცხვთა ჯამი 1-დან $(2n+1)$ -მდე ყოველთვის სრული კვადრატია. ასე მაგალითად, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2, \cdots,$ $1+3+5+7+\cdots+2n-1=$ $=\dfrac{1+2n-1}{2}\cdot n = n^2$ და $1+3+5+7+\cdots+(2n+1)=\dfrac{1+2n+1}{2}(n+1)=(n+1)^2$.

რადგან პითაგორას სკოლა და პითაგორას ცხოვრება მოცულია მითიური ბურუსით. ჩვენ შეგვიძლია ერთმხრივ გონივრული საფუძვლით დავამტკიცოთ, რომ ის დაიბადა კუნძული სამოსზე, მეცნიერებას ეუფლებოდა ეგვიპტეში და, შემდეგ, მოგვიანებით დაბრუნდა სამშობლოში. შეიძლება ის იყო ბაბილონშიც. მან მარცხი განიცადა თავის მცდელობაში დაეფუძნებინა სკოლა სამოსში, ის, მიყვებოდა რა ცივილიზაციის მსვლელობას, გადასახლდა კროტონში (სამხრეთ იტალიაში – დიდ საბერძნეთში). მან იქ დაარსა გარკვეული წესდებას დაფუძნებული პითაგორული საძმო. საძმოს წესდება თავისი განსაკუთრებულობებით ატარებდა მასონური სიცრუის ხასიათს. როგორც აღნიშნული იყო საძმოს წევრებს ეკრძალებოდა სკოლის აღმოჩენებისა და სწავლების გახმაურება. ამიტომ ამჟამად შეუძლებელია ვთქვათ კერძოდ ვის შეიძლება მიეკუთვნოს პითაგორელთა სხვადასხვა აღმოჩენები. პითაგორელთა შორის არსებობდა

ჩვეულება მიწერებოდა ყველა აღმოჩენა საძმოს (სექტის) დიდ დამფუძნებელს. დასაწყისიდან პითაგორელთა სკოლა იფურჩქნებოდა. (ვითარდებოდა), შემდეგ კი ის გახდა საეჭვო თავისი მისტიკური წეს-ჩვეულებების გამო. პოლიტიკური პარტიის მოსაზრებით ქვედა იტალიაში დაანგრიეს სახლი, რომელიც სკლას ეკუთვნოდა. პითაგორა გაიქცა და მოკლული იქნა მეტაპონტში: პითაგორას საძმო დაიშალა, მაგრამ სკოლამ კიდევ გააგრძელა არსებობა დაახლოებით ორასი წლის ხანგრძლივობით.

როგორც თალესი, პითაგორაც არ წერდა მათემატიკურ თხზულებებს. ევდომოვ ობზორი ამბობს: პითაგორამ გარდაქმნა გეომეტრიის მეცნიერება თავისუფალი შესწავლის ფორმით, მან გაარჩია მისი პრინციპები საფუძვლად...

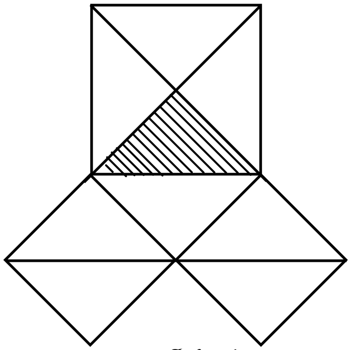
მრავალი ძველი და ახალი მკვლევარი შენიშნავს, რომ თვით პითაგორას უნდა მიეწეროს კარგად ცნობილი თვისება (თეორემა) მართკუთხა სამკუთხედისა. პითაგორამ შეიძლება გაიგო ეგვიპტელებისგან, რომ თეორემა სამართლიანია, როცა სამკუთხედის გვერდები არის შესაბამისად 3, 4 და 5. ამბობენ, რომ პითაგორა ზეიმობდა ამ დიდი აღმოჩენის შესახებ და აღტაცებულმა შესწირა ღმერთს ხარი (თუ რამოდენიმე ხარი). ეს ამბავი ლეგენდას უფრო ჰგავს.

კანტორი თვლიდა, რომ პითაგორას თეორემა პირველად დამტკიცებული იყო კერძო შემთხვევაში ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედისათვის (იხ. ნახ. 1). ბერძნული გეომეტრიის აღმოცენების დროს კი მოფიქრებული იყო პითაგორას თეორემის მრავალი დამტკიცება ნებისმიერი მათკუთხა სამკუთხედისათვის (მაგალითად, Ю. Виннеръ. Сорок шесть доказательствъ Пиθагоровой теоремы Нѣмецкий переводъ F. Graaf, Leipzig, 1980 და სხვა).

...პითაგორამ მოიფიქრა წესი მთელი რიცხვების მოძებნის შესახებ, რომლებიც წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებს: $2n+1$ უნდა მივიღოთ სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძედ, რიცხვი $\frac{1}{2}\left[(2n+1)^2-1\right]=2n^2+2n-$ მეორე გვერდის სიგრძედ, რიცხვი $2n^2+2n+1-$ჰიპოტენუზის სიგრძედ.

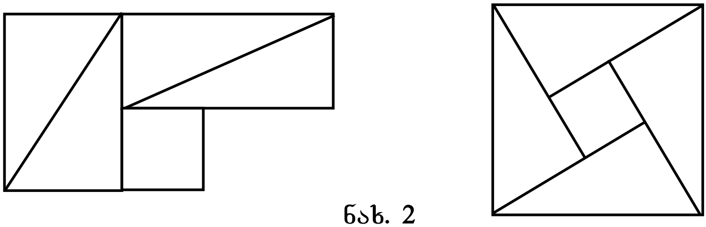
თუ $n=5$, სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად იქნება 11, 60, 61. ეს წესი გვაძლევს მხოლოდ იმ სამკუთხედებს, რომელთა ჰიპოტენუზა ერთით მეტია ერთერთ კათეტზე.

მეცნიერება რიცხვების შესახებ, როგორც ცალკე მეცნიერება და განსხვავებული ხელოვნება გამოთვლისა პითაგორელთა განსაკუთრებულ ყურადღებას იქცევდა.



ნახ. 1

საინტერესოა ინდოელთა გამოკვლევები პითაგორას თეორემის დამტკიცების შესახებ, კერძოდ ბხასკარას მონაცემები. ის კვადრატის შიგნით ხაზავს მართკუთხა სამკუთხედს ოთხჯერ (იხ. ნახ. 2). სამკუთხედები ჰიპოტენუზაზეა აგებული, ისე რომ შიგნით რჩება პატარა კვადრატი, რომლის გვერდი კათეტების სხვაობის ტოლია. პატარა კვადრატი და სამკუთხედები ყველა კვადრატის ნაწილებია. ბხასკარამ აჩვენა, რომ პატარა კვადრატი და მართკუთხა სამკუთხედები ერთად შეადგენენ კათედების კვადრატების ჯამს. „შეხედე", ამბობს ბხასკარა და ის ერთ სიტყვასაც არ უმატებს თეორემის ახსნას.

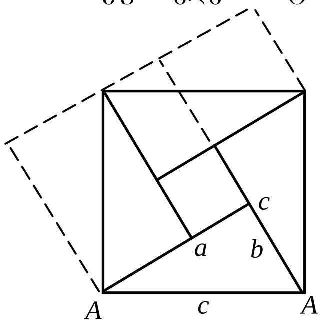


ნახ. 2

ინდურ მწერლებს არ გააჩნიათ წესი მოგვცენ დამტკიცება ჩვეულებრივი მკაცრი ფორმით. ბრეტშნეიდერი ვარაუდობს, რომ დამტკიცება, რომელიც მოგვცა პითაგორამ, არსებითად ემსგავსება ბხასკარის ზემოთმოყვანილ დამტკიცებას. სხვა ადგილზე ბხასკარა იძლევა ამ თეორემის მეორე დამტკიცებას, როცა იგი უშვებს პერპენდიკულარს მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე და იხილავს შესაბამისად პროპორციებს, რომლებიც მიიღება მსგავსი სამკუთხედებისათვის. ეს დამტკიცება იმ დროისათვის რჩებოდა უცნობ დამტკიცებად ევროპაში, სანამ იგი ხელახლა არ აღმოაჩინა ვალისმა.

ინდოელი ბუდრახა და აპარტამბა გვაძლევენ უკვე ზოგად წესს კვადრატების დამატებისა და გამოთვლების შესახებ, რაც დაფუძნებულია პითაგორას თეორემაზე. ბიურკი კი ცდილობს აჩვენოს, რომ ინდოელების მიერ თეორემა მოძებნილია დამოუკიდებლად, შესრულებულია ბხასკარას მიერ და თითქოს არ განსხვავდება პითაგორას დამყკიცებისაგან. ნახაზ 2-ის მიხედვით, რომ კათეტების გაორკეცებული ნამრავლი, რომელსაც ემატება მათი სხვაობის კვადრატი, ტოლია მათი კვადრატების ჯამის, ე.ი. $2ab+(a-b)^2=a^2+b^2$. აქედან საწინააღმდეგოდ, თუ შევადარებთ მეორე ფიგურას პირველთან, შეიძლება მივიღოთ თეორემა ჰიპოტენუზის კვადრატის შესახებ. შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ ინდოელი მათემატიკოსების მსჯელობის სტილი ძალიან განსხვავდება ბერძელთა დამტკიცებების მკაცრი დიალექტიკური ფორმისაგან.

ბხასკარა ეყრდნობა რა მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობას, აყალიბებს პითაგორას თეორემას და საამისოდ იძლება ახსნა-განმარტებას ნახაზის აგების შესახებ. შემდეგ ამბობს: „დაალაგე რა ნაკვთის იგივე ნაწილები სხვადასხვანაირად, შეხედე“ (იხ. ნახ. 3 პუნქტირის გარეშე). ნაკვთის სხვანაირად წარმოდგენისათვის მათემატიკოსმა დ. ცხაკაიამ ნახაზი პუნქტირით შეავსო (ნახ. 3). ამის



ნახ. 3

შემდეგ ბხასკარას მოყავს თეორემის შინაარსი (იხ. ზემოთ. გვ. 11). პითაგორას თეორემის დამტკიცება ხდება ნახ. 3-ის მიხედვით როგორც მასზე გავლებული პუნქტირის დახმარებით, ისე მის გარეშე [7]:

$$c^2 = 4S_{\Delta ABC} + (a-b)^2 = 4\cdot\frac{ab}{2} + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 .$$

2. ძირითადი ნაწილი

(თეორემის დამტკიცებები)

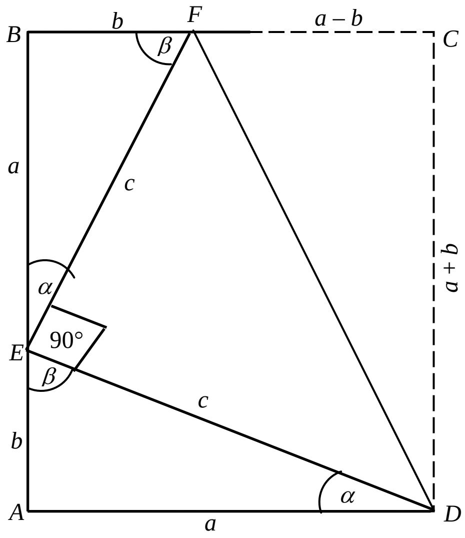
ნაკვეთ პირველში ჩვენ მოვიყვანეთ პითაგორას თეორემის რამოდენიმე დამტკიცება [8]. ვინაიდან არსებობს გადმოცემები ძველი დროიდან, რომ ცნობილია თეორემის 100 თუ 150-ზე მეტი განსხვავებული დამტკიცება, ამიტომ მკითხველს ჯერჯერობით დამატებით კიდევ ვთავაზობთ რამოდენიმე (რჩეულ) დამტკიცებას [9].

1) პითაგორას თეორემა ნახ. 4-ის მიხედვით შეიძლება დავამტკიცოთ ორი სახით (ნახაზის აგებისთვის საჭირო მსჯელობა არ მოგვყავს): 1) *ABCD* მართკუთხედის ფართობია $a(a+b)$. იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ცალკეული სამკუთხედების ფართობთა ჯამი:

$$a(a+b) = 2\cdot\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} .$$

ამ ტოლობის გამარტივებით ვრწმუნდებით, რომ პითაგორას თეორემა სამართლიანია; 2) *ABFD* მართკუთხა ტრაპეციის ფართობი, აგრეთვე ორი სახით დავწეროთ. მათგან ვადგენთ ტოლობას:

$$2\cdot\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} ,$$



ნახ. 4

რომლის გამარტივებით მივიღებთ, რომ $c^2 = a^2 + b^2$.

თუ $b = BF = FC = \frac{a}{2}$; მაშინ $c^2 = \frac{5a^2}{4}$; თუ $a = b$, მაშინ ტოლობა კიდევ უფრო მარტივდება და $c^2 = 2a^2$.

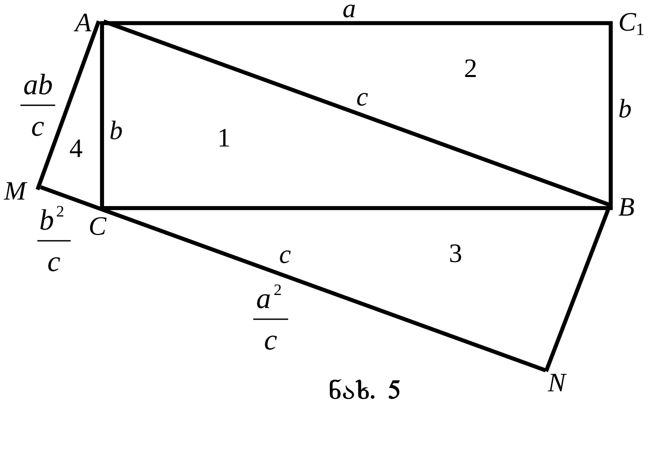
2). ვაგებთ ნახაზს (ნახ. 5). მოცემულ ACB მართკუთხა სამკუთხედს ვავსებთ მართკუთხამდე. მიღებული $ACBC_1$ მართკუთხედის c წვეროზე ვავლებთ AB დიაგონალის პარალელურ წრფეს. ამ წრფეზე ვუშვებთ AM და BN პერპენდიკულარებს. მიღებული ნახაზი შეიცავს 1, 2, 3 და 4 სამკუთხედებს. 1 და 2 ნომრით მოცემული სამკუთხედები ტოლია, $AC = C_1B = b$, $AC_1 = CB = a$, $AB = MN = c$. ΔAMC მსგავსია ΔABC-ის, ამიტომ

$$\frac{MC}{b} = \frac{b}{c} \text{ ანუ } MC = \frac{b^2}{c}$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$NC = \frac{a^2}{c} \text{ და } AM = NB = \frac{ab}{c}.$$

$AMNBC_1$ ფიგურის ფართობი ორი გზით ასე შეიძლება გამოვთვალოთ: 1) $AMNB$ მართკუთხედის ფართობს დავუმატოთ ΔABC_1-ის ფართობი; 2) $ACBC_1$ მართკუთხედის ფართობს დავუმატოთ AMC და CBN სამკუთხედების ფართობები.



ნახ. 5

ამ პირობების გათვალისწინებით მიიღება ტოლობა:

$$\frac{ab}{c}\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)+\frac{ab}{2}=ab+\frac{1}{2}\frac{ac}{c}\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right),$$

მიღებულ ტოლობას შეიძლება მივცეთ სახე

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{c}\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)=\frac{ab}{2}.$$

ამ ტოლობის $\frac{ab}{2}$-ზე შეკვეცით გვექნება:

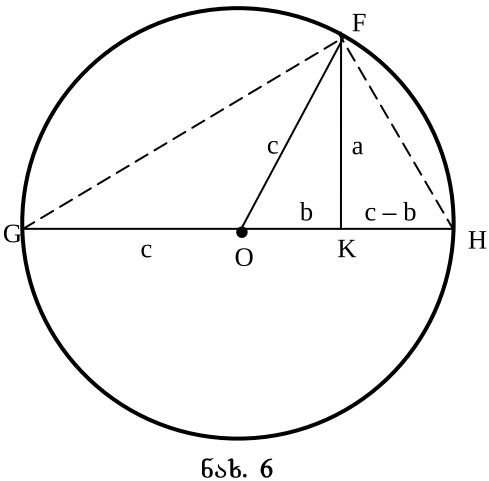
$$\frac{a^2+b^2}{c}=c \quad \text{ანუ} \quad c^2=a^2+b^2.$$

3) ავიღოთ წრეწირი (ნახ. 6). მისი ნებისმიერი F წერტილიდან დავუშვათ GH დიამეტრზე FK პერპენდიკულარი. F შევაერთოთ G, H წერტილებთან და O ცენტრთან. $\angle GFH=90°$, ხოლო ΔOFK მართკუთხაა. რადიუსი აღვნიშ-ნოთ C-თი, ე.ი. $C=OG= \; =OF=OH$. შემოვიღოთ აღნიშვნები $OK=b$ და $FK=a$. $FK^2=GK\cdot KH$, ანუ $a^2=(c+b)(c-b)$, საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა:

$$c^2=a^2+b^2.$$

4) ვაგებთ ნახაზს (ნახ. 7), რომლისთვისაც $b=AC$ მცირე წრეწირის მხები, ხოლო $AB=c$ მკვეთია, მცირე წრეწირი-სათვის $b^2=cy$.

ანალოგიურად $a=BC$ დიდი წრეწირის მხებია, $BA=c$ მკვეთია, $x=BD$ მისი გარე ნაწილია, ამიტომ $a^2=cx$. რადგან $x+y=c$, ამიტომ $a^2+b^2=cx+cy=c(x+y)=c^2$.



ნახ. 6

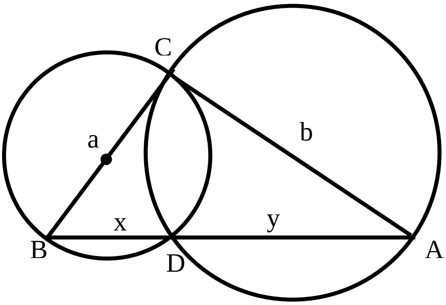
5) მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი ABC (ნახ. 8) $\angle ACB = 90°$, $AB \perp AE$, $AB = DE = c$, $DF \perp AC$, $DF = AC = b$, $BC \perp AE$, $BC = EF = a$. სამკუთხედ ADE-ს ფართობი ასე შეიძლება გამოვსახოთ:

$$S_{\Delta ADE} = \frac{DF \cdot AE}{2} = \frac{b \cdot (b + CE)}{2}.$$

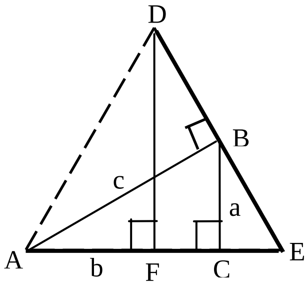
DFE და BCE სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ

$$\frac{BC}{DF} = \frac{CE}{FE},$$

საიდანაც



ნახ. 7



ნახ. 8

$$CE = \frac{BC \cdot FE}{DF} = \frac{a^2}{b}.$$

შევიტანოთ CE-ს მიღებული მნიშვნელობა ΔADE-ს ფართობის გამოსათვლელ ტოლობაში, მივიღებთ

$$S_{\Delta ADE} = \frac{b\left(b + \dfrac{a^2}{b}\right)}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

ნახაზ 8-ის მიხედვით გვაქვს, აგრეთვე, რომ

$$S_{\Delta ADE} = \frac{AB \cdot DE}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

ბოლო ორი ტოლობიდან გვაქვს დასამტკიცებელი იგივეობა

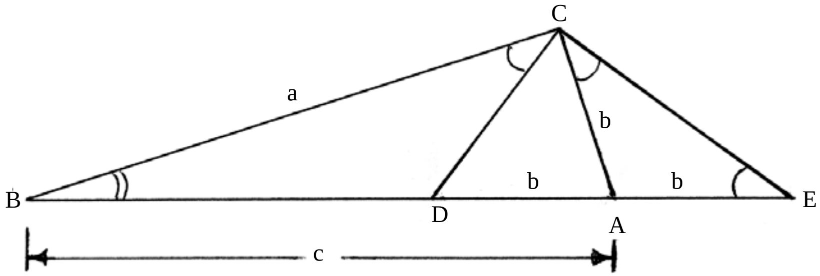
$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

6) ა) მართკუთხა სამკუთხედ ABC-ში $\angle ACB = 90°$, ასევე ΔEDC-ში $\angle DCE = 90°$ (ნახ. 9). ამ $90°$-იან კუთხეებს თუ დავაკლებთ $\angle ACD$-ს, დაგვრჩება ტოლი კუთხეები, ე.ი. $\angle BCD = \angle ACE$. რადგან ΔDBC-სა და ΔEBC-ს დამატებით კიდევ აქვთ საერთო B კუთხე (და ΔACE ტოლფერდაა), ამიტომ ისინი მსგავსია და გვექნება ტოლობა

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BC} \quad \text{ანუ} \quad \frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a} .$$

ამ იგივეობის საფუძველზე დასტურდება პითაგორას თეორემის სამართლიანობა.

ნახ. 9-ის აგების დროს ვიქცევით შემდეგნაირად: ჯერ გადავზომავთ b-ს ტოლ AD მონაკვეთს AB-ზე A წერტილიდან, ე.ი. $AD = CA = b$. C წერტილს შევაერთებთ D-თან. შემდეგ აღვმართავთ BA გვერდის გაგრძელების გადაკვეთამდე CD-ს მართობ CE-მონაკვეთს. რადგან $\beta = \gamma = 90° - \alpha$, ამიტომ $DA = CA = AE = b$ (CA მონაკვეთი არის მართკუთხა ΔDCE-ს DE ჰიპოტენუზის მედიანა), რაც ცხადია როგორც ნახ. 9-დან, ისე ნახ. 10-დან (დამხმარე ნახაზი ნახ. 9-თვის).

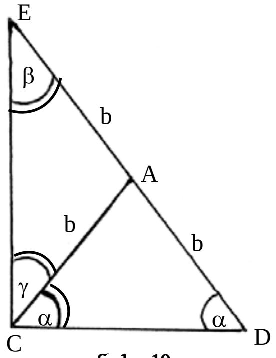


ნახ. 9

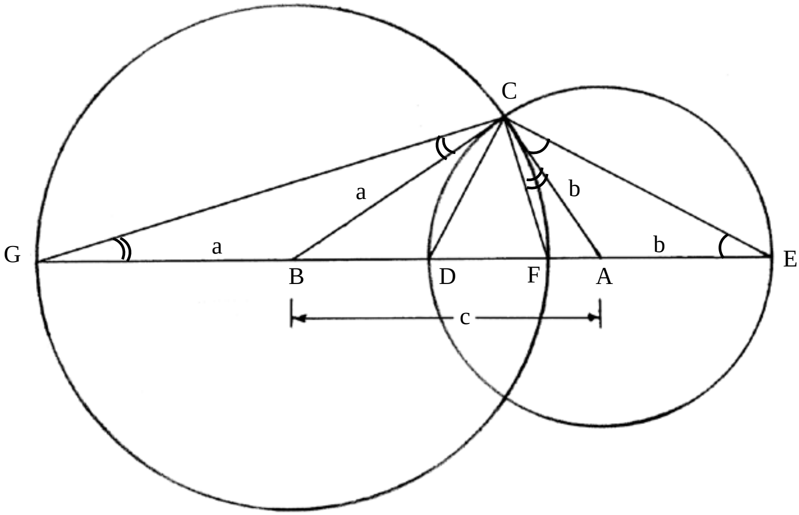
ბ) მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი ABC (ნახ. 11) $\angle BCA = 90°$. A და B ცენტრებით შესაბამისად შემოვხაზოთ $AC = b$ და $BC = a$ რადიუსებიანი წრეწირები. A და B ცენტრებზე გავავლოთ GE მონაკვეთი და C და E წერტილები

შევაერთოთ ABC სამკუთხედის C წვეროსთან. როგორც წრეწირის რადიუსები $BG = BC = BF = a$ და $AE = AC = AD = b$. ΔDBC მსგავსია ΔEBC, რადგან მათ აქვთ EBC საერთო კუთხე. გარდა ამისა, $\angle BCD = 90° - \angle DCA$ და $\angle AEC = \angle ACE = 90° - \angle DCA$, ე.ი. $\angle BCD = \angle AEC$. სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს ტოლობა

$$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a} \quad \text{ანუ} \quad a^2 = c^2 - b^2 .$$



ნახ. 10



ნახ. 11

ΔACG მსგავსია ΔAFC-სი. მათ საერთო აქვთ კუთხე GAC, ხოლო $\angle FCA = \angle BCG$. როგორც პერპენდიკულარულგვერდებიანი მახვილი კუთხეები. ამიტომ $\angle FCA = \angle CGA$. სამკუთ-ხედების მსგავსების გამო ვღებულობთ პროპორციას

$$\frac{b}{a+c}=\frac{c-a}{b} \quad \text{ანუ} \quad b^2=c^2-a^2 .$$

განხილული ორი ა და ბ შემთხვევები შედეგად გვაძლევს იდენტურ ტოლობებს, საიდანაც ცხადია პითაგორას თეორემის სამართლიანობა.

7) ABC მართკუთხა სამკუთხედში AO არის A კუთხის ბისექტრისა, BO კი – B კუთხისა. $CA=b$, $CB=a$ და $AB=c$.

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABO}+S_{BCO}+S_{\Delta ACO}=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{dr}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2}=rp\,;$$

p არის $\Delta\, ABC$-ს ნახევარი პერიმეტრი. ჰიპოტენუზა $c=(a-r)+$ $+(b-r)=a+b+c-2r-c=2p-2r-c$, საიდანაც $2r=2p-2c$ ანუ $r=p-c$ (ნახ. 12).

$\Delta\, ABC$-ს ფართობის გამოთვლისათვის გვექნება ტოლობა $p(p-c)=\frac{ab}{2}$, რაც ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=\frac{ab}{2} .$$

ამ იგივეობის გამარტივება მოგვცემს ტოლობას

$$(a+b)^2-c^2=2ab ,$$

ანუ

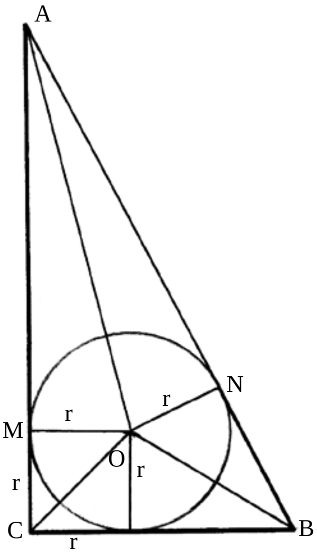
$$a^2+b^2=c^2 .$$

თეორემის დამტკიცება შეიძლება ასეც წარვმართოთ: ვისარგებლოთ ნახაზით, სადაც

$$r=p-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2} .$$

რადგან

$$S_{\Delta ABC}=rp=\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{ab}{2} ,$$

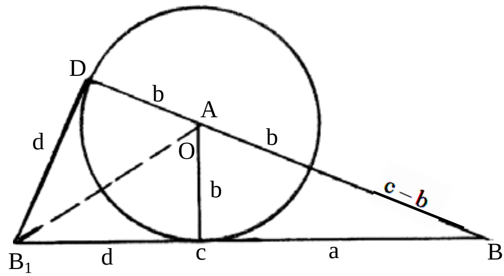


ნახ. 12

ამიტომ $(a+b)^2 - c^2 = 2ab$, საიდანაც შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

8) ჩვენ მოვიყვანეთ (იხ. ნაკვეთი I, ამოცანა 11) თეორემის დამტკიცება წრის გარეშე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხები და მკვეთი წრფეების შესახებ თვისების გამოყენებით. ახლა შეგვიძლია ვისარგებლოთ ე.წ. მოდიფიცირებული ნახაზით (იხ. ნახ. 13).



ნახ. 13

ΔABC მსგავსია ΔBB_1D-სი, ამიტომ გვექნება ტოლობა

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{d},$$

საიდანაც

$$d = \frac{b(b+c)}{a}.$$

ΔABC-ს ფართობია $\frac{ab}{2}$, ხოლო ΔB_1DB-სი $\frac{b(b+c)}{2}$. რადგან B_1DAC დელტოიდის ფართობია $2\cdot\frac{bd}{2} = bd$, ამიტომ გვექნება ტოლობა

$$bd + \frac{ab}{2} = \frac{d(b+c)}{2}$$

გარდავქმნათ ეს ტოლობა

$$2bd + ab = bd + dc;$$

$$ab = (c-b)\cdot d = (c-b)\cdot\frac{b(b+c)}{a} = \frac{b}{a}(c^2 - b^2).$$

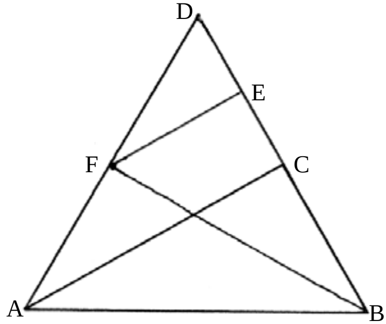
თუ მიღებულ

$$ab = \frac{b}{a}(c^2 - b^2).$$

ტოლობას გავამრავლებთ $\dfrac{a}{b}$-ზე, გვექნება

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{ანუ} \quad c^2 = a^2 + b^2 .$$

9) მოცემულ ΔABC-ში $\angle C = 90°$. გავაგრძელოთ *BC* გვერდი და მოვზომოთ *AB*-ს ტოლი *BD*. *A* წერტილი შევაერთოთ *D*-თან. მივიღებთ ტოლფერდა *ABD* სამკუთხედს (ნახ. 14). გავავლოთ ამ სამკუთხედის *BF* მედიანა და *AC*-ს პარალელური *EF* მონაკვეთი. ΔADC მსგავსია ΔBFE-სი, რადგან ისინი მართკუთხა სამკუთხედებია და $\angle DAC = \angle FBE$-ს, როგორც პერპენდიკულარულგვერდებიანი მახვილი კუთხეები. ცხადია, სამართლიანია ტოლობა $\dfrac{AC}{BE} = \dfrac{CD}{FE}$, ე.ი. $AC \cdot EF = BE \cdot CD$. მაგრამ



ნახ. 14

$$CD = BD - BC = AC - BC ;$$

$$BE = BC + \frac{CD}{2} = BC + \frac{(DB - BC)}{2} = BC + \frac{AB - BC}{2} = \frac{AB + BC}{2}$$

და $EF = \dfrac{AC}{2}$.

ამ პირობების გათვალისწინებით სამკუთხედების მსგავსების ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

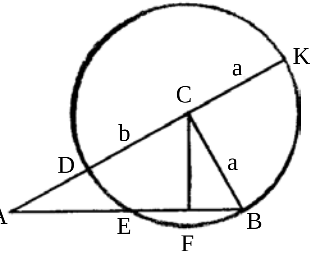
$$AC \cdot \frac{AC}{2} = \frac{AB + BC}{2}(AB - BC) \quad \text{ანუ} \quad \frac{AC^2}{2} = \frac{AB^2 - BC^2}{2} .$$

მაშასადამე, $AB^2 = BC^2 + AC^2$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

10) ავიღოთ ნებისმიერრადიუსიანი წრეწირი და მის გარეთ მდებარე *A* წერტილიდან *C* ცენტრზე გავატაროთ წრეწირის *AK* მკვეთი. *C* წერტილიდან *AK*-ზე აღვმართოთ *CB* პერპენდიკულარი. შევაერთოთ *A* და *B* წერტილები და *C* ცენტრიდან *AB* მკვეთზე, აგრეთვე, დავუშვათ *CF* მართობი. მართკუთხა სამკუთხედ *ABC*-ში $\angle ACB = 90°$, $CB = a$, $AC = b$

და $AB=c$ (ნახ. 15). წრის გარეშე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მკვეთის შესახებ თეორემის თანახმად გვექნება ტოლობა

$$AK\cdot AD=AB\cdot AE\ .$$



ნახ. 15

რადგან

$$AK=b+a \quad \text{და} \quad AD=b-a\,,$$

ამიტომ

$$AK\cdot AD=b^2-a^2=c(c-2BF)=AB\cdot AE\ .$$

სამკუთხედები ABC და BCF მსგავსია (მათ აქვთ საერთო B კუთხე და $\angle CAB=\angle BCF$ როგორც პერპენდიკულარულგვერდებიანი მახვილი კუთხეები). მათი მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

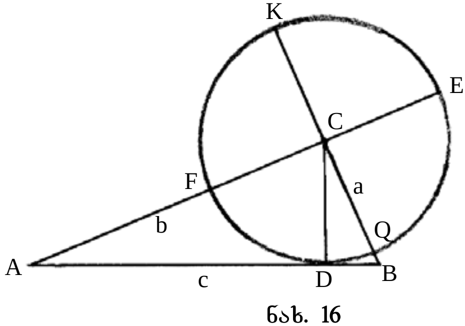
$$\frac{BF}{BC}=\frac{BC}{AB} \quad \text{ანუ} \quad \frac{BF}{a}=\frac{a}{c}\,,$$

საიდანაც $BF=\dfrac{a^2}{c}$. BF-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ წინა ტოლობაში, მივიღებთ

$$b^2-a^2=c\left(c-\frac{2a^2}{c}\right),$$

საიდანაც მიიღება ტოლობა $c^2=a^2+b^2$. თეორემა დამტკიცებულია.

11) მოცემულია მართკუთხა ABC $(\angle ACB=90^\circ)$. $AB=c$ წრეწირის მხებია, D შეხების წერტილია, $AC=b$, $BC=a$. წრეწირისადმი გავლებული მხებისა და მკვეთის შესახებ თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ (ნახ. 16):



ნახ. 16

$$AD^2 = AE \cdot AF = (b - CD)(b + CD) = b^2 - CD^2\,;\;\; b^2 = AD^2 + CD^2\,;$$

$$BD^2 = BQ \cdot BK = (a - CD)\ (a + CD) = a^2 - CD^2\,;\;\; a^2 = BD^2 + CD^2\,.$$

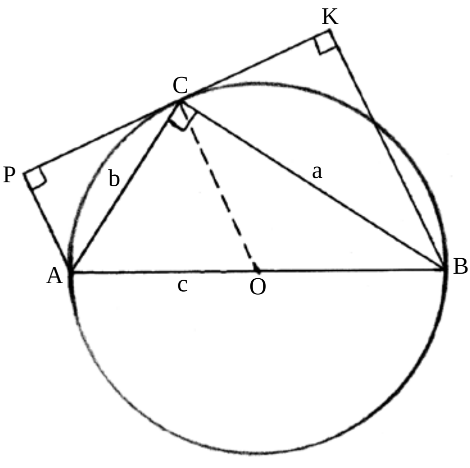
ახლა შევკრიბოთ ეს ტოლობები (რომლებიც ფაქტიურად პითაგორას თეორემის სამართლიანობასაც გვიჩვენებენ) და გამოვიყენოთ მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული პერპენდიკულარის თვისება. სათანადო გარდაქმნით მივიღებთ:

$$a^2 + b^2 = AD^2 + BD^2 + 2CD^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \cdot DB =$$

$$= (AD + DB)^2 = c^2\,.$$

მაშასადამე, $c^2 = a^2 + b^2$.

12) წრეწირზე, რომლის დიამეტრი $c = AB$, აღებულია ნებისმიერი C წერტილი. ეს წერტილი შეერთებულია A და B წერტილებთან, $AC = b$ და $BC = a$. მიღებულ მართკუთხა სამკუთხედის C წვეროზე ვავლებთ მხებ წრფეს, რომელზედაც A და B წერტილებიდან ვუშვებთ AP და BK პერპენდიკულარებს. ამ პერპენდიკულარების პარალელური იქნება OC რადიუსი PC იქნება CK-ს ტოლი (იხ. ნახ. 17). $ABKP$ ტრაპეცია მართკუთხაა და შეგვიძლია დავწეროთ:



ნახ. 17

$$A_{\Delta ACP} + S_{\Delta BCK} = \frac{AP \cdot CP}{2} + \frac{BK \cdot CK}{2} = \frac{AP + BK}{2} \cdot CP =$$

$$= OC \cdot \frac{PK}{2} = \frac{S_{ABKP}}{2} = S_{\Delta ABC}\,.$$

მაშასადამე, APC და BCK სამკუთხედების ფართობთა ჯამი ABC სამკუთხედის ფართობის ტოლია.

მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე ACP და წრეში ჩახაზული კუთხე ABC იზომებიან ერთიდაიგივე AC რკალის ნახევრით, ამიტომ ΔABC მსგავსია ΔACP-სი და გვექნება:

$$\frac{b}{c}=\frac{PC}{a}=\frac{AP}{b},$$

საიდანაც

$$PC=\frac{ab}{c} \quad \text{და} \quad AP=\frac{b^2}{c}.$$

სამკუთხედ ACP-ს ფართობი იქნება

$$S_{\Delta ACP}=\frac{CP\cdot AP}{2}=\frac{ab^3}{2c^2}.$$

ამ შემთხვევის ანალოგიურად, $\angle CAB=\angle BCK$, ΔABC მსგავსია ΔBCK-სი, $\frac{a}{c}=\frac{CK}{b}=\frac{KB}{a}$, $CK=\frac{ab}{c}$, $KB=\frac{a^2}{c}$ და $S_{\Delta BCK}=\frac{CK\cdot BK}{2}=\frac{a^3b}{2c^2}$.

რადგან $S_{\Delta ACP}+S_{\Delta BCK}=S_{\Delta ASC}$, ამიტომ

$$\frac{ab^3}{2c^2}+\frac{a^3b}{2c^2}=\frac{ab}{2},$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა $c^2=a^2+b^2$.

13) ნახ. 18-ის მიხედვით ΔABC და ΔADF-ის მსგავსებიდან გვაქვს ტოლობა

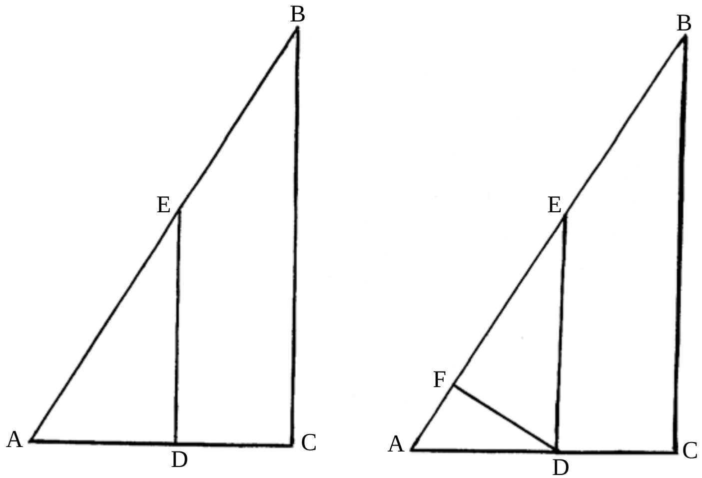
$$AF:AC=AD:AB \quad \text{ანუ} \quad AB\cdot AF=AC\cdot AD. \tag{1}$$

ΔABC მსგავსია ΔDEF-ის, ამიტომ

$$FE:BC=DE:AB, \quad \text{ანუ} \quad AB\cdot FE=BC\cdot DE. \tag{2}$$

ADE და ABC სამკუთხედების მსგავსებიდან ვღებულობთ ფარდობათა ტოლობას

$$AB:AE=CB:DE:=AC:AD,$$



ნახ. 18

საიდანაც ვღებულობთ ტოლობებს

$$AE = \frac{AB \cdot DE}{CB} \quad \text{და} \quad AD = \frac{AC \cdot DE}{CB}. \qquad (3)$$

შევკრიბოთ (1) და (2) ტოლობები და გავითვალისწინოთ რომ $AF + FE = AE$, მივიღებთ

$$AB + AE = AC \cdot AD + BC \cdot DE.$$

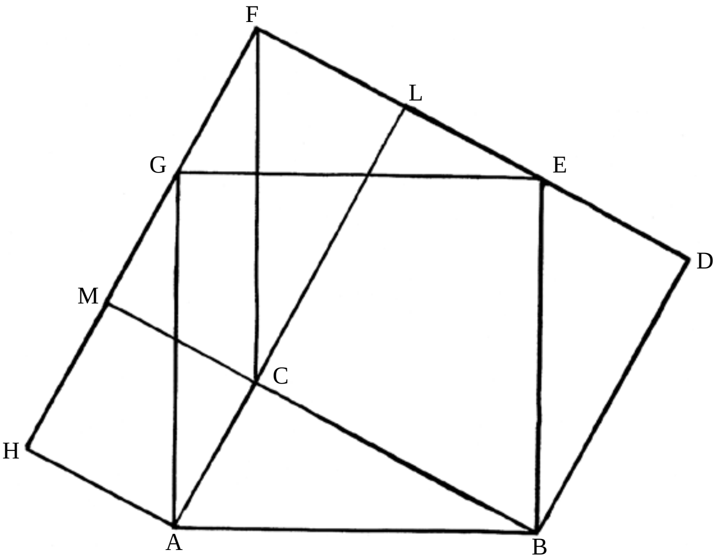
ეს ტოლობა (3) ტოლობების გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$AB \cdot \frac{AB \cdot DE}{CB} = AC \cdot \frac{AC \cdot DE}{CB} + BC \cdot DE.$$

ტოლობა შევკვეცოთ DE-ზე და გავამრავლოთ BC-ზე, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას

$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

14) მთლიანად $ABDFH$ ფიგურას ჯერ დავაკლოთ ΔABC-ს ტოლი სამი სამკუთხედი ΔAHG, ΔGFE და ΔEDB. დაგვრჩება AB ჰიპოტენუზაზე აგებული $AGEB$ კვადრატი. თუ ახლა იგივე ფიგურას გამოვაკლებთ ისევ ΔABC-ს ტოლ სამ განსხვავებულ სამკუთხედს: ΔABC-ს, ΔCMF-ს და ΔCFL-ს დაგვრჩება ΔABC-ს კათეტებზე აგებული $AHMC$ და $BCLD$ კვადრატები (ნახ. 19).



ნახ. 19

მაშასადამე, ფართობი $AGEB$=ფართობი$AHMC$+ფართობი $BCLD$ ანუ

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 .$$

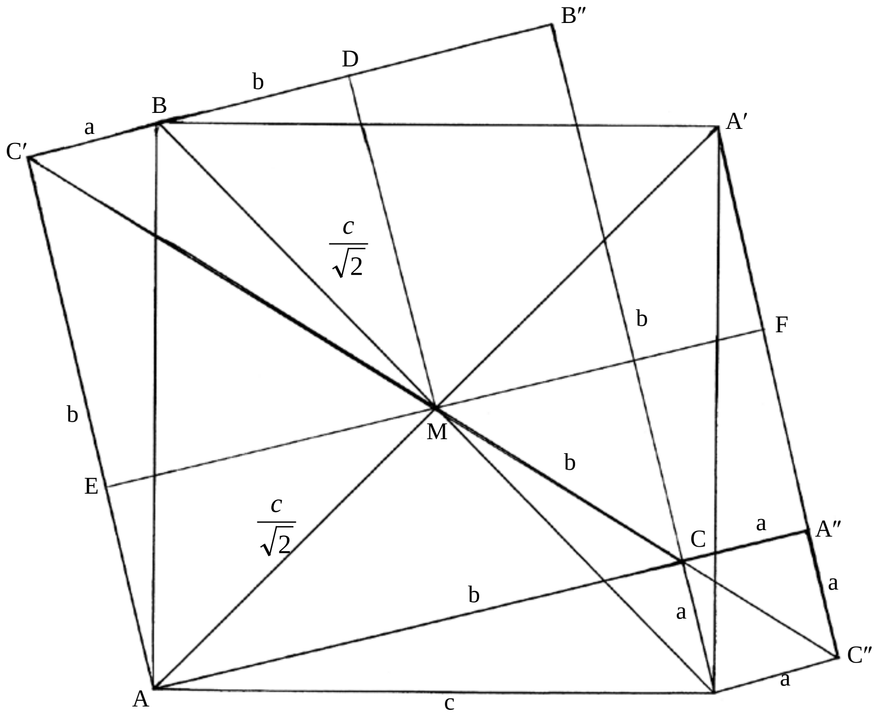
15) ნახაზ 20-ის მიხედვით გვაქვს ტოლობები:

1) ფართობი $AMB'C' =$ ფართობი $\Delta AMB' +$ ფართობი $\Delta AB'C' =$ $= \frac{c^2}{4} + \frac{ab}{2}$;

2) ფართობი $AMB'C' =$ ფართობი $\Delta MAC' +$ ფართობი $\Delta MB'C'$. $MB' = MB$, როგორც $ABA'B'$ კვადრატის დიაგონალის ნა-ხევრები. BB' არის $\Delta BB'B''$-ის ჰიპოტენუზა. დავუშვათ M წერტილიდან $C'B''$-ის მართობი MD, რომელიც იქნება $\Delta BB'B''$-ის შუახაზი, ამიტომ

$$MD = \frac{BB''}{2} = \frac{a+b}{2} .$$

ამავე დროს MD იქნება $\Delta MC'B'$-ის სიმაღლე (ფუძედ ვიღებთ $a = C'B'$ გვერდს). ამ პირობის გამო ფართობი



ნახ. 20

$$\Delta MB'C' = \frac{(a+b)a}{4}.$$

ახლა გამოვთვალოთ $\Delta MAC'$-ის ფართობი. $ACB''C'$ ფიგურა არის მართკუთხა ΔABC-ს $B = AC$ კათეტზე აგებული კვადრატი, ხოლო $\Delta AMC'$ მისი ნაწილია. $AC' = A'C'' = b$; $AM = MA' = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$; $\angle A'MC'' = \angle AMC'$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. $\angle MC''A' = \angle AC'M$ და $\angle MA'C'' = \angle MAC'$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. სამკუთხედების ტოლობების ნიშნების (პირველი და მეორე ნიშანი) თანახმად $\Delta AMC' = \Delta MA'C''$.

M წერტილზე გავავლოთ AA''-ის პარალელური EF მონაკვეთი. ცხადია, რომ $EM=\frac{EF}{2}=\frac{AA''}{2}=\frac{a+b}{2}$. შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $S_{\Delta AMC}=\frac{(a+b)b}{4}$, ამიტომ ფართობი

$$AMB'C'=\frac{(a+b)a}{4}+\frac{(a+b)b}{4}.$$

შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა

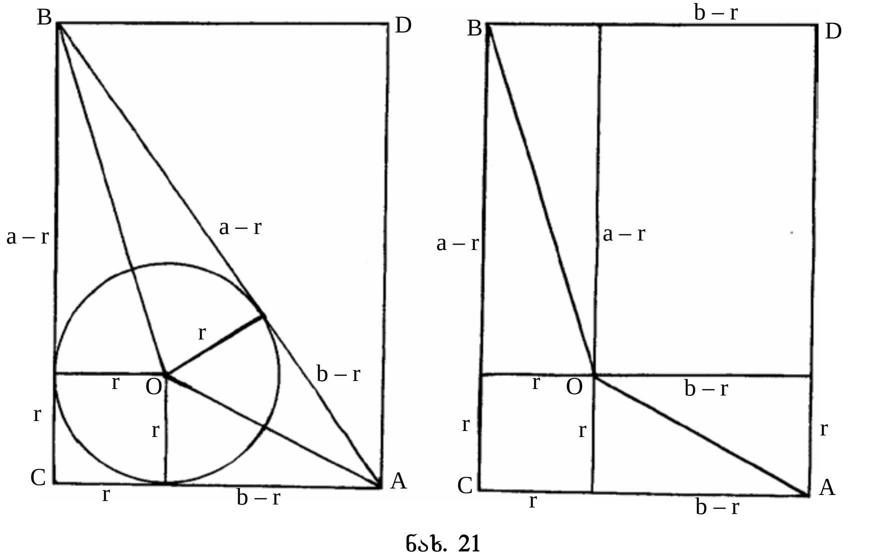
$$\frac{c^2}{4}+\frac{ab}{2}=\frac{(a+b)a}{4}+\frac{(a+b)b}{4},$$

საიდანაც

$$c^2+2ab=a^2+ab+ab+b^2.$$

მაშასადამე, $c^2=a^2+b^2$.

16) მართკუთხა სამკუთხედი ABC შევავსოთ მართკუთხედამდე და ვისარგებლოთ ნახაზ 21-ით (ნახაზი 21, ა და ნახ. 21, ბ). ნახაზზე მოცემული აღნიშვნების თანახმად გვექნება ტოლობები:



ნახ. 21

$$r^2 + r(a-r) + r(b-r) = \frac{ab}{2},$$

$$(a-r)(b-r) = \frac{ab}{2}.$$

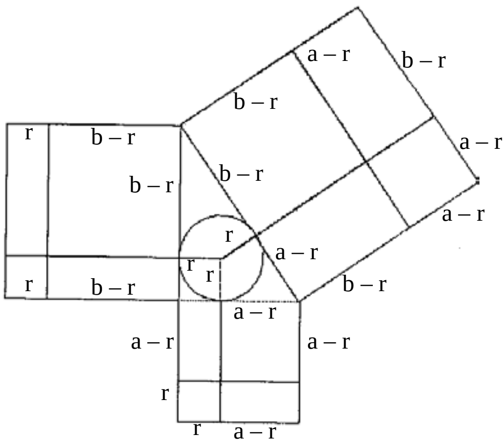
გავუტოლოთ ტოლობების მარცხენა მხარეები და გავითვალისწინოთ, რომ $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, მივიღებთ

$$(a+b)(a+b-c) = ab + 2\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.$$

ამ ტოლობის გამარტივება მოგვცემს დასამტკიცებელ ტოლობას

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

რომლის ილუსტრაციას წარმოადგენს ნახაზი 22.

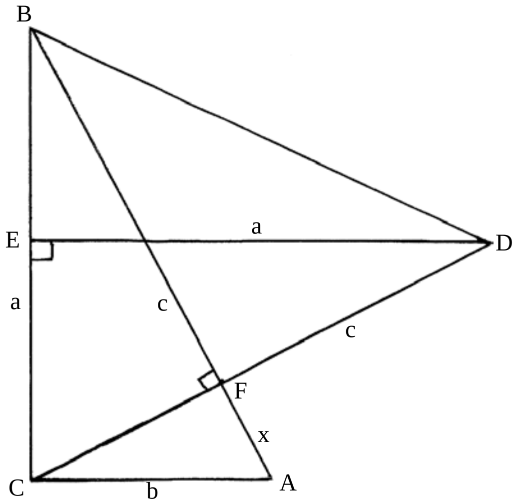


ნახ. 22

17) ნახაზ 23-ზე მართკუთხა სამკუთხედები ABC და CDE ტოლია და

ფართობი $\Delta BCD = \dfrac{BC\cdot ED}{2} = \dfrac{DC\cdot BF}{2}$,

ანუ



ნახ. 23

$$\frac{a \cdot a}{2} = \frac{c(c-x)}{2}.$$

რადგანაც $a^2 + cx = c^2$ და $b^2 = cx$, ამიტომ

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

18) ნახაზ 24-ის მიხედვით სამართლიანია დამოკიდებულება

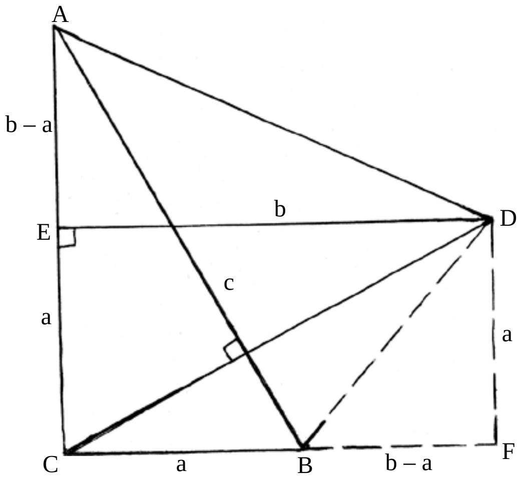
ფართობი $ACBD =$ ფართობი $\Delta BCD +$ ფართობი ΔACD, ანუ

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

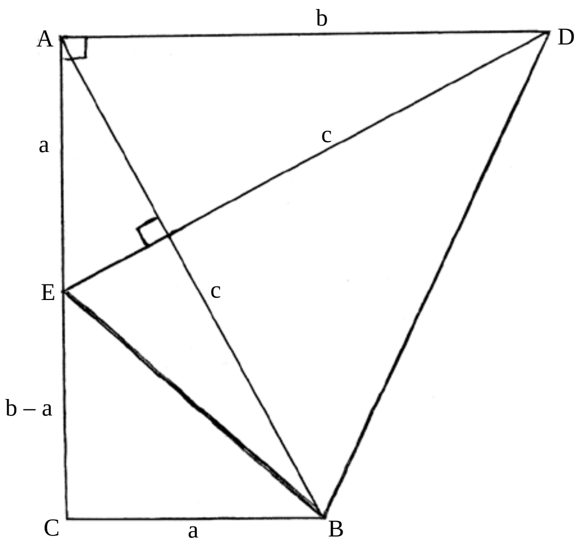
მაშასადამე, $c^2 = a^2 + b^2$.

19) ნახაზ 25-ის მიხედვით ფართობი $ABCD$=ფართობი $AEBD +$ ფართობი ΔBCE, მაგრამ

ფართობი $ACBD = \dfrac{AC(BC+AD)}{2} = \dfrac{b(a+b)}{2}$ და ფართობი $AEBD +$ $+$ ფართობი $\Delta BCE = \dfrac{c^2}{2} + \dfrac{a(b-a)}{2}$.



ნახ. 24



ნახ. 25

მაშასადამე,

$$\frac{b(a+b)}{2}=\frac{c^2}{2}+\frac{a(b-a)}{2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

20) ნახ. 26-დან გამომდინარეობს, რომ

ფართობი $ACFD=$ ფართობი $AEBD+$ ფართობი ΔBDF +
+ ფართობი ΔBCE ,

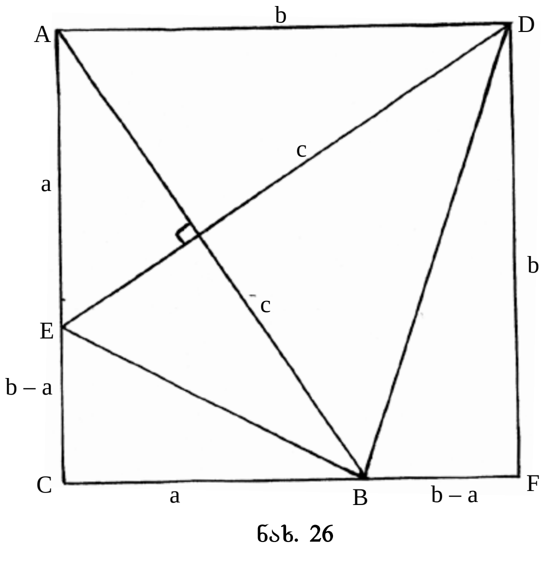
მაგრამ

ფართობი $ACFD=b^2$,

ფართობი $AEBD\dfrac{c^2}{2}$,

ფართობი $\Delta BDF=\dfrac{(b-a)b}{2}$,

ფართობი $\Delta BCE=\dfrac{a(b-a)}{2}$.



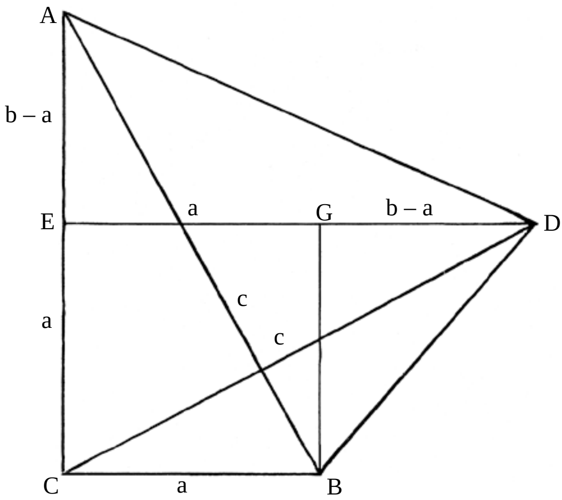
ნახ. 26

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები წინა ტოლობაში, გვექნება

$$b^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{(b-a)b}{2} + \frac{a(b-a)}{2},$$

რომლიდანაც შედეგად ვღებულობთ, რომ $c^2 = a^2 + b^2$.

21) ახლა თუ განვიხილავთ ნახაზ 27-ს, შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა



ნახ. 27

$$\text{ფართობი } ACBD = \text{ფართობი } \Delta AED + \text{ფართობი } \Delta BDG + \\ + \text{ფართობი } BCEG.$$

რადგან

$$\text{ფართობი } ACBD = \frac{c^2}{2},$$

$$\text{ფართობი } \Delta AED = \frac{b(b-a)}{2},$$

$$\text{ფართობი } \Delta BDG = \frac{(b-a)a}{2},$$

$$\text{ფართობი } BCEG = a^2,$$

ამიტომ

$$\frac{c^2}{2} = \frac{b(b-a)}{2} + \frac{(b-a)a}{2} + a^2 .$$

ამ ტოლობის გამარტივებით მივიღებთ დასამტკიცებლად ტოლობას

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

დასკვნა

პითაგორას თეორემის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა დიდია როგორც ცხოვრებაში, ისე სასწავლო პროცესში. იგი დამოუკიდებლად და ტრიგონომეტრიასთან ერთად წყვეტს მნიშვნელოვან ამოცანებს სატრანსპორტო, სამშენებლო, სამხედრო და სამთო საქმიანობებში, ასტრონომიაში და ანალიზურ გეომეტრიაში, სიმაღლეებისა და მიუვალ პუნქტებამდე მანძილის გაზომვაში. რაც შეეხება თეორემის წარმოდგენილ დამტკიცებებს, ისინი შეიძლება განიხილონ საშუალო სკოლის მოსწავლეებმა მათემატიკურ წრეებზე.

CONCLUSION

The theoretical and practical significance of Pythagorean theorem is great both in life and in learning process. It independently and together with trigonometria solves the important tasks in transportation, construction, military and mining activities, astronomy and analytical geometry, in the heights and in distance measurement between out-of-the-way points. As for proposed theorem provings, they may consider by secondary school students in mathematical circles.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Д.Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1984 (перевод с немецкого).
2. А.П. Юшкевич. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968.
3. А.И. Володарский. Ариабхата (к 1500-летию со дня рождения). – М.: Наука, 1977.
4. И.А. Гейберг. Естествознание и математика в классической древности. – М.-Л.: Объединение н.-т. Изд-во НКТП СССР, 1936 (перевод с немецкого).
5. Б.В. Гнеденко. Краткие беседы о зарождении и развитии математики. – М.-Л.: Академии педагогических наук РСФСР, 1946.
6. Флоріанъ Кэджори. Исторія элементарной математики съ указаніям на методы преподаванія. – Одесса: Matesis, 1917 (переводъ съ англійского).
7. დ. ცხაკაია. მათემატიკის ისტორია უძველესი დროიდან XVII საუკუნემდე. – თბილისი: საქ. განათლების სამინისტროს სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა, 1948.
8. გ. ყირმელაშვილი. პითაგორას თეორემა და მისი გამოყენება. ნაკვეთი I. – თბილისი, 2011.
9. Anthony Pakell. Puthagorean Theorem. – University of Chicago Press, Supported by ∃wkentures, 1995.

Si naar si